

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ**

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Константинов Олександр Володимирович

УДК 532.595

ДИСЕРТАЦІЯ

**Нелінійні задачі динаміки та керування
конструкціями з рідиною в режимі вимушених
коливань та параметричної взаємодії**

01.02.01 – теоретична механіка

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ **О.В. Константинов**

Науковий консультант: **Новицький Віктор Володимирович,**
доктор фізико-математичних наук, професор

АНОТАЦІЯ

Константинов О.В. Нелінійні задачі динаміки та керування конструкціями з рідиною в режимі вимушених коливань і параметричної взаємодії. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.01 «Теоретична механіка». – Інститут математики НАН України, Київ, 2021.

Дисертація присвячена дослідженню нових класів задач про нелінійні коливання складних механічних систем, складовими компонентами яких є великі рухомі маси рідини та резервуари, які виконують функції транспортування та зберігання рідини при різних видах параметричного збурення, зовнішнього збудження або керування.

Здійснено узагальнення класичної задачі Фарадея для таких механічних постановок задач: 1) резервуар рухається вертикально за заданим гармонічним законом і може здійснювати горизонтальні переміщення за рахунок поперечних коливань рідини (внесення в систему додаткового ступеня вільності – можливості руху резервуару в горизонтальній площині); 2) резервуар рухається вертикально за заданим гармонічним законом і може здійснювати кутові коливання відносно центру мас системи (внесення в систему додаткового ступеня вільності – можливості кутових рухів резервуару); 3) резервуар рухається вертикально, але не за заданим гармонічним законом, а під дією гармонічної сили; 4) резервуар рухається вертикально під дією гармонічної сили та може здійснювати горизонтальні переміщення; 5) резервуар рухається вертикально під дією гармонічної сили та може здійснювати кутові коливання відносно центру мас системи. Для вище означених узагальнень задачі Фарадея побудовано зони стійкості та нестійкості, проведено якісний та спектральний аналіз коливань вільної поверхні рідини та резервуару. Встановлено, що динамічні процеси в системі розвиваються як сукупність параметричного резонансу і

вимушених коливань. При наявності додаткових ступенів вільності в узагальненій задачі Фарадея можливий вихід системи на нелінійний режим коливань на будь-якій частоті.

Здійснено побудову та апробацію алгоритмів керування (обчислення активної зовнішньої сили, яка підведена до резервуару), яке забезпечить рух резервуару за заданим законом (програмний рух) при наявності постійно діючого збурення – коливань вільної поверхні рідини. На основі лінійної моделі у збуреннях (відхиленнях переміщень та швидкостей від програмних значень) на основі методів модального керування, еталонної моделі та мінімізації квадратичного функціоналу якості побудовано алгоритми керування із зворотним зв'язком. Керування зі зворотним зв'язком на основі лінійної системи у збуреннях може бути використано для забезпечення «комфортних» рухів резервуару, тобто при відсутності великих збурень вільної поверхні рідини. Для задач керування при наявності великих збурень вільної поверхні рідини побудовано алгоритми керування на основі компенсації головного вектору сил тиску рідини на стінки резервуару та варіаційного принципу найменшого примушення Гауса. Показано, що обидва підходи забезпечують прийнятну для практики точність виконання програмного руху при будь-яких високо інтенсивних навантаженнях на систему, крім того, алгоритм керування на основі варіаційного принципу Гауса дозволяє мінімізувати енергетичні витрати на керування.

Досліджено умови та особливості виходу коливань вільної поверхні рідини під дією зовнішньої сили на усталений режим при відсутності та наявності узагальненої дисипації або капілярності. Дослідження проводились для різних частотних діапазонів збудження руху системи. За відсутністю сил поверхневого натягу і дисипації вихід коливань вільної поверхні рідини на усталений режим в класичному сенсі не відбувається, коливання мають нестационарний характер. Тільки при зростанні в рідині узагальненої дисипації в системі спостерігається вихід на усталений режим.

Також встановлено, що наявність сил поверхневого натягу забезпечує більш швидкий вихід системи на резонансний режим, однак наявність сил поверхневого натягу по контуру контакту “пом’якшує” резонанс за рахунок збільшення енергетичного внеску осесиметричних форм коливань.

Ключові слова: рідина з вільною поверхнею, варіаційні методи, задача Фарадея, параметричний резонанс, зони стійкості та нестійкості, математичні методи керування рухом, вимушені коливання.

ABSTRACT

Konstantinov O.V. Nonlinear problems of dynamics and control of structures with fluid in the mode of forced oscillations and parametric interaction. – Manuscript.

Doctor of Sciences thesis on Physics and Mathematics, speciality 01.02.01 – theoretical mechanics. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2021.

The dissertation deals with the research of new classes of problems of nonlinear oscillations of complex mechanical systems, the components of which are large moving masses of liquid and reservoirs, which perform the functions of liquid transport and storage under different types of parametric perturbation, external disturbance or control.

A generalization of the classical Faraday problem is done for the following mechanical problems 1) the tank moves vertically according to a given harmonic law and can perform horizontal motion due to transverse oscillations of the fluid (additional degree of freedom is added in the system, i.e., the potential of the tank motion in the horizontal plane); 2) the tank moves vertically according to the given harmonic law and can carry out angular oscillations about the center of masses of system (additional degree of freedom is added in the system, i.e., the potential of angular motion of the tank); 3) the tank moves vertically, but not according to a given harmonic law, but under the action of a harmonic force; 4) the tank moves vertically under the action of a harmonic force and can perform horizontal motion; 5) the tank moves vertically under the action of harmonic force and can perform angular oscillations about the center of mass of the system. For the above-mentioned generalizations of the Faraday problem, domains of stability and instability are constructed, and a qualitative and spectral analysis of the oscillations of the free surface of the liquid and the reservoir is performed. It is established that dynamic processes in the system are developed as a set of

parametric resonance and forced oscillations. Under the presence of additional degrees of freedom in the generalized Faraday problem the system can enter a nonlinear mode of oscillations for any frequency.

Algorithms of motion's control of reservoir with liquid with a free surface is constructed and tested (calculation of the active external force applied to the tank), which will provide the tank motion according to a given law (prescribed motion) under the presence of constant perturbations, i.e., oscillations of the free surface of the liquid. Based on the linear model in perturbations (deviations of displacements and velocities from the program values) on the basis of modal control methods, reference model and minimization of the quadratic quality functional, feedback control algorithms are built. Feedback control based on a linear system in perturbations can be used to provide «comfortable» tank movements, without large perturbations of the free surface of the liquid. or control problems under the presence of large perturbations of the free surface of the liquid, control algorithms are constructed on the basis of compensation of the main vector of fluid pressure forces on the tank walls and the variational principle of least Gaussian coercion. It is shown that both approaches provide acceptable for practice accuracy of program motion for any high-intensity loads on the system, in addition, the control algorithm based on the Gaussian variation principle allows the minimization of energy costs for control.

The conditions and specific features of the oscillations reaching the free surface of a liquid under the action of an external force at a steady state in the absence and presence of the generalized dissipation or capillarity are studied. The research was performed for different frequency ranges of excitations of the system motion. In the absence of surface tension and dissipative forces, the the steady state oscillations of the free surface of the liquid in the classical sense do not occur, the oscillations are non-stationary. Only at with the growth of the generalized dissipation in the liquid the system reaching of the steady mode is observed. It is also established that the presence of surface tension forces provides a faster output of the system to the resonant mode, but the presence of

surface tension forces along the contact contour "softens" the resonance by increasing the energy contribution of axisymmetric oscillations.

Keywords: liquid with free surface, variational methods, Faraday problem, parametric resonance, areas of stability and instability, mathematical methods of motion control, forced oscillations.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Limarchenko O.S. Generalizations of the Faraday problem in mechanical system "reservoir–liquid with a free surface" / O.S. Limarchenko, O.V. Konstantinov // Mathematical Modeling and Computing. – 2014. – Vol. 1, №1. – P. 45-60.
2. Konstantinov A.V. Nonlinear Dynamics of the Combined Motion of a Tank and a Fluid Partially Filling It / A.V. Konstantinov, O.S. Limarchenko // International Applied Mechanics. – 2016. – 52. – P. 520-528.
3. Konstantinov A.V. Problem of the Parametric Oscillations of a Noncylindrical Tank Partially Filled with a Fluid / A.V. Konstantinov, O.S. Limarchenko, V.N. Mel'nik, I.Yu. Semenova // International Applied Mechanics. – 2016. – 52. – P. 599-604.
4. Konstantinov A.V. Generalizing the Faraday Problem of the Parametric Oscillations of a Cylindrical Tank Partially Filled with a Fluid / A.V. Konstantinov, O.S. Limarchenko, V.N. Mel'nik, I.Y. Semenova // International Applied Mechanics. – 2017. – 53. – P. 59-66.
5. Konstantinov A.V. Effect of the Viscosity and Capillarity of Fluid on the Nonlinear Dynamics of a Tank Partially Filled with a Fluid / A.V. Konstantinov, O.S. Limarchenko // International Applied Mechanics. – 2017. – 53. – P. 130-138.
6. Konstantinov A. Effect of combine motion on variation of resonance properties in liquid sloshing problems /A. Konstantinov, O. Limarchenko, K. Semenovich // Mathematical Modeling and Computing. – 2015. – Vol. 2, N 1. – P. 48-57.
7. Konstantinov A.V. Dynamic Methods of Damping the Oscillation in Structure–Free-Surface Fluid System / A.V. Konstantinov, O.S. Limarchenko, V.V. Lukyanchuk, A.A. Nefedov // International Applied Mechanics. – 2019. – 55. – P. 58-67.

8. Konstantinov A.V. Motion Control for Structure with Liquid Based on Compensation of the Liquid Hydrodynamic Response / A.V. Konstantinov, V.O. Limarchenko, O.S. Limarchenko // Journal of Automation and Information Sciences. – 2020. – 52, Issue 6. – P. 58-70.

9. Константинов А.В. Нелинейная модель движения жидкости в полости вращения при наличии слабых гравитационно-капиллярных эффектов / А.В. Константинов // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – т. 7, № 3. – С. 213-223.

10. Константинов А.В. Исследование параметрического резонанса в задаче М. Фарадея при наличии слабых гравитационных эффектов / А.В. Константинов, О.С. Лимарченко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2011. – т. 8, № 2. – С. 83-100.

11. Константинов О.В. Узагальнена задача Фарадея про рух резервуару з рідиною / О.В. Константинов, О.С. Лимарченко // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2012. – вип. 16. – С. 76-85.

12. Константинов А.В. Нелинейные колебания с жидкостью со свободной поверхностью при горизонтальном силовом возбуждении / А.В. Константинов, О.С. Лимарченко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – т. 9, № 1. – С. 188-202.

13. Константинов О.В. Вихід на параметричний резонанс в узагальненій задачі Фарадея про рух резервуара з рідиною / О.В. Константинов, О.С. Лимарченко // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2013. – вип. 17. – С. 73-80.

14. Konstantinov A. Forced oscillations of the system «reservoir – capillary liquid with a free surface» / A. Konstantinov // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2013, вип. 2. – С. 43-46.

15. Константинов О.В. Узагальнена задача Фарадея для механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» за наявності пружного

амортизатора / О.В. Константинов // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2013, вип. 3. – С. 154-158.

16. Константинов А.В. Обобщенная задача Фарадея для резервуара, частично заполненного жидкостью, совершающего наклонные движения / А.В. Константинов // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – т. 10, N 4-5. – С. 472-479.

17. Konstantinov A. Effect of viscous damping on forced oscillations of the system «reservoir – free surfaced liquid» / A. Konstantinov // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2013. – вип. 18. – С. 73-80.

18. Константинов А.В. Вынужденные нелинейные колебания жидкости в резервуаре параболической формы / А.В. Константинов, О.С. Лимарченко, И.Ю. Семенова // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – т. 11, №5. – С. 68-77.

19. Константинов О.В. Вплив узагальненої дисипації та сил поверхневого натягу на нелінійну динаміку системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» / О.В. Константинов, І.Ю. Семенова // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2015, спецвипуск. – С. 125-128.

20. Константинов А.В. Динамика резервуара в форме тела вращения, частично заполненного жидкостью, при сложном импульсном нагружении / А.В. Константинов, О.С. Лимарченко, К.В. Кинебас, О.Ю. Паранькина // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2016. – т. 13, № 3. – С. 117-128.

21. Константинов О.В. Задача про параметричний резонанс у системі резервуар-рідина з вільною поверхнею / О.В. Константинов, О.С. Лимарченко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – т. 14, № 1. – С. 171-185.

22. Константинов О.В. Модальне керування механічною системою «резервуар – рідина з вільною поверхнею» / О.В. Константинов, В.В. Новицький // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – т. 14, № 2. – С. 42-55.

23. Константинов О.В. Керування системою «резервуар – рідина» зі зворотним зв'язком на основі еталонної моделі / О.В. Константинов, В.В. Новицький, І.Ф. Святовец // Вісник Запорізького національного університету: 36. наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2018. – № 1. – С. 35-47.

24. Константинов О.В. Програмне керування рухом резервуару з рідиною з вільною поверхнею на основі принципу найменшого примусу Гаусса / О.В. Константинов, В.В. Новицький // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2018. – т. 15, № 1. – С. 33-46.

25. Константинов О.В. Керування резервуаром, частково заповненим рідиною, на основі принципу найменшого примусу Гауса (задача гальмування) // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. - 2019. - № 1. - С. 85 - 88.

26. Константинов О.В. Динаміка системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» під дією зовнішнього силового збудження руху // Збірник праць Інституту математики НАНУ, 2019. – т. 16, № 2. – С. 38-49.

27. Лимарченко О., Кліменков О., Нефьодов О., Константинов О. Характер прояву нелінійностей при вібраційному збудженні руху еліпсоїдального резервуару із рідиною з вільною поверхнею // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика, механіка. – 2020. – Випуск №1 (41). – С. 47-50.

28. Константинов А.В. Влияние слабых гравитационно-капиллярных эффектов на поведение резервуара с жидкостью при сложном динамическом нагружении / А.В. Константинов // Український

математичний конгрес. – Ін-т математики НАН України, м. Київ. – 2010. – Секція 1, С. 63-72.

29. Константинов А.В. Параметрические колебания в системе «резервуар – жидкость со свободной поверхностью»: обобщения задачи Фарадея / А.В. Константинов // International Workshop «Hydrodynamics of moving objects», Ukraine, Kiev. – 2012, April 23-23. – P. 58-73.

30. Константинов О.В. Задачі динаміки сумісного руху резервуару з рідиною / О.В. Константинов // Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання». – Івано-Франківськ - Яремче. – 14-19 травня 2018. – С. 307-310.

31. Константинов А.В. Параметрический резонанс (задача Фарадея) в системе «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» при наличии гравитационно-капиллярных эффектов // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, Київ, 19-21 квітня 2012 року / Матеріали конференції, т. 1. — Київ: Інститут математики НАН України, 2012. — С. 240.

32. Константинов О.В. Узагальнення задачі Фарадея в механічній системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею» / О.В. Константинов, В.М. Мельник // Науково-технічна конференція «Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: моделі та експеримент» (INTERPOR'15), Львів, 22-24 вересня 2015 року / Збірник матеріалів. — Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2015. — С. 20-21.

33. Константинов О.В. Узагальнена задача Фарадея для резервуару, частково заповненого рідиною, який може здійснювати кутові рухи на маятниковому підвісі // XVIII International Conference "Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation", Kyiv, May 24–26, 2017 / Thesis of conference reports. — Kyiv: T. Shevchenko National University, 2017. — P. 120.

34. Константинов А.В. Влияние обобщенной диссипации и сил поверхностного натяжения на нелинейную динамику системы «цилиндрический резервуар – жидкость со свободной поверхностью» / А.В. Константинов, И.Ю. Семенова // III міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки», Київ, 27-29 серпня 2015 року / Матеріали конференції. — Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2015. — С. 74.

35. Константинов О.В. Побудова керування системою «резервуар – рідина з вільною поверхнею» на основі розв'язку оберненої задачі мінімізації квадратичного функціоналу якості // XIX International Conference "Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation", Kyiv, May 22–24, 2019 / Thesis of conference reports. — Kyiv: T. Shevchenko National University, 2019. — P. 328-330.

36. Константинов О.В. Керування системою «резервуар – рідина з вільною поверхнею» з використанням принципу найменшого примусу Гауса // V міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки», Київ, 28-30 серпня 2019 року / Матеріали конференції. — Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2019. — С. 47.

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ	2
ВСТУП	16
1. АНАЛІЗ СУЧАСНОГО СТАНУ ТЕОРІЇ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ РІДИНИ В РЕЗЕРВУАРІ В РЕЖИМІ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ І ПАРАМЕТРИЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ	27
Висновки до розділу	46
2. УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗАДАЧІ ФАРАДЕЯ ПРИ НАЯВНОСТІ ДОДАТКОВИХ СТУПЕНІВ ВІЛЬНОСТІ РЕЗЕРВУАРУ	47
2.1. Узагальнена математична модель динаміки сумісного руху системи «циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею»	49
2.2. Додатковий ступінь вільності – можливість руху резервуару в горизонтальній площині	74
2.3. Додатковий ступінь вільності – можливість руху резервуару в горизонтальній площині при наявності пружного амортизатора	91
2.4. Додатковий ступінь вільності – можливість кутових рухів резервуару на маятниковому підвісі	100
2.5. Додатковий ступінь вільності – збудження руху системи вертикальною гармонічною силою	107
Висновки до розділу	114
3. ПРОГРАМНЕ КЕРУВАННЯ ТА КЕРУВАННЯ ЗІ ЗВОРОТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ МЕХАНІЧНОЮ СИСТЕМОЮ «РЕЗЕРВУАР – РІДИНА З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ»	116
3.1. Керування зі зворотним зв'язком на основі модального принципу	118
3.2. Керування зі зворотним зв'язком на основі еталонної моделі	140
3.3. Обернена задача синтезу квадратичного функціоналу якості на основі керування зі зворотним зв'язком	146
3.4. Використання механізму компенсації головного вектору сил тиску рідини на стінку резервуару	153

3.5. Керування механічною системою «резервуар - рідина» на основі принципу найменшого примушення Гауса.....	166
Висновки до розділу.....	191
4. ОСОБЛИВОСТІ ДИНАМІКИ РЕЗЕРВУАРУ З РІДИНОЮ ПРИ НАЯВНОСТІ ДОДАТКОВИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТА ФІЗИЧНИХ ФАКТОРІВ.....	194
4.1. Узагальнена задача Фарадея при наявності слабких гравітаційно-капілярних ефектів	195
4.2. Вимушені коливання при відсутності сил поверхневого натягу та інтегральної дисипації.....	205
4.3. Вимушені коливання при наявності узагальненої дисипації	221
4.4. Вимушені коливання в полі слабких гравітаційно-капілярних сил.	225
4.5. Вплив кривизни та нахилу стінок у резервуарах у формі тіла обертання	235
Висновки до розділу.....	259
ВИСНОВКИ.....	261
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	265

ВСТУП

Дисертація присвячена дослідженню динамічних особливостей сумісного руху механічної системи “резервуар – рідина з вільною поверхнею” в нелінійному діапазоні зміни параметрів в режимі вимушених і параметричних коливань і при керуванні рухом таких систем при наявності параметричного збурення, силового збудження або керування рухом резервуару.

Актуальність теми. Конструкції з рідиною з вільною поверхнею часто зустрічаються в сучасній техніці як складові компоненти транспортних і енергетичних систем, систем транспортування і зберігання різних екологічно небезпечних і технологічних рідин. При цьому відносна маса рідини може бути значною, а тому рухомість рідини істотно впливає на динаміку і керування таких систем. Математичні моделі динаміки конструкцій з рідиною відносяться до різновиду об'єктів з внутрішніми ступенями вільності, і у випадку великої відносної маси рідини істотним є врахування сумісного характеру руху складових компонент системи, що традиційно є складною задачею.

Дослідженням задачі про коливання рідини з вільною поверхнею займалися такі відомі вчені як Релей, Фарадей, М.В. Остроградський, Н. Bauer, J. Miles, L. Perko. Розвиток та постійне ускладнення умов експлуатації ракетно-космічних систем та інших об'єктів машинобудування та транспортних засобів, підвищення вимог до надійності та точності виконання ними своїх функцій, висувають на перший план задачу створення ефективних експериментальних та теоретичних методів для оцінки поведінки конструкцій в різних режимах експлуатації.

Лінійні моделі руху рідини відіграють важливу роль в методичному та прикладному аспекті. Саме на основі лінійних моделей вдається дослідити традиційно важливу задачу про частоти та форми коливань рідини в резервуарах. Лінійні моделі застосовувались також для створення динамічної моделі ракети-носія, які описували сумісний рух системи

«рідина – пружний корпус – квазітвердий рух об’єкта – система керування рухом». В цьому напрямку необхідно назвати роботи таких дослідників як К.А. Абгарян, Л.І. Алексєєв, І.Б. Богоряд, М.С. Галкін, Л.В. Докучаєв, К.С. Колесніков, І.О. Луковський, Г.Н. Мікішев, Д.Є. Охоцимський, Г.С. Наріманов, Б.І. Рабінович, М.М. Моїсєєв, О.О. Петров, В.П. Шмаков, Ф.Н. Шклярчук, Х. Абрамсон, Х. Бауер, R. Ibrahim та інші.

Обмеженість лінійної моделі для опису коливань рідини з великими амплітудами призвела до розвитку математичних методів нелінійного моделювання. В середині 50-х років Г.С. Нарімановим був запропонований метод розв’язку задачі про коливання рідини з вільною поверхнею в резервуарі, що базується на ідеях методів теорії збурень. Згодом результати Г.С. Наріманова отримали подальший розвиток в роботах В.І. Столбецова, І.Г. Гатауліна, Л.В. Докучаєва, І.О. Луковського, Р.Ф. Ганієва та ін.

В середині 70-х років практично одночасно було запропоновано декілька варіантів варіаційних методів розв’язання нелінійних задач динаміки тіл з рідиною в роботах J. Miles, І.О. Луковського, О.С. Лимарченко. В подальшому постановка математичних проблем та розв’язання прикладних задач нелінійного моделювання динаміки тіл з рідиною пов’язані з роботами І.Б. Богоряда, Р.Ф. Ганієва, Л.В. Докучаєва, І.О. Луковського, Г.Н. Мікішева, М.М. Моїсєєва, Г.С. Наріманова, О.О. Петрова, О.С. Лимарченка, І.Т. Селезова, В.Д. Кубенко, П.С. Ковальчука, А.Д. Мишкіса, О.М. Тимохи, В.І. Столбецова, Дж. Уїзема, Х. Абрамсона, Х. Бауера, Р. Хаттона, Дж. Майлза, Л. Перко, Ля Рокка та інших авторів.

Розвиток та використання варіаційних методів дозволили розв’язати цілу низку прикладних задач: 1) дослідження динамічної поведінки вільної поверхні рідини в околі основного резонансу; 2) нелінійне моделювання перехідних процесів; 3) моделювання сумісного руху резервуара та рідини з вільною поверхнею; 4) врахування витікання рідини; 5) динаміка резервуарів з рідиною при кутових коливаннях тіла-носія; 6) нелінійне

модельовання коливань рідини в резервуарах нециліндричної форми; 7) повздовжні коливання резервуара з рідиною, який рухається вертикально за заданим законом або під дією зовнішньої сили; 8) коливання вільної поверхні рідини в умовах гравітаційних полів слабкої інтенсивності. Окремі задачі розв'язувались також за допомогою чисельних методів, що базуються на ідеях точкової дискретизації простору, який займає рідина, та перевірялись з використанням експериментальних методів.

Розвиток нових теоретичних підходів дозволив вивчити багато явищ, які супроводжують формування динамічних властивостей поведінки тіл з рідиною. Наявні публікації свідчать про обмеженість досліджень за такими напрямками. Перше, врахування фактору сумісності при зв'язаному русі конструкції і рідини. Переважна більшість досліджень ґрунтується на моделі заданого руху конструкції. Проте при зв'язаному русі найбільш важливим є те, що в системі змінюються частоти коливань, а тому області прояву резонансів стають іншими. Більше того, можливі ситуації, коли змінюються і чисельні значення, і взаємне розташування власних частот системи. Це докорінно змінює прояв нелінійних властивостей. Друге, є продовженням першого і пов'язане із способом закріплення резервуара, що визначає додаткові ступені вільності, які виникають в системі і тим самим змінюють режими прояву сумісності руху. Особливо це стосується випадку, коли резервуар здійснює кутові рухи. Третє, в околі можливого прояву резонансних явищ навіть малі зміни частот збурення призводять до суттєвих змін характеру коливань, є суттєві відмінності поведінки систем в дорезонансних і зарезонансних діапазонах частот збудження руху. Таким чином, задачі нелінійної динаміки та керування конструкцій з рідиною, які враховують сумісний рух тіла-носія та рідини, яка його частково заповнює, залишаються актуальними та потребують подальших досліджень.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження за темою дисертації увійшли до науково-дослідної роботи відділу аналітичної механіки Інституту математики НАН України: тема

НДР «Математичні проблеми стійкості та керування у задачах аналітичної механіки», 2006 – 2010 роки, реєстраційний № 0106U000440; тема НДР «Математичні моделі у задачах аналітичної динаміки та дослідження їх стійкості, керування та спостереження», 2011 – 2015 роки, реєстраційний номер № 0111U001051; тема НДР «Дослідження математичних моделей в задачах динаміки, керування та спостережуваності», 2016 – 2020 роки, реєстраційний № 0116U003108.

Об’єкт дослідження. Об’єктом дослідження даної роботи є перехідні процеси нелінійної динаміки сумісного руху механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» при наявності параметричного збурення, силового збудження або керування рухом резервуару.

Мета і задачі дослідження. Мета дисертаційної роботи полягає у виявленні динамічних особливостей сумісного руху механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» в нелінійному діапазоні зміни параметрів при наявності параметричного збурення, силового збудження або керування рухом резервуару.

У роботі визначені наступні завдання дослідження:

- побудова узагальнення класичної задачі Фарадея (при наявності додаткових ступенів вільності – можливості переміщень в горизонтальній площині та, особливо, здійснення кутових коливань) та аналіз перехідних процесів в нелінійних коливаннях механічної системи «резервуар – рідина», виявлення нових механічних ефектів;

- дослідження типових режимів поведінки систем тіл з рідиною для узагальненої задачі Фарадея з додатковою можливістю здійснення поперечного поступального і кутового руху, вивчення ролі механізму вимушених коливань в задачі про повздовжні коливання тіл з рідиною, який в класичній постановці не проявляється взагалі;

- розробка алгоритмів керування системою «резервуар – рідина» на основі лінійної моделі у збуреннях з використанням методів модального керування, еталонної моделі та мінімізації квадратичного функціоналу

якості; апробація розроблених алгоритмів керування на нелінійній багатомодовій дискретній моделі та з'ясування границь їх можливого застосування (режими руху, амплітуди та частоти збурення вільної поверхні, прийнятна тривалість перехідних процесів тощо);

– розробка алгоритмів керування системою «резервуар – рідина» на основі методу компенсації головного вектору сил тиску рідини на стінки резервуару та варіаційного принципу найменшого примушення Гауса; порівняння обраних підходів з результатами керування, отриманого на основі лінійних моделей; застосування розроблених алгоритмів керування на нелінійній багатомодовій дискретній моделі для здійснення програмних рухів при високо інтенсивних навантаженнях на систему «резервуар-рідина»;

– дослідження особливостей розвинення перехідних процесів в системі «резервуар–рідина» при наявності додаткових факторів під дією зовнішнього силового збудження руху (для різних частотних діапазонів, різних відносних масах рідини, при прояві капілярності, узагальненої дисипації); виявлення характерних частотних діапазонів та умов і особливостей виходу на усталений режим коливань вільної поверхні рідини під дією зовнішньої сили, вивчення закономірностей прояву модуляції і супергармонік при формуванні коливань рідини і тіла–носія в різних частотних діапазонах.

Методи дослідження. Варіаційні методи математичної фізики, методи аналітичної та нелінійної механіки, математичні методи керування рухом механічних систем, чисельні методи реалізації і візуалізації результатів аналітичних процедур.

Наукова новизна одержаних результатів. Наукова новизна одержаних результатів полягає у тому, що:

– сформульовано узагальнення класичної задачі Фарадея про параметричні хвилі з урахуванням таких ефектів: 1) сумісності коливань рідини та резервуара, 2) наявності додаткового ступеня вільності руху

резервуара (можливості горизонтального переміщення або кутових коливань резервуара на маятниковому підвісі), 3) вертикального силового збудження руху резервуара, 4) впливу на розвиток параметричного резонансу капілярних сил і демпфування;

– для узагальненої задачі Фарадея: 1) виконано механічну постановку задачі для кожного випадку узагальнення; 2) отримано в аналітичному вигляді власні частоти сумісних коливань механічної системи, 3) побудовано в аналітичному вигляді області стійкості та нестійкості системи, 4) при наявності додаткових ступенів вільності виявлено, що поряд з параметричним резонансом виникає механізм вимушених (активних) коливань рідини, який призводить до виходу системи на нелінійний режим коливань на будь-якій частоті;

– дослідження сумісних рухів базується на нелінійній багатомодовій дискретній моделі, яка виводиться за допомогою варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського з попереднім виключенням кінематичних зв'язей;

– запропоновано алгоритм керування поступальним рухом резервуара з рідиною із використанням лінійної моделі у збуреннях на основі методів модального керування, еталонної моделі та мінімізації квадратичного функціоналу якості; розроблений алгоритм апробовано на нелінійній багатомодовій моделі та виявлено границі його застосування в межах лінійного діапазону збурень вільної поверхні рідини;

– запропоновано алгоритм керування поступальним рухом резервуара з рідиною в нелінійному діапазоні зміни амплітудних параметрів із застосуванням методу компенсації головного вектору гідродинамічних сил та варіаційного принципу найменшого примушення Гауса; обидва методи доцільно використовувати при переміщеннях конструкцій з рідиною в межах відповідних технологічних або виробничих процесів;

– досліджено параметричний резонанс в механічній системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею» за умови слабого прояву поверхневого

натягу, коли резервуар рухається у вертикальному напрямку за заданим гармонічним законом; встановлено, що наявність сил поверхневого натягу забезпечує більш швидкий вихід системи на резонансний режим, однак наявність сил поверхневого натягу по контуру контакту “пом’якшує” резонанс за рахунок збільшення енергетичного внеску осесиметричних форм коливань;

– визначено умови та особливості виходу коливань вільної поверхні рідини під дією зовнішньої сили на усталений режим за відсутності та (чи) наявності узагальненої дисипації в механічній системі; дослідження проводились для різних частотних діапазонів збудження.

Достовірність одержаних результатів. Достовірність одержаних результатів забезпечується коректністю постановки задачі, контролем виконання законів симетрії та закону збереження енергії. Отримані результати узгоджуються на якісному рівні з результатами теоретичних і експериментальних досліджень вимушених коливань та класичної задачі Фарадея, а по параметрах нелінійної моделі – з параметрами дискретної моделі І.О. Луковського, що застосовувалася для вивчення усталених резонансних режимів.

Теоретичне значення і практична цінність результатів. Дослідження носить теоретичний характер, його результати можуть бути використані для пояснення та прогнозування складних процесів хвилеутворення і взаємодії компонент у системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею», а також для керування рухом таких систем.

Особистий внесок здобувача. Особистий внесок здобувача визначається постановкою і дослідженням нового класу задач про параметричні і вимушені коливання резервуарів з рідиною з вільною поверхнею, дослідженням виходу коливань вільної поверхні рідини на різні модуляційні і усталені режими під дією зовнішніх сил. Всі основні результати дисертаційної роботи отримано автором самостійно. В роботах, що опубліковані у співавторстві, співавторам належить участь в

обговоренні постановок задач та рекомендацій щодо методів їх розв'язування.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи в цілому доповідались:

– на семінарі кафедри механіки суцільних середовищ механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівник – доктор технічних наук, професор О.С. Лимарченко) (м. Київ, 2013, 2015, 2019 рр.);

– на семінарі кафедри математичної фізики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівник – доктор фіз.-мат. наук, професор В.Г. Самойленко) (м. Київ, 2015, 2016 рр.);

– на семінарі «Математичні проблеми механіки та обчислювальна математика» при Інституті математики НАН України (керівники – академік НАН України І.О. Луковський та академік НАН України В.Л. Макаров) (м. Київ, 2012, 2017, 2020 рр.).

Окремі розділи дисертаційної роботи доповідались:

– на Чотирнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука, Україна, м. Київ, 19-21 квітня 2012 року;

– на конференції «International workshop: Hydrodynamics of moving objects», Україна, м. Київ, 23–25 квітня 2012 р.;

– на Міжнародній конференції «Сучасні математичні методи механіки», Україна, м. Київ, 28–30 вересня 2012 р.;

– на Міжнародній науковій конференції «Варіаційні методи механіки», Україна, м. Київ, 23-26 вересня 2013 р.;

– на науково-технічній конференції «Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: моделі та експеримент» (INTERPOR'15), Україна, м. Львів, 22–24 вересня 2015 р.

– на міжнародній конференції «XVIII International Conference «Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation», Україна, м. Київ, 24–26 травня 2017 р.;

– на Міжнародній науково-практичній конференції «Інформаційні технології та комп’ютерне моделювання», Україна, м. Івано-Франківськ – Яремче, 14-19 травня 2018 р.;

– на міжнародній конференції «XIX International Conference «Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation», Україна, м. Київ, 22–24 травня 2019 р.;

– на V міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки», Україна, м. Київ, 28–30 серпня 2019 р.

Публікації. Зміст дисертації викладено у 30-ох наукових статтях та 6-ох тезах конференцій. Основні результати дисертації з достатньою повнотою опубліковано в 27 статтях, серед яких 8 статей [1-8] у виданнях квартиля Q3, внесених до наукометричної бази даних Scopus, та 19 статей [9-27] у наукових фахових виданнях України. До публікацій, що додатково відображають наукові положення дисертації, належать статті [28-30].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації становить 297 сторінок, в тому числі 83 рисунки, 6 таблиць та список використаних джерел із 365 найменувань.

Перший розділ роботи присвячено аналізу сучасного стану теорії нелінійних коливань системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» в умовах параметричного збурення, силового збудження або керування рухом резервуару.

Другий розділ роботи присвячено узагальненню класичної задачі Фарадея про умови та характер виходу коливань механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» на режим параметричного резонансу. В класичному експериментальному дослідженні Фарадея резервуар рухається вертикально за заданим гармонічним законом, інші

рухи – горизонтальні переміщення та кутові коливання – унеможливлюються за рахунок жорсткого закріплення. Однак, як показує практика, промислові конструкції та рухомі об'єкти з рідиною з вільною поверхнею, в яких відносна маса рідини велика, завжди здійснюють сумісний рух як сукупність поперечних переміщень та кутових коливань відносно центру мас при наявності параметричного повздовжнього збурення. Тому узагальнення класичної задачі Фарадея здійснено для таких механічних постановок задач: 1) резервуар рухається вертикально за заданим гармонічним законом і може здійснювати горизонтальні переміщення за рахунок поперечних коливань рідини (внесення в систему додаткового ступеня вільності – можливості руху резервуару в горизонтальній площині); 2) резервуар рухається вертикально за заданим гармонічним законом і може здійснювати кутові коливання відносно центру мас системи (внесення в систему додаткового ступеня вільності – можливості кутових рухів резервуару); 3) резервуар рухається вертикально, але не за заданим гармонічним законом, а під дією гармонічної сили; 4) резервуар рухається вертикально під дією гармонічної сили та може здійснювати горизонтальні переміщення; 5) резервуар рухається вертикально під дією гармонічної сили та може здійснювати кутові коливання відносно центру мас системи. Для вище означених узагальнень задачі Фарадея побудовано зони стійкості та нестійкості, проведено якісний та спектральний аналіз коливань вільної поверхні рідини та резервуару. Встановлено, що динамічні процеси в системі розвиваються як сукупність параметричного резонансу і вимушених коливань. При наявності додаткових ступенів вільності в узагальненій задачі Фарадея можливий вихід системи на нелінійний режим коливань на будь-якій частоті.

Третій розділ роботи присвячений побудові алгоритмів керування (активної зовнішньої сили, яка підведена до резервуару), яке забезпечить рух резервуару за заданим законом (програмний рух) при наявності постійно діючого збурення – коливань вільної поверхні рідини. На основі

лінійної моделі у збуреннях (відхиленнях переміщень та швидкостей від програмних значень) на основі методів модального керування, еталонної моделі та мінімізації квадратичного функціоналу якості побудовано алгоритми керування із зворотним зв'язком. Керування зі зворотним зв'язком на основі лінійної системи у збуреннях може бути використано для забезпечення «комфортних» рухів резервуару, тобто при відсутності великих збурень вільної поверхні рідини (і зменшення впливу рухомості рідини на закон руху тіла носія). Для задач керування при наявності великих збурень вільної поверхні рідини побудовано алгоритми керування на основі компенсації головного вектору сил тиску рідини на стінки резервуару та варіаційного принципу найменшого примушення Гауса. Показано, що обидва підходи забезпечують прийнятну для практики точність виконання програмного руху при будь-яких високо інтенсивних навантаженнях на систему, крім того, алгоритм керування на основі варіаційного принципу Гауса дозволяє мінімізувати енергетичні витрати на керування.

Четвертий розділ роботи присвячений дослідженню умов та особливостей виходу коливань вільної поверхні рідини під дією зовнішньої сили на усталений режим при відсутності та наявності узагальненої дисипації або капілярності. Дослідження проводились для різних частотних діапазонів збудження руху системи (дорезонансному, резонансному та зарезонансному). Встановлено, що при зростанні в рідині узагальненої дисипації в системі спостерігається вихід на усталений режим.

Висновки містять наукові положення результатів, отримані в дисертаційному дослідженні.

1. АНАЛІЗ СУЧАСНОГО СТАНУ ТЕОРІЇ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ РІДИНИ В РЕЗЕРВУАРІ В РЕЖИМІ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ І ПАРАМЕТРИЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ

Задачі динаміки обмеженого об'єму рідини з вільною поверхнею майже два століття викликають значну зацікавленість теоретичного та прикладного характеру. Суттєву увагу до цих проблем почали проявляти з початку 50-х років минулого сторіччя в зв'язку з інтенсивним розвитком ракетно-космічної техніки. Об'єкти, що містять резервуари з рідиною з вільною поверхнею, беруть участь у складних маневрах, перебувають під дією вібраційних і ударних навантажень, дуже часто в умовах, близьких до повної невагомості. Крім задач динаміки космічної техніки такі проблеми виникають також в області експлуатації транспортних систем (танкери, цистерни), в елементах транспортної інфраструктури, системах зберігання і транспортування нафти, в динаміці хімічних реакторів, при вибухових і сейсмічних впливах.

Таким чином, коло питань, яким займається динаміка руху твердого тіла з рідиною, є досить великим. Задачі динаміки тіла з рідиною виникають в досить далеких одне від одного галузях техніки. Однак всі описані вище досить різні за призначенням конструкції з рідиною мають декілька спільних характеристик: 1) всі вони заповнені хімічно активними, легкозаймистими та екологічно небезпечними речовинами, 2) маса рідини, яку містять ці конструкції, набагато перевищує масу власне резервуарів та допоміжного обладнання, 3) рідина, яка міститься в резервурі, заповнює його лише частково, тобто має вільну поверхню. Дія на резервуар, частково заповнений рідиною, зовнішніх збурень або керуючих навантажень призводить до появи коливань вільної поверхні рідини, що, в свою чергу, може стати причиною відхилень від штатних режимів функціонування таких конструкцій. Тому задача дослідження особливостей руху

конструкцій, частково заповнених рідиною, в умовах штатних (лінійних) та позаштатних (нелінійних) навантажень є досить актуальною задачею.

Постійне ускладнення умов експлуатації ракетно-космічних об'єктів та інших об'єктів машинобудування, транспортних систем, підвищення вимог до надійності та точності виконання ними своїх функцій, ставить задачу створення ефективних засобів опрацювання перспективних варіантів конструкцій та режимів їх експлуатації ще на етапі науково-дослідних та проектно-конструкторських робіт. При цьому застосовуються експериментальні та теоретичні методи для оцінки поведінки конструкції при різних режимах експлуатації [117, 118].

Як було сказано вище, все більше посилення екологічних вимог та постійно зростаюче застосування екологічно небезпечних, пожежо небезпечних, вибухо небезпечних, отруйних, радіоактивних рідин в різних технологічних процесах на виробництві та транспорті призвели до підвищення інтересу до застосування досягнень в області дослідження динаміки конструкцій з рідиною в цих напрямках. Окрему увагу потрібно приділяти проектуванню конструкцій, які застосовуються в береговій зоні та для морських платформ. Резервуари з рідиною можуть бути розташовані як в зоні досягнення морських хвиль або сильних поривів вітру, так і бути розташовані на морських платформах, які знаходяться під дією вібраційних та ударних впливів.

Проведення експериментального відпрацювання конструкцій з рідиною пов'язане із значними матеріальними витратами. В модельних експериментах не завжди вдається витримувати критерії подібності, рух конструкції під дією сили, що стежить, або рух конструкції із заданими параметрами та обмеженнями і т.д. Тому поряд з експериментальними методами дослідження динамічних процесів в системах тіло-рідина важливо створювати ефективні розрахункові моделі динаміки, які враховують загальні механічні властивості динамічних об'єктів, які досліджуються.

В прикладному аспекті лінійна модель динаміки тіла з рідиною дає відповіді на дуже широке коло питань і дозволяє з точністю, яку вимагає практика, описати зміну у часі різних інтегральних характеристик, що визначають рух рідини в усталених режимах (частоти, приєднані маси, силовий відгук рідини і т.д.). Лінійна модель руху тіла-носія з рідиною є основою для розвитку методів розв'язання задач стійкості руху об'єктів, гідропружності літальних апаратів, синтезу об'єктів із системами керування та автоматами стабілізації руху. В цьому напрямку необхідно назвати роботи таких дослідників як К.А. Абгарян, Л.І. Алексєєв, І.Б. Богоряд, М.С. Галкін, Л.В. Докучаєв, К.С. Колесніков, І.О. Луковський, Г.Н. Мікішев, Д.Є. Охоцимський, Г.С. Наріманов, Б.І. Рабінович, Н.М. Мойсєєв, О.О. Петров, В.П. Шмаков, Ф.Н. Шклярчук, Х. Абрамсон, Х. Бауер та інші [1, 3, 5, 7, 9, 10, 25, 32, 34, 54-56, 89, 135, 196-199, 202, 203, 212-219, 236, 239-248, 355], в роботах багатьох з яких наведено огляди робіт з розвитку лінійної теорії за різними напрямками. Найбільш повний огляд робіт з лінійної теорії коливань вільної поверхні рідини надано в роботі R.A. Ibrahim [285].

Початок теоретичних робіт з нелінійної динаміки рідини, що частково заповнює циліндричну порожнину тіла, було покладено в роботах Г.С. Наріманова [204, 205]. В цих роботах вперше була застосована методика побудови рівнянь руху рідини, яка враховує відносно великі деформації вільної поверхні та обґрунтовано метод розв'язку нелінійних крайових задач гідродинаміки обмеженого об'єму рідини. У відповідності до застосованого підходу збурена вільна поверхня рідини біла представлена у вигляді ряду Фур'є по деякій повній ортогональній на незбуреній вільній поверхні рідини системі функцій. Коефіцієнти цього ряду, що залежать від часу як від параметру, по суті є відхилення вільної поверхні рідини від незбуреного стану. Таким чином, вперше вдалося теоретично пояснити деякі специфічні особливості немалих коливань рідини, виявлених експериментально Г.Н. Мікішевим [198, 199]. Згодом результати Г.С. Наріманова отримали подальший розвиток в роботах В.І. Столбецова, І.Г.

Гатауліна, Л.В. Докучаєва, І.О. Луковського, Р.Ф. Ганієва. Основна увага в цих роботах була приділена дослідженню явищ в околі основного резонансу. В прикладному плані метод Г.С. Наріманова та його модифікації суттєво спирається на аналітичні викладки, і до теперішнього часу вдалося побудувати модель, яка враховує три перші форми коливань.

Фактично, реалізація процедури, яка запропонована Г.С. Нарімановим, базується на необхідності рекурентного розв'язку послідовності лінійних крайових задач математичної фізики. При цьому кількість таких крайових задач прямо пропорційно сумі першого, другого та третього ступеня кількості форм коливань вільної поверхні рідини, прийнятих до розгляду, тобто є відносно великим навіть у простіших випадках, хоча самі крайові задачі залишаються однотипними.

Тому в останні роки для розв'язку нелінійних задач динаміки тіл з рідиною з вільною поверхнею все більш активно розвиваються та застосовуються варіаційні методи [117]. За основу такого підходу береться застосування замість диференціальної форми крайової задачі про рух рідини з вільною поверхнею її варіаційного аналогу, отриманого на основі варіаційних принципів механіки. При цьому чисельна реалізація варіаційних принципів базується на методі Канторовича [50], що застосовується разом з методами теорії збурень та нелінійної механіки для переходу від дискретно-континуальної структури шуканої крайової задачі до її дискретної моделі — до системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітудних параметрів, які залежать тільки від часу.

Необхідно відмітити, що застосування варіаційних методів формулювання задач динаміки тіл з рідиною та методів їх розв'язання дозволяє ефективно використовувати цілу низку загальних переваг варіаційного підходу, які так чи інакше знайшли свою реалізацію при вирішенні задач механіки з рідиною, а саме:

– можливість синтезу варіаційних принципів механіки з достатньо розвинутими енергетичними методами математичної фізики [50, 200, 201], що забезпечує цілеспрямований характер апроксимації розв’язку (серед всіх можливих апроксимацій обираються ті, що не порушують закон збереження енергії [53]);

– інваріантність варіаційних формулювань та методів розв’язку відносно геометрії області, яка досліджується;

– використання варіаційного апарату у механіці суцільних середовищ забезпечує коректність постановки крайових задач (кінематичні граничні умови є невід’ємною частиною виконання техніки варіювання, а динамічні умови є природними, тобто вигляд та загальна кількість умов є складовою частиною реалізації варіаційного підходу);

– варіаційні принципи природним чином описують всі складові частини системи та їх взаємодію на основі адитивності енергетичних характеристик;

– багато труднощів методичного порядку, яким потрібно приділяти дуже велику увагу при використанні диференціального апарату, приховані за формальною технікою реалізації варіаційних алгоритмів.

Завдяки розвитку варіаційного апарату проблеми реалізації стають доволі формальними, однак важка та тонка робота виконується на етапі побудови розкладів шуканих змінних, зокрема, під час вибору систем координатних функцій, де фактично визначається ефективність всього підходу в цілому [117, 200, 201]. При цьому шукані розклади змінних повинні задовольняти сукупності кінематичних обмежень задачі: рівнянню неперервності та вимогам неперетікання рідини на границях заданої області.

В середині 70-х років практично одночасно було запропоновано декілька варіантів варіаційних методів розв’язку нелінійних задач динаміки тіла-носія з рідиною: J. Miles [249, 278, 329–338], І.О. Луковський [135–173], О.С. Лимарченко [90–118, 309, 310]. Спільне використання методів збурень та варіаційних методів математичної фізики набагато збільшило переваги

алгоритму розв'язку з точки зору прикладних застосувань. Методи J. Miles та І.О. Луковського базуються на застосуванні формулювання шуканої задачі динаміки резервуару з рідиною у вигляді варіаційного принципу Бейтмена [321]. Суттєвою перевагою цього методу є той факт, що і динамічні, і кінематичні граничні умови отриманої крайової задачі є природними [146–163]. О.С. Лимарченком розроблено метод [94, 117] дослідження задачі нелінійної динаміки сумісного руху резервуару та рідини, що його частково заповнює, на основі застосування класичного варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського. В зв'язку з тим, що для такої форми варіаційної постановки задачі всі кінематичні обмеження не є природними (у порівнянні з методами, що базуються на принципі Бейтмена), необхідно додатково на етапі побудови розкладів шуканих змінних задовольнити нелінійній граничній умові, визначеній на вільній поверхні рідини, що рівнозначно визначенню взаємозв'язку збурень вільної поверхні рідини та потенціалу швидкостей ще до чисельної реалізації варіаційного принципу.

Серед основних напрямків досліджень з використанням математичних моделей, розроблених на основі варіаційних принципів Бейтмена та Гамільтона-Остроградського, необхідно відзначити наступні:

- побудова якісної теорії, методів розв'язку та дослідження аналітичних властивостей рішень крайових задач теорії руху твердого тіла з порожнинами, частково заповненими рідиною;
- дослідження динамічної поведінки вільної поверхні рідини в околі основного резонансу;
- нелінійне моделювання перехідних процесів;
- моделювання сумісного руху резервуара та рідини з вільною поверхнею;
- врахування витікання рідини;
- динаміка резервуарів з рідиною при кутових коливаннях тіла-носія;

- нелінійне моделювання коливань рідини в резервуарах нециліндричної форми;
- повздовжні коливання резервуара з рідиною, який рухається вертикально за заданим законом або під дією зовнішньої сили;
- коливання вільної поверхні рідини в умовах гравітаційних полів слабкої інтенсивності.

В роботах І.О. Луковського, М.Я. Барняка, О.Н. Комаренка [57–59, 62–64] на основі енергетичних підходів запропоновано низка наближених методів визначення динамічних характеристик рідини, які допускають ефективну чисельну реалізацію для порожнин складної конфігурації, в тому числі порожнини несиметричної форми. Отримано результати розрахунків для різних порожнин починаючи від простіших симетричних (конус, сфера, параболоїд та ін.) та закінчуючи порожнинами складної неосесиметричної конфігурації (циліндр та конус з віссю симетрії, яка відхилена від вертикальної, еліптичний циліндр, призма та ін.).

І.О. Луковський та В.А. Троценко досліджували задачі гідропружності, що виникають в теорії руху механічних систем, які містять порожнини з рідиною та конструктивні пристрої типу ребер-перегородок та виштовхувальних діафрагм із вискоеластичних матеріалів [141, 144, 170]. Розв’язано задачі про коливання рідини з кільцевими та радіальними перегородками, нелінійні задачі статички та лінеаризовані задачі динаміки м’яких оболонок, які взаємодіють з обмеженим об’ємом рідини.

Дослідження поведінки рідини в околі головного резонансу є найбільш дослідженим розділом застосування нелінійних методів у динаміці рідини з вільною поверхнею. Результати у цьому напрямку отримано в роботах В.І. Столбєцова [220–224], Р.Ф. Ганієва, Л.Г. Бояршиной, П.С. Ковальчука, В.В. Холоповой [25–28, 35–37], І.О. Луковського [174, 206], І.О. Луковського та О.М. Тимохи [180] та ін. Встановлено, що амплітудно-частотна характеристика таких коливань відповідає жорсткій коливальній системі, визначені стійкі та нестійкі гілки амплітудно-частотних кривих.

На основі розробленого методу І.О. Луковським досліджено усталені коливання вільної поверхні рідини у випадку, коли резервуар здійснює поперечні рухи за заданим гармонічним законом (резервуар циліндричної та конічної форми). Сформульовано та розв'язано задачу про динамічну стійкість вільної поверхні рідини [57, 61, 141, 163, 164, 166, 173, 185, 206] та умови виникнення режиму типу кругової хвилі [61, 173]. Розв'язання цієї задачі фактично містить декілька етапів: побудова періодичного рішення та дослідження його на стійкість; побудова областей динамічної нестійкості початкової форми руху (областей коливань, які збурюються за параметричним механізмом); знаходження усталених режимів руху рідини в областях динамічної нестійкості та дослідження цих режимів на стійкість.

В роботі [174] досліджувались можливості переходу резонансних коливань рідини з вільною поверхнею із режиму плоских коливань в режим просторового руху вільної поверхні типу кругової хвилі. В цьому випадку амплітудно-частотна характеристика відповідає нелінійній системі з м'якою відновлюючою силою. Також в роботі [92] досліджувались усталені режими руху вільної поверхні рідини типу кругової хвилі. Перехідні режими появи кругової хвилі вивчались для резервуарів циліндричної форми та у формі прямокутного паралелепіпеду [113, 117, 309, 339]. Встановлено, що наявність режиму руху вільної поверхні рідини типу кругової хвилі є наслідком не геометричної кругової симетрії, а динамічної симетрії об'єкту. Зокрема, у резервуарі прямокутної форми при відповідному підборі співвідношень між сторонами прямокутника стає можливим рух гребенів хвиль за траєкторією фігур Ліссажу.

І.О. Луковський та О.М. Тимоха [170–172, 174–178, 180–184, 227–235] у нелінійній постановці досліджували динаміку рідини в резервуарі в широкому діапазоні вібраційних навантажень від низькочастотного до акустичного діапазону. Було досліджено можливості стабілізації капілярної рідини за рахунок цілеспрямованого використання акустичного випромінювання.

В роботах І.О. Луковського та О.М. Тимохи [270, 360, 362] побудовано наближені математичні моделі та досліджено усталені нелінійні резонансні коливання рідини та їх стійкість для кругового циліндричного контейнеру, що здійснює довільні просторові періодичні рухи. В [215, 343–346, 360] побудовано аналітичні розв’язки, досліджено їх стійкість, в тому числі за наявності демпфування, яка є критичною для анігіляції кругових хвиль проти напрямку орбітальних збурень. В [267] побудовано аналітичні наближення власних форм коливання рідини всередині циліндричних морських платформ–монобашт типу Драугена. В [258–265, 267, 268, 270, 279, 280] побудовано аналітичні розв’язки нелінійних модальних рівнянь типу Наріманова-Моїсєєва й досліджено усталені хвильові рухи рідини у вертикальних баках квадратного перерізу в випадку суттєво тривимірних збурень баків. Дано математичне обґрунтування парадоксу Ікеда-Ібрагіма втрати симетрії кругової резонансної хвилі в контейнерах квадратного перерізу.

В основних публікаціях, присвячених динаміці резервуарів з рідиною з вільною поверхнею, розглядаються тільки випадки заданого руху тіла-носія, не зважаючи на те, що рівняння сумісного руху резервуарів з рідиною отримані у багатьох роботах [37, 39, 117, 174–185, 206, 302–304]. Головною причиною цього, скоріш за все, є той факт, що під час сумісного руху тіла-носія з рідиною з вільною поверхнею з’являється більш складна взаємодія між резервуаром та рідиною, а це призводить до необхідності врахування великої кількості форм коливань, що в багатьох методах розв’язку нелінійних задач поки здійснити не вдається.

В подальшому в роботах О.С. Лимарченка розглядаються задачі сумісного руху резервуару, частково заповненого рідиною, під дією силових або моментних навантажень, які мають імпульсний або періодичний характер [97, 99, 100, 103, 106, 107, 111, 117, 131]. Об’єктом дослідження в цих роботах є якісний та спектральний аналіз поверхневого хвилеутворення, вплив рідинного наповнення на рух тіла-носія, параметри

силової та моментної взаємодії резервуару з рідиною. Характерною особливістю таких задач є необхідність врахування великої кількості форм коливань.

Зокрема, якщо розглянути рух рідини з вільною поверхнею в прямому циліндричному резервуарі, який здійснює довільні поступальні рухи в горизонтальній площині, то навіть при наявності початкового збурення вільної поверхні рідини тільки по першій формі коливань за дуже малий інтервал часу буде встановлений режим коливань, який збуджує багато інших форм коливань [117].

У випадку, коли рух резервуару з рідиною в горизонтальній площині збуджується короткочасним імпульсом сили, у відповідній силі взаємодії тіла-носія з рідиною суттєво проявляються ефекти амплітудної модуляції та наявність вищих гармонік спектру [117]. Це також є свідомством про принципову необхідність врахування великої кількості форм коливань вільної поверхні рідини.

В сумісній нелінійній постановці в роботі [131] розглянуто задачу динаміки циліндричного резервуару з рідиною під дією неперіодичного силового навантаження у вигляді пілоподібного імпульсу. Вибір такого типу навантаження обумовлений тим, що при керованому русі конструкції з рідиною для зміни положення чи орієнтації конструкції використовують такого типу імпульси, а не синусоїдальні, які більше притаманні системам з поновлюючою силою. Показано, що дія пілоподібного імпульсу сили призводить до збурень кінематичних параметрів системи (збурень вільної поверхні рідини на стінках резервуара і швидкості поступального руху конструкції) менших ніж у випадку дії синусоїдального імпульсу. Дано пояснення цього ефекту і відзначено присутність амплітудної і частотної модуляції в законі зміни збурень вільної поверхні рідини.

В роботі [129] у системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею» розглянуто силову взаємодію рідини з резервуаром при вібраційному збудженні руху резервуара періодичною силою для частот у

дорезонансному, білярезонансному і зарезонансному діапазонах. Досліджено особливості впливу геометричної форми резервуара на розвинення динамічних процесів. Для дослідження поведінки системи розглянуто варіанти циліндричного та сферичного резервуарів.

В роботах Г.С. Наріманова, І.О. Луковського та Л.В. Докучаєва [39, 41, 174, 206] були отримані рівняння нелінійної моделі руху резервуару, частково заповненого рідиною, коли тіло-носій може здійснювати не тільки поступальні, але й кутові рухи. В той же час моделювання цих алгоритмів до теперішнього часу здійснено не було. Пояснюється це зростанням складності алгоритму, оскільки для опису кутових рухів тіла-носія необхідне додаткове введення векторного потенціалу (в доповнення до скалярного потенціалу). Громіздкість всіх виразів зростає в декілька разів, а загальна кількість рівнянь в моделі сягає $5N + 6$, де N – кількість утриманих в моделі форм коливань вільної поверхні.

В роботах О.С. Лимарченко [117] було запропоновано моделювання динаміки систем тіло-рідина на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського. В цьому методі виконано виключення кінематичних граничних умов на етапі до чисельної реалізації варіаційної задачі. В результаті отримано модель системи резервуар-рідина, яка містить тільки $N + 6$ рівнянь відносно амплітудних параметрів руху рідини та параметрів руху тіла-носія, та описує сумісний рух резервуару з рідиною, коли тіло-носій здійснює поступальні переміщення та кутові коливання під дією зовнішніх сил та моментів.

На основі моделі [117] була розв’язана група задач про кутові коливання резервуару, частково заповненого рідиною, на маятниковому підвісі. Зокрема, дуже значний прикладний інтерес під час експлуатації ракет викликає задач про складний просторовий рух резервуару з рідиною при наявності раптової інтенсивної зміни (до 40 разів) поздовжнього відстежуючого навантаження [104, 109, 111, 114, 117]. Встановлено, що при наявності такого впливу в системі з’являється кутовий рух тіла-носія та

формується на вільній поверхні рідини специфічна форма типу провалу. Проаналізовано внесок параметричного та вимушеного механізмів формування динамічних процесів та досліджено, що режим вимушених коливань є домінуючим. Досягнуто прийнятне для практики узгодження отриманих теоретичних результатів з даними натурних випробувань (до 25% по параметрах хвилеутворення).

О.С. Лимарченко та О.О. Нефьодовим в [127] досліджено задачу динаміки циліндричного резервуару з рідиною на маятниковому підвісі з рухомою точкою підвісу. Рух точки підвісу заданий та відбувається на частотах, які відповідають основним резонансам для даної системи резервуар – рідина. Задачу розглянуто в нелінійній постановці з метою визначення чутливості системи до кожного з приведених резонансних збуджень. Чисельний приклад свідчить про зміну порядку розташування частот, що в свою чергу дає можливість використовувати маятниковий підвіс для зменшення інтенсивності прояву основного резонансу за першою, антисиметричною, формою. Ці ж автори [317] проводили дослідження коливань циліндричного резервуару з рідиною на маятниковому підвісі, причому точка підвісу здійснювала заданий коливальний рух в трьох діапазонах частот: зарезонансному, резонансному та дорезонансному (відносно нижчої власної частоти системи). В цьому випадку власні частоти коливань значно відрізняються від парціальних частот руху компонентів системи. Отримані результати поведінки системи в зарезонансному, резонансному та дорезонансному режимах руху на якісному рівні відповідають відомим теоретичним та експериментальним результатам.

В [126] досліджено поведінку системи резервуар – рідина при силовому збудженні поступального руху в зарезонансному діапазоні зміни частот. Розглядається резервуар у формі тіла обертання для випадків сферичного і гіперболоїдального резервуарів. Показано відмінності прояву хвилеутворення в порівнянні з дорезонансним і білярезонансними

режимами збудження. Відмічено, що поверхневе хвилеутворення супроводжується суттєвим проявом модуляції коливань.

В роботі [121] в нелінійній постановці розглянуто задачу про сумісний рух резервуару з рідиною, встановленого на рухомій платформі на пружному закріпленні. Для порівняння розглянуто випадок жорсткого закріплення. Рух системи здійснюється під дією гармонічної зовнішньої горизонтальної сили в околі власної частоти (дорезонансні, резонансні і зарезонансні частоти). Застосування пружного закріплення в якості засобу зменшення коливань вільної поверхні рідини для дорезонансних і резонансних частот не є ефективним, і лише при незначному перевищенні резонансної частоти у вузькому діапазоні зарезонансних частот пружне закріплення сприяє зменшенню коливань вільної поверхні рідини. В процесі коливань рідини на стінках і в центрі резервуару істотно проявляються нелінійні ефекти модуляції коливань, явище антирезонансу, дрейф середнього значення коливань. При цьому пружне закріплення підсилює прояв цих ефектів. У коливаннях резервуару відносно платформи істотно проявляється модуляція і вплив вищих гармонік.

В роботі [315] досліджено задачу про рух циліндричного резервуару, частково заповненого ідеальною рідиною, на маятниковій підвісі. У початковий час відхилення дзеркала вільної поверхні рідини від положення рівноваги описується певним кутом. Проаналізовано перерозподіл кінетичної енергії в системі та пояснюється згасання коливань поверхневих хвиль. Отримані результати якісно узгоджуються з наявними експериментальними даними.

Робота [319] присвячена проблемі динаміки резервуару циліндричної форми, частково заповненого рідиною, на маятниковому підвісі з рухомою точкою підвісу. Проблема розглядається в нелінійній постановці з метою з'ясування впливу підвісу маятника як на частотні характеристики, так і на поведінку системи в близькорезонансній зоні. Аналітичне та чисельне дослідження показує, що власні частоти коливань суттєво змінюються як

для квазітвердого руху маятника, так і для режимів коливань вільної поверхні рідини. Чисельні приклади показують, що резонансні властивості системи для дорезонансного, зарезонансного та резонансного режимів значно відрізняються, але ефект амплітудної модуляції сильно проявляється у всіх випадках.

В роботі [28] досліджено режими коливань вільної поверхні рідини в околі резонансу при заданих кутових рухах резервуару. Математичне моделювання здійснювалось на основі методу типу Г.С. Наріманова з утриманням трьох форм коливань. В статтях М. La Rocca та G. Sciortino [302–305] вивчалися коливання вільної поверхні рідини в резервуарі у формі прямокутного паралелепіпеду, який здійснює задані (до 7°) кутові коливання відносно однієї з головних горизонтальних осей. Були досліджені коливання вільної поверхні рідини в перехідному та усталеному режимі.

Багато інженерних задач руху транспортних засобів з рідиною пов'язані витратами рідини (палива, наприклад). В лінійній теорії для таких розрахунків використовувався метод «заморожених» коефіцієнтів при наявності припущення, що за період коливань вільної поверхні рідини зміною значень коефіцієнтів рівнянь збуреного руху можна знехтувати. В роботах [114, 117] вперше в нелінійній постановці було показано, що більша частина коефіцієнтів нелінійних рівнянь збуреного руху або взагалі не залежить від глибини, або залежить слабо. Виходячи з цього, була розроблена методика перерахування коефіцієнтів в залежності від глибини, причому найбільш суттєвим ефектом є врахування реактивних сил витікання. В [196] досліджуються нелінійні коливання вільної поверхні рідини в циліндричному резервуарі, з якого витікає рідина, а резервуар рухається горизонтально за заданим законом. Явища, пов'язані з ефектом витікання рідини, описуються додатково введеною функцією потенціалу.

В [318] проблема руху циліндричного резервуару, частково заповненого рідиною, на маятниковому підвісі розглядається в комбінованій постановці.

Рух системи відбувається за наявності рівномірного відтоку рідини з нехтуванням місцевими ефектами витікання. Було показано, що побудована математична модель системи описує основні механічні ефекти і не порушує законів збереження. Особливості динаміки системи за наявності відтоку рідини показані на чисельних прикладах поведінки системи при початковому кінематичному збуренні та при зовнішньому імпульсному навантаженні. Охарактеризовано вплив сил Коріоліса на розвиток хвильового руху на вільній поверхні рідини за відсутності та наявності витікання. Було встановлено, що сили Коріоліса сприяють розвитку хвильового руху на вільній поверхні рідини, але пригнічують амплітуди високочастотних нормальних режимів. Також в роботі [123] досліджено динаміку «системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі» в сумісній постановці за наявності рівномірного витікання рідини через дно резервуару. Показано, що побудована математична модель адекватно відображає рух механічної системи при змінному заповненні резервуара. Встановлено, що наявність витікання рідини призводить до зростання внеску нелінійних механізмів у системі, зокрема, помітно зростає амплітуда вертикальної складової головного вектора сил тиску рідини на стінки резервуара, присутні значні модуляції. Розглянуто задачу для різних рівнів початкового заповнення резервуара і показано, що прояви нелінійностей не пояснюються безпосередньо зниженням рівня рідини до певного граничного значення, а присутні за наявності витікання як такого.

Динаміка резервуарів нециліндричної форми, частково заповнених рідиною, є найменш дослідженим розділом динаміки резервуарів з рідиною. Вперше цю задачу у нелінійній постановці дослідив І.О. Луковський [132–134, 137, 138, 141, 142, 145, 206]. Був запропонований опис руху рідини у резервуарі нециліндричної форми на основі недекартової параметризації області, яку займає рідина. Вільна поверхня та стінки порожнини є граничними положеннями ліній еквівалентного рівня. В якості математичного апарату для цих перетворень використовувалось тензорне

обчислення. В роботах [159, 164, 166, 167] побудована модель та досліджена нелінійна динаміка рідини у резервуарі у формі конуса з малим кутом розчину. Для конічної порожнини нелінійна задача спочатку розв'язується в сферичній системі координат, а для побудови рівнянь руху використовується неортогональна система криволінійних координат [145, 206].

В [16–22, 42, 342] застосовується гібридний метод, який використовує точкову дискретизацію за часом та аналітичний розв'язок задачі на кожному часовому кроці. Алгоритм було реалізовано для тіл обертання, однак він дуже істотні похибки: за один період коливань порушення закону збереження маси сягало до 20%, що необхідно визнати явно незадовільним результатом.

І.О. Луковський, О.М. Тимоха, О.В. Солодун та ін. в циклі робіт [185–187, 189, 190, 192, 193, 194, 270–276, 279, 282, 357] на основі варіаційного принципу Бейтмена побудували лінійні та нелінійні математичні моделі руху резервуара у формі конуса (класичного та усіченого), який частково заповнений ідеальною рідиною та може здійснювати задані поступальні та кутові рухи, отримали формули для визначення гідродинамічних сил та моментів, для широкого діапазону геометричних параметрів обчислили значення гідродинамічних коефіцієнтів, включаючи момент інерції рідини.

О.С. Лимарченко в [108, 110, 115, 117] запропоновано метод та математичну модель для дослідження нелінійної динаміки резервуару у формі тіла обертання, частково заповненого рідиною. Метод оснований на варіаційному принципі Гамільтона-Остроградського та використовує недекартову параметризацію області, яку займає рідина. Для інваріантності перетворень відносно геометрії області було застосовано векторний апарат. Аналогічно випадку циліндричного резервуару було проведено виключення потенціалу швидкостей через збурення вільної поверхні рідини, і для довільної кількості утриманих форм коливань розроблено нелінійну

дискретну модель відносно амплітудних параметрів коливань вільної поверхні рідини та параметрів руху тіла-носія.

О.С. Лимарченко, С. Cattani та V.Pilipchuk в роботі [315] розглянуто структуру геометричних нелінійностей в математичній моделі коливань вільної поверхні рідини в резервуарах нециліндричної форми. На відміну від випадку з циліндричним резервуаром, деякі нові типи нелінійностей з'являються в математичному формулюванні задачі. Вони пов'язані з чотирма основними причинами. По-перше, вони визначаються новими формами коливань, які відповідають нециліндричній формі резервуару та враховують деякі нелінійні властивості задачі (наприклад, вони відстежують стінки резервуару вище рівня вільної поверхні). По-друге, визначення потенціальної енергії рідини включає геометрію резервуарів в безпосередній близькості від перетину незбуреної вільної поверхні рідини та стінок резервуару. Третій тип прояву геометричних нелінійностей пов'язаний з компенсацією підвищення рівня рідини за рахунок нециліндричного типу форми резервуару для забезпечення закону збереження маси. Четвертий тип нелінійностей пов'язаний з одночасним проявом фізичних та геометричних нелінійностей. Дослідження показало, що здебільшого прояв нелінійних властивостей плескання рідини, пов'язаних з геометричною природою, зумовлюється нахилом та кривизною стінок резервуару в безпосередній близькості від контакту незбуреної рідини зі стінками резервуару. Проілюстровано деякі загальні властивості геометричних нелінійностей на прикладі трьох випадків форми резервуару, а саме циліндричного, конічного та параболоїдного. Параметри резервуару у формі параболоїда обертання підібрані таким чином, що його стінки мають такий самий нахил біля вільної поверхні рідини, як і конічний резервуар, але в у цьому випадку кривизна проявляється додатково.

В [120] розглянуто задачу силової взаємодії, що виникає в системі «резервуар-рідина» при збудженні руху резервуару горизонтальною гармонічною силою. Резервуар має форму усіченого конуса. Встановлено,

що зі збільшенням частоти силового збудження прояв амплітудної модуляції стає більш істотним, а прояв вищих форм коливань, навпаки, зменшується.

Задача дослідження динаміки системи резервуар-рідина при наявності заданого вертикального руху резервуару або, в розширеній постановці, при наявності поздовжнього збудження руху резервуару є актуальною і до кінця не розв'язаною і на сьогоднішній день. Як відомо з історії механіки, параметричний резонанс в рідині вперше був виявлений в 1831 році М. Фарадеєм [257], який експериментально досліджував коливання вільної поверхні рідини в резервуарі, котрий рухається за гармонічним законом, і встановив, що перша резонансна частота вільної поверхні рідини дорівнює половині частоти збудження резервуара. L. Mathiessen [326, 327] за результатами власних експериментів стверджував, однак, що резонансна частота вільної поверхні рідини і зовнішнього збудження співпадають. Для вирішення цієї суперечності J. Rayleigh [341–349] почав в 1877 році власні дослідження, маючи за мету як вдосконалення постановки експерименту, так створення математичної теорії, яка б була спроможна пояснити це явище. При цьому він використовував результати E. Mathieu [328] з теорії лінійних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами. Benjamin T.B. та Ursell F. [239], напевне, були першими, хто показав, що аналіз хвиль Фарадея в ідеальній рідині у вертикальному циліндричному резервуарі призводить до необхідності розв'язку класичного рівняння Мат'є. Вільна поверхня в їх роботі представлена як сума незалежних функцій (мод), амплітуди яких залежать від часу і є рішеннями рівняння Мат'є. Для кожної із мод в площині параметрів «амплітуда зовнішнього збурення H – частота зовнішнього збурення Ω » було побудовано області стійкості та нестійкості (так звані «резонансні» язики) та з'ясовано, що на площині « H - Ω » вони чередуються. Ці області розділені кривими, на яких розв'язки є гармонічними або субгармонічними, тим самим узгоджуючи спостереження Фарадея та L. Mathiessen.

Надалі проблемою дослідження параметричного резонансу для випадку ідеальної рідини займалися D.J. Lewis, G.I. Taylor, J.W. Miles, L.M. Hocking, Неволін В.Г. та ін. [207, 255, 278, 306, 321, 332–334, 336, 356, 359, 364]. В цих роботах теоретично якісно та кількісно вивчались субгармонічні коливання (з частотою близькою до половини частоти збурення), а також гармонічні та супергармонічні коливання (з частотою, яка перевищує частоту збурення). Секерж-Зенькович С.Я. та В.А. Калиниченко із співробітниками провели серію експериментальних досліджень параметричного резонансу на вільній поверхні рідини в прямокутному резервуарі [8, 42–51, 352]. Дуже детальний огляд робіт з параметричного резонансу, опублікованих до 2005 року, наведено в монографії R.A. Ibrahim [285].

Ikeda T. в роботах [287, 289] експериментально досліджує коливання пружної конструкції, на якій закріплено два прямокутних резервуари, частково заповнених рідиною, під дією вертикального гармонічного збудження. Частота зовнішнього гармонічного збудження відповідає частоті першого параметричного резонансу – вона вдвічі більше власної частоти коливань будь-якого з резервуарів. В роботі розглядаються в теоретичному аспекті тільки двовимірні (в одній площині) поверхневі хвилі Фарадея і резервуари скінченої глибини. Модальні рівняння руху системи отримані на основі методу Гальоркіна з урахуванням нелінійності гідродинамічної сили. Потім на основі методу Ван дер Поля побудовані графіки кривих амплітудно-частотної характеристики. Досліджено вплив рівня заповнення резервуарів та відхилення частот у співвідношенні внутрішнього резонансу. Встановлено, що в залежності від рівня рідини та частоти збудження можуть виникати два типи коливань: одномодові (коливання рідини в одному резервуарі) та двомодові (коливання рідини в обох резервуарах). Коливання вільної поверхні рідини в обох резервуарах при наявності амплітудної та фазової модуляції, а також хаотичні коливання, відносяться до тих ділянок кривих амплітудно-частотної

характеристики, які відповідають одномодовим рішенням при наявності відхилення частот у резонансному частотному співвідношенні.

В роботі Т. Ikeda [288] досліджуються поздовжні коливання пружної конструкції з частково заповненим рідиною циліндричним резервуаром під дією вертикального синусоїдального збудження. Ця система «конструкція – резервуар» є автопараметричною системою. Власна частота цієї конструкції дорівнює подвійній частоті першої осесиметричної форми коливань вільної поверхні рідини. На основі методу Ван дер Поля побудовано амплітудно-частотні характеристики системи. Встановлено, що при зменшенні рівня рідини тип нелінійності змінюється з м'якої на жорстку. І ще один дуже детальний огляд результатів з параметричного резонансу за 2005 – 2015 роки зроблено в статті R.A. Ibrahim [286].

Висновки до розділу

З наведеного вище огляду результатів дослідження задач нелінійної динаміки резервуарів з рідиною із вільною поверхнею при наявності параметричного збурення, силового збудження або керування рухом резервуару випливає, що:

- отримані результати свідчать про високі прикладні властивості як розвиненого варіаційного алгоритму побудови нелінійної моделі, так і самої моделі [117, 118];

- проблема дослідження руху резервуару при різних видах параметричного збурення, силового збудження та керування має теоретичне і практичне значення і потребує подальших досліджень, як в плані нових механічних постановок задач, так і в плані апробації існуючих методів та алгоритмів на повнорозмірній нелінійній дискретній моделі, яка враховує сумісний рух та багаточастотну взаємодію між резервуаром та рідиною.

2. УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗАДАЧІ ФАРАДЕЯ ПРИ НАЯВНОСТІ ДОДАТКОВИХ СТУПЕНІВ ВІЛЬНОСТІ РЕЗЕРВУАРУ

Як відомо із історії механіки, параметричний резонанс в механічній системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею» вперше експериментально досліджував Фарадей в 1831 році [257]. Циліндричний резервуар, частково заповнений водою, був встановлений на спеціальному лабораторному устаткуванні і мав можливість рухатись у вертикальній площині за заданим гармонічним законом. Результатом експерименту було встановлення Фарадеєм того факту, що перша резонансна частота вільної поверхні рідини дорівнює половині частоті збурення резервуару. Оскільки резервуар рухається тільки вертикально за заданим законом, коливання рідини ніяк не впливають на характер його руху. Однак у більшості практичних застосувань (качка судна на хвилях, політ ракети-носія і т.п.) конструкція з рідиною може здійснювати поступальні та кутові рухи у різних площинах як за рахунок коливань вільної поверхні рідини, так і за рахунок наявності зовнішніх силових або моментних збурень. При цьому маса рідини може суттєво перевищувати масу резервуару, а тому врахування сумісного руху резервуару та рідини з вільною поверхнею та їх взаємодії є визначним фактором.

Таким чином, врахування можливості рухів резервуару, що відрізняються від заданих вертикальних, та рухомості рідини, яка також може суттєво впливати на динаміку руху системи, дозволяє скласти класифікацію узагальнень задачі Фарадея:

- резервуар рухається у вертикальній площині за заданим законом та може здійснювати горизонтальні переміщення за рахунок коливань вільної поверхні рідини, тобто система отримує додатковий ступень вільності – можливість руху резервуару в горизонтальній площині (п. 2.2);

- резервуар рухається у вертикальній площині за заданим законом та може здійснювати горизонтальні переміщення за рахунок коливань вільної поверхні рідини при наявності пружного амортизатора (п. 2.3);

- резервуар висить на маятниковому підвісі, точка підвісу рухається у вертикальній площині за заданим законом, резервуар може здійснювати кутові коливання за рахунок коливань вільної поверхні рідини, тобто система отримує додатковий ступень вільності – можливість кутових коливань резервуару (п. 2.4);

- резервуар рухається вертикально за рахунок підведеної сили, яка змінюється за гармонічним законом, тобто система отримує додатковий ступень вільності – можливість руху резервуару в вертикальній площині (п. 2.4);

- резервуар рухається вертикально за рахунок підведеної сили, яка змінюється за гармонічним законом, і горизонтально за рахунок коливань вільної поверхні рідини, тобто система отримує два додаткових ступеня вільності (п. 2.5);

- резервуар висить на маятниковому підвісі, точка підвісу рухається у вертикальній площині за рахунок сили, яка змінюється за гармонічним законом, резервуар може здійснювати як кутові коливання за рахунок коливань вільної поверхні рідини, так і вертикальні рухи, тобто система отримує два додаткових ступеня вільності (п. 2.5);

- резервуар рухається у вертикальній площині за заданим законом в полі слабкої гравітації, тобто необхідно враховувати сили поверхневого натягу на вільній поверхні рідини (п. 2.5).

При цьому для забезпечення повноти постановки задачі використаний наступний підхід: відмова від гіпотези о можливості нехтування коливаннями на власних частотах системи (врахування коливань вільної поверхні рідини на власних та комбінаційних частотах є визначним), дослідження динаміки системи на основі нелінійної математичної багатомодової моделі (12 форм коливань) та врахування сумісного руху

резервуару та рідини [117, 118]. Ця узагальнена математична модель динаміки сумісного руху системи «циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею» представлена у п. 2.1.

2.1. Узагальнена математична модель динаміки сумісного руху системи «циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею»

Розглядається динамічна система, яка складається із двох взаємодіючих компонентів: циліндричного резервуару та рідини, яка його частково заповнює.

Для циліндричного резервуару приймаються такі припущення:

- резервуар є абсолютно твердим тілом;
- резервуар може бути нерухомим;
- резервуар може здійснювати поступальні рухи під дією активних зовнішніх сил;
- резервуар може здійснювати кутові коливання під дією активних зовнішніх моментів;

Правомірність припущення про абсолютну твердість стінок резервуару випливає з того факту, що власні частоти коливань рідини, які мають практичне значення, значно менше власних частот коливань резервуару як пружної оболонки із рідиною.

Для рідини, що частково заповнює резервуар, приймаються наступні припущення [189, 199]:

- рідина є ідеальною, нестисливою, однорідною;
- початковий рух рідини є безвихровим;
- переміщення та швидкості резервуару є величинами скінченними, а переміщення та швидкості вільної поверхні рідини є величинами першого порядку малості.

Правомірність припущення про ідеальність рідини, що заповнює резервуар, випливає з результатів експериментальних досліджень [189, 199], в яких доведено, що в діапазоні змін осьових прискорень, які

представляють найбільший практичний інтерес ($0,001g_0 \leq g \leq 5g_0$), ефект в'язкості за час розвитку перехідного процесу виявляється лише в появі дисипативних сил, які можуть бути враховані окремо (інтегрально). Для резервуарів з гладкими стінками дисипативні сили менше сил інерційних на кілька порядків, і при розв'язанні багатьох практичних задач вони взагалі не враховуються. За короткий проміжок часу розвитку перехідного процесу рідина веде себе як ідеальна, за виключенням пристінкового шару, товщина якого на чотири-п'ять порядків менше характерного розміру системи – радіусу резервуару.

Правомірність припущення про нестисливість рідини випливає з того факту, що ефекти стисливості проявляються лише під час руху рідини із швидкостями, близькими до швидкості звуку, а в даному випадку швидкість частинок вільної поверхні рідини менше швидкості розповсюдження звуку у рідині на три порядки.

Припущення про однорідність рідини означає, що протягом перехідного процесу у рідині не з'являються ніякі газові, рідинні або тверді включення.

Узагальнена математична модель динаміки сумісного руху системи «циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею» розроблена в роботах О.С. Лимарченко [117, 118]. Основою для побудови моделі були ідеї методів теорії збурень, сформульовані Г.С. Наримановим для даного класу задач, та варіаційний алгоритм реалізації. Особливістю моделі (та використаного підходу взагалі) є умовний поділ побудови розв'язку задачі на два етапи: побудова незалежних розкладів змінних, які задовольняють всім кінематичним граничним умовам задачі з відповідною точністю на основі застосування методів нелінійної механіки та методів Гальоркіна; побудова дискретної моделі системи на основі застосування методу Канторовича до варіаційного формулювання задачі динаміки на основі принципу Гамільтона-Остроградського. Підхід, запропонований О.С. Лимарченком в роботах [117, 118], вперше дозволив отримати вираз

а) декартові системи координат

б) циліндрична система координат

Введемо умовно нерухому систему координат $O_1X_1Y_1Z_1$, систему координат $Oxyz$, незмінно пов'язану з резервуаром, та систему координат $OY_1Y_2Y_3$ з початком в точці O , осі якої паралельні відповідно осям системи $O_1X_1Y_1Z_1$ (Рис. 2.1а). Точка O обрана в деякій внутрішній точці спочатку незбуреної вільної поверхні рідини (в центрі незбуреної вільної поверхні рідини, якщо він існує), а ось Oz направлена в сторону зовнішньої нормалі до незбуреної вільної поверхні рідини. Рух точки O в системі $O_1X_1Y_1Z_1$ заданий радіусом-вектором $\vec{\varepsilon}(t)$, а обертальний рух системи $Oxyz$ відносно $O_1X_1Y_1Z_1$ заданий трьома кутами повороту $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. При цьому кут α_1 визначений як кут повороту системи $Oxyz$ відносно осі OY_1 , кут α_2 – кут повороту системи відносно нового положення осі OY_2 , а кут α_3 – кут повороту системи відносно нового положення осі OY_3 . Введемо до розгляду орти системи координат $OY_1Y_2Y_3 - \{\vec{y}_1^0, \vec{y}_2^0, \vec{y}_3^0\}$ та системи координат $Oxyz -$

$\{\vec{x}^0, \vec{y}^0, \vec{z}^0\} = \{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3\}$. Тоді матрицю переходу між системами координат $Oxyz$ та $OY_1Y_2Y_3$ можна представити у наступному вигляді

$$\vec{y}_i^0 = e_{ij} \vec{i}_j, \text{ де } e_{11} = \cos \alpha_2 \cos \alpha_3, e_{12} = -\cos \alpha_2 \sin \alpha_3, e_{13} = \cos \alpha_1,$$

$$e_{21} = \cos \alpha_1 \sin \alpha_3 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3,$$

$$e_{22} = \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3, e_{23} = -\sin \alpha_1 \cos \alpha_2,$$

$$e_{31} = \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3,$$

$$e_{32} = \sin \alpha_1 \cos \alpha_3 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3, e_{33} = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2.$$

Вираз для компонент кутової швидкості $\vec{\omega}$ у зв'язаній системі координат буде таким (точка над змінною означає похідну за часом t)

$$\omega_x = \omega_1 = \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_3,$$

$$\omega_x = \omega_1 = \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_3,$$

$$\omega_x = \omega_1 = \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_3.$$

Таким чином, сукупність параметрів ε_i та α_i повністю характеризують рух резервуару в умовно нерухомій системі координат $O_1X_1Y_1Z_1$.

Для опису руху обмеженого об'єму рідини введемо наступні позначення: τ – область, яку займає рідина; S – вільна поверхня рідини; Σ – змочувана поверхня рідини; L – контур контакту трьох середовищ «газ – тіло – рідина». При цьому відсутність індексу у позначеннях вказує на те, що дані позначення застосовуються до збуреного об'єму рідини, а наявність індексу «нуль» – до незбуреного об'єму рідини.

Оскільки припускається, що рідина в початковий момент часу була безвихровою, то і в подальші моменти часу завдяки ідеальності її рух залишиться безвихровим, інакше потенціальним, тому введемо функцію потенціалу швидкостей $\phi(\vec{r}, t)$. В силу специфіки задачі, яка розглядається, коли область має частину границі, яка є вільною і наперед невідомою, введемо до розгляду рівняння вільної поверхні рідини $z = \xi(r, \theta, t)$ у

циліндричній системі координат. Рівняння $z = 0$ визначає незбурену поверхню рідини S_0 .

Математичне формулювання задачі про рух системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» може бути приведено до сукупності залежностей, які являють собою вимоги кінематичного характеру, динамічних рівнянь та початкових умов. З точки зору загальних властивостей опису механічних систем на основі принципу Гамільтона-Остроградського необхідно кінематичні граничні умови розглядати як механічні в'язи, які обмежують варіації невідомих змінних. При цьому динамічні граничні умови отримуються із варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського як природні. Для досліджуваної механічної системи до кінематичних граничних умов відносяться вимоги нерозривності потоку рідини в області τ , умови неперетікання рідини на границі контакту тіло – рідина та умови неперетікання рідини через вільну поверхню рідини.

Динамічні граничні умови та рівняння руху резервуару можуть бути отримані на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського

$$\delta I = 0, \quad I = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

де L – функція Лагранжа, яка має вигляд

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} [\vec{\nabla} \varphi + \vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega})]^2 d\tau + \frac{1}{2} M_T (\dot{\varepsilon})^2 + \\ & + \frac{1}{2} I_T^{ij} \omega_i \omega_j - (M_T + M_F) g \varepsilon_z - \\ & - \rho g (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \int_{S_0} r \cos \theta (\xi + H) dS - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\rho g(\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) \int_{S_0} r \sin \theta (\xi + H) dS - \\
& -\frac{1}{2} \rho g \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \int_S (\xi^2 - H^2) dS - \\
& - (M_T h_T + M_F h_F) g (1 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2) - \\
& - \sigma \int_S \sqrt{1 + (\vec{\nabla} \xi)^2} dS - \sigma \cos \theta_1 \int_{L_0} \xi dl + \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{M} \cdot \vec{\chi}. \quad (2.1)
\end{aligned}$$

Зауважимо, що на відміну від роботи [93], ізопериметрична вимога збереження об'єму рідини в функцію Лагранжа L не входить, так як у подальшому представлення збурення вільної поверхні рідини ξ буде обране таким чином, щоб вимога збереження об'єму рідини виконувалась тотожно.

У виразі функції Лагранжа L (2.1) застосовані наступні позначення: ρ – густина рідини, g – прискорення вільного падіння, H – рівень рідини в резервуарі, M_T та M_F – маса резервуару та рідини, h_T та h_F – зміщення центрів мас резервуару та рідини відносно площини незбуреної вільної поверхні рідини S_0 , σ – коефіцієнт сил поверхневого натягу на вільній поверхні рідини, θ_1 – контактний кут, I_T^{ij} – тензор інерції резервуару, визначений відносно точки O , з осями, що відповідають осям системи координат, зв'язаною з резервуаром $\vec{F}$ та $\vec{M}$ – головний вектор та головний момент зовнішніх сил відносно точки O , які діють на резервуар, $\vec{\chi} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ – умовне представлення кутів повороту резервуару відносно умовно нерухомої системи координат.

Для ефективного використання варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського необхідно побудувати представлення невідомих змінних задачі про рух резервуару та рідини з вільною поверхнею, які наперед задовольняють кінематичним граничним умовам. Відповідно до робіт [93,

96, 105], вибирається наведена нижче форма розв'язку задачі про рух рідини, яка частково заповнює резервуар

$$\xi = \sum_i a_i(t) \psi_i(r, \theta), \quad \varphi = \sum_i b_i(t) \psi_i(r, \theta) \frac{\cosh \kappa_i(z+H)}{\kappa_i \sinh \kappa_i H},$$

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_0 + \sum_i \vec{q}_i(t) \psi_i(r, \theta) \frac{\cosh \kappa_i(z+H)}{\kappa_i \sinh \kappa_i H}. \quad (2.2)$$

Тут $\psi_i(r, \theta)$ – повна ортогональна система функцій в області S_0 , яка може бути знайдена із розв'язку крайової задачі Неймана з параметром κ_n

$$\Delta \psi_k + \kappa_k^2 \psi_k = 0 \text{ в області } S_0, \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial n} = 0 \text{ на } L_0 \quad (2.3)$$

Вектор-функція $\vec{\Omega}_0$ є потенціалом Стокса-Жуковського, який можна отримати як розв'язок крайової задачі Неймана для рівняння Лапласа

$$\Delta \vec{\Omega}_0 = 0 \text{ в області } S_0, \quad \frac{\partial \vec{\Omega}_0}{\partial n} = \vec{r} \times \vec{n} \text{ на } L_0. \quad (2.4)$$

Наведені в (2.2) представлення шуканих змінних ξ , φ та $\vec{\Omega}_0$ в силу вибору функцій ψ_k тотожно задовольняють рівнянням неперервності та умовам неперетікання. Розклади (2.2) змінних ξ , φ та $\vec{\Omega}_0$ по формі співпадають з розв'язком задачі про рух обмеженого об'єму рідини у рухомому резервуарі, отриманому на основі лінійної постановки задачі. Тобто в межах використаного підходу розв'язок нелінійної задачі про сумісний рух резервуару з рідиною пропонується шукати у вигляді розкладів по власним функціям розв'язку лінійної задачі.

Найбільш складним в побудові незалежних (з точку зору аналітичної механіки) розкладів змінних ξ , φ та $\vec{\Omega}_0$ є задовольняння кінематичній граничній умові на вільній поверхні рідини. Ця проблема може бути розв'язана на основі методу Гальоркіна з використанням основ нелінійної механіки. Найбільш ефективно ця задача розв'язується у випадку, коли

координатні функції є ортогональними та задовольняють кінематичним граничним умовам на змочуваній границі.

Розглянемо метод виключення кінематичної граничної умови на вільній поверхні рідини, який використовує метод Гальоркіна та основи нелінійної механіки [117, 118]. Для того, щоб наближено виключити кінематичну граничну умову на вільній поверхні рідини, необхідно вибрати набір базових параметрів системи, через котрі будуть у подальшому представлятися залежні змінні. З теореми Лагранжа відомо, що безвихровий рух ідеальної нестисливої однорідної рідини повністю визначається рухом її границь, тобто кількість ступенів вільності руху всього об'єму рідини з вільною поверхнею дорівнює кількості ступенів вільності руху самої вільної поверхні. Виходячи з цього, доцільно в якості базового параметру системи, який характеризує рух рідини з вільною поверхнею, обрати змінну ξ , а φ та $\vec{\Omega}$ вважати залежними змінними. З використанням розкладів (2.2) вибір незалежних параметрів здійснюється наступним чином: сукупність амплітудних параметрів розкладу збурення вільної поверхні рідини в ряд по формам власних коливань рідини розглядається як незалежна, а параметри розкладів скалярної φ та векторної $\vec{\Omega}$ складових потенціалу швидкостей – відповідно b_i та $\vec{q}_i$ – розглядаються як залежні від параметрів a_i . При цьому сукупність амплітудних параметрів a_i повністю характеризує кінематику рідини з вільною поверхнею.

Для визначення функціональної залежності b_i та $\vec{q}_i$ від параметрів a_i розглянемо кінематичні граничні умови на вільній поверхні рідини

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{\nabla} \xi \cdot \vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (2.5)$$

та для зв'язку з потенціалом швидкостей $\vec{\Omega}$

$$\vec{\nabla} \xi \cdot \vec{\nabla} \Omega_k - \frac{\partial \Omega_k}{\partial z} + \vec{i}_k (\vec{i}_3 \times \vec{r}) = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.6)$$

Тут введено позначення Ω_k для компонент векторної складової потенціалу швидкостей $\vec{\Omega}$, і, таким чином, кінематична гранична умова з точки зору механічних параметрів a_i являє собою одну неголономну (2.3) та три голономні (2.4) механічні в'язи. Далі процедура визначення залежності b_i та $\bar{q}_i$ від параметрів a_i здійснюється на основі методу Гальоркіна.

В кінематичні граничні умови (2.3) та (2.4) підставляємо розклади змінних (2.2), множимо отримані вирази на ψ_p та інтегруємо отримане співвідношення по S_0 . При цьому гіперболічні функції розкладаємо в ряд по ξ в околі $\xi = 0$, а вже потім здійснюємо інтегрування. Після виконання вказаної процедури співвідношення (2.3) та (2.4) будуть мати вигляд

$$\sum_n b_n N_p \delta_{np} = \sum_n \dot{a}_n N_p \delta_{np} + \sum_{n,m} b_n a_m \gamma_{nmp}^w N_p +$$

$$+ \sum_{n,m,l} b_n a_m a_l \delta_{nmlp}^b + \frac{1}{2} \sum_{n,m,l,k} b_n a_m a_l a_k \frac{\kappa_n}{\tanh(\kappa_n H)} h_{nmlkp}^b, \quad (2.7)$$

$$\sum_{j,k} \bar{q}_j a_k \gamma_{jkp}^w N_p + \sum_{j,k,l} \bar{q}_j a_k a_l \delta_{jklp}^b + \frac{1}{2} \sum_{j,k,l} \bar{q}_j a_k a_l a_m \frac{\kappa_j}{\tanh(\kappa_j H)} h_{jklmp}^b +$$

$$+ \sum_j a_j (\vec{\beta}_{jp}^{1*})_i + \sum_{j,k} a_j a_k (\vec{\gamma}_{jkp}^{1*})_i = \frac{\partial \Omega_{0i}}{\partial z} - (\vec{r} \times \vec{i}_3) \cdot \vec{i}_i + \sum_j (\bar{q}_j)_i N_p \delta_{jp} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{j,k,i} a_j a_k a_i (\vec{\delta}_{jklp}^{1*})_i - \frac{1}{6} \sum_{j,k,l,m} a_j a_k a_l a_m (\vec{h}_{jklmp}^{1*})_i. \quad (2.8)$$

В співвідношеннях (2.5) та (2.6) утримані члени до четвертого порядку малості відносно параметрів a_i . Тут і далі утримана кількість членів пояснюється тим фактом, тому що поставлено задачу отримати систему рівнянь, яка описує рух рідини з вільною поверхнею з точністю до кубів амплітудних параметрів a_i . Коефіцієнти при a_i , b_i та $\bar{q}_i$ у співвідношеннях (2.5) та (2.6) являють собою квадратури від функцій ψ_p та $\vec{\Omega}_0$, які обчислюються по області S_0 .

Виходячи із загальних законів нелінійної механіки, будемо шукати залежності величин b_k та $\vec{q}_k$ від a_k у вигляді

$$b_n = b_n^{(1)} + b_n^{(2)} + b_n^{(3)} + b_n^{(4)}, \quad (2.9)$$

$$\vec{q}_n = \vec{q}_n^{(1)} + \vec{q}_n^{(2)} + \vec{q}_n^{(3)}, \quad (2.10)$$

де числові індекси у круглих скобках відповідають порядкам малості величин. Після підстановки розкладів (2.7) та (2.8) у співвідношення (2.5) та (2.6) шляхом порівняння величин однакових порядків малості отримаємо

$$\begin{aligned} b_p^{(1)} &= \dot{a}_p; \quad b_p^{(2)} = \sum_{n,m} \frac{\dot{a}_n a_m}{N_p \kappa_n \tanh(\kappa_n H)} (\gamma_{nmp}^2 - \kappa_n^2 \gamma_{nmp}^0); \\ b_p^{(3)} &= \sum_{n,m} \frac{b_n^{(2)} a_m}{N_p \kappa_n \tanh(\kappa_n H)} (\gamma_{nmp}^2 - \kappa_n^2 \gamma_{nmp}^0) + \sum_{n,m} \frac{\dot{a}_n a_m a_l}{N_p} \left(\delta_{nmp}^2 - \frac{1}{2} \kappa_n^2 \delta_{nmp}^0 \right); \\ b_p^{(4)} &= \sum_{n,m} \frac{b_n^{(3)} a_m}{N_p \kappa_n \tanh(\kappa_n H)} (\gamma_{nmp}^2 - \kappa_n^2 \gamma_{nmp}^0) + \sum_{n,m} \frac{b_n^{(2)} a_m a_l}{N_p} \left(\delta_{nmlp}^2 - \frac{1}{2} \kappa_n^2 \delta_{nmlp}^0 \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n,m,l,k} \frac{\dot{a}_n a_m a_l a_k \kappa_n}{N_p \tanh(\kappa_n H)} \left(h_{nmlkp}^2 - \frac{\kappa_n^2}{3} h_{nmlkp}^0 \right); \\ q_{pi}^{(1)} &= \sum_j a_j \frac{(\vec{\beta}_{jp}^{1*})_i}{N_p}; \quad q_{pi}^{(2)} = \sum_{j,k} \left[\frac{q_{ij}^{(1)} a_k}{N_p \kappa_i \tanh(\kappa_i H)} (\gamma_{jkp}^2 - \kappa_j^2 \gamma_{jkp}^0) + a_j a_k \frac{(\vec{\gamma}_{jkp}^{1*})_i}{N_p} \right]; \\ q_{pi}^{(3)} &= \sum_{j,k} \frac{q_{ij}^{(2)} a_k}{N_p \kappa_i \tanh(\kappa_i H)} (\gamma_{jkp}^2 - \kappa_j^2 \gamma_{jkp}^0) + \\ &\quad + \sum_{j,k,l} \left[\frac{q_{ij}^{(1)} a_k a_l}{N_p} (\delta_{jklp}^2 - \frac{\kappa_j^2}{2} \delta_{jklp}^0) + \frac{a_j a_k a_l}{2 N_p} (\vec{\delta}_{jklp}^{1*})_i \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Після нескладних рекурентних перетворень співвідношення (2.9) будуть мати вигляд

$$b_i = \dot{a}_i + \sum_{n,m} \dot{a}_n a_m \gamma_{nmi}^w + \sum_{n,m,l} \dot{a}_n a_m a_l \delta_{nmli}^w + \sum_{n,m,l,k} \dot{a}_n a_m a_l a_k h_{nmlki}^w, \quad (2.12)$$

$$\vec{q}_p = \sum_j a_j \vec{\beta}_{jp}^u + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{\gamma}_{jkp}^u + \sum_j a_j a_k a_l \vec{\delta}_{jklp}^u. \quad (2.13)$$

Коефіцієнти у співвідношеннях (2.10) та (2.11) є квадратурами від функцій ψ_i та $\vec{\Omega}_0$, які обчислюються по області S_0 . Співвідношення (2.10) та (2.11) отримані в аналітичному вигляді з точністю до величин, які гарантують отримання рівнянь руху з урахуванням нелінійних членів до третього порядку малості включно для довільної кількості амплітудних параметрів.

Після виключення кінематичних граничних умов на вільній поверхні рідини побудова дискретної моделі сумісного руху резервуару та рідини, яка частково його заповнює, здійснюється на основі методу Канторовича, який застосовується до варіаційного формулювання задачі динаміки системи, яка отримана на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського [89–95].

За звичай метод Канторовича складається з трьох етапів:

- вибір форми розкладів шуканих змінних;
- інтегрування виразів, з яких складається функціонал, на основі застосованих розкладів;
- отримання рівнянь для визначення підсумкової форми розв'язку.

Особливість задачі, яка розглядається, полягає в необхідності виключення кінематичної граничної умови на вільній поверхні рідини – в класичній схемі методу Канторовича цей крок відсутній, а в даному випадку є найважливішою складовою і виконується між першим та другим етапами.

Підставимо розклади (2.2) у функцію Лагранжа (2.1). В зв'язку з тим, що просторові змінні відокремлені і форма їх входження в ці розклади визначена однозначно, можна здійснити інтегрування по просторовим змінним у всіх інтегралах функції Лагранжа. При цьому обчислення інтегралів по контуру L_0 та площині S_0 здійснюється елементарно, а от інтегрування по рухомому об'єму виконується за наступним алгоритмом. Оскільки область інтегрування є циліндром, то для будь-якого інтегралу

$$\int_{\tau} F d\tau = \int_{S_0-H}^{\xi} F r dr d\theta dz.$$

Обчислення інтегралу із змінною верхньою межею інтегрування ξ будемо здійснювати на основі методів теорії збурень відповідно до формули

$$\int_a^{b+\xi} f(z) dz = \int_a^b f(z) dz + \xi f(b) + \frac{1}{2} \xi^2 f'(b) + \frac{1}{6} \xi^3 f''(b) + \frac{1}{24} \xi^4 f'''(b) + \dots, \quad (2.14)$$

яку можна отримати із розкладу в ряд Тейлора функції $F(\xi) = \int_{-H}^{\xi} f(z) dz$ в околі $\xi = 0$ при наявності припущення щодо малості величини ξ .

Оскільки для всіх інтегралів по області τ у функції Лагранжа здійснюється однотипне перетворення, розглянемо його використання на прикладі інтегралу

$$L_1 = \frac{1}{2} \rho \int_{S_0-H}^{\xi} \left[(\vec{\nabla}_2 \varphi_0)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right)^2 \right] dz dS.$$

Підставимо розклади для φ із (2.2) в цей інтеграл і отримаємо

$$\begin{aligned} L_1 = & \frac{1}{2} \rho \int_{S_0}^{\xi} \left\{ \sum_{i \neq j} \frac{b_i b_j \vec{\nabla} \psi_i \vec{\nabla} \psi_j}{\kappa_i \kappa_j \sinh(\kappa_i H) \sinh(\kappa_j H)} \int_{-H}^{\xi} \cosh \kappa_i(z+H) \cosh \kappa_j(z+H) dz + \right. \\ & + \sum_{i \neq j} \frac{b_i b_j \psi_i \psi_j}{\sinh(\kappa_i H) \sinh(\kappa_j H)} \int_{-H}^{\xi} \sinh \kappa_i(z+H) \sinh \kappa_j(z+H) dz + \\ & + \sum_i \frac{b_i^2 (\vec{\nabla} \psi_i)^2}{\kappa_i^2 \sinh^2(\kappa_i H)} \int_{-H}^{\xi} \cosh^2 \kappa_i(z+H) dz + \\ & \left. + \sum_i \frac{b_i^2 \psi_i^2}{\sinh^2(\kappa_i H)} \int_{-H}^{\xi} \cosh^2 \kappa_i(z+H) dz \right\} dS. \end{aligned}$$

Інтеграли від гіперболічних функцій можуть бути обчислені аналітично в загальному вигляді, наприклад, за допомогою формули (2.12). Після інтегрування по координаті z та заміни гіперболічних функцій їх розкладами в ряд Тейлора або обчислюючи інтеграли по формули (2.12) після підстановки розкладів ξ у відповідності до (2.2) отримаємо

$$L_1 = \frac{1}{2} \rho \sum_{i,j,k} b_i b_j a_k \frac{\gamma_{ijk}^2 + \kappa_i \kappa_j \tanh(\kappa_i H) \tanh(\kappa_j H) \gamma_{ijk}^0}{\kappa_i \kappa_j \tanh(\kappa_i H) \tanh(\kappa_j H)} +$$

$$\frac{1}{2} \rho \sum_i \frac{b_i^2 N_i}{\kappa_i \tanh(\kappa_i H)} + \frac{1}{2} \rho \sum_{i,j,k} b_i b_j a_k a_l \left[\frac{\delta_{ijkl}^2 + \kappa_i^2 \delta_{ijkl}^0}{2\kappa_i \tanh(\kappa_i H)} + \frac{\delta_{ijkl}^2 + \kappa_j^2 \delta_{ijkl}^0}{2\kappa_j \tanh(\kappa_j H)} \right].$$

Аналогічним чином перетворюються і інші інтеграли по об'єму.

Після виконання інтегрування по просторовим змінним з точністю до величин не нижче четвертого порядку малості отримаємо перетворену функцію Лагранжа, яка відповідає дискретній моделі системи, що розглядається [117, 118], у вигляді

$$L = \frac{1}{2} \rho \sum_i b_i^2 \frac{N_i}{\kappa_i \tanh(\kappa_i H)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \rho \sum_{i,j,k} b_i b_j a_k \left(\frac{\gamma_{ijk}^2}{\kappa_i \kappa_j \tanh(\kappa_i H) \tanh(\kappa_j H)} + \gamma_{ijk}^0 \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \rho \sum_{i,j,k} b_i b_j a_k a_l \left[\frac{\delta_{ijkl}^2 + \kappa_i^2 \delta_{ijkl}^0}{2\kappa_i \tanh(\kappa_i H)} + \frac{\delta_{ijkl}^2 + \kappa_j^2 \delta_{ijkl}^0}{2\kappa_j \tanh(\kappa_j H)} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \rho \sum_{p,s=1}^3 \omega_p \omega_s \left\{ I_T^{ps} + A_{ps}^2 + \sum_i (a_i A_{psi}^2 + q_{is} A_{pi}^1) + \sum_{i,j} (a_i a_j A_{psij}^2 + \right.$$

$$+ q_{ip} q_{is} \frac{N_i \delta_{ij}}{\kappa_i \tanh(\kappa_i H)} + q_{is} a_j A_{pij}^1 \left. \right) + \sum_{i,j,k} [a_i a_j a_k A_{psijk}^2 +$$

$$+ q_{ip} q_{js} a_k \left(\frac{\gamma_{ijk}^2}{\kappa_i \kappa_j \tanh(\kappa_i H) \tanh(\kappa_j H)} + \gamma_{ijk}^0 \right) + q_{is} a_j a_k A_{pijk}^1 \left. \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i,j,k,l} \left[a_i a_j a_k a_l A_{psijkl}^2 + q_{ip} q_{js} a_k a_l \left(\frac{\delta_{ijkl}^2 + \kappa_i^2 \delta_{ijkl}^0}{2\kappa_i \tanh(\kappa_i H)} + \frac{\delta_{ijkl}^2 + \kappa_j^2 \delta_{ijkl}^0}{2\kappa_j \tanh(\kappa_j H)} \right) + \right. \\
& + q_{is} a_j a_k a_l A_{pijl}^1 \left. \right] + \frac{1}{2} \rho \sum_{p=1}^3 \omega_p \left\{ \sum_i \left(b_i A_{pi} + q_{ip} b_i \frac{2N_i}{\kappa_i \tanh(\kappa_i H)} \right) + \sum_{i,j} b_i a_j A_{pij}^1 + \right. \\
& + \sum_{i,j,k} \left[b_i a_j a_k A_{pijk}^1 + 2q_{ip} b_j a_k \left(\frac{\gamma_{ijk}^2}{\kappa_i \kappa_j \tanh(\kappa_i H) \tanh(\kappa_j H)} + \gamma_{ijk}^0 \right) \right] + \\
& + \sum_{i,j,k,l} \left[b_i b_j a_k a_l A_{pijkl}^1 + 2q_{ip} b_j a_k a_l \left(\frac{\delta_{ijkl}^2 + \kappa_i^2 \delta_{ijkl}^0}{2\kappa_i \tanh(\kappa_i H)} + \frac{\delta_{ijkl}^2 + \kappa_j^2 \delta_{ijkl}^0}{2\kappa_j \tanh(\kappa_j H)} \right) \right] \left. \right\} + \\
& + \rho \sum_i b_i \left(\dot{\vec{\varepsilon}} \frac{\vec{\alpha}_i^1}{\kappa_i^2} + \dot{\varepsilon}_z \frac{\alpha_i^0}{\kappa_i} \tanh\left(\frac{\kappa_i H}{2}\right) \right) + \rho \sum_{i,j} b_i a_j \left(\frac{\dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{\beta}_{ij}^1}{\kappa_i \tanh(\kappa_i H)} + \varepsilon_z N_i \delta_{ij} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \rho \sum_{i,j} b_i a_j a_k \left(\dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{\gamma}_{ijk}^1 + \varepsilon_z \frac{\kappa_i}{\tanh(\kappa_i H)} \gamma_{ijk}^0 \right) + \\
& + \frac{1}{6} \rho \sum_{i,j} b_i a_j a_k a_l \left(\dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{\delta}_{ijkl}^1 \frac{\kappa_i}{\tanh(\kappa_i H)} + \dot{\varepsilon}_z \kappa_i^2 \delta_{ijkl}^0 H \right) + \rho \sum_{p=1}^3 \omega_p \left\{ \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{B}_p^1 + \right. \\
& + \sum_i \left[a_i \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{B}_{pi}^1 + q_{ip} \left(\frac{\dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{\alpha}_i^1}{\kappa_i} + \dot{\varepsilon}_z \frac{\alpha_i^0}{\kappa_i} \tanh\left(\frac{\kappa_i^2 H}{2}\right) \right) \right] + \\
& + \sum_{i,j} \left[a_i a_j \vec{B}_{pij}^2 + q_{ip} a_j \left(\frac{\dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{\beta}_{ij}^1}{\kappa_i \tanh(\kappa_i H)} + \varepsilon_z N_i \delta_{ij} \right) \right] + \\
& + \sum_{i,j,k} \left[a_i a_j a_k \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{B}_{pijk}^3 + \frac{1}{2} q_{ip} a_j a_k \left(\dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{\gamma}_{ijk}^1 + \dot{\varepsilon}_z \gamma_{ijk}^0 \frac{\kappa_i}{\tanh(\kappa_i H)} \right) \right] + \\
& + \sum_{i,j,k,l} \left[a_i a_j a_k a_l \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{B}_{pijkl}^4 + \frac{1}{6} q_{ip} a_j a_k a_l \left(\frac{\dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{\delta}_{ijkl}^1 \kappa_i}{\tanh(\kappa_i H)} + \dot{\varepsilon}_z \kappa_i^2 \delta_{ijkl}^0 \right) \right] \left. \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}(M_T + M_F)(\dot{\vec{\varepsilon}})^2 + (M_T + M_F)g\varepsilon_z + \\
& + \rho g(\cos\alpha_1 \sin\alpha_1 \cos\alpha_3 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_3)(\sum_i a_i \alpha_i^c + Hl^c) + \\
& + \rho g(\cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 + \sin\alpha_1 \cos\alpha_3)(\sum_i a_i \alpha_i^c + Hl^c) + \\
& + \frac{1}{2}\rho g \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \sum_i a_i^2 N_i - \sigma S_0 - \frac{\sigma}{2} \sum_i a_i^2 \kappa_i^2 N_i - \frac{\sigma}{8} \sum_{i,j,k,l} a_i a_j a_k a_l \delta_{ijkl}^4 - \\
& - (M_T h_T + M_F h_F)g(1 - \cos\alpha_1 \cos\alpha_2) + \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{M} \cdot \vec{\chi}. \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Далі, після підстановки у вираз функції Лагранжа (2.13) виразів (2.10) та (2.11) для параметрів b_i та $\bar{q}_i$ через a_i отримаємо перетворену функцію Лагранжа вільної механічної системи [94, 97, 117, 118], у параметрах a_i , ε_i , α_i

$$\begin{aligned}
L = & \frac{1}{2}\rho \sum_i \dot{a}_i^2 \alpha_i^\nu + \frac{1}{2}\rho \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \beta_{ij}^\nu + \frac{1}{2}\rho \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \gamma_{ijk}^\nu + \frac{1}{2}\rho \sum_{i,j,k,l} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k a_l \delta_{ijkl}^\nu + \\
& + \frac{1}{2}\rho \sum_{p,s=1}^3 \omega_p \omega_s \left(I_T^{ps} + A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^2 \right) + \\
& + \frac{1}{2}\rho \sum_{p=1}^3 \omega_p \left(\sum_i \dot{a}_i E_{pi}^{1*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + \\
& + \rho \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \sum_i \dot{a}_i \vec{B}_i^1 + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 + \sum_{i,j,k,l} \dot{a}_i a_j a_k a_l \vec{B}_{ijkl}^4 \right\} + \\
& + \rho \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \sum_{p=1}^3 \omega_p \left(\vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{F}_{pij}^3 + \sum_{i,j} a_i a_j a_k \vec{F}_{pijk}^4 \right) + \frac{1}{2}(M_T + M_F)(\dot{\vec{\varepsilon}})^2 + \\
& + \rho g(\cos\alpha_1 \sin\alpha_1 \cos\alpha_3 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_3)(\sum_i a_i \alpha_i^c + Hl^c) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \rho g (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_3) \left(\sum_i a_i \alpha_i^c + H l^c \right) - (M_T + M_F) g \varepsilon_z + \\
& + \frac{1}{2} \rho g \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \sum_i a_i^2 N_i - \sigma \cos \theta_1 \sum_i a_i \lambda_i - \frac{\sigma}{2} \sum_i a_i^2 \kappa_i^2 N_i - \\
& - \frac{\sigma}{8} \sum_{i,j,k,l} a_i a_j a_k a_l \delta_{ijkl}^4 - (M_T + M_F) g \varepsilon_z - (M_T h_T + M_F h_F) g (1 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2) - \\
& - (M_T h_T + M_F h_F) g (1 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2) + \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{M} \cdot \vec{\chi}. \tag{2.16}
\end{aligned}$$

У співвідношенні (2.14) використане припущення про малість кутів нахилу резервуару, а значить, і його кутових швидкостей.

В функції Лагранжа (2.14) виключені всі в'язі (кінематичні граничні умови) і як параметри використовуються тільки незалежні змінні – амплітуди форм коливань a_i , координати поступального руху резервуару $\vec{\varepsilon}$ та кути нахилу $\vec{\alpha}$. Функція Лагранжа у вигляді (2.14) гетерогенна (неоднорідна) по своїй природі, оскільки описує сумісний рух системи з нескінченним числом ступенів вільності – рідини, та твердого тіла з скінченим числом ступенів вільності – резервуара. Перехід від співвідношення (2.13) до співвідношення (2.14) можна розглядати як перехід від гетерогенної (дискретно-континуальної) структури реальної системи до деякої гомогенної (дискретної) моделі.

Із перетвореної функції Лагранжа вільної системи можуть бути отримані рівняння Лагранжа другого роду

$$\begin{aligned}
& \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \delta_{ir} + \sum_j a_j A_{rij}^3 + \sum_{j,k} a_j a_k A_{rijk}^4 \right\} + \\
& + \ddot{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\alpha_r^v} \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i \vec{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{B}_{rijk}^4 \right\} + \\
& + \frac{1}{2 \alpha_r^v} \sum_{s=1}^3 \ddot{\alpha}_s \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_s} \left[E_{pr}^{1*} + \sum_i a_i E_{pri}^{2*} + \sum_{i,j} a_i a_j E_{prij}^{3*} \right] \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j C_{ijr}^3 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k C_{ijk r}^4 + \\
&+ \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p=1}^3 \omega_p \left[\sum_i \dot{a}_i (E_{pir}^{2*} - E_{pri}^{2*}) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j (E_{pij r}^{3*} + E_{pir j}^{3*} - E_{prij}^{3*} + E_{prji}^{3*}) \right] + \\
&+ \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p,s=1}^3 \omega_p \omega_s \left[E_{psr}^2 + \sum_i a_i (E_{psir}^3 + E_{psri}^3) \right] + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p=1}^3 \omega_p^{(k)} \left[E_{pr}^{1*} + \sum_i a_i E_{pri}^{2*} + \sum_{i,j} a_i a_j E_{prij}^{3*} \right] + \\
&+ \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left[\sum_i a_i \vec{D}_{ir}^2 + \sum_i \dot{a}_i a_j \vec{D}_{ijr}^3 + \sum_i \dot{a}_i a_j a_k \vec{D}_{ijk r}^4 \right] + \frac{1}{2\alpha_r^v} \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \sum_{p=1}^3 \omega_p \left[\vec{F}_{pr}^2 + \sum_i a_i (\vec{F}_{pir}^3 + \vec{F}_{pri}^3) + \right. \\
&+ \left. \sum_{i,j} a_i a_j (\vec{F}_{pij r}^4 + \vec{F}_{pir j}^4 + \vec{F}_{prij}^4) \right] + g \frac{N_r}{\alpha_r^v} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 a_r + \\
&+ g \frac{\alpha_r^c}{\alpha_r^v} (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) + \\
&+ g \frac{\alpha_r^s}{\alpha_r^v} (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) \tag{2.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_i \ddot{a}_i \left(\vec{B}_i^1 + \sum_j a_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right) + \ddot{\vec{\varepsilon}} + \\
&+ \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_{s=1}^3 \ddot{\alpha}_s \left[\sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_s} \left(\vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_j a_k \vec{F}_{pij}^3 \right) \right] = \\
&= \frac{\vec{F}}{M_F + M_T} + \vec{g} + \frac{\rho}{M_F + M_T} \left(\sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right) - \\
&- \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_{p=1}^3 \omega_p \left(\sum_i \dot{a}_i \vec{F}_{pi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \vec{F}_{pij}^3 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k \vec{F}_{pijk}^4 \right) - \\
&- \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_{p=1}^3 \omega_p^{(k)} \left(\vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 \right). \tag{2.18}
\end{aligned}$$

$$\sum_i \ddot{a}_i \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(E_{pi}^{1*} + \sum_j a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{j,k} a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + 2\ddot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left[\bar{F}_p^1 + \sum_i a_i \bar{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \bar{F}_{pij}^3 + \sum_i a_i a_j a_k \bar{F}_{pijk}^4 \right] + \\
& + \sum_{n=1}^3 \ddot{\alpha}_n \left[2 \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{\alpha}_n} \left(\frac{1}{\rho} J_{res}^{ps} + A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) \right] = \\
& = 2 \sum_{p,s=1}^3 \left(\omega_{p,r}^* \omega_s + \omega_p^{(k)} \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \right) \left(\frac{1}{\rho} J_{res}^{ps} + A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) + \\
& + \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left(\sum_i \dot{a}_i E_{pi}^{1*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + 2\dot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left(\bar{F}_p^1 + \sum_i a_i \bar{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \bar{F}_{pij}^3 \right) + \\
& + 2 \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \omega_s \left(\sum_i \dot{a}_i E_{psi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{psij}^3 \right) + \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(\sum_i \dot{a}_i \dot{a}_j E_{pij}^{2*} + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + \\
& + 2\dot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(\sum_i \dot{a}_i \bar{F}_{pi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \bar{F}_{pij}^3 \right) + \frac{2g}{\rho} (M_T h_T + M_F h_F) \frac{\partial}{\partial \alpha_r} (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2) + \\
& + 2g \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \left[(\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \left(\sum_i a_i \alpha_i^c + Hl^c \right) + \right. \\
& \left. + (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_3) \left(\sum_i a_i \alpha_i^s + Hl^s \right) \right] + \frac{2}{\rho} M_{ex}^r. \quad (2.19)
\end{aligned}$$

Система рівнянь руху (2.15) – (2.17) в параметрах a_i , ε_i , α_i доповнена узагальненими дисипативними силами, розрахованими на основі результатів робіт [197, 199]. При цьому в рівняннях величини ε_i вважаються скінченими, а a_i та α_i утримано з точністю до величин третього порядку малості включно. Система складається з $N + 6$ рівнянь другого порядку, де N – кількість утриманих у розгляді форм коливань рідини.

В рівняннях руху (2.15) – (2.17) δ_{ij} – символ Кронекера

$$\omega_p^{(k)} = - \sum_{n=1}^3 \dot{\alpha}_n \frac{\partial \omega_p}{\partial \alpha_n}; \quad \omega_{p,k}^* = \frac{\partial \omega_p}{\partial \alpha_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_k} \right).$$

Сукупність рівнянь руху (2.15) – (2.17) представляє собою дискретну модель системи «тіло – рідина з вільною поверхнею». При побудові цієї нелінійної моделі використовувались наступні припущення:

- рідина ідеальна, однорідна, нестислива, а її початковий рух безвихровий;
- область, яку займає рідина, має циліндричну форму і основний рух відбувається в околі вертикального положення циліндру;
- кутові переміщення резервуару та кутові швидкості малі;
- амплітудні параметри руху вільної поверхні рідини a_i вважаються малими і в рівняннях утримуються члени до третього порядку малості включно.

В рівняння руху (2.15) – (2.17) входять індексні вирази, які характеризують в'язи в системі, інерціальні та статичні характеристики конструкції, а також зовнішні сили та моменти, які діють на конструкцію. При цьому всі ці коефіцієнти обчислюються в квадратурах від форм коливань вільної поверхні рідини ψ_i та потенціалів Стокса-Жуковського:

$$\begin{aligned}\alpha_i^0 &= \int_{S_0} \psi_i dS; \quad \bar{\alpha}_i^1 = \int_{S_0} \vec{\nabla} \psi_i dS; \quad N_i = \int_{S_0} \psi_i^2 dS; \quad \bar{\beta}_{ij}^1 = \int_{S_0} \vec{\nabla} \psi_i \psi_j dS; \\ \gamma_{ijk}^0 &= \int_{S_0} \psi_i \psi_j \psi_k dS; \quad \gamma_{ijk}^2 = \int_{S_0} \vec{\nabla} \psi_i \vec{\nabla} \psi_j \psi_k dS; \quad \bar{\gamma}_{ijk}^1 = \int_{S_0} \vec{\nabla} \psi_i \psi_j \psi_k dS; \\ \delta_{ijkl}^0 &= \int_{S_0} \psi_i \psi_j \psi_k \psi_l dS; \quad \delta_{ijkl}^2 = \int_{S_0} \vec{\nabla} \psi_i \vec{\nabla} \psi_j \psi_k \psi_l dS; \\ \bar{\delta}_{ijkl}^1 &= \int_{S_0} \vec{\nabla} \psi_i \psi_j \psi_k \psi_l dS; \quad \delta_{ijkl}^4 = \int_{S_0} \vec{\nabla} \psi_i \cdot \vec{\nabla} \psi_j \vec{\nabla} \psi_k \cdot \vec{\nabla} \psi_l dS; \\ h_{ijklm}^0 &= \int_{S_0} \psi_i \psi_j \psi_k \psi_l \psi_m dS; \quad h_{ijklm}^2 = \int_{S_0} \vec{\nabla} \psi_i \cdot \vec{\nabla} \psi_j \psi_k \psi_l \psi_m dS; \\ (\bar{\beta}_{jp}^{1*})_i &= \int_{S_0} \left[\vec{\nabla} \psi_j \cdot \vec{\nabla} \Omega_{0i} - \psi_j \frac{\partial^2 \Omega_{0i}}{\partial z^2} + (\vec{\nabla} \psi_j \times \vec{r}) \cdot \vec{i}_i \right] \Big|_{z=0} \psi_p dS;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{\gamma}_{jkp}^{1*})_i = \int_{S_0} \left[\vec{\nabla} \psi_j \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \Omega_{0i}}{\partial z} \right) - \psi_j \frac{\partial^3 \Omega_{0i}}{\partial z^3} + \right. \\ \left. + (\vec{\nabla} \psi_j \times \vec{z}_0) \cdot \vec{i} \right]_{z=0} \psi_k \psi_p dS; \end{aligned}$$

$$(\vec{\delta}_{jklp}^{1*})_i = \int_{S_0} \left[\vec{\nabla} \psi_j \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{\partial^2 \Omega_{0i}}{\partial z^2} \right) - \psi_j \frac{\partial^4 \Omega_{0i}}{\partial z^4} \right]_{z=0} \psi_k \psi_l \psi_p dS;$$

$$\lambda_i = \int_{L_0} \psi_i dS;$$

$$A_{ps}^2 = \int_{S_0-H}^0 \int \vec{\nabla} \Omega_{0p} \cdot \vec{\nabla} \Omega_{0s} dz dS; \quad A_{psi}^2 = \int_{S_0-H}^0 \int \left[\vec{\nabla} \Omega_{0p} \cdot \vec{\nabla} \Omega_{0s} \right]_{z=0} \psi_i dz dS;$$

$$A_{psij}^3 = \frac{1}{2} \int_{S_0-H}^0 \int \frac{\partial}{\partial z} \left[\vec{\nabla} \Omega_{0p} \cdot \vec{\nabla} \Omega_{0s} \right]_{z=0} \psi_i \psi_j dz dS;$$

$$\begin{aligned} A_{pi}^1 = 2 \int_{S_0-H}^0 \int \left[\vec{\nabla} \psi_i \cdot \vec{\nabla} \Omega_{0p} \frac{\cosh \kappa_i(z+H)}{\kappa_i \sinh(\kappa_i H)} + \right. \\ \left. + \psi_i \frac{\partial \Omega_{0p}}{\partial z} \frac{\sinh \kappa_i(z+H)}{\kappa_i \sinh(\kappa_i H)} \right] dz dS; \end{aligned}$$

$$A_{pij}^1 = 2 \int_{S_0} \left[\frac{\vec{\nabla} \Omega_{0p} \cdot \vec{\nabla} \psi_i}{\kappa_i \tanh(\kappa_i H)} + \frac{\partial \Omega_{0p}}{\partial z} \psi_i \right]_{z=0} \psi_j dS;$$

$$\begin{aligned} A_{pij}^1 = \int_{S_0} \left[\vec{\nabla} \psi_i \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \Omega_{0p}}{\partial z} \frac{1}{\kappa_i \tanh(\kappa_i H)} + \Omega_{0p} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \Omega_{0p}}{\partial z} \frac{\kappa_i}{\tanh(\kappa_i H)} + \frac{\partial^2 \Omega_{0p}}{\partial z^2} \right) \psi_i \right]_{z=0} \psi_j \psi_k dS; \end{aligned}$$

$$G_p^x = \int_{S_0-H}^0 \int \left(\frac{\partial \Omega_{0p}}{\partial r} \cos \theta - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \Omega_{0p}}{\partial \theta} \right) dz dS;$$

$$\begin{aligned}
G_{pi}^x &= \int_{S_0} \left(\frac{\partial \Omega_{0p}}{\partial r} \cos \theta - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \Omega_{0p}}{\partial \theta} \right) \Big|_{z=0} \psi_i dS; \\
G_{pij}^x &= \frac{1}{2} \int_{S_0} \left(\frac{\partial^2 \Omega_{0p}}{\partial r \partial z} \cos \theta - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 \Omega_{0p}}{\partial \theta \partial z} \right) \Big|_{z=0} \psi_i \psi_j dS; \\
G_{pijk}^x &= \frac{1}{6} \int_{S_0} \left(\frac{\partial^3 \Omega_{0p}}{\partial r \partial z^2} \cos \theta - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^3 \Omega_{0p}}{\partial \theta \partial z^2} \right) \Big|_{z=0} \psi_i \psi_j \psi_k dS; \\
G_p^y &= \int_{S_0-H}^0 \left(\frac{\partial \Omega_{0p}}{\partial r} \sin \theta + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \Omega_{0p}}{\partial \theta} \right) dz dS; \\
G_{pi}^y &= \int_{S_0} \left(\frac{\partial \Omega_{0p}}{\partial r} \sin \theta + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \Omega_{0p}}{\partial \theta} \right) \Big|_{z=0} \psi_i dS; \\
G_{pij}^y &= \frac{1}{2} \int_{S_0} \left(\frac{\partial^2 \Omega_{0p}}{\partial r \partial z} \sin \theta + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial^2 \Omega_{0p}}{\partial \theta \partial z} \right) \Big|_{z=0} \psi_i \psi_j dS; \\
G_{pijk}^y &= \frac{1}{6} \int_{S_0} \left(\frac{\partial^3 \Omega_{0p}}{\partial r \partial z^2} \sin \theta + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial^3 \Omega_{0p}}{\partial \theta \partial z^2} \right) \Big|_{z=0} \psi_i \psi_j \psi_k dS; \\
G_p^z &= \int_{S_0-H}^0 \frac{\partial \Omega_{0p}}{\partial z} dz dS; \quad G_{pi}^z = \int_{S_0} \left(\frac{\partial \Omega_{0p}}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} \psi_i dS; \\
G_{pij}^z &= \frac{1}{2} \int_{S_0} \left(\frac{\partial^2 \Omega_{0p}}{\partial z^2} \right) \Big|_{z=0} \psi_i \psi_j dS; \\
G_{pijk}^z &= \frac{1}{6} \int_{S_0} \left(\frac{\partial^3 \Omega_{0p}}{\partial z^3} \right) \Big|_{z=0} \psi_i \psi_j \psi_k dS; \quad \alpha_i^s = \int_{S_0} \psi_i r \sin \theta dS; \\
\alpha_i^c &= \int_{S_0} \psi_i r \cos \theta dS; \quad l^c = \int_{S_0} r \cos \theta dS; \quad l^s = \int_{S_0} r \sin \theta dS.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

На основі квадратур, які визначаються у формулах (2.20), перерахуванням або одноразовим підсумовуванням обчислюються допоміжні коефіцієнти та коефіцієнти у рівняннях

$$\gamma_{nmp}^w = \frac{\kappa_n^2 - \kappa_m^2 - \kappa_p^2}{2N_p \kappa_n \tanh(\kappa_n H)} \gamma_{nmp}^0; \quad \delta_{nmlp}^b = \delta_{nmlp}^2 - \frac{1}{2} \kappa_n^2 \delta_{nmlp}^0;$$

$$\delta_{nmp}^w = \frac{1}{N_p} \delta_{nmlp}^b + \sum_i \gamma_{nli}^w \gamma_{imp}^w; \quad h_{nmlkp}^b = h_{nmlkp}^2 - \frac{1}{3} \kappa_n^2 h_{nmlkp}^0;$$

$$h_{nmlkp}^w = \sum_i \left(\gamma_{imp}^w \delta_{nlki}^w + \frac{1}{N_p} \gamma_{nki}^w \delta_{imlp}^b \right) + \frac{\kappa_n}{2N_p \tanh(\kappa_n H)} h_{nmlkp}^b;$$

$$\vec{\beta}_{jp}^u = \frac{\vec{\beta}_{jp}^{1*}}{N_p}; \quad \vec{\gamma}_{lkp}^u = \sum_j \gamma_{jkp}^w \vec{\beta}_{lj}^u + \frac{1}{N_p} \vec{\gamma}_{lkp}^{1*};$$

$$\vec{\delta}_{klmp}^u = \sum_j \left(\vec{\gamma}_{lmj}^u \gamma_{jkp}^w + \frac{1}{N_p} \vec{\beta}_{mj}^u \delta_{jklp}^b \right) + \frac{\vec{\delta}_{mklp}^{1*}}{2N_p};$$

$$\vec{\gamma}_{ijk}^f = \frac{\gamma_{ijk}^2}{\kappa_i \kappa_j \tanh(\kappa_i H) \tanh(\kappa_j H)} + \gamma_{ijk}^0;$$

$$\delta_{ijkl}^f = \frac{\delta_{ijkl}^2 + \kappa_i^2 \delta_{ijkl}^0}{2\kappa_i \tanh(\kappa_i H)} + \frac{\delta_{ijkl}^2 + \kappa_j^2 \delta_{ijkl}^0}{2\kappa_j \tanh(\kappa_j H)};$$

$$\alpha_i^v = \frac{N_i}{\kappa_i \tanh(\kappa_i H)}; \quad \gamma_{ijk}^v = \left(\frac{\kappa_k^2 - \kappa_j^2 - \kappa_i^2}{2\kappa_i \kappa_j \tanh(\kappa_i H) \tanh(\kappa_j H)} - 1 \right) \gamma_{ijk}^0;$$

$$\delta_{ijkl}^v = \delta_{ijkl}^f + 2\delta_{jkli}^w \alpha_i^v + \sum_m \gamma_{jlm}^w (2\gamma_{imk}^f + \alpha_m^v \gamma_{ikm}^w);$$

$$E_{ps}^2 = A_{ps}^2; \quad E_{psi}^2 = A_{psi}^2 + \sum_m \left(\vec{\beta}_{ik}^u \right)_s A_{pk}^1;$$

$$E_{psij}^2 = A_{psij}^2 + \sum_k \left[\left(\vec{\gamma}_{ijk}^u \right)_s A_{pk}^1 + \alpha_k^v \left(\vec{\beta}_{ik}^u \right)_p \left(\vec{\beta}_{jk}^u \right)_s + \left(\vec{\beta}_{ik}^u \right)_s A_{pk}^2 \right];$$

$$E_{pi}^{1*} = A_{pi}^1; \quad E_{pij}^{2*} = A_{pij}^1 + 2\alpha_i^v \left(\vec{\beta}_{ji}^u \right)_p + \sum_k \gamma_{ijk}^w A_{pk}^1;$$

$$E_{pijk}^{3*} = A_{pijk}^1 + 2\alpha_i^v \left(\vec{\gamma}_{jki}^u \right)_p + \sum_k \left[\delta_{ijkl}^w A_{pi}^1 + 2\gamma_{ijl}^w \alpha_l^v \left(\vec{\beta}_{kl}^u \right)_p + \right. \\ \left. + 2\gamma_{ilk}^f \left(\vec{\beta}_{jl}^u \right)_p + \gamma_{ilk}^w A_{pij}^1 \right];$$

$$\vec{B}_i^1 = \left\{ \frac{\alpha_i^x}{\kappa_i^2}; \frac{\alpha_i^y}{\kappa_i^2}; 0 \right\}; \quad \vec{B}_{ij}^2 = \left\{ \frac{\beta_{ij}^x}{\kappa_i \tanh(\kappa_i H)} + \sum_k \gamma_{ijk}^w \frac{\alpha_i^x}{\kappa_i^2}; \dots; N_i \delta_{ij} \right\};$$

$$\vec{B}_{ijk}^3 = \left\{ \frac{1}{2} \gamma_{ijk}^x + \sum_n \left[\delta_{ijkn}^w \frac{\alpha_n^x}{\kappa_n^2} + \gamma_{ikn}^w \frac{\beta_{nj}^x}{\kappa_n \tanh(\kappa_n H)} \right]; \dots; \right.$$

$$\left. \gamma_{ikj}^w N_j + \frac{\kappa_i \gamma_{ijk}^0}{\tanh(\kappa_i H)} \right\};$$

$$\vec{B}_{ijkl}^4 = \left\{ \sum_n \left[h_{ijnl}^w \frac{\alpha_n^x}{\kappa_n^2} + \delta_{ijkn}^w \frac{\beta_{ni}^x}{\kappa_n \tanh(\kappa_n H)} + \frac{1}{2} \gamma_{inl}^w \gamma_{nj}^x \right] + \frac{\kappa_i \delta_{ijkl}^x}{6 \tanh(\kappa_i H)}; \right.$$

$$\left. \dots; \delta_{ijkl}^0 N_i + \frac{1}{2} \sum_n \gamma_{inl}^w \gamma_{nj}^0 \frac{\kappa_n}{\tanh(\kappa_n H)} + \frac{1}{6} \kappa_i^2 \delta_{ijkl}^w \right\};$$

$$\vec{F}_p^1 = \vec{G}_p^1; \quad \vec{F}_{pi}^2 = \left\{ \left(\vec{G}_{pi}^2 \right)_x + \sum_n \left(\vec{\beta}_{in}^u \right)_p \frac{\alpha_n^x}{\kappa_n^2}; \dots; \left(\vec{G}_{pi}^x \right)_z \right\};$$

$$\vec{F}_{pij}^3 = \left\{ \sum_n \left(\vec{\gamma}_{ijn}^u \right)_p \frac{\alpha_n^x}{\kappa_n^2} + \left(\vec{\gamma}_{pij}^1 \right)_p + \sum_n \left(\vec{\beta}_{in}^1 \right)_p \frac{\beta_{nj}^x}{\kappa_n \tanh(\kappa_n H)}; \dots; \right.$$

$$\left. \left(\vec{\beta}_{pij}^1 \right)_z + \left(\vec{\beta}_{pij}^1 \right)_p N_j \right\};$$

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{pijk}^4 = & \left\{ \sum_n \left[\left(\vec{\delta}_{ijkn}^4 \right)_p \frac{\alpha_n^x}{\kappa_n^2} + \left(\vec{\gamma}_{ikn}^u \right)_p \frac{\beta_{nj}^x}{\kappa_n \tanh(\kappa_n H)} + \frac{1}{2} \left(\vec{\beta}_{in}^1 \right)_p \gamma_{nj}^x \right] + \left(\vec{G}_{pijk}^u \right)_x; \right. \\
& \left. \dots; \left(\vec{\gamma}_{ikj}^u \right)_p N_j + \left(\vec{G}_{pijk}^u \right)_z + \frac{1}{2} \sum_n \vec{\beta}_{in}^u \frac{\kappa_n \gamma_{nj}^0}{\tanh(\kappa_n H)} \right\}; \\
A_{rij}^3 = & \frac{1}{2\alpha_r^v} \left(\gamma_{rij}^v + \gamma_{irj}^v \right); \quad A_{rijk}^4 = \frac{1}{2\alpha_r^v} \left(\delta_{rijk}^v + \delta_{irjk}^v \right); \\
C_{ijr}^3 = & \frac{1}{2\alpha_r^v} \left(\gamma_{rij}^v - 2\gamma_{irj}^v \right); \quad C_{ijk}^4 = \frac{1}{\alpha_r^v} \left(\delta_{ijk}^v - 2\delta_{irjk}^v \right); \\
\vec{D}_{ir}^2 = & \frac{1}{\alpha_r^v} \left(\vec{B}_{ir}^2 - \vec{B}_{ri}^2 \right); \quad \vec{D}_{ijr}^3 = \frac{2}{\alpha_r^v} \left(\vec{B}_{ijr}^3 - \vec{B}_{rij}^3 \right); \\
\vec{D}_{ijk}^4 = & \frac{2}{\alpha_r^v} \left(\vec{B}_{ijk}^4 - 2\vec{B}_{rijk}^4 \right); \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Вирази для компонентів векторів у співвідношеннях (2.21) по осі Oy повністю ідентичні компонентам по осі Ox , тому для них проставлені три крапки у (2.21).

Співвідношення (2.20), (2.21) повністю визначають всю сукупність коефіцієнтів рівнянь руху (2.17) – (2.19), обчислення яких фактично є побудовою скінченновимірної математичної моделі нелінійної задачі динаміки сумісного руху резервуару з рідиною. При наявності припущень, зроблених при побудові скінченновимірної моделі, обчислена сукупність коефіцієнтів повністю характеризує геометричні властивості шуканого об'єму рідини.

Обмеження, які використовувались для побудови моделі (2.17) – (2.19), є типовими при застосуванні аналітичних методів розв'язку задач даного класу. На основі алгоритму, описаного вище, можна побудувати математичну модель руху тіла з рідиною до величин будь-якого наперед заданого порядку малості. Обмеження на кутові відхилення резервуару (до

10°) не є принциповими, однак при великих кутах відхилення область, яку займає рідина, перестає бути циліндричною, а амплітудні параметри a_i вже не будуть малими величинами, що принципово порушує припущення, прийняті в побудованій моделі.

На відміну від інших методів прийнятий підхід дозволяє отримати нелінійну дискретну модель механічної системи мінімальної розмірності – її розмірність співпадає з кількістю ступенів вільності механічної системи, якщо під кількістю ступенів вільності для рідини з вільною поверхнею вважати кількість розглянутих форм коливань вільної поверхні. Ці форми коливань за визначенням не протирічать в'язям, які накладаються на систему, а їх незалежність забезпечується лінійною незалежністю системи функцій, що описують форми руху вільної поверхні рідини.

Існує ціла низка фізичних передумов, які дозволяють визначити необхідну кількість форм коливань. Як свідчать результати експериментальних робіт [86, 196, 245], у більшості практично важливих випадків істотно збуджуються лише кілька перших форм коливань. Цей ефект обумовлено тим, що вищі гармоніки в реальних системах сильно демпфуються за рахунок специфічної дії сил поверхневого натягу [96, 98, 100, 196, 199]. Результати експериментальних робіт [86, 196, 245] також можуть бути основою для обґрунтування спрощень математичної моделі тіло – рідина, які, однак, не впливають на відображення основних властивостей механічної системи.

Для математичного моделювання механічних властивостей рівнянь руху (2.17) – (2.19) в якості форм коливань обрана система функцій ψ_i , яка у складі системи функцій $\varphi_i = \psi_i \frac{\cosh \kappa_i(z+H)}{\kappa_i \sinh \kappa_i H}$ є розв'язком лінійної задачі (2.3) та має вигляд

$$\psi_{1,2}(r, \theta) = J_1\left(\frac{\kappa_1^{(1)}}{R} r\right) \cdot \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}, \quad \psi_{7,8}(r, \theta) = J_3\left(\frac{\kappa_3^{(1)}}{R} r\right) \cdot \frac{\sin(3\theta)}{\cos(3\theta)}, \quad (2.22)$$

$$\psi_3(r, \theta) = J_0\left(\frac{\kappa_0^{(1)}}{R} r\right), \psi_{9,10}(r, \theta) = J_1\left(\frac{\kappa_1^{(2)}}{R} r\right) \cdot \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)},$$

$$\psi_{4,5}(r, \theta) = J_2\left(\frac{\kappa_2^{(1)}}{R} r\right) \cdot \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)}, \psi_{11,12}(r, \theta) = J_1\left(\frac{\kappa_1^{(3)}}{R} r\right) \cdot \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

$$\psi_6(r, \theta) = J_0\left(\frac{\kappa_0^{(2)}}{R} r\right),$$

Введемо в системі умовний розподіл форм коливань рідини на класи по ступені їх впливу на динаміку процесів [117, 118]. До першої групи будемо відносити форми коливань $\psi_1 - \psi_3$, які переважно впливають на формування механічних процесів в системі. Їх амплітуди збудження утримуються в рівняннях з точністю до величин третього порядку малості. До другої групи будемо відносити форми коливань $\psi_4 - \psi_8$, які, перш за все, додають у систему якісні, а не кількісні зміни. Ці форми визначають несиметричність профілів хвиль на вільній поверхні рідини та прояв низки нелінійних внутрішніх зв'язків. Їх амплітуди збудження утримуються в рівняннях з точністю до величин другого порядку малості. До третьої групи форм коливань доцільно включити гармоніки $\psi_9 - \psi_{12}$, які повинні забезпечити достатньою крутизну профілів хвиль на вільній поверхні рідини, тобто вищі гармоніки спектру. Урахування вищих гармонік необхідно для дослідження перехідних процесів руху систем тіл з рідиною.

2.2. Додатковий ступінь вільності – можливість руху резервуару в горизонтальній площині

Розглянемо узагальнення задачі Фарадея, коли резервуар отримує додатковий ступінь вільності – можливість поступального руху в горизонтальній площині [69, 73, 293]. Вважаємо, що в поперечному (горизонтальному) напрямку на резервуар не діють ніякі зовнішні сили, і тому він здійснює коливання тільки за рахунок коливань вільної поверхні рідини.

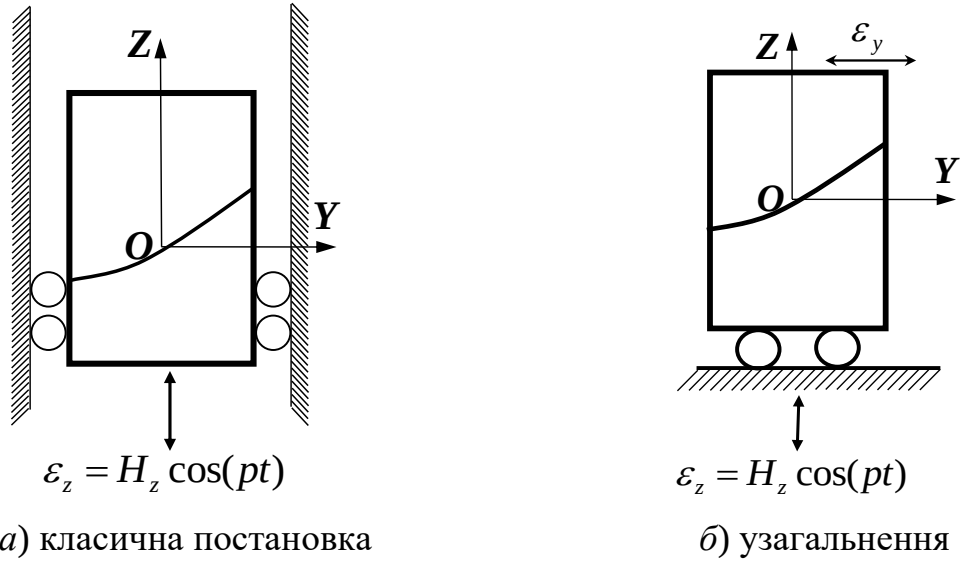


Рис. 2.2. Механічна модель системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» в задачі Фарадея

В класичній задачі Фарадея (Рис. 2.2а) резервуар може здійснювати вертикальні рухи за заданим гармонічним законом $\epsilon_z = H_z \cos(pt)$, тому отриману дискретну модель у вигляді рівнянь (2.17) – (2.18) необхідно спростити. В рівняннях (2.17) доданки з $\ddot{\epsilon}_x$, $\dot{\epsilon}_x$, $\ddot{\epsilon}_y$ та $\dot{\epsilon}_y$ необхідно виключити, а доданок з $\ddot{\epsilon}_z$ перенести в праву частину як відомий. Рівняння (2.18) квазітвердого руху резервуару взагалі необхідно виключити як надлишкові. В результаті цих перетворень отримаємо дискретну модель системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею», яка здійснює рухи вздовж вертикальної осі Oz за заданим законом

$$\begin{aligned}
 \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \beta_{ri}^q + \sum_j a_j \gamma_{rij}^q + \sum_{i,j} a_i a_j \delta_{rijk}^q \right\} = & \quad (2.23) \\
 = -\ddot{\epsilon}_z \cdot \left\{ B_r^{1z} + \sum_i a_i B_{ri}^{2z} + \sum_{i,j} a_i a_j B_{rij}^{3z} + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k B_{rijk}^{4z} \right\} + \\
 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j (\gamma_{ijr}^q - 2\gamma_{rij}^q) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k (\delta_{ijk}^q - 2\delta_{rijk}^q) - \frac{1}{2} g \alpha_r^s - g N_r a_r + \\
 + \dot{\epsilon}_z \cdot \left\{ B_r^{1z} + \sum_i a_i (B_{ir}^{2z} - B_{ri}^{2z}) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j 2(B_{ijr}^{3z} - B_{rij}^{3z}) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k 3(B_{ijk}^{4z} - B_{rijk}^{4z}) \right\}
 \end{aligned}$$

В узагальненій задачі Фарадея (Рис. 2.2б) будемо вважати, що резервуар здійснює вертикальні рухи за заданим гармонічним законом $\varepsilon_z = H_z \cos(pt)$, а також може здійснювати переміщення ε_y в горизонтальній площині вздовж осі Оу. Здійснюючи відповідні спрощення повної дискретної моделі (2.17) – (2.18), отримаємо дискретну модель системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» для узагальненої задачі Фарадея, коли резервуар має додатковий ступінь вільності (можливість горизонтального руху)

$$\begin{aligned}
& \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \beta_{ri}^q + \sum_j a_j \gamma_{rij}^q + \sum_{i,j} a_i a_j \delta_{rijk}^q \right\} = \quad (2.24) \\
& + \ddot{\varepsilon}_y \cdot \left\{ B_r^{1y} + \sum_i a_i B_{ri}^{2y} + \sum_{i,j} a_i a_j B_{rij}^{3y} + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k B_{rijk}^{4y} \right\} = \\
& = -\ddot{\varepsilon}_z \cdot \left\{ B_r^{1z} + \sum_i a_i B_{ri}^{2z} + \sum_{i,j} a_i a_j B_{rij}^{3z} + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k B_{rijk}^{4z} \right\} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_i a_j (\gamma_{ijr}^q - 2\gamma_{rij}^q) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k (\delta_{ijk}^q - 2\delta_{rijk}^q) - \frac{1}{2} g \alpha_r^s - g N_r a_r + \\
& + \dot{\varepsilon}_y \cdot \left\{ B_r^{1y} + \sum_i a_i (B_{ir}^{2y} - B_{ri}^{2y}) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j 2(B_{ijr}^{3y} - B_{rij}^{3y}) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k 3(B_{ijk}^{4y} - B_{rijk}^{4y}) \right\} + \\
& + \dot{\varepsilon}_z \cdot \left\{ B_r^{1z} + \sum_i a_i (B_{ir}^{2z} - B_{ri}^{2z}) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j 2(B_{ijr}^{3z} - B_{rij}^{3z}) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k 3(B_{ijk}^{4z} - B_{rijk}^{4z}) \right\}, \\
& \frac{\rho}{(M_F + M_T)} \left\{ \sum_i \ddot{a}_i \left[B_i^{1y} + \sum_j a_j B_{ij}^{2y} + \sum_{j,k} a_j a_k B_{ijk}^{3y} \right] \right\} + \ddot{\varepsilon}_y = \quad (2.25) \\
& = \frac{F_y}{(M_F + M_T)} - \frac{\rho}{(M_F + M_T)} \left\{ \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j B_{ij}^{2y} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k 2B_{ijk}^{3y} \right\}.
\end{aligned}$$

Як відомо із теорії параметричних коливань [24, 225], існують області в площині параметрів (p, H_z) , коли розв'язки рівнянь (2.23) або (2.24) – (2.25) будуть необмежено зростати, тобто області динамічної нестійкості.

Побудова областей нестійкості буде відповіддю на питання: при яких значеннях параметрів зовнішнього силового збурення резервуару (p , H_z) система «резервуар – рідина з вільною поверхнею» при наявності будь-якого малого початкового збурення вільної поверхні рідини вийде на режим параметричного резонансу.

Знайдемо спочатку рівняння границь області нестійкості для системи рівнянь (2.23) або, іншими словами, для класичної задачі Фарадея. Відомо із теорії [24, 225, 226], що дослідження нестійкості ведеться на основі лінеаризованих рівнянь руху і, практично для всіх випадків руху, в околі першого (нижчого) резонансу.

Запишемо лінеаризоване рівняння для форми з нижчою частотою – першої антисиметричної форми a_1 – при наявності зовнішнього вертикального збурення резервуару $\varepsilon_z = H_z \cos(pt)$ у вигляді

$$\ddot{a}_1 \beta_{11}^q + B_{11}^{2z} \ddot{\varepsilon}_z a_1 + g N_1 a_1 = 0,$$

та перепишемо його в класичній формі рівняння Мат'є, тобто

$$\ddot{a}_1 + \omega_1^2 (1 - \nu H_z p^2 \cos pt) a_1 = 0 \quad (2.26)$$

де введені позначення $\nu = \frac{B_{11}^{2z}}{g N_1}$, $\omega_1 = \frac{g N_1}{\beta_{11}^q}$ – власна частота першої антисиметричної форми a_1 .

Область дійсних характеристичних чисел рівняння (2.26) співпадає з областю розв'язків, які необмежено зростають. З іншого боку, область комплексних характеристичних чисел відповідає обмеженим (майже періодичним) рішенням. Границям, які розділяють області дійсних та комплексних коренів, відповідають кратні корені, які мають значення 1 або -1. У випадку значення 1 характеристичного кореня рішення диференціального рівняння буде періодичним з періодом $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$, а у випадку значення -1 воно буде мати період $2T$.

Таким чином, області необмежено зростаючих розв'язків відокремлюються від областей стійкості періодичними рішеннями з періодом T або $2T$. А саме, два розв'язки одного періоду обмежують область нестійкості, два розв'язки різних періодів – область стійкості. Строге доведення цієї теореми наведено у [195, 226]. З наведеної теореми випливає, що визначення границь областей нестійкості може бути зведено до пошуку умов, при яких диференціальне рівняння (2.26) має періодичні розв'язки з періодами T або $2T$.

Оскільки існування періодичних розв'язків і можливість їх розкладу у ряд Фур'є є фактом відомим, будемо шукати періодичне рішення у вигляді

$$a_1 = \frac{B_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{kpt}{2} + B_k \sin \frac{kpt}{2} \right), \quad (2.27)$$

де парним значенням $k = 2, 4, \dots$ відповідають періодичні рішення періоду T , а непарним $k = 1, 3, \dots$ – періодичні рішення періоду $2T$, причому номер k , яким ми обмежуємося у розкладі (2.27), означає номер зони відповідного параметричного резонансу (зони нестійкості).

Для пошуку границь зони першого параметричного резонансу ($k = 1$) шукаємо періодичне рішення періоду $2T$ у вигляді

$$a_1 = A_1 \cos \frac{pt}{2} + B_1 \sin \frac{pt}{2}. \quad (2.28)$$

Підставляємо (2.28) у рівняння (2.26) та скористаємось методом Гальоркіна, а саме: помножимо рівняння (2.28) спочатку на $\cos \frac{pt}{2}$, потім на $\sin \frac{pt}{2}$, і отримані вирази інтегруємо за періодом $2T$. В результаті отримуємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно значень амплітуд A_1 та B_1 , яка, як відомо з лінійної алгебри, має відмінні від нуля розв'язки тільки у випадку, коли детермінант, складений із коефіцієнтів цієї системи, дорівнює нулю. Розкриваючи детермінант, отримаємо рівняння

границь області першого параметричного резонансу в класичній задачі Фарадея

$$p = \frac{2\omega_1}{\sqrt{1-2\omega_1^2\nu H_z}} \text{ та } p = \frac{2\omega_1}{\sqrt{1+2\omega_1^2\nu H_z}}.$$

Для побудови границь зони другого параметричного резонансу шукаємо періодичне рішення періоду T у вигляді

$$a_1 = \frac{B_0}{2} + B_2 \cos pt + A_2 \sin pt + A_4 \sin 2pt,$$

і, скориставшись знову методом Гальоркіна, отримаємо відповідні рівняння границь у вигляді

$$p = \frac{\sqrt{-1 + \sqrt{1 + 2\omega_1^4\nu^2 H_z^2}}}{\omega_1\nu H_z} \text{ та } p = \omega_1 \sqrt{\frac{2(5 + \sqrt{9 + \omega_1^4\nu^2 H_z^2})}{16 - \omega_1^4\nu^2 H_z^2}}.$$

Рівняння границь зони третього параметричного резонансу для періодичного рішення періоду $2T$

$$a_1 = A_1 \sin \frac{pt}{2} + B_1 \cos \frac{pt}{2} + A_3 \sin \frac{3pt}{2} + B_3 \cos \frac{3pt}{2}$$

на основі методу Гальоркіна отримуємо у вигляді

$$p = 2\omega_1 \sqrt{\frac{\omega_1^2\nu H_z + 5 - \sqrt{5\omega_1^4\nu^2 H_z^2 - 8\omega_1^2\nu H_z + 16}}{4\omega_1^4\nu^2 H_z^2 - 18\omega_1^2\nu H_z - 9}} \text{ та } p = 2\omega_1 \sqrt{\frac{-\omega_1^2\nu H_z + 5 - \sqrt{5\omega_1^4\nu^2 H_z^2 + 8\omega_1^2\nu H_z + 16}}{4\omega_1^4\nu^2 H_z^2 + 18\omega_1^2\nu H_z - 9}}.$$

Розподіл зон параметричного резонансу у класичній задачі Фарадея в площині $(\frac{\omega}{\omega_1}, \frac{H_z}{R})$ показаний на Рис. 2.3. Як можна бачити з Рис. 2.3, в зоні першого параметричного резонансу будь-яка мала амплітуда коливання резервуару H_z з часом виведе систему на режим параметричного резонансу.

З іншого боку, «спіймати» в системі другий параметричний резонанс практично неможливо, оскільки це може відбуватися в дуже вузькому діапазоні частот при великих амплітудах збурення резервуару H_z .

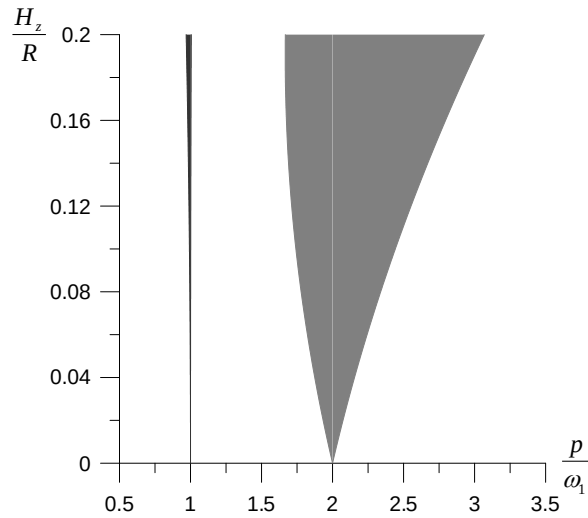


Рис. 2.3. Розташування першої та другої областей параметричного резонансу в класичній задачі Фарадея

Для побудови зон параметричного резонансу в узагальненій задачі Фарадея лінеаризуємо рівняння (2.24) – (2.25) та запишемо їх знову тільки для першої антисиметричної форми a_1 з можливістю горизонтального руху по координаті ε_y у вигляді

$$\ddot{a}_1 \beta_{11}^q + B_1^{1y} \ddot{\varepsilon}_y + B_{11}^{2z} \ddot{\varepsilon}_z a_1 + g N_1 a_1 = 0,$$

$$\frac{\rho}{M_T + M_F} B_1^{1y} \ddot{a}_1 + \ddot{\varepsilon}_y = 0,$$

і, з урахуванням позначень $\nu = \frac{B_{11}^{2z}}{g N_1}$, $\lambda_1 = \frac{B_1^{1y}}{\beta_{11}^q}$, $\lambda_2 = \frac{\rho B_1^{1y}}{M_T + M_F}$,

представимо далі у канонічному вигляді

$$\ddot{a}_1 + \lambda_1 \ddot{\varepsilon}_y + \omega_1^2 (1 - \nu H_z p^2 \cos pt) a_1 = 0, \quad (2.29)$$

$$\lambda_2 \ddot{a}_1 + \ddot{\varepsilon}_y = 0. \quad (2.30)$$

Для побудови границь зони першого параметричного резонансу в узагальненій задачі Фарадея шукаємо періодичні рішення періоду $2T$ системи рівнянь (2.29) – (2.30) у вигляді

$$a_1 = A_1 \cos \frac{pt}{2} + B_1 \sin \frac{pt}{2}, \quad \varepsilon = A_2 \cos \frac{pt}{2} + B_2 \sin \frac{pt}{2},$$

та за допомогою методу Гальоркіна отримаємо відповідні рівняння границь у вигляді

$$p = \frac{2\omega_1}{\sqrt{1 + 2\omega_1^2 \nu H_z - \lambda_1 \lambda_2}} \quad \text{та} \quad p = \frac{2\omega_1}{\sqrt{1 - 2\omega_1^2 \nu H_z - \lambda_1 \lambda_2}}.$$

Для побудови границь зони другого параметричного резонансу в узагальненій задачі Фарадея шукаємо періодичне рішення періоду T у вигляді

$$a_1 = B_{10} + B_{11} \cos pt + A_{11} \sin pt + A_{12} \sin 2pt,$$

$$\varepsilon = B_{21} \cos pt + A_{21} \sin pt + A_{22} \sin 2pt,$$

і, скориставшись знову методом Гальоркіна, отримаємо відповідні рівняння границь у вигляді

$$p = \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 - 1 + \sqrt{(\lambda_1 \lambda_2 - 1)^2 + 2\omega_1^4 \nu^2 H_z^2}}}{\omega_1 \nu H_z} \quad \text{та}$$

$$p = \sqrt{2}\omega_1 \sqrt{\frac{5(1 - \lambda_1 \lambda_2) + \sqrt{9(\lambda_1 \lambda_2 - 1)^2 + \omega_1^4 \nu^2 H_z^2}}{16(\lambda_1 \lambda_2 - 1)^2 - \omega_1^4 \nu^2 H_z^2}}.$$

Рівняння границь зони третього параметричного резонансу в узагальненій задачі Фарадея для періодичного рішення періоду $2T$

$$a_1 = A_1 \sin \frac{pt}{2} + B_1 \cos \frac{pt}{2} + A_3 \sin \frac{3pt}{2} + B_3 \cos \frac{3pt}{2},$$

$$\varepsilon = C_1 \sin \frac{pt}{2} + P_1 \cos \frac{pt}{2} + C_3 \sin \frac{3pt}{2} + P_3 \cos \frac{3pt}{2},$$

на основі методу Гальоркіна отримуємо у вигляді

$$p = 2\omega_1 \sqrt{\frac{5(1-\lambda_1\lambda_2) + \omega_1^2 \nu H_z - \sqrt{5\omega_1^4 \nu^2 H_z^2 + 8\omega_1^2 \nu H_z (\lambda_1\lambda_2 - 1) + 16(\lambda_1\lambda_2 - 1)^2}}{4\omega_1^4 \nu^2 H_z^2 + 18\omega_1^2 \nu H_z (\lambda_1\lambda_2 - 1) - 9(\lambda_1\lambda_2 - 1)^2}}$$

та

$$p = 2\omega_1 \sqrt{\frac{5(1-\lambda_1\lambda_2) - \omega_1^2 \nu H_z - \sqrt{5\omega_1^4 \nu^2 H_z^2 - 8\omega_1^2 \nu H_z (\lambda_1\lambda_2 - 1) + 16(\lambda_1\lambda_2 - 1)^2}}{4\omega_1^4 \nu^2 H_z^2 - 18\omega_1^2 \nu H_z (\lambda_1\lambda_2 - 1) - 9(\lambda_1\lambda_2 - 1)^2}}.$$

Оцінимо, як змінюється частота параметричного резонансу та ширина зони нестійкості на прикладі першої зони параметричного резонансу. Для цього випишемо рівняння лівої та правої границь зони нестійкості для класичного та узагальненого випадку задачі Фарадея, отримав їх розклади в ряд Тейлора відносно амплітуди зовнішнього збурення H_z в точці $H_z = 0$. Для класичної задачі Фарадея рівняння лівої границі зони нестійкості має вигляд

$$p_L^c(H_z) = \frac{2\omega_1}{\sqrt{1-2\omega_1^2 \nu H_z}} = 2\omega_1 - 2\nu\omega_1^3 H_z + 3\nu^2\omega_1^5 H_z^2 + O(H_z^3), \quad (2.31)$$

а правої

$$p_R^c(H_z) = \frac{2\omega_1}{\sqrt{1+2\omega_1^2 \nu H_z}} = 2\omega_1 + 2\nu\omega_1^3 H_z + 3\nu^2\omega_1^5 H_z^2 + O(H_z^3), \quad (2.32)$$

а для узагальненої задачі Фарадея рівняння лівої границі має вигляд

$$p_L^g(H_z) = \frac{2\omega_1}{\sqrt{1-2\omega_1^2 \nu H_z - \lambda_1\lambda_2}} = \frac{2\omega_1}{\sqrt{1-\lambda_1\lambda_2}} - \frac{2\nu\omega_1^3}{(1-\lambda_1\lambda_2)^{3/2}} H_z + \quad (2.33)$$

$$+ \frac{3\nu^2\omega_1^5}{(1-\lambda_1\lambda_2)^{5/2}} H_z^2 + O(H_z^3),$$

а правої відповідно

$$p_R^g(H_z) = \frac{2\omega_1}{\sqrt{1+2\omega_1^2\nu H_z - \lambda_1\lambda_2}} = \frac{2\omega_1}{\sqrt{1-\lambda_1\lambda_2}} + \frac{2\nu\omega_1^3}{(1-\lambda_1\lambda_2)^{3/2}} H_z + \quad (2.34)$$

$$+ \frac{3\nu^2\omega_1^5}{(1-\lambda_1\lambda_2)^{5/2}} H_z^2 + O(H_z^3),$$

де λ_1 і λ_2 є мірою взаємного впливу руху рідини і резервуара, при цьому завжди $0 \leq \lambda_1\lambda_2 < 1$.

Із означених розкладів отримаємо вирази для частоти параметричного резонансу в класичній та узагальненій задачі Фарадея (при $H_z = 0$) відповідно

$$p_L^c(0) = p_R^c(0) = 2\omega_1, \quad p_L^g(0) = p_R^g(0) = \frac{2\omega_1}{\sqrt{1-\lambda_1\lambda_2}},$$

і, оскільки, $0 \leq \lambda_1\lambda_2 < 1$, то частота параметричного резонансу в узагальненій задачі Фарадея підвищується.

Розглянемо відношення коефіцієнтів при доданках першого порядку малості у розкладах (2.33) і (2.31) та отримаємо значення

$\frac{1}{(1-\lambda_1\lambda_2)^{3/2}} > 1$ (теж саме значення отримаємо із відношення коефіцієнтів у розкладах (2.34) і (2.32)), таким чином, в узагальненій задачі Фарадея кожна точка (для будь-якого $H_z > 0$) лівої границі зміщується ліворуч, а правої границі – зміщується праворуч, тобто ширина області нестійкості в узагальненій задачі Фарадея збільшується.

Твердження. Нехай в класичній задачі Фарадея (2.26) частота першого параметричного резонансу дорівнює $p^c = 2\omega_1$, тоді в узагальненій задачі Фарадея (при наявності додаткового ступеня вільності – можливості руху резервуара в горизонтальній площині), яка описується системою рівнянь (2.29) – (2.30), частота першого параметричного резонансу становить

$$p^g = \frac{2\omega_1}{\sqrt{1-\lambda_1\lambda_2}}, \text{ тобто завжди частота узагальненої задачі перевершує}$$

частоту класичної задачі $p^g \geq p^c$, причому знак рівності виконується тільки у

випадку $M_T \rightarrow \infty$. Крім того, для будь-якої зовнішньої амплітуди $H_z > 0$ виконуються нерівності для лівої границі $p_L^g(H_z) \leq p_L^c(H_z)$, і для правої границі $p_R^g(H_z) \geq p_R^c(H_z)$, причому знак рівності виконується тільки у випадку $M_T \rightarrow \infty$ (коли узагальнена задача Фарадея перетворюється у класичну).

Розподіл першої та другої зони параметричного резонансу в узагальненій задачі Фарадея в площині $(\frac{\omega}{\omega_1}, \frac{H_z}{R})$ для різних співвідношень мас (1 – $M_F = 100M_T$, 2 – $M_F = 10M_T$, 3 – $M_F = M_T$, 4 – $M_F = 0,1M_T$, 5 – $M_F = 0,01M_T$) показаний на Рис. 2.4а та Рис. 2.4б відповідно.

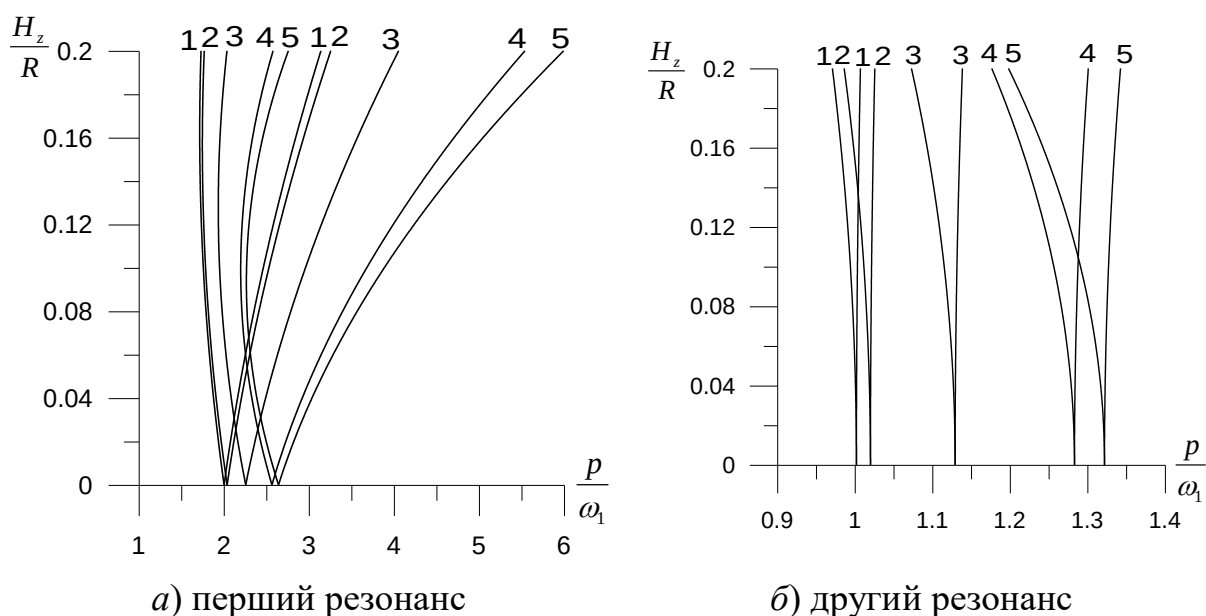


Рис. 2.4. Розташування областей першого та другого резонансу в узагальненій задачі Фарадея

Як можна бачити з графіків, наявність додаткового ступеня вільності призводить до підвищення частоти параметричного резонансу, при цьому вона тим вище, чим менше маса резервуару по відношенню до маси рідини, тобто чим більше вплив рухомості рідини. Крім того, чим менше маса резервуару по відношенню до маси рідини, тим ширше стає зона параметричного резонансу для обраної амплітуди зовнішнього збурення H_z у порівнянні з випадком класичної задачі Фарадея.

В класичній задачі Фарадея, коли рух резервуару здійснюється за заданим законом, маси рідини та резервуару в системі рівнянь (2.23) не враховуються. Тому найнижча власна частота механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» в цьому випадку співпадає з найнижчою частотою коливань вільної поверхні рідини – частотою першої антисиметричної форми ψ_1 .

В узагальненій задачі Фарадея при наявності в системі додаткового ступеня вільності – можливості горизонтального руху резервуару – система рівнянь (2.24) – (2.25) містить в якості параметрів маси рідини та резервуару, від співвідношення яких буде змінюватись і власна частота системи в цілому. Для визначення власної частоти в цьому випадку у відповідності до теорії механічних коливань [5, 216] можна записати рівняння (2.24) – (2.25) тільки для першої антисиметричної форми a_1 та горизонтального переміщення резервуару ε_y по координаті y у вигляді

$$\ddot{a}_1 \beta_{11}^q + B_1^{1y} \ddot{\varepsilon}_y + g N_1 a_1 = 0, \quad \frac{\rho}{M_T + M_F} B_1^{1y} \ddot{a}_1 + \ddot{\varepsilon}_y = 0,$$

і, з урахуванням позначень $\lambda_1 = \frac{B_1^{1y}}{\beta_{11}^q}, \quad \lambda_2 = \frac{\rho B_1^{1y}}{M_T + M_F}, \quad \omega_1^2 = \frac{g N_1}{\beta_{11}^q}$

представимо далі у канонічному вигляді

$$\ddot{a}_1 + \lambda_1 \ddot{\varepsilon}_y + \omega_1^2 a_1 = 0 \tag{2.35}$$

$$\lambda_2 \ddot{a}_1 + \ddot{\varepsilon}_y = 0. \tag{2.36}$$

Будемо шукати розв'язки системи рівнянь (2.35) – (2.36) у вигляді

$$a_1 = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t, \quad \varepsilon_y = A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t,$$

і за допомогою методу Гальоркіна отримаємо рівняння для амплітуд A_1 та A_2 у матричному вигляді

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 - \omega^2 & -\lambda_1 \omega^2 \\ -\lambda_2 \omega^2 & -\omega^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Отримане характеристичне рівняння має нетривіальний розв'язок, якщо визначник матриці коефіцієнтів дорівнює нулю. Прирівнюючи цей визначник нулю, і розв'язуючи біквдратне рівняння, отримаємо формулу для визначення власної частоти механічної системи

$$\omega_e = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 - \lambda_1 \lambda_2}} = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 - \frac{\rho(B_1^{1y})^2}{\beta_{11}^q (M_T + M_F)}}} \quad (2.37)$$

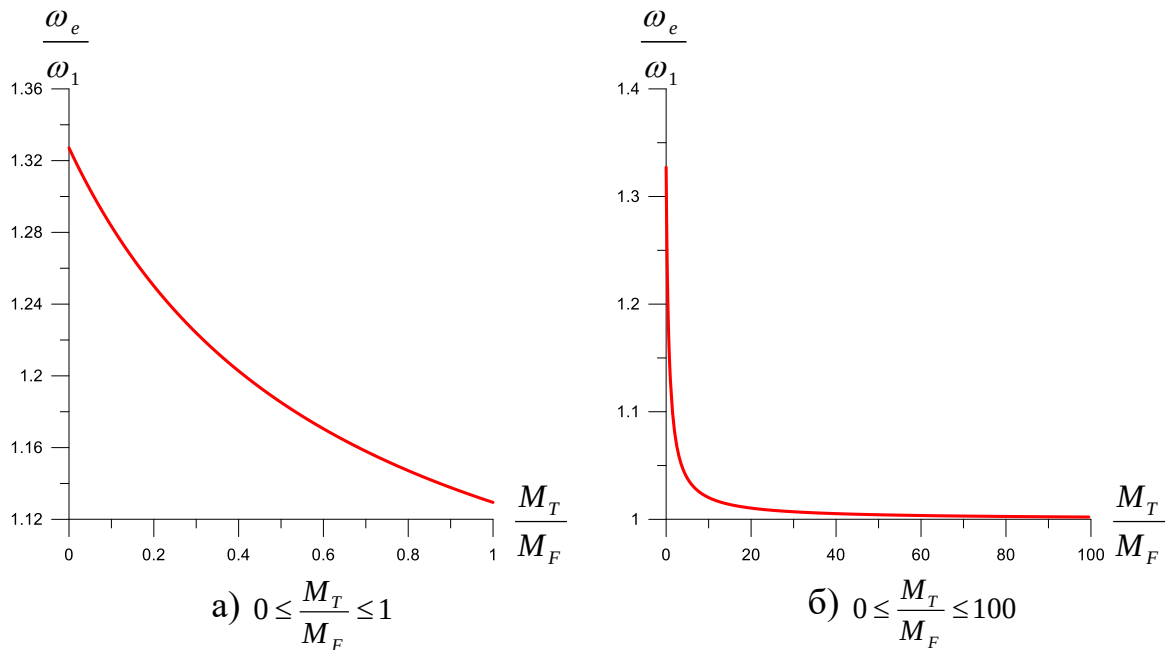


Рис. 2.5. Залежність власної частоти системи від співвідношення мас резервуару та рідини

Як можна бачити із визначення ω_e , власна частота системи при збільшенні маси резервуару M_T буде наближатись до власної частоти ω_1 першої антисиметричної форми ψ_1 . Цей факт підтверджує відому теорему з механіки про те, що виключенні в'язі власна частота в системі повинна знизитись. В даному випадку при збільшенні маси резервуару в'язь слабшає, оскільки коливання рідини все менше і менше впливають на характер коливань резервуару.

Нехай резервуар радіусу $R = 1$ м та маси M_T частково заповнений водою маси M_F до глибини $H = R$. Залежність $\frac{\omega_e}{\omega_1}$ від співвідношення мас резервуару та рідини показана на Рис. 2.5.

Таким чином, справедливе

Твердження. Нехай в рамках лінійної моделі коливання рідини з вільною поверхнею за однією формою описуються рівнянням $\ddot{a}_1 + \omega_1^2 a_1 = 0$. Внесення в систему додаткового ступеня вільності (можливості поступального руху резервуару в горизонтальній площині) призводить до системи рівнянь

$$\ddot{a}_1 + \lambda_1 \ddot{\varepsilon}_y + \omega_1^2 a_1 = 0, \quad \lambda_2 \ddot{a}_1 + \ddot{\varepsilon}_y = 0,$$

де λ_1 і λ_2 є мірою взаємного впливу руху рідини і резервуара, ω_1 – власна (парціальна) частота коливань рідини. Тоді для сумісного руху системи (2.35) – (2.36) з парціальними частотами $\omega_1^p = 0$ і $\omega_2^p = \omega_1$ власні частоти мають значення $\omega_1^e = 0$, $\omega_2^e = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 - \lambda_1 \lambda_2}}$, при цьому завжди $0 \leq \lambda_1 \lambda_2 < 1$,

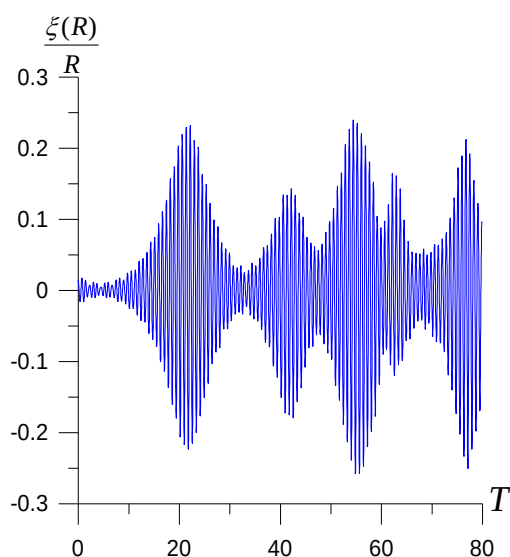
тому власні частоти завжди розташовані поза межами відрізка $[\omega_1^p, \omega_2^p]$.

Зауваження і при $M_F / M_T \rightarrow 0$ справджується $\lambda_1 \lambda_2 \rightarrow 0$ і $\omega_2^e \rightarrow \omega_1$.

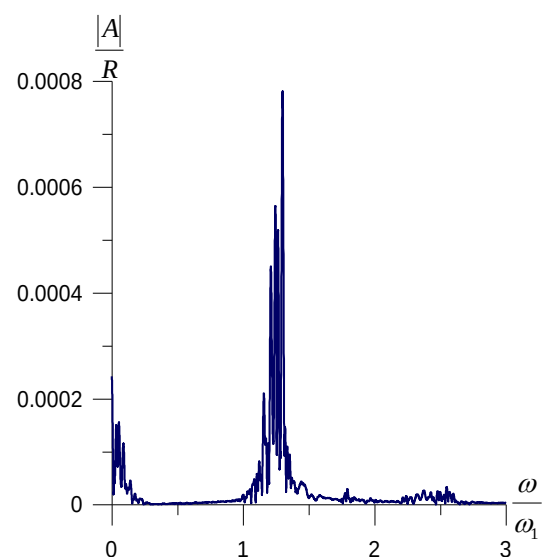
Для виходу системи в режим параметричного резонансу частота зовнішнього параметричного збурення повинна бути узгоджена саме з власною частотою механічної системи. Власна частота системи співпадає з частотою коливань вільної поверхні рідини тільки у граничному випадку класичної задачі Фарадея (коли $M_T \rightarrow \infty$).

Розглянемо особливості виходу на режим параметричного резонансу [293] для системи, в якій співвідношення мас резервуару та рідини $M_F = 0,01 M_T$, а параметри руху резервуару за гармонічним законом дорівнюють $p = 2,6 \omega_1$ та $H_z = 0,01 R$. Графік зміни у часі амплітуди збурення вільної поверхні рідини на стінці резервуару $\xi(R)$ (у безрозмірній формі)

наведено на Рис. 2.6а, а частотний спектр цього збурення – відповідно на Рис. 2.6б. Як видно з графіку $\xi(R)$, при заданому співвідношенні $p = 2,6\omega_1$, яке знайдене за формулами границь нестійкості для зони першого резонансу, система виходить на режим параметричного резонансу – амплітуда збурень на стінці зростає більш ніж в 20 разів. При цьому виходу на усталений режим коливань не спостерігається – для збурення $\xi(R)$ характерна амплітудна модуляція, закон якої постійно змінюється у часі, а наявність гармонік на нульовій та близьких до нульової частотах означає присутність в спектрі тренду (середнього значення), який змінюється в досить широкому діапазоні. На частотному спектрі збурення на стінці (Рис. 2.6б) видно домінуючий пік гармоніки на частоті $\omega = 1,2\omega_1 = 0,5p$, що є підтвердженням виходу системи саме на режим параметричного резонансу (коли домінуюча частота коливань системи вдвічі менше частоти зовнішнього збурення). Характерні для багатоходової нелінійної системи гармоніки спектру на комбінованих частотах згруповані в околі домінуючої частоти – це теж є додатковим свідченням розвитку в системі саме параметричного резонансу.



а) амплітуда збурення вільної поверхні рідини на стінці резервуару



б) спектр збурення вільної поверхні рідини на стінці резервуару

Рис. 2.6. Вихід на режим параметричного резонансу при малих амплітудах збурення в узагальненій задачі Фарадея

Для інших співвідношень маси резервуару та маси рідини $\frac{M_T}{M_F}$, приведених на Рис. 2.4 (тобто, коли маса резервуару зростає), кількість гармонік на комбінаційних частотах, близьких до $\omega = 0,5p$, в частотному спектрі $\frac{\xi(R)}{R}$, значно зменшується, що означає зменшення впливу коливань рідини на горизонтальні рухи резервуару, а у випадку $M_F = 100M_T$ ці комбіновані частоти взагалі відсутні – має місце параметричний резонанс як в класичній задачі Фарадея (коливання рідини взагалі не впливають на коливання резервуару).

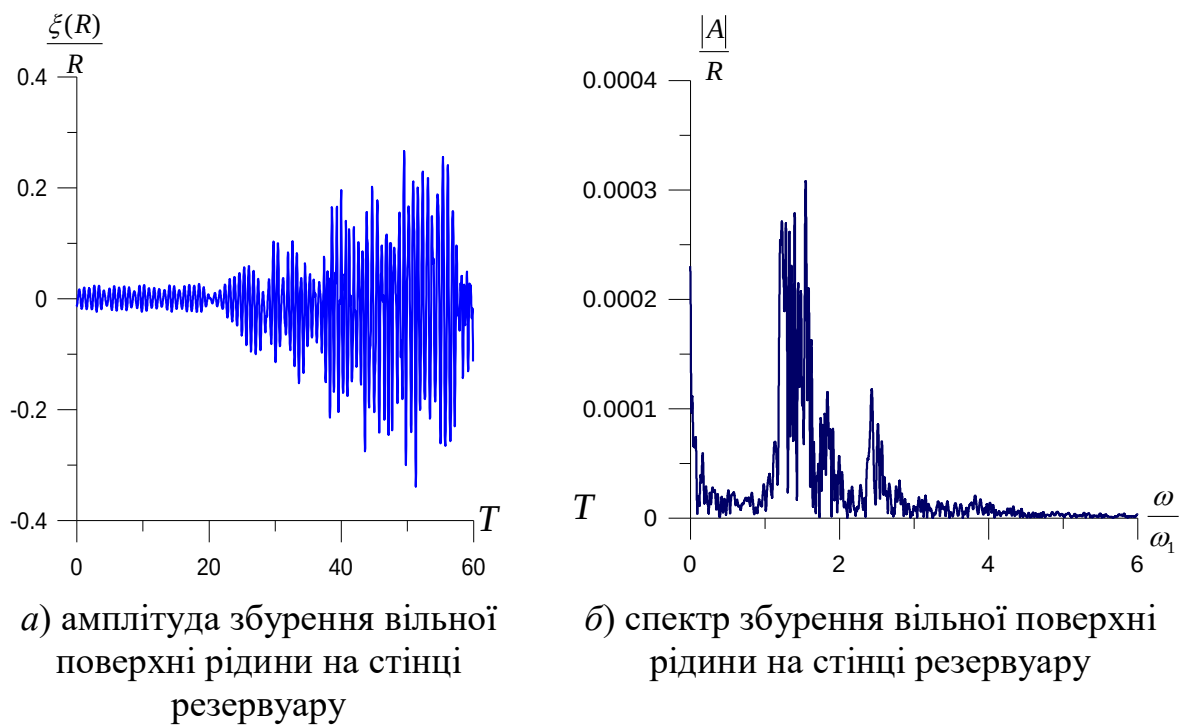


Рис. 2.7. Коливання вільної поверхні рідини в зарезонансному діапазоні при малих амплітудах збурення в узагальненій задачі Фарадея

Границі області стійкості, задані для зони першого резонансу, перевірялись також для випадку, коли при малих амплітудах руху резервуару $H_z = 0,01R$ зовнішня частота збурення знаходиться в зоні стійкості, наприклад, дорезонансній $p = 2\omega_1$ та зарезонансній $p = 2,9\omega_1$ (Рис. 2.7) для співвідношення мас $M_F = 0,01M_T$. Для дорезонансної зони збурення характерна відсутність параметричного резонансу – збурення на стінці

вільної поверхні рідини $\xi(R) \approx 0,1R$, тобто знаходяться в лінійному режимі коливань. Для зарезонансної зони, навпаки, спостерігається параметричний резонанс (Рис. 2.7), причому, як можна бачити із графіків амплітуд та частотного спектру, при виході на режим параметричного резонансу в системі спостерігається тільки перехідний процес, в якому істотно проявляється вплив вищих форм коливань.

Для великих амплітуд та високих частот збурення резервуару на відміну від класичної задачі Фарадея динамічні процеси в системі розвиваються як сукупність параметричного резонансу і вимушених коливань, тому в цьому випадку можливий вихід на нелінійний режим. На Рис. 2.8 показані результати дослідження коливань в системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею» при амплітуді резервуару $H_z = 0,1R$, частоті $p = 1,9\omega_1$ (дорезонансна зона) та співвідношенні мас $M_F = 0,01M_T$.

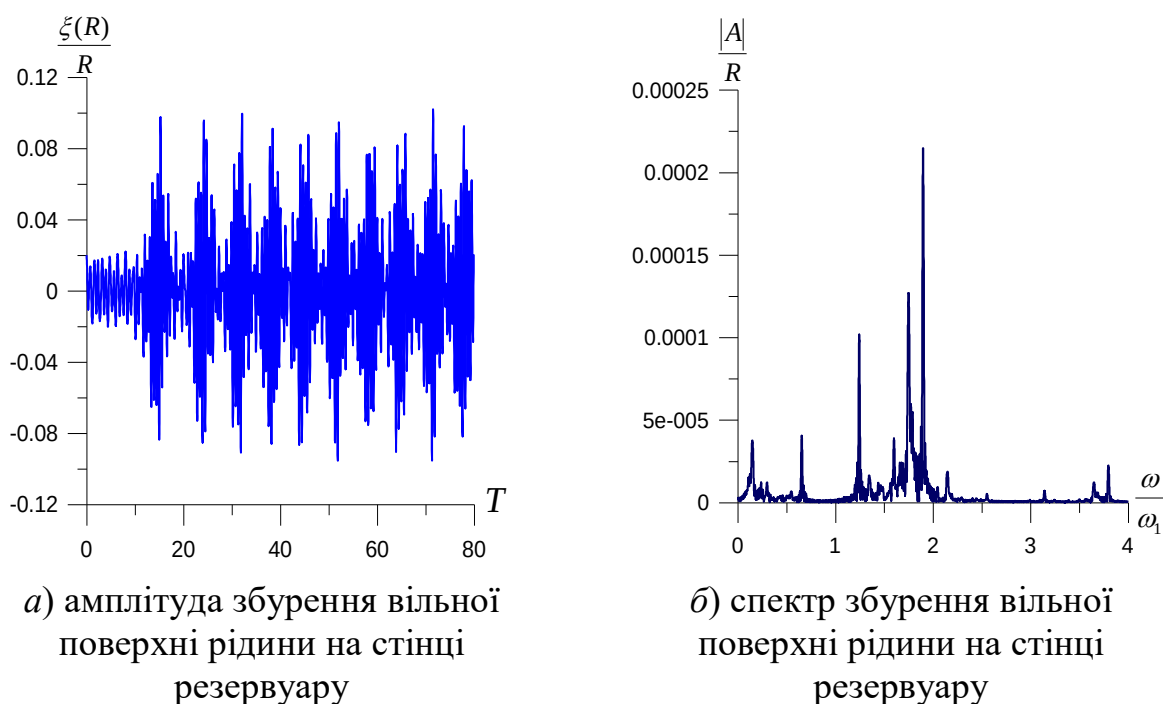


Рис. 2.8. Коливання вільної поверхні рідини в дорезонансному діапазоні при великих амплітудах збурення в узагальненій задачі Фарадея

Не зважаючи на те, що частота зовнішнього збурення знаходиться в зоні стійкості, механічна система наближається до нелінійного режиму коливань. Як видно з графіку частотного спектру, домінуюча гармоніка має частоту $\omega \approx p$, що означає перевагу механізму вимушених коливань над

механізмом параметричного резонансу. При перенесенні частоти збурення резервуару в зарезонансну зону $p = 4,26\omega_1$ резонанс в системі розвивається протягом одного періоду коливань, причому домінуючим є механізм вимушених коливань (амплітуда гармоніки на частоті $\omega \approx p$ вдвічі більше амплітуди гармоніки на частоті $\omega \approx 0,5p$). Механізм вимушених коливань виводить систему «резервуар – рідина з вільною поверхнею» в режим резонансу, навіть коли частота зовнішнього збурення резервуару не є резонансною. Таким чином, на відміну від класичної задачі Фарадея при наявності горизонтальних рухів резервуару з використанням заданого руху за гармонічним законом у вертикальному напрямку можна на будь-якій частоті суттєво збільшити коливання вільної поверхні рідини.

2.3. Додатковий ступінь вільності – можливість руху резервуару в горизонтальній площині при наявності пружного амортизатора

Розглянемо узагальнення задачі Фарадея, коли: по-перше, резервуар має можливість поступального руху в горизонтальній площині, і, по-друге, до резервуару кріпиться пружний амортизатор, який забезпечує наявність поновлючої сили [74].

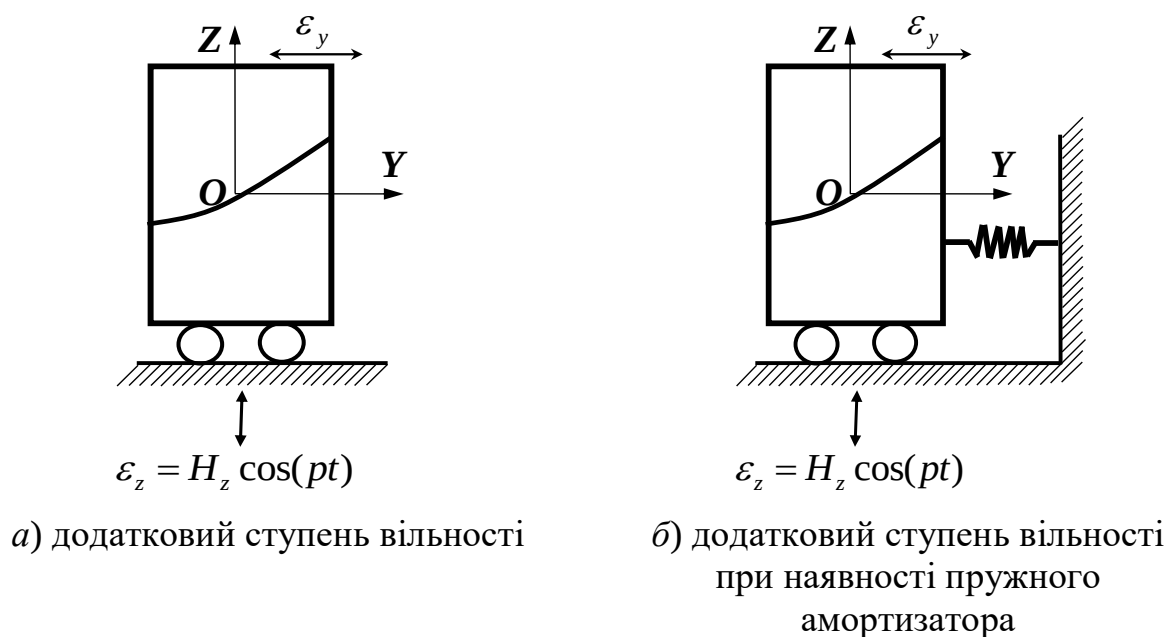


Рис. 2.9. Модель системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» в узагальненій задачі Фарадея при наявності пружного амортизатора

Як і раніше (п. 2.2), будемо вважати, що резервуар здійснює вертикальні рухи за заданим гармонічним законом $\varepsilon_z = H_z \cos(pt)$, а також може здійснювати переміщення ε_y в горизонтальній площині вздовж осі Оу (Рис. 2.9а). Додаємо в систему пружний амортизатор з коефіцієнтом жорсткості c_y в горизонтальній площині і отримуємо дискретну модель системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» для узагальненої задачі Фарадея з можливістю горизонтального руху при наявності пружного закріплення

$$\begin{aligned}
& \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \beta_{ri}^q + \sum_j a_j \gamma_{rij}^q + \sum_{i,j} a_i a_j \delta_{rijk}^q \right\} = \quad (2.38) \\
& + \ddot{\varepsilon}_y \cdot \left\{ B_r^{1y} + \sum_i a_i B_{ri}^{2y} + \sum_{i,j} a_i a_j B_{rij}^{3y} + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k B_{rijk}^{4y} \right\} = \\
& = -\ddot{\varepsilon}_z \cdot \left\{ B_r^{1z} + \sum_i a_i B_{ri}^{2z} + \sum_{i,j} a_i a_j B_{rij}^{3z} + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k B_{rijk}^{4z} \right\} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_i a_j (\gamma_{ijr}^q - 2\gamma_{rij}^q) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k (\delta_{ijk}^q - 2\delta_{rijk}^q) - \frac{1}{2} g \alpha_r^s - g N_r a_r + \\
& + \dot{\varepsilon}_y \cdot \left\{ B_r^{1y} + \sum_i a_i (B_{ir}^{2y} - B_{ri}^{2y}) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j 2(B_{ijr}^{3y} - B_{rij}^{3y}) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k 3(B_{ijk}^{4y} - B_{rijk}^{4y}) \right\} + \\
& + \dot{\varepsilon}_z \cdot \left\{ B_r^{1z} + \sum_i a_i (B_{ir}^{2z} - B_{ri}^{2z}) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j 2(B_{ijr}^{3z} - B_{rij}^{3z}) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k 3(B_{ijk}^{4z} - B_{rijk}^{4z}) \right\}, \\
& \frac{\rho}{M_F + M_T} \left\{ \sum_i \ddot{a}_i \left[B_i^{1y} + \sum_j a_j B_{ij}^{2y} + \sum_{j,k} a_j a_k B_{ijk}^{3y} \right] \right\} + \ddot{\varepsilon}_y = \quad (2.39) \\
& = \frac{F_y}{M_F + M_T} - \frac{c_y}{M_F + M_T} \varepsilon_y - \frac{\rho}{M_F + M_T} \left\{ \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j B_{ij}^{2y} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k 2B_{ijk}^{3y} \right\}.
\end{aligned}$$

Визначимо власні частоти механічної системи «циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею» при наявності пружного закріплення. Для

визначення власних частот відповідно до теорії механічних коливань [5, 216] випишемо рівняння (2.38) – (2.39) тільки для амплітуди a_1 першої антисиметричної форми ψ_1 з можливістю горизонтального руху резервуару по координаті ε_y у вигляді

$$\ddot{a}_1 \beta_{11}^q + B_1^{1y} \ddot{\varepsilon}_y + B_{11}^{2z} \ddot{\varepsilon}_z a_1 + g N_1 a_1 = 0,$$

$$\frac{\rho}{M_T + M_F} B_1^{1y} \ddot{a}_1 + \ddot{\varepsilon}_y + \frac{c_y}{M_T + M_F} \varepsilon_y = 0,$$

і, з урахуванням позначень $a = a_1$, $\lambda_F = \frac{B_1^{1y}}{\beta_{11}^q}$, $\lambda_T = \frac{\rho B_1^{1y}}{M_T + M_F}$,

$\omega_F^2 = \frac{g N_1}{\beta_{11}^q}$, $\omega_T^2 = \frac{c}{M_T + M_F}$, представимо далі у канонічному вигляді

$$\ddot{a} + \lambda_F \ddot{\varepsilon}_y + \omega_F^2 a = 0, \quad (2.40)$$

$$\lambda_T \ddot{a} + \ddot{\varepsilon}_y + \omega_T^2 \varepsilon_y = 0, \quad (2.41)$$

де ω_F та ω_T – парціальні частоти вільної поверхні рідини та резервуару з пружним амортизатором відповідно. Будемо шукати періодичні розв'язки системи рівнянь (2.40) – (2.41) у вигляді [5, 189]

$$a = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t, \quad \varepsilon_y = A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t,$$

і, застосовуючи до системи (2.40) – (2.41) метод Гальоркіна, запишемо рівняння для амплітуд A_1 та A_2 в матричному вигляді

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \omega_F^2 & \lambda_F \omega^2 \\ \lambda_T \omega^2 & \omega^2 - \omega_T^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Записана система рівнянь має нетривіальний розв'язок, якщо визначник матриці коефіцієнтів дорівнює нулю. Прирівнюючи цей визначник до нуля, розв'яжемо рівняння 4 степені

$$(1 - \lambda_T \lambda_F) \omega^4 - (\omega_T^2 + \omega_F^2) \omega^2 + \omega_F^2 \omega_T^2 = 0, \quad (2.42)$$

та отримаємо формулу для визначення власних частот механічної системи

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{\omega_T^2 + \omega_F^2 \pm \sqrt{(\omega_T^2 - \omega_F^2)^2 + 4\omega_T^2 \omega_F^2 \lambda_T \lambda_F}}{2(1 - \lambda_T \lambda_F)}}. \quad (2.43)$$

Оскільки точна формула визначення власних частот (2.43) не є досить зручною для якісного аналізу, побудуємо асимптотичні розв'язки рівняння (2.42), приймаючи до уваги, що $\lambda_1 \lambda_2$ є малим параметром ($0 \leq \lambda_1 \lambda_2 < 1$). Розклади будемо відносно парціальних частот ω_F і ω_T по ступеням малого параметру $\lambda_1 \lambda_2$

$$\omega_1 = \omega_F + \frac{\omega_F^3}{2(\omega_F^2 - \omega_T^2)} \lambda_T \lambda_F + \frac{\omega_F^5 (3\omega_F^2 - 7\omega_T^2)}{8(\omega_F^2 - \omega_T^2)^3} (\lambda_T \lambda_F)^2. \quad (2.44)$$

$$\omega_2 = \omega_T + \frac{\omega_T^3}{2(\omega_T^2 - \omega_F^2)} \lambda_T \lambda_F,$$

Твердження. Для системи «резервуар з пружним амортизатором – рідина з вільною поверхнею», яка описується системою рівнянь

$$\ddot{a} + \lambda_F \ddot{\varepsilon}_y + \omega_F^2 a = 0, \quad \lambda_T \ddot{a} + \ddot{\varepsilon}_y + \omega_T^2 \varepsilon_y = 0,$$

з парціальними частотами для рідини ω_F і резервуара ω_T , для власних частот ω_1 і ω_2 відповідно до розкладів (2.44) справедливі співвідношення $\omega_1 \rightarrow \omega_F$, $\omega_2 \rightarrow \infty$, якщо $\omega_T \rightarrow \infty$ (або жорсткість пружинного закріплення резервуара $c \rightarrow \infty$).

Обчислимо власні частоти, використовуючи точну формулу (2.43), для резервуара радіусу $R = 1$ м та маси M_T , який частково заповнений водою маси M_F до глибини $H = R$. Маси резервуара та рідини пов'язані співвідношенням $M_T = 0,1M_F$. Для системи з такими характеристиками парціальна частота рідини $\omega_F = 4,14$ Гц та завжди є постійною величиною (оскільки витікання рідини з резервуару відсутнє), а парціальна частота резервуару з пружним амортизатором збільшується при збільшенні

жорсткості пружини (Рис. 2.10, крива 3) та має мінімальне значення $\omega_T^{\min} = 0$ Гц при нульовій жорсткості (при відсутності амортизатора). Як можна графіку, перша власна частота асимптотично прямує до парціальної частоти рідини ω_F (Рис. 2.10, крива 1), а друга власна частота нескінченно зростає (Рис. 2.10, крива 2).

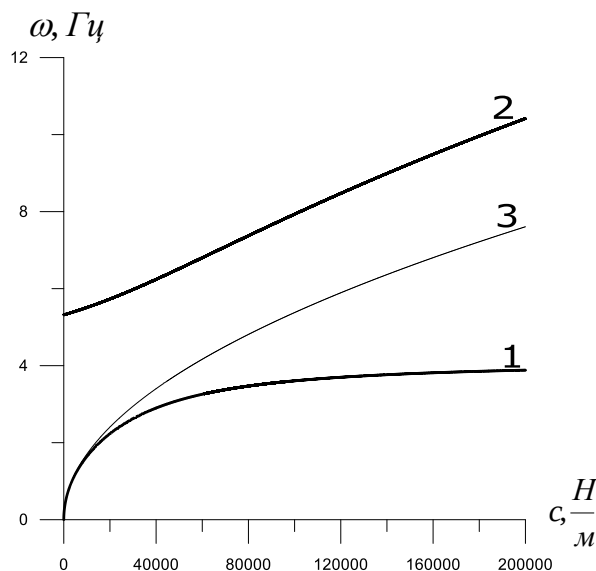


Рис. 2.10. Залежність власних частот (1, 2) механічної системи та парціальної частоти резервуару з пружним амортизатором (3) від жорсткості пружини

Побудуємо області нестійкості для системи при наявності пружного закріплення, для чого скористуємось системою рівнянь (2.40) – (2.41), доповнивши її параметричним вертикальним збуренням резервуару $\varepsilon_z = H_z \cos(pt)$, тобто отримаємо систему

$$\ddot{a} + \lambda_F \ddot{\varepsilon}_y + \omega_F^2 (1 - \nu H_z p^2 \cos pt) a = 0, \quad (2.45)$$

$$\lambda_T \ddot{a} + \ddot{\varepsilon}_y + \omega_T^2 \varepsilon_y = 0, \quad (2.46)$$

де прийнято позначення $\nu = \frac{B_{11}^{2z}}{gN_1}$.

Області необмежено зростаючих розв'язків відокремлюються від областей стійкості періодичними рішеннями з періодом T або $2T$. А саме, два розв'язки одного періоду обмежують область нестійкості, два розв'язки

різних періодів – область стійкості [5, 189, 226]. Звідси випливає, що визначення границь областей нестійкості може бути зведено до пошуку умов, при яких диференціальні рівняння (2.45) – (2.46) мають періодичні розв’язки з періодами T або $2T$.

Отже, зони нестійкості для першого резонансу обмежені періодичними розв’язками з частотою $\frac{p}{2}$, тому періодичні рішення системи рівнянь (2.45) – (2.46) представимо у вигляді

$$a = A_1 \cos \frac{pt}{2} + B_1 \sin \frac{pt}{2}, \quad \varepsilon_y = A_2 \cos \frac{pt}{2} + B_2 \sin \frac{pt}{2},$$

та з використанням методу Гальоркіна отримаємо рівняння границь зон нестійкості

$$p_1 = \sqrt{\frac{2(-\omega_T^2 - \omega_F^2(1 + 2\nu H_z \omega_T^2) + \sqrt{\omega_T^4 + \omega_F^4(1 - 2\nu H_z \omega_T^2)^2 + 2\omega_T^2 \omega_F^2(-1 + 2\lambda_T \lambda_F + 2\nu H_z \omega_T^2)})}{-1 - 2\nu H_z \omega_F^2 + \lambda_T \lambda_F}},$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{2(-\omega_T^2 - \omega_F^2(1 + 2\nu H_z \omega_T^2) - \sqrt{\omega_T^4 + \omega_F^4(1 - 2\nu H_z \omega_T^2)^2 + 2\omega_T^2 \omega_F^2(-1 + 2\lambda_T \lambda_F + 2\nu H_z \omega_T^2)})}{1 + 2\nu H_z \omega_F^2 - \lambda_T \lambda_F}},$$

$$p_3 = \sqrt{\frac{2(-\omega_T^2 - \omega_F^2(1 + 2\nu H_z \omega_T^2) - \sqrt{\omega_T^4 + \omega_F^4(1 + 2\nu H_z \omega_T^2)^2 - 2\omega_T^2 \omega_F^2(1 - 2\lambda_T \lambda_F + 2\nu H_z \omega_T^2)})}{-1 + 2\nu H_z \omega_F^2 + \lambda_T \lambda_F}},$$

$$p_4 = \sqrt{\frac{2(-\omega_T^2 - \omega_F^2(1 + 2\nu H_z \omega_T^2) + \sqrt{\omega_T^4 + \omega_F^4(1 + 2\nu H_z \omega_T^2)^2 - 2\omega_T^2 \omega_F^2(1 - 2\lambda_T \lambda_F + 2\nu H_z \omega_T^2)})}{-1 + 2\nu H_z \omega_F^2 + \lambda_T \lambda_F}}.$$

На Рис. 2.11а та Рис. 2.11б показані зони нестійкості відносно першої та другої власної частоти системи при різних значення коефіцієнту жорсткості пружного амортизатора (1 – 100 Н/м, 2 – 1000 Н/м, 3 – 10000 Н/м). Як видно з графіків, збільшення жорсткості амортизатора на порядок суттєво змінює розташування зон нестійкості відносно першої власної частоти, та практично не впливає на розташування зон нестійкості відносно другої

власної частоти. Оскільки власні частоти системи при збільшенні жорсткості амортизатора збільшуються, зони нестійкості теж зміщуються в бік збільшення зовнішньої частоти параметричного збудження.

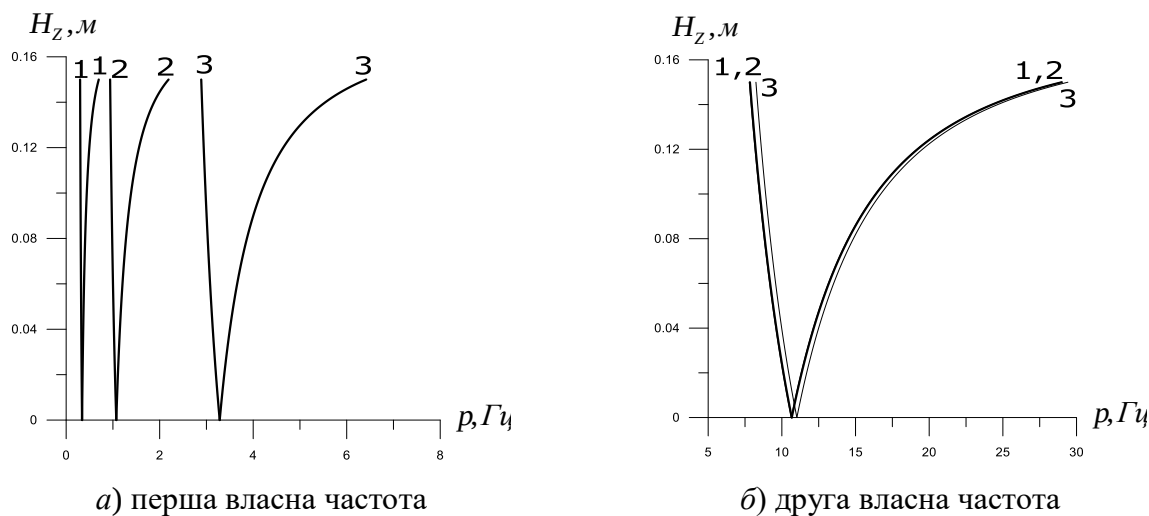


Рис. 2.11. Розташування областей першого резонансу в узагальненій задачі Фарадея з пружним амортизатором

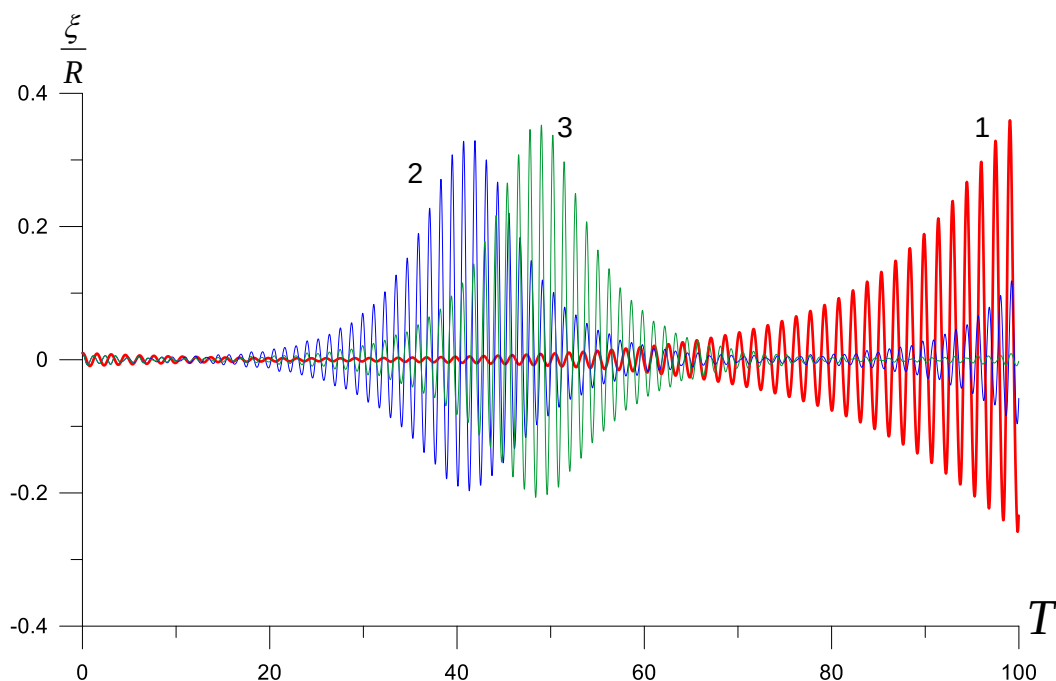


Рис. 2.12. Збурення вільної поверхні рідини в узагальненій задачі Фарадея з пружним амортизатором в резонансній зоні збурення

Дослідимо коливання вільної поверхні рідини при параметричному збуренні руху в резонансній зоні частот в резервуарі для трьох випадків задачі Фарадея (Рис. 2.12): класичної (графік 1), узагальненої з можливістю горизонтальних переміщень резервуару (графік 2) та узагальненою при

наявності пружного амортизатора в горизонтальній площині (графік 3). Як можна бачити з графіків, в резонансному діапазоні частот у будь-якому випадку коливання вільної поверхні рідини вийдуть на режим параметричного резонансу. Для таких коливань характерна яскраво виражена амплітудна модуляція при нульовому середньому значенні (в спектрі коливань присутні дві гармоніки – зовнішнього збурення і власної частоти системи «резервуар-рідина»). При цьому вихід на режим параметричного резонансу найповільніший в класичній задачі Фарадея, в узагальненій задачі діє механізм вимушених коливань.

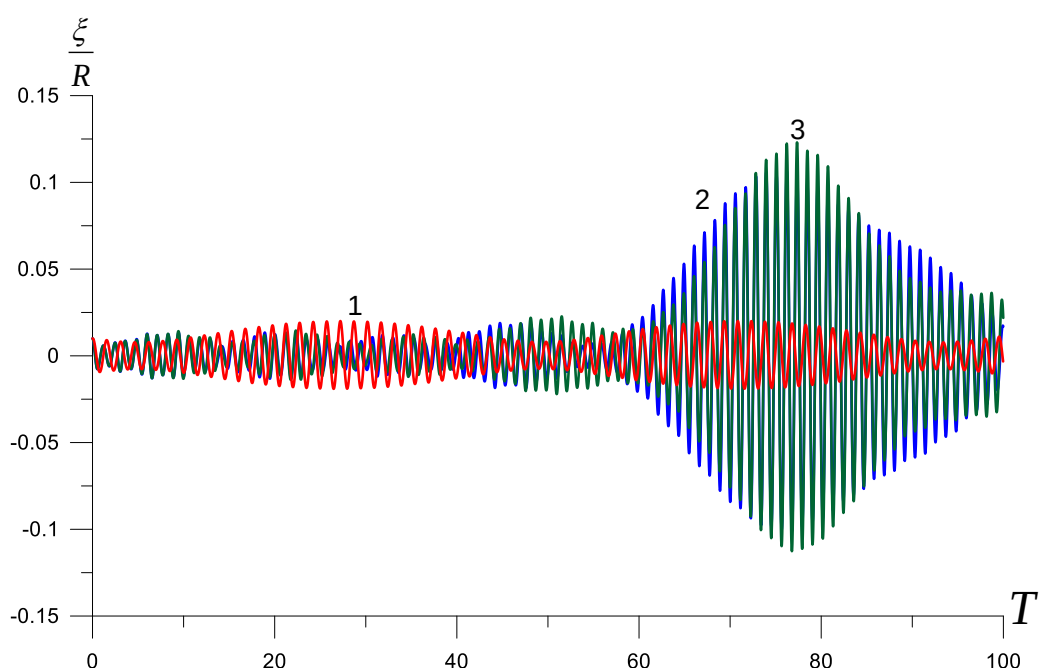


Рис. 2.13. Збурення вільної поверхні рідини в узагальненій задачі Фарадея з пружним амортизатором в зарезонансній зоні збурення

Розглянемо тепер розвиток параметричних коливань в зарезонансній зоні збурення руху також для трьох варіантів задачі Фарадея: класичної (графік 1), узагальненої з можливістю горизонтальних переміщень резервуару (графік 2) та узагальненою при наявності пружного амортизатора в горизонтальній площині (графік 3) (Рис. 2.13). Як можна бачити з графіків, в класичній задачі Фарадея (графік 1) коливання практично не збурюються – амплітуда та частота зовнішнього параметричного збурення руху належать до області стійкості, тому

розкачки коливань на вільній поверхні рідини не відбувається. В задачі Фарадея в класичній постановці амплітуда коливань трохи збільшується у порівнянні з амплітудою початкового збурення, і для всього процесу в цілому характерна амплітудна модуляція із значним періодом. В узагальненій задачі Фарадея (графіки 2 та 3) наявність механізму вимушених коливань призводить до суттєвого збільшення амплітуди коливань вільної поверхні рідини (відносно початкового збурення), не зважаючи на те, амплітуда та частота зовнішнього параметричного збурення руху належать до області стійкості. Крім того, зарезонансний режим збурення руху характеризується наявністю глибокої амплітудної модуляції.

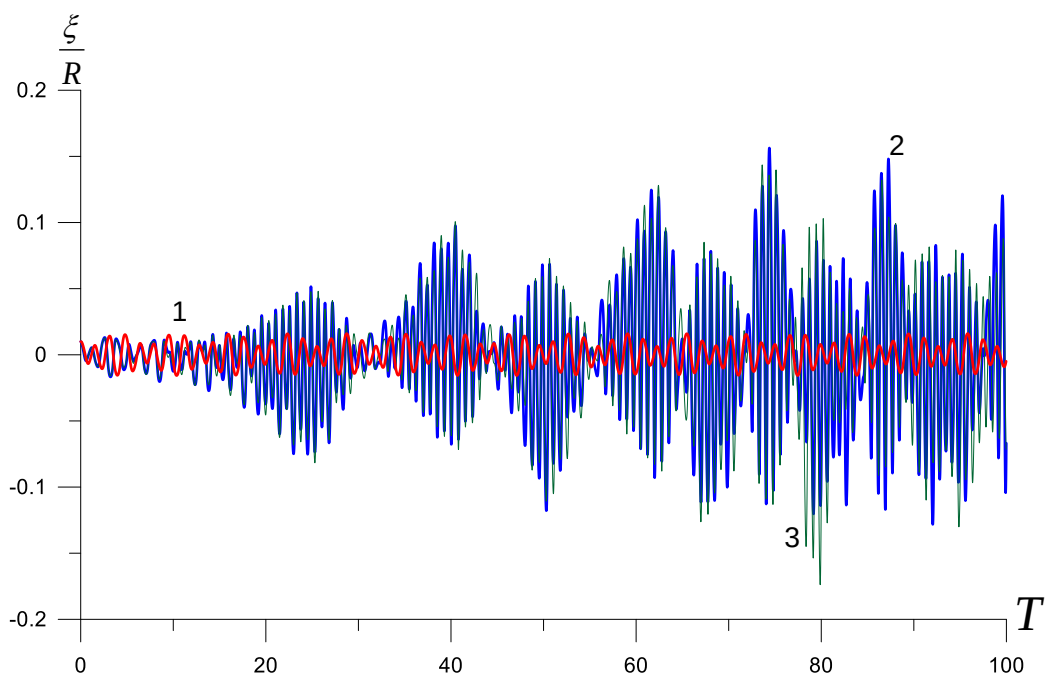


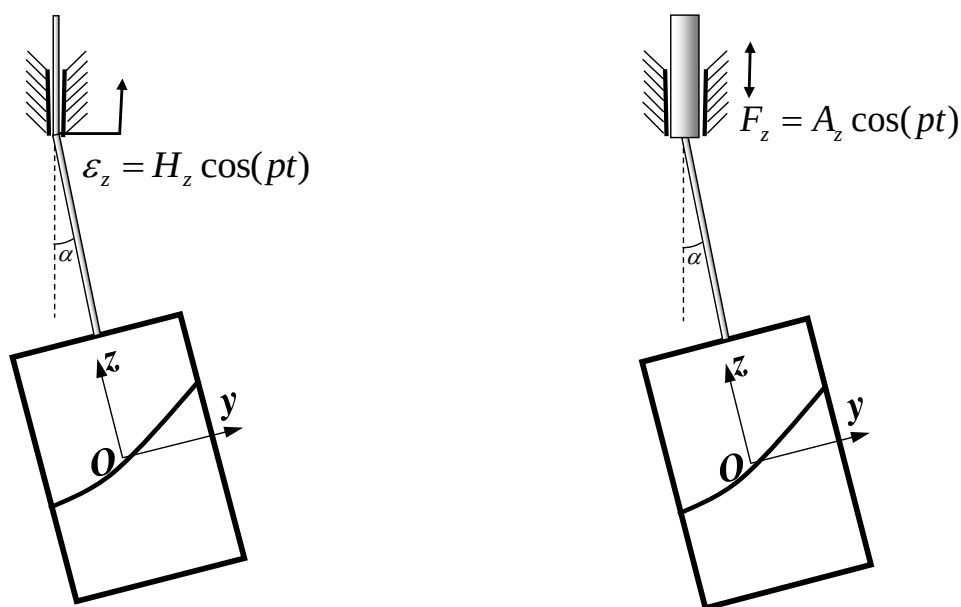
Рис. 2.14. Збурення вільної поверхні рідини в узагальненій задачі Фарадея з пружним амортизатором в дорезонансній зоні збурення

В дорезонансній області збурення руху (Рис. 2.14), як і в резонансній, в класичній задачі Фарадея (графік 1) коливання вільної поверхні рідини майже не збурюються. В узагальненій задачі Фарадея (графіки 2 та 3) амплітуда коливань вільної поверхні рідини наближається до нелінійного діапазону. Однак, на відміну від зарезонансної зони збурення, відсутня

амплітудна модуляція. Отримані результати свідчать, що в узагальненій задачі Фарадея можна вийти на нелінійний режим коливань вільної поверхні рідини на будь-якій частоті, оскільки одночасно з параметричним вступає в дію механізм вимушених коливань.

2.4. Додатковий ступінь вільності – можливість кутових рухів резервуару на маятниковому підвісі

Розглянемо узагальнення задачі Фарадея, коли резервуар, частково заповнений рідиною, може здійснювати кутові коливання навколо центру мас системи [75, 79, 294]. В ракетно-космічній техніці такі коливання здійснює ракета-носій під час польоту, коли паливо із резервуару подається у двигун нерівномірно, і в системі резервуар – трубопровід – двигун – корпус ракети виникають поздовжні параметричні коливання. Коливання палива в резервуарі, в свою чергу, є причиною виникнення кутових коливань корпусу ракети [1, 197–199, 214]. Такі кутові коливання можна дослідити на основі моделі «резервуар на маятниковому підвісі – рідина з вільною поверхнею», де точка підвісу і є центр мас системи.



а) точка підвісу здійснює вертикальні коливання за заданим гармонічним законом

б) точка підвісу здійснює вертикальні коливання під дією гармонічної сили

Рис. 2.15. Механічна модель системи «резервуар на маятниковому підвісі – рідина з вільною поверхнею» в узагальненій задачі Фарадея

Визначимо власні частоти механічної системи «циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею» при наявності пружного закріплення. Для визначення власних частот відповідно до теорії механічних коливань [24, 225] випишемо рівняння (2.38) – (2.39) тільки для амплітуди a_1 першої антисиметричної форми ψ_1 з можливістю здійснення кутових коливань резервуару відносно осі Oy по координаті α_1 у вигляді

$$\ddot{a}_1 + \frac{E_{11}^{1*}}{2\alpha_1^v} \ddot{\alpha}_1 + \frac{N_1 g}{\alpha_1^v} a_1 = 0,$$

$$E_{11}^{1*} \ddot{a}_1 + 2 \left(\frac{1}{\rho} J_{res}^{11} + A_{11}^2 \right) \ddot{\alpha}_1 + \frac{2g}{\rho} (M_T h_T + M_F h_F) \alpha_1 = 0,$$

і, з урахуванням позначень $a = a_1$, $\lambda_F = \frac{E_{11}^{1*}}{2\alpha_1^v}$, $\lambda_T = \frac{\rho E_{11}^{1*}}{2(J_{res}^{11} + \rho A_{11}^2)}$,

$\omega_F^2 = \frac{g N_1}{\alpha_1^v}$, $\omega_T^2 = \frac{g(M_T h_T + M_F h_F)}{J_{res}^{11} + \rho A_{11}^2}$, представимо далі у канонічному вигляді

$$\ddot{a} + \lambda_F \ddot{\alpha} + \omega_F^2 a = 0, \quad (2.47)$$

$$\lambda_T \ddot{a} + \ddot{\alpha} + \omega_T^2 \alpha = 0, \quad (2.48)$$

де ω_F та ω_T – парціальні частоти вільної поверхні рідини та резервуару на маятниковому підвісі відповідно. Будемо шукати періодичні розв'язки системи рівнянь (2.47) – (2.48) у вигляді

$$a = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t, \quad \varepsilon_y = A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t,$$

і, застосовуючи до системи (2.47) – (2.48) метод Гальоркіна [5, 216], запишемо рівняння для амплітуд A_1 та A_2 в матричному вигляді

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \omega_F^2 & \lambda_F \omega^2 \\ \lambda_T \omega^2 & \omega^2 - \omega_T^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Записана система рівнянь має нетривіальний розв'язок, якщо визначник матриці коефіцієнтів дорівнює нулю. Прирівнюючи цей визначник до нуля, розв'яжемо рівняння 4 степені

$$(1 - \lambda_T \lambda_F) \omega^4 - (\omega_T^2 + \omega_F^2) \omega^2 + \omega_F^2 \omega_T^2 = 0,$$

та отримаємо формулу для визначення власних частот механічної системи

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{\omega_T^2 + \omega_F^2 \mp \sqrt{(\omega_T^2 - \omega_F^2)^2 + 4\omega_T^2 \omega_F^2 \lambda_T \lambda_F}}{2(1 - \lambda_T \lambda_F)}}.$$

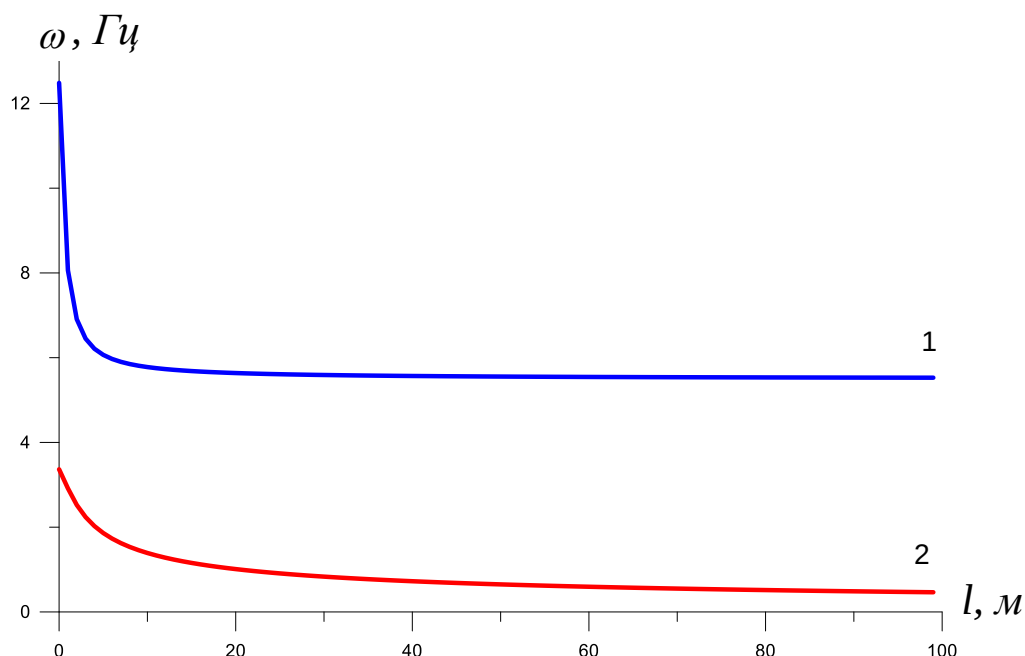


Рис. 2.16. Залежність власних частот системи «резервуар на маятниковому підвісі – рідина з вільною поверхнею» від довжини підвісу

На Рис. 2.16 наведено залежність власних частот системи «резервуар на маятниковому підвісі – рідина з вільною поверхнею» від довжини маятникового підвісу. Як можна бачити з графіків, суттєва зміна власних частот відбувається коротких (малих) довжин підвісу, при зростанні довжини коливання резервуару будуть все більше і більше наближатись до поступального руху, і тому власні частоти асимптотично наближаються до постійних значень (1 – пов'язана з парціальною частотою вільної поверхні

рідини, 2 – прямує до нуля – парціальної частоти резервуару, який здійснює поступальний горизонтальний рух).

Побудуємо області нестійкості для системи «резервуар на маятниковому підвісі – рідина з вільною поверхнею», для чого скористаємось системою рівнянь (2.17), (2.19), доповнивши її параметричним вертикальним збуренням резервуару $\varepsilon_z = H_z \cos(pt)$, тобто отримаємо систему

$$\ddot{a} + \lambda_F \ddot{\alpha} + \omega_F^2 (1 - \nu H_z p^2 \cos pt) a = 0, \quad (2.49)$$

$$\lambda_T \ddot{a} + \ddot{\alpha} + \omega_T^2 \alpha = 0, \quad (2.50)$$

де прийнято позначення $\nu = \frac{B_{11}^{2z}}{gN_1}$.

Області необмежено зростаючих розв'язків відокремлюються від областей стійкості періодичними рішеннями з періодом T або $2T$. А саме, два розв'язки одного періоду обмежують область нестійкості, два розв'язки різних періодів – область стійкості [24, 195, 225, 226]. Звідси випливає, що визначення границь областей нестійкості може бути зведено до пошуку умов, при яких диференціальні рівняння (2.45) – (2.46) мають періодичні розв'язки з періодами T або $2T$.

Отже, зони нестійкості для першого резонансу обмежені періодичними розв'язками з частотою $\frac{p}{2}$, тому періодичні рішення системи рівнянь (2.45) – (2.46) представимо у вигляді

$$a_1 = A_1 \cos \frac{pt}{2} + B_1 \sin \frac{pt}{2}, \quad \alpha_1 = A_2 \cos \frac{pt}{2} + B_2 \sin \frac{pt}{2},$$

та з використанням методу Гальоркіна отримаємо характеристичні рівняння границь зон нестійкості для першого резонансу

$$(1 + 2\omega_F^2 \nu H_z - \lambda_T \lambda_F) p^4 + (-4(\omega_F^2 + \omega_T^2) - 8\omega_F^2 \omega_T^2 \nu H_z) p^2 + 16\omega_F^2 \omega_T^2 = 0,$$

$$(1 + 2\omega_F^2 \nu H_z - \lambda_T \lambda_F) p^4 + (-4(\omega_F^2 + \omega_T^2) + 8\omega_F^2 \omega_T^2 \nu H_z) p^2 + 16\omega_F^2 \omega_T^2 = 0.$$

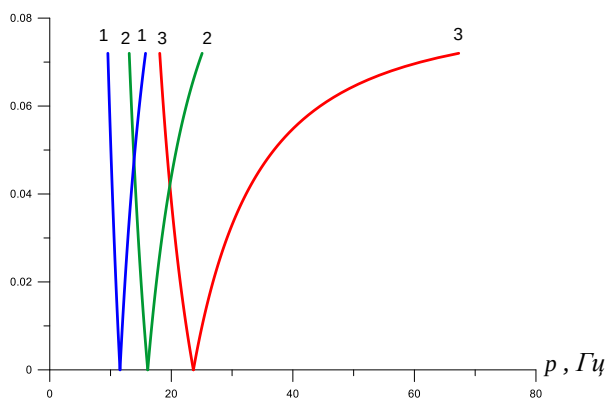
розв'язки яких мають вигляд

$$p_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda_T \lambda_F - 1 - 2\omega_F^2 \nu H_z}} \left(-\omega_T^2 - \omega_F^2 (1 + 2\omega_T^2 \nu H_z) + \right. \\ \left. + \sqrt{\omega_T^4 + \omega_F^4 (1 - 2\omega_F^2 \nu H_z)^2 + 2\omega_F^4 \omega_F^4 (-1 + 2\lambda_T \lambda_F + 2\omega_T^2 \nu H_z)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

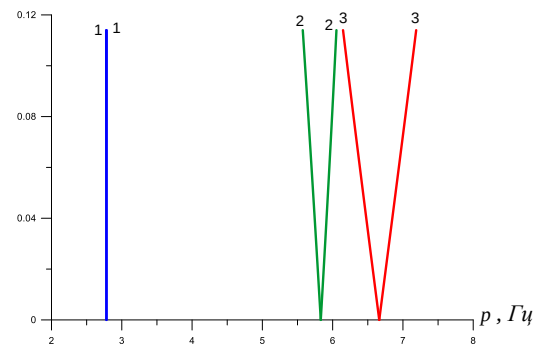
$$p_2 = \sqrt{\frac{2}{-\lambda_T \lambda_F + 1 + 2\omega_F^2 \nu H_z}} \left(-\omega_T^2 - \omega_F^2 (1 + 2\omega_T^2 \nu H_z) - \right. \\ \left. - \sqrt{\omega_T^4 + \omega_F^4 (1 - 2\omega_F^2 \nu H_z)^2 + 2\omega_F^4 \omega_F^4 (-1 + 2\lambda_T \lambda_F + 2\omega_T^2 \nu H_z)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$p_3 = \sqrt{\frac{2}{\lambda_T \lambda_F - 1 + 2\omega_F^2 \nu H_z}} \left(-\omega_T^2 - \omega_F^2 (1 + 2\omega_T^2 \nu H_z) - \right. \\ \left. + \sqrt{\omega_T^4 + \omega_F^4 (1 + 2\omega_F^2 \nu H_z)^2 - 2\omega_F^4 \omega_F^4 (1 - 2\lambda_T \lambda_F + 2\omega_T^2 \nu H_z)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$p_4 = \sqrt{\frac{2}{\lambda_T \lambda_F - 1 + 2\omega_F^2 \nu H_z}} \left(-\omega_T^2 - \omega_F^2 (1 + 2\omega_T^2 \nu H_z) + \right. \\ \left. + \sqrt{\omega_T^4 + \omega_F^4 (1 + 2\omega_F^2 \nu H_z)^2 - 2\omega_F^4 \omega_F^4 (1 - 2\lambda_T \lambda_F + 2\omega_T^2 \nu H_z)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$



а) перша власна частота



б) друга власна частота

Рис. 2.17. Розташування областей першого в узагальненій задачі Фарадея в системі «резервуар на маятниковому підвісі – вільна поверхня рідини»

На (2.18) в площині «зовнішня частота p – амплітуда параметричного збудження H_z » побудовані області нестійкості для першої та другої власних

частот відповідно для різних довжин маятникового підвісу (1 – $l = 100$ м, 2 – $l = 10$ м, 3 – $l = 1$ м). Області нестійкості обмежені кривими з однаковими номерами. Як можна бачити з графіків, збільшення довжини маятникового підвісу сприяє зміщенню областей нестійкості в область низьких частот, що є характерним для поступального руху. Крім того, збільшення довжини підвісу звужує області нестійкості для обох власних частот. Розташування областей нестійкості для другої власної частоти більш суттєво залежить від довжини підвісу, ніж для першої, – їх перетин буде відбуватися тільки в діапазоні великих амплітуд зовнішнього впливу.

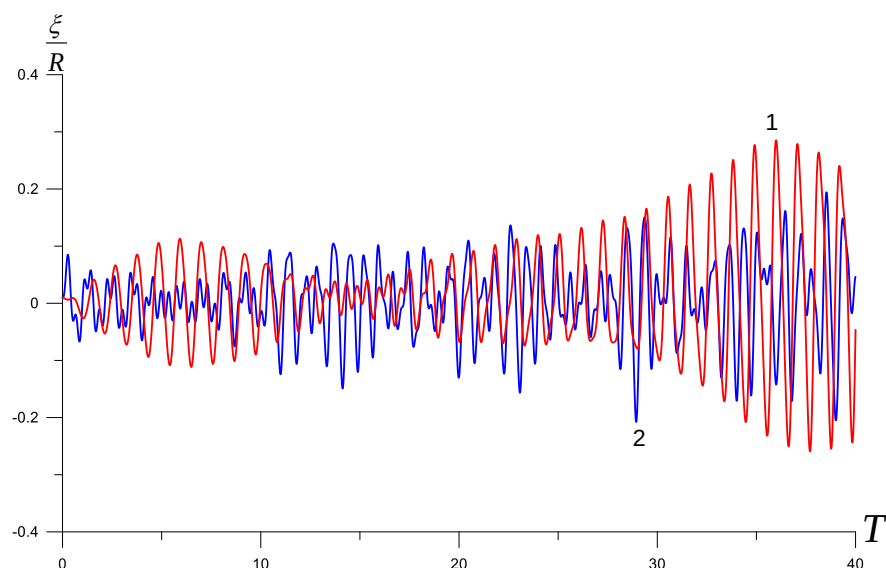


Рис. 2.18. Збурення вільної поверхні рідини в системі «резервуар на маятниковому підвісі – рідина з вільною поверхнею» при початковому відхиленні вільної поверхні рідини

Розглянемо особливості перехідних процесів для даного узагальнення задачі Фарадея. Резервуар радіусу $R = 1$ м та маси $M_T = 0,1M_F$ частково заповнений водою з масою M_F до глибини $H = R$. Довжина маятникового підвісу $l = R$. Для збудження коливань в системі в нульовий момент часу задається або початкове збурення вільної поверхні рідини $a_1(0) = 0,01R$ або початкове відхилення маятника-резервуару $\alpha_1(0) = 1^\circ$. Частота p та амплітуда H_z зовнішнього параметричного збурення підібрані таким чином, щоб викликати резонанс в системі відповідно до зон резонансу першої та другої власної частоти системи, тобто $H_z = 0,0015R$ та $p = 5,83$ Гц та для

збудження параметричного резонансу відносно першої власної частоти і $H_z = 0,007R$ та $p = 16,12$ Гц для збудження параметричного резонансу відносно другої власної частоти системи.

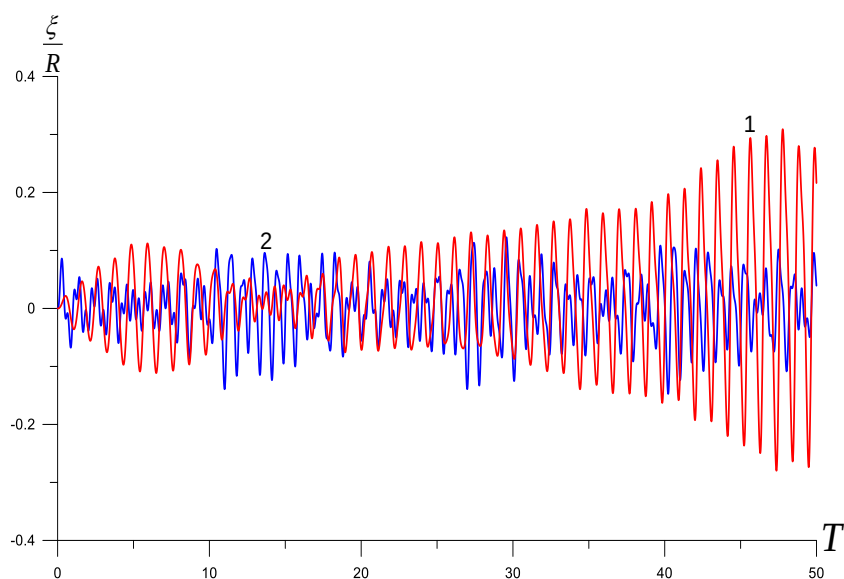


Рис. 2.19. Збурення вільної поверхні рідини в системі «резервуар на маятниковому підвісі – рідина з вільною поверхнею» при початковому відхиленні маятника-резервуару

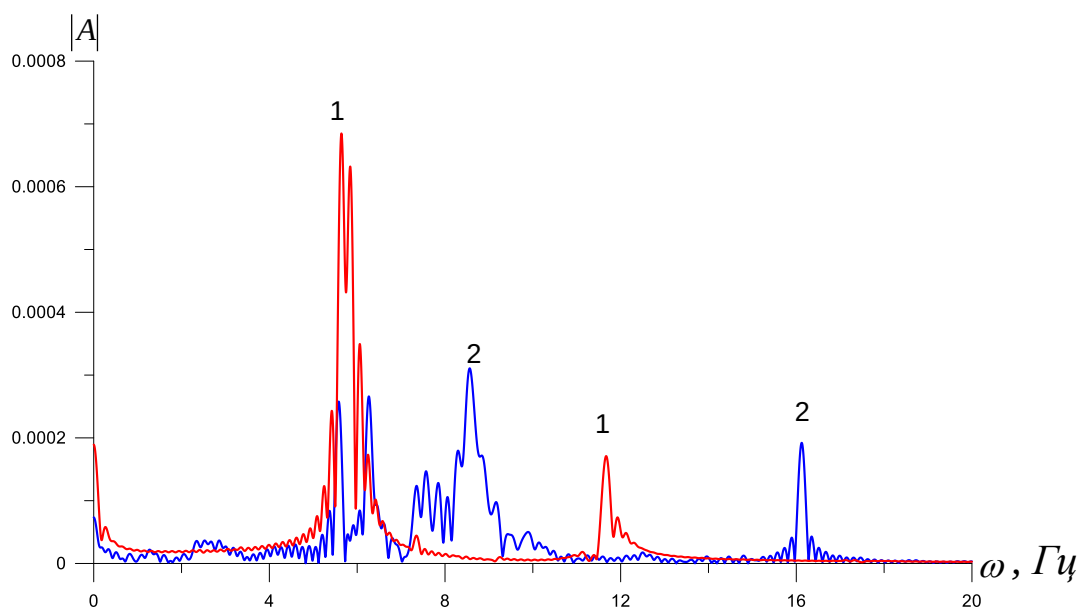


Рис. 2.20. Частотний спектр збурення вільної поверхні рідини в системі «резервуар на маятниковому підвісі – рідина з вільною поверхнею»

Як можна бачити з графіків збурення вільної поверхні рідини (Рис. 2.18, Рис. 2.19), резонанс спостерігається на обох власних частотах, при цьому амплітуди збурення вільної поверхні рідини більше для випадку резонансу

в околі першої власної частоти. І початкове збурення вільної поверхні рідини, і початкове відхилення маятника-резервуару забезпечують вихід системи у режим резонансу, якщо частота зовнішнього збурення лежить в зоні нестійкості. При збільшенні частоти або амплітуди зовнішнього збурення система теж виходить у режим резонансу, але в цьому разі працює сумісний механізм параметричного та вимушеного резонансу.

Як можна бачити з Рис. 2.20, частотний спектр містить гармоніки, характерні як для механізму параметричного резонансу, так і для механізму вимушеного резонансу – тобто на частотах, які дорівнюють частоті зовнішнього збурення або кратні їй, на власних та кратних їм частотах, а також на комбінаційних частотах.

2.5. Додатковий ступінь вільності – збудження руху системи вертикальною гармонічною силою

Розглянемо узагальнення задачі Фарадея, коли резервуар, частково заповнений рідиною, може здійснювати рухи у вертикальній площині, але не за заданим законом $\varepsilon_z = H_z \cos(pt)$ (як у класичній задачі Фарадея), а під дією вертикальної гармонічної сили. Тут введені позначення: H_z, p – амплітуда та частота зовнішнього параметричного збурення, F_z – функція зовнішньої вертикальної сили, M – загальна маса системи. Величина зовнішньої вертикальної сили F_z , яка діє на дно резервуару, підбирається таким чином, щоб забезпечити резервуару таке ж саме прискорення вздовж вертикальної осі OZ , як і у випадку класичної задачі Фарадея. Нехай резервуар радіусу $R = 1$ м частково заповнений водою до глибини $H = R$, при цьому співвідношення мас резервуару та рідини дорівнює $M_T = 1000M_F$. Амплітуда початкового збурення вільної поверхні рідини на стінці резервуару дорівнює $\zeta = 0,01R$. Приймаємо, що в класичній задачі Фарадея резервуар здійснює вертикальні коливання за заданим законом $\varepsilon_z = H_z \cos(pt)$ із амплітудою $H_z = 0,01R$ та частотою $p = 2\omega_1$, где $\omega_1 \approx 4,14$ Гц – частота коливань вільної поверхні рідини при обраних параметрах системи.

В узагальненій задачі Фарадея резервуар здійснює вертикальні коливання під дією сили $F_z = - (M_T + M_F)H_z p^2 \cos(pt)$, щоб забезпечити таке ж саме прискорення резервуару, як і в класичній задачі

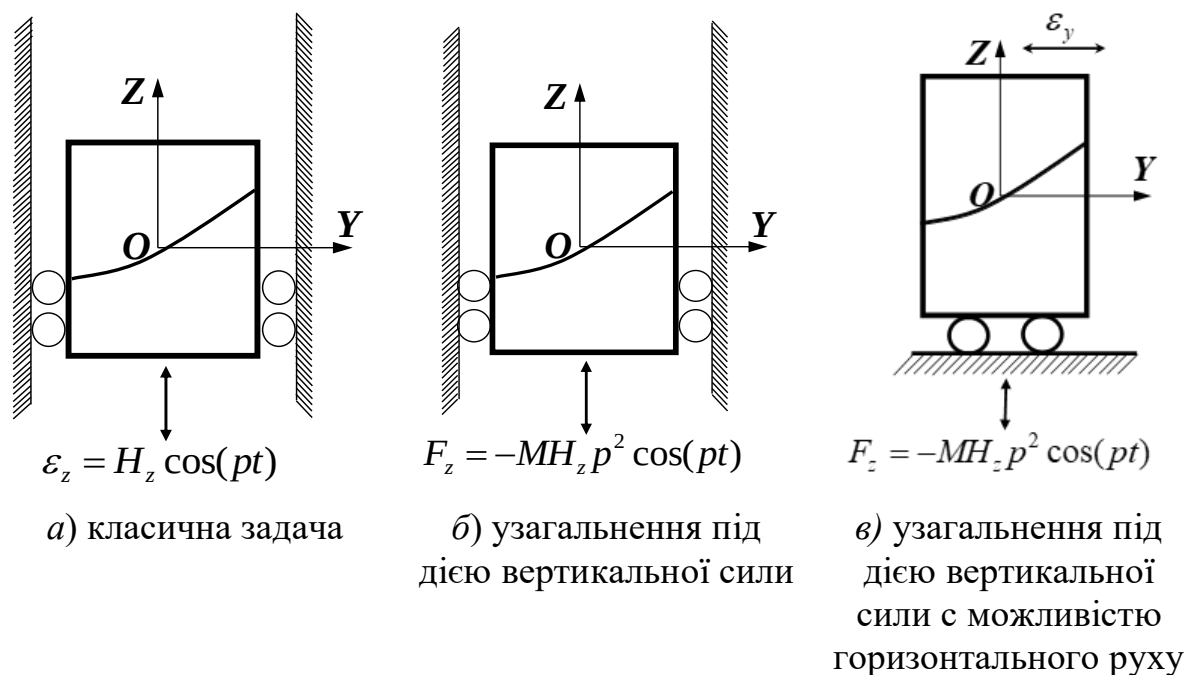


Рис. 2.21. Узагальнення задачі Фарадея, коли резервуар рухається вертикально під дією гармонічної сили

На Рис. 2.22а наведено графік зміни у часі амплітуди вільної поверхні рідини під дією вертикальної гармонічної сили, а на Рис. 2.22б – її частотний спектр, отриманий за допомогою швидкого перетворення Фур'є. Як можна бачити із Рис. 2.22а, спостерігається вихід коливань вільної поверхні рідини на режим параметричного резонансу (амплітуда коливань збільшується в 40 разів), хоча збурення вільної поверхні рідини викликані динамічним, а не кінематичним зовнішнім впливом. Наявність параметричного механізму підтверджується і характерним для параметричного резонансу частотним спектром (Рис. 2.22б) – домінуючою частотою коливань вільної поверхні рідини є половина частоти зовнішнього впливу $\omega \approx 0,5p = \omega_1$. Близькість значень частоти коливань вільної поверхні і частоти параметричного впливу пояснюють наявність в коливаннях вільної поверхні рідини ефекту сильної амплітудної модуляції. Наявність цього ж ефекту призводить до явища антирезонанса (Рис. 2.22а) – амплітуда

збурення вільної поверхні на деякому інтервалі часу спадає до рівня $\xi = (0,01 \div 0,03)R$, тобто значення амплітуди спадає на порядок (приблизно в 10-12 разів) і тримається протягом 3 періодів коливань першої антисиметричною форми. Як показують результати чисельних експериментів, для важкого резервуару коливання вільної поверхні рідини в класичній (при заданому законі руху резервуару) і узагальненій задачі Фарадея (при силовому збудженні руху) практично повністю збігаються. Причиною такого збігу є мала відносна маса рідини, силовий відгук якої в обох випадках не впливає на коливання резервуару, і тому двостороння взаємодія між резервуаром і рідиною відсутня.

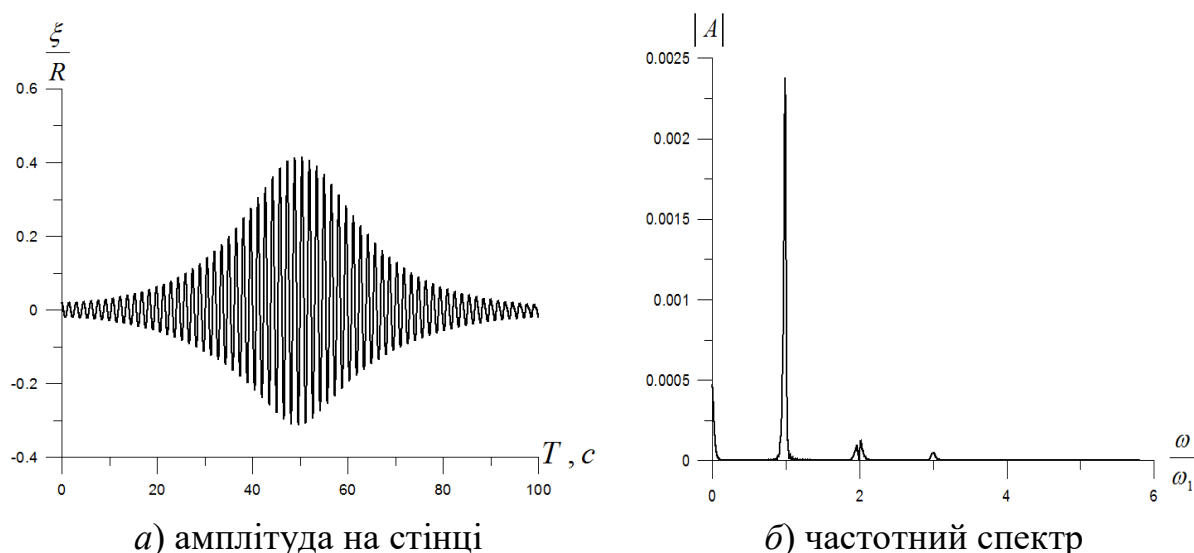
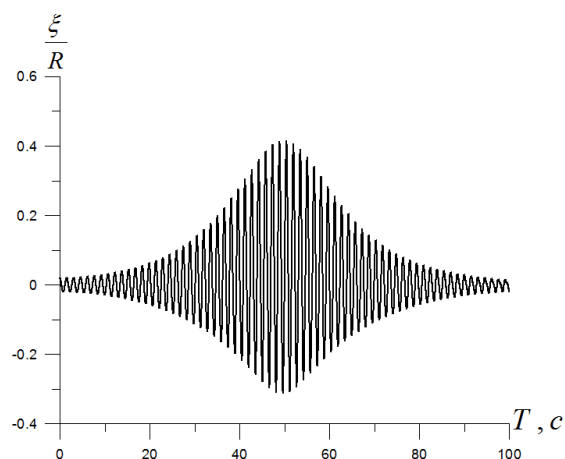


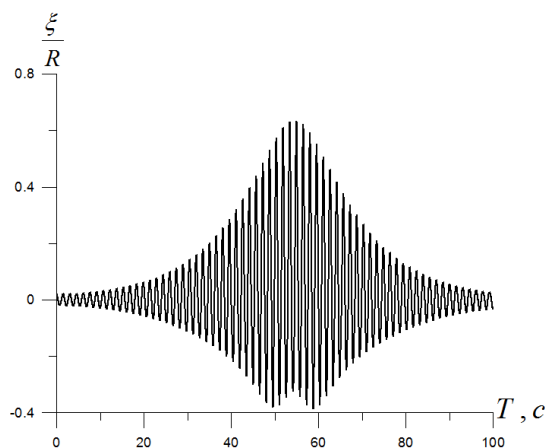
Рис. 2.22. Коливання вільної поверхні рідини, коли резервуар ($M_T = 1000M_F$) рухається вертикально під дією гармонічної сили

Розглянемо аналогічну задачу для випадку легкого резервуару, тобто коли співвідношення мас резервуару і рідини становить, наприклад, $M_T = 0,001M_F$. На Рис. 2.23а і Рис. 2.23б представлені графіки збурення вільної поверхні рідини в класичній і узагальненій задачі Фарадея відповідно. Як видно з графіків, в легкому резервуарі в узагальненій задачі рухомість рідини зростає, тому амплітуда збурення вільної поверхні збільшується, при цьому структура частотного спектру аналогічна випадку коливань важкого резервуару. На Рис. 2.24а представлений графік переміщення легкого резервуару під дією вертикальної гармонічної сили.

Як видно з графіку, через малу масу резервуару силовий відгук рідини на стінки резервуару істотно впливає на закон його руху. На відміну від класичної задачі Фарадея, легкий резервуар під дією вертикальної сили рухається по осі OZ не за законом косинусоїди, а по більш складному закону. Це підтверджує і частотний спектр вертикального переміщення резервуару (Рис. 2.24б), в якому присутні дві дуже близькі частоти.

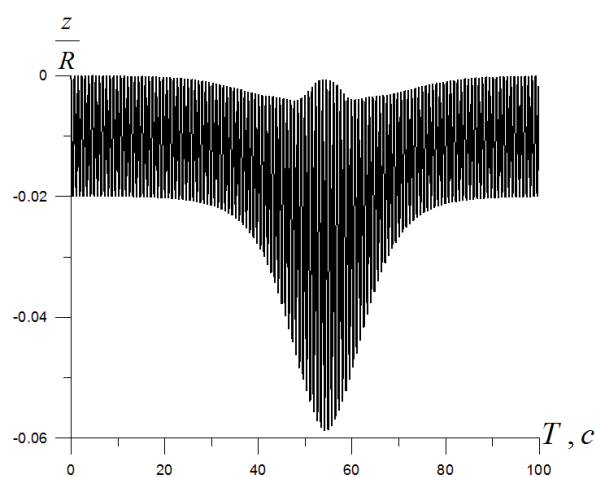


а) класична задача – параметричне збурення руху

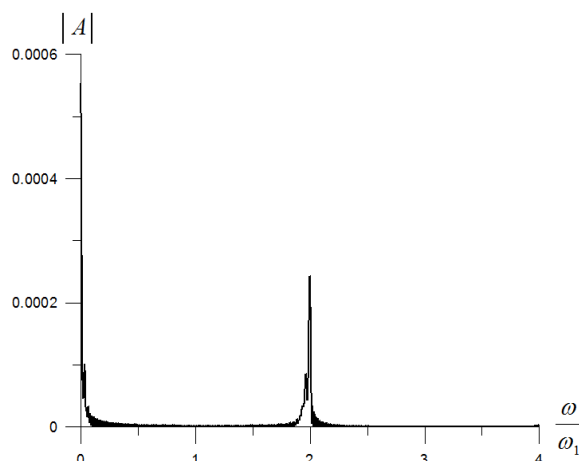


б) узагальнена задача – силове збудження руху

Рис. 2.23. Коливання вільної поверхні рідини, коли резервуар ($M_T = 0,001M_F$) рухається вертикально



а) переміщення резервуару у часі



б) частотний спектр

Рис. 2.24. Характеристики вертикального руху резервуару ($M_T = 0,001M_F$) під дією гармонічної сили

Якщо в класичній задачі Фарадея вибрати відповідну частоту p і амплітуду H_z заданого закону руху з області нестійкості, в результаті коливання вільної поверхні рідини вийдуть на режим параметричного резонансу. В узагальненій задачі Фарадея при дії на систему вертикальної періодичної сили за законом $F_z = -(M_T + M_F)H_z p^2 \cos(pt)$ з такими ж значеннями параметрів p і H_z вихід на режим резонансу (або хоча б на нелінійний режим коливань) не відбувається.

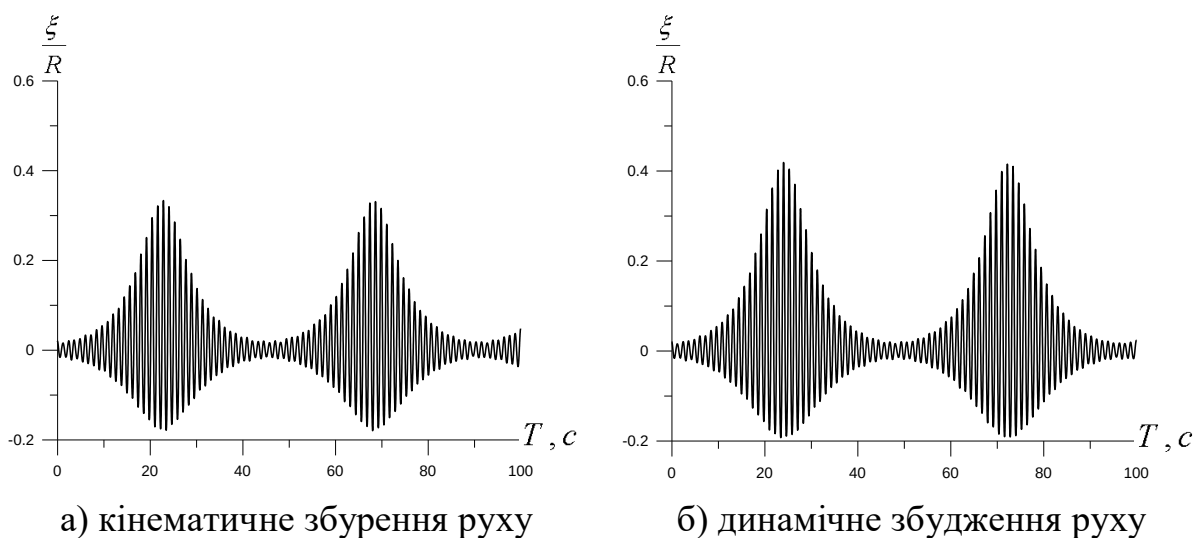


Рис. 2.25. Зміна амплітуди вільної поверхні рідини у часі в узагальненій задачі Фарадея

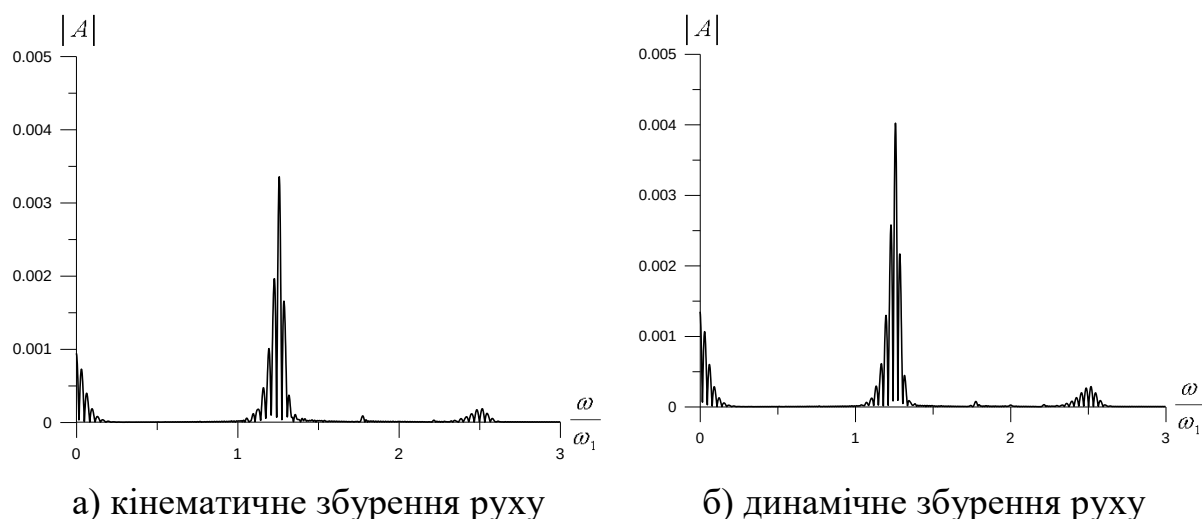


Рис. 2.26. Частотний спектр вільної поверхні рідини в узагальненій задачі Фарадея

Розглянемо особливості динамічних процесів в системі, коли резервуар має два ступеня вільності – можливість переміщення в вертикальній

площині під дією зовнішньої сили та можливість переміщення у горизонтальній площині за рахунок коливань вільної поверхні рідини. Нехай резервуар радіусу $R = 1$ м частково заповнений водою до глибини $H = R$, при цьому співвідношення мас резервуару та рідини дорівнює $M_T = 0,1M_F$. Як можна бачити із Рис. 2.4, при такому співвідношенні мас та прийнятій амплітуді $H_z = 0,01R$ частота зовнішнього параметричного збурення повинна бути в межах $2,494\omega_1 \leq p \leq 2,494\omega_1$, тобто, щоб вивести систему на режим параметричного резонансу, обираємо, наприклад, значення $p = 2,55\omega_1$. На Рис. 2.25 наведені амплітуди збурення у часі вільної поверхні рідини для випадку кінематичного збурення (а) та динамічного збудження (б) руху, а на Рис. 2.26 – відповідні частотні спектри зміни амплітуди у часі. Як можна бачити з Рис. 2.25, в обох випадках спостерігається вихід системи на режим параметричного резонансу при наявності глибокої амплітудної модуляції, розрізняються лише максимумами амплітуд. Спектри коливань вільної поверхні рідини (Рис. 2.26) для обох узагальнень також подібні і характеризуються домінуванням основного тону і близьких до нього комбінаційних частот.

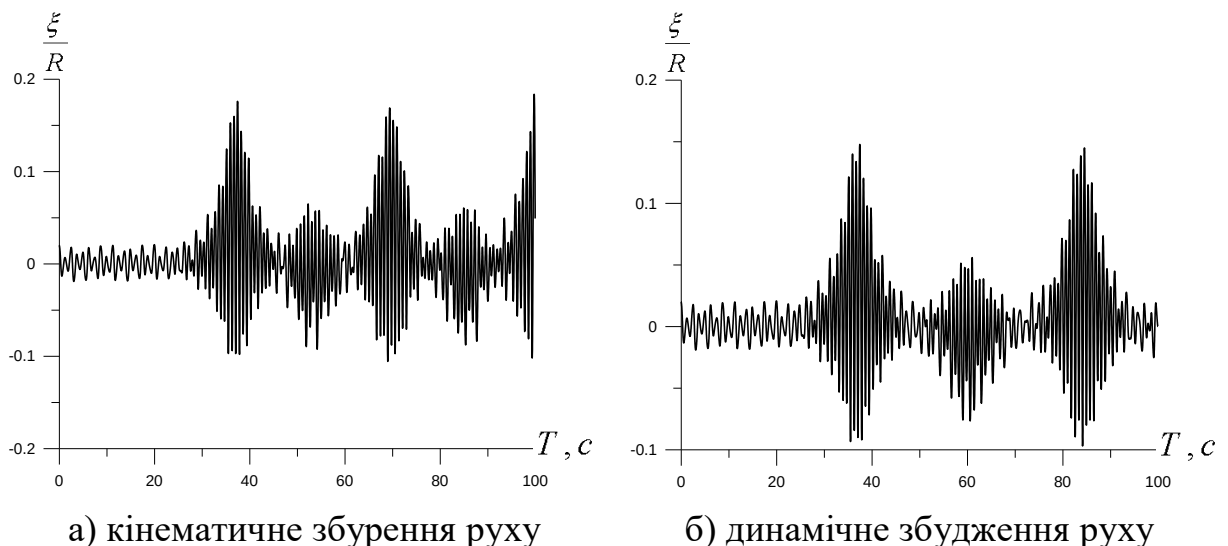


Рис. 2.27. Зміна амплітуди вільної поверхні рідини у часі в узагальненій задачі Фарадея (дорезонансна зона)

Розглянемо узагальнену задачу Фарадея, коли частота зовнішнього збудження дорівнює $p = 1,9\omega_1$, тобто розташована за границею області

нестійкості в дорезонансній зоні. На Рис. 2.27 наведені амплітуди збурення у часі вільної поверхні рідини для випадку кінематичного збурення (а) та динамічного збудження (б) руху, а на Рис. 2.28 – відповідні частотні спектри зміни амплітуди у часі. Як видно з графіків зміни амплітуди, в обох випадках спостерігається вихід системи на режим резонансу, причому у разі кінематичного збурення ці амплітуди більше. Аналіз частотних спектрів (Рис. 2.28) показує, що обох випадках в спектрі присутні гармоніки як в околі частоти $p \approx \omega_1$, так і в околі частоти $p \approx 1,9\omega_1$. Це означає, що в системі динамічні процеси розвиваються як сукупність параметричного резонансу та режиму вимушених коливань, причому режим вимушених коливань є визначальним (гармоніки на цих частотах є домінуючими). Аналогічна ситуація спостерігається і при збудженні системи на зарезонансній частоті.

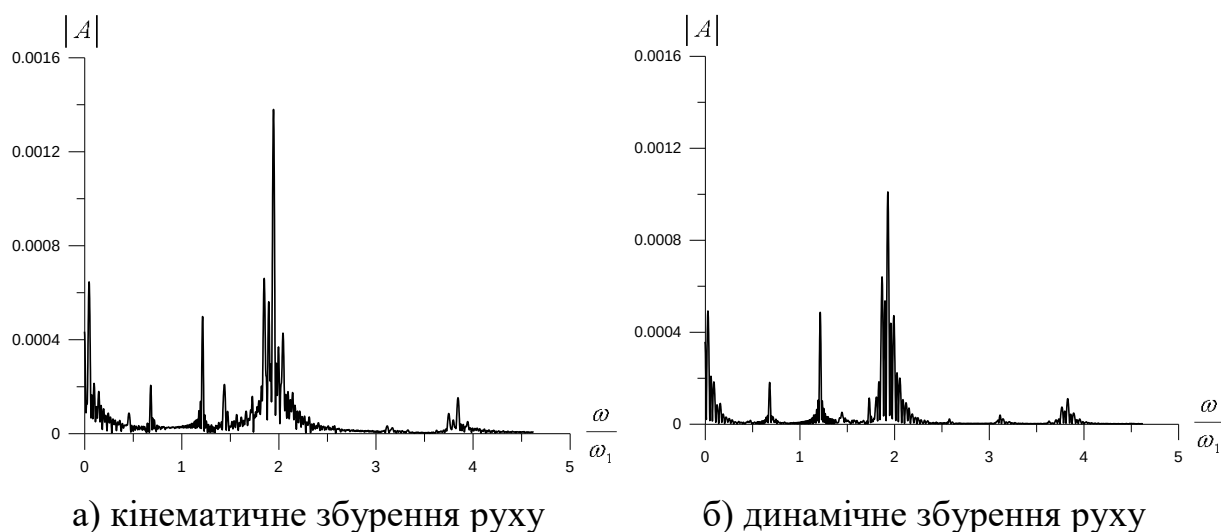


Рис. 2.28. Частотний спектр вільної поверхні рідини в узагальненій задачі Фарадея (дорезонансна зона)

Механізм вимушених коливань виводить систему «резервуар – рідина з вільною поверхнею» на режим резонансу, навіть коли частота зовнішнього кінематичного збурення не є резонансною. Тобто на відміну від класичної задачі Фарадея наявність додаткового ступеня вільності за допомогою вертикального кінематичного збурення дозволяє вивести коливання вільної поверхні рідини в нелінійний режим на будь-якій частоті. Для узагальненої

задачі з вертикальною гармонійною силою взагалі неможливо побудувати області стійкості і нестійкості. Проте, наявність додаткової міри свободи також дозволяє вивести систему на нелінійний режим завдяки дії механізму вимушених коливань.

Висновки до розділу

Побудовано варіанти узагальнення класичної задачі Фарадея з урахуванням: 1) сумісності коливань рідини та резервуару, 2) наявності додаткового ступеня вільності руху резервуару (можливості горизонтального переміщення або кутових коливань резервуару на маятниковому підвісі); 3) можливості вертикального силового збудження руху резервуару.

Для узагальнення задачі Фарадея виконано: 1) механічну постановку задачі для кожного випадку узагальнення; 2) отримання в аналітичному вигляді формул для обчислення власних частот сумісних коливань; 3) отримання в аналітичному вигляді формул для обчислення областей стійкості та нестійкості системи; 4) проведення якісного та спектрального аналізу результатів обчислювальних експериментів для виявлення властивостей руху системи і перевірки справедливості прийнятих гіпотез.

Дослідження проводилося на основі нелінійної багатомодової (до 12 форм коливань) дискретної моделі, яка побудована на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського. Дослідження проводилося на основі методу модальної декомпозиції з урахуванням коливань на власних частотах всіх форм.

Внесення в систему додаткового ступеня вільності (можливість горизонтального переміщення або кутових коливань резервуару на маятниковому підвісі) приводить до підвищення частоти параметричного резонансу, причому вона тим вище, чим менше маса резервуару по відношенню до маси рідини або чим коротше довжина маятникового підвісу.

При вертикальному збуренні руху резервуару з можливістю горизонтального переміщення або кутових коливань на маятниковому підвісі на відміну від класичної задачі Фарадея динамічні процеси в системі розвиваються як сукупність параметричного резонансу і вимушених коливань. Для даного узагальнення задачі Фарадея можливий вихід системи на нелінійний режим коливань на будь-якій частоті.

Взагалі, вихід на усталений режим коливань в нелінійних багаточастотних системах типу «резервуар – рідина з вільною поверхнею» при параметричному збуренні руху резервуару не відбувається – спектр коливань збурення вільної поверхні рідини на стінці (як найбільш характерній точці, яка доступна для вимірів та спостереження) завжди містить гармоніки на власних та комбінаційних частотах.

3. ПРОГРАМНЕ КЕРУВАННЯ ТА КЕРУВАННЯ ЗІ ЗВОРОТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ МЕХАНІЧНОЮ СИСТЕМОЮ «РЕЗЕРВУАР – РІДИНА З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ»

Конструкції з рідиною з вільною поверхнею часто зустрічаються в сучасній техніці як складові компоненти транспортних і енергетичних систем, систем транспортування і зберігання різних екологічно небезпечних і технологічних рідин. При цьому відносна маса рідини може бути значною, а тому рухомість рідини істотно впливає на динаміку таких систем і керування ними. Особливе значення має проблема високоточного керування такими системами при здійсненні маневрів об'єктів з рідиною поблизу інших відповідальних конструкцій, наприклад причалювання кораблів, стикування-розстикування космічних апаратів, установка різних резервуарів з рідинами (дизельне паливо, вода, мастила і т.д.) на атомних електростанціях.

Математичні моделі динаміки конструкцій з рідиною відносяться до різновиду об'єктів з внутрішніми ступенями вільності, і в разі суттєвої відносної маси рідини необхідно урахування характеру спільного руху складових компонентів системи, що традиційно є складним завданням.

Дослідження задач керування рухом конструкцій з рідиною проводилися в роботах [1, 52, 55, 196, 213, 236, 238, 255, 285] та ін. з використанням лінійних малорозмірних моделей, тобто і побудова алгоритму керування, і апробація побудованого керування здійснювались на основі лінійних моделей та теорії лінійних систем керування механічними системами. Перехід до математичних моделей більшої розмірності та урахування нелінійностей ускладнює використання існуючих методів розв'язання задач керування рухом механічних систем.

В цьому розділі розглянуто побудову в аналітичному вигляді керування резервуаром (активної зовнішньої сили) для забезпечення руху системи за

заданим законом (програмний рух). Для цього використовувалось декілька підходів:

- побудова керування із зворотним зв'язком (описано у п. 3.1, 3.2, 3.3) на основі вимірювання збурень (відхилень від закону програмного руху);
- підхід, пов'язаний з можливістю компенсації головного вектору сил тиску рідини на стінки резервуару (п. 3.4);
- підхід на основі варіаційного принципу найменшого примушення Гауса, який дозволяє реалізувати в системі задані програмні закони руху та забезпечити мінімізацію енерговитрат на керування (п. 3.5);

Керування резервуаром, побудоване на основі лінійних моделей у збуреннях, використовує метод модального керування (п. 3.1), метод еталонної моделі (п. 3.2) та метод мінімізації квадратичного функціоналу якості (п. 3.3). Для пошуку коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку використовуються методи, розроблені у роботах В.В. Новицького [207–211], які дозволяють встановити керованість системи у збуреннях та одночасно здійснити необхідну декомпозицію на підсистеми зведенням до канонічного вигляду. Алгоритми керування, розроблені на основі таких лінійних підходів, було апробовано на повній нелінійній дискретній моделі системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» (п. 2.1) та встановлено границі застосування цих алгоритмів.

Методи керування, побудовані на основі підходу, пов'язаного з можливістю компенсації головного вектору сил тиску рідини на стінки резервуару, та на основі варіаційного принципу найменшого примушення Гауса [253, 307, 308, 351, 363] використовуються для побудови керування у всіх діапазонах збурення вільної поверхні рідини.

Для перевірки якості побудованого керування були розв'язані наступні задачі:

- розгін резервуару із нерухомого положення за заданий час до необхідної швидкості і далі його рівномірний рух з цією швидкістю;

- гальмування резервуару, який рухається рівномірно із заданою швидкістю, за заданий час до повної зупинки;
- переміщення резервуару здійснюється за заданим гармонічним законом.

3.1. Керування зі зворотним зв'язком на основі модального принципу

Розглянемо будь-яку механічну систему, збурений рух якої на інтервалі часу $t \in [t_0, \infty)$ у загальному випадку описується за допомогою лінійної нестационарної системи [207–211]

$$\dot{y} = F(t)y + G(t)u, \quad y(t_0) = y_0, \quad (3.1)$$

де y – n -вимірний вектор стану, u – m -вимірний вектор керування, матриці $F(t)$ і $G(t)$ мають розмірність $n \times n$ й $n \times m$ відповідно і є необхідну кількість разів диференційованими та обмеженими разом зі своїми похідними.

Запишемо (3.1) в блочній формі, узгодженій з кількістю керувань

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}(t) & F_{12}(t) \\ F_{21}(t) & F_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{12}(t) \\ G_{22}(t) \end{bmatrix} u, \quad (3.2)$$

де вектори y_1 і y_2 мають розмірність $n - m$ й m відповідно, матриця $F_{11}(t)$ має розмірність $(n - m) \times (n - m)$, матриці $F_{22}(t)$ і $G_{22}(t)$ мають розмірність $m \times m$, матриці $F_{12}(t)$, $F_{21}^T(t)$ і $G_{12}(t)$ мають розмірність $(n - m) \times m$. Припускаємо також, що $\det G_{22}(t) \neq 0$ на $t \in [t_0, \infty)$.

Спочатку зведемо систему (3.2) до канонічної щодо керування форми [211] заміною вектора стану

$$x(t) = T(t)y(t), \quad (3.3)$$

де матриця $T(t)$ має вигляд

$$T(t) = \begin{bmatrix} T^1(t) & -T^1(t)G_{12}(t)G_{22}(t)^{-1} \\ 0 & G_{22}(t)^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

а обернена матриця $T(t)^{-1}$ ($\det T^1(t) \neq 0$)

$$T(t)^{-1} = \begin{bmatrix} (T^1(t))^{-1} & G_{12}(t) \\ 0 & G_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

де матриця $T^1(t)$ має розмірність $(n - m) \times (n - m)$. Після відповідних перетворень матимемо

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.6)$$

де

$$A(t) = T(t)F(t)T(t)^{-1} + \dot{T}(t)T(t)^{-1}, \quad (3.7)$$

$$B = T(t)G(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

В блочній форми система в канонічному вигляді щодо керування запишеться так

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{u}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T^1(t)F^1(t) + \dot{T}^1(t)] \cdot [T^1(t)]^{-1} & T^1(t)G^1(t) \\ E(t)[T^1(t)]^{-1} & A_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ u^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} u, \quad (3.9)$$

де

$$\begin{aligned} F^1(t) &= F_{11} - G_{12}G_{22}^{-1}F_{21}, \\ G^1(t) &= F^1G_{12} + \left(F_{12} - G_{12}G_{22}^{-1}F_{22} - \frac{d}{dt}(G_{12}G_{22}^{-1}) \right) G_{22}, \\ E(t) &= G_{22}^{-1}F_{21}, \quad E(t)(T^1)^{-1} = [E_{21}, E_{11}], \\ A_{22}(t) &= G_{22}^{-1}(F_{21}G_{12} + F_{22}G_{22}) + \frac{d}{dt}(G_{22}^{-1})G_{22}. \end{aligned}$$

Матриці $F^1(t)$, $G^1(t)$, $E(t)$, $E_{21}(t)$, $E_{11}(t)$, $A_{22}(t)$ мають розмірності відповідно $(n - m) \times (n - m)$, $(n - m) \times m$, $m \times (n - m)$, $m \times (n - 2m)$, $m \times m$ і $m \times m$.

Нехай $n - m \leq m$, тоді подальші перетворення системи (3.9) не проводитимемо. Для зручності можна вибрати $T_1 = I_{n-m}$. Якщо ж $n - m > m$, то розглянемо першу підсистему системи (3.9)

$$\dot{x}^1 = [T^1(t)F^1(t) + \dot{T}^1(t)] [T^1(t)]^{-1} x^1 + T^1(t)G^1(t)u^1, \quad (3.10)$$

чи

$$\dot{x}^1 = A^1(t)x^1 + B^1u^1,$$

де формально u^1 будемо вважати керуванням. З точністю до індексу запис останньої системи збігається з записом (3.6) – (3.8), тому подамо матриці $F^1(t)$ та $G^1(t)$ у блочному вигляді

$$F^1(t) = \begin{bmatrix} F_{11}^1(t) & F_{12}^1(t) \\ F_{21}^1(t) & F_{22}^1(t) \end{bmatrix}, \quad G^1(t) = \begin{bmatrix} G_{12}^1(t) \\ G_{22}^1(t) \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

де матриця $F_{11}^1(t)$ має розмірність $(n - 2m) \times (n - 2m)$, матриці $F_{22}^1(t)$ і $G_{22}^1(t)$ мають розмірність $m \times m$, матриці $F_{12}^1(t)$, $(F_{21}^1(t))^T$ і $G_{12}^1(t)$ мають розмірність $(n - 2m) \times m$, при цьому $\det G_{22}^1(t) \neq 0$ на $t \in [t_0, \infty)$.

Отже, матрицю перетворення $T^1(t)$ також зручно вибрати вигляду

$$T^1(t) = \begin{bmatrix} T^2(t) & -T^2(t)G_{12}(t)G_{22}(t)^{-1} \\ 0 & G_{22}(t)^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

а обернена матриця $(T^1(t))^{-1}$ ($\det T^2(t) \neq 0$) буде такою

$$(T^1(t))^{-1} = \begin{bmatrix} (T^2(t))^{-1} & G_{12}(t) \\ 0 & G_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

де матриця $T^2(t)$ має розмірність $(n - 2m) \times (n - 2m)$.

Цей вибір матриці перетворення зводить систему (3.9) з допомогою (3.3) до блочної форми

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^2 \\ \dot{u}^2 \\ \dot{u}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (T^2 F^2 + \dot{T}^2)(T^2)^{-1} & T^2 G^2 & 0 \\ E^1 (T^2)^{-1} & A_{22}^1 & I_m \\ E_{21} (T^2)^{-1} & E_{11} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 \\ u^2 \\ u^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix} u, \quad (3.14)$$

де

$$F^2(t) = F_{11}^1 - G_{12}^1 (G_{22}^1)^{-1} F_{21}^1,$$

$$G^2(t) = F^2 G_{12}^1 - \left(F_{12}^1 - G_{12}^1 (G_{22}^1)^{-1} F_{22}^1 - \frac{d}{dt} (G_{12}^1 (G_{22}^1)^{-1}) \right) G_{22}^1,$$

$$E^1(t) = (G_{22}^1)^{-1} F_{21}^1, \quad E^1(t) (T^2)^{-1} = [E_{22}^1, E_{12}^1], \quad E_{21}(t) (T^2)^{-1} = [E_{22}, E_{12}],$$

$$A_{22}^1(t) = (G_{22}^1)^{-1} (F_{21}^1 G_{12}^1 + F_{22}^1 G_{22}^1) - \frac{d}{dt} ((G_{22}^1)^{-1}) G_{22}^1.$$

Матриці $F^2(t)$, $G^2(t)$, $E^1(t)$, $E_{22}(t)$, $E_{12}^1(t)$, $E_{12}(t)$, $E_{22}^1(t)$ мають розмірності відповідно $(n-2m) \times (n-2m)$, $(n-2m) \times m$, $m \times (n-2m)$, $m \times (n-2m)$, $m \times (n-2m)$, $m \times m$, $m \times m$ і $m \times m$.

Остаточно для i -го кроку матимемо такий алгоритм

$$\dot{x}^i = [T^i(t) F^i(t) + \dot{T}^i(t)] [T^i(t)]^{-1} x^i + T^i(t) G^i(t) u^i, \quad (3.15)$$

чи

$$\dot{x}^i = A^i(t) x^i + B^i u^i,$$

де формально u^i будемо вважати керуванням. З точністю до індексу запис останньої системи збігається з записом (3.6) – (3.8), тому подамо матриці $F^i(t)$ та $G^i(t)$ у блочному вигляді

$$F^i(t) = \begin{bmatrix} F_{11}^i(t) & F_{12}^i(t) \\ F_{21}^i(t) & F_{22}^i(t) \end{bmatrix}, \quad G^i(t) = \begin{bmatrix} G_{12}^i(t) \\ G_{22}^i(t) \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

де матриця $F_{11}^i(t)$ має розмірність $(n - (i+1)m) \times (n - (i+1)m)$, матриці $F_{22}^i(t)$ і $G_{22}^i(t)$ мають розмірність $m \times m$, матриці $F_{12}^i(t)$, $(F_{21}^i(t))^T$ і $G_{12}^i(t)$ мають розмірність $(n - (i+1)m) \times m$, при цьому $\det G_{22}^i(t) \neq 0$ на $t \in [t_0, \infty)$.

Отже, матрицю перетворення $T^i(t)$ також зручно вибрати вигляду [211]

$$T^i(t) = \begin{bmatrix} T^{i+1}(t) & -T^{i+1}(t)G_{12}(t)G_{22}^i(t)^{-1} \\ 0 & G_{22}^i(t)^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

а обернена матриця $(T^i(t))^{-1}$ ($\det T^{i+1}(t) \neq 0$) буде такою

$$(T^i(t))^{-1} = \begin{bmatrix} (T^{i+1}(t))^{-1} & G_{12}(t) \\ 0 & G_{22}^i(t) \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

де матриця $T^{i+1}(t)$ має розмірність $(n - (i+1)m) \times (n - (i+1)m)$.

Цей вибір матриці перетворення зводить систему (3.9) з допомогою (3.3) до такої блочної форми

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^{i+1} \\ \dot{u}^{i+1} \\ \dots \\ \dot{u}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (T^{i+1}F^{i+1} + \dot{T}^{i+1})(T^{i+1})^{-1} & T^{i+1}G^{i+1} & \dots & 0 \\ E^i(T^{i+1})^{-1} & A_{22}^i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_{2i}(T^{i+1})^{-1} & E_{1i} & \dots & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{i+1} \\ u^{i+1} \\ \dots \\ u^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ I_m \end{bmatrix} u, \quad (3.19)$$

де

$$F^{i+1}(t) = F_{11}^i - G_{12}^i(G_{22}^i)^{-1}F_{21}^i,$$

$$G^{i+1}(t) = F^{i+1}G_{12}^i - \left(F_{12}^i - G_{12}^i(G_{22}^i)^{-1}F_{22}^i - \frac{d}{dt}(G_{12}^i(G_{22}^i)^{-1}) \right) G_{22}^i,$$

$$E^i(t) = (G_{22}^i)^{-1}F_{21}^i, \quad E^i(t)(T^{i+1})^{-1} = [E_{2i+1}^i, E_{1i+1}^i], \quad E_{2i}^k(t)(T^{i+1})^{-1} = [E_{2i+1}^k, E_{1i+1}^k],$$

$$A_{22}^i(t) = (G_{22}^i)^{-1}(F_{21}^i G_{12}^i + F_{22}^i G_{22}^i) - \frac{d}{dt}((G_{22}^i)^{-1})G_{22}^i.$$

Матриці $F^{i+1}(t)$, $G^{i+1}(t)$, $E^i(t)$, E_{1i}^k , E_{2i+1}^k , $A_{22}^i(t)$ мають розмірності відповідно $(n - (i+1)m) \times (n - (i+1)m)$, $(n - (i+1)m) \times m$, $m \times (n - (i+1)m)$, $m \times m$, $m \times (n - (i+1)m)$ і $m \times m$. На кожному кроці $\text{rang } G^{i+1}(t) = m$.

Дослідимо випадки порушення умови повноти рангу матриці G^{i+1} , тобто коли

$$0 \leq \text{rang } G^{i+1}(t) < m.$$

Умова $\text{rang } G^{i+1}(t) = 0$ можлива лише у випадку, коли $G^{i+1}(t) = 0$, що означає виділення в системі (3.19) некерованої підсистеми порядку $n - (i+1)m$.

Якщо виконані строгі нерівності

$$0 \leq \text{rang } G^{i+1}(t) = \mu < m,$$

то матрицю G^{i+1} можна подати в такому вигляді

$$G^{i+1}(t) = \begin{bmatrix} G_{12}^{i+1}(t)L(t) & G_{12}^{i+1}(t) \\ G_{22}^{i+1}(t)L(t) & G_{22}^{i+1}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

де матриці $G_{12}^{i+1}(t)$, $G_{22}^{i+1}(t)$ й $L(t)$ мають розмірності відповідно $(n - (i+1)m - \mu) \times \mu$, $\mu \times \mu$ і $\mu \times (m - \mu)$, при цьому

$$\det G_{22}^{i+1}(t) \neq 0 \text{ на } t \in [t_0, \infty). \quad (3.21)$$

При $\det G_{22}^{i+1}(t) = 0$ умові (3.21) можна задовольнити відповідною перестановкою рядків та стовпчиків $G_{22}^{i+1}(t)$. Це еквівалентно введенню перетворення вектора стану x^{i+1} з матрицею перестановок

$$T^{i+1}(t) = T_*^{i+1}(t)P^{i+1}, \quad (3.22)$$

де P^{i+1} – відповідна матриця перестановок розмірності $(n - (i+1)m) \times (n - (i+1)m)$, $T_*^{i+1}(t)$ – відповідна матриця перетворень, записана у вигляді

$$T_*^{i+1}(t) = \begin{bmatrix} T^{i+2}(t) & -T^{i+2}(t)G_{12}^{i+1}(t)(G_{22}^{i+1}(t))^{-1} \\ 0 & (G_{22}^{i+1}(t))^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

де $T^{i+2}(t)$ – матриця розмірності $(n - (i+1)m - \mu) \times (n - (i+1)m - \mu)$. У [211] показано, що

$$T^{i+1}(t)G^{i+1}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ L(t) & I_\mu \end{bmatrix}.$$

Отже, канонічна форма Гесенберга у цьому випадку матиме такий вигляд

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^{i+2} \\ \dot{u}^{i+2} \\ \dot{u}^{i+1} \\ \dots \\ \dot{u}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{i+2} & G^{i+2} & 0 & \dots & 0 \\ E^{i+1} & A_{22}^{i+1} & J_m & \dots & 0 \\ E_{2i+1}^i & E_{1i+1}^i & A_{22}^i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_{2i+1} & E_{1i+1} & E_{1i} & \dots & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{i+2} \\ u^{i+2} \\ u^{i+1} \\ \dots \\ u^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ I_m \end{bmatrix} u,$$

де

$$J_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L(t) & I_\mu \end{bmatrix}.$$

Таким чином, за допомогою рекурентного алгоритму динамічну систему (3.1) зведено до канонічної форми Гесенберга (3.19), яка остаточно буде виглядати таким чином (для спрощення обрано систему з одним керуванням)

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.24)$$

де

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} & 1 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Тепер розглянемо рекурентний алгоритм зведення динамічної системи у формі Гесенберга (3.25) до форми Фробеніуса. Цей процес відбувається за допомогою лінійного перетворення вектору стану

$$y = T(t)x, \quad (3.26)$$

де матриця перетворення буде такою

$$T(t) = T_{n-1}(t) \dots T_2(t) T_1(t), \quad (3.27)$$

тобто, складається з добутку матриць, які на кожному кроці є елементарними неунітарними матрицями вигляду

$$T_{i+1} = \begin{bmatrix} I_{i+1} + e_{i+1} \tilde{a}_i & 0 \\ 0 & I_{n-(i+1)} \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Тут введено такі позначення: I_{i+1} – одинична матриця порядку $i+1$, $\tilde{e}_i = [0, \dots, 0, 1, 0]^T$ – вектор порядку $i+1$ з одиницею на $i-1$ місці, $e_{i+1} = [0, \dots, 0, 1]^T$ – координатний (базисний) вектор порядку $i+1$ з одиницею на $i+1$ місці, $\tilde{a}_i = [a_{i1}^i, a_{i2}^i, \dots, a_{ii}^i, 0]^T$.

Матриця-результат після i -го кроку еквівалентного перетворення має вигляд

$$A_{i+1} = T_{i+1} A_i T_{i+1}^{-1} + \dot{T}_{i+1} T_{i+1}^{-1}, \quad A_1 = A(t), \quad i = 1, n-1. \quad (3.29)$$

На i -ому кроці матимемо таку блочну структуру перетворювальної матриці

$$A_i = \begin{bmatrix} I_{i+1}(a_{i+1}) + \tilde{e}_i \tilde{a}_i & A_{12}^i \\ A_{21}^i & A_{22}^i \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

де відповідні компоненти мають вигляд

$$I_{i+1}(a_{i+1}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_{i+1,1}^i & a_{i+1,2}^i & a_{i+1,3}^i & \dots & a_{i+1,i}^i & a_{i+1,i+1}^i \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

$$a_{i+1} = [a_{i+1,1}^i \quad a_{i+1,2}^i \quad a_{i+1,3}^i \quad \dots \quad a_{i+1,i}^i \quad a_{i+1,i+1}^i],$$

$$\tilde{e}_i(\tilde{a}_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{i1}^i & a_{i2}^i & a_{i3}^i & \dots & a_{ii}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{12}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

A_{22}^i – матриця в нижній формі Гесенберга вигляду (3.25). Далі обчислюємо

$$\begin{aligned} T_{i+1} A_i T_{i+1}^{-1} &= \begin{bmatrix} I_{i+1} + \tilde{e}_{i+1} a_i & 0 \\ 0 & I_{n-(i+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{i+1}(a_{i+1}) + \tilde{e}_i \tilde{a}_i & A_{12}^i \\ A_{21}^i & A_{22}^i \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} I_{i+1} - e_{i+1} \tilde{a}_i & 0 \\ 0 & I_{n-(i+1)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В [209, 211] показано, що

$$(I_{i+1} + e_{i+1} \tilde{a}_i)(I_{i+1}(a_{i+1}) + \tilde{e}_i \tilde{a}_i)(I_{i+1} - e_{i+1} \tilde{a}_i) = I_{i+1}(a_{i+1} - a_{i+1,i+1}^i \tilde{a}_i),$$

$$(I_{i+1} + e_{i+1} \tilde{a}_i)A_{12}^i = A_{12}^i.$$

Отже

$$T_{i+1}A_iT_{i+1}^{-1} = \begin{bmatrix} I_{i+1}(a_{i+1} - a_{i+1,i+1}^i \tilde{a}_i) + \tilde{e}_i \tilde{a}_i & A_{12}^i \\ A_{21}^i(I_{i+1} - e_{i+1} \tilde{a}_i) & A_{22}^i \end{bmatrix}.$$

Далі

$$\dot{T}_{i+1}T_{i+1}^{-1} = \begin{bmatrix} e_{i+1} \tilde{a}_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{i+1} + e_{i+1} \tilde{a}_i & 0 \\ 0 & I_{n-(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{i+1} \tilde{a}_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Остаточно матимемо

$$A_{i+1} = \begin{bmatrix} I_{i+1}(a_{i+1} - a_{i+1,i+1}^i \tilde{a}_i + \dot{\tilde{a}}_i) & A_{12}^i \\ A_{21}^i(I_{i+1} - e_{i+1} \tilde{a}_i) & A_{22}^i \end{bmatrix},$$

де верхній лівий блок має форму Фробеніуса (3.31). Продовжуючи алгоритм до кроку $n - 1$, матимемо всю матрицю коефіцієнтів у формі Фробеніуса.

Поставлено задачу побудови керування (активної зовнішньої сили) F_y , яке б забезпечувало програмний рух резервуару з рідиною у напрямку Oy за заданим законом $\dot{\varepsilon}_y = f(t)$, $\varepsilon_y = \int f(t)dt$. При цьому закон руху рідини задається відповідно до моделі «затверділої» рідини, тобто збурення вільної поверхні рідини повинні бути відсутні $\xi(t) = \dot{\xi}(t) = 0$. Тоді програмне керування F_{PR} будується відповідно до другого закону Ньютона та має вигляд $F_{PR} = (M_T + M_F)\ddot{\varepsilon}_y$. Однак, оскільки у системі присутні збурення – збурення початкових умов параметрів руху $\varepsilon_y, \dot{\varepsilon}_y, \xi, \dot{\xi}$ та коливання вільної поверхні рідини, введемо у систему лінійне керування із зворотним

зв'язком F_{BK} та постійними коефіцієнтами підсилення l_i , $i = 1, \dots, 4$, у вигляді

$$F_{BK} = \sum_{i=1}^4 l_i x_i, \text{ яке буде корегувати існуючі похибки – відхилення наявних}$$

значень параметрів руху від заданих програмних значень

$$x_1 = \xi(t), \quad x_2 = \dot{\xi}(t), \quad x_3 = \varepsilon_y - \int f(t)dt, \quad x_4 = \dot{\varepsilon}_y - f(t). \quad (3.32)$$

Таким чином, повне керування, яке діє на систему, має вигляд

$$F_y = F_{PR} + F_{BK} = (M_T + M_F) \ddot{\varepsilon}_y - \sum_{i=1}^4 l_i x_i, \quad (3.33)$$

де коефіцієнти підсилення зворотного зв'язку $l_i \geq 0$, $i = 1, \dots, 4$, підбираються (обчислюються) таким чином, щоб забезпечити стійкість (найчастіше асимптотичну) системи керування.

Керування зі зворотним зв'язком побудуємо на основі лінеаризованої системи рівнянь руху (4.1) – (4.2), в якій буде враховано коливання вільної поверхні рідини $\xi(t)$ по першій антисиметричній формі a_1 з можливістю горизонтального переміщення резервуару по горизонтальній координаті ε_y . Відповідні рівняння мають вигляд

$$\ddot{a}_1 \beta_{11}^q + B_1^{1y} \ddot{\varepsilon}_y + g N_1 a_1 = 0, \quad \rho B_1^{1y} \ddot{a}_1 + (M_T + M_F) \ddot{\varepsilon}_y = 0,$$

або, з урахуванням позначень, $\nu_1 = \frac{B_1^{1y}}{\beta_{11}^q}$, $\nu_2 = \rho B_1^{1y}$, частота першої

антисиметричної форми $\omega_1^2 = \frac{g N_1}{\beta_{11}^q}$, можуть бути представлені як

$$\ddot{a}_1 + \nu_1 \ddot{\varepsilon}_y + \omega_1^2 a_1 = 0, \quad \nu_2 \ddot{a}_1 + M \ddot{\varepsilon}_y = F_y. \quad (3.34)$$

Введемо також позначення для фазових змінних та керування $x_1 = a_1(t)$,

$$x_2 = \dot{a}_1(t), \quad x_3 = \varepsilon_y - \int f(t)dt, \quad x_4 = \dot{\varepsilon}_y - f(t), \quad u = F_y \text{ та приведемо систему}$$

диференціальних рівнянь (3.34) до нормальної форми Коші

$$\dot{x} = Fx + Gu, \quad (3.35)$$

де x – вектор фазових змінних $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, u – керування, а матриця F та вектор G мають вигляд

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_1 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

з позначеннями $\lambda_1 = -\frac{M\omega_1^2}{M - v_1v_2}$, $\lambda_2 = \frac{v_2\omega_1^2}{M - v_1v_2}$, $\beta_1 = -\frac{v_1}{M - v_1v_2}$,

$\beta_2 = \frac{1}{M - v_1v_2}$. У системі (3.36) фазові змінні $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ мають сенс збурень, тобто відхилень дійсних значень параметрів руху системи від програмних.

Побудоване керування зі зворотним зв'язком повинне забезпечити асимптотичну стійкість руху системи у збуреннях. Для його побудови будемо використовувати метод, розроблений В.В. Новицьким [207–211] і описаний вище: рівняння системи у збуреннях (3.36) послідовно перетворюються у форму, канонічну за керуванням, потім у канонічну форму Гессенберга і, нарешті, у канонічну форму Фробеніуса.

Оскільки у системі (3.35) вектор керування має розмірність 1, після перетворення система (3.35) у формі, канонічній за керуванням, повинна мати вигляд

$$\dot{y} = Ay + Bu, B = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T. \quad (3.37)$$

Відповідно до [211], побудуємо неособливе перетворення $y = T^{(0)}x$, де пряма та обернена матриця перетворення $T^{(0)}$ мають вигляд

$$T^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\beta_1}{\beta_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta_2} \end{bmatrix}, T^{(0)-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 \end{bmatrix}.$$

Застосовуючи перетворення $T^{(0)}$ до системи (3.35), тобто

$$A = T^{(0)} F T^{(0)-1}, B = T G,$$

отримаємо вирази для A та B у системі (3.37) у формі, канонічній щодо керування

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \beta_1 \\ \lambda_1 - \frac{\beta_1 \lambda_2}{\beta_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 \\ \frac{\lambda_2}{\beta_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Другим етапом буде зведення системи (3.37) до канонічної форми Гессенберга. Матриці A та B у канонічній формі Гессенберга будуть мати вигляд

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

тобто матриця A буде мати нижньотрикутну форму, а вектор B після перетворень залишається незмінним. Відповідно до методу п. , перехід матриці A системи (3.37) буде виглядати як серія неособливих перетворень

$$A^{(i)} = T^{(i)} A^{(i-1)} T^{(i)-1}, i = 1 \dots 3,$$

при цьому $A^{(0)} = A$. Введемо позначення $\gamma_1 = \lambda_1 - \frac{\beta_1 \lambda_2}{\beta_2}, \gamma_2 = \frac{\lambda_2}{\beta_2}$ для відповідних елементів матриці A і отримаємо крок за кроком вигляд матриці A

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \beta_1 \\ \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 \\ \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\beta_1} & 0 & 0 \\ \gamma_1 \beta_1 & 0 & \gamma_1 \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma_2 \beta_1 & 0 & \gamma_2 \beta_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma_2 \beta_1 & 0 & \gamma_2 \beta_1 & 0 \end{bmatrix}, A^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma_2 \beta_1 \gamma_1 & 0 & \gamma_2 \beta_1 & 0 \end{bmatrix},$$

де відповідні матриці перетворень $T^{(i)}$ й $T^{(i)-1}$ для кожного кроку мають такий вираз

$$T^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta_1} & 0 & -\frac{1}{\beta_2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T^{(1)-1} = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_1 \beta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T^{(2)-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T^{(3)-1} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, система (3.37) у канонічній формі Гессенберга має вигляд

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma_2\beta_1\gamma_1 & 0 & \gamma_2\beta_1 & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Третім етапом буде зведення системи (3.37) до канонічної форми Фробеніуса. Матриці A та B у канонічній формі Фробеніуса будуть мати вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

тобто у матриці A тільки у нижньому рядку можуть бути довільні значення, а вектор B після перетворень знову залишається незмінним. Як і на другому етапі, відповідно до методу [211], перехід матриці A системи (3.37) до канонічної форми Фробеніуса буде виглядати як серія неособливих перетворень, які мають вигляд

$$A^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma_2\beta_1\gamma_1 & 0 & \gamma_2\beta_1 & 0 \end{bmatrix}, A^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \gamma_2\beta_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A = A^{(6)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 & 0 \end{bmatrix},$$

з матрицями перетворень, які мають вираз

$$T^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T^{(4)-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T^{(5)-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\gamma_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

З врахуванням $\gamma_1 = \lambda_1 - \frac{\beta_1 \lambda_2}{\beta_2}$, $\gamma_2 = \frac{\lambda_2}{\beta_2}$, система (3.37) у канонічній формі

Фробеніуса має вигляд

$$\dot{y} = Ay + Bu, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Перемноження всіх матриць перетворень, які послідовно дозволяють перейти від початкової системи (3.37) до канонічної відносно фазових координат (тобто канонічної щодо керування та по Фробеніусу) системи (3.38), дає можливість отримати пряму та обернену матрицю для такої трансформації

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_2}{\beta_1(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)} & 0 & \frac{1}{\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1} & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_2}{\beta_1(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)} & 0 & \frac{1}{\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1} \\ \frac{1}{\beta_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta_1} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 \\ \beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1 & 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1 & 0 & \beta_2 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

У систему (3.38) підключимо зворотний зв'язок $u = -\sum_i k_i y_i$ та отримаємо рівняння замкненої системи

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & \lambda_1 - k_3 & -k_4 \end{bmatrix} y. \quad (3.40)$$

Необхідно знайти значення коефіцієнтів k_i зворотного зв'язку, які б забезпечили асимптотичну стійкість замкненої системи (3.40). Як відомо [4, 25], коефіцієнтами характеристичного полінома матриці у формі Фробеніуса є елементи нижнього рядка, тому характеристичний поліном системи (3.40) має вигляд

$$f(z) = z^4 + k_4 z^3 + (k_3 - \lambda_1) z^2 + k_2 z + k_1. \quad (3.41)$$

Для забезпечення асимптотичної стійкості системи (3.40) необхідно, щоб корені характеристичного полінома були дійсними негативними числами [4, 25]. Скористаємося для цього модальним принципом керування, тобто будемо задавати властивості замкненої системи через

завдання значень коренів характеристичного полінома, а потім знайдемо значення коефіцієнтів підсилення k_i зворотного зв'язку. Задаємо значення коренів характеристичного полінома μ_i , $i = 1..4$, і отримаємо відповідний вигляд характеристичного полінома

$$\begin{aligned} f(z) = & z^4 + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4)z^3 + \\ & + (\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_4)z^2 + \\ & + (\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2\mu_4 + \mu_1\mu_3\mu_4 + \mu_2\mu_3\mu_4)z + \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4. \end{aligned}$$

Після порівняння значень коефіцієнтів характеристичного полінома шуканої (3.34) та канонічної (3.40) систем отримаємо значення коефіцієнтів підсилення k_i зворотного зв'язку канонічної системи в явному вигляді

$$\begin{aligned} k_1 &= \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4, \quad k_2 = -\mu_1\mu_2\mu_3 - \mu_1\mu_2\mu_4 - \mu_1\mu_3\mu_4 - \mu_2\mu_3\mu_4, \quad (3.42) \\ k_3 &= \lambda_1 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_4, \\ k_4 &= -\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_4. \end{aligned}$$

Визначаючи значення коренів характеристичного полінома, а, значить, і коефіцієнтів підсилення k_i зворотного зв'язку, можна завдавати якість перехідних процесів у замкненій системі керування. Якщо задані корені характеристичного полінома є негативними дійсними числами або комплексними числами із негативною дійсною частиною, то система буде асимптотично стійкою [4, 25].

Оскільки координатне перетворення $y = Tx$ є неособливим, воно не змінює спектральні характеристики шуканої системи (3.34), а, значить, характеристичні поліноми замкненої шуканої системи (3.34) та канонічної системи (3.40) співпадають. Звідси можна визначити коефіцієнти підсилення l_i зворотного зв'язку у шуканій системі (3.34) на основі знання коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку k_i у канонічній системі (3.40) у вигляді

$$l_1 = \frac{k_3(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1) - \beta_2k_1}{(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)\beta_1}, l_2 = \frac{k_4(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1) - \beta_2k_2}{(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)\beta_1}, \quad (3.43)$$

$$l_3 = \frac{k_1}{\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1}, l_4 = \frac{k_2}{\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1},$$

та отримати замкнену систему керування (3.34), яка відповідає заданим вимогам, у вигляді

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 - \beta_1 l_1 & -\beta_1 l_2 & -\beta_1 l_3 & -\beta_1 l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_2 - \beta_2 l_1 & -\beta_2 l_2 & -\beta_2 l_3 & -\beta_2 l_4 \end{bmatrix} x. \quad (3.44)$$

Побудуємо керування, яке забезпечить системі набір швидкості за заданий час T_K зі стану спокою до заданого значення V_K та подальший поступальний рух з цією постійною швидкістю в напрямку Oy . Шукане керування складається з двох складових: програмного керування та керування зі зворотним зв'язком.

Програмне керування будується на основі моделі руху резервуару із «затверділою» рідиною при відсутності будь-яких збурень. За вказаними вище кінематичними умовами руху закон зміни швидкості резервуару буде мати вигляд

$$\dot{\varepsilon}_y = \begin{cases} \frac{V_K}{T_K} t, & 0 \leq t \leq T_K, \\ V_K, & t \geq T_K \end{cases},$$

тоді прискорення резервуару відповідно буде мати вигляд

$$\ddot{\varepsilon}_y = \begin{cases} \frac{V_K}{T_K}, & 0 \leq t \leq T_K, \\ 0, & t \geq T_K \end{cases},$$

і за другим законом Ньютона програмне керування буде мати вигляд $F_y = (M_T + M_F)\ddot{\varepsilon}_y$. Таким чином, програмне керування при відсутності будь-яких збурень і відповідності наявних початкових умов до заданих повинне буде здійснювати рух системи за програмним законом

$$\dot{\varepsilon}_y = \begin{cases} \frac{V_K}{T_K}t, & 0 \leq t \leq T_K \\ V_{K1}, & t \geq T_K \end{cases}, \quad \ddot{\varepsilon}_y = \begin{cases} \frac{V_K}{T_K}, & 0 \leq t \leq T_K \\ 0, & t \geq T_K \end{cases}, \quad \xi(t) = 0, \quad \dot{\xi}(t) = 0. \quad (3.45)$$

Розглянемо побудову закону керування, який забезпечить резервуару з рідиною набір швидкості із стану спокою до значення $V_K = 5 \frac{m}{c}$ за час $T_K = 10$ сек («комфортний рух»). Радіус резервуару $R = 1$ м, глибина рідини $H = R$, співвідношення мас резервуару та рідини $M_T = 0,1M_F$. Для набору швидкості на резервуар діє програмне керування F_{PR} – прямокутний імпульс сили тривалістю 10 сек, який забезпечує рух системи з прискоренням $2 \frac{m}{c^2}$. Для побудови зворотного зв'язку обираємо негативні значення коренів характеристичного поліному (3.41) канонічної системи (3.40), які зможуть забезпечити системі керування асимптотичну стійкість, а саме $\mu_1 = -0,5$, $\mu_2 = -1$, $\mu_3 = -2$, $\mu_4 = -3$, тоді відповідно до формул (3.42) коефіцієнти зворотного зв'язку канонічної системи мають значення $k_1 = 3$, $k_2 = -11,5$, $k_3 = -14,3$, $k_4 = -6,5$, і, відповідно до формул (3.43), коефіцієнти зворотного зв'язку шуканої замкненої системи у збуреннях (3.44) мають значення $l_1 = 20714,7$; $l_2 = 8349,1$; $l_3 = 366,5$; $l_4 = -1404,8$.

Результат застосування отриманого керування показано на Рис. 3.1, де зображено графік швидкості руху резервуару – при відсутності (1) та наявності зворотного зв'язку (2) (на графіку меншого масштабу показано зміна швидкості в інтервалі часу від 30 до 50 с, який виділено прямокутником на графіку більшого масштабу). Як можна бачити з графіків, при відсутності зворотного зв'язку система керування не може

забезпечити резервуару рівномірний рух - конструкція-носіє рухається з прискоренням, то збільшуючи швидкість, то гальмуючи, в залежності від напрямку руху хвилі на стінку резервуару. При наявності зворотного зв'язку після набору швидкості має місце перехідний процес (з 10 по 20 с) з перерегулюванням, під час якого прискорення системи практично наближається до нуля, і далі резервуар рухається з постійною швидкістю (похибка менше 0,1%).

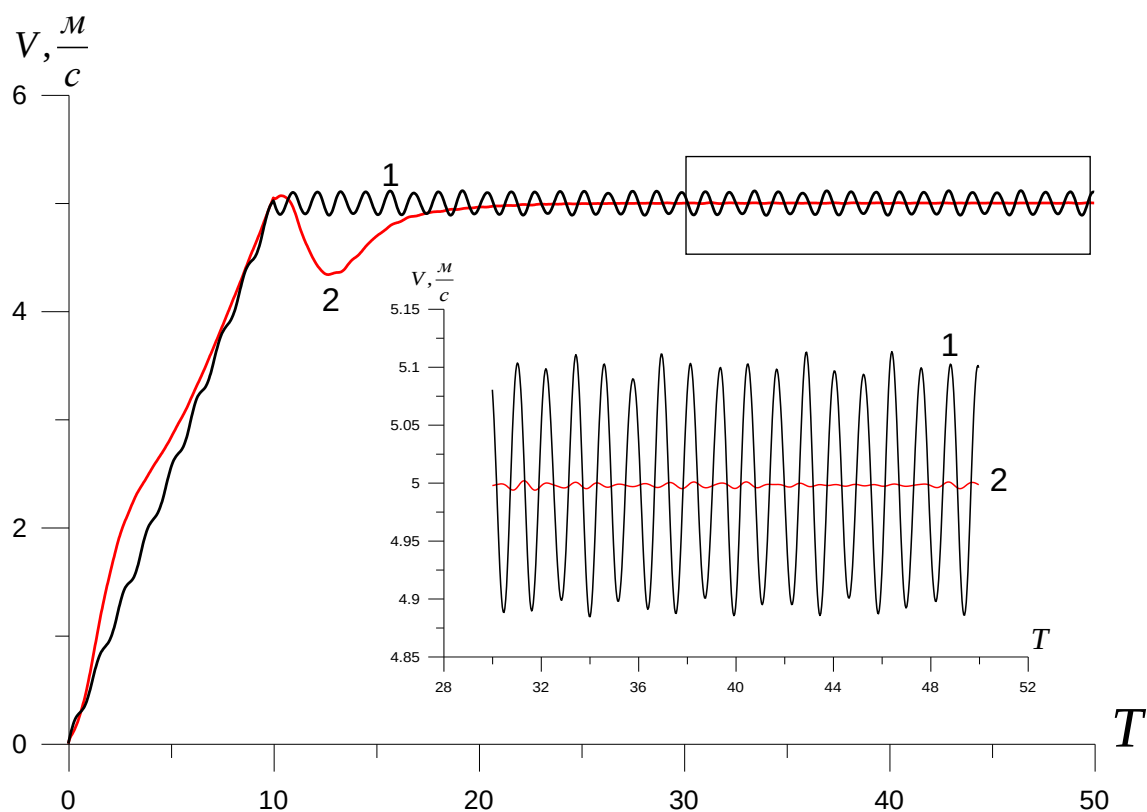


Рис. 3.1. Швидкість резервуару в задачі керування системою «резервуар-рідина» на основі методу модального керування (корні характеристичного поліному $\mu_1 = -0,5$, $\mu_2 = -1$, $\mu_3 = -2$, $\mu_4 = -3$)

Розглянемо тепер побудову закону керування з параметрами, аналогічними у попередньому прикладі, але значення коренів характеристичного поліному (3.41) канонічної системи (3.40) оберемо з такими значеннями $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = -2$, $\mu_3 = -3$, $\mu_4 = -10$, тоді відповідно до формул (3.42) коефіцієнти зворотного зв'язку канонічної системи мають значення $k_1 = 60$, $k_2 = -116,5$, $k_3 = 42,7$, $k_4 = -16,0$, і, відповідно до формул (3.43), коефіцієнти зворотного зв'язку шуканої замкненої системи у

збуреннях (3.44) мають значення $l_1 = -56156,3$; $l_2 = 13240,4$; $l_3 = 7329,3$; $l_4 = -14169,9$. Результат застосування отриманого керування показано на Рис. 3.2, де зображено графік швидкості руху резервуару – при відсутності (1) та наявності зворотного зв'язку (2) (на графіку меншого масштабу показано відхилення (абсолютна похибка) від заданої швидкості в інтервалі часу від 30 до 50 с, який виділено прямокутником на графіку більшого масштабу). Як можна бачити з графіків, збільшення абсолютних значень заданих коренів характеристичного поліному підвищує якість керування, перехідний процес практично відсутній (до 3 секунд), а відхилення від заданої швидкості становить менше 0,02%.

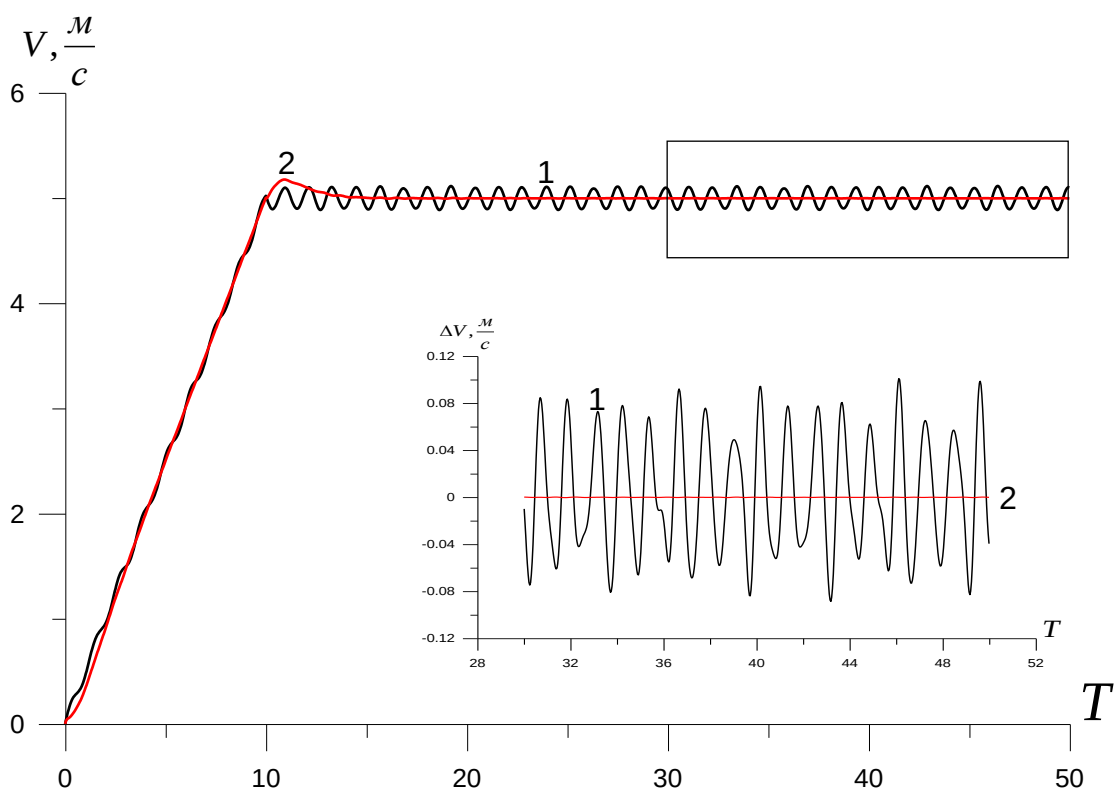


Рис. 3.2. Швидкість резервуару в задачі керування системою «резервуар-рідина» на основі методу модального керування (корні характеристичного поліному $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = -2$, $\mu_3 = -3$, $\mu_4 = -10$)

Аналогічним чином підбиралися значення коренів характеристичного поліному та обчислювались відповідні коефіцієнти підсилення в контурі зворотного зв'язку для здійснення задачі повного гальмування та забезпечення руху резервуару за заданим гармонічним законом. Параметри

програмних законів обирались таким чином, щоб уникнути великих збурень на вільній поверхні рідини («комфортний» рух). Результати математичного моделювання підтверджують доцільність використання лінійної системи у збуреннях як моделі для побудови керування із зворотним зв'язком для складної нелінійної системи «резервуар - рідина» при відсутності великих збурень вільної поверхні рідини (для забезпечення «комфортного» руху).

3.2. Керування зі зворотним зв'язком на основі еталонної моделі

Вибір коренів характеристичного полінома (3.41) повинен забезпечувати не тільки стійкість системи керування (зокрема, асимптотичну), але й підтримувати на необхідному рівні якості перехідних процесів, що відбуваються в системі. Для досягнення цієї мети пропонується спочатку задати параметри еталонного руху (або еталонної системи), тобто рівень перерегулювання, тривалість переходних процесів, декремент згасання, а потім на основі отриманої інформації задати корені (або коефіцієнти) характеристичного поліному шуканої системи та обчислити коефіцієнти зворотного зв'язку [4, 211].

Запишемо рівняння еталонної системи у вигляді

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \Lambda_1 \ddot{y} + \gamma_{11} \dot{x} + \gamma_{12} \dot{y} + \alpha_{11} x + \alpha_{12} y &= 0, \\ \Lambda_2 \ddot{x} + \ddot{y} + \gamma_{21} \dot{x} + \gamma_{22} \dot{y} + \alpha_{21} x + \alpha_{22} y &= 0,\end{aligned}\tag{3.46}$$

де параметри Λ_i , . Ці параметри будемо завдавати, виходячи із міркувань тривалості та якості перехідного процесу (аперіодичний процес, наявність коливань тощо). Запишемо систему рівнянь еталонної моделі (3.46) у формі Коші

$$\dot{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\Lambda_1 \alpha_{21} - \alpha_{11}}{\Lambda_1 \Lambda_2 - 1} & \frac{\Lambda_1 \gamma_{21} - \gamma_{11}}{\Lambda_1 \Lambda_2 - 1} & \frac{\Lambda_1 \alpha_{22} - \alpha_{12}}{\Lambda_1 \Lambda_2 - 1} & \frac{\Lambda_1 \gamma_{22} - \gamma_{12}}{\Lambda_1 \Lambda_2 - 1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\Lambda_2 \alpha_{11} - \alpha_{21}}{\Lambda_1 \Lambda_2 - 1} & \frac{\Lambda_2 \gamma_{11} - \gamma_{21}}{\Lambda_1 \Lambda_2 - 1} & \frac{\Lambda_2 \alpha_{12} - \alpha_{22}}{\Lambda_1 \Lambda_2 - 1} & \frac{\Lambda_2 \gamma_{12} - \gamma_{22}}{\Lambda_1 \Lambda_2 - 1} \end{bmatrix} Y,\tag{3.47}$$

і перетворимо еталонну систему спочатку у канонічну форму Гесенберга, а потім у канонічну форму Фробеніуса [211]. Відповідно до методу п. , перехід матриці A системи (3.47) до канонічної форми Гесенберга буде виглядати як серія неособливих перетворень

$$A^{(i)} = T^{(i)} A^{(i-1)} T^{(i-1)-1}, i = 1, 2,$$

при цьому $A^{(0)} = A$. Введемо позначення

$$\mu_{21} = \frac{\Lambda_1 \alpha_{21} - \alpha_{11}}{\Lambda_1 \Lambda_2 - 1}, \mu_{21} = \frac{\Lambda_1 \gamma_{21} - \gamma_{11}}{\Lambda_1 \Lambda_2 - 1}, \mu_{21} = \frac{\Lambda_1 \alpha_{22} - \alpha_{12}}{\Lambda_1 \Lambda_2 - 1}, \mu_{21} = \frac{\Lambda_1 \gamma_{22} - \gamma_{12}}{\Lambda_1 \Lambda_2 - 1},$$

$$\mu_{41} = \frac{\Lambda_2 \alpha_{11} - \alpha_{21}}{\Lambda_1 \Lambda_2 - 1}, \mu_{42} = \frac{\Lambda_2 \gamma_{11} - \gamma_{21}}{\Lambda_1 \Lambda_2 - 1}, \mu_{43} = \frac{\Lambda_2 \alpha_{12} - \alpha_{22}}{\Lambda_1 \Lambda_2 - 1}, \mu_{43} = \frac{\Lambda_2 \gamma_{12} - \gamma_{22}}{\Lambda_1 \Lambda_2 - 1}.$$

для відповідних елементів матриці A , і отримаємо крок за кроком вигляд матриці A

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & \mu_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mu_{41} & \mu_{42} & \mu_{43} & \mu_{44} \end{bmatrix}, A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \mu_{24} & 0 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} + \mu_{22}\mu_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mu_{41} & \mu_{42} & \mu_{43} + \mu_{24}\mu_{42} & \mu_{44} \end{bmatrix},$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{\mu_{24}\mu_{21}}{\mu_{22}\mu_{24} + \mu_{23}} & \frac{\mu_{23}^2 + \mu_{22}\mu_{23}\mu_{24} - \mu_{21}\mu_{24}^2}{\mu_{22}\mu_{24} + \mu_{23}} & 0 & 0 \\ \frac{\mu_{21}}{\mu_{22}\mu_{24} + \mu_{23}} & \frac{\mu_{22}^2\mu_{24} + \mu_{22}\mu_{23} + \mu_{21}\mu_{24}}{\mu_{22}\mu_{24} + \mu_{23}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mu_{41} & \mu_{22}\mu_{24}\mu_{42} + \mu_{23}\mu_{42} + \mu_{24}\mu_{41} & \mu_{43} + \mu_{24}\mu_{42} & \mu_{44} \end{bmatrix},$$

де відповідні матриці перетворень $T^{(i)}$ й $T^{(i-1)-1}$ для кожного кроку мають такий вираз

$$T^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\mu_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T^{(1)-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mu_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\mu_{24}}{\mu_{22}\mu_{24} + \mu_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_{22}\mu_{24} + \mu_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T^{(2)-1} = \begin{bmatrix} 1 & \mu_{24} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{22}\mu_{24} + \mu_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Далі, компоненти матриці $A = A^{(2)}$ запишемо у вигляді

$$m_{11} = -\frac{\mu_{24}\mu_{21}}{\mu_{22}\mu_{24} + \mu_{23}}, m_{12} = \frac{\mu_{23}^2 + \mu_{22}\mu_{23}\mu_{24} - \mu_{21}\mu_{24}^2}{\mu_{22}\mu_{24} + \mu_{23}}, m_{21} = \frac{\mu_{21}}{\mu_{22}\mu_{24} + \mu_{23}},$$

$$m_{22} = \frac{\mu_{22}^2\mu_{24} + \mu_{22}\mu_{23} + \mu_{21}\mu_{24}}{\mu_{22}\mu_{24} + \mu_{23}}, m_{41} = \mu_{41},$$

$$m_{42} = \mu_{22}\mu_{24}\mu_{42} + \mu_{23}\mu_{42} + \mu_{24}\mu_{41}, m_{43} = \mu_{43} + \mu_{42}\mu_{24}, m_{44} = \mu_{44},$$

тоді послідовність перетворень матриці A до канонічної форми Фробеніуса буде мати вигляд

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix},$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & m_{12} & 0 & 0 \\ \frac{m_{12}m_{21} - m_{11}m_{22}}{m_{12}} & m_{11} + m_{22} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{m_{12}m_{41} - m_{11}m_{42}}{m_{12}} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix},$$

$$A^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & m_{12} & 0 & 0 \\ 0 & m_{11} + m_{22} & 1 & 0 \\ 0 & m_{12}m_{21} - m_{11}m_{22} & 0 & 1 \\ \frac{m_{11}m_{22}m_{43} - m_{12}m_{21}m_{43} - m_{11}m_{42} + m_{12}m_{41}}{m_{12}} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix},$$

$$A^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_{11} + m_{22} & m_{12} & 0 \\ 0 & \frac{m_{12}m_{21} - m_{11}m_{22}}{m_{12}} & 0 & 1 \\ \frac{m_{11}m_{22}m_{43} - m_{12}m_{21}m_{43} - m_{11}m_{42} + m_{12}m_{41}}{m_{12}} & \frac{m_{42}}{m_{12}} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix},$$

$$A^{(6)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{12} & 0 \\ 0 & \frac{m_{12}m_{21} - m_{11}m_{22}}{m_{12}} & m_{11} + m_{22} & 1 \\ \frac{(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})m_{43} - m_{11}m_{42} + m_{12}m_{41}}{m_{12}} & \frac{m_{42} - (m_{11} + m_{22})m_{43}}{m_{12}} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix},$$

$$A^{(7)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{12} & 0 \\ 0 & 0 & m_{11} + m_{22} & 1 \\ g_{41}^{(7)} & g_{42}^{(7)} & g_{43}^{(7)} & m_{44} \end{bmatrix},$$

$$g_{41}^{(7)} = \frac{(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})m_{43} + m_{12}m_{41} - m_{11}m_{42}}{m_{12}},$$

$$g_{42}^{(7)} = \frac{(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})m_{44} - (m_{11} + m_{22})m_{43} + m_{42}}{m_{12}}, g_{43}^{(7)} = m_{43} - m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21},$$

$$A^{(8)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m_{11} + m_{22} & m_{12} \\ g_{41}^{(7)} & g_{42}^{(7)} & g_{43}^{(8)} & m_{44} \end{bmatrix},$$

$$g_{43}^{(8)} = \frac{m_{43} - m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21}}{m_{12}},$$

$$A^{(9)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{12} \\ g_{41}^{(7)} & g_{42}^{(7)} & g_{43}^{(9)} & m_{11} + m_{22} + m_{44} \end{bmatrix},$$

$$g_{43}^{(9)} = \frac{m_{43} + m_{12}m_{21} - m_{22}m_{44} - m_{11}(m_{22} + m_{44})}{m_{12}},$$

$$A^{(10)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ g_{41}^{(10)} & g_{42}^{(10)} & g_{43}^{(10)} & m_{11} + m_{22} + m_{44} \end{bmatrix},$$

$$g_{41}^{(10)} = m_{43}(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}) + m_{12}m_{41} - m_{11}m_{42},$$

$$g_{42}^{(10)} = m_{44}(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}) + m_{43}(m_{11} + m_{22}) + m_{42},$$

$$g_{43}^{(10)} = m_{43} - m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21} + m_{44}(m_{11} + m_{22}),$$

а відповідні матриці перетворень перетворень $T^{(i)}$ й $T^{(i)-1}$ для кожного кроку мають такий вираз

$$T^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m_{11}}{m_{12}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T^{(3)-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{m_{11}}{m_{12}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{m_{12}m_{21} - m_{11}m_{22}}{m_{12}} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T^{(4)-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{m_{12}m_{21} - m_{11}m_{22}}{m_{12}} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T^{(5)-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T^{(6)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_{11} + m_{22}}{m_{12}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T^{(6)-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{m_{11} + m_{22}}{m_{12}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
T^{(7)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{m_{12}m_{21} - m_{11}m_{22}}{m_{12}} & 0 & 1 \end{bmatrix}, T^{(7)-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{m_{12}m_{21} - m_{11}m_{22}}{m_{12}} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
T^{(8)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T^{(8)-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
T^{(9)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_{11} + m_{22}}{m_{12}} & 1 \end{bmatrix}, T^{(9)-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m_{11} + m_{22}}{m_{12}} & 1 \end{bmatrix}, \\
T^{(10)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{12} \end{bmatrix}, T^{(10)-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_{12}} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Повертаючись до позначень коефіцієнтів системи (3.46), запишемо еталонну систему (3.47) у формі Фробеніуса у вигляді

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} & Q_{44} \end{bmatrix} X, \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned}
Q_{41} &= \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}{\Lambda_1\Lambda_2 - 1}, Q_{42} = \frac{\alpha_{11}\gamma_{22} + \alpha_{22}\gamma_{11} - (\alpha_{12}\gamma_{21} + \alpha_{21}\gamma_{12})}{\Lambda_1\Lambda_2 - 1}, \\
Q_{43} &= \frac{\Lambda_1\alpha_{21} + \Lambda_2\alpha_{12} + \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21} - (\alpha_{11} + \alpha_{22})}{\Lambda_1\Lambda_2 - 1}, Q_{44} = \frac{\Lambda_1\gamma_{21} + \Lambda_2\gamma_{12} - (\gamma_{11} + \gamma_{22})}{\Lambda_1\Lambda_2 - 1}.
\end{aligned}$$

Зробимо співставлення коефіцієнтів характеристичних поліномів системи у канонічній формі (3.40) та еталонної системи (3.48) та отримаємо такі співвідношення

$$k_1 = -\nu_3 - \nu_4, k_2 = \nu_3\nu_4 - \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_1, k_3 = \lambda_3\nu_4 + \lambda_4\nu_3, k_4 = \lambda_3\lambda_4,$$

а далі, після підстановки у формули (3.43), обчислюємо коефіцієнти зворотного зв'язку у шуканій системі.

3.3. обернена задача синтезу квадратичного функціоналу якості на основі керування зі зворотним зв'язком

Розглянемо задачу визначення оптимального керування системи у збуреннях (3.35) – (3.36), коли критерій оптимальності заданий у вигляді квадратичного функціоналу якості

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + \nu u^2) dt, \quad (3.49)$$

де $\nu > 0$, Q – діагональна матриця, а квадратична форма

$$x^T Q x = \sum_{i=1}^4 q_i x_i^2 \geq 0 \text{ при будь-якому } x, \text{ тобто є невід'ємно визначеною. Як}$$

відомо [4, 5, 25], оптимальне керування є лінійною функцією фазових координат

$$u = -\frac{1}{\nu} G^T P x,$$

де симетрична постійна матриця P є розв'язком нелінійного алгебраїчного рівняння Ріккати

$$-PF - F^T P + \frac{1}{\nu} PGG^T P = Q, \quad (3.50)$$

а оптимальному керуванню відповідає рішення, що задовольняє критерію Сільвестра, тобто головні мінори матриці P повинні бути більше нуля або

дорівнювати нулю. Таким чином, для довільно заданих параметрів q_i в матриці Q оптимальне керування може не існувати, оскільки розв'язок P нелінійного алгебраїчного рівняння Ріккати може не задовольняти критерію Сильвестра.

Розглянемо обернену задачу синтезу квадратичного критерію [211] якості (3.49) для побудови оптимального керування в системі у збуреннях (3.35) – (3.36). Для цього побудуємо таку матрицю Q в критерії (3.49), що оптимальне керування завжди буде існувати і задовольняти необхідним додатковим критеріям.

Систему у збуреннях (3.35) – (3.36) будемо використовувати у канонічній відносно фазових змінних формі (3.38), тоді функціонал якості (3.49) за допомогою перетворення (3.39) буде мати вигляд

$$J = \int_0^{\infty} (y^T C y + u^2) dt,$$

де

$$C = (\tilde{T}^{-1})^T Q \tilde{T}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1)^2 q_3 & 0 & (\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1) \beta_2 q_3 & 0 \\ 0 & (\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1)^2 q_4 & 0 & (\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1) \beta_2 q_4 \\ (\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1)^2 q_3 & 0 & \beta_1^2 q_1 + \beta_2^2 q_3 & 0 \\ 0 & (\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1)^2 q_4 & 0 & \beta_1^2 q_2 + \beta_2^2 q_4 \end{bmatrix}$$

Використовуючи перетворення (3.39), отримаємо відповідний вигляд рівняння Ріккати для трансформованої системи у збуреннях (3.38). Для цього у вираз рівняння Ріккати у шуканих змінних (3.50) підставляємо заміни змінних

$$y = \tilde{T}x, x = \tilde{T}^{-1}y, F = \tilde{T}^{-1}A\tilde{T}, G = \tilde{T}^{-1}B, C = (\tilde{T}^{-1})^T Q \tilde{T}^{-1}, Q = \tilde{T}^T C \tilde{T}$$

та виконуємо послідовно перетворення

$$-P\tilde{T}^{-1}A\tilde{T} - \left(\tilde{T}^{-1}A\tilde{T}\right)^T P + \frac{1}{\nu} P\tilde{T}^{-1}B\left(\tilde{T}^{-1}B\right)^T P = \tilde{T}^T C \tilde{T},$$

$$\begin{aligned}
& -P\tilde{T}^{-1}A\tilde{T} - \tilde{T}^T A^T (\tilde{T}^{-1})^T P + \frac{1}{\nu} P\tilde{T}^{-1}BB^T (\tilde{T}^{-1})^T P = \tilde{T}^T C\tilde{T}, \\
& -P\tilde{T}^{-1}A\tilde{T} - \tilde{T}^T A^T (\tilde{T}^T)^{-1} P + \frac{1}{\nu} P\tilde{T}^{-1}BB^T (\tilde{T}^T)^{-1} P = \tilde{T}^T C\tilde{T}.
\end{aligned}$$

Помножуємо обидві частини рівняння праворуч на $\tilde{T}^{-1}$, отримаємо

$$\begin{aligned}
& -P\tilde{T}^{-1}A\tilde{T}\tilde{T}^{-1} - \tilde{T}^T A^T (\tilde{T}^T)^{-1} P\tilde{T}^{-1} + \frac{1}{\nu} P\tilde{T}^{-1}BB^T (\tilde{T}^T)^{-1} P\tilde{T}^{-1} = \tilde{T}^T C\tilde{T}\tilde{T}^{-1}, \\
& -P\tilde{T}^{-1}A - \tilde{T}^T A^T (\tilde{T}^T)^{-1} P\tilde{T}^{-1} + \frac{1}{\nu} P\tilde{T}^{-1}BB^T (\tilde{T}^T)^{-1} P\tilde{T}^{-1} = \tilde{T}^T C,
\end{aligned}$$

а далі помножуємо ліворуч на $(\tilde{T}^T)^{-1}$

$$\begin{aligned}
& -(\tilde{T}^T)^{-1} P\tilde{T}^{-1}A - (\tilde{T}^T)^{-1} \tilde{T}^T A^T (\tilde{T}^T)^{-1} P\tilde{T}^{-1} + \\
& + \frac{1}{\nu} (\tilde{T}^T)^{-1} P\tilde{T}^{-1}BB^T (\tilde{T}^T)^{-1} P\tilde{T}^{-1} = (\tilde{T}^T)^{-1} \tilde{T}^T C, \\
& -(\tilde{T}^T)^{-1} P\tilde{T}^{-1}A - A^T (\tilde{T}^T)^{-1} P\tilde{T}^{-1} + \frac{1}{\nu} (\tilde{T}^T)^{-1} P\tilde{T}^{-1}BB^T (\tilde{T}^T)^{-1} P\tilde{T}^{-1} = C.
\end{aligned}$$

Введемо формули для взаємного неособливого перетворення розв'язків рівняння Ріккаті для шуканої системи P та трансформованої системи S

$$S = (\tilde{T}^{-1})^T Q\tilde{T}^{-1}, P = \tilde{T}^T S\tilde{T},$$

тоді рівняння Ріккаті для трансформованої системи та функціоналу якості буде виглядати як

$$-SA - A^T S + \frac{1}{\nu} SBB^T S = C, \quad (3.51)$$

де S – симетрична матриця такої структури

$$S = \begin{bmatrix} S_5 & S_8 & S_9 & S_1 \\ S_8 & S_6 & S_{10} & S_2 \\ S_9 & S_{10} & S_7 & S_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{bmatrix}.$$

Оптимальне керування, побудоване на основі розв'язку рівняння Ріккаті

для матриці S , має вигляд

$$u = -\sum_i k_i y_i = -\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^4 s_i y_i,$$

тобто залежить тільки від компонентів s_i , $i = 1..4$. Ці компоненти будемо знаходити на основі співставлення з еталонною моделлю, а всі інші повинні мати такі значення, щоб матриця Q у функціоналі (3.49) була невід'ємно-визначеною.

Розглянемо окремі випадки синтезу квадратичного функціоналу якості (3.49):

1) $q_1 \neq q_2 \neq q_3 \neq q_4 \neq 0$. Тоді в розгорнутому вигляді матричне рівняння (3.51) розпадається на три незалежні підсистеми

$$(\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1)^2 q_3 = \frac{s_1^2}{\nu}, \quad \beta_1^2 q_1 + \beta_2^2 q_3 = -2\lambda_1 s_3 - 2s_{10} + \frac{s_3^2}{\nu}, \quad (3.52)$$

$$(\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1) \beta_2 q_3 = -s_1 \lambda_1 - s_8 - \frac{s_1 s_3}{\nu},$$

$$(\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1)^2 q_4 = -2s_8 + \frac{s_2^2}{\nu}, \quad \beta_1^2 q_2 + \beta_2^2 q_4 = -2s_3 + \frac{s_4^2}{\nu}, \quad (3.53)$$

$$(\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1) \beta_2 q_4 = -s_1 - s_{10} - \frac{s_2 s_4}{\nu},$$

$$\frac{s_1 s_2}{\nu} = s_5, \quad \frac{s_1 s_4}{\nu} = s_9, \quad \frac{s_2 s_3}{\nu} = \lambda_1 s_2 + s_6 + s_9, \quad (3.54)$$

$$\frac{s_3 s_4}{\nu} = \lambda_1 s_4 + s_2 + s_7,$$

розв'язки яких будемо шукати окремо. Для підсистеми (3.52) введемо позначення

$$\alpha_1 = \beta_1^2, \quad \alpha_2 = \beta_2^2, \quad c_1 = -2\lambda_1 s_3 - 2s_{10} + \frac{s_3^2}{\nu}, \quad (3.55)$$

$$\alpha_3 = (\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1)^2, \quad c_3 = \frac{s_1^2}{\nu},$$

$$\alpha_4 = (\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1) \beta_2, \quad c_4 = -s_1 \lambda_1 - s_8 - \frac{s_1 s_3}{\nu},$$

тоді її розв'язок має вигляд

$$q_1 = -\frac{\alpha_2(\alpha_4 c_4 + \alpha_3 c_3)}{\alpha_1(\alpha_3^2 + \alpha_4^2)} + \frac{c_1}{\alpha_1}, \quad q_3 = \frac{\alpha_4 c_4 + \alpha_3 c_3}{\alpha_3^2 + \alpha_4^2}.$$

Для підсистеми (3.53) введемо позначення

$$b_1 = -2s_3 + \frac{s_4^2}{\nu}, \quad b_3 = -2s_8 + \frac{s_2^2}{\nu}, \quad b_4 = -s_1 - s_{10} - \frac{s_2 s_4}{\nu}, \quad (3.56)$$

тоді її розв'язок має вигляд

$$q_2 = -\frac{\alpha_2(\alpha_4 b_4 + \alpha_3 b_3)}{\alpha_1(\alpha_3^2 + \alpha_4^2)} + \frac{b_1}{\alpha_1}, \quad q_4 = \frac{\alpha_4 b_4 + \alpha_3 b_3}{\alpha_3^2 + \alpha_4^2}.$$

Знайдено залежність вагових коефіцієнтів матриці Q функціоналу (3.49) від матриці S розв'язку рівняння Ріккати (3.51). Ці коефіцієнти є функціями від елементів матриці S . Значення параметрів $s_1 - s_4$ отримаємо з розв'язку задачі модального керування, значення коефіцієнтів s_5, s_6, s_7, s_9 отримаємо з розв'язку підсистеми (3.54)

$$s_5 = \frac{s_1 s_2}{\nu}, \quad s_6 = \frac{s_2 s_3 - s_1 s_4 - \nu \lambda_1 s_2}{\nu},$$

$$s_7 = \frac{s_3 s_4 - \nu s_2 - \nu \lambda_1 s_4}{\nu}, \quad s_9 = \frac{s_1 s_4}{\nu}, \quad (3.57)$$

таким чином, остаточно необхідно підібрати такі значення вільних параметрів s_8, s_{10} матриці S , щоб ця матриця була невід'ємно-визначеною.

2) $q_1 \neq q_3 \neq q_4 \neq 0, \quad q_2 = 0$. Тоді в розгорнутому вигляді матричне рівняння (3.51) розпадається на незалежні системи (3.52), (3.54) та підсистему

$$(\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1)^2 q_4 = -2s_8 + \frac{s_2^2}{\nu}, \quad \beta_2^2 q_4 = -2s_3 + \frac{s_4^2}{\nu},$$

$$(\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1) \beta_2 q_4 = -s_1 - s_{10} - \frac{s_2 s_4}{\nu},$$

розв'язок якої має вигляд (з урахуванням позначень (3.56))

$$q_4 = \frac{\alpha_2 b_1 + \alpha_3 b_3 + \alpha_4 b_4}{\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2}.$$

Після підстановки значень параметрів $s_1 - s_4$, обчислення параметрів s_5, s_6, s_7, s_9 по формулам (3.57) та вибору незалежних параметрів s_8, s_{10} обчислюємо значення вагових коефіцієнтів, і, таким чином, синтезуємо квадратичний функціонал якості, якій набуває мінімальних значень для заданого рівняння руху (заданих коренів характеристичного поліному).

3) $q_1 \neq q_2 \neq q_3 \neq 0, q_4 = 0$. Тоді в розгорнутому вигляді матричне рівняння (3.51) розпадається на дві незалежні системи (3.52), (3.54) та рівняння

$$\beta_1^2 q_2 + \beta_2^2 q_4 = -2s_3 + \frac{s_4^2}{\nu},$$

розв'язок якого має вигляд

$$q_2 = \frac{1}{\beta_1^2} \left(\frac{s_4^2}{\nu} - 2s_3 \right).$$

Аналогічно, після підстановки значень параметрів $s_1 - s_4$, обчислення параметрів s_5, s_6, s_7, s_9 по формулам (3.57) та вибору незалежних параметрів s_8, s_{10} обчислюємо значення вагових коефіцієнтів, і, таким чином, синтезуємо квадратичний функціонал якості, якій набуває мінімальних значень для заданого рівняння руху (заданих коренів характеристичного поліному).

4) $q_1 \neq q_2 \neq q_4 \neq 0, q_3 = 0$. В розгорнутому вигляді матричне рівняння (3.51) розпадається на дві незалежні системи (3.53), (3.54) та рівняння

$$\beta_1^2 q_1 = -2\lambda_1 s_3 - 2s_{10} + \frac{s_3^2}{\nu}, \quad (3.58)$$

розв'язок якого має вигляд

$$q_1 = \frac{1}{\beta_1^2} \left(-2\lambda_1 s_3 - 2s_{10} + \frac{s_3^2}{\nu} \right).$$

Аналогічно, після підстановки значень параметрів $s_1 - s_4$, обчислення

$$\text{параметрів } s_5, s_6, s_7, s_9 \text{ по формулам (3.57)} \quad s_5 = \frac{s_1 s_2}{\nu},$$

$$s_6 = \frac{s_2 s_3 - s_1 s_4 - \nu \lambda_1 s_2}{\nu},$$

та вибору незалежних параметрів s_8, s_{10} обчислюємо значення вагових коефіцієнтів, і, таким чином, синтезуємо квадратичний функціонал якості, якій набуває мінімальних значень для заданого рівняння руху (заданих коренів характеристичного поліному).

5) $q_2 \neq q_3 \neq q_4 \neq 0, q_1 = 0$. В розгорнутому вигляді матричне рівняння (3.51) розпадається на незалежні системи (3.53), (3.54) та підсистему

$$(\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1)^2 q_3 = \frac{s_1^2}{\nu}, \quad \beta_2^2 q_3 = -2\lambda_1 s_3 - 2s_{10} + \frac{s_3^2}{\nu},$$

$$(\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1) \beta_2 q_3 = -s_1 \lambda_1 - s_8 - \frac{s_1 s_3}{\nu},$$

розв'язок якої має вигляд (з урахуванням позначень (3.55))

$$q_3 = \frac{\alpha_2 c_1 + \alpha_3 c_3 + \alpha_4 c_4}{\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2}.$$

Далі, після підстановки значень параметрів $s_1 - s_4$, обчислення параметрів s_5, s_6, s_7, s_9 по формулам (3.57) та вибору незалежних параметрів s_8, s_{10} обчислюємо значення вагових коефіцієнтів, і, таким чином, синтезуємо

квадратичний функціонал якості, якій набуває мінімальних значень для заданого рівняння руху (заданих коренів характеристичного поліному).

3.4. Використання механізму компенсації головного вектору сил тиску рідини на стінку резервуару

Труднощі керування конструкціями з рідиною з вільною поверхнею обумовлені, головним чином, істотним впливом рухомості рідини на квазітвердий рух всього об'єкту в цілому, при цьому адекватне моделювання самого впливу може бути виконано тільки в рамках нелінійної математичної моделі високої розмірності.

Розглянемо на основі нелінійної математичної моделі сумісного руху конструкції з рідиною з вільною поверхнею (2.17) – (2.18) запропонований алгоритм керування [78, 298, 299], що базується на компенсації силового гідродинамічного відгуку рідини (динамічної реакції), тобто задачу керування системою «резервуар – рідина з вільною поверхнею» зведено до керування рухом твердого тіла, коли керуючий вплив доповнюється силою, що компенсує силовий відгук рідини.

Систему диференціальних рівнянь руху (2.17) – (2.18) представимо у вигляді

$$\ddot{\vec{\varepsilon}} = \frac{\vec{F} + \vec{R}}{M_F + M_T} + \vec{g}, \sum_{n=1}^3 \ddot{\alpha}_n \left[\sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{\alpha}_n} \left(\frac{1}{\rho} J_{res}^{ps} \right) \right] = \frac{1}{\rho} (M_R^r + M_{ex}^r),$$

де $\vec{F}$ та M_{ex}^r – відповідно зовнішні сила та момент, які діють на конструкцію, а $\vec{R}$ та M_R^r – головні вектори сил та моментів тиску рідини на стінки конструкції, які відповідно до варіаційного підходу визначаються автоматично як складова частина техніки варіювання. З рівнянь руху (2.15) – (2.17) можна вивести аналітичні вирази для цих параметрів силової і моментної взаємодії рідини з конструкцією (зауважимо, що в літературі по динаміці конструкцій з рідиною така силова взаємодія визначається зазвичай шляхом інтегрування сил тиску на стінках резервуару, що значно

складніше і розглянуто лише для окремих випадків; тут же такий результат отримуємо автоматично як складову частину техніки варіювання і для більш загального випадку)

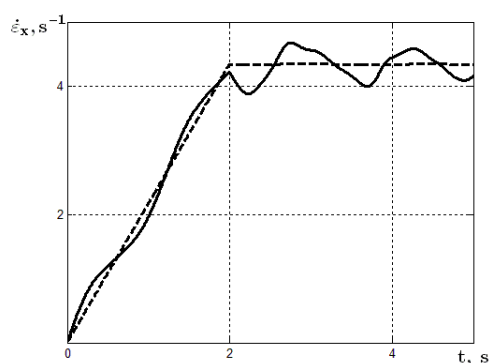
$$\bar{R} = \rho \left[\left(\sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \bar{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \bar{B}_{ijk}^3 \right) - \sum_i \ddot{a}_i \left(\bar{B}_i^1 + \sum_j a_j \bar{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \bar{B}_{ijk}^3 \right) \right] \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} M_R^r = & -\frac{\rho}{2} \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{a}_r} \left(E_{pi}^{1*} + \sum_j a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{j,k} a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) \right\} - \\ & -\rho \sum_{n=1}^3 \ddot{a}_n \left[\sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{a}_r} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{a}_n} \left(A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) \right] + \\ & + \rho \sum_{p,s=1}^3 \left(\omega_{p,r}^* \omega_s + \omega_p^{(k)} \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{a}_r} \right) \left(A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) + \\ & + \frac{\rho}{2} \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left(\sum_i \dot{a}_i E_{pi}^{1*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + \\ & + \rho \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{a}_r} \omega_s \left(\sum_i \dot{a}_i E_{psi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{psij}^3 \right) + \frac{\rho}{2} \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{a}_r} \left(\sum_i \dot{a}_i \dot{a}_j E_{pij}^{2*} + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) \end{aligned} \quad (3.60)$$

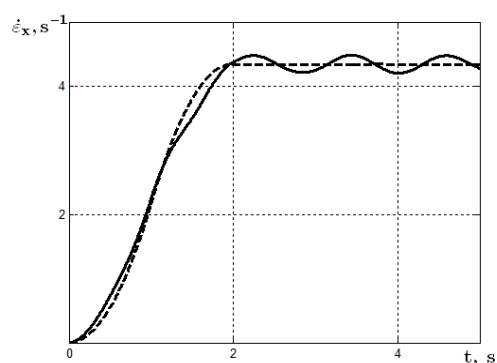
Отримання параметрів силової взаємодії в аналітичному вигляді дозволяє не тільки кількісно оцінити силовий вплив рідини на стінки резервуару, але й запропонувати нові алгоритми керування конструкціями з рідиною.

Розглянемо випадок поступального руху конструкції з рідиною в горизонтальній площині. У цьому випадку рух конструкції повністю задається тільки одним параметром поступального руху ϵ_x . Відповідно, два рівняння, що відповідають руху за напрямками y і z з системи рівнянь (2.18), а також три рівняння системи (2.17), відповідні кутовому руху конструкції, опускаються.

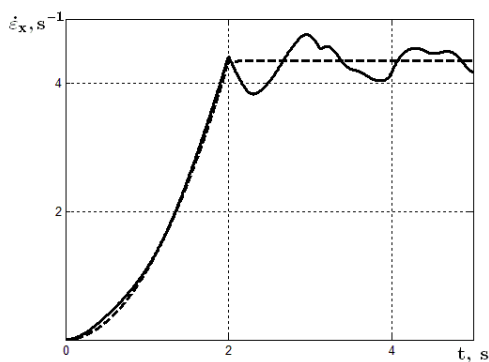
Розглянемо задачу про розгін конструкції з рідиною при дії на неї сили в формі короткочасного імпульсу сили тривалістю $t_{im} = 2$ с. При цьому досліджується рух системи для чотирьох варіантів форми імпульсу сили, який прикладається до стінки резервуару та має однакову площу та тривалість (кількість руху, яка передається у систему), – прямокутний імпульс (Рис. 3.3а), імпульс у вигляді рівнобічного трикутника (Рис. 3.3б), імпульс у вигляді прямокутного трикутника з вертикальним заднім фронтом (Рис. 3.3в) та імпульс у вигляді прямокутного трикутника з вертикальним переднім фронтом (Рис. 3.3г).



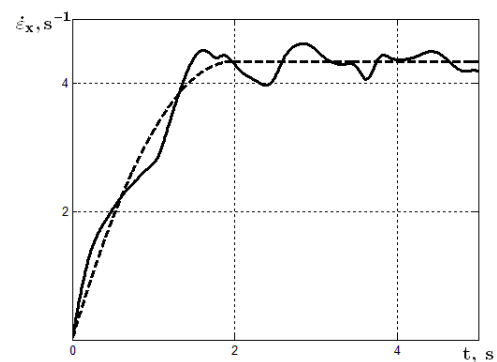
а) прямокутний імпульс



б) імпульс у формі рівнобічного трикутника



в) імпульс у вигляді прямокутного трикутника з вертикальним заднім фронтом

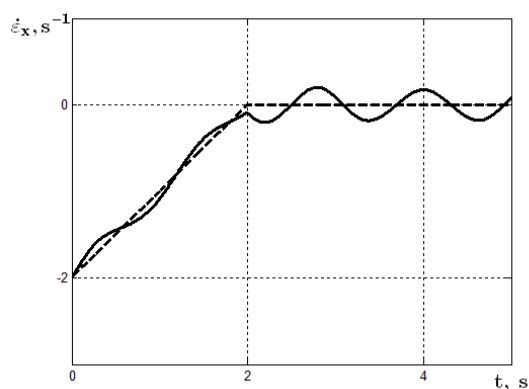


г) імпульс у вигляді прямокутного трикутника з вертикальним переднім фронтом

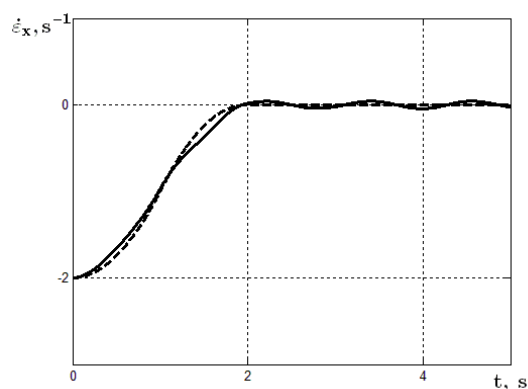
Рис. 3.3. Швидкість резервуару під дією імпульсу сили в задачі розгону при співвідношенні мас $M_T = 0,1M_F$

На Рис. 3.3 представлені графіки зміни швидкості руху конструкції в напрямку x в часі для випадку руху системи, коли рідина «затверділа» (штрихова лінія), для випадку повного врахування рухомості рідини

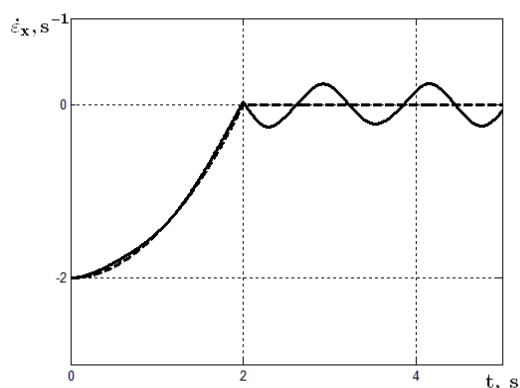
(суцільна лінія), а також для випадку руху системи, коли дія імпульсу сили супроводжується компенсацією силового відгуку рідини на стінки резервуару, визначеної згідно з формулою (3.59). Зауважимо, що при цьому компенсація рухомості рідини здійснюється на всьому інтервалі руху на відміну від дії короткочасного імпульсу активної сили. При цьому результати розрахунків зміни швидкості руху конструкції повністю збігаються з випадком руху системи із «затверділою» рідиною. Результати обчислень наведені в безрозмірній формі шляхом віднесення лінійних розмірів до радіусу резервуару.



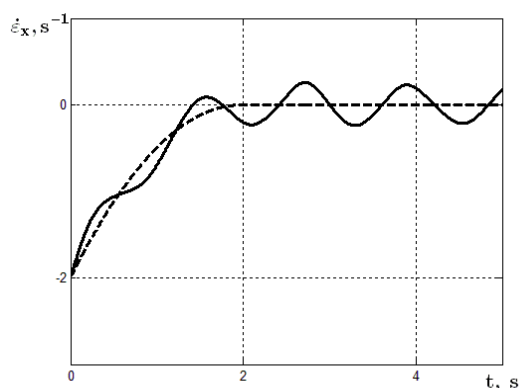
а) прямокутний імпульс



б) імпульс у формі рівнобічного трикутника



в) імпульс у вигляді прямокутного трикутника з вертикальним заднім фронтом



г) імпульс у вигляді прямокутного трикутника з вертикальним переднім фронтом

Рис. 3.4. Швидкість резервуару під дією імпульсу сили в задачі гальмування при співвідношенні мас $M_T = 0,1M_F$

Розглядалися також задачі гальмування руху резервуару, який рухається з початковою швидкістю $\dot{\epsilon}_x(0) = -2 \text{ 1/с}$. Гальмування

здійснювалось такими ж імпульсами і в такій же послідовності, як і у випадку задачі розгону руху. Площа імпульсу гальмування дорівнює кількості руху конструкції з рідиною. Як і раніше, розглянуто задачі щодо гальмування при тих же параметрах системи в межах трьох постановок: рух резервуару із «затверділою» рідиною (штрихова лінія), рух з врахуванням рухомості рідини в повному обсязі (суцільна лінія) та рух з повним урахуванням мобільності рідини, але при наявності компенсації впливу рідини на стінки резервуару. Результати розрахунків зміни швидкості руху конструкції в часі для випадку задачі гальмування чотирма видами імпульсів наведені на Рис. 3.4.

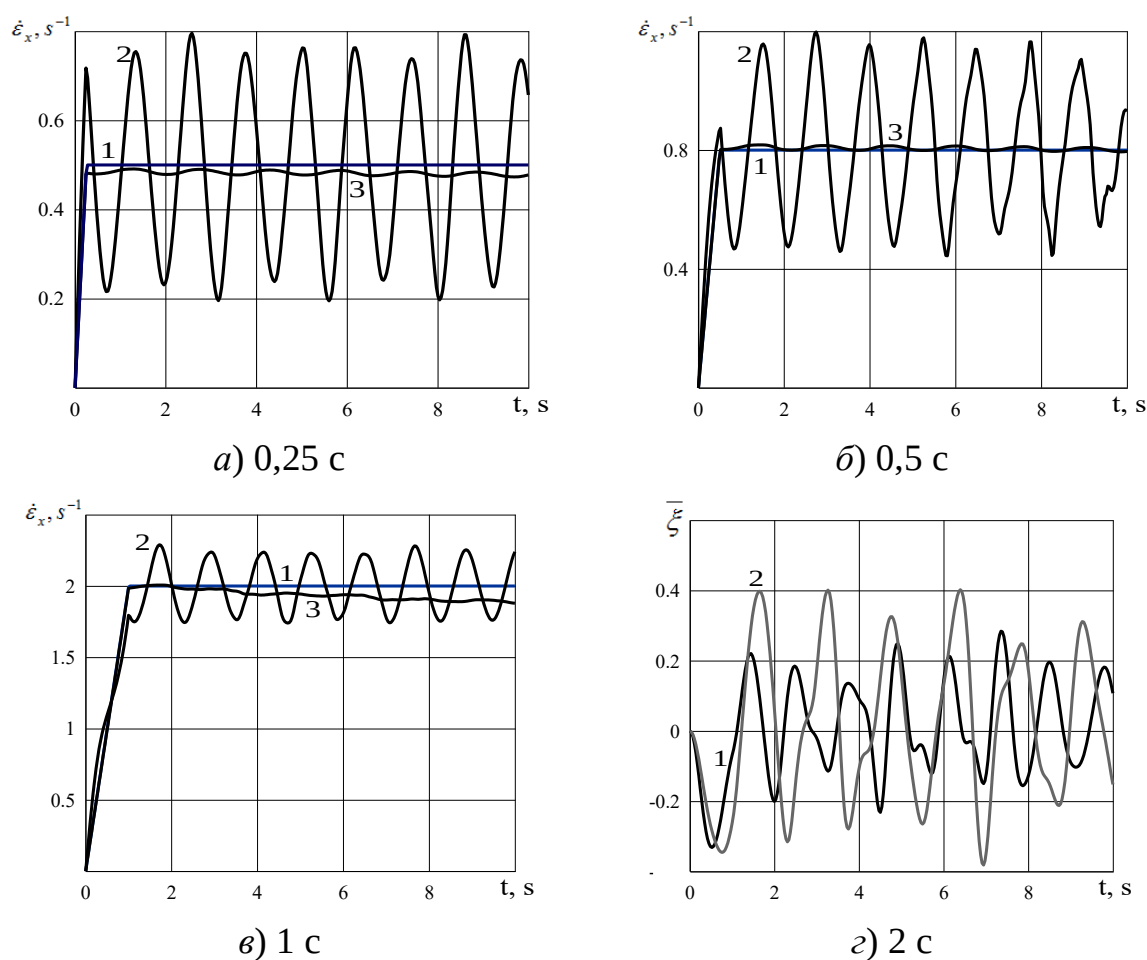


Рис. 3.5. Швидкість резервуару та амплітуда вільної поверхні під дією прямокутного імпульсу сили в задачі розгону ($M_T = 0,1M_F$)

Як можна бачити з результатів моделювання, при наявності компенсації сил тиску рідини на стінки резервуару конструкція здійснює рух, який з високою точністю збігається з випадком руху конструкції із «затверділою»

рідиною. Цікаво відзначити, що при гальмуванні з урахуванням компенсації рухомості рідини резервуар практично стоїть на місці, хоча рідина продовжує здійснювати всередині резервуару інтенсивний хвильовий рух, вплив якого компенсується. Фактично в такому русі зі зворотним зв'язком у вигляді компенсації рухомості рідини вдається підвищити точність квазітвердого руху системи «резервуар - рідина» по заздалегідь необхідній траєкторії (програмний рух).

Розглянуті приклади відповідають випадку, коли інтенсивність підведеного до системи навантаження не велика. Для визначення ступеня відхилення режиму руху з компенсацією рухомості рідини розглянемо випадок наявності більш інтенсивних навантажень на конструкцію. На Рис. 3.5 наведені результати розрахунків швидкості поступального руху конструкції для розглянутої вище задачі при зміні часу дії навантаження. Рис. 3.5а відповідає тривалості дії навантаження 0,25 с, Рис. 3.5б – 0,5 с, Рис. 3.5в – 1 с.

При цьому на графіках крива 1 відповідає випадку руху системи із «затверділою» рідиною, крива 2 – випадку повного врахування рухомості рідини на основі моделі спільного руху системи «конструкція – рідина», в крива 3 – випадку спільного руху конструкції з рідиною при наявності зовнішньої сили, яка компенсує рухомість рідини. Як видно з результатів моделювання, при високоінтенсивному розгоні системи швидкість руху конструкції в рамках моделі спільного руху відрізняється від швидкості руху конструкції із «затверділою» рідиною сильніше, ніж у випадку розгону в так званих «комфортних» умовах, тобто більш повільних навантаженнях. Аналогічно, при розгляді випадку руху з урахуванням компенсації рухомості рідини вже стають помітними відмінності від руху системи із «затверділою» рідиною. Причому ці відмінності носять як коливальний характер, так і характер накопичувального відхилення. Можливо такі похибки вдалося б знизити шляхом підвищення точності інтегрування системи рівнянь (2.17) – (2.18) проте поки це не перевірялося.

На Рис. 3.5г показано зміну у часі збурення амплітуди хвиль на вільній поверхні рідини на стінці резервуару для випадку моделі сумісного руху системи без силової компенсації рухомості рідини (крива 1) і з силовою компенсацією рухомості рідини (крива 2) для випадку дії імпульсу сили тривалістю 1 с. Як можна бачити з результатів, в цілому хвильовий рух рідини при введенні силової компенсації перевершує випадок моделювання системи без компенсації рухомості, проте ці відмінності значні на початковому етапі руху системи і поступово слабшають з плином часу.

При розгляді задач механіки систем при вібраційних впливах в околі резонансів типовим методом теоретичних і експериментальних досліджень є опис поведінки системи при заданих переміщеннях по гармонічному закону, хоча реально система здійснює рух під дією сили, яка змінюється в часі за гармонічним законом. Таке припущення ігнорує вплив на рух резервуару внутрішніх рухомих елементів (в нашому випадку – мас рідини). Саме така гіпотеза застосовується в багатьох роботах, які досліджують поведінку рідини з вільною поверхнею в околі головного (першого) резонансу. Виникає питання: наскільки доцільно користуватися таким припущенням, і яким має бути керуюча дія на конструкцію в цілому, щоб тіло рухалось за гармонічним законом, незважаючи на внутрішній рух рідини.

Для стандартних параметрів резервуару та рідини досліджується рух системи під дією гармонічної сили з частотою 72,5% від першої резонансної частоти і амплітудою 7,39% від ваги конструкції з рідиною. Параметри обрані з міркувань попадання хвильового руху рідини в діапазон прояву нелінійних властивостей. У початковий момент передбачається, що конструкція з рідиною знаходиться в стані спокою.

На Рис. 3.6 показано суцільною лінією, з якою швидкістю буде рухатися конструкція, якщо до стінок резервуару докласти зазначену вище гармонічну силу. Як можна бачити з графіка, закон зміни швидкості сильно відрізняється від бажаного гармонічного через внутрішній хвильовий рух

рідини. Якщо ж доповнити діючу силу керуванням, визначеним як компенсація силового відгуку рідини, то встановлюється гармонічний закон руху конструкції (штрихова лінія на Рис. 3.6). Тобто очікуваний результат досягається з високою точністю на основі запропонованого алгоритму керування.

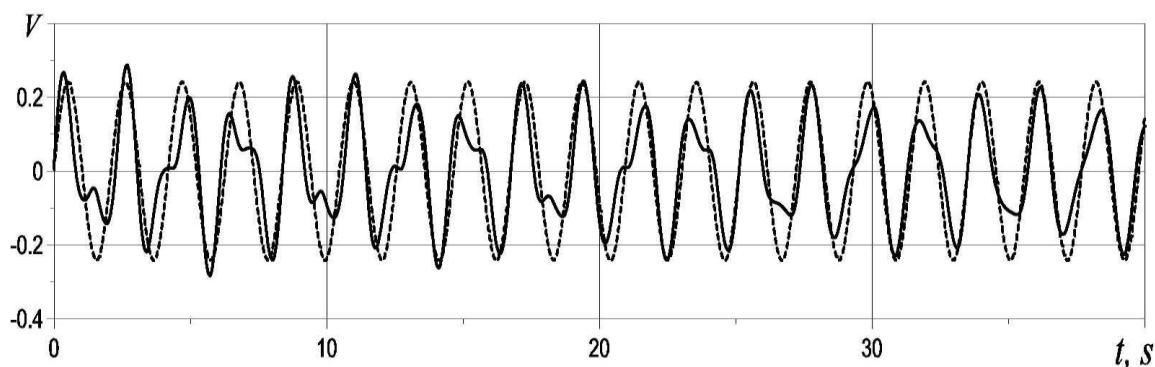


Рис. 3.6. Швидкість резервуару під дією гармонічного силового збудження руху ($M_T = 0,1M_F$)

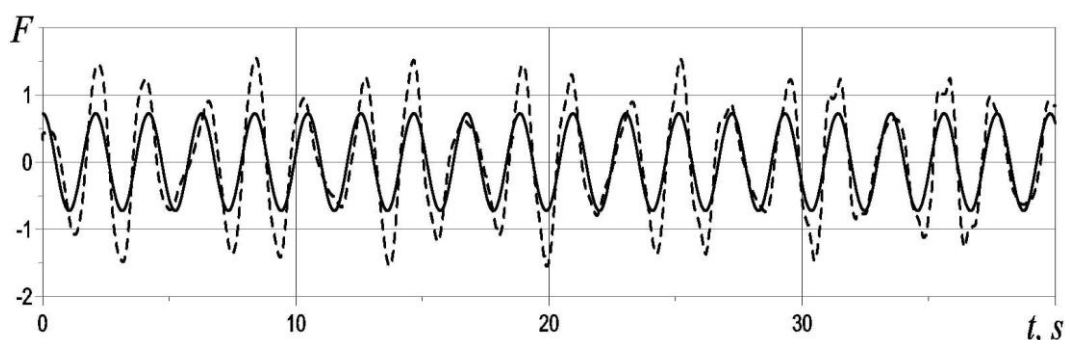


Рис. 3.7. Керуюча сила, яка діє на стінки резервуару ($M_T = 0,1M_F$)

На Рис. 3.7 показаний закон зміни в часі зовнішньої гармонічної сили (суцільна лінія) і зовнішньої сили, доповненої компенсацією гідродинамічного відгуку рідини (штрихова лінія). Як можна бачити з графіків, керуюча сила, що реалізує рух конструкції за гармонічним законом, істотно відрізняється від простого гармонічного впливу.

На Рис. 3.8 наведені закони зміни амплітуди коливань вільної поверхні рідини на стінці резервуару для випадків некерованого руху (суцільна лінія) і керованого руху на основі принципів компенсації гідродинамічного відгуку рідини (штрихова лінія). Як можна бачити з графіків, амплітуди коливань рідини в керованому режимі перевершують варіант задачі у

випадку відсутності керування. Це викликано тим, що силу, яка компенсує гідродинамічний відгук рідини, підведено до стінки резервуару і спрямовано протилежно до напрямку руху зростаючої хвилі, що, природно, призводить до подальшого додаткового зростання збурення вільної поверхні. У той же час, якщо порівняти режими без компенсації і з компенсацією, то помітно, що в режимі з компенсацією силового відгуку рідини значно слабше проявляється внесок вищих гармонік спектру, що свідчить про пом'якшення протікання перехідних процесів.

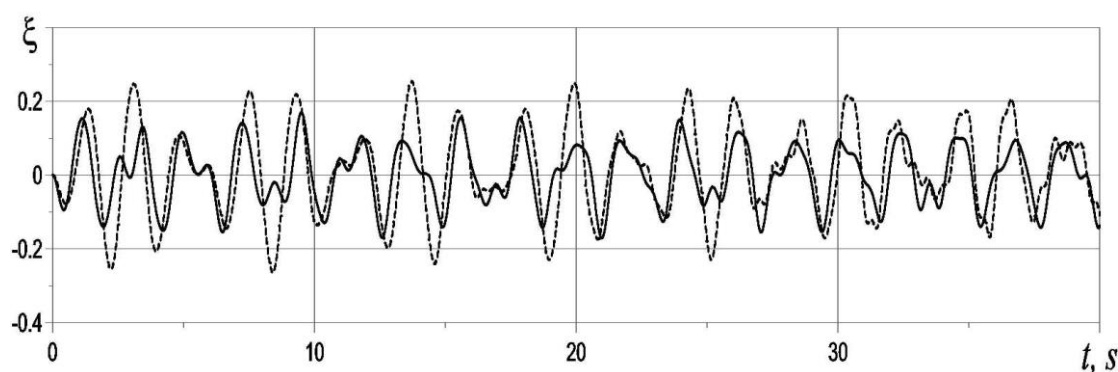


Рис. 3.8. Збурення вільної поверхні рідини під дією гармонічного силового збудження руху в задачі розгону ($M_T = 0,1M_F$)

Необхідно зауважити, що з точки зору математичної теорії керування внесення в систему силової компенсації рухомості рідини еквівалентно внесенню в систему зворотного зв'язку щодо прискорення амплітуд форм коливань рідини з вільною поверхнею і квадратів швидкостей зміни цих амплітуд, що впливає з форми вираження для силового відгуку рідини (3.59). Пропонована схема керування рухом не є оптимальною, однак дозволить підвищити точність реалізації програмних рухів конструкцій з рідиною з вільною поверхнею.

Однією з важливих інженерних задач є дослідження динаміки конструкцій з рідиною при наявності сейсмічного збурення [298]. Сейсмічні збурення бувають досить різноманітними, і їх характер істотно залежить від ступеня близькості досліджуваної конструкції до епіцентру землетрусу. У той же час основні збурення в системі формуються, перш за все, початковим етапом сейсмічного впливу. В задачі сейсмічного збурення

ґрунту зворотний вплив конструкції ґрунт дуже малий, тому в математичній постановці задачі природно вважати рух земної кори заданим, тобто розглядати задачу при заданих кінематичних збуреннях системи. Якщо спрощено припустити, що збурення земної кори відбувається тільки в горизонтальному напрямку, то в системі рівнянь (2.17) – (2.19) необхідно вважати $\varepsilon_x(t)$ заданим, а також покласти $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$; відповідно система рівнянь (2.18) виключається з розгляду. У звичайній постановці задача зводиться до поступального руху конструкції за заданим законом. Зауважимо, що такий комбінований розгляд системи, коли за частиною змінних (параметрах поступального руху конструкції) рух вважається заданим, а по іншій частині (параметрам кутового руху системи) розглядається модель спільного руху системи, в задачах динаміки конструкцій з рідиною було досліджено вперше.

Як засіб зниження амплітуд коливань рідини пропонується застосувати не фіксоване закріплення конструкції на ґрунті, а її закріплення в формі маятнікового підвісу. При цьому маятниковий підвіс реалізується не шляхом підвішування конструкції, а за рахунок рухомості основи на криволінійній поверхні (що еквівалентно). З огляду на вибір кутів обертання конструкції з рідиною і те, що розглядається сейсмічне збурення в одній площині, це призведе до того, що в системі будуть спостерігатися повороти тільки щодо осі Оу (кут обертання α_2), а два інших кута будуть тотожно дорівнювати нулю.

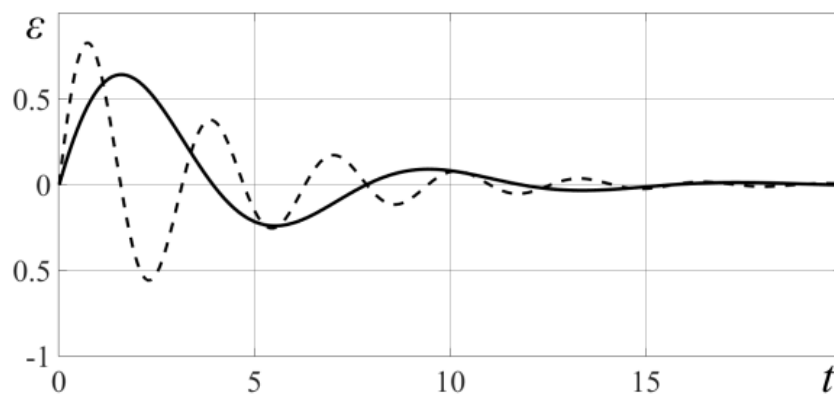
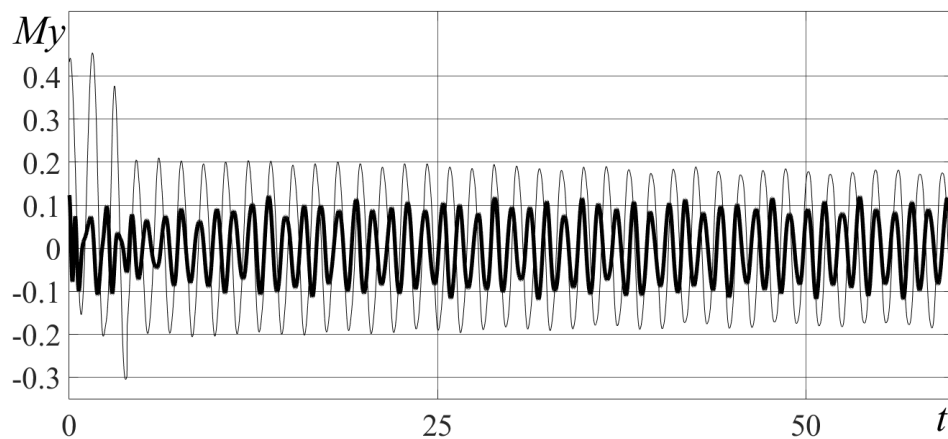
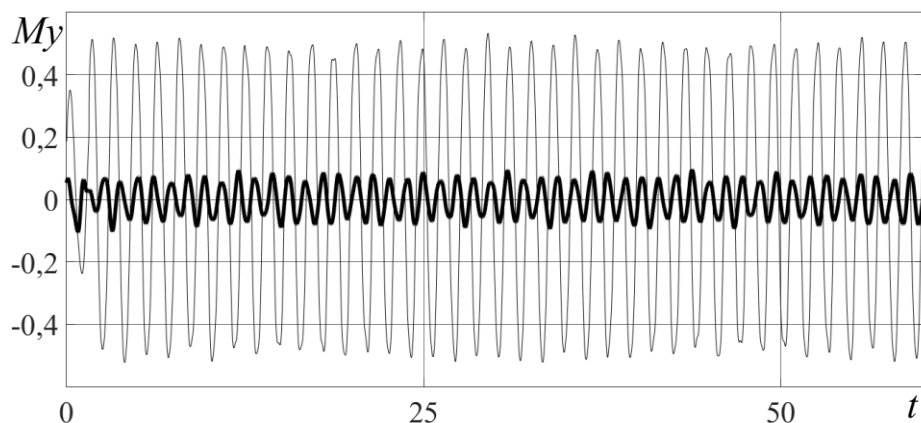


Рис. 3.9. Сейсмічне збурення ґрунту

Будемо вважати, що сейсмічне збурення ґрунту можна наближено описати законом $\varepsilon(t) = A \exp(-\alpha t) \sin(\omega t)$, де α і ω є характеристиками згасання і частоти сейсмічного збурення. Такий спрощений закон сейсмічного збурення представлено на Рис. 3.9 для двох розрахункових варіантів. Для резервуару із стандартними параметрами та моментами інерції, визначеними на основі робіт [117, 315], розглядалися випадки закріплення резервуару на маятниковому підвісі довжини l (товста суцільна крива на Рис. 3.9а) і для закріплення резервуара з ґрунтом, яке далі призводить до поступального руху конструкції (тонка суцільна крива на Рис. 3.9б).



а) $\omega = 0,8 \text{ 1/c}$



б) $\omega = 2,0 \text{ 1/c}$

Рис. 3.10. Момент тиску рідини на стінки резервуару на маятниковому підвісі

На Рис. 3.10 представлені результати порівняння моменту тиску рідини на стінки резервуару M_y відносно точки, що співпадає з центром незбуреної

вільної поверхні рідини, для частот зовнішнього збурення руху ґрунту $\omega = 0,8 \text{ 1/с}$ (варіант а) і $\omega = 2,0 \text{ 1/с}$ (варіант б). При цьому довжина підвісу приймалася $l = 8R$, а амплітуда зовнішнього збурення підбиралася таким чином, щоб максимальні збурення вільної поверхні рідини мали порядок $0,3R$. Як видно з графіків, у випадку маятникового підвісу перекидаючий момент значно знижується, причому для більш високої частоти сейсмічного збурення це зниження проявляється істотніше.

В роботі [315] було показано, що маятниковий підвіс істотно впливає на перерозподіл власних частот коливань конструкції і рідини. Частота квазітвердих коливань конструкції при цьому знижується, а частоти коливань рідини вибірково змінюються. Зміна стосується тільки частот з окружним номером $m = 1$ (антисиметричні форми коливань). При цьому на коротких довжинах підвісу збільшення частоти антисиметричних форм може бути майже в два рази. Це вказує на важливість розгляду такого типу задач саме в сумісній постановці. Така зміна частот в залежності від довжини маятникового підвісу призводить до того, в різних діапазонах довжин підвісу слід очікувати різного роду проявів нелінійних властивостей системи, оскільки форма коливань з найменшою частотою в різних діапазонах буде різною. Відповідно при аналізі поведінки системи на маятниковому підвісі окремо проаналізовані випадки для довгих ($l = 8R$), середніх ($l = 3R$) і коротких ($l = R$) маятникових підвісів.

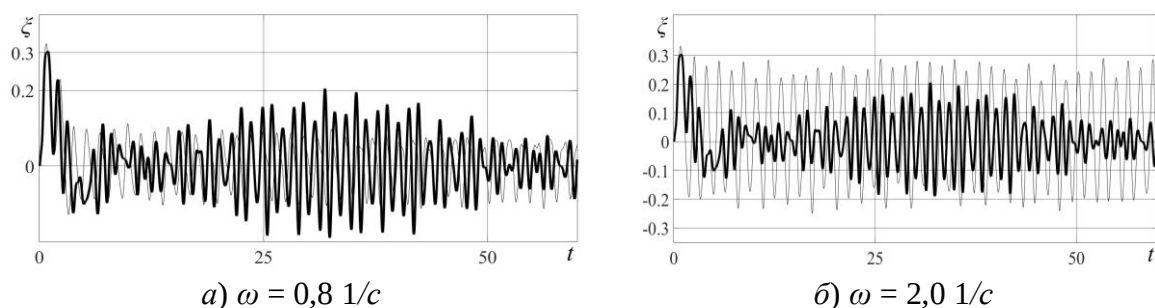


Рис. 3.11. Збурення вільної поверхні рідини у випадку поступального руху та на довгому маятниковому підвісі ($l = 8R$)

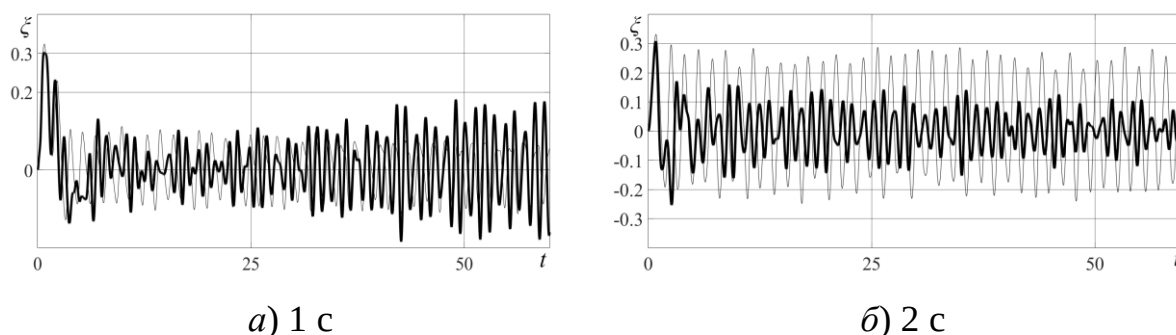


Рис. 3.12. Збурення вільної поверхні рідини у випадку поступального руху та на середньому маятниковому підвісі ($l = 3R$)

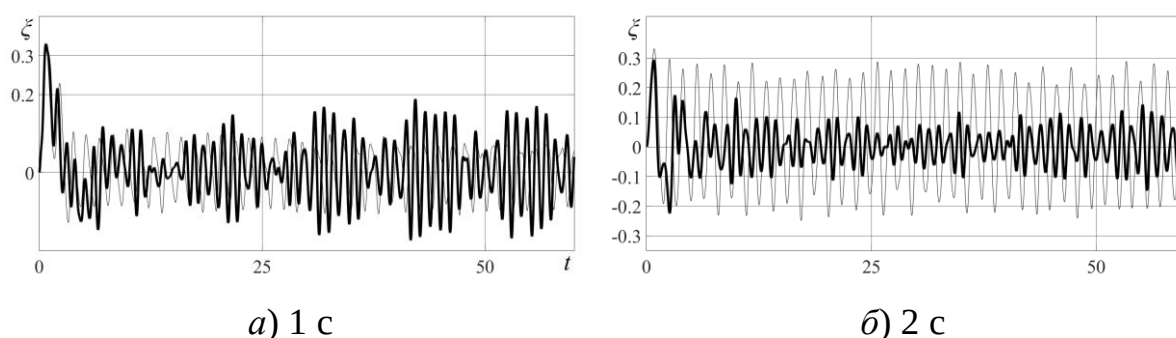


Рис. 3.13. Збурення вільної поверхні рідини у випадку поступального руху та на короткому маятниковому підвісі ($l = R$)

Наведемо результати визначення параметрів хвилеутворення рідини для двох видів сейсмічного кінематичного збурення руху для трьох діапазонів довжин маятникового підвісу. Для аналізу наведені зміна у часі амплітуди збурення вільної поверхні рідини на стінці резервуару. На графіках наведено результати порівняння збурення вільної поверхні рідини на стінці резервуару у випадку поступального руху конструкції (тонка суцільна лінія) і руху конструкції на маятниковому підвісі (жирна суцільна лінія) для довгого (Рис. 3.11), середнього (Рис. 3.12) і короткого (Рис. 3.13) маятникових підвісів. При цьому варіант а відповідає частоті сейсмічного збурення $\omega = 0,8 \text{ 1/с}$, а варіант б – частоті $\omega = 2,0 \text{ 1/с}$. Як можна бачити з графіків, ефективність маятникового підвісу щодо зниження амплітуд хвиль практично не проявляється для низьких частот сейсмічного збурення руху. Для більш високих частот ефективність маятникового підвісу виражена яскравіше. При цьому для більш коротких підвісів зниження амплітуд хвиль

істотніше. Необхідно зауважити, що при зміні амплітуд хвиль проявляється модуляція коливань, при цьому частота модуляції зростає зі зменшенням довжини маятникового підвісу.

В цілому застосування маятникового підвісу як засіб зниження негативних наслідків сейсмічних збурень можна вважати ефективним для зменшення силової та моментної взаємодії конструкції з рідиною і для зменшення збурення вільної поверхні рідини, що особливо проявляється для коротких підвісів, коли розподіл частот в системі найбільш істотно змінюється у порівнянні з випадком поступального руху системи, а саме, коли частота першої антисиметричної форми зміщується з першої позиції на третю і далі.

3.5. Керування механічною системою «резервуар - рідина» на основі принципу найменшого примушення Гауса

Розглянемо будь-яку механічну систему [30, 31], керований рух якої на інтервалі часу $t \in [0, T]$ описується системою нелінійних диференціальних рівнянь

$$\dot{y} = \Phi(y, u, t), \quad (3.61)$$

де y – n -вимірний вектор стану, u – m -вимірний вектор керування, Φ – неперервна обмежена функція, яка має перші частинні похідні по $y_1, \dots, y_m$ в області змінних y, u, t .

Програма руху системи на інтервалі часу $t \in [0, T]$ визначається рівняннями

$$\phi_i(y, t) = 0, \quad i = 1, \dots, s, \quad s \leq n, \quad (3.62)$$

при цьому функції $\phi_i(y, t)$ визначені та неперервні разом із своїми похідними

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \phi_r}{\partial y_n}, \quad r = 1, \dots, s,$$

та задовольняють умові: ранг функціональної матриці

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial y_i} \right), r = 1, \dots, s, i = 1, \dots, n$$

в кожен момент часу $t \in [0, T]$ дорівнює s .

Вважаємо, що квадратична форма

$$Zw = \sum_{k=1}^m \alpha_k u_k^2, \quad \alpha_k > 0, \alpha_k = \text{const},$$

яка називається примушенням, є заданою, та поставимо таку задачу: визначити таке керування $u = u(y, t)$, щоб рух системи (3.61) здійснювався за заданою програмою (3.62), і при цьому величина Zw у кожен момент часу $t \in [0, T]$ отримала найменше значення.

Доцільність цієї постановки пояснюється наступним чином. Керований рух механічної системи, яка складається із N матеріальних точок, відповідно до другого закону Ньютона, визначається системою диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} \Phi_i - \frac{1}{m_i} u_i, i = 1, \dots, N,$$

де r_i та m_i – радіус-вектор та маса i -ої точки відповідно, Φ_i – рівнодіюча активних зовнішніх сил, які діють на цю точку, u_i – керуюча сила. Керуючі сили $u_1, \dots, u_N$ повинні обиратися із умови руху системи за заданою програмою

$$\phi_r(r_1, \dots, r_N, \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_N, t) = 0, \quad r = 1, \dots, s.$$

Поставимо за мету визначити керуючі сили u_i так, щоб керований рух системи не суперечив існуючим принципам руху механічних систем. Одним із найбільш загальних принципів механіки є принцип найменшого примушення Гауса [30]. Його суть полягає в тому, що справжній рух

системи відрізняється від усіх можливих тим, що для справжнього руху примушення (за Гаусом)

$$Z^* w = \sum_{i=1}^N m_i \left\| \ddot{r}_i - \frac{1}{m_i} \Phi_i \right\|^2,$$

має мінімальне значення. Але для керованої механічної системи, що розглядається,

$$Z^* w = \sum_{i=1}^N m_i \|u_i\|^2.$$

Таким чином, розв'язок поставленої задачі при $Zw = Z^* w$ дозволяє визначити керування таким чином, щоб рух системи, яка досліджується, задовольняв класичним принципам механічних систем.

Відомо, що в реальних умовах елементи керування $u_1, \dots, u_m$ не можуть мати які завгодно великі значення та підпорядковані обмеженням, які можуть бути сформульовані у вигляді нерівностей

$$\|u\| \leq c, \quad c = \text{const}, \quad c > 0.$$

Розв'язок задачі в цьому випадку при $Zw = \|u\|^2$ з подальшою оцінкою найбільшого значення Zw може бути використаний для розв'язку питання про можливість здійснення програмного руху при заданих обмеженнях.

Необхідно відмітити, що поставлена задача не має єдиного рішення. Керування, яке забезпечує рух системи за заданою програмою (3.62) із найменшим примушенням Zw , можна представити у вигляді

$$u = u^0(y, t) + F(\phi_1, \dots, \phi_s, y_1, \dots, y_n, t),$$

де u^0 є розв'язком деякої системи алгебраїчних рівнянь, F – довільна вектор-функція, яка задовольняє умові $F(0, \dots, 0, y_1, \dots, y_n, t) = 0$. Довільність вибору функції F дозволяє врахувати у кожній конкретній

задачі особливості структури керованої системи, керуючих пристроїв або властивості оточуючого середовища.

Розглянемо розв'язок задачі керування механічною системою, коли диференціальні рівняння (3.61) можуть бути приведені до вигляду

$$\dot{y}_i = p_i(y_1, \dots, y_n, t) + \sum_{k=1}^m b_{ik}(y_1, \dots, y_n, t)u_k, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.63)$$

В цьому випадку множина елементів керування $u_1, \dots, u_m$ визначається на основі умови [31, 86]

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_r}{\partial y_i} p_i + \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_r}{\partial y_i} b_{ik} u_k + \frac{\partial \phi_r}{\partial t} = R_r, \quad r = 1, \dots, s. \quad (3.64)$$

де

$$R_r = R_r(\phi_1, \dots, \phi_s, y_1, \dots, y_n, t), \quad R_r = R_r(0, \dots, 0, y_1, \dots, y_n, t) = 0, \quad r = 1, \dots, s.$$

При виконанні умови (3.64) Z_w отримає найменше значення, якщо керування обчислюється за формулою

$$u_k = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i} b_{ik} \lambda_j + F_k, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.65)$$

Тут $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ – невизначені множники Лагранжа,

$$F_k = F_k(\phi_1, \dots, \phi_s, y_1, \dots, y_n, t)$$

– довільні функції, які задовольняють умові

$$F_k = F_k(0, \dots, 0, y_1, \dots, y_n, t) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.66)$$

При цьому зв'язок між функціями R_r та F_k встановлюється за формулами

$$R_r = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_r}{\partial y_i} b_{ik} F_k, \quad r = 1, \dots, p,$$

а для обчислення множників Лагранжа, після підстановки (3.65) в (3.64), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^m \frac{1}{\alpha_k} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_r}{\partial y_i} b_{ik} \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i} b_{ik} \right) \lambda_j = \\ & = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_r}{\partial y_i} p_i - \frac{\partial \phi_r}{\partial t}, \quad r = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Нехай

$$\lambda_j = \theta_j(y_1, \dots, y_n, t), \quad j = 1, \dots, s,$$

є розв'язком системи рівнянь (3.67), тоді керування має вигляд

$$u_k = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i} b_{ik} \theta_j(y_1, \dots, y_n, t) + F_k, \quad k = 1, \dots, m.$$

Якщо визначник системи рівнянь (3.67) не дорівнює нулю для заданого набору програмних траєкторій (3.62), то функція θ_j визначаються єдиним чином

$$\theta_j(y_1, \dots, y_n, t) = - \sum_{r=1}^s \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial y_i} p_i + \frac{\partial \phi_r}{\partial t} \right) \frac{\nabla_{rj}}{\nabla}, \quad k = 1, \dots, m,$$

де ∇_{rj} – алгебраїчне доповнення елемента

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{\alpha_k} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_r}{\partial y_i} b_{ik} \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i} b_{ik} \right)$$

визначника системи рівнянь (3.67). В цьому випадку керування

$$u_k = - \frac{1}{\alpha_k} \sum_{r,j=1}^s \frac{\nabla_{rj}}{\nabla} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial y_i} p_i + \frac{\partial \phi_r}{\partial t} \right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y_i} b_{ik} \right), \quad k = 1, \dots, m, \quad (3.68)$$

або в матричній формі

$$u = -A^{-1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} B \right)^T \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} B A^{-1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} B \right)^T \right]^{-1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} p + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right),$$

з позначеннями

$$u = \begin{vmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_m \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \phi_s}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \phi_s}{\partial y_n} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \end{vmatrix}, \quad p = \begin{vmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{vmatrix},$$

$$F = \begin{vmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{vmatrix}.$$

Якщо визначник системи рівнянь (3.67) дорівнює нулю для заданого набору програмних траєкторій (3.62), то розв'язок задачі має особливість. Нехай

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_s}{\partial y_i} b_{ik} = 0, \quad \nabla^{(s-1)} \neq 0, \quad k = 1, \dots, m,$$

де $\nabla^{(s-1)}$ – діагональний мінор порядку $s-1$ визначника системи рівнянь (3.67). В цьому випадку для значень $y_1, \dots, y_n$ із (3.62) замість рівнянь (3.65) отримаємо

$$u_k = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i} b_{ik} \theta_j(y_1, \dots, y_n, t) + F_k, \quad k = 1, \dots, m.$$

а систему алгебраїчних рівнянь (3.67) можна записати наступним чином

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{k=1}^m \frac{1}{\alpha_k} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_r}{\partial y_i} b_{ik} \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i} b_{ik} \right) \lambda_j = \\ & = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_r}{\partial y_i} p_i - \frac{\partial \phi_r}{\partial t}, \quad r = 1, \dots, s-1. \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_s}{\partial y_i} p_i + \frac{\partial \phi_s}{\partial t} = 0. \quad (3.70)$$

Відповідно, якщо система рівнянь (3.62) задає програмний рух механічної системи (3.63), то функції p_i та ϕ_s повинні задовольняти умові (3.70), в

елементи керування $u_1, \dots, u_m$, які забезпечують виконання умови (3.62) на розв'язках системи диференціальних рівнянь (3.63) з найменшим примушенням Zw повинні визначатися формулами

$$u_k = -\frac{1}{\alpha_k} \sum_{r,j=1}^{s-1} \frac{\nabla_{rj}^{(s-1)}}{\nabla^{(s-1)}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial y_i} p_i + \frac{\partial \phi_r}{\partial t} \right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y_i} b_{ik} \right) + F_k, \quad k = 1, \dots, m,$$

де $\nabla_{rj}^{(s-1)}$ – алгебраїчне доповнення елемента

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{\alpha_k} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_r}{\partial y_i} b_{ik} \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i} b_{ik} \right)$$

визначника $\nabla^{(s-1)}$ системи алгебраїчних рівнянь (3.69), F_k , як і раніше, – довільні функції, які задовольняють умові (3.66).

Якщо рух керованої системи заданий в узагальненому вигляді (3.61), тоді при наявності рівнянь програмного руху (3.62) елементи керування можна знайти із системи рівнянь

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_r}{\partial y_i} \Phi_i + \frac{\partial \phi_r}{\partial t} = R_r, \quad r = 1, \dots, s, \quad (3.71)$$

де функції R_r задані як

$$R_r = R_r(\phi_1, \dots, \phi_s, y_1, \dots, y_n, t), \quad R_r = R_r(0, \dots, 0, y_1, \dots, y_n, t) = 0, \quad r = 1, \dots, s,$$

а елементи керування будуть мати вигляд

$$u_k = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial u_k} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y_i} \Phi_i \right) \lambda_j + F_k, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.72)$$

де $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ – невизначені множники Лагранжа, F_k – довільні функції, які задовольняють умові (3.66).

Із порівняння отриманих рівнянь (3.71) та (3.72) випливає, що невідомі множники Лагранжа $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ та елементи керування $u_1, \dots, u_m$ повинні бути розв'язком системи алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_r}{\partial y_i} \Phi_i + \frac{\partial \phi_r}{\partial t} = 0, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$u_k = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial u_k} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y_i} \Phi_i \right) \lambda_j, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.73)$$

Нехай

$$u_k = u_k^0(y_1, \dots, y_n, t), \quad k = 1, \dots, m,$$

– розв’язок цієї системи рівнянь, тоді елементи керування у загальному випадку будуть мати вигляд

$$u_k = u_k^0(y_1, \dots, y_n, t) + F_k, \quad k = 1, \dots, m,$$

або у векторній формі

$$u = u^0(y, t) + F.$$

Розглянемо особливості побудови керування на основі принципу найменшого примушення Гауса [31, 86], коли система (3.61) має вигляд

$$\dot{y} = z, \quad \dot{z} = P(y, z, t) + u, \quad (3.74)$$

де

$$y = (y_1, \dots, y_n), \quad z = (z_1, \dots, z_n), \quad P = (P_1, \dots, P_n), \quad u = (u_1, \dots, u_n),$$

а шукана програма руху системи задана рівняннями

$$\phi_k(y, t) = 0, \quad k = 1, \dots, s_1, \quad \phi_l(y, z, t) = 0, \quad l = s_1 + 1, \dots, s. \quad (3.75)$$

Тут P – відома вектор-функція змінних x , y та z , яка не порушує умов існування та єдності розв’язку системи рівнянь (3.74) на інтервалі часу $t \in [0, T]$. Функції ϕ_k визначені та неперервні разом із своїми частинними похідними

$$\frac{\partial^2 \phi_k}{\partial y_i \partial y_j}, \quad \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial y_i \partial t}, \quad \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial^2 t}, \quad \frac{\partial \phi_l}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial \phi_l}{\partial z_i}, \quad \frac{\partial \phi_l}{\partial t},$$

та відповідають умові: ранг функціональної матриці

$$I = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_k}{\partial y_i} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial z_i} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, s_1, \quad l = s_1 + 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, n,$$

дорівнює s .

Відомо [31, 86], що якщо рівняння $\phi(y, t) = 0$ є заданою програмою руху системи (3.74), то і рівняння

$$\tilde{\phi}(y, z, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial y_i} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

теж повинні бути заданими програмами руху. Після введення позначень

$$\text{grad } \phi_k = \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \phi_k}{\partial y_n} \right), \quad \text{grad } \phi_l = \left(\frac{\partial \phi_l}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial \phi_l}{\partial z_n} \right),$$

$$M_k = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \phi_k}{\partial y_i} \right) z_i + \frac{d}{dt} \frac{\partial \phi_k}{\partial t}, \quad M_l = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \phi_l}{\partial y_i} \right) z_i + \frac{\partial \phi_l}{\partial t},$$

$$k = 1, \dots, s_1, \quad l = s_1 + 1, \dots, s,$$

розглянемо другі похідні функцій ϕ_k , $k = 1, \dots, s_1$, які визначені на розв'язках системи диференціальних рівнянь (3.74). Отриману систему алгебраїчних рівнянь запишемо наступним чином

$$(\text{grad } \phi_k, P + u) + M_k = R_k^*, \quad k = 1, \dots, s_1,$$

$$(\text{grad } \phi_l, P + u) + M_l = R_l^*, \quad l = s_1 + 1, \dots, s, \quad (3.76)$$

де

$$R_r^* = R_r^*(\dot{\phi}_1, \dots, \dot{\phi}_{s_1}, \phi_1, \dots, \phi_s, y, z, t), \quad r = 1, \dots, s,$$

— довільні функції, які задовольняють умові

$$R_r^*(0, \dots, 0, 0, \dots, 0, y, z, t) = 0, \quad r = 1, \dots, s. \quad (3.77)$$

Загальний вигляд вектору керування, який забезпечує виконання умов (3.76) із найменшим значенням примушення Zw , запишемо у вигляді

$$u = \sum_{j=1}^{s_1} \lambda_j \text{grad } \phi_j + \sum_{i=s_1+1}^s \lambda_i \text{grad}^* \phi_i + F^*. \quad (3.78)$$

Тут

$$F^* = F^*(\dot{\phi}_1, \dots, \dot{\phi}_{s_1}, \phi_1, \dots, \phi_s, y, z, t),$$

– довільна вектор-функція, яка задовольняє умові

$$\|F^*(0, \dots, 0, 0, \dots, 0, y, z, t)\| = 0, \quad (3.79)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_s$ – невідомі множники Лагранжа. Для визначення λ_r підставимо (3.78) в (3.79) та отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{s_1} (\text{grad } \phi_k, \text{grad } \phi_j) \lambda_j + \sum_{i=s_1+1}^s (\text{grad } \phi_k, \text{grad}^* \phi_i) \lambda_i &= -M_k, \\ \sum_{j=1}^{s_1} (\text{grad } \phi_l, \text{grad } \phi_j) \lambda_j + \sum_{i=s_1+1}^s (\text{grad } \phi_l, \text{grad}^* \phi_i) \lambda_i &= -M_l, \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$k = 1, \dots, s_1, \quad l = s_1 + 1, \dots, s.$$

Визначник цієї системи ∇^* при зроблених припущеннях відносно рангу функціональної матриці I не дорівнює нулю. Відповідно, система (3.80) має єдиний розв'язок

$$\lambda_k = - \sum_{r=1}^s M_r \frac{\nabla_{rk}^*}{\nabla^*}, \quad k = 1, \dots, s,$$

де ∇_{rk}^* – алгебраїчне доповнення елемента r -ого рядка та k -ого стовпчика визначника ∇^* . Таким чином, шукане керування має вигляд

$$u = - \sum_{j=1}^{s_1} \left(\sum_{k=1}^s M_k \frac{\nabla_{kj}^*}{\nabla^*} \right) \text{grad } \phi_j - \sum_{i=s_1+1}^s \left(\sum_{l=1}^s M_l \frac{\nabla_{li}^*}{\nabla^*} \right) \text{grad}^* \phi_i + F^*. \quad (3.81)$$

Якщо отриману формулу для керування (3.81) підставити в систему (3.74), то ми отримаємо множину диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{y} = z, \quad \dot{z} = P(y, z, t) - \sum_{j=1}^{s_1} \left(\sum_{k=1}^s M_k \frac{\nabla_{kj}^*}{\nabla^*} \right) grad \phi_j - \\ - \sum_{i=s_1+1}^s \left(\sum_{l=1}^s M_l \frac{\nabla_{li}^*}{\nabla^*} \right) grad^* \phi_i + F^*, \end{aligned}$$

на всіх розв'язках, які задовольняють умовам (3.75), величина $\|u\|^2$ у кожен момент часу $t \in [0, T]$ отримає найменше значення.

Для побудови керування на основі принципу найменшого примушення Гауса будемо використовувати систему рівнянь руху (2.17) – (2.18), в якій буде враховано коливання вільної поверхні рідини $\xi(t)$ по першій антисиметричній формі a_1 з можливістю горизонтального переміщення резервуару по горизонтальній координаті ε_y . Введемо позначення для фазових змінних $x_1 = a_1$, $x_2 = \dot{a}_1$, $x_3 = \varepsilon_y$, $x_4 = \dot{\varepsilon}_y$ та керування $u = F_y$ і запишемо систему (2.17) – (2.18) в нормальній формі Коші в узагальненому вигляді

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = f_1(x_1, x_2) + b_1(x_1, x_2)u \quad (3.82)$$

$$\dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = f_2(x_1, x_2) + b_2(x_1, x_2)u \quad (3.83)$$

де вигляд функцій f_1 , f_2 , b_1 , b_2 залежить від вибору обраної для керування моделі (лінійна або нелінійна до величин відповідного порядку малості).

Розглянемо побудову керування для системи в узагальненому вигляді (3.82) – (3.83), яке забезпечить реалізацію програмного руху резервуару із заданим законом зміни швидкості $\psi(x_4, t) = 0$ [83, 84]. Отримаємо похідну за часом від програмного закону $\psi(x_4, t) = 0$, щоб можна було зв'язати цей програмний закон з рівняннями руху резервуару (3.82) – (3.83), тобто

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_4} \dot{x}_4 = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_4} (f_2 + b_2 u) \equiv R(\psi, x, t) \quad (3.84)$$

де $R(\psi, x, t)$ – довільна функція від збурення ψ , поточних координат x_1, x_2, x_3, x_4 та часу, на яку накладено умову $R(0, x, t) = 0$. Задачу мінімізації функціоналу $L = u^2$ при наявності (3.84) умови зводимо до задачі безумовної мінімізації функціоналу

$$L^* = u^2 + \lambda \left(\frac{d\psi}{dt} - R(\psi, x, t) \right) = u^2 + \lambda \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_4} (f_2 + b_2 u) - R(\psi, x, t) \right),$$

де λ – множник Лагранжа. Використовуючи відому процедуру мінімізації, отримаємо систему з двох рівнянь відносно шуканих змінних u та λ

$$\frac{\partial L^*}{\partial u} = 2u + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_4} b_2 = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_4} b_2 u = R(\psi, x, t) - \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x_4} f_2 \quad (3.85)$$

та отримаємо функцію керування як її розв'язок

$$u = \frac{R(\psi, x, t) - \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x_4} f_2}{\frac{\partial \psi}{\partial x_4} b_2}.$$

Розглянемо побудову керування, яке забезпечить реалізацію програмного руху резервуару із заданим законом зміни переміщення резервуару $\psi(x_3, t) = 0$. Отримаємо повну другу похідну за часом від програмного закону $\psi(x_3, t) = 0$, щоб можна було зв'язати програмний закон зміни переміщення у часі з рівняннями руху резервуару (3.82) – (3.83), тобто

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \dot{x}_3 = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} x_4,$$

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) x_4 + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \dot{x}_4 =$$

$$= \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) x_4 + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} (f_2 + b_2 u) \quad (3.86)$$

де $R(\psi, x, t)$ – довільна функція від збурення ψ , поточних координат x_1, x_2, x_3, x_4 та часу, на яку накладено умову $R(0, x, t) = 0$. Задачу мінімізації функціоналу $L = u^2$ при наявності умови (3.86) зводимо до задачі безумовної мінімізації функціоналу з множником Лагранжа λ

$$\begin{aligned} L^* &= u^2 + \lambda \left(\frac{d^2 \psi}{dt^2} - R(\psi, x, t) \right) = \\ &= u^2 + \lambda \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) x_4 + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} (f_2 + b_2 u) - R(\psi, x, t) \right). \end{aligned}$$

Використовуючи відому процедуру мінімізації, отримаємо систему рівнянь відносно шуканих змінних u та λ

$$\frac{\partial L^*}{\partial u} = 2u + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_3} b_2 = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_3} b_2 u = R(\psi, x, t) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) x_4 - \frac{\partial \psi}{\partial x_3} f_2,$$

та їх розв'язок

$$u = \frac{R(\psi, x, t) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) x_4 - \frac{\partial \psi}{\partial x_3} f_2}{\frac{\partial \psi}{\partial x_3} b_2}.$$

Розглянемо тепер побудову керування, яке забезпечить реалізацію програмного руху резервуару, якщо переміщення резервуару та його швидкість повинні змінюватись за законами $\psi_1(x_3, t) = 0$ та $\psi_2(x_4, t) = 0$ відповідно. Отримаємо необхідні похідні за часом від заданих програм руху, щоб можна було їх зв'язати з рівняннями руху резервуару

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi_1}{dt} &= \frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} \dot{x}_3 = \frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} x_4, \\
\frac{d^2\psi_1}{dt^2} &= \frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} \right) x_4 + \frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} \dot{x}_4 = \\
&= \frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} \right) x_4 + \frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} (f_2 + b_2 u) \equiv R_1(\psi, x, t), \quad (3.87)
\end{aligned}$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = \frac{\partial\psi_2}{\partial t} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_4} \dot{x}_4 = \frac{\partial\psi_2}{\partial t} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_4} (f_2 + b_2 u) \equiv R_2(\psi, x, t) \quad (3.88)$$

де $R_i(\psi_1, \psi_2, x, t)$, $i=1,2$ – довільна функція від збурення ψ_1 , ψ_2 , поточних координат x_1 , x_2 , x_3 , x_4 та часу, з виконанням умови $R_1(0,0,x,t) = R_2(0,0,x,t) = 0$. Задачу мінімізації функціоналу $L = u^2$ при наявності умови (3.87), (3.88) зводимо до задачі безумовної мінімізації функціоналу з множниками Лагранжа λ_1 та λ_2

$$\begin{aligned}
L^* &= u^2 + \lambda_1 \left(\frac{d\psi_1}{dt} - R(\psi_1, \psi_2, x, t) \right) + \lambda_2 \left(\frac{d^2\psi_2}{dt^2} - R(\psi_1, \psi_2, x, t) \right) = \\
&= u^2 + \lambda_1 \left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} \right) x_4 + \frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} (f_2 + b_2 u) - R_1(\psi, x, t) \right) + \\
&+ \lambda_2 \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial t} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_4} (f_2 + b_2 u) - R_2(\psi, x, t) \right).
\end{aligned}$$

Використовуючи відому процедуру мінімізації, отримаємо систему рівнянь відносно шуканих змінних u , λ_1 та λ_2

$$\frac{\partial L^*}{\partial u} = 2u + \lambda_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} b_2 + \lambda_2 \frac{\partial\psi_2}{\partial x_4} b_2 = 0,$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} b_2 u = R_1(\psi_1, \psi_2, x, t) - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} \right) x_4 - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} f_2,$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2 u = R_2(\psi_1, \psi_2, x, t) - \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} f_2,$$

яку за допомогою позначень

$$p_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} b_2, \quad c_1 = R_1(\psi_1, \psi_2, x, t) - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} \right) x_4 - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} f_1,$$

$$p_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2, \quad c_2 = R_2(\psi_1, \psi_2, x, t) - \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} f_2,$$

можна записати у матричній формі

$$\begin{bmatrix} 2 & p_1 & p_2 \\ p_1 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Програмне керування як розв'язок цієї системи має вигляд

$$u = \frac{p_1 c_1 + p_2 c_2}{p_1^2 + p_2^2}$$

або в розгорнутому вигляді

$$u = - \frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} b_2 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} \right) b_2 x_4 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} \right)^2 b_2 f_1}{\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} b_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2 \right)^2} -$$

$$- \frac{\frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} b_2 - \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} \right)^2 b_2 f_2}{\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} b_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2 \right)^2} +$$

$$+ \frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} b_2 R_1(\psi_1, \psi_2, x, t) + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2 R_2(\psi_1, \psi_2, x, t)}{\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} b_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2 \right)^2}$$

Побудуємо алгоритм керування, яке забезпечить реалізацію програмного руху резервуару, у якого переміщення та швидкість зв'язані в одному співвідношенні $\psi(x_3, x_4, t) = 0$. Отримаємо повну похідну за часом від заданого закону руху, щоб можна було його зв'язати з шуканим керуванням

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \dot{x}_3 + \frac{\partial \psi}{\partial x_4} \dot{x}_4 = \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} x_4 + \frac{\partial \psi}{\partial x_4} (f_2 + b_2 u) \equiv R(\psi, x, t). \end{aligned} \quad (3.89)$$

де $R(\psi, x, t)$ – довільна функція від збурення ψ , поточних координат x_1, x_2, x_3, x_4 та часу, з виконанням умови $R(0, x, t) = 0$. Задачу мінімізації функціоналу $L = u^2$ при наявності умови (3.89) зводимо до задачі безумовної мінімізації функціоналу з множником Лагранжа λ

$$\begin{aligned} L^* &= u^2 + \lambda \left(\frac{d\psi}{dt} - R(\psi, x, t) \right) = \\ &= u^2 + \lambda \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} x_4 + \frac{\partial \psi}{\partial x_4} (f_2 + b_2 u) - R(\psi, x, t) \right). \end{aligned}$$

Використовуючи відому процедуру мінімізації, отримаємо систему рівнянь відносно шуканих змінних u та λ

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^*}{\partial u} &= 2u + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_4} b_2 = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_4} b_2 u &= R(\psi, x, t) - \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x_3} x_4 - \frac{\partial \psi}{\partial x_4} f_2, \end{aligned}$$

та керування як її розв'язок

$$u = \frac{R(\psi, x, t) - \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x_3} x_4 - \frac{\partial \psi}{\partial x_4} f_2}{\frac{\partial \psi}{\partial x_4} b_2}.$$

Розглянемо тепер побудову керування, яке забезпечить реалізацію програмного руху резервуару, якщо швидкість повинна змінюватись за законом $\psi_2(x_4, t) = 0$, а амплітуда вільної поверхні рідини обмежена законом руху $\psi_1(x_1, x_2, t) = 0$. Отримаємо відповідні похідні за часом від програм руху, щоб можна було їх зв'язати з рівняннями руху резервуару

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \\ &= \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} (f_1 + b_1 u) \equiv R_1(\psi_1, \psi_2, x, t), \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_2}{dt} &= \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} \dot{x}_4 = \\ &= \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} (f_2 + b_2 u) \equiv R_2(\psi_1, \psi_2, x, t). \end{aligned} \quad (3.91)$$

Задачу мінімізації функціоналу $L = u^2$ при наявності умов (3.90), (3.91) зводимо до задачі безумовної мінімізації при наявності двох множників Лагранжа λ_1 та λ_2 для функціоналу якості

$$L^* = u^2 + \lambda_1 \left(\frac{d\psi_1}{dt} - R_1(\psi_1, \psi_2, x, t) \right) + \lambda_2 \left(\frac{d\psi_2}{dt} - R_2(\psi_1, \psi_2, x, t) \right).$$

Після виконання процедури мінімізації отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 2u + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} b_1 + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2 = 0,$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} b_1 u = R_1(\psi_1, \psi_2, x, t) - \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} f_1,$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2 u = R_2(\psi_1, \psi_2, x, t) - \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} f_2,$$

яку за допомогою позначень

$$p_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} b_1, \quad c_1 = R_1(\psi_1, \psi_2, x, t) - \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} f_1,$$

$$p_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2, \quad c_2 = R_2(\psi_1, \psi_2, x, t) - \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} f_2,$$

можна записати у матричній формі

$$\begin{bmatrix} 2 & p_1 & p_2 \\ p_1 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Програмне керування як розв'язок цієї системи має вигляд

$$u = \frac{p_1 c_1 + p_2 c_2}{p_1^2 + p_2^2}$$

або в розгорнутому вигляді

$$u = - \frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} b_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} b_1 x_2 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \right)^2 b_1 f_1}{\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} b_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2 \right)^2} -$$

$$- \frac{\frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} b_2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} \right)^2 b_2 f_2}{\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} b_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2 \right)^2} +$$

$$+ \frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} b_1 R_1(\psi_1, \psi_2, x, t) + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2 R_2(\psi_1, \psi_2, x, t)}{\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} b_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2 \right)^2}.$$

Побудуємо керування, яке забезпечить реалізацію програмного руху резервуару, якщо переміщення резервуару повинно змінюватись за законом $\psi_2(x_3, t) = 0$, а амплітуда вільної поверхні рідини обмежена законом руху $\psi_1(x_1, x_2, t) = 0$. Отримаємо відповідні похідні за часом від програм руху, щоб можна було їх зв'язати з рівняннями руху резервуару

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \\ &= \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} (f_1 + b_1 u) \equiv R_1(\psi_1, \psi_2, x, t), \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_2}{dt} &= \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \dot{x}_3 = \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} x_4, \\ \frac{d^2\psi_2}{dt^2} &= \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \right) x_4 + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} (f_2 + b_2 u) \equiv R_2(\psi, x, t). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Задачу мінімізації функціоналу $L = u^2$ при наявності умов (3.92), (3.93) зводимо до задачі безумовної мінімізації при наявності двох множників Лагранжа λ_1 та λ_2 для функціоналу якості

$$L^* = u^2 + \lambda_1 \left(\frac{d\psi_1}{dt} - R_1(\psi_1, \psi_2, x, t) \right) + \lambda_2 \left(\frac{d\psi_2}{dt} - R_2(\psi_1, \psi_2, x, t) \right).$$

Після виконання процедури мінімізації отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 2u + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} b_1 + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} b_2 = 0,$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} b_1 u = R_1(\psi_1, x, t) - \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} f_1,$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2 u = R_2(\psi_2, x, t) - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \right) x_4 - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} f_2.$$

яку за допомогою позначень

$$p_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} b_1, \quad c_1 = R_1(\psi_1, x, t) - \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} f_1,$$

$$p_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2, \quad c_2 = R_2(\psi_2, x, t) - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \right) x_4 - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} f_2,$$

можна записати у матричній формі

$$\begin{bmatrix} 2 & p_1 & p_2 \\ p_1 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Програмне керування як розв'язок цієї системи має вигляд

$$u = \frac{p_1 c_1 + p_2 c_2}{p_1^2 + p_2^2}$$

або в розгорнутому вигляді

$$u = - \frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} b_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} b_1 x_2 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \right)^2 b_1 f_1}{\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} b_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2 \right)^2} -$$

$$- \frac{\frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} b_2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} b_2 x_4 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \right)^2 b_2 f_2}{\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} b_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2 \right)^2} +$$

$$+ \frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} b_1 R_1(\psi_1, \psi_2, x, t) + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} b_2 R_2(\psi_1, \psi_2, x, t)}{\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} b_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2 \right)^2}.$$

Побудуємо керування, яке забезпечить реалізацію програмного руху резервуару, якщо всі фазові змінні системи пов'язані в одному законі програмного руху, тобто $\psi(x_1, x_2, x_3, x_4, t) = 0$. Отримаємо повну похідну за часом від програми руху, щоб можна було її зв'язати з рівняннями руху резервуару

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \dot{x}_3 + \frac{\partial \psi}{\partial x_4} \dot{x}_4 = \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} (f_1 + b_1 u) + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} x_4 + \frac{\partial \psi}{\partial x_4} (f_2 + b_2 u) \equiv R(\psi, x, t) \end{aligned} \quad (3.94)$$

Задачу мінімізації функціоналу $L = u^2$ при наявності умови (3.94) зводимо до задачі безумовної мінімізації функціоналу з множником Лагранжа λ

$$\begin{aligned} L^* &= u^2 + \lambda \left(\frac{d\psi}{dt} - R(\psi, x, t) \right) = u^2 + \lambda \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} (f_1 + b_1 u) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} x_4 + \frac{\partial \psi}{\partial x_4} (f_2 + b_2 u) - R(\psi, x, t) \right). \end{aligned}$$

Використовуючи відому процедуру мінімізації, отримаємо систему рівнянь відносно шуканих змінних u та λ

$$\frac{\partial L^*}{\partial u} = 2u + \lambda \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} b_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_4} b_2 \right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} b_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_4} b_2 \right) u = R(\psi, x, t) - \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} f_1 -$$

$$- \frac{\partial \psi}{\partial x_3} x_4 - \frac{\partial \psi}{\partial x_4} f_4;$$

та керування як її розв'язок

$$u = \frac{R(\psi, x, t) - \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} f_1 - \frac{\partial \psi}{\partial x_3} x_4 - \frac{\partial \psi}{\partial x_4} f_4}{\frac{\partial \psi}{\partial x_2} b_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_4} b_2}.$$

Оберемо для побудови керування лінійну модель та конкретизуємо вигляд системи рівнянь (3.82) – (3.83). Лінеаризована система рівнянь (2.17) – (2.18) для першої антисиметричній формі a_1 та горизонтального переміщення резервуару ε_y має вигляд

$$\ddot{a}_1 \beta_{11}^q + B_1^{1y} \ddot{\varepsilon}_y + g N_1 a_1 = 0, \quad \rho B_1^{1y} \ddot{a}_1 + (M_T + M_F) \ddot{\varepsilon}_y = 0,$$

або, з урахуванням позначень, $\nu_1 = \frac{B_1^{1y}}{\beta_{11}^q}$, $\nu_2 = \rho B_1^{1y}$, $\omega_1^2 = \frac{g N_1}{\beta_{11}^q}$, може бути

представлена як

$$\ddot{a}_1 + \nu_1 \ddot{\varepsilon}_y + \omega_1^2 a_1 = 0, \quad \nu_2 \ddot{a}_1 + M \ddot{\varepsilon}_y = F_y,$$

і, нарешті, приведена до нормальної форми Коші

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda_1 x_1 + \beta_1 u,$$

$$\dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = \lambda_2 x_1 + \beta_2 u,$$
(3.95)

з позначеннями $\lambda_1 = -\frac{M\omega_1^2}{M - \nu_1\nu_2}, \quad \lambda_2 = \frac{\nu_2\omega_1^2}{M - \nu_1\nu_2}, \quad \beta_1 = -\frac{\nu_1}{M - \nu_1\nu_2},$

$$\beta_2 = \frac{1}{M - \nu_1\nu_2}.$$

Для лінійної моделі (3.95) обчислимо керування для обраних програмних законів руху резервуару:

А) швидкість резервуару змінюється за законом $\psi(x_4, t) \equiv x_4 - V(t) = 0$, тоді програмне керування має вигляд

$$u = \frac{1}{\beta_2} \dot{V}(t) - \frac{\lambda_2}{\beta_2} x_1 + \frac{1}{\beta_2} R_1(\psi, x, t);$$

Б) амплітуда коливань вільної поверхні рідини змінюється за заданим законом $\psi_1(x_1, t) \equiv x_1 - l(t) = 0$ (для «ідеального» випадку керування рідина взагалі нерухома, «затверділа», тобто $\psi_1(x_1, t) \equiv x_1 = 0$), швидкість резервуару змінюється за заданим законом $\psi(x_4, t) \equiv x_4 - V(t) = 0$, тоді програмне керування має вигляд

$$u = \frac{\beta_2 \dot{V}(t) + \beta_1 \ddot{l}(t)}{\beta_1^2 + \beta_2^2} - \frac{\beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2} x_1 + \frac{\beta_1 R_1(\psi_1, x, t) + \beta_2 R_2(\psi_2, x, t)}{\beta_1^2 + \beta_2^2};$$

В) амплітуда коливань вільної поверхні рідини обмежена $|x_1| \leq A$, тобто існує залежність $\psi_1(x_1, x_2) \equiv x_1 + A \tanh(\mu x_2) = 0$, швидкість резервуару змінюється за заданим законом $\psi_2(x_4, t) \equiv x_4 - V(t) = 0$, тоді програмне керування має вигляд

$$u = \frac{\beta_2 \dot{V}(t) \cosh^4(\mu x_2) - (A^2 \mu^2 \beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2 \cosh^4(\mu x_2)) x_1 - A \mu \beta_1 \cosh^2(\mu x_2) x_2}{A^2 \mu^2 \beta_1^2 + \beta_2^2 \cosh^4(\mu x_2)} + \frac{A \mu \beta_1 \cosh^2(\mu x_2) R_1(\psi_1, x, t) + \beta_2 \cosh^4(\mu x_2) R_2(\psi_2, x, t)}{A^2 \mu^2 \beta_1^2 + \beta_2^2 \cosh^4(\mu x_2)}.$$

На функції $R_1(\psi_1, x, t)$ та $R_2(\psi_2, x, t)$ накладається тільки одне обмеження, а саме $R_i(\psi_i, x, t) = 0, i = 1, 2$. Таким чином, ці функції описують керування зі зворотним зв'язком, яке відключається, коли програмні закони руху

виконуються точно, тобто коли $\psi_i(x,t) = 0$, $i = 1,2$. Структура функцій $R_1(\psi_1, x, t)$ та $R_2(\psi_2, x, t)$ обирається окремо для кожної конкретної задачі для забезпечення заданих характеристик руху системи, зокрема, асимптотичної стійкості, якості перехідного процесу, величини відхилень програмного руху від заданих значень, часу перехідних процесів і т.д.

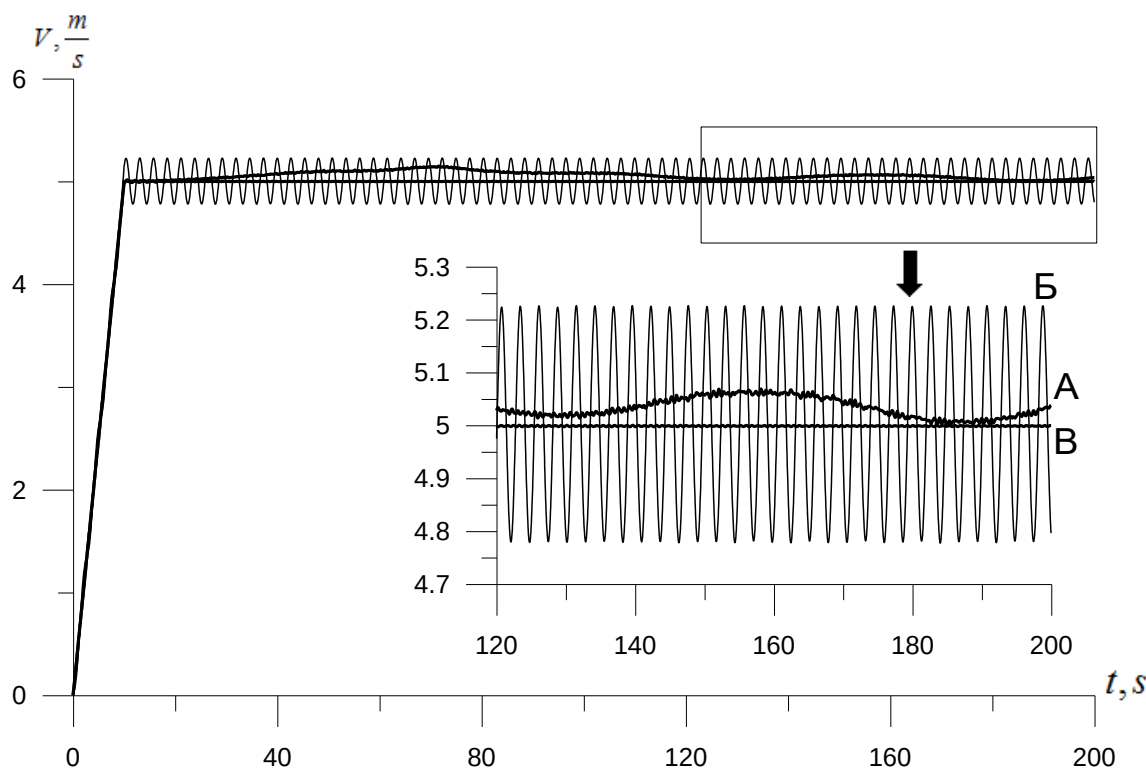


Рис. 3.14. Швидкість резервуару з рідиною при наявності керування на основі принципу Гауса в задачі розгону і далі рівномірного руху із заданою швидкістю («комфортний» рух)

Розглянемо задачу, коли необхідно за допомогою керування (активної зовнішньої сили) $u = F_y$ забезпечити резервуару з рідиною спочатку набір швидкості від 0 до 5 м/с за 10 сек, а потім рівномірний рух з досягнутою швидкістю 5 м/с («комфортний» рух). На Рис. 3.14 показані результати моделювання, коли керування рухом забезпечується на основі заданих програм руху А, Б та В відповідно. Для моделі В в законі програмного руху вільної поверхні рідини $\psi_1(x_1, x_2) \equiv x_1 + A \tanh(\mu x_2) = 0$ обрані значення параметрів $A = 0,1R$, $\mu = 2$. Прямокутником на основному графіку відмічений інтервал часу від 120 до 200 секунд і окремо показаний у збільшеному масштабі. Як можна бачити з графіків, «комфортний» рух

резервуару може бути забезпечений при використанні будь-якого керування (програма А, Б та В), однак найменша похибка виконання програмного руху досягається у випадку нелінійного керування (програма В). Нелінійність керування обумовлена нелінійністю програми руху вільної поверхні рідини. При цьому нелінійний закон керування забезпечує як рівномірний рух резервуару із заданою швидкістю, так і обмеження на амплітуду коливань вільної поверхні рідини. Лінійні керування, побудовані на основі програм А та Б, дають більш велику похибку, ніж у випадку В, при цьому величина цієї похибки тим більше, чим більшу кількість програм руху треба задовольнити.

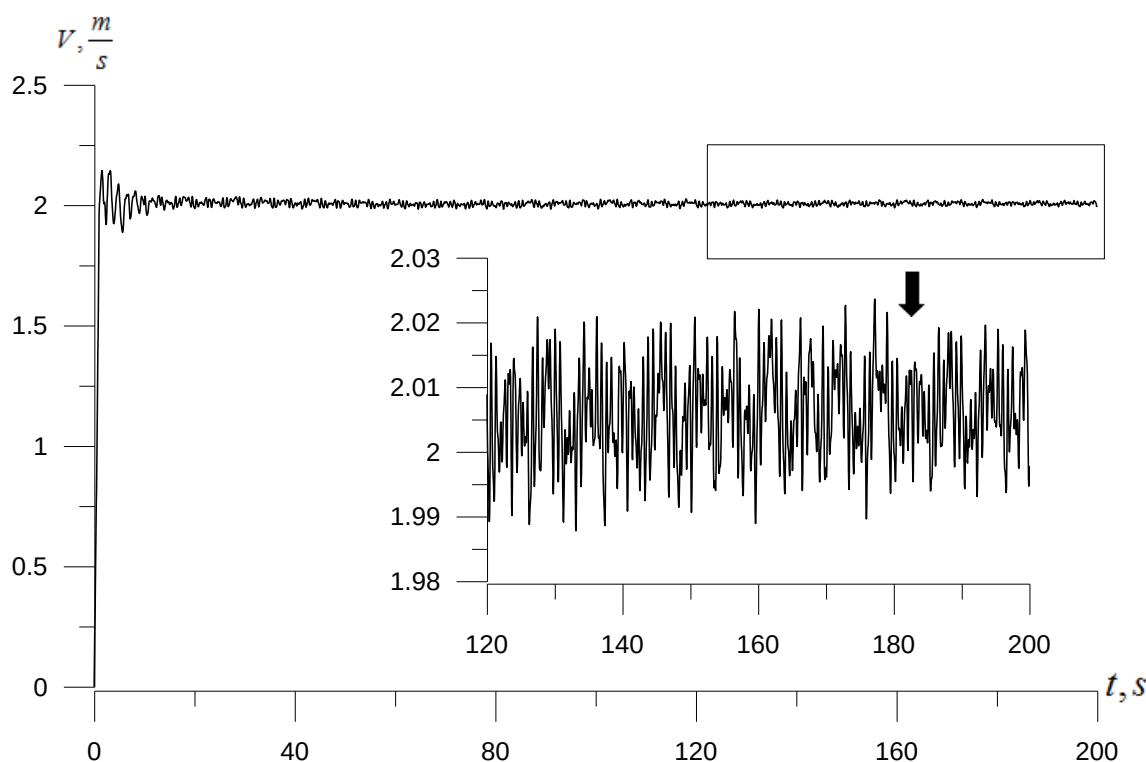


Рис. 3.15. Швидкість резервуару з рідиною при наявності керування на основі принципу Гауса в задачі розгону і далі рівномірного руху із заданою швидкістю (високо інтенсивні навантаження)

Розглянемо тепер випадок руху резервуару при наявності високо інтенсивних навантажень, коли необхідно за допомогою керування забезпечити набір швидкості від 0 до 2 м/с за 1 сек, а потім рівномірний рух з досягнутою швидкістю 2 м/с. Як показують обчислювальні експерименти, лінійне керування, побудоване на основі програм руху А та Б, взагалі не

придатне для реалізації програмного закону при високо інтенсивних навантаженнях на резервуар. Тому на Рис. 3.15 показаний результат моделювання, коли керування рухом забезпечується на основі нелінійної моделі В. Для програмного руху вільної поверхні рідини $\psi_1(x_1, x_2) \equiv x_1 + A \tanh(\mu x_2) = 0$ обрані значення параметрів $A = 0,3R$, $\mu = 1$. Як можна бачити з графіків, отримане керування дозволяє забезпечити рух резервуару за заданим законом із похибкою, прийнятною для практичних застосувань ($\sim 1\%$).

Висновки до розділу

Розглянуто побудову в аналітичному вигляді керування резервуаром (активної зовнішньої сили) для забезпечення руху резервуару за заданим законом. Дослідження динаміки системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» під дією обчисленого керування проводилося на основі нелінійної багатомодової (до 12 форм коливань) дискретної моделі, яка побудована на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського.

Для розробки алгоритмів керування використовувалось декілька підходів: 1) побудова керування із зворотним зв'язком на основі вимірювання збурень (відхилень від закону програмного руху); 2) підхід, пов'язаний з можливістю компенсації головного вектору сил тиску рідини на стінки резервуару; 3) підхід на основі варіаційного принципу найменшого примушення Гауса, який дозволяє реалізувати в системі задані програмні закони руху та забезпечити мінімізацію енерговитрат на керування.

Для перевірки якості побудованого керування були розв'язані наступні задачі: 1) розгін резервуару із нерухомого положення за заданий час до необхідної швидкості і далі його рівномірний рух з цією швидкістю; 2) гальмування резервуару, який рухається рівномірно із заданою швидкістю,

за заданий час до повної зупинки; 3) переміщення резервуару представляє собою заданий гармонічний закон.

Керування зі зворотним зв'язком побудовано на основі лінійної системи у збуреннях, при цьому фазовими координатами є відхилення від програмного закону руху. Перетворення систему у канонічну відносно фазових координат форму дозволило значно спростити аналітичну процедуру побудови керування на основі модального підходу або співставлення з еталонною системою. Для шуканого класу систем отримані також в аналітичному вигляді формули для коефіцієнтів квадратичного функціоналу якості. Ці коефіцієнти можуть бути обрані таким чином, щоб керування забезпечило одночасно необхідну якість перехідних процесів в системі та мінімум квадратичного функціоналу.

Керування зі зворотним зв'язком на основі лінійної системи у збуреннях може бути використано тільки для забезпечення «комфортних» рухів резервуару, тобто при відсутності великих збурень вільної поверхні рідини. Однак, на відміну від методу компенсації, накопичення похибки при використанні керування зі зворотним зв'язком відсутнє, тому виконання програмного закону руху резервуару може здійснюватись на тривалих інтервалах часу.

Керування на основі компенсації головного вектору сил тиску рідини на стінки резервуару дозволяє зупинити резервуар при будь-яких початкових умовах. При цьому у заданий момент часу резервуар повністю зупиняється, а рідина продовжує коливання, не впливаючи на рух резервуару. Це означає, що метод компенсації доцільно використовувати при переміщеннях конструкцій з рідиною в межах відповідних технологічних або виробничих процесів. При розгоні резервуару керування в режимі компенсації можливо забезпечити набір швидкості при будь-яких інтенсивних впливах. Однак наявність запізнення призводить до накопичення похибки на тривалих інтервалах часу

Керування, побудоване на основі варіаційного принципу найменшого примушення Гауса з використанням лінійних моделей руху системи та лінійних програмних законів, може бути застосовано тільки для забезпечення «комфортних» рухів резервуару, тобто при відсутності великих (в нелінійному діапазоні амплітуд) збурень вільної поверхні рідини. Для забезпечення руху резервуару при наявності високо інтенсивних навантажень на основі варіаційного принципу найменшого примусу Гауса розроблено нелінійні закони керування, які забезпечують необхідну для практики точність виконання програмних законів руху та мінімізацію енерговитрат на керування системою в цілому.

4. ОСОБЛИВОСТІ ДИНАМІКИ РЕЗЕРВУАРУ З РІДИНОЮ ПРИ НАЯВНОСТІ ДОДАТКОВИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТА ФІЗИЧНИХ ФАКТОРІВ

Використання варіаційних методів та математичних моделей, побудованих на їх основі, дозволили вивчити багато явищ, які супроводжують формування динамічних властивостей поведінки тіл з рідиною. Проте наявні публікації свідчать про обмеженість досліджень за такими напрямками. Перше, врахування фактору сумісності, тобто наявності взаємного впливу рухомості рідини та тіла-носія. Переважна більшість досліджень ґрунтується на моделі заданого руху конструкції. Проте при сумісному русі найбільш важливим є те, що в системі змінюються частоти коливань, а тому області прояву резонансів стають іншими (п. 2.2 – 2.5). Це докорінно змінює прояв нелінійних властивостей. Друге, наявні в системі капілярні сили та дисипація мають селективну дію, тобто, демпфування та обмеження коливань, яке вносять ці фактори, стають більш суттєвими, чим вище частота форми коливань. Як і перерозподіл частот, ці фактори теж суттєво змінюють прояв нелінійних властивостей системи. Третє, дослідження нелінійних задач для випадків порожнин нециліндричної форми дотепер супроводжується значними проблемами. Справа в тому, що на відміну від циліндричної область при підйомі рідини вище рівня незбуреної вільної поверхні рідини не здійснює рух вздовж стінки, а може значно відійти від неї чи перетинати її. Це відбувається через те, що при формулюванні задачі відповідна інформація про форму стінок над незбуреною вільною поверхнею взагалі не враховується. Водночас це призводить до того, що для збуреного руху рідини починають порушуватися умови розв'язності задачі Неймана для рівняння Лапласа [118, 311], що згодом проявляється в нестійкості обчислювальних процедур. Тому даний розділ присвячений дослідженню перехідних процесів в механічній системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею» при наявності додаткових геометричних та фізичних факторів:

- узагальнення задачі Фарадея в полі слабких гравітаційно-капілярних сил (п. 4.1);
- вимушені коливання циліндричного резервуара, частково заповненого рідиною, під дією горизонтальної гармонічної сили (п. 4.2);
- вимушені коливання циліндричного резервуара, частково заповненого рідиною, під дією горизонтальної гармонічної сили при наявності узагальненої дисипації (п. 4.3);
- вимушені коливання циліндричного резервуара, частково заповненого рідиною, під дією горизонтальної гармонічної сили або горизонтального імпульсу сили в умовах гравітаційних полів слабкої інтенсивності (п. 4.4);
- вимушені коливання резервуара у формі тіла обертання (параболоїд обертання під дією горизонтальної гармонічної сили та конус під дією вертикальної гармонічної сили) (п. 4.5).

4.1. Узагальнена задача Фарадея при наявності слабких гравітаційно-капілярних ефектів

Із системи (2.17) – (2.19) нелінійних звичайних диференціальних рівнянь узагальненої математичної моделі сумісного руху системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» випишемо окремо рівняння, які описують динаміку системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» при наявності слабких гравітаційно-капілярних сил

$$\begin{aligned}
& \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \beta_{ri}^q + \sum_j a_j \gamma_{rij}^q + \sum_{i,j} a_i a_j \delta_{rijk}^q \right\} + \ddot{\varepsilon} \cdot \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i \vec{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{B}_{rijk}^4 \right\} = \\
& = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_i a_j (\gamma_{ijr}^q - 2\gamma_{rij}^q) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k (\delta_{ijk}^q - 2\delta_{rijk}^q) - \frac{1}{2} g \alpha_r^s - g N_r a_r + \\
& + \dot{\varepsilon} \cdot \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i (\vec{B}_{ir}^2 - \vec{B}_{ri}^2) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j 2(\vec{B}_{ijr}^3 - \vec{B}_{rij}^3) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k 3(\vec{B}_{ijk}^4 - \vec{B}_{rijk}^4) \right\} - \\
& - \frac{\sigma}{\rho} \sum_i a_i 2\beta_{ir}^k - \frac{\sigma}{\rho} \sum_{i,j} a_i a_j (\gamma_{ijr}^k + 2\gamma_{irj}^k) -
\end{aligned}$$

$$-\frac{\sigma}{\rho} \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k 2(\delta_{rijk}^k + \delta_{ijk r}^k) - \frac{\sigma}{\rho} \cos \theta_1 \lambda_r \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{(M_T + M_F)} \left\{ \sum_i \ddot{a}_i \left[\vec{B}_i^1 + \sum_j a_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right] \right\} + \ddot{\vec{\varepsilon}} = \\ & = \frac{\vec{F}}{(M_T + M_F)} - g\vec{k} - \frac{\rho}{(M_T + M_F)} \left\{ \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k 2\vec{B}_{ijk}^3 \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Рівняння (4.1) описують динаміку амплітуд коливань вільної поверхні рідини, а рівняння (4.2) – динаміку резервуара, який рухається поступально, проте ці рівняння залежні і включають сили взаємодії між компонентами. Тепер сумісний рух резервуара з рідиною повністю характеризується незалежними узагальненими координатами a_i та $\vec{\varepsilon}$.

Нехай резервуар радіусу $R = 0,3$ м частково заповнений рідиною до глибини $H = R$, при цьому співвідношення мас резервуару та рідини дорівнює $M_T = 0,25M_F$. Фізичні константи для рідини ρ та σ обирались із таблиць для води. Параметричний резонанс розглядаємо в полі слабких гравітаційних сил із прискоренням $g = 0,001g_0$ ($g_0 = 9,81$ м/с² – прискорення вільного падіння на поверхні Землі), коли гравітаційно-капілярні ефекти суттєво впливають на динаміку системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею». Амплітуда початкового збурення вільної поверхні рідини на стінці резервуару задана по першій антисиметричній формі та дорівнює $a_1(0) = 0,01R$. Приймаємо, що резервуар здійснює вертикальні коливання вздовж вісі Oz за заданим законом $\varepsilon_z = H_z \cos(pt)$ із амплітудою $H_z = 0,02R$ та частотою $p = 2\omega_1$, де ω_1 – частота коливань вільної поверхні рідини при обраних параметрах системи (в Табл. 4.1 наведені значення власних частот форм коливань в залежності від значень параметрів – коефіцієнту поверхневого натягу σ та контактного кута θ_1).

Слід зазначити, що при відсутності початкового збурення вільної поверхні рідини остання залишається незбуреною (плоскою) при будь-якій

амплітуді і частоті коливання резервуару, що є свідченням коректності отриманої математичної моделі системи «резервуар – рідина».

Табл. 4.1

Форма коливань	$\omega_n, \text{с}^{-1}$					
	a	b	c	d	e	
	$\sigma = 0, \theta_1 = 90^\circ$	$\sigma = 0,073, \theta_1 = 90^\circ$	$\sigma = 0,073, \theta_1 = 85^\circ$	$\sigma = 0,073, \theta_1 = 80^\circ$	$\sigma = 0,073, \theta_1 = 75^\circ$	$\sigma = 0,073, \theta_1 = 70^\circ$
ψ_1, ψ_2	0,23927	0,27073	0,26873	0,26633	0,26356	0,26046
ψ_3	0,35381	0,52643	0,52526	0,52177	0,51608	0,50841
ψ_4, ψ_5	0,31533	0,41966	0,41627	0,41209	0,40722	0,40177
ψ_6	0,47897	1,07840	1,07479	1,06420	1,04722	1,02477
ψ_7, ψ_8	0,37056	0,58112	0,57611	0,56949	0,56146	0,55225
ψ_9, ψ_{10}	0,41753	0,76421	0,76220	0,75650	0,74734	0,73514
ψ_{11}, ψ_{12}	0,52833	1,40031	1,39391	1,37563	1,34700	1,30992

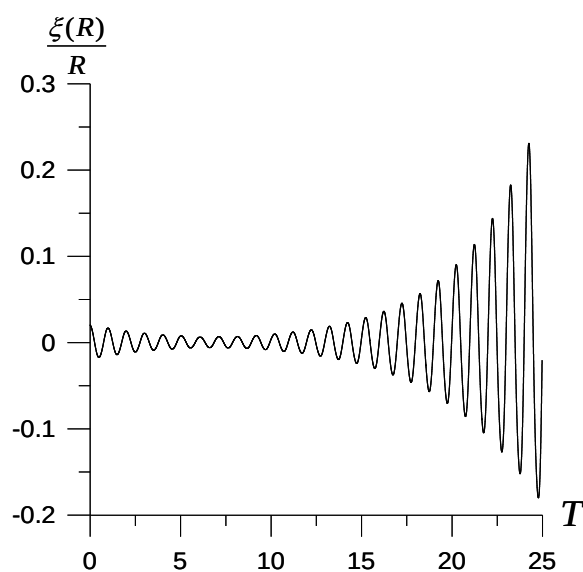
На Рис. 4.1 наведені амплітуди збурень вільної поверхні рідини $\zeta(R)$ на стінці резервуару для значень коефіцієнту поверхневого натягу σ та контактного кута θ_1 , наведених в Табл. 4.1. Як видно з Рис. 4.1, врахування в системі сил поверхневого натягу по поверхні рідини (Рис. 4.1б) і по контуру контакту (Рис. 4.1в-е) призводить до появи на графіку зрізів і зламів, причому при значеннях контактного кута 80° , 75° і 70° (Рис. 4.1г-е) коливання мають іррегулярний характер. Це обумовлено збільшенням кількості ненульових доданків у виразі

$$A_{ri} = \beta_{ri}^q + \sum_j a_j \gamma_{rij}^q + \sum_{i,j} a_i a_j \delta_{rijk}^q$$

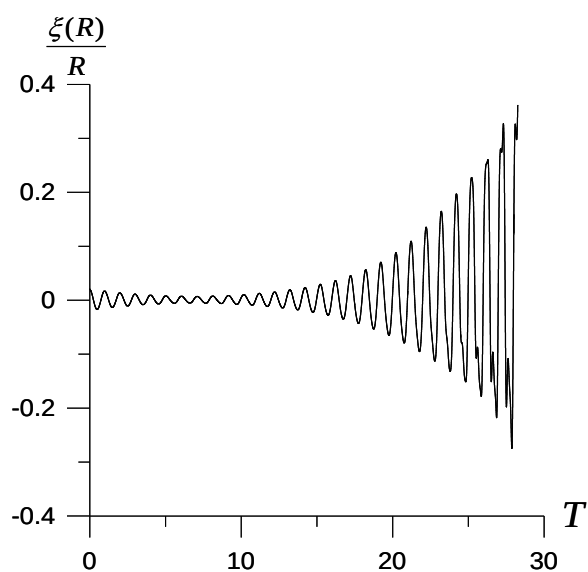
в рівнянні (4.1), що призводить до поглиблення нелінійних зв'язків між формами коливань. Зокрема, при значеннях контактного кута 80° , 75° і 70° (Рис. 4.1г-е) спостерігається істотне зменшення амплітуди вільної поверхні на стінці резервуару (фактично, вихід з режиму параметричного резонансу), викликане дисперсією (перерозподілом) енергії від нижчих форм коливань до вищих.

Врахування в системі сил поверхневого натягу по поверхні рідини (Рис. 4.1б) і по контуру контакту (Рис. 4.1в-е) призводить до більш швидкого виходу системи на нелінійний режим коливань. Якщо для випадку

відсутності сил поверхневого натягу спостерігається тільки вихід на нелінійний режим коливань за 25 періодів (Рис. 4.1а), то наявність сил поверхневого натягу по поверхні рідини (Рис. 4.1б) призводить до параметричного резонансу вже з амплітудами $\xi(R) \sim 0,35R$. Додаткове врахування сил поверхневого натягу по контуру контакту при контактному куті $\theta_1 = 85^\circ$ (Рис. 4.1в) призводить фактично до двократного збільшення амплітуди вільної поверхні рідини на стінці резервуару в порівнянні з випадком $\theta_1 = 90^\circ$. Подальше зменшення значення контактного кута сприяє швидшому включенню осесиметричних форм коливань в процес нелінійного хвилеутворення, що і призводить до виходу коливань вільної поверхні рідини із зони параметричного резонансу (Рис. 4.1г-е). Таким чином, вплив сил поверхневого натягу на характер утворення і розвитку параметричного резонансу в системі носить нелінійний характер. Внесення сил поверхневого натягу по поверхні рідини і по контуру контакту при кутах, близьких до 90° , призводить до параметричного резонансу, а подальше зменшення контактного кута сприяє перерозподілу енергії між формами коливань від нижчих до вищих, з одного боку, і від антисиметричних до осесиметричних, з іншого боку, що забезпечує в системі вихід із зони параметричного резонансу.



а) $\sigma = 0, \theta_1 = 90^\circ$



б) $\sigma = 0,073, \theta_1 = 90^\circ$

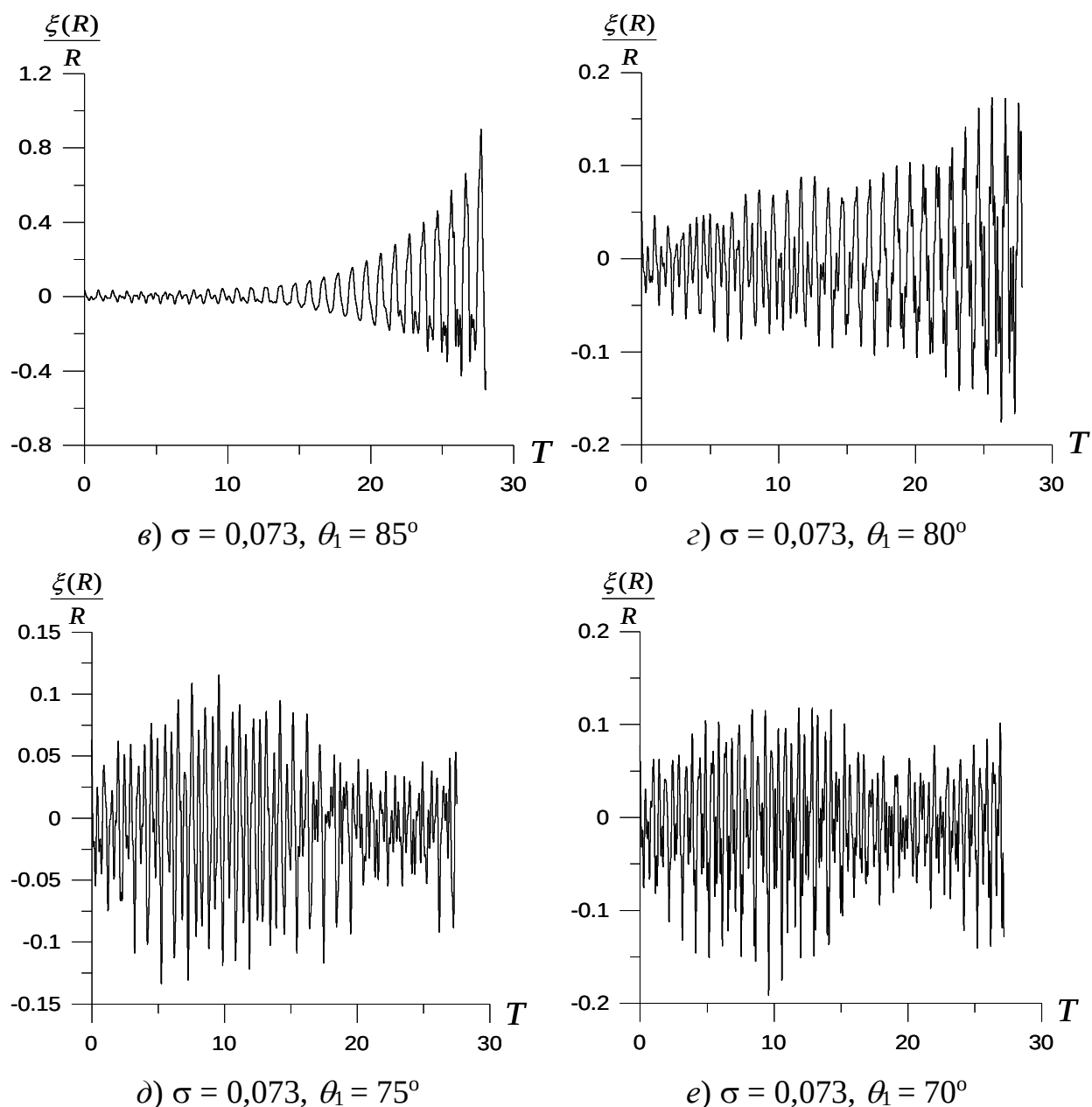
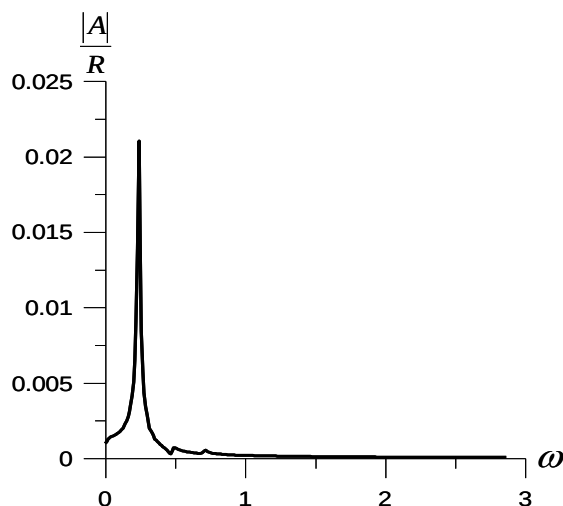


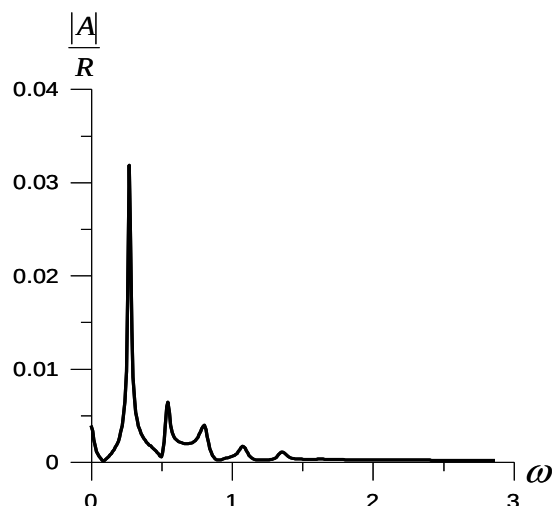
Рис. 4.1. Збурення на стінці вільної поверхні рідини в полі слабких гравітаційно-капілярних сил при параметричних коливаннях

Явище енергообміну між формами коливань, яке спостерігається в системі при врахуванні сил поверхневого натягу, можна продемонструвати, вивчаючи частотний спектр збурення вільної поверхні рідини на стінці резервуару (Рис. 4.2а-е). Регулярність коливального процесу при відсутності сил поверхневого натягу (Рис. 4.1а) обумовлена наявністю тільки однієї домінуючої гармоніки, яка співпадає з частотою першої антисиметричної форми ψ_1 (Рис. 4.2а). Врахування сил поверхневого натягу по поверхні рідини (Рис. 4.2б) і по контуру контакту (Рис. 4.2в-е)

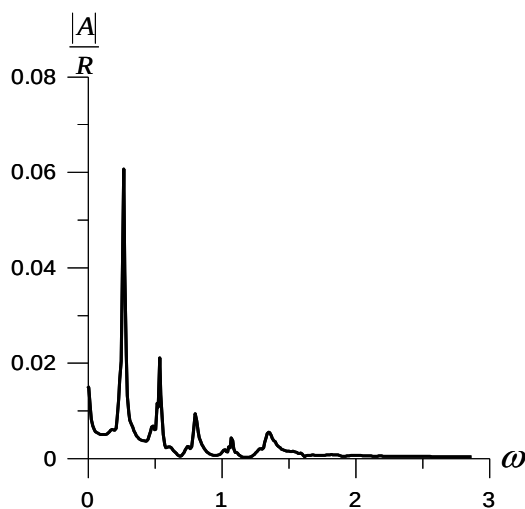
призводить до появи гармонік на частотах інших форм коливань – осесиметричних ψ_3 і ψ_6 , других антисиметричних ψ_{10} і ψ_{12} , а також на комбінаційних частотах (значення яких є лінійними комбінаціями власних частот коливань системи). Наявність гармоніки на нульовій частоті для контактного кута $\theta_1 < 90^\circ$ обумовлено наявністю постійної складової ξ_0 – початкового викривлення вільної поверхні рідини $\xi(r, \theta, t) = \xi_0(r) + \Delta\xi(r, \theta, t)$, причому її амплітуда тим більше, чим менше значення контактного кута θ_1 . Частотний спектр добре ілюструє явище іррегулярності коливань для випадку $\theta_1 < 90^\circ$ (Рис. 4.2в-е) – при зменшенні контактного кута він все більше наближається до безперервного (на відміну від випадку Рис. 4.2а, для якого характерний яскраво виражений пік на одній частоті).



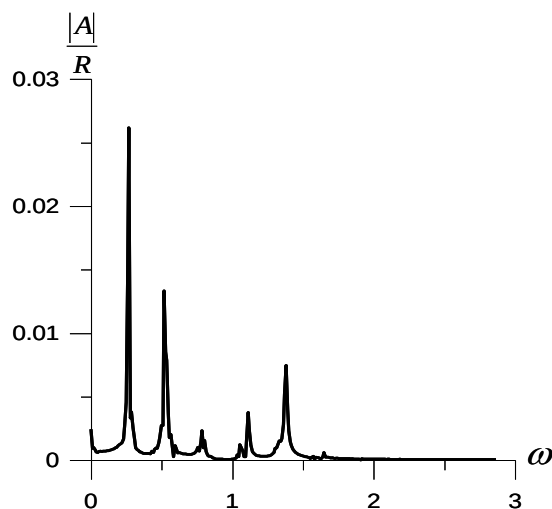
а) $\sigma = 0, \theta_1 = 90^\circ$



б) $\sigma = 0,073, \theta_1 = 90^\circ$



в) $\sigma = 0,073, \theta_1 = 85^\circ$



г) $\sigma = 0,073, \theta_1 = 80^\circ$

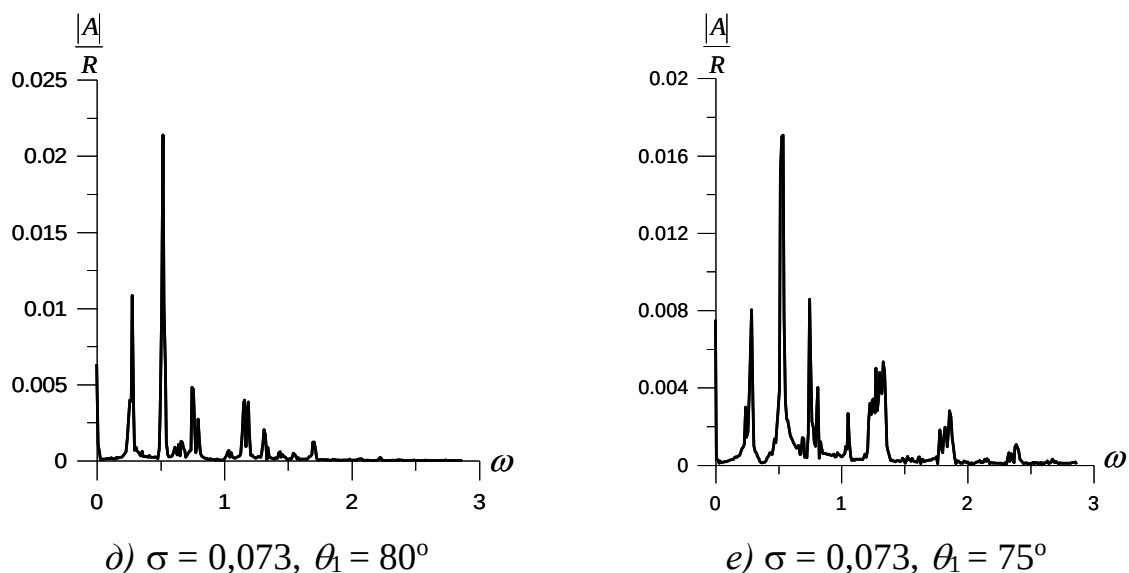


Рис. 4.2. Частотний спектр параметричних коливань вільної поверхні рідини в полі слабких гравітаційно-капілярних сил для різних значень контактного кута

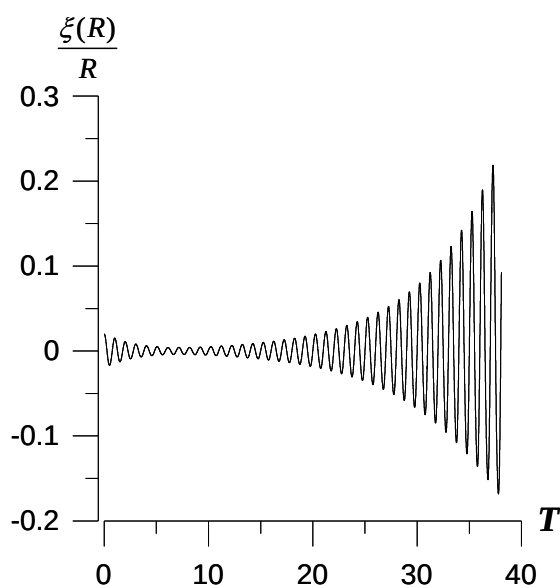
Табл. 4.2

Форма коливань	α_r^p					
	а	б	в	г	д	е
	$\sigma = 0,$ $\theta_1 = 90^\circ$	$\sigma = 0,073,$ $\theta_1 = 90^\circ$	$\sigma = 0,073,$ $\theta_1 = 85^\circ$	$\sigma = 0,073,$ $\theta_1 = 80^\circ$	$\sigma = 0,073,$ $\theta_1 = 75^\circ$	$\sigma = 0,073,$ $\theta_1 = 70^\circ$
ψ_1, ψ_2	0,000138	0,000129	0,000130	0,000130	0,000131	0,000132
ψ_3	0,000101	0,000078	0,000078	0,000078	0,000079	0,000079
ψ_4, ψ_5	0,000100	0,000084	0,000084	0,000085	0,000085	0,000086
ψ_6	0,000142	0,000074	0,000074	0,000075	0,000076	0,000077
ψ_7, ψ_8	0,000104	0,000076	0,000077	0,000077	0,000078	0,000079
ψ_9, ψ_{10}	0,000116	0,000074	0,000074	0,000075	0,000075	0,000076
ψ_{11}, ψ_{12}	0,000170	0,000075	0,000076	0,000077	0,000078	0,000080

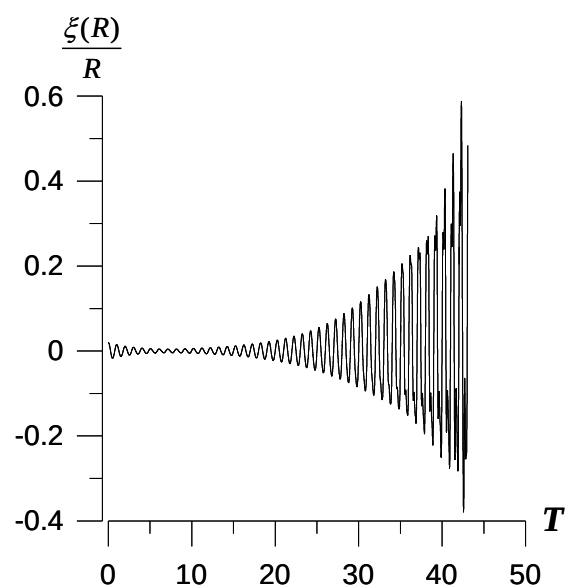
Для всіх реальних механічних систем характерна наявність дисипації, що приводить до загасання вільних коливань і істотно зменшує амплітуди вимушених або параметричних коливань. Урахування дисипації в моделі ідеальної рідини в даній задачі може бути здійснено шляхом внесення узагальненої в'язкості – членів $\alpha_r^p \dot{a}_r$ в рівняннях (2.17), припускаючи, що сила тертя пропорційна швидкості. Коефіцієнти в'язкості α_r^p для кожної форми коливань розраховані відповідно до методики роботи [196–199] і наведені в Табл. 4.2.

Як зазначено в роботах [1, 56, 197–199], експерименти свідчать про те, що для умов наземної гравітації коефіцієнти в'язкості є заниженими, тому для внесення узагальненої в'язкості, яка буде помітно впливати на коливальні процеси, їх зазвичай необхідно збільшити в 2-3 рази.

Для співставлення результатів наземного моделювання з прикладом ослабленої гравітації необхідно витримати критерії подібності і розмірності. Відомо, що безрозмірним критерієм подібності, який відображає співвідношення між силами гравітації і силами в'язкості в середовищі, є число Галілея $Ga = \frac{g\rho^2 R^3}{\eta^2} = \frac{gR^3}{\nu^2}$, де η – динамічна в'язкість, а $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ – кінематична в'язкість рідини. У випадку гравітації, ослабленої в 1000 разів у порівнянні із наземною, задоволення критерію подібності вимагає зменшення кінематичної в'язкості ν і, відповідно, коефіцієнтів α_r^p , в $\sqrt{1000} \approx 31,62$ раз. Однак, у цьому випадку внесок сил в'язкості при значному зниженні абсолютних значень кінетичної і потенційної енергії системи значно зростає, тому отримані значення коефіцієнтів, навпаки, є сильно завищеними.



а) $\sigma = 0, \theta_1 = 90^\circ$



б) $\sigma = 0,073, \theta_1 = 90^\circ$

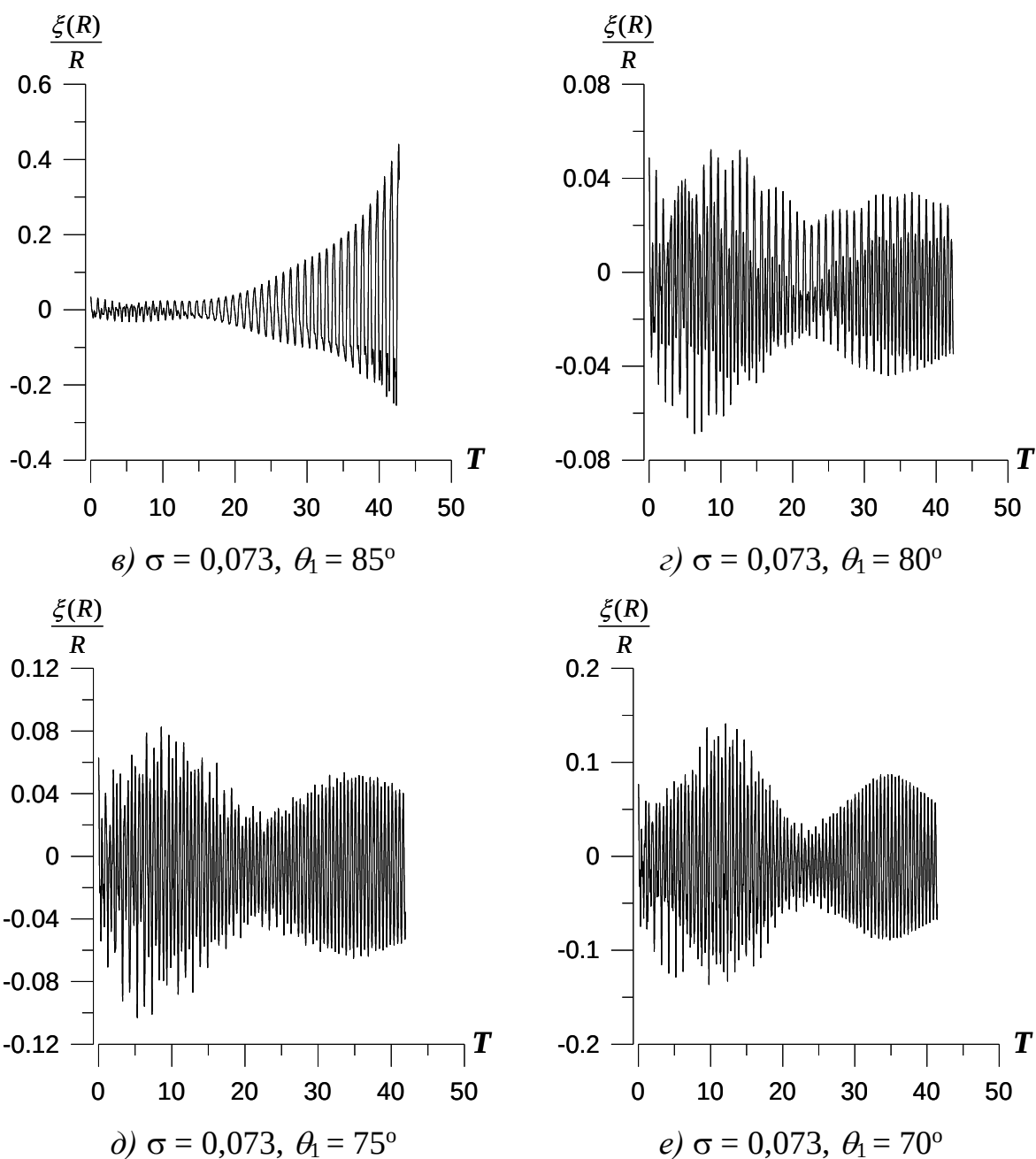
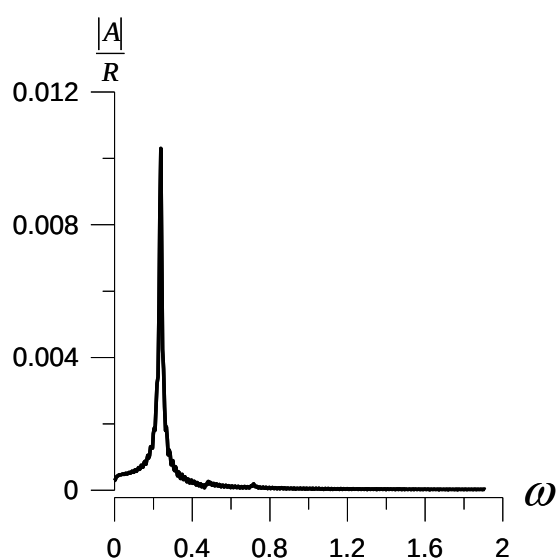


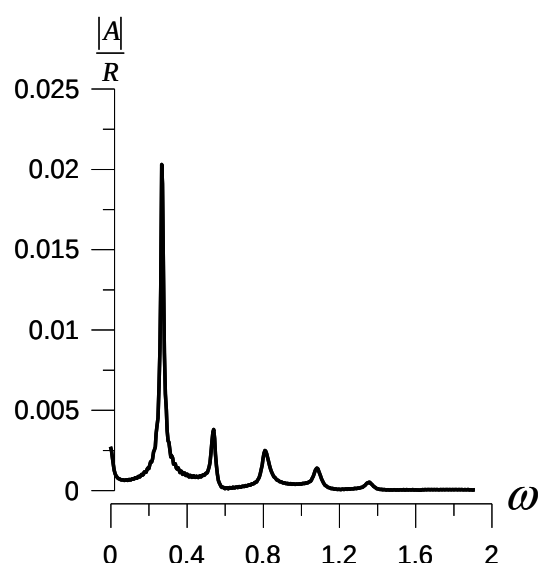
Рис. 4.3. Збурення на стінці вільної поверхні рідини в полі слабких гравітаційно-капілярних сил при параметричних коливаннях та узагальненій дисипації

Тому за основу співставлення було прийнято подібність по швидкості у випадку виходу процесу на усталений режим по амплітуді коливань в умовах слабкої гравітації. За даними обчислювальних експериментів коефіцієнти в'язкості α_r^p в даному дослідженні були прийняті зменшеними в $3,11 \cdot 31,62 \approx 100$ разів.

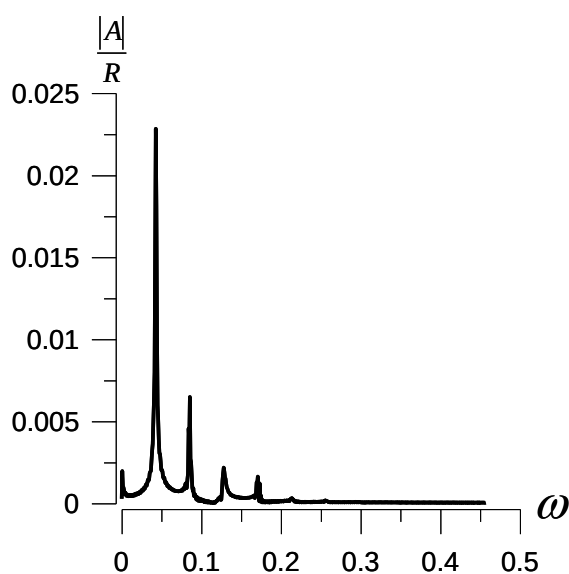
Порівняння амплітуди збурення вільної поверхні рідини $\xi(R)$ на стінці резервуару для значень σ і контактного кута θ_1 , наведених в Табл. 4.2, при наявності (Рис. 4.3) і відсутності (Рис. 4.1) узагальненої в'язкості показує, що вихід на нелінійний режим коливань (з великими амплітудами) здійснюється в обох випадках приблизно за один і той самий час – 20-25 періодів коливань першої антисиметричної форми ψ_1 . Однак графіки зміни у часі $\xi(R)$ при наявності узагальненої дисипації менше порізані, мають більш регулярний характер – це говорить про загальне зменшення кількості гармонік, які суттєво впливають на характер коливального процесу.



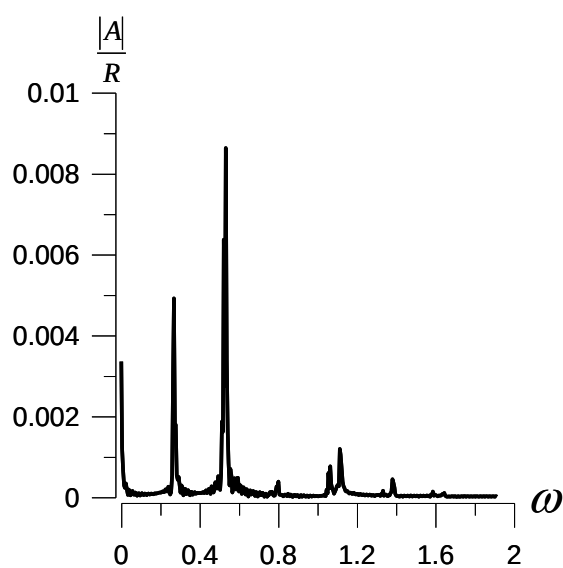
а) $\sigma = 0, \theta_1 = 90^\circ$



б) $\sigma = 0,073, \theta_1 = 90^\circ$



в) $\sigma = 0,073, \theta_1 = 85^\circ$



г) $\sigma = 0,073, \theta_1 = 80^\circ$

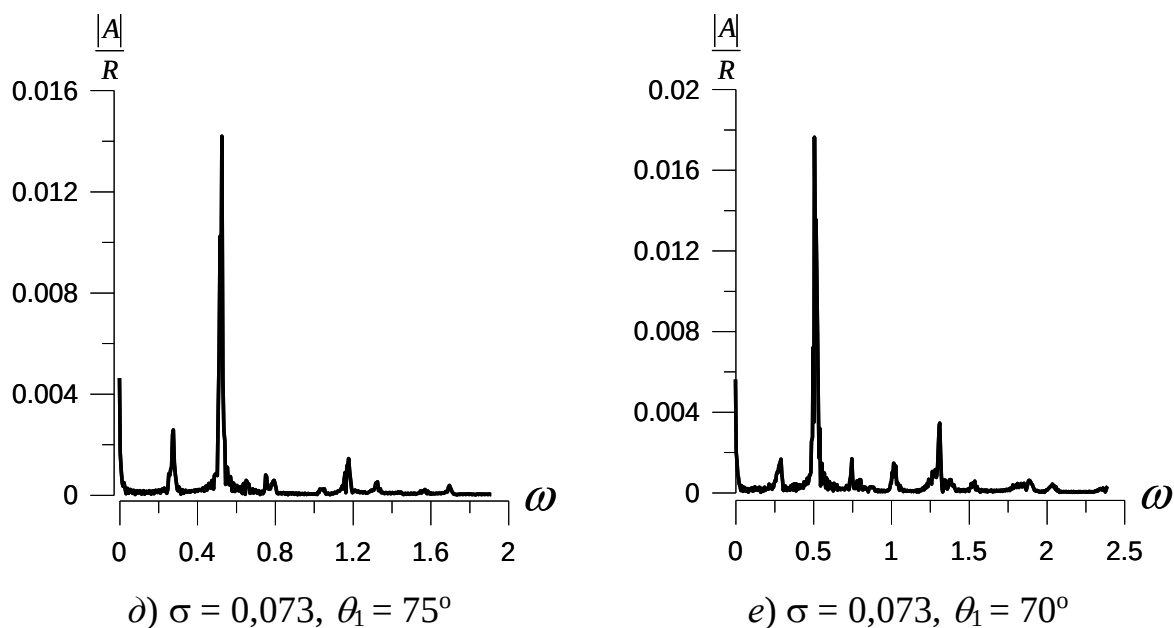


Рис. 4.4. Частотний спектр параметричних коливань вільної поверхні рідини в полі слабких гравітаційно-капілярних сил при наявності узагальненої дисипації

Крім того, внесення узагальненої дисипації в систему для випадку $\theta_1 \geq 85^\circ$ (Рис. 4.3г-е) призводить до яскраво вираженого поділу коливального процесу на дві складові – перехідний процес, який характеризується наявністю великої кількості гармонік, і сталі коливання, для яких характерна амплітудна модуляція.

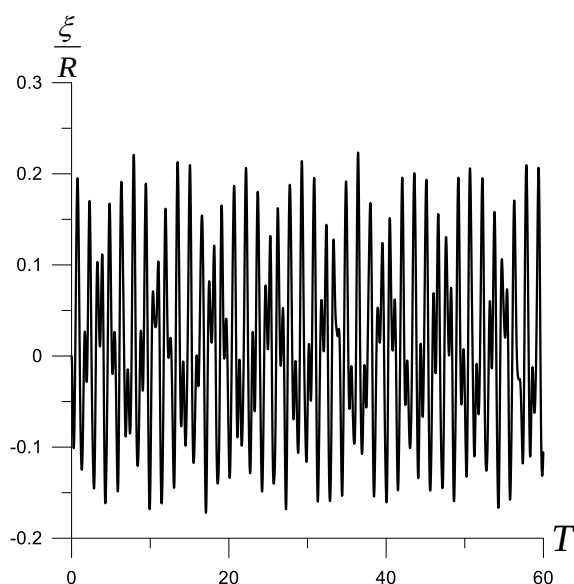
Узагальнена дисипація в системі грає роль своєрідного селективного фільтра – пригнічує або істотно знижує амплітуди гармонік на комбінаційних частотах, залишаючи після завершення перехідного процесу домінуючою для випадку $\theta_1 \geq 85^\circ$ гармоніку на частоті першої антисиметричної форми ψ_1 , а для випадку $\theta_1 < 85^\circ$ – на частоті першої осесиметричної форми ψ_3 і в два рази меншу за амплітудою на частоті першої антисиметричної форми ψ_1 (Рис. 4.4). Саме наявністю двох частот пояснюється ефект амплітудної модуляції, показаний для $\zeta(R)$ на Рис. 4.3г-е.

4.2. Вимушені коливання при відсутності сил поверхневого натягу та інтегральної дисипації

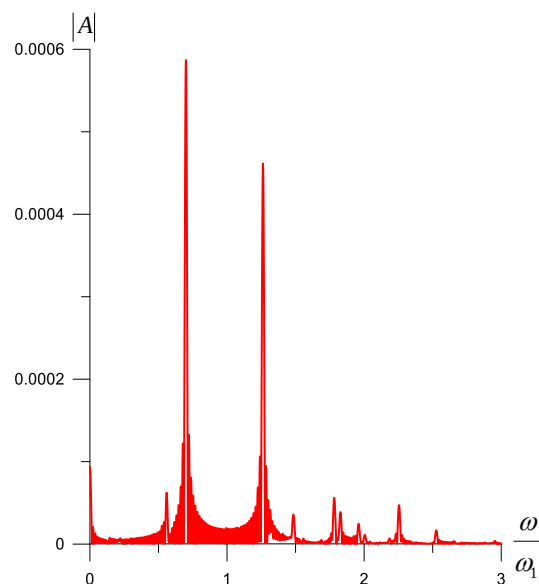
Розглянемо нелінійні коливання вільної поверхні рідини в резервуарі, коли співвідношення мас резервуару та рідини становить $M_T = 0,1M_F$, а

частота зовнішньої збуджуючої сили F міститься в дорезонансному діапазоні, тобто $p = 0,7\omega_1$, де $\omega_1 = 4,144$ Гц – частота першої антисиметричної форми ψ_1 . Резонансна (власна) частота системи при даному співвідношенні мас дорівнює $\omega_e = 1,2834\omega_1$.

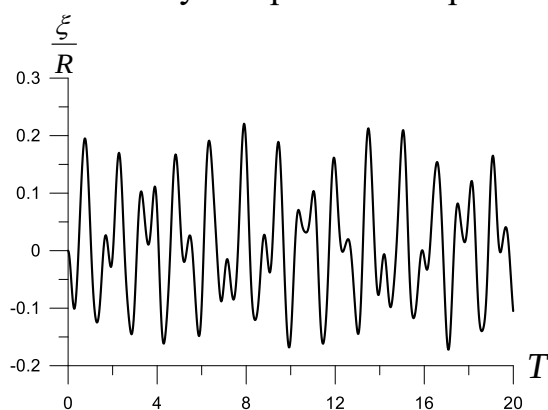
На Рис. 4.5а показано зміну у часі амплітуди збурення вільної поверхні рідини на стінці резервуару на повному інтервалі спостереження, на Рис. 4.5в та Рис. 4.5г представлені детальні графіки за перші (перехідний процес) і останні 20 періодів спостереження відповідно, на Рис. 4.5б – частотний спектр зміни у часі амплітуди збурення вільної поверхні рідини. Як можна бачити з Рис. 4.5, коливання вільної поверхні відбуваються з помітною амплітудною модуляцією при наявності середнього значення, яке змінюється у часі. Наявність амплітудної модуляції пояснюється присутністю в частотному спектрі (Рис. 4.5б) збурення вільної поверхні двох домінуючих піків практично рівною амплітуду на частотах $p = 0,7\omega_1$ (зовнішньої) і $p = 1,2834\omega_1$ (власної частоти системи). Наявність середнього значення, яке змінюється у часі, можна пояснити присутністю в частотному спектрі (Рис. 4.5б) гармонік на нульовий і низьких частотах ($\omega \leq 0,3\omega_1$), а також тим фактом, що верхня і нижня криві, які огинають амплітудну криву, не є дзеркальним відображенням один одного, відрізняючись максимумом амплітуди на всьому інтервалі спостереження не менше ніж на 30%, що є відображенням систематичного дрейфу середнього значення коливань, що обумовлені несиметричністю профілю хвиль вільної поверхні рідини. З частотного спектру (Рис. 4.5б) та графіків (Рис. 4.5в, г) видно наявність вищих спектральних гармонік, як на власних, так і на комбінаційних частотах на всьому інтервалі спостереження. Процес збурення вільної поверхні рідини ξ є квазіперіодичним, однак наявність середнього значення, яке змінюється у часі, та вищих гармонік з частотами, що не є кратними частоті зовнішнього збудження, дозволяють зробити висновок про відсутність в системі сталих коливань.



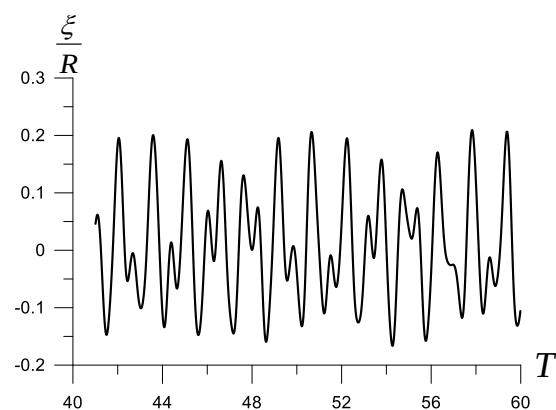
а) збурення вільної поверхні рідини на повному інтервалі спостереження



б) частотний спектр



в) збурення вільної поверхні рідини за перші 20 періодів спостереження



г) збурення вільної поверхні рідини за останні 20 періодів спостереження

Рис. 4.5. Збурення вільної поверхні рідини та частотний спектр при збудженні руху системи на дорезонансній частоті при $M_T = 0,1M_F$

Розглянемо нелінійні коливання вільної поверхні рідини в резервуарі, коли частота зовнішньої збуджуючої сили розташована в дорезонансному діапазоні при співвідношенні мас резервуару та рідини $M_T = M_F$ (Рис. 4.6) і $M_T = 10M_F$ (Рис. 4.7). Частота зовнішнього збудження залишається незмінною $p = 0,7\omega_1$, а власна частота системи дорівнює $\omega_e = 1,1295\omega_1$ і $\omega_e = 1,0202\omega_1$ відповідно. Аналогічно співвідношенню мас $M_T = 0,1M_F$, в системі в обох випадках спостерігаються коливання з яскраво вираженою амплітудною модуляцією та середнім значенням, яке змінюється у часі.

Аналіз частотного спектру (Рис. 4.6б та Рис. 4.7б) показує, що збільшення маси системи призводить лише до перерозподілу частот вищих гармонік, а самі вищі форми коливань істотно впливають на динаміку процесу та проявляються на графіку (Рис. 4.6а та Рис. 4.7а) у вигляді зламів і двогорбих піків. Аналогічно випадку резервуару малої маси, коливання вільної поверхні рідини у важкому резервуарі при збудженні руху в дорезонансному діапазоні частот не виходять на усталений режим.

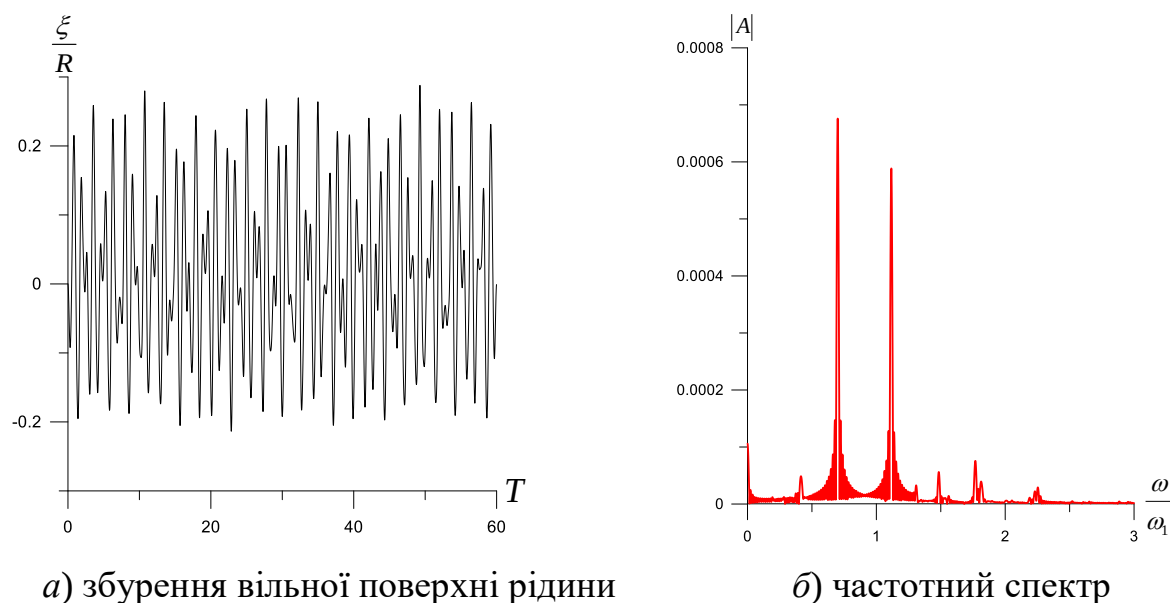


Рис. 4.6. Збурення вільної поверхні рідини та частотний спектр при збудженні руху системи на дорезонансній частоті при $M_T = M_F$

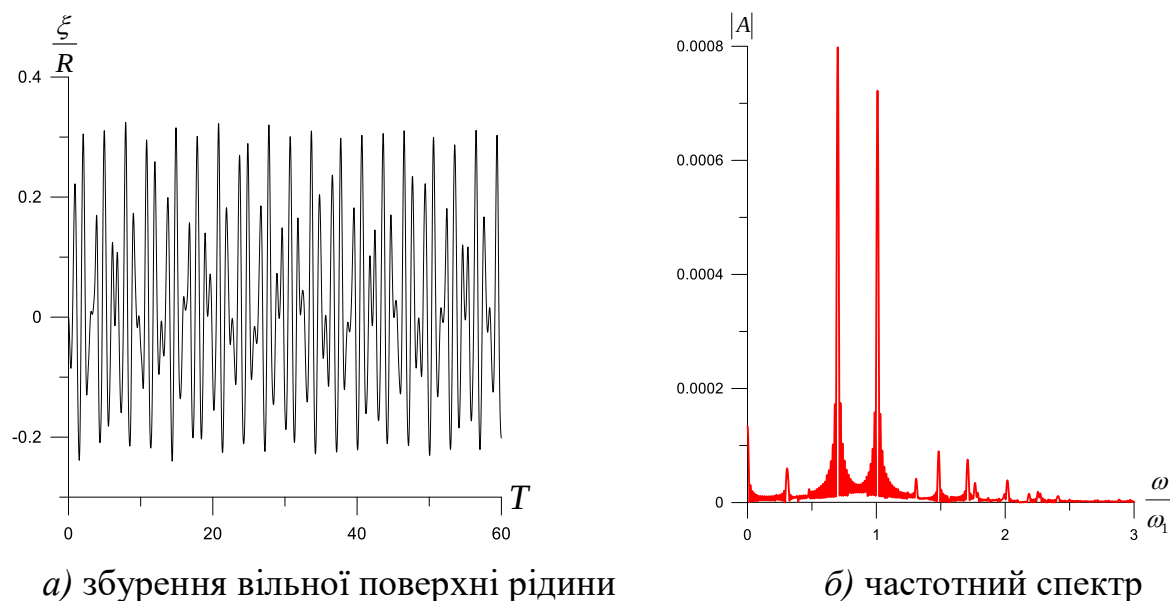


Рис. 4.7. Збурення вільної поверхні рідини та частотний спектр при збудженні руху системи на дорезонансній частоті при $M_T = 10M_F$

Розглянемо нелінійні коливання вільної поверхні рідини в резервуарі, коли частота зовнішньої збуджуючої сили розташована в резонансному діапазоні, тобто $p = 1,25\omega_1$, співвідношення мас резервуару і рідини також вважаємо $M_T = 0,1M_F$ (Рис. 4.8). З Рис. 4.8а можна бачити, що коливання вільної поверхні характеризуються яскраво вираженою амплітудною модуляцією та середнім значенням, яке сильно змінюється в часі. Це підтверджується також і структурою частотного спектру (Рис. 4.8б): всі домінуючі гармоніки групуються в околі частоти зовнішнього збудження, а гармоніки на низьких частотах ($\omega \leq 0,3\omega_1$) характеризуються амплітудами одного порядку з амплітудами домінуючих гармонік.

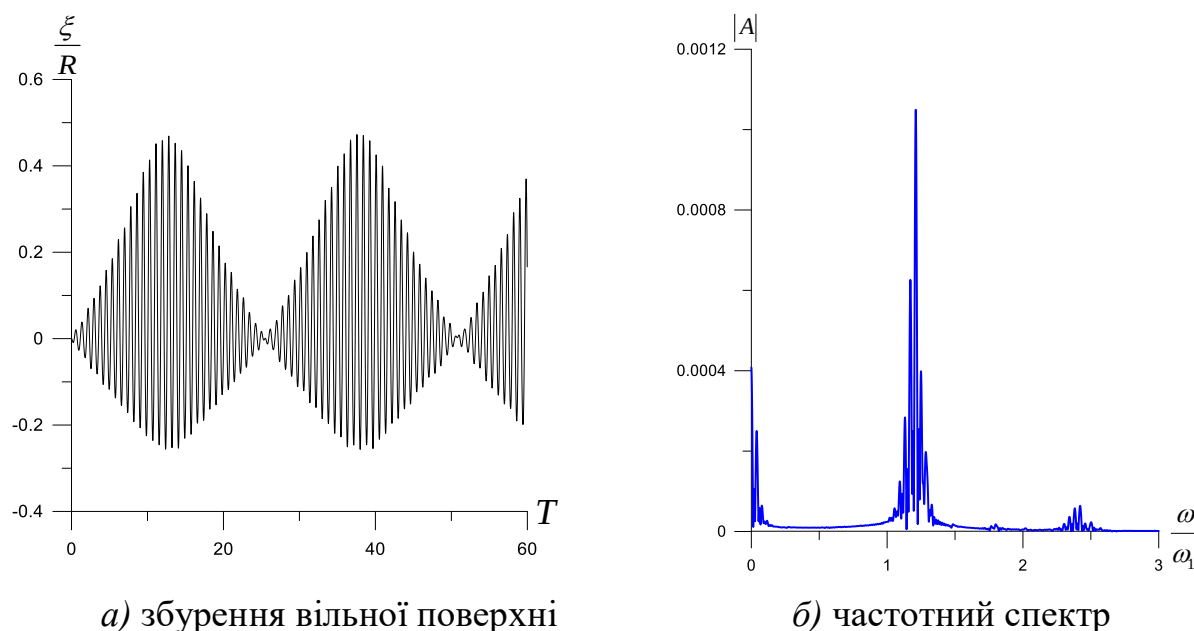
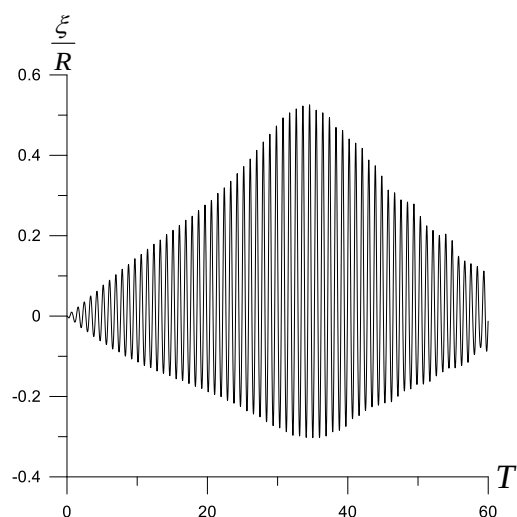


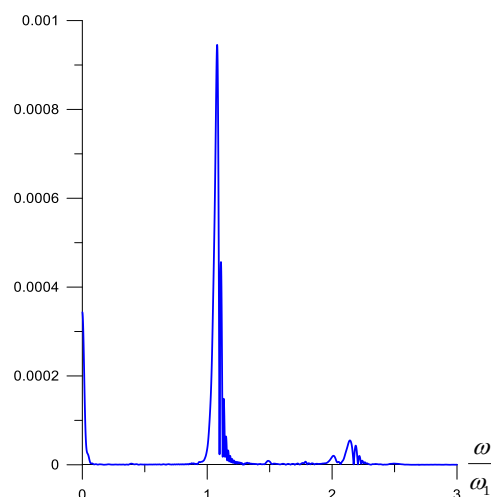
Рис. 4.8. Збурення вільної поверхні рідини та частотний спектр при збудженні руху системи на резонансній частоті при $M_T = 0,1M_F$

Збільшення маси резервуару призводить до того, що частоти домінуючих гармонік починають помітно відрізнятися, так що період обвідної амплітудної модуляції збільшується (Рис. 4.8 та Рис. 4.9). При цьому вплив гармонік на низьких частотах ($\omega \leq 0,3\omega_1$) поступово зменшується, проте для всіх трьох варіантів співвідношення мас залишається істотним (15-30% від повної енергії системи). Прояв вищих

форм коливань для всіх трьох випадків співвідношення мас практично відсутній; як можна бачити з частотних спектрів (Рис. 4.8б, Рис. 4.9б, Рис. 4.10б), внесок амплітуд вищих гармонік становить не більше 3-5%, а на графіках коливань вільної поверхні (Рис. 4.8а, Рис. 4.9а, Рис. 4.10а) відсутні характерні для вищих форм злами і двогорбі піки.

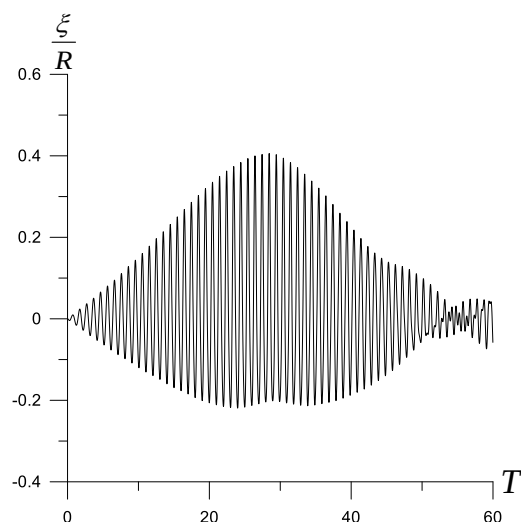


а) збурення вільної поверхні

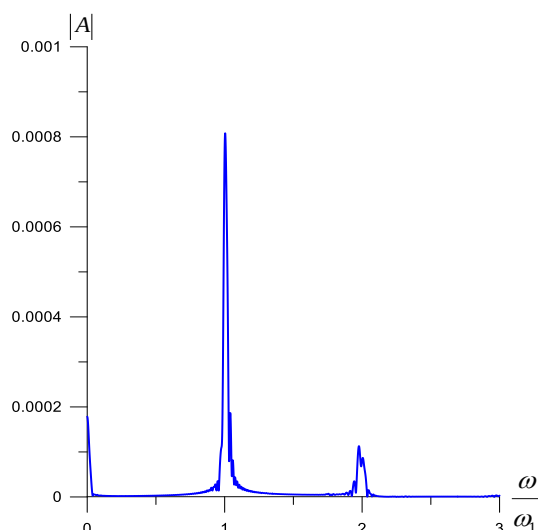


б) частотний спектр

Рис. 4.9. Збурення вільної поверхні рідини та частотний спектр при збудженні руху системи на резонансній частоті при $M_T = M_F$



а) збурення вільної поверхні



б) частотний спектр

Рис. 4.10. Збурення вільної поверхні рідини та частотний спектр при збудженні руху системи на резонансній частоті при $M_T = 10M_F$

Таким чином, у разі збудження системи в резонансному діапазоні частот вихід на усталений режим коливань вільної поверхні рідини в

класичному сенсі не відбувається, однак можна говорити про вихід на умовно усталений режим коливань, для якого характерні наявність двох-трьох домінуючих частот, яскраво виражена амплітудна модуляція і відсутність проявів вищих форм коливань.

Для резервуару великої маси характерне явище антирезонансу (Рис. 4.11) – амплітуда збурення вільної поверхні на деякому інтервалі часу спадає до рівня $\xi = (0,01 \div 0,03)R$, тобто значення амплітуди спадає майже на порядок (приблизно в 5-10 разів) і тримається протягом 3 періодів коливань першої антисиметричної форми.

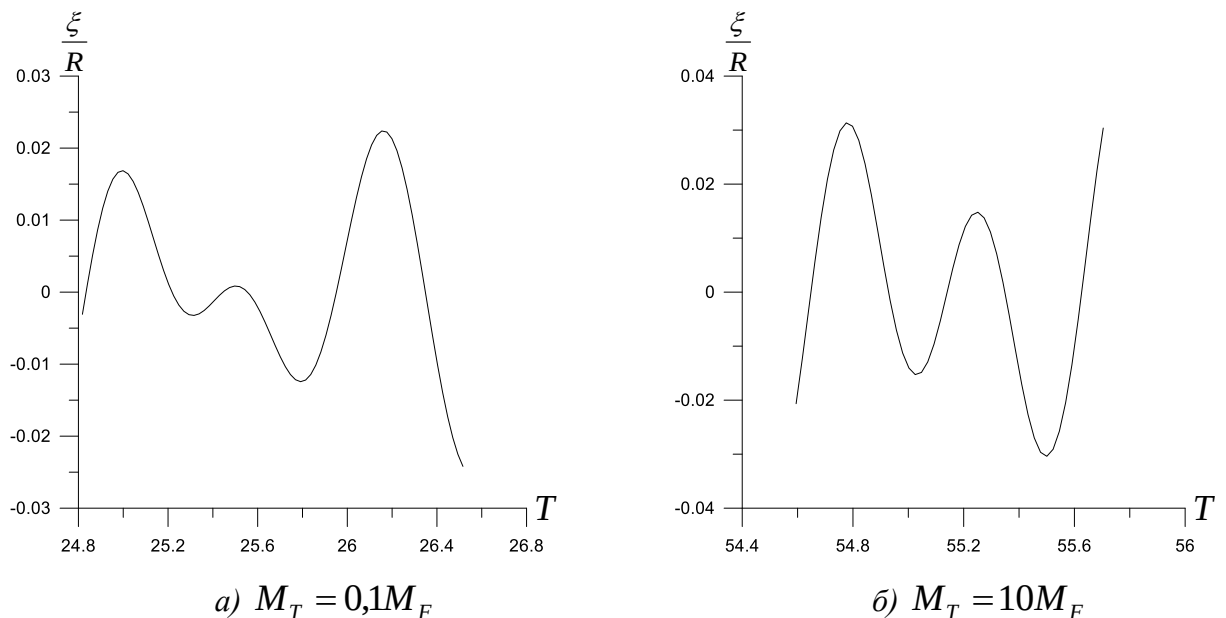
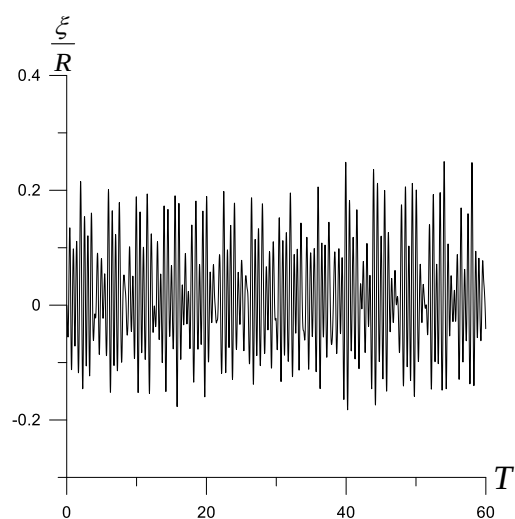


Рис. 4.11. Явище антирезонансу при збудженні руху системи на резонансній частоті

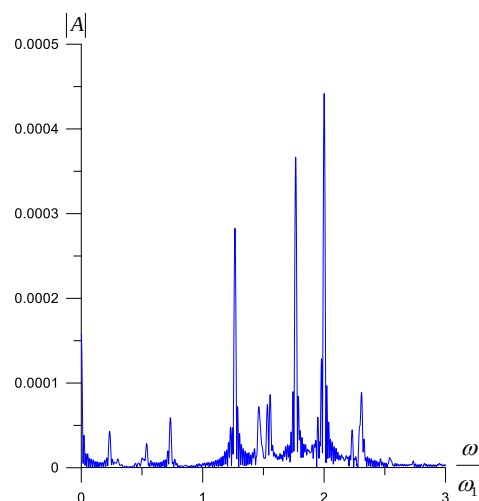
Розглянемо нелінійні коливання вільної поверхні рідини в резервуарі у випадку, коли частота зовнішньої збуджуючої сили F розташована в зарезонансному діапазоні, тобто $p = 2\omega_1$, співвідношення мас резервуару і рідини також вважаємо $M_T = 0,1M_F$ (Рис. 4.12). З Рис. 4.12а, в, г можна бачити, що коливання вільної поверхні рідини характеризуються яскраво вираженою амплітудною модуляцією та середнім значенням, яке сильно змінюється у часі. Це підтверджує також структура частотного спектру (Рис. 4.12б): в спектрі домінують декілька гармонік – на зовнішній частоті, на власній частоті системи, на комбінаційній частоті ($\omega = 1,8\omega_1$) та на

низьких частотах ($\omega \leq 0,3\omega_1$). Наявність гармонік на низьких частотах пояснює зміну в часі середнього значення. Поведінка системи в зарезонансної області збудження руху має деякі ознаки виходу на умовно усталений режим, коли спостерігається сильно модульований режим пакетів коливань, які є майже періодичними [259, 340, 365].

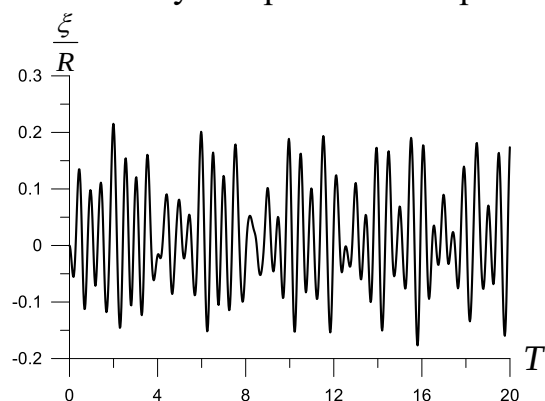
Поведінка системи аналогічна поведінці при збудженні руху в дорезонансній області – на коливання вільної поверхні істотно впливають вищі форми коливань, а збільшення маси резервуару не пригнічує вищі гармоніки спектру, а тільки забезпечує перерозподіл їх енергетичного внеску (Рис. 4.12б, Рис. 4.13б).



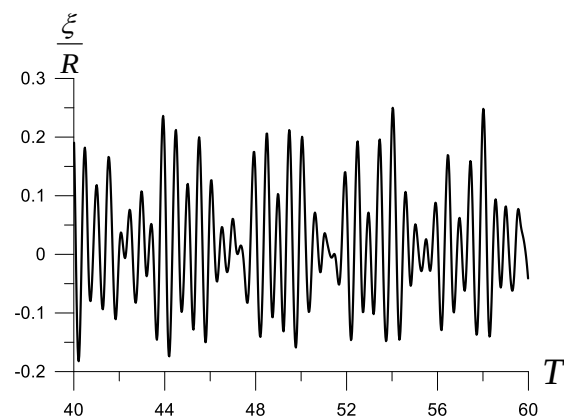
а) збурення вільної поверхні рідини на повному інтервалі спостереження



б) частотний спектр



в) збурення вільної поверхні рідини за перші 20 періодів спостереження



г) збурення вільної поверхні рідини за перші 20 періодів спостереження

Рис. 4.12. Збурення вільної поверхні рідини та частотний спектр при збудженні руху системи на зарезонансній частоті при $M_T = 0,1M_F$

Отримані результати дозволяють зробити висновок, що в розглянутих частотних діапазонах збудження руху системи вихід коливань вільної поверхні рідини на усталений режим в класичному сенсі не відбувається. Аналіз поведінки системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» дозволяє виділити три частотні діапазони зовнішнього збудження коливань: дорезонансний, резонансний і зарезонансний.

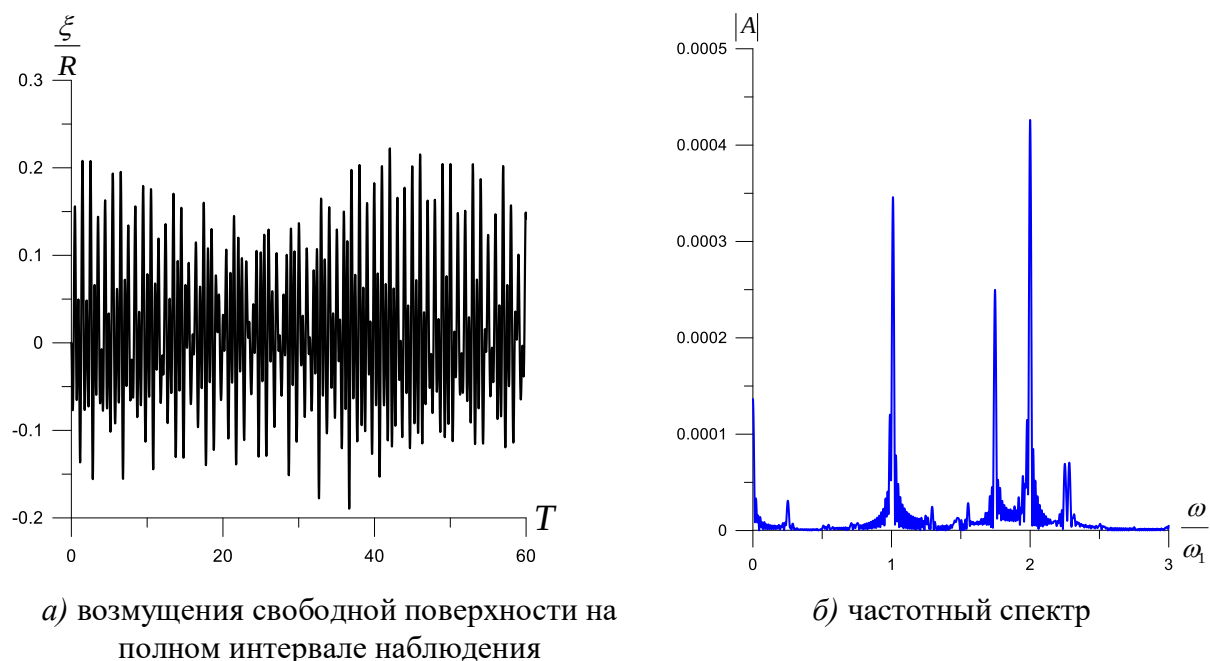


Рис. 4.13. Збурення вільної поверхні рідини та частотний спектр при збудженні руху системи на зарезонансній частоті при $M_T = 10M_F$

У всіх цих трьох режимах спостерігаються ефекти, які дозволяють характеризувати процес коливань вільної поверхні як істотно неусталений. Поведінка системи «резервуар – рідина» під дією горизонтального силового збудження призводить до прояву таких нелінійних ефектів як амплітудна модуляція (для всіх діапазонів), істотний вплив вищих гармонік (для дорезонансного і зарезонансного діапазонів), дрейф середнього значення амплітуд коливань системи (для всіх діапазонів). Встановлено також, що збільшення маси рідини по відношенню до маси резервуару не сприяє виходу системи на умовно усталений режим коливань. Отримані результати на якісному рівні узгоджуються з результатами нових теоретичних [352] і експериментальних [259, 340, 365] робіт. На якісному рівні загальний

результат описаних обчислювальних і натурних експериментів можна сформулювати наступним чином – за відсутністю сил поверхневого натягу і дисипації вихід коливаних вільної поверхні рідини на усталений режим в класичному сенсі не відбувається, коливання мають нестационарний характер.

Розглянемо нелінійні коливання вільної поверхні рідини в резервуарі у випадку, коли частота зовнішньої збуджуючої сили F розташована у резонансному діапазоні, тобто $p = \omega_1$, співвідношення мас резервуару і рідини вважаємо $M_T = 0,1M_F$. На Рис. 4.5а показано зміну у часі амплітуди збурення вільної поверхні рідини на стінці резервуару на повному інтервалі спостереження, на Рис. 4.5в та Рис. 4.5г представлені детальні графіки за перші (перехідний процес) і останні 20 періодів спостереження відповідно, на Рис. 4.5б – частотний спектр зміни у часі амплітуди збурення вільної поверхні рідини.

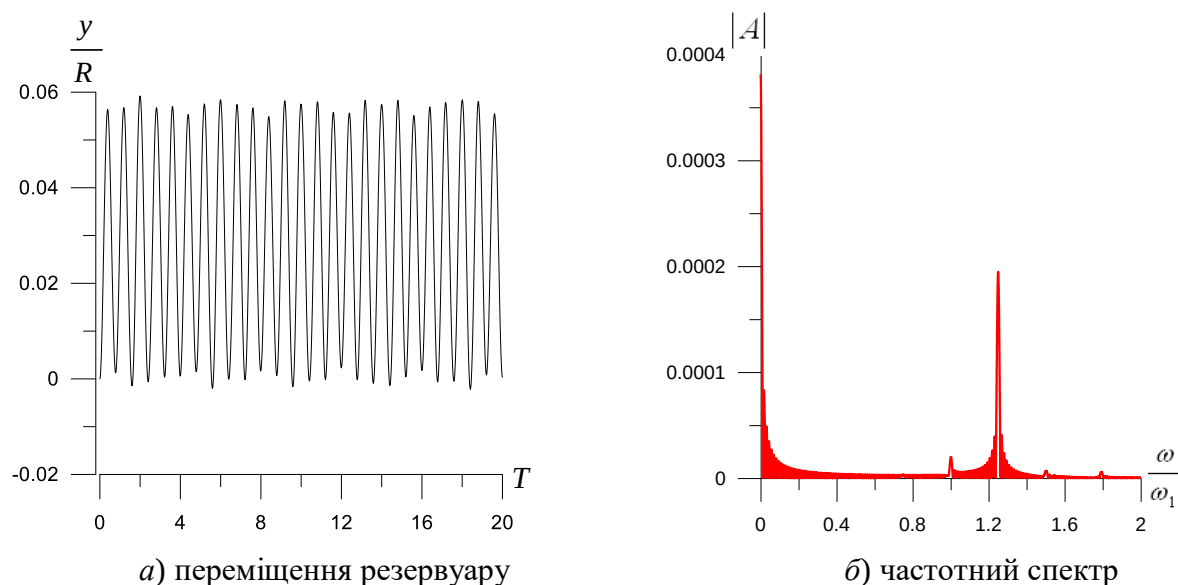


Рис. 4.14. Переміщення резервуару та частотний спектр при збудженні руху системи на резонансній частоті при $M_T = 0,1M_F$

Як можна бачити з Рис. 4.14а, коливання резервуару відбуваються з незначною амплітудною модуляцією при наявності ненульового середнього значення, яке несуттєво змінюється у часі. Фактично в частотному спектрі (Рис. 4.14б) присутні три групи гармонік: на нульовій і близької до нульової

частотах ($\omega \leq 0,2\omega_1$), на комбінаційній частоті ($\omega \approx 1,25\omega_1$) і на резонансній частоті ($\omega \approx \omega_1$). Наявність в спектрі гармоніки на нульовій частоті вказує на той факт, що коливання резервуару відбуваються не в околі початкового положення $y_0 = 0$, а в околі точки, яка зміщена в позитивному напрямку на відстань $y = 0,03R$. Наявність в частотному спектрі (Рис. 4.14б) гармонік в області дуже низьких частот ($0 \leq \omega \leq 0,2\omega_1$) пояснюється наявністю середнього значення, яке незначно змінюється в часі. Оскільки в спектрі присутні дві близькі за частотою гармоніки: на комбінаційній частоті ($\omega \approx 1,25\omega_1$) і на резонансній частоті ($\omega \approx \omega_1$), то в графіку коливань резервуара спостерігається амплітудна модуляція, однак, через суттєву різницю амплітуд гармонік (практично на порядок) амплітудна модуляція проявляється незначно.

Важливо відзначити, що хоча збудження руху відбувається на резонансній частоті, резервуар здійснює квазіперіодичні коливання з домінантою на комбінаційній частоті. Це відбувається в силу того, що, по-перше, маса рідини істотно перевершує масу резервуара, і, по-друге, в математичній моделі (4.1) – (4.2) враховується нелінійний характер силової взаємодії між резервуаром і рідиною.

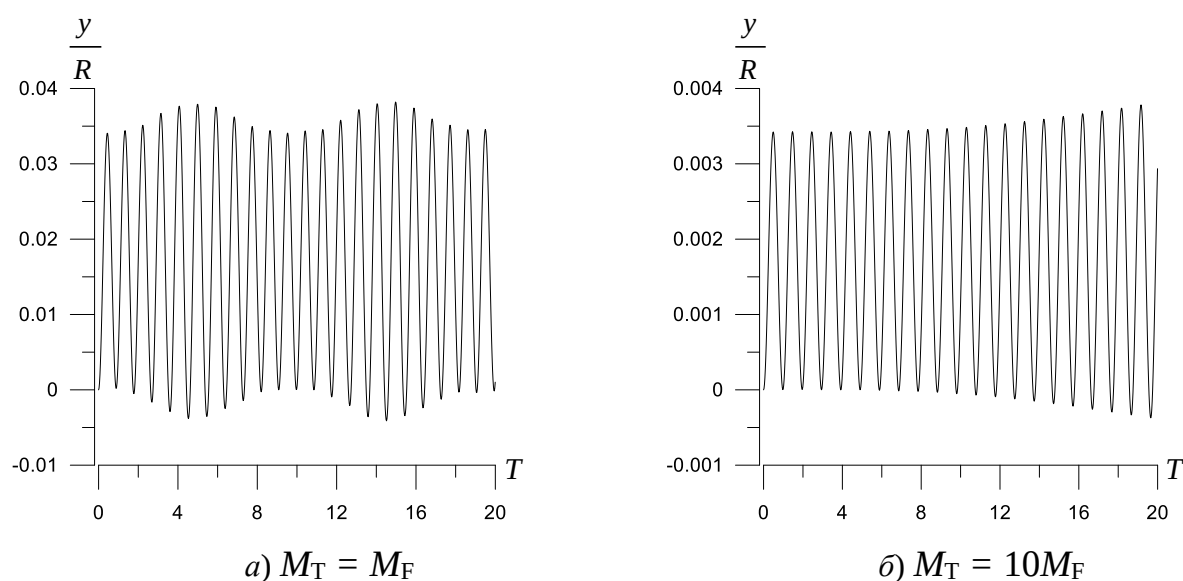


Рис. 4.15. Переміщення резервуару при збудженні руху системи на резонансній частоті

На відміну від варіанту, коли закон руху резервуару вважається заданим, тобто маса резервуару нескінченно велика, і, відповідно, коливання вільної поверхні рідини на рух резервуару ніяким чином не впливають, в даному випадку нелінійна силова взаємодія між резервуаром і рідиною призводить до того, що резервуар здійснює не гармонійні коливання, а більш складний квазіперіодичний рух, для якого характерні ефекти середнього значення, що змінюється у часі, і амплітудна модуляція.

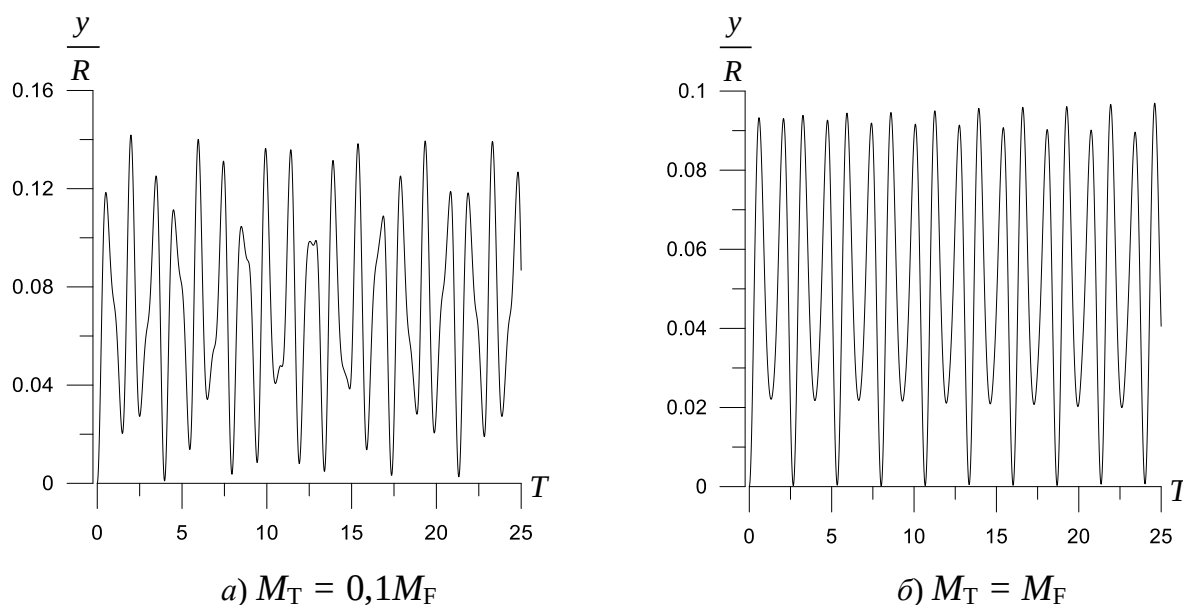


Рис. 4.16. Переміщення резервуару при збудженні руху системи на дорезонансній частоті

Розглянемо нелінійні коливання вільної поверхні рідини в резервуарі у випадку, коли частота зовнішньої збуджуючої сили F розташована у резонансному діапазоні, тобто $p = \omega_1$, а співвідношення мас резервуару і рідини становить $M_T = M_F$ (Рис. 4.15а) та $M_T = 10M_F$ (Рис. 4.15б). Аналогічно співвідношенню мас $M_T = 0,1M_F$, в системі в обох випадках спостерігається ефект амплітудної модуляції і незначно змінюється в часі середнє значення. При збільшенні маси резервуару частота його коливань наближається до резонансної частоти, а при співвідношенні мас резервуару та рідини $M_T = 10M_F$ коливання резервуару відбуваються на частоті зовнішнього силового збудження. При цьому, для співвідношення мас резервуару та рідини $M_T \geq 10M_F$ спостерігається багатократне збільшення періоду

обвідної в порівнянні з періодом першої антисиметричної форми (Рис. 4.15б).

Розглянемо нелінійні коливання вільної поверхні рідини в резервуарі у випадку, коли частота зовнішньої збуджуючої сили F розташована у дорезонансному діапазоні, тобто $p = 0,75\omega_1$, а співвідношення мас резервуару і рідини становить $M_T = 0,1M_F$ (Рис. 4.16а) та $M_T = M_F$ (Рис. 4.16б). З графіків (Рис. 4.16) можна бачити, що коливання резервуару відбуваються зі значною амплітудною модуляцією при практично незмінному середньому значенні. При цьому для випадку резервуару меншої маси (Рис. 4.16а) характерна наявність в графіку коливань зрізів та зламів, що є результатом суттєвого прояву вищих форм коливань. Збільшення маси резервуару призводить до того, що вплив силового відгуку рідини на стінки резервуару помітно спадає, і тому вищі форми коливань практично не проявляються (Рис. 4.16б).

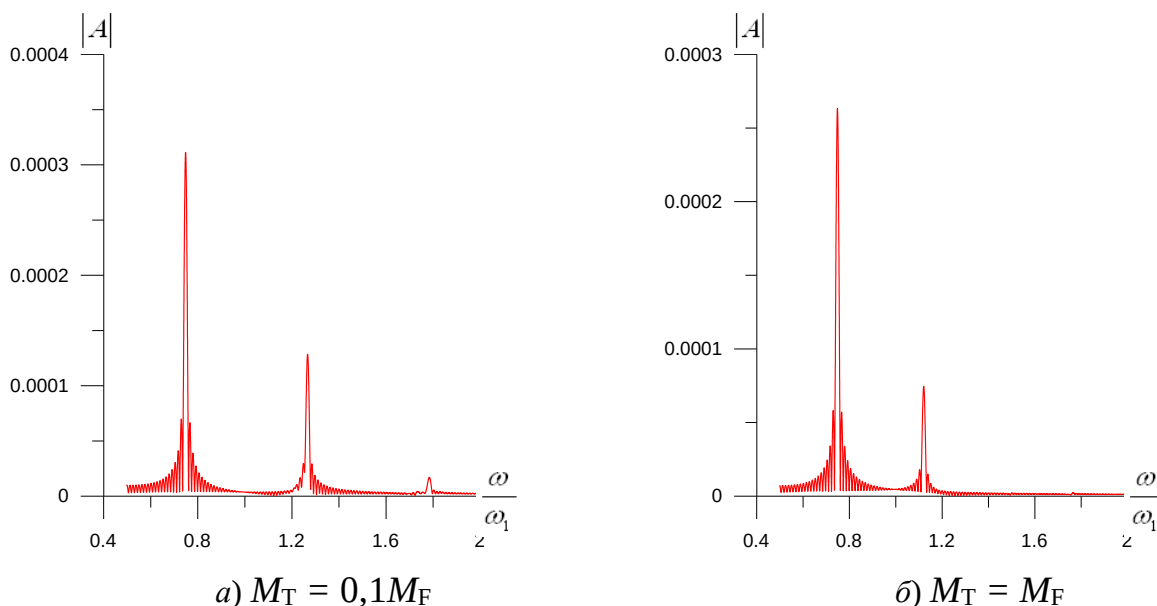


Рис. 4.17. Частотний спектр переміщення резервуару при збудженні руху системи на дорезонансній частоті

Наявність амплітудної модуляції підтверджується структурою частотного спектру коливань (Рис. 4.17): в спектрі домінують гармоніки на частоті вимушених коливань і на комбінаційній частоті. При цьому, як показує аналіз спектру, збільшення маси резервуару призводить до зближення двох

домінуючих гармонік за рахунок зменшення комбінаційної частоти. Вплив ефекту зближення двох домінуючих гармонік носить нелінійний характер – спочатку амплітудна модуляція поглиблюється (Рис. 4.18), а при співвідношенні мас $M_T = 10M_F$ стає незначною (залишається тільки гармоніка на частоті зовнішньої збуджуючої сили, що взаємодіє з гармонікою з частотою, яка близька до нульової).

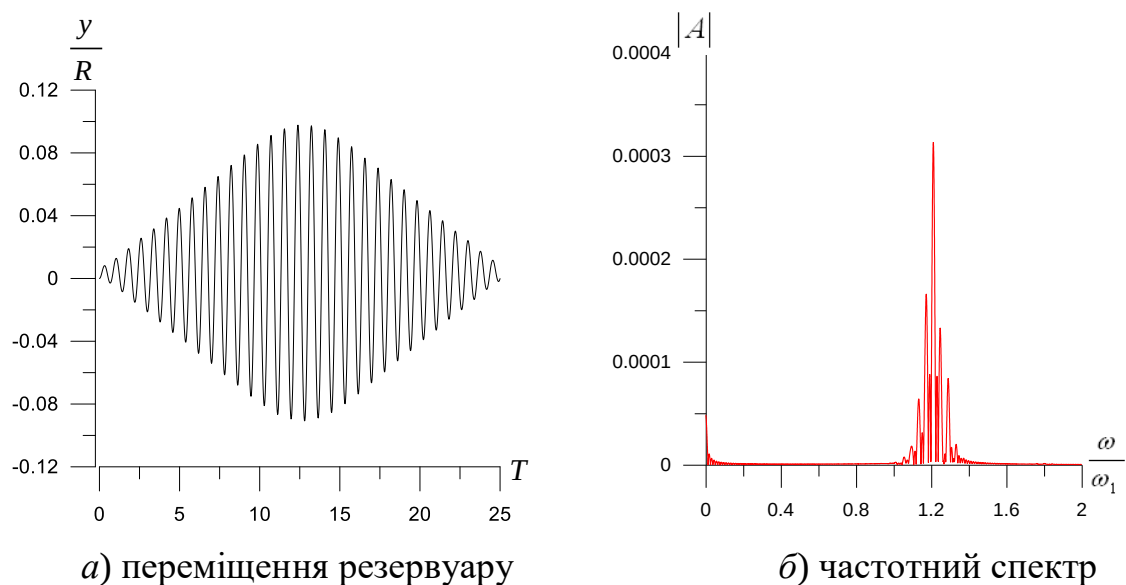
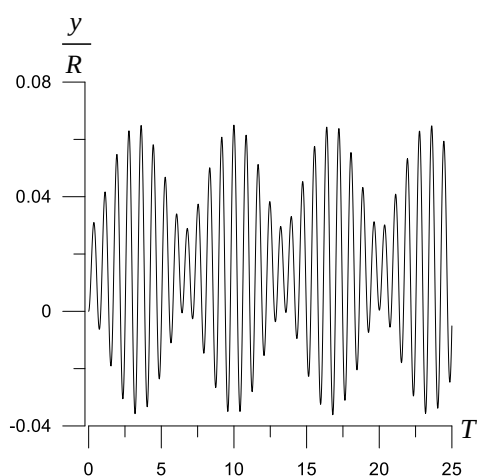


Рис. 4.18. Переміщення резервуару та його частотний спектр при збудженні руху системи на зарезонансній частоті при співвідношенні мас $M_T = 0,1M_F$

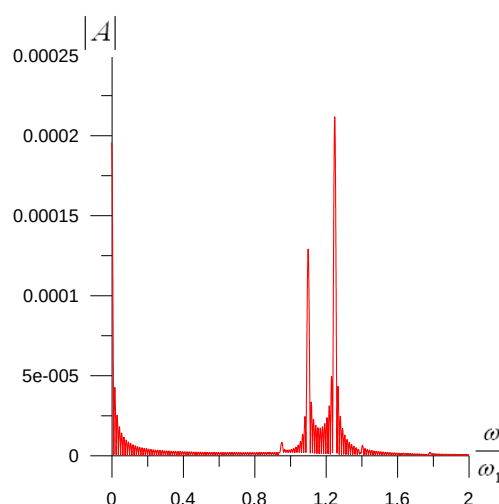
Таким чином, збудження руху системи «резервуар - рідина» в дорезонансному діапазоні частот відтворює рух резервуару за складним квазіперіодичним законом, в якому вплив вищих форм коливань проявляється тим сильніше, чим менше маса резервуару. Тільки при дуже істотному збільшенні маси резервуару ($M_T = 10M_F$) переміщення резервуару стає близьким до гармонійного, в якому, однак, через наявність низькочастотних гармонік спектру спостерігається незначна змінність у часі середнього значення.

Розглянемо нелінійні коливання вільної поверхні рідини в резервуарі у випадку, коли частота зовнішньої збуджуючої сили F розташована у зарезонансному діапазоні, тобто $p = 1,25\omega_1$, а співвідношення мас

резервуару і рідини становить $M_T = 0,1M_F$ (Рис. 4.18) та $M_T = M_F$ (Рис. 4.19). З графіку Рис. 4.18а можна бачити, що коливання резервуару малої маси характеризуються яскраво вираженою амплітудною модуляцією і наявністю середнього значення, яке незначно змінюється у часі. Це факт підтверджує також і структура частотного спектру (Рис. 4.18б): всі домінуючі гармоніки згруповані поблизу частоти зовнішнього збудження, а амплітуди гармонік у діапазоні низьких частот ($\omega \leq 0,3\omega_1$) приблизно в 5 разів менше амплітуд домінуючих гармонік. Збільшення маси резервуару призводить до того, що частоти домінуючих гармонік починають помітно відрізнятися, так що період обвідної амплітудної модуляції зменшується (Рис. 4.19). При цьому внесок гармонік на низьких частотах ($\omega \leq 0,3\omega_1$) поступово збільшується, так що при співвідношенні мас резервуару і рідини $M_T = 10M_F$ середнє значення вже помітно змінюється в часі.



а) переміщення резервуару



б) частотний спектр

Рис. 4.19. Переміщення резервуару та його частотний спектр резервуару при збудженні руху системи на зарезонансній частоті при співвідношенні мас $M_T = M_F$

При збуренні руху резервуарі в околі резонансу (Рис. 4.20) спостерігається явище антирезонансу – амплітуда переміщення резервуару спадає практично на порядок до значень $y \approx (0,01 \div 0,015)R$ та тримається на такому рівні на протязі 3-4 періодів першої антисиметричної форми ψ_1 . При антирезонансі енергія руху резервуару переходить в енергію коливань

вільної поверхні рідини. В дорезонансному та зарезонансному діапазонах збудження руху резервуару явище антирезонансу не спостерігається, оскільки глибина амплітудної модуляції недостатня.

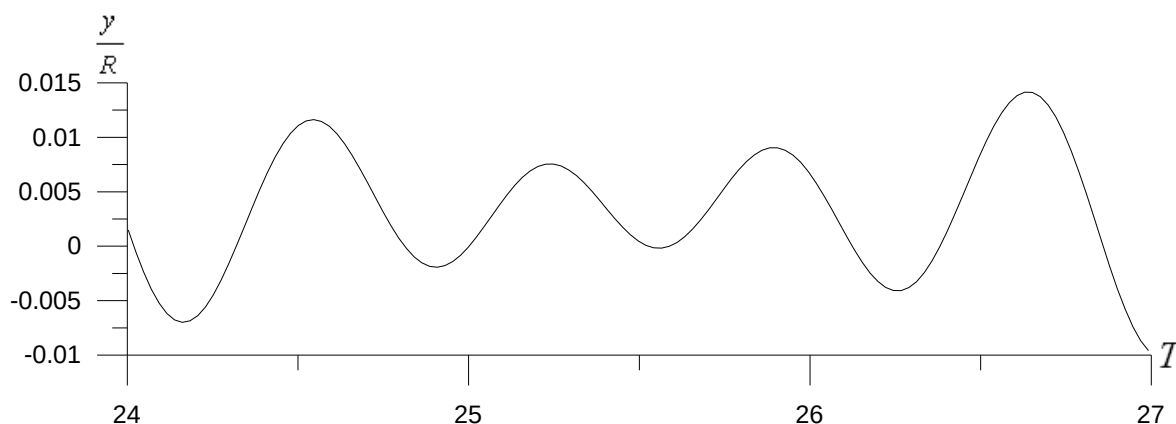


Рис. 4.20. Явище антирезонансу при збудженні руху системи на зарезонансній частоті при співвідношенні мас $M_T = 0,1M_F$

Для всіх трьох діапазонів збудження руху характерна присутність в частотному спектрі як домінантної гармоніки на власній частоті системи, так і побічних гармонік на вищих та комбінаційних частотах. При поступовому збільшенні маси резервуару (коли $M_T > 5M_F$) амплітуди гармонік на власних частотах в частотному спектрі поступово зменшуються, а потім взагалі стають нульовими – силовий відгук рідини на рух дуже важкого резервуару не впливає.

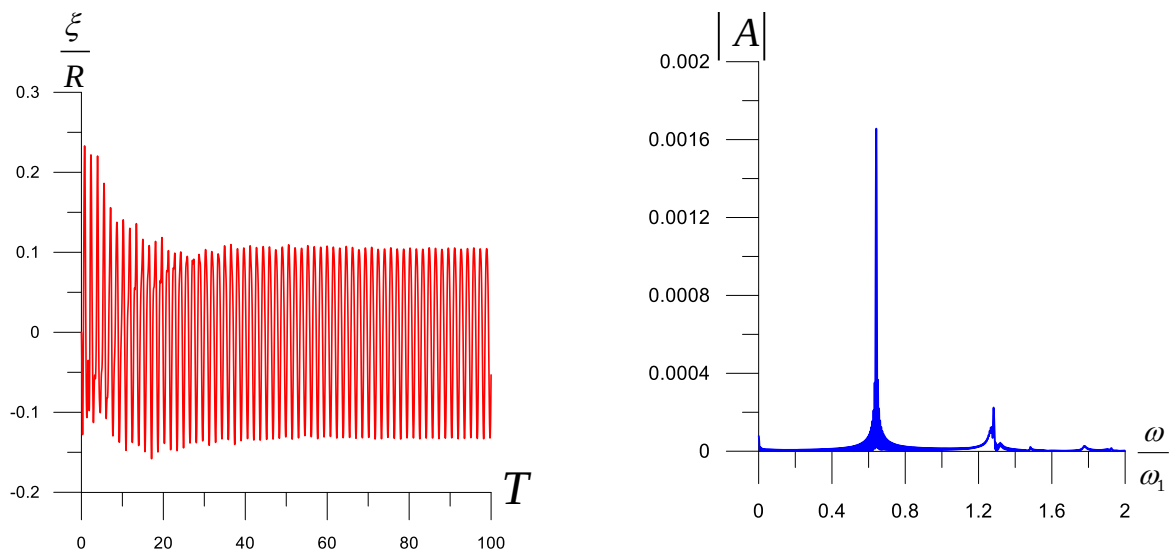
Таким чином, для найбільш поширеного у практиці випадку, коли співвідношення мас резервуару та рідини становить $M_T \approx (0,1 \div 0,25)M_F$, під дією горизонтальної гармонічної сили резервуар рухається не по гармонічному, а по більш складному квазіперіодичному закону. Для цього квазіперіодичного закону руху в різних частотних діапазонах характерна наявність ефектів амплітудної модуляції, зміни у часі середнього значення, вплив вищих форм коливань. І тільки значне підвищення маси резервуару призводить до того, що коливання рідини практично не впливають на рух резервуару, і останній починає рухатися по закону, близькому до гармонічного. Причина отриманих результатів полягає у відмові від гіпотези, в котрій нехтують коливаннями вільної поверхні рідини на

власних частотах, а також в урахуванні сумісного руху системи «резервуар - рідина». Отримані результати узгоджуються з результатами нових теоретичних та експериментальних робіт [258, 332, 364].

4.3. Вимушені коливання при наявності узагальненої дисипації

Розглянемо нелінійну динаміку вимушених коливань в механічній системі «резервуар - рідина з вільною поверхнею» з урахуванням додаткового фактору – наявності в рідині узагальненої (інтегральної) дисипації. У п. 4.2 цю задачу було розглянуто за наявності припущення, що рідина ідеальна, а стінки резервуару – абсолютно гладкі. Однак у багатьох практичних застосуваннях необхідно враховувати в'язкість рідини або наявність конструктивних демпфуючих елементів (стрингери, шпангоути, перегородки, сітки, гофрованість або шорсткість стінок резервуару) [197, 199]. Для чисел Рейнольдса в діапазоні $10000 \leq Re \leq 50000$ (для досліджуваної системи число Рейнольдса $Re \approx 48000$) урахування в'язкості рідини по суті зводиться до урахування розсіювання енергії в достатньо тонкому примежовому шарі при коливаннях рідини у стінок, тобто до урахування демпфуючих властивостей рідини, які впливають з моделі примежового шару. При цьому внаслідок слабкого розсіювання енергії коливань рідини демпфуючі властивості рідини достатньо врахувати інтегрально шляхом визначення узагальнених характеристик, наприклад, логарифмічного декременту загасання.

Як відомо [197, 199], розрізняють лінійне (в'язке) і нелінійне демпфування. Лінійне демпфування обумовлено в основному розсіюванням енергії коливань рідини в тонкому примежовому шарі у стінок резервуара і характерно для резервуарів з гладкими стінками. Нелінійне демпфування виникає за наявності конструктивних елементів. Обидва види демпфування можна звести до врахування в системі узагальнених коефіцієнтів дисипації, якщо число Рейнольдса системи лежить в діапазоні $10000 \leq Re \leq 50000$, коли ефективна площа конструктивних елементів невелика [197, 199].



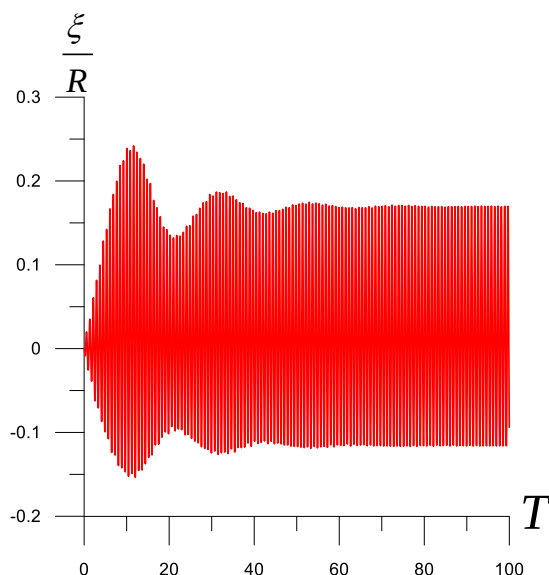
а) збурення вільної поверхні рідини

б) частотний спектр

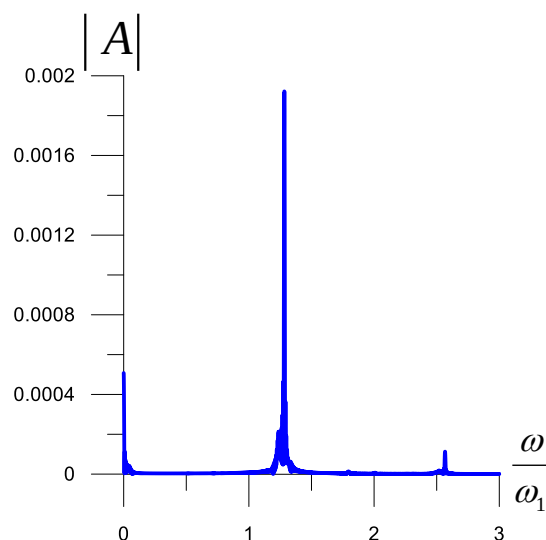
Рис. 4.21. Збурення вільної поверхні рідини та частотний спектр при збудженні руху системи на дорезонансній частоті при $M_T = 0,1M_F$ при наявності узагальненої дисипації

Таким чином, урахування в'язкості в системі може бути введено як лінійне тертя в моделі гармонічного осцилятора з лінійною дисипацією $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega^2 x = 0$. Коефіцієнти узагальненої дисипації α_{tr} в рівняннях руху (4.1) – (4.2) визначаються за відомою методикою Г.М. Мікішева [197, 199] з множенням на $\sqrt{2}$. Як показано в теоретичних [117] і експериментальних [54–56] роботах, значення отриманих коефіцієнтів необхідно суттєво збільшити (в 8-35 разів), щоб досягнути узгодження з експериментами і при вимушених коливаннях системи домогтися згасання в рідині гармонік на власних частотах. Проведені обчислювальні експерименти підтвердили, що для досягнення структурного впливу дисипації на розвиток коливальних процесів в рідині розраховані коефіцієнти узагальненої дисипації необхідно збільшити в 30 разів.

Аналогічно результатам, отриманим у п. 4.2, дослідження динаміки системи проводилися при тих самих значеннях параметрів для трьох частотних діапазонів зовнішнього збудження коливань: дорезонансного, резонансного і зарезонансного.



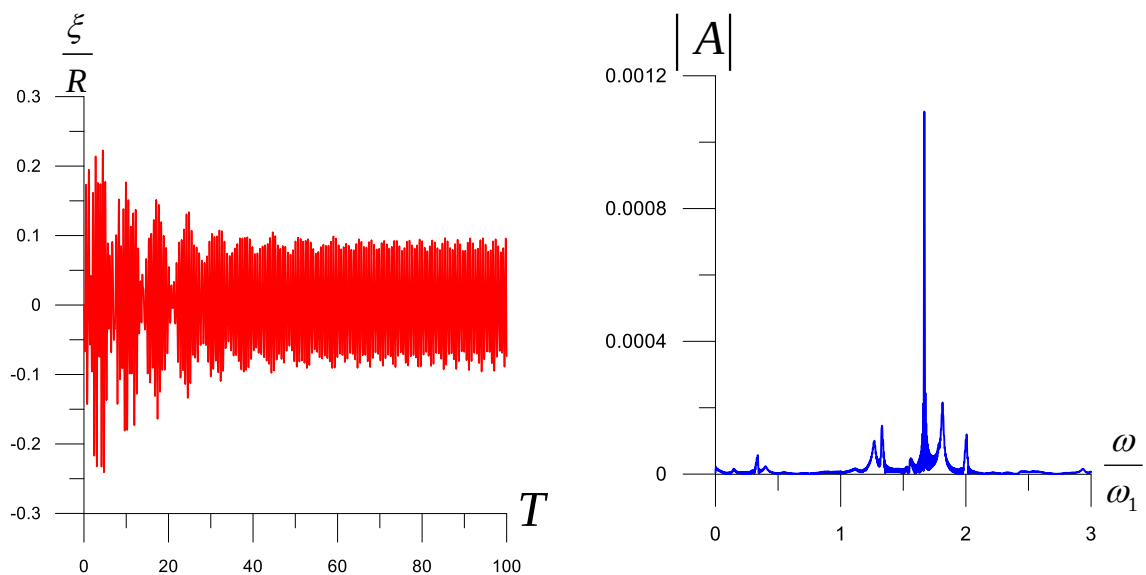
а) збурення вільної поверхні рідини



б) частотний спектр

Рис. 4.22. Збурення вільної поверхні рідини та частотний спектр при збудженні руху системи на резонансній частоті при $M_T = 0,1M_F$ при наявності узагальненої дисипації

Розглянемо нелінійні коливання вільної поверхні рідини в резервуарі, коли співвідношення мас резервуара і рідини $M_T = 0,1M_F$, а частота зовнішньої збуджуючої сили лежить в дорезонансному діапазоні, тобто $p = 0,7\omega_1$ (Рис. 4.21). Як можна бачити з порівняння Рис. 4.5б і Рис. 4.21б, наявність узагальненої дисипації в рідині діє подібно виборчому фільтру - пригнічуються гармоніки на вищих і комбінаційних частотах, залишаючи тільки домінантну гармоніку на частоті зовнішнього збудження. Присутня в частотному спектрі гармоніка на власній частоті системи має амплітуду майже на порядок меншу амплітуди домінантної гармоніки. З цього можна зробити висновок, що при наявності узагальненої дисипації збудження руху резервуару в дорезонансному діапазоні частот виводить (через ~ 40 періодів після завершення перехідних процесів) коливання вільної поверхні рідини на режим умовно усталених (близьких до одночастотних) коливань (Рис. 4.21а). Збільшення маси резервуару зменшує тривалість перехідних процесів і сприяє швидшому виходу коливань вільної поверхні рідини на умовно усталений режим.



а) збурення вільної поверхні рідини

б) частотний спектр

Рис. 4.23. Збурення вільної поверхні рідини та частотний спектр при збудженні руху системи на зарезонансній частоті при $M_T = 0,1M_F$ при наявності узагальненої дисипації

Розглянемо нелінійні коливання вільної поверхні рідини в резервуарі, коли частота зовнішньої збуджуючої сили F розташована в резонансному діапазоні, тобто $p = 1$, $25\omega_1 \approx \omega_e$, співвідношення мас резервуара і рідини вважаємо $M_T = 0,1M_F$. При наявності узагальненої дисипації (Рис. 4.22) коливання вільної поверхні рідини виходять на умовно усталений режим. Як можна бачити з частотного спектру (Рис. 4.22б), домінуючою є гармоніка на частоті зовнішнього збудження (дуже близька до власної частоти системи). Гармоніка на нульовій частоті має істотну амплітуду, але її вплив має прояв тільки в тому, що коливання вільної поверхні відбуваються не в околі нуля, а в околі деякого позитивного значення. Збільшення маси резервуару сприяє більш швидкому виходу коливань вільної поверхні на умовно усталений режим.

Розглянемо нелінійні коливання вільної поверхні рідини в резервуарі, коли частота зовнішньої збуджуючої сили F розташована в зарезонансному діапазоні, тобто $p = 1,66$, співвідношення мас резервуару і рідини також вважаємо $M_T = 0,1M_F$ (Рис. 4.23). Врахування в системі узагальненої дисипації залишає в частотному спектрі тільки одну домінуючу гармоніку

на частоті зовнішнього збудження (Рис. 4.23б). Однак амплітуди гармонік на частотах $\omega \approx 1,28\omega_1$ і $\omega \approx 1,8\omega_1$ мають такий порядок, що їх присутність в частотному спектрі після завершення перехідних процесів призводить до наявності в коливаннях вільної поверхні рідини амплітудної модуляції. Таким чином, в зарезонансному діапазоні зовнішнього збудження руху при малій масі резервуару і урахуванні узагальненої дисипації, яка збільшена у порівнянні з розрахунковою навіть в 30 разів, не відбувається вихід коливань вільної поверхні рідини навіть на умовно усталений режим. Тільки істотне збільшення маси резервуару (більш ніж в 100 разів) сприяє виходу коливань вільної поверхні рідини на умовно усталений режим.

4.4. Вимушені коливання в полі слабких гравітаційно-каплярних сил

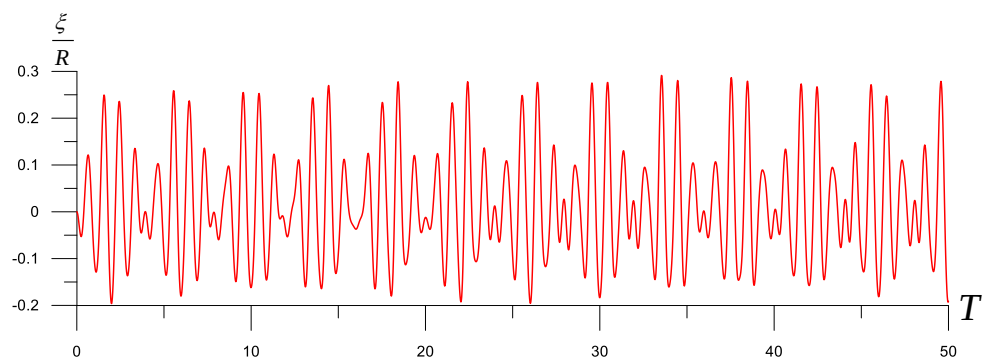
Розглянемо результати дослідження поведінки системи “резервуар - рідина з вільною поверхнею» при врахуванні дії сил поверхневого натягу на вільній поверхні рідини. При цьому для підвищення внеску сил поверхневого натягу приймається, що прискорення вільного падіння менше наземного в 1000 разів.

З урахуванням параметрів системи дослідження проводиться для числа Бонда $Bo \approx 12$ і значень контактного кута в діапазоні $75^\circ \leq \theta_1 \leq 90^\circ$. В цьому випадку максимальний прогин в центрі резервуару (максимальний підйом на стінці) форми рівноваги вільної поверхні рідини $\xi_0(0) \sim \xi_0(R) \sim 0,1R$ і з урахуванням порядку амплітуди першої форми коливань в нелінійному діапазоні збурень $a_1 \sim 0,3R$ отримуємо, що рівноважна форма ξ_0 в розкладі () для $\xi(r, \theta, t)$ має другий порядок малості. Це означає, по-перше, що в розкладах (1) для ξ можна використовувати одну і ту ж систему координатних функцій ψ_i як для випадку відсутності, так і для випадку наявності сил поверхневого натягу, і, по-друге, нелінійна гранична умова на контурі контакту вироджується і точний розв’язок задачі пошуку форм рівноваги вільної поверхні можна замінити наближенням. В роботі [57]

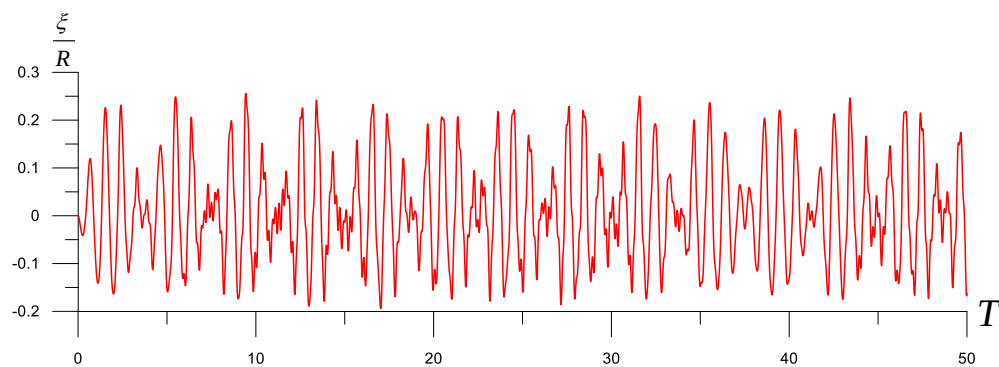
форма рівноваги вільної поверхні рідини було представлено у вигляді параболоїда обертання $\zeta_0 = ar^2 + b$, еліпсоїда обертання $\xi_0 = \sqrt{1 - (\frac{r}{R})^2} + b$ і функцію Беселя $\zeta_0 = aJ_0(r) + b$. Знайдені рівняння форми рівноваги підставлялися в квадратури, за якими обчислювалися коефіцієнти $\beta_{ir}^q, \dots, \vec{B}_{rijk}^q$ в рівняннях дискретної моделі системи (4.1) – (4.2). Обчислені коефіцієнти відрізнялися не більше ніж на 1%, тому якісно результати обчислювального моделювання для трьох рівнянь рівноважної форми нічим не відрізнялися. Тому в подальшому для форми рівноваги вільної поверхні було використано апроксимацію параболоїдом обертання $\zeta_0 = ar^2 + b$.

Розглянемо нелінійні коливання вільної поверхні рідини в резервуарі, коли частота зовнішньої збуджуючої сили F розташована в дорезонансному діапазоні, тобто $p = \omega_1$. На Рис. 4.24 наведені графіки збурення амплітуди вільної поверхні рідини для трьох випадків урахування сил поверхневого натягу: відсутність сил поверхневого натягу (Рис. 4.24а), наявність сил поверхневого натягу по вільній поверхні рідини (Рис. 4.24б), наявність сил поверхневого натягу по вільній поверхні рідини і на контурі контакту (Рис. 4.24в). Як видно з Рис. 4.24б, в, урахування сил поверхневого натягу призводить до появи на графіках зламів, причому при зменшенні контактного кута коливання стають іррегулярними, що є результатом поглиблення внутрішніх зв'язків між формами коливань і посилення впливу (збільшення амплітуд) вищих форм коливань. При відсутності сил поверхневого натягу (Рис. 4.24а) і при наявності сил поверхневого натягу по вільній поверхні рідини (Рис. 4.24б) коливання відбуваються з істотною амплітудною модуляцією при практично незмінному середньому значенні. Однак при наявності сил поверхневого натягу по контуру контакту (Рис. 4.24в) вплив вищих форм коливань стає настільки істотним, що дві домінуючі частоти зникають, і явище амплітудної модуляції через деякий час (близько 40 періодів) вже більше не спостерігається. Взагалі, в

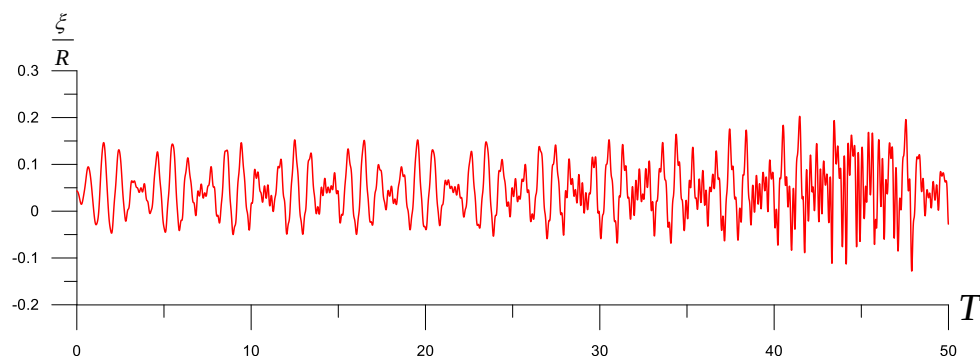
дорезонансному діапазоні зовнішнього збудження руху резервуару тільки при відсутності сил поверхневого натягу система виходить в режим коливань, близький до усталеного (Рис. 4.24а, умовно усталений режим). Для такого умовно усталеного режиму коливань характерна істотна амплітудна модуляція при практично незмінному середньому значенні амплітуд. Урахування в системі сил поверхневого натягу призводить до помітного збільшення впливу вищих форм коливань, і вихід навіть на умовно усталений режим не відбувається (Рис. 4.24б, в).



а) $\sigma = 0, \theta_1 = 90^\circ$



б) $\sigma = 0.073, \theta_1 = 90^\circ$



в) $\sigma = 0.073, \theta_1 = 75^\circ$

Рис. 4.24. Збурення вільної поверхні рідини при збудженні руху системи на дорезонансній частоті в полі слабких гравітаційно-капілярних сил

Розглянемо нелінійні коливання вільної поверхні рідини в резервуарі, коли частота зовнішньої збуджуючої сили F розташована в малій області в околі резонансу, тобто $p = 1,25\omega_1$ (Рис. 4.25).

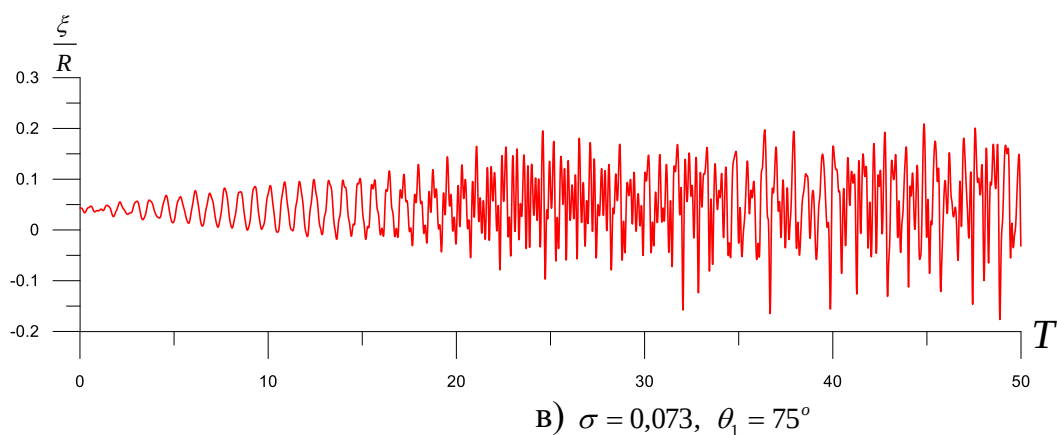
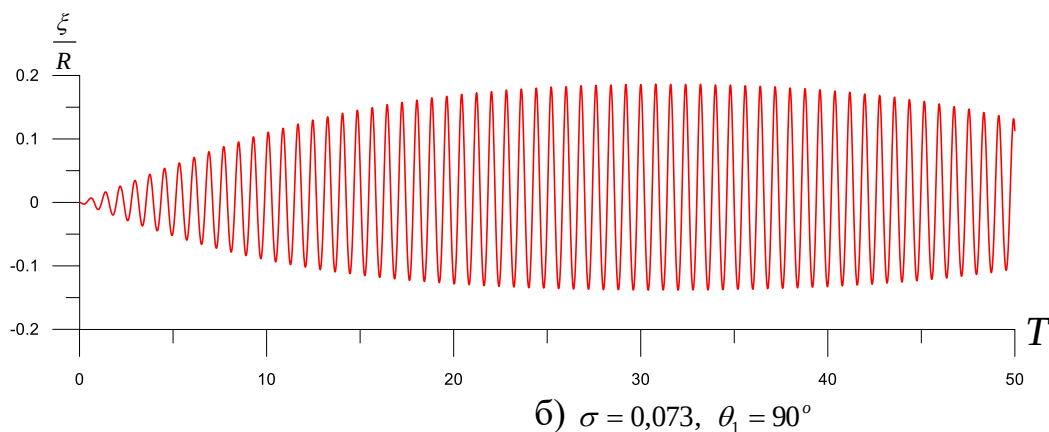
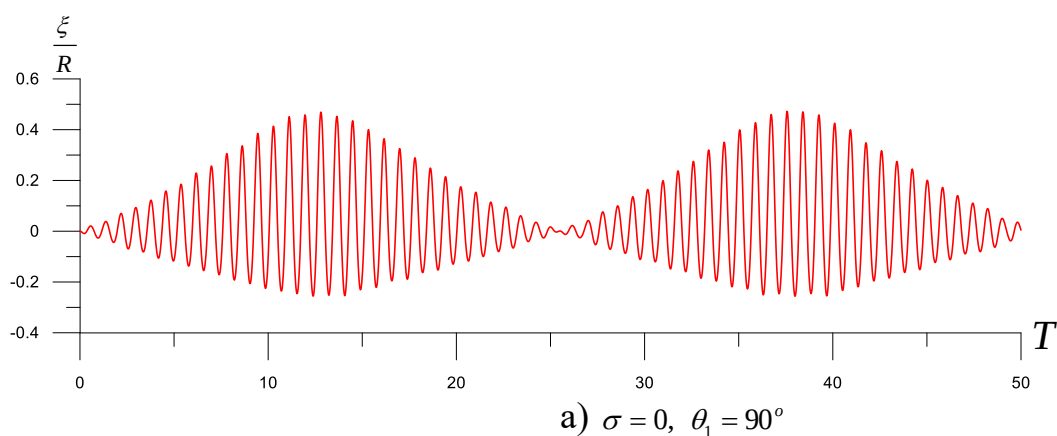


Рис. 4.25. Збурення вільної поверхні рідини при збудженні руху системи на резонансній частоті в полі слабкої гравітації

Як можна бачити з графіку, при відсутності сил поверхневого натягу (Рис. 4.25а) і при наявності сил поверхневого натягу по вільній поверхні (Рис. 4.25б) коливання відбуваються з помітною модуляцією, і при цьому середнє значення (тренд) дуже суттєво змінюється в часі. При зменшенні

контактного кута (Рис. 4.25в) значення амплітуд вищих форм коливань наближаються до амплітуд двох близьких домінуючих частот (власної та вимушеної), і коливання вільної поверхні стають іррегулярними. Крім того, для коливань вільної поверхні при відсутності сил поверхневого натягу (Рис. 4.25а) і при наявності сил поверхневого натягу по вільній поверхні (Рис. 4.25б) характерно явище антирезонансу: амплітуда коливань вільної поверхні спадає до рівня $\xi \approx (0,01 \div 0,015)R$, тобто зменшується на порядок протягом декількох періодів коливань першої антисиметричною форми ψ_1 . Явище антирезонансу при збудженні руху системи в дорезонансному і зарезонансному діапазонах не спостерігається. При збудженні руху системи в околі резонансної частоти вихід на режим, близький до усталеного, спостерігається при відсутності сил поверхневого натягу (Рис. 4.25а) і при наявності сил поверхневого натягу по поверхні рідини (Рис. 4.25б). Зменшення контактного кута призводить до того, що коливання набувають іррегулярний характер, а сам закон коливань істотно спотворюється вищими гармоніками частотного спектру (Рис. 4.25в, присутність на графіку супергармонік і двогорбих піків).

Розглянемо нелінійні коливання вільної поверхні рідини в резервуарі, коли частота зовнішньої збуджуючої сили F розташована в зарезонансному діапазоні, тобто $p = 1,5\omega_1$ (Рис. 4.26). Як можна бачити з Рис. 4.26а, коливання вільної поверхні при відсутності сил поверхневого натягу відбуваються з істотною амплітудною модуляцією і середнім значенням, яке змінюється у часі, причому форма амплітудної обвідної істотно спотворюється впливом вищих форм коливань.

На відміну від дорезонансного діапазону збудження, в якому наявність сил поверхневого натягу по вільній поверхні призводить до посилення впливу вищих форм коливань (Рис. 4.26б), в резонансному і зарезонансному діапазоні збудження наявність сил поверхневого натягу по вільній поверхні призводить до зворотного ефекту, тобто прояв вищих форм коливань практично відсутній. В спектрі коливань вільної поверхні домінують дві

частоти – власна та вимушена (Рис. 4.25б, Рис. 4.26б). Це означає, що сили поверхневого натягу по вільній поверхні рідини діють подібно селективному фільтру, який в спектрі пригнічує гармоніки на вищих і комбінаційних частотах і залишає тільки гармоніки на власній і вимушеній частотах.

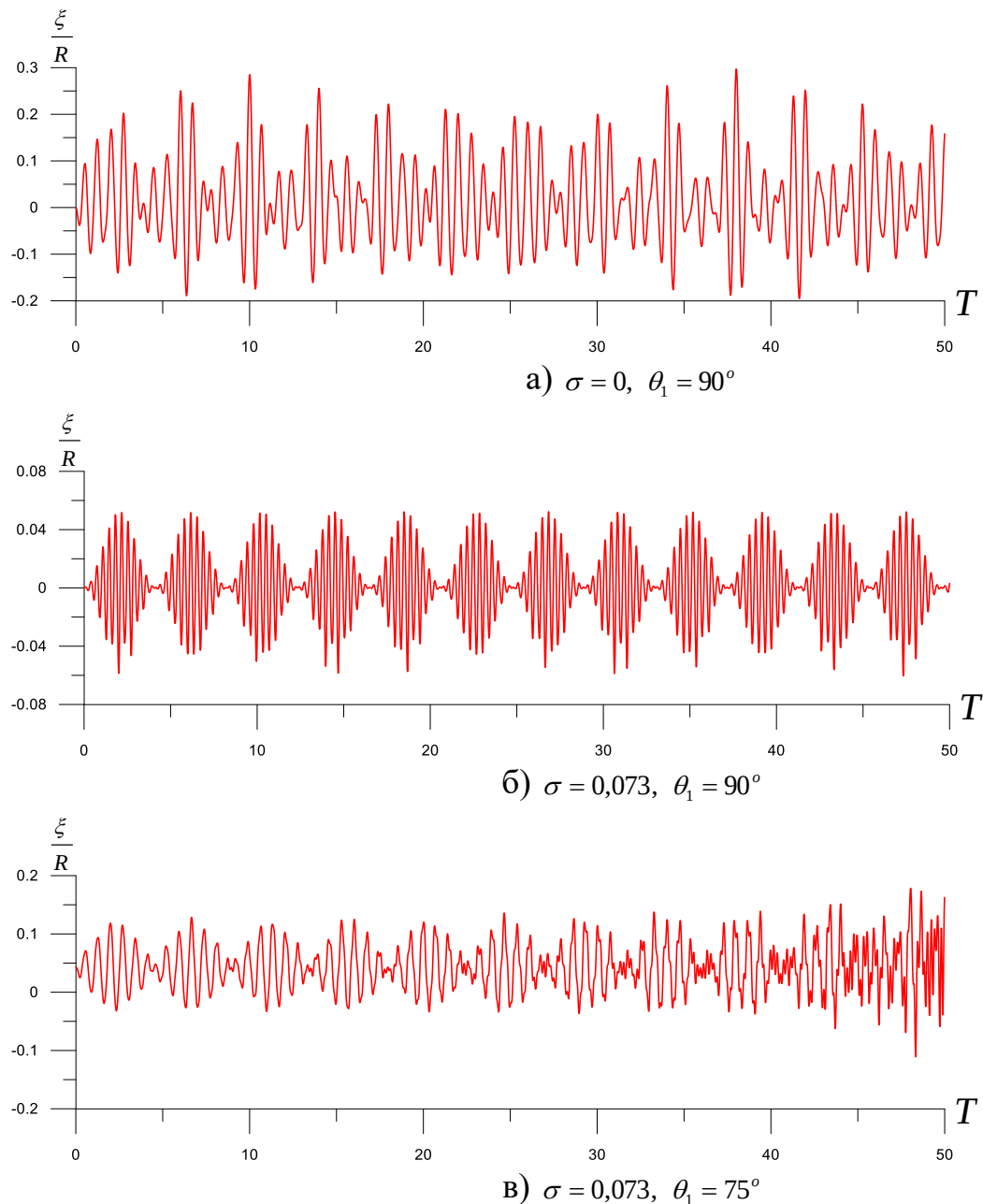


Рис. 4.26. Збурення вільної поверхні рідини при збудженні руху системи на зарезонансній частоті в полі слабких гравітаційно-капілярних сил

Урахування в системі сил поверхневого натягу по контуру контакту (Рис. 4.26в) призводить до іррегулярних коливань, коли в спектрі

з'являються практично всі частотні гармоніки. Таким чином, в зарезонансному діапазоні збудження вихід коливань вільної поверхні навіть на умовно усталений режим не відбувається – коливання мають характер нескінченного перехідного процесу. Для корегування руху об'єктів, які містять істотні рухомі маси рідини, на практиці часто застосовуються впливи імпульсної природи [117]. В зв'язку з цим виникає задача про визначення оптимальної форми імпульсу зовнішньої сили для реалізації найбільш ефективного керування, найчастіше такого, коли збурення вільної буде мінімальним.

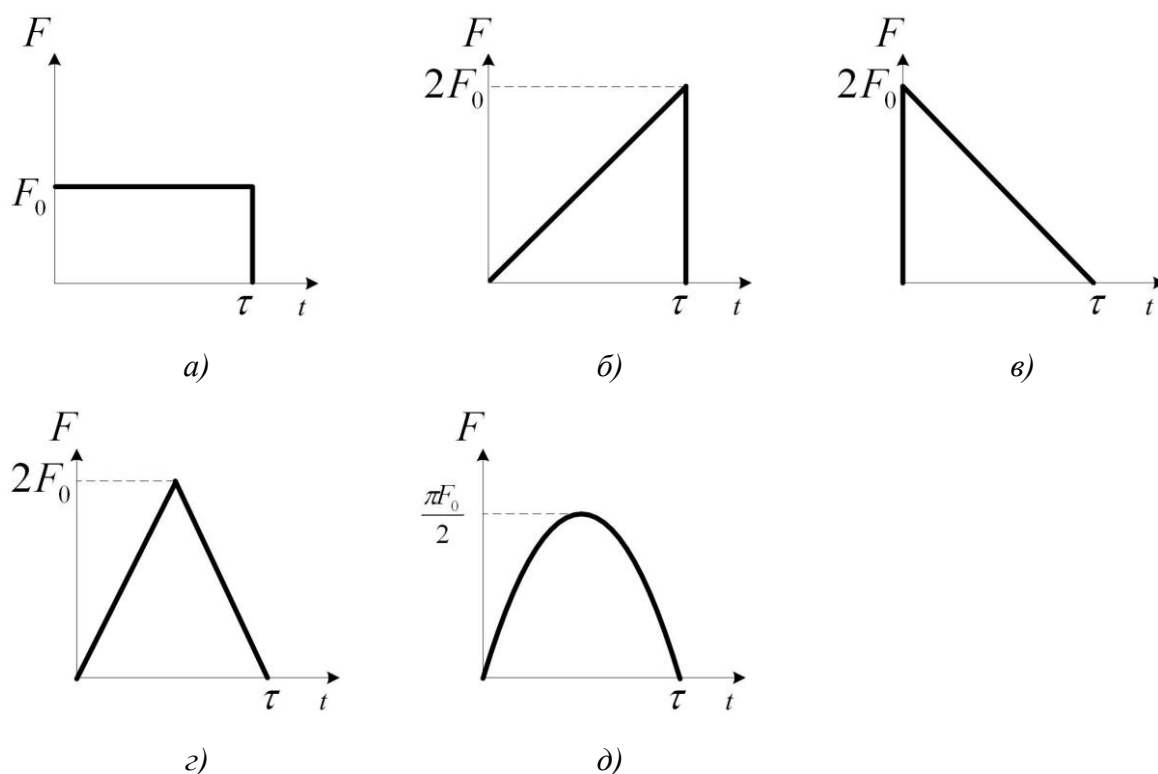


Рис. 4.27. Форми силового імпульсу, який використовувався для збудження руху системи в полі слабких гравітаційно-капілярних сил

Для визначення характеру динамічної поведінки системи «резервуар - рідина» при різних способах імпульсного збудження руху було розглянуто наступні варіації форми силового імпульсу:

- прямокутний імпульс;
- трикутний імпульс із переднім фронтом;
- трикутний імпульс із заднім фронтом;

- імпульс у вигляді рівнобедреного трикутника;
- імпульс у вигляді половини періоду синусоїди.

Значення параметрів амплітуди F_0 та тривалості τ імпульсного впливу підбираються таким чином, щоб, по-перше, коливання вільної поверхні рідини були розташовані в нелінійному діапазоні зміни амплітуд хвиль, по-друге, після завершення дії імпульсу системі було надана однакова кількість руху, тобто площа імпульсу для всіх випадків обиралась однаковою. Чисельне визначення динамічних параметрів системи виконувалось для наступних варіантів: 1) відсутність сил поверхневого натягу; 2) наявність сил поверхневого натягу по поверхні рідини (контактний кут 90°); наявність сил поверхневого натягу по поверхні рідини та контуру контакту (контактний кут 75°).

Результати чисельного визначення динамічних параметрів системи в умовах слабкої гравітації без урахування сил поверхневого натягу представлені у Табл. 4.3, де наведені значення наступних змінних: $R_{\max}$ – максимальне значення головного вектору сил тиску рідини на стінки резервуару (вимірюється в $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$); $t(R_{\max})$ – момент часу досягнення максимального значення головного вектору сил тиску рідини на стінки резервуару; $R_{\min}$ – мінімальне значення головного вектору сил тиску рідини на стінки резервуару (вимірюється в $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$); $t(R_{\min})$ – момент часу досягнення мінімального значення головного вектору сил тиску рідини на стінки резервуару; $\zeta_{\max}$ – максимальне значення збурення вільної поверхні рідини на всьому інтервалі часу, що розглядається; $t(\zeta_{\max})$ – момент часу досягнення максимального значення збурення вільної поверхні рідини $\zeta_{\max}$; ζ^* – збурення вільної поверхні рідини в центрі резервуару в момент часу τ закінчення дії силового імпульсу; $S(t)$ – відстань, яка пройдена резервуаром з моменту початку надання системі кількості руху, віднесене до розміру резервуару впоперек (наведені значення для наступних моментів часу: $0,05T$; $0,1T$; $0,15T$; $0,2T$). Значення перерахованих динамічних параметрів

наведені для п'яти випадків описаних вище способів динамічного збудження.

З аналізу даних, наведених в Табл. 4.3, випливає, що з усіх розглянутих способів динамічного збудження системи найменші значення збурення вільної поверхні рідини і головного вектору сил тиску рідини на стінки резервуару спостерігаються у випадку прямокутного імпульсу (випадок 1). З цього боку варіант 1 є найбільш сприятливим. Цей результат збігається з результатом О.С. Лимарченко, отриманим в роботі [117], для умов земної гравітації. Однак, на відміну від результатів роботи [117], відмінності реакції системи «резервуар – рідина» на дію імпульсу різної форми в умовах слабкої гравітації виявляються не так різко, як в умовах земної. Як видно з , випадки 3, 4 і 5 практично збігаються.

Табл. 4.3

Параметр	Варіант форми силового імпульсу				
	1	2	3	4	5
$R_{\max}$	0,00129392	0,00129400	0,00130324	0,00130360	0,001303
$t(R_{\max})$	2,6760	2,6783	2,6733	2,6764	2,6764
$R_{\min}$	-0,00938862	-0,01832001	-0,01840169	-0,01875723	-0,01472578
$t(R_{\min})$	0,0000	0,0183	0,0000	0,0091	0,0091
$\zeta_{\max}$	0,1463	0,1464	0,1474	0,1475	0,1475
$t(\zeta_{\max})$	7,2777	7,2823	7,2747	7,2785	7,2796
ζ^*	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$S(0,05T)$	0,0447	0,0411	0,0482	0,0448	0,0448
$S(0,1T)$	0,0959	0,0925	0,0993	0,0962	0,0962
$S(0,15T)$	0,1414	0,1382	0,1445	0,1418	0,1418
$S(0,2T)$	0,1800	0,1772	0,1828	0,1806	0,1806

Незважаючи на різницю в швидкості розгону резервуару, до моменту часу $0,2T$ відстань, пройдена резервуаром, для всіх випадків стає приблизно однаковою, що свідчить про те, що за цей час встигають розвинутися процеси другого напівперіоду коливань основного тону рідини. Однак, на відміну від результатів [117], при рівних максимальних значеннях імпульсу сили (випадки 2 і 4) крутизна переднього фронту імпульсу сили істотно

позначається на значенні $\zeta_{\max}$, практично не впливаючи на значення $R_{\max}$ і $R_{\min}$.

Результати чисельного визначення динамічних параметрів поведінки системи «резервуар - рідина» в умовах слабкої гравітації з урахуванням сил поверхневого натягу по вільній поверхні (при контактному куті 90°) і сил поверхневого натягу по вільній поверхні і по контуру контакту (при контактному куті 75°) представлені відповідно в Табл. 4.4 і Табл. 4.5, де позначення змінних збігаються з позначеннями, наведеними в Табл. 4.3.

Табл. 4.4

Параметр	Варіант форми силового імпульсу				
	1	2	3	4	5
$R_{\max}$	0,00159395	0,00159410	0,00160466	0,00160539	0,00160509
$t(R_{\max})$	1,6040	1,6070	1,6006	1,6036	1,6040
$R_{\min}$	-0,00938859	-0,01827339	-0,01840163	-0,01874473	-0,01471216
$t(R_{\min})$	0,0000	0,0183	0,0000	0,0091	0,0091
$\zeta_{\max}$	0,0448	0,0448	0,0452	0,0452	0,0452
$t(\zeta_{\max})$	9,3250	9,3288	9,3223	9,3257	9,3257
ζ^*	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$S(0,05T)$	0,0445	0,0410	0,0479	0,0446	0,0446
$S(0,1T)$	0,0942	0,0909	0,0974	0,0945	0,0945
$S(0,15T)$	0,1370	0,1341	0,1399	0,1374	0,1374
$S(0,2T)$	0,1727	0,1701	0,1753	0,1733	0,1733

Як можна побачити з результатів чисельного визначення динамічних параметрів, наведених в Табл. 4.4, наявність сил поверхневого натягу призводить до збільшення частоти коливань вільної поверхні рідини, що в свою чергу, призводить до зменшення часу відповідної силової реакції рідини на стінки резервуару (час $t(R_{\max})$ в Табл. 4.4 для всіх випадків набагато менше $t(R_{\max})$, наведених в Табл. 4.3). Крім того, оскільки результати дії сил поверхневого натягу можна порівняти з дією мембрани, яку натягнуто на вільну поверхні рідини, максимальне збурення вільної поверхні $\zeta_{\max}$ набагато менше, ніж в разі відсутності сил поверхневого натягу для всіх варіантів силового збудження руху.

Табл. 4.5

Параметр	Варіант форми силового імпульсу				
	1	2	3	4	5
$R_{\max}$	0,00135013	0,00135146	0,00135880	0,00135908	0,00135911
$t(R_{\max})$	2,4121	2,4147	2,4090	2,4121	2,4121
$R_{\min}$	-0,00872901	-0,01697590	-0,01710885	-0,01742543	-0,01367804
$t(R_{\min})$	0,0000	0,0183	0,0000	0,0091	0,0091
$\xi_{\max}$	0,0773	0,0775	0,0778	0,0775	0,0775
$t(\xi_{\max})$	7,3287	18,4519	7,3265	7,3299	7,3210
ξ^*	-0,0116	-0,0118	-0,0114	-0,0116	-0,0116
$S(0,05T)$	0,0434	0,0400	0,0468	0,0435	0,0435
$S(0,1T)$	0,0928	0,0895	0,0960	0,0931	0,0931
$S(0,15T)$	0,1337	0,1335	0,1395	0,1370	0,1370
$S(0,2T)$	0,1739	0,1712	0,1765	0,1744	0,1744

При наявності сил поверхневого натягу по контуру контакту частота коливань вільної поверхні рідини знижується, що веде до збільшення часу силової реакції рідини на стінки резервуару – значення $t(R_{\max})$ в Табл. 4.5 для всіх випадку більше, ніж аналогічні в Табл. 4.4. Однак, на відміну від Табл. 4.4, максимальне збурення вільної поверхні $\xi_{\max}$ при наявності сил поверхневого натягу по контуру контакту більше, що пояснюється наявністю в рівнянні вільної поверхні рідини постійного члена – форми рівноваги ξ_0 .

Таким чином, при однаковій кількості руху, яка була підведена до системи «резервуар – рідина» в умовах слабкого прояву гравітаційно-капілярних ефектів, мінімальні значення збурення вільної поверхні рідини і головного вектору сил тиску рідини на стінки резервуару спостерігаються під дією прямокутного імпульсу (випадок 1), що вказує на найбільшу сприятливість використання прямокутних імпульсних динамічних впливів при керуванні системами, що містять рідину з вільною поверхнею.

4.5. Вплив кривизни та нахилу стінок у резервуарах у формі тіла обертання

Математична модель динаміки сумісного руху системи «тіло обертання нециліндричної форми – рідина з вільною поверхнею» розроблена в

роботах О.С. Лимарченко [108, 110, 117, 118]. Складність розв’язування нелінійних крайових задач гідродинаміки обмеженого об’єму рідини із вільною поверхнею полягає не тільки в тому, що крайові умови на вільній поверхні нелінійні, але й тому, що вільна поверхня невідома і область визначення потенціалу швидкостей рідини наперед невідома. До того ж границя області змінюється у часі. У випадку порожнини нециліндричної форми область визначення форми збуреної поверхні змінюється у часі і не співпадає з незбуреною вільною поверхнею. Ця додаткова складність (геометрична нелінійність) не дозволяє сформулювати задовільний алгоритм розв’язування нелінійних задач для порожнини будь-якої форми. Оскільки розв’язок задачі динаміки рідини в такій області ускладнено, для опису руху рідини аналогічно роботам [101108, 110, 115] вводиться недекартова параметризація області, яку займає рідина τ

$$\alpha = \frac{r}{f(z)}; \beta = \frac{z}{H},$$

через $r = f(z)$ позначимо рівняння твірної порожнини, задане в циліндричній системі координат, H – глибина порожнини, а $z = 0$ співпадає з незбуреною вільною поверхнею рідини S_0 .

Центр системи координат знаходиться в центрі незбуреної поверхні рідини, вісь Oz направлена вгору, (r, θ, z) – система циліндричних координат, яка замінюється на нову недекартову (α, θ, β) ($\alpha \in [0, 1]$; і в незбуреному стані $\beta \in [-1, 0]$; $\theta \in [0, 2\pi]$). У прийнятій недекартовій системі координат (α, θ, β) область, яку займає рідина набуває циліндричної форми, але метрика цієї області вже неєвклідова. У старих змінних (r, θ, z) рівняння вільної поверхні представити у вигляді $z = \xi(r, \theta, t)$ неможливо. Головна позитивна якість введення нової параметризації полягає у тому, що внаслідок циліндричності області можливе представлення рівняння вільної поверхні рідини в розв’язаному відносно координати β вигляді

$$\beta = \frac{1}{H} \xi(\alpha, \theta, t) \text{ або } H\beta - \xi(\alpha, \theta, t) = 0. \quad (4.3)$$

Надалі використання рівняння вільної поверхні рідини у розв'язаному відносно змінної β вигляді (4.3) дозволяє ефективно застосовувати методи теорії збурень і метод Канторовича для побудови нелінійної скінченновимірної моделі динаміки резервуару з рідиною.

Представимо у старих змінних вільну поверхню (4.3)

$$\frac{z}{H} - \frac{1}{H} \xi\left(\frac{r}{f(z)}, \theta, t\right) = -\eta(r, \theta, t) = 0$$

$$\text{або} \quad \eta(r, \theta, z, t) = -\frac{z}{H} + \frac{1}{H} \xi\left(\frac{r}{f(z)}, \theta, t\right)$$

де $\eta = 0$ – рівняння вільної поверхні рідини.

Кінематичну граничну умову на вільній поверхні можливо записати у вигляді

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\vec{\nabla} \eta, \vec{\nabla} \varphi) = 0, \quad (4.4)$$

а після виконання операцій диференціювання у нових змінних

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{H} \frac{\partial \xi}{\partial t}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{1}{H} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{1}{H} \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial r}; \quad \frac{\partial \xi}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial \beta}{\partial r} = 0,$$

отримаємо залежності між похідними вільної поверхні у старих та нових змінних

$$\frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{1}{Hf} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = \frac{1}{H} \frac{\partial \xi}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = -\frac{1}{H} - \frac{1}{H} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{rf'}{f^2} = -\frac{1}{H} \left(1 + \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\right);$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial r} = \frac{1}{f} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial z} = -\frac{rf'}{f^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{1}{H} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \frac{1}{H} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}.$$

На завершення отримуємо наступний вираз для кінематичної граничної умови на збуреній вільній поверхні

$$\frac{1}{H} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{H f^2} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{1}{H \alpha^2 f^2} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{1}{H} \left[1 + \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \right] \left[\frac{1}{H} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right] = 0,$$

а після помноження цього рівняння на H запишемо його таким чином

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{f^2} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha^2 f^2} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{H} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right] = \frac{1}{H} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}.$$

Перепишемо вираз для кінематичної граничної умови (4.4) у наступному вигляді

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{f^2} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha^2 f^2} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \beta = \frac{1}{H} \xi(\alpha, \theta, t).$$

Пропонується відокремити кутову координату і шукати розклад змінних у наступному вигляді

$$\varphi = \sum_i b_i \psi_i(\alpha, \beta) T_i(\theta); \xi = \bar{\xi}(t) + \sum_i a_i \bar{\psi}_i(\alpha) T_i(\theta), \quad (4.5)$$

$$\text{де } \bar{\psi}_i(\alpha) = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right) \Big|_{\beta=0} = \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi_i}{\partial \beta} - \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\beta=0}.$$

Кут θ відокремлений як співмножник-функція $T_i(\theta)$, що в подальшому значно полегшує чисельну реалізацію.

Постановка задачі про рух обмеженого об'єму рідини в нових змінних має вигляд

$$\Delta \varphi_0 = 0; \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} - f' \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0, r = f(z); \quad (4.7)$$

$$L(\xi, \varphi_0) = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{f^2} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha^2 f^2} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} - \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = 0, \quad (4.8)$$

$$\beta = \frac{1}{H} \xi(\alpha, \theta, t).$$

При цьому умова нерозривності потоку рідини (4.6) та умова не перетікання скрізь змочувану границю (4.7) виписані у старих змінних, тому що їх виконання буде забезпечено розв'язком задачі про знаходження

координатних функцій у старій параметризації, а умова неперетікання скрізь вільну поверхню рідини (кінематична гранична умова на вільній поверхні рідини) у вигляді співвідношення (4.8) – у нових змінних. Підкреслені члени з'являються в наслідок нециліндричної форми порожнини, зайнятою рідиною, що відображає недекартовий тип нової параметризації.

Форма запису варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського [101, 107, 117, 118] співпадає з випадком циліндричного баку, але враховуючи нециліндричність порожнини доведення принципу відрізняється. Розглянемо в загальному вигляді задачу нелінійних коливань для нерухомого резервуару

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \tau; \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma; \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{1+(\vec{\nabla}\xi)^2}} \frac{\partial\xi}{\partial t} \text{ на } S, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 - g\xi = 0 \text{ на } S, \quad (4.12)$$

при цьому члени, пов'язані з поступальним рухом системи, перетворюються аналогічно роботі [117, 118].

За можливі переміщення оберемо будь-які малі переміщення точок системи, які в заданий момент часу не суперечать в'язям. На можливі переміщення накладаємо обмеження, які впливають з кінематичних граничних умов та ізохронності варіацій

$$\Delta\delta\varphi_0 = 0 \text{ в } \tau; \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial\delta\varphi_0}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad (4.14)$$

$$\frac{d\delta\xi}{dt} = N_0 \frac{\partial\delta\varphi_0}{\partial n} \text{ на } S; \quad (4.15)$$

$$\delta\varphi_0 = 0; \delta\xi = 0; \delta\vec{\varepsilon} = 0, \text{ коли } t = t_1; t = t_2; \quad (4.16)$$

$$\text{де } N_0 = \sqrt{\left[f^{-2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{1}{\alpha^2 f^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(1 + \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \right)^2 \right]} = |\vec{\nabla} \eta|.$$

Якщо варіювати кінематичну граничну умову на вільній поверхні (4.8), отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{f^2} \frac{\partial \delta \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha^2 f^2} \frac{\partial \delta \xi}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} - \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial \delta \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} - \frac{\partial \delta \varphi_0}{\partial z} + \\ & + \frac{1}{f^2} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \delta \varphi_0}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha^2 f^2} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial \delta \varphi_0}{\partial \theta} - \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \delta \varphi_0}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Розпишемо співвідношення (4.15) та отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \gamma_\xi} &= \sqrt{1 + (\vec{\nabla} \xi)^2}. \\ \frac{d \delta \xi}{dt} &= \frac{\partial \delta \xi}{\partial t} + \frac{1}{f^2} \frac{\partial \delta \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha^2 f^2} \frac{\partial \delta \xi}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} - \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial \delta \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}; \\ N_0 \frac{\partial \delta \varphi_0}{\partial n} &= (\vec{\nabla} \delta \varphi_0, \vec{\nabla} \eta) = -\frac{1}{f^2} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \delta \varphi_0}{\partial \alpha} - \frac{1}{\alpha^2 f^2} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial \delta \varphi_0}{\partial \theta} + \left(1 + \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \delta \varphi_0}{\partial z}, \end{aligned}$$

що у сукупності еквівалентно (4.17).

При варіюванні кінематичної граничної умови на вільній поверхні функція ξ , яка входить як значення аргументу в потенціал швидкостей на вільній поверхні (неявно), не варіюється. Тому що, згідно визначенню варіацій, що відповідають принципу Гамільтона–Остроградського, у випадку суцільного середовища варіації записуються не відносно фіксованих точок простору, а відносно фіксованих матеріальних частинок. На вільній поверхні частинка рідини має координати (x, y, ξ) , а в русі порівняння вона буде мати координати $(x, y, \xi + \delta \xi)$, інакше це вже буде не частинка, що знаходиться на поверхні. В даному випадку варіація $\delta \xi$ не свідчить про зміну закону руху частки рідини, а вказує, що при варіюванні потенціалу швидкостей на вільній поверхні рідини розглянута матеріальна частинка залишається на вільній поверхні.

З використанням техніки варіювання незалежних змінних, розвинутій в [89, 94], отримано динамічну граничну умову на вільній поверхні рідини для резервуару у довільній формі тіла обертання, що, відповідно до рекомендацій робіт [109] є обґрунтуванням принципу Гамільтона-Остроградського для даного класу систем [117, 118].

Для успішної реалізації нелінійної скінченновимірної моделі динаміки рідини з вільною поверхнею в порожнині обертання потрібно визначити набір координатних функцій для представлення потенціалу швидкостей рідини. Основні етапи алгоритму побудови координатних функцій пов'язані з виконанням умови розв'язності нелінійної задачі Неймана для рівняння Лапласа. У зв'язку з тим, що крайова задача (4.9) – (4.12) не має точного аналітичного розв'язку для довільних порожнин обертання, необхідно прагнути до наближеного, проте високоточного виконання крайових умов. Умову розв'язності задачі Неймана можна записати у вигляді

$$\int_{\Sigma_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Sigma + \int_{\Delta \Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Sigma + \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0 \quad (4.18)$$

Для виконання рівняння (3.2) необхідно, щоби дорівнювали нулю всі його члени, що еквівалентно виконанню вимоги задовільнення в слабкому сенсі умови неперетікання на змоченої в незбуреному стані стінки бака, умови неперетікання рідини на деякому продовженні стінки бака над вільною поверхнею і вимоги збереження об'єму рідини в збуреному русі.

Враховуючи зв'язок умови неперетікання на незбуреній твердій поверхні з умовами розв'язності задачі Неймана для рівняння Лапласа, цю умову необхідно виконати з високою точністю. У існуючих роботах виконанню цієї умови приділяється мало уваги. Якщо використовувати класичний метод, то виконання умов можуть бути порушені [117, 118]. Таке порушення умови розв'язності задачі у підсумку приводить до нестійкості чисельних алгоритмів.

Умова неперетікання рідини на деякому продовженні твердої стінки, куди доходять гребені хвиль, зазвичай взагалі не враховується при аналізі

нелінійних коливань рідини в нециліндричних баках, хоча є основною в аналізі фізичного змісту задачі. При підстановці в третій доданок умови розв'язності кінематичної граничної умови на вільній поверхні

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\vec{\nabla} \xi)^2}} \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \text{на } S,$$

отримаємо

$$\int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = - \int_{S_0} \frac{\partial \xi}{\partial t} dS = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_0} \xi dS.$$

Ця умова еквівалентна вимозі збереження об'єму рідини в її збуреному стані. На відміну від циліндричних порожнин у випадку параболоїда обертання виконання умови збереження об'єму для кожної форми коливання рідини окремо є недостатнім для виконання вимоги збереження об'єму в цілому.

З аналізу умов розв'язності нелінійної крайової задачі виходить, що для коректного розв'язання нелінійної задачі необхідно:

- виконання з високою точністю умови неперетікання незбуреної рідини крізь змочену стінку резервуару;
- виконання умови неперетікання рідини на деякому продовженні стінки резервуару над вільною поверхнею;
- виконання умови збереження об'єму рідини в збуреному русі;
- задовольняння цим умовам необхідно всіх етапах побудови розкладів змінних до реалізації варіаційного принципу.

Важливим етапом розв'язання розглянутої задачі є представлення розкладу потенціалу швидкостей у вигляді

$$\varphi = w_k^{(m)}(r, z) \frac{\sin}{\cos} m\theta. \quad (4.19)$$

Розклад φ двохпараметричний, тут m – параметр кутового розкладу з кутовою координатою, k – параметр розкладу по радіусу. Оскільки для тіла

обертання відділення кутової координати виконується точно, фактично у надалі буде розв'язуватися окремо задача для кожного фіксованого m .

Для чисельної реалізації застосовувався розклад розв'язку по гармонічним поліномам $w_k^{(m)}$, що є поліномами Лежандра для сферичної системи координат, перетвореними до циліндричної системи координат. Ці функції взагалі не залежать від геометрії області і задовольняють рекурентним співвідношенням [131, 236]:

$$\frac{\partial w_k^{(m)}}{\partial z} = (k - m) w_{k-1}^{(m)};$$

$$r \frac{\partial w_k^{(m)}}{\partial r} = k w_k^{(m)} - (k - m) z w_{k-1}^{(m)};$$

$$(k + m + 1) w_{k+1}^{(m)} = (2k + 1) z w_k^{(m)} - (k - m) (z^2 + r^2) w_{k-1}^{(m)};$$

$$(k + m + 1) r w_k^{(m)} = 2(m + 1) \left[(z^2 + r^2) w_{k-1}^{(m)} - z w_k^{(m)} \right].$$

Прийнятий розклад задовольняє вимогам повноти, ортогональності та гармонічності, проте не задовольняє кінематичним граничним умовам на твердих стінках і на вільній поверхні рідини.

Класична задача про визначення частот і форм вільних коливань рідини має вигляд

$$\Delta \varphi = 0 \text{ в } \tau; \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma_0; \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \lambda \varphi \text{ на } S_0 \quad (4.22)$$

або варіаційне формулювання

$$\delta I = 0, \text{ де } I = \int_{\tau_0} (\vec{\nabla} \varphi)^2 d\tau - \lambda \int_{S_0} \varphi^2 dS.$$

Ця задача розв'язується на основі метода Рітца. Згідно другої теореми Гріна

$$\int_{\tau} \vec{\nabla} \varphi d\tau = \int_{S+\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \varphi dS - \int_{\tau} \Delta \varphi \varphi dS.$$

Оскільки

$$\int_{\tau} \Delta \varphi \varphi dS = 0,$$

тому надалі залишаються лише поверхневі інтеграли. Представимо φ у

вигляді $\Phi_m \frac{\sin}{\cos} m\theta$, тоді функціонал матиме вигляд:

$$I = \int_{\tau^*} \left[\left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial z} \right)^2 - \frac{m^2}{r^2} \Phi_m^2 \right] d\tau^* - \lambda \int_{S^*} \Phi_m^2 dS$$

τ^* – меридіанний перетин резервуару, а S^* – радіус вільної поверхні.

Після підстановки розкладів за методом Рітца отримуємо алгебраїчну задачу на власні значення

$$Ax - \lambda Bx = 0,$$

де

$$a_{ij} = \int_{\tau^*} \left[\frac{\partial w_i^{(m)}}{\partial r} \frac{\partial w_j^{(m)}}{\partial r} + \frac{\partial w_i^{(m)}}{\partial z} \frac{\partial w_j^{(m)}}{\partial z} - \frac{m^2}{r^2} w_i^{(m)} w_j^{(m)} \right] r dr dz;$$

$$b_{ij} = \int_{S^*} w_i^{(m)} w_j^{(m)} \Big|_{z=0} dS^* = \int_0^R w_i^{(m)} w_j^{(m)} \Big|_{z=0} r dr.$$

В змінних α, θ, β вирази для a_{ij} та b_{ij} мають вигляд

$$a_{ij} = \int_0^1 \left[\frac{\partial w_i^{(m)}}{\partial z} w_j^{(m)} \right]_{\beta=0} \alpha [f(0)]^2 d\alpha + \int_{-1}^0 \left[\frac{\partial w_i^{(m)}}{\partial r} - f(H\beta) \frac{\partial w_i^{(m)}}{\partial z} \right]_{\alpha=1} w_i^{(m)} f(z) H d\beta =$$

$$= \int_0^1 \int_{\substack{-1 \\ (\alpha)(\beta)}}^0 \left[\frac{\partial w_i^{(m)}}{\partial r} \frac{\partial w_j^{(m)}}{\partial r} + \frac{\partial w_i^{(m)}}{\partial z} \frac{\partial w_j^{(m)}}{\partial z} - \frac{m^2}{\alpha^2 (f(H\beta))^2} w_i^{(m)} w_j^{(m)} \right] \alpha H (f(H\beta))^2 d\alpha d\beta;$$

$$b_{ij} = \int_0^1 w_i^{(m)} w_j^{(m)} [f(0)]^2 \alpha d\alpha.$$

Оскільки розв'язок задачі (4.20) – (4.22) лише частково задовольняє вимогам збереження об'єму рідини і містить аналітичну особливість на контурі L_0 [117, 131], який утворений перетином поверхонь S_0 та Σ_0 . З розвитком аналітичних методів розв'язання нелінійних задач динаміки

резервуарів з рідиною до рішень задачі визначення частот і форм вільних коливань висуваються додаткові вимоги як інтегрального, так і диференціального характеру. А саме, умова неперетікання повинна виконуватися на $\Delta\Sigma$ – продовженні поверхні Σ_0 у зовнішній бік області τ_0 . У загальному випадку розв'язок задачі визначення частот і форм вільних коливань (3.4) таким вимогам не задовольняє. Тому для розв'язання нелінійної задачі необхідно відмовитися від застосування класичного формулювання задачі і побудувати наближену систему координатних функцій $\bar{\psi}_i$, близьких до розв'язків задачі визначення частот і форм вільних коливань ψ_i з близькими частотними параметрами $\bar{\lambda}_i$ і λ_i , при цьому ці функції додатково повинні уточнено відповідати умові неперетікання на $\Delta\Sigma$.

Для реалізації цієї мети використовуємо два прийоми: ітераційне уточнення розв'язку задачі на власні значення для підвищення точності розв'язку і метод допоміжної області для ослаблення впливу особливої точки на контурі і виконання умов неперетікання на продовженні стінок резервуару [117, 118]. Для різних форм бака застосовується розклад розв'язку по гармонічних поліномах, які, взагалі кажучи, не враховують геометрію порожнини.

Метод послідовного уточнення розв'язку задачі полягає в тому, що після розв'язання варіаційної задачі вибираємо у якості нових координатних функцій отримані форми вільних коливань і повторюємо розв'язання задачі. При необхідності таку процедуру можна повторити. Щоб побудувати координатні функції для розв'язання нелінійної задачі динаміки рідини з вільною поверхнею для ослаблення впливу особливостей в кутовій точці застосовується метод допоміжної області. На основі класичного методу розв'язується задача на власні значення для області $\tau + \Delta\tau$, де $\Delta\tau$ обирається на основі вимог умови неперетікання на продовженні змочуваної стінки бака з урахуванням припустимих амплітуд збурень вільної поверхні. При

цьому особливості розв'язку виявлятимуться вище за рівень реальної поверхні, а в околі $L = \tau \cap \Sigma$ розв'язок буде регулярним. Розв'язок з вільної поверхні S , що відповідає області $\tau + \Delta\tau$ зноситься на S_0 . Таким чином, завдяки цьому прийому особлива точка піднімається над рівнем реальної вільної поверхні. Пропонується як $\bar{\psi}_i$ розглядати значення ψ'_i на поверхні S_0 , оскільки по характеру поведінки $\bar{\psi}_i$ є близьким до ψ'_i і ψ_i , а власні числа, отримані за допомогою методу Релея для $\bar{\psi}_i$, несуттєво відрізняються від λ_i .

На відміну від класичного методу, коли в постановку задачі не входить характер зміни поверхні $\Delta\Sigma$ над рівнем незбуреної вільної поверхні, метод допоміжної області показує залежність розв'язку задачі від характеристик $\Delta\Sigma$.

Алгоритм побудови системи координатних функцій, які використовувались для розв'язання нелінійної задачі динаміки рідини з вільною поверхнею в параболічному баку такий:

- розв'язування задачі на власні значення за методом допоміжної області;
- ітераційне уточнення розв'язку;
- ортогоналізація функцій, що відповідають одному номеру m ;
- визначення власного числа для кожної функції за методом Релея, яке надалі використовується для оцінки частотних характеристик і контролю.

Даний спосіб визначення координатних функцій базується на розв'язку лінійної задачі і доповнений вимогами виконання частини кінематичних обмежень нелінійної задачі. Така методика дозволила отримати систему координатних функцій, які уточнено задовольняють умові неперетікання на збуреній змочуваній границі.

Розклади шуканих змінних збурення вільної поверхні рідини ξ і потенціалу швидкостей φ аналогічно роботам [101, 109, 117] представимо у вигляді:

$$\xi = \bar{\xi}(t) + \sum_i a_i \bar{\psi}_i(\alpha) T_i(\theta); \varphi_0 = \sum_i b_i \psi_i(\alpha, \beta) T_i(\theta).$$

де
$$\bar{\psi}_i(\alpha) = \left. \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right|_{\beta=0} = \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi_i}{\partial \beta} - \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\beta=0}.$$

$T_i(\theta)$ – тригонометричні функції. Координатні функції для представлення потенціалу швидкостей рідини $\psi_i(\alpha, \beta)$ є гармонічними і згідно вимогам умови розв'язності задачі (3.1), мають уточнено задовільняти вимогам неперетікання на змоченій границі Σ , що складається з незбуреної змоченої границі Σ_0 і її деякого продовження $\Delta\Sigma$, до якого піднімаються гребні хвиль. Згідно методики визначення координатних функцій, яка викладена в роботах [117, 118], система функцій $\bar{\psi}_i(\alpha)$ є повною на S_0 .

На відміну від випадку циліндричної області розклади змінних містять член $\bar{\xi} = \bar{\xi}(t, a_j)$, який визначається з вимоги збереження об'єму рідини в її збуреному русі. Відповідно до робіт [117, 118], приймаємо амплітудні параметри a_i розкладів збурення вільної поверхні рідини як незалежні, а параметри розкладів потенціалу швидкостей будемо розглядати як залежні від a_i , тобто $b_i = b_i(\dot{a}_i, a_k)$. Представимо $\bar{\xi}$ і b_j у вигляді:

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 + \bar{\xi}_3;$$

$$b_j = b_j^{(1)} + b_j^{(2)} + b_j^{(3)} + b_j^{(4)}.$$

Тут цифрові індекси відповідають порядку малості величин. З вимоги збереження об'єму $V = \text{const}$ отримуємо

$$\begin{aligned} \Delta V &= V - V_0 = \int_{\tau_1} \alpha [f(H\beta)]^2 H d\alpha d\beta d\theta - \int_{\tau_0} \alpha [f(H\beta)]^2 H d\alpha d\beta d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \int_{-1}^{\beta} [f(H\beta)]^2 d\beta \right\} \alpha H d\alpha d\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \int_{-1}^0 [f(H\beta)]^2 d\beta \right\} \alpha H d\alpha d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\beta} [f(H\beta)]^2 d\beta \alpha H d\alpha d\theta. \end{aligned}$$

Розкладаємо інтеграл $F(\beta) = \int_0^\beta [f(H\beta)]^2 d\beta$ у ряд Тейлора в околі $\beta=0$ з

точністю до членів третього порядку, підставимо розклад $\xi = \bar{\xi} + \sum_i a_i \bar{\psi}_i T_i$

та введемо позначення

$$\alpha_i^\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \bar{\psi}_i T_i \alpha d\alpha d\theta; \quad \beta_{ij}^\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j T_i T_j \alpha d\alpha d\theta;$$

$$\gamma_{ijk}^\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j \bar{\psi}_k T_i T_j T_k \alpha d\alpha d\theta; \quad \delta_{ijkl}^\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j \bar{\psi}_k \bar{\psi}_l T_i T_j T_k T_l \alpha d\alpha d\theta;$$

а також підставимо розклад $\bar{\xi} = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, та отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_1 &= 0; \bar{\xi}_2 = -\frac{f'(0)}{\pi f(0)} \sum_{i,j} a_i a_j \beta_{ij}^\nu; \\ \bar{\xi}_3 &= -\frac{f'(0)^2 + f(0) f''(0)}{3\pi f(0)^2} \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \gamma_{ijk}^\nu. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Як можна бачити із співвідношення (4.23), вимога збереження об'єму в амплітудних параметрах являє собою деякий голономний зв'язок, який дозволяє виключити $\bar{\xi}$. При цьому лінійний член в розкладі $\bar{\xi}$ відсутній.

Методика побудові дискретної моделі сумісного руху системи «резервуар у формі тіла обертання – рідина з вільною поверхнею» аналогічна наведеним у п. 2.2 та 2.3. В результаті одержуємо рівняння Лагранжа другого роду в амплітудних параметрах a_i та параметрах руху несучого тіла $\vec{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} & \sum_i \ddot{a}_i \left\{ V_{ir}^1 + \sum_j a_j V_{irj}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k V_{irjk}^3 \right\} + \ddot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \bar{U}_r^1 + \sum_i a_i \bar{U}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \bar{U}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \bar{U}_{rijk}^4 \right\} = \\ & = \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j V_{ijr}^{2*} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k V_{ijk}^{3*} + \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \sum_i \dot{a}_i \bar{U}_{iri}^{2*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \bar{U}_{ijr}^{3*} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k \bar{U}_{ijk}^{4*} \right\} - \\ & - g \left\{ \sum_i a_i W_{ir}^2 \right\} + \frac{3}{2} \sum_{i,j} a_i a_j W_{ijr}^3 + 2 \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k W_{ijk}^4, r=1,2,...,N \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{(M_T + M_F)} \left\{ \sum_i \ddot{a}_i \left[\vec{U}_i^1 + \sum_j a_j \vec{U}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{U}_{ijk}^3 \right] \right\} + \ddot{\vec{\varepsilon}} = \\ & = \frac{\vec{F}}{(M_T + M_F)} - g\vec{k} - \frac{\rho}{(M_T + M_F)} \left\{ \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{U}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k 2\vec{U}_{ijk}^3 \right\} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Рівняння (4.24) описують динаміку амплітуд коливань вільної поверхні рідини, а рівняння (4.25) – динаміку резервуара, який рухається поступально під дією кінематичного збурення або активних зовнішніх сил [117, 118]. Рівняння (4.25) також містять сили взаємодії між резервуаром і рідиною. Сумісний рух резервуара з рідиною повністю характеризується незалежними узагальненими координатами a_i та $\vec{\varepsilon}$.

Розглянемо поведінку системи «параболічний резервуар – рідина з вільною поверхнею» під дією гармонічної сили $F = A \sin(\omega t)$ в горизонтальному напрямку, де амплітуда зовнішньої сили $A = 0,4$ Н, а співвідношення мас резервуару та рідини становить $M_T = 0,01 M_F$. Процес коливань розглядався на інтервалі часу до 100 періодів коливань по першій антисиметричній формі ψ_1 .

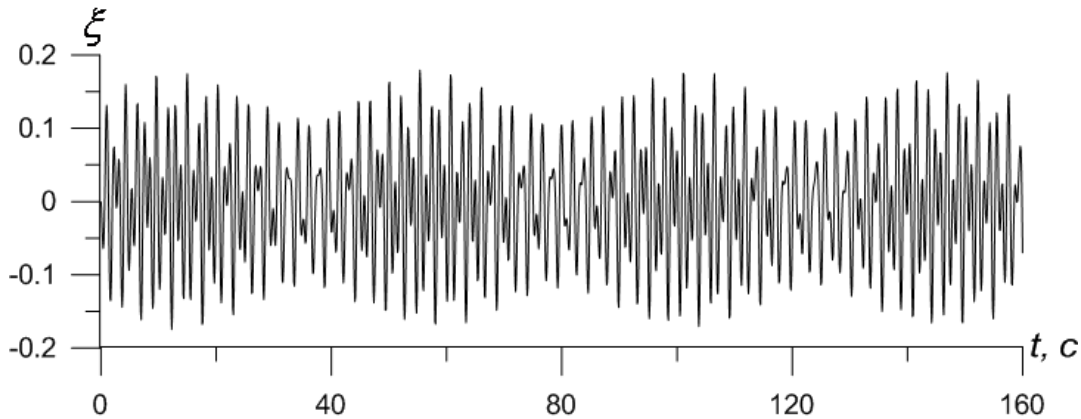


Рис. 4.28. Збурення вільної поверхні рідини на повному інтервалі спостереження у параболічному резервуарі при збудженні руху системи на резонансній частоті при співвідношенні мас резервуару та рідини $M_T = 0,01 M_F$

Розглянемо нелінійні коливання вільної поверхні рідини в резервуарі, коли частота зовнішньої збуджуючої сили F розташована в околі резонансу, тобто $p = 3,67$ Гц (Рис. 4.28), на часовому інтервалі 160 с. Як можна бачити

з Рис. 4.28, для коливань вільної поверхні характерна амплітудна модуляція при незмінному середньому значенні амплітуд. Для більш детального дослідження характеру коливань наведено графік на Рис. 4.29, де показано зміну амплітуд вільної поверхні на часовому інтервалі 60-80 с. Як можна бачити з Рис. 4.29, вихід коливань на усталений режим не відбувається. Наявність на графіку збурення амплітуди зрізів, зламів та двогорбих піків є ознакою впливу вищих гармонік частотного спектру на власних частотах. Відзначимо, що урахування спектральних складових на власних частотах при аналізі усталених режимів коливань в дослідженнях [258] не проводилось.

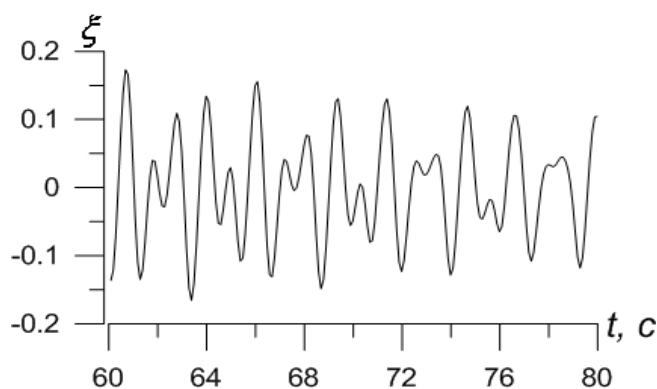


Рис. 4.29. Збурення вільної поверхні рідини на інтервалі спостереження 60-80 с у параболічному резервуарі при збудженні руху системи на резонансній частоті при співвідношенні мас резервуару та рідини $M_T = 0,01M_F$

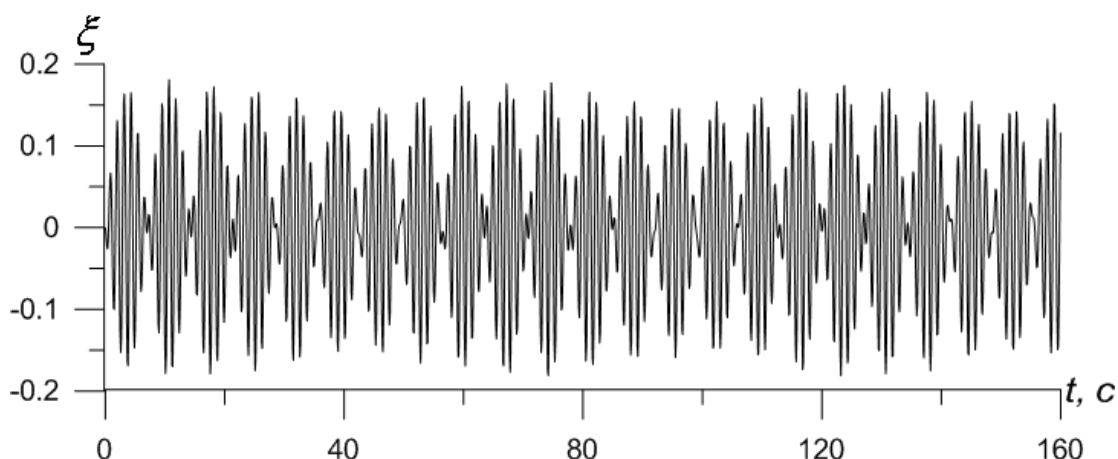


Рис. 4.30. Збурення вільної поверхні рідини на повному інтервалі спостереження у параболічному резервуарі при збудженні руху системи на зарезонансній частоті при співвідношенні мас $M_T = 0,01M_F$

Проаналізуємо поведінку системи для випадку, коли частота зовнішньої збуджуючої сили F розташована в зарезонансному діапазоні, тобто $p = 5$ Гц з амплітудою $0,15$ Н (Рис. 4.30 та Рис. 4.31). Для даного процесу характерна виражена амплітудна модуляція при незмінному нульовому середньому значенні амплітуди. Період амплітудної модуляції дорівнює чотирьом періодам першої антисиметричної форми ψ_1 . Практична відсутність зрізів та зламів означає дуже слабкий вплив вищих гармонік спектру у порівнянні з коливаннями вільної поверхні при збудженні руху на резонансній частоті.

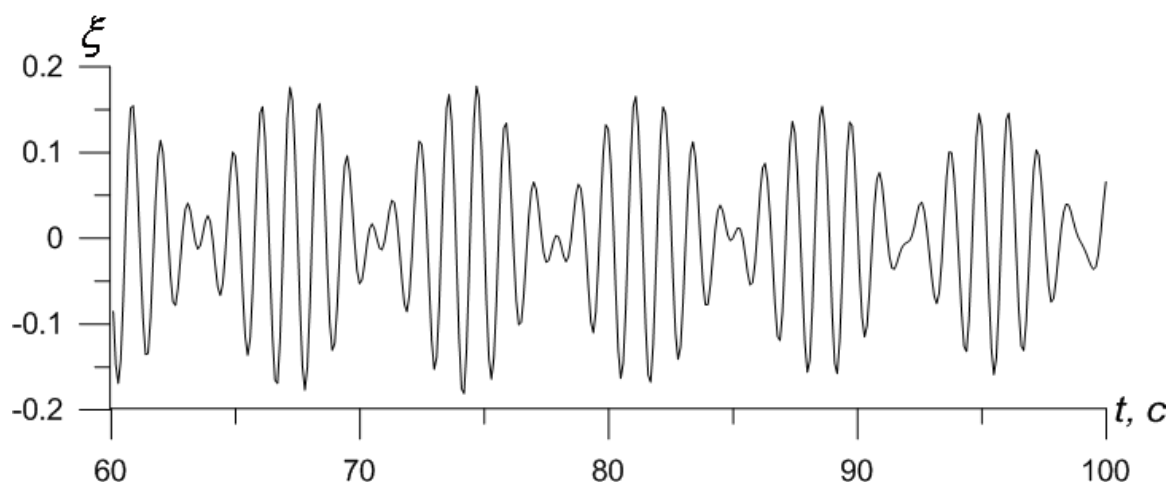


Рис. 4.31. Збурення вільної поверхні рідини на інтервалі спостереження 60-80 с у параболічному резервуарі при збудженні руху системи на зарезонансній частоті при співвідношенні мас резервуару та рідини $M_T = 0,01M_F$

Проаналізуємо поведінку системи для випадку, коли частота зовнішньої збуджуючої сили F розташована в дорезонансному діапазоні, тобто $p = 2,5$ Гц з амплітудою $0,4$ Н (Рис. 4.32). З графіку на Рис. 4.32 можна бачити, що вплив вищих форм коливань на характер процесу найбільш суттєвий, тому вихід на усталений режим не відбувається. Було розглянуто також задачу дослідження впливу на рухомий параболічний резервуар зовнішньої збуджуючої сили F з частотою в дорезонансному діапазоні, але для співвідношень мас резервуару і рідини $M_T \geq 0,02 M_F$. Чисельні результати показали, що при збудженні коливань з частотою, близькою до резонансної, тільки для співвідношення $M_T \geq 0,5 M_F$ спостерігається

модуляційна періодичність зміни амплітуди коливань вільної поверхні рідини.

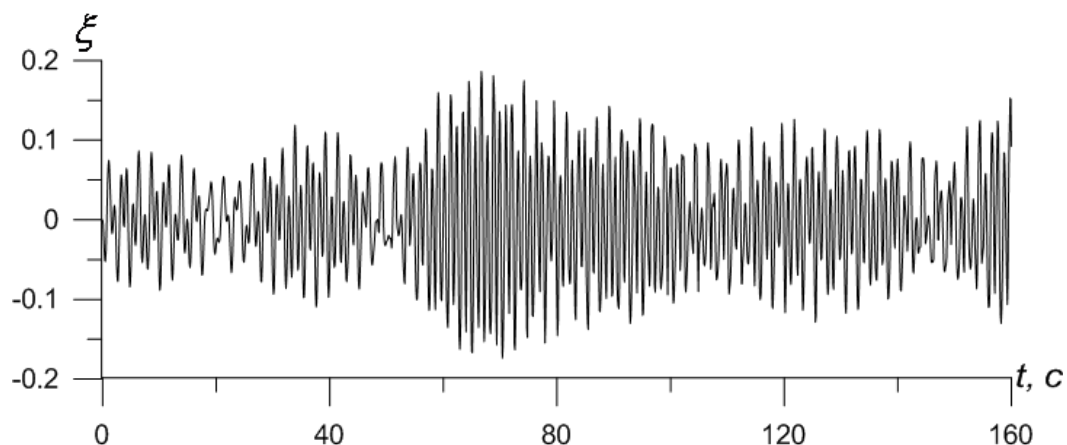


Рис. 4.32. Збурення вільної поверхні рідини на повному інтервалі спостереження у параболічному резервуарі при збудженні руху системи на дорезонансній частоті при співвідношенні мас резервуару та рідини $M_T = 0,5M_F$

На Рис. 4.32 та Рис. 4.33 показано зміну амплітуди коливань вільної поверхні рідини на стінці резервуару в часовому проміжку 50 і 20 с. Графік ілюструє, що при співвідношенні мас $M_T \geq 0,5 M_F$ та зниженні амплітуди зовнішньої сили коливання вільної поверхні виходять на умовно усталений режим, проте на відміну від результатів робіт [258] коливання відбуваються не з постійною амплітудою, а зі значною амплітудною модуляцією.

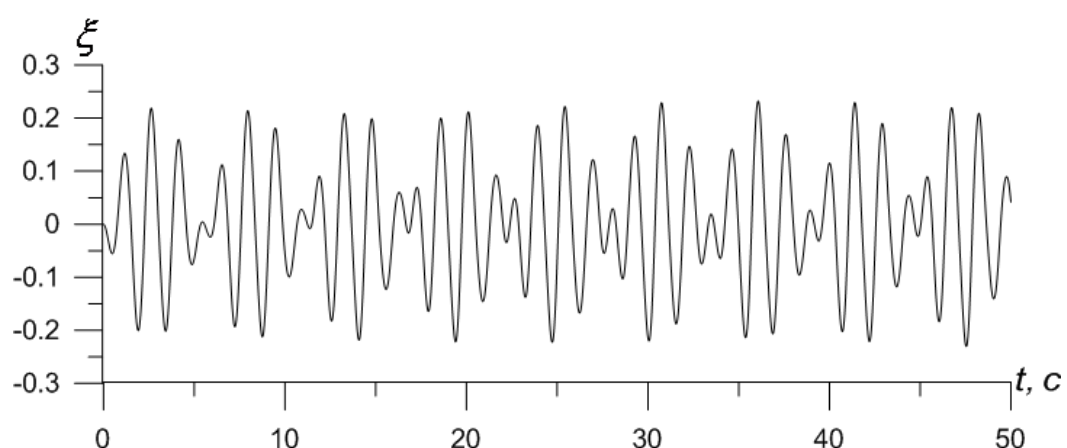


Рис. 4.33. Збурення вільної поверхні рідини на інтервалі спостереження 0-50 с у параболічному резервуарі при збудженні руху на резонансній частоті при співвідношенні мас резервуару та рідини $M_T = 0,5M_F$

Із збільшенням коефіцієнту співвідношення мас резервуару і рідини збільшується час виходу системи на умовно усталений режим в резонансному діапазоні збудження руху. На Рис. 4.35 та Рис. 4.36 наведено графіки амплітуди збурення вільної поверхні рідини в резонансному діапазоні частот для співвідношення мас резервуару і рідини 5 та 10 відповідно.

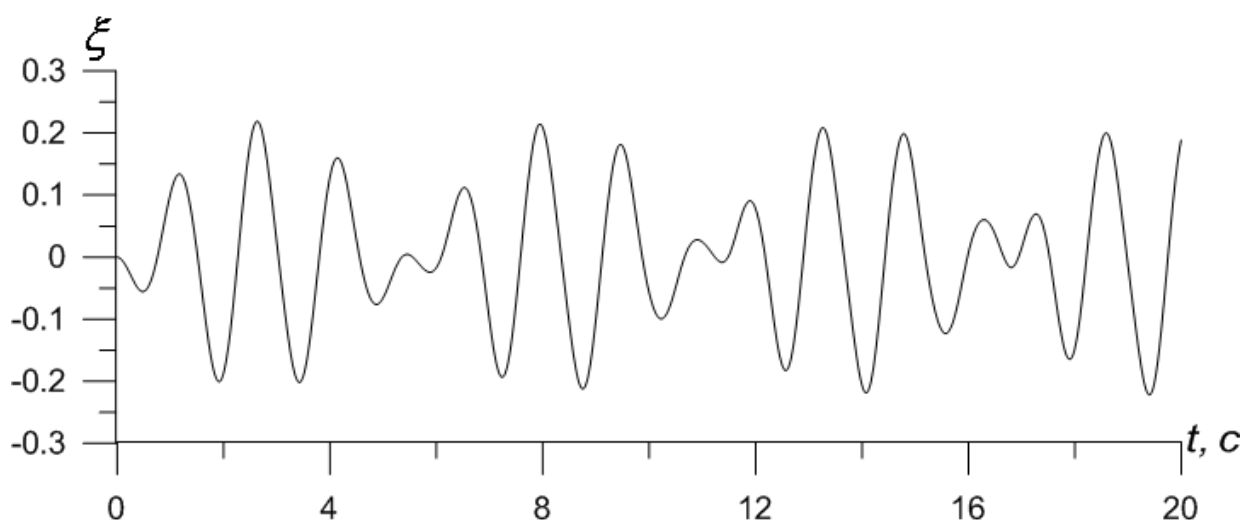


Рис. 4.34. Збурення вільної поверхні рідини на інтервалі спостереження 0-20 с у параболічному резервуарі при збудженні руху на резонансній частоті при співвідношенні мас резервуару та рідини $M_T = 0,05M_F$

Період амплітудної модуляції для співвідношення Модуляційна періодичність при співвідношенні мас резервуара і рідини $M_T = 5M_F$ становить приблизно 17 періодів по першій формі, а для $M_T = 10M_F$ – приблизно 40 періодів. Аналіз показав, що період такої модуляції відповідає періоду зміни енергії рідини. Отримані результати для резонансного та зарезонансного діапазону частот якісно узгоджуються з експериментальними результатами робіт [258, 332], де розглядалися резервуари тільки прямокутної форми.

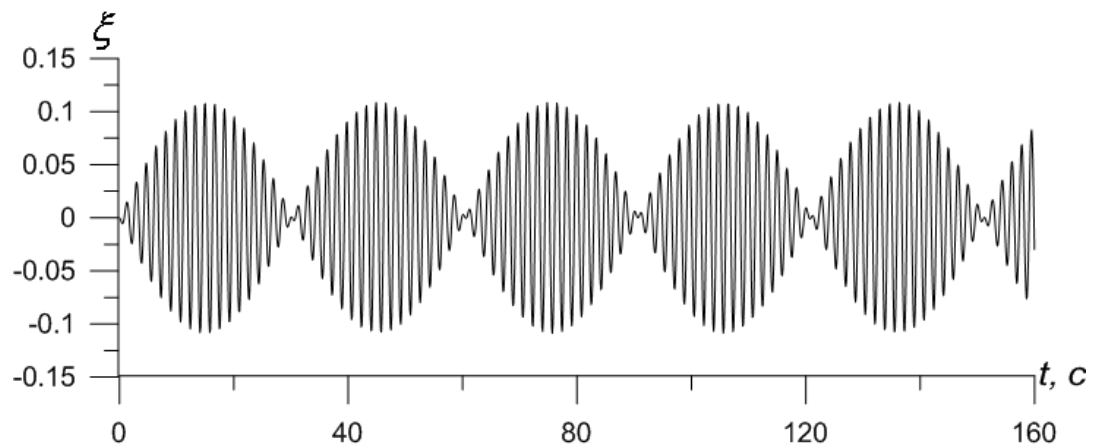


Рис. 4.35. Збурення вільної поверхні рідини у параболічному резервуарі при збудженні руху на резонансній частоті при співвідношенні мас резервуару та рідини $M_T = 5M_F$

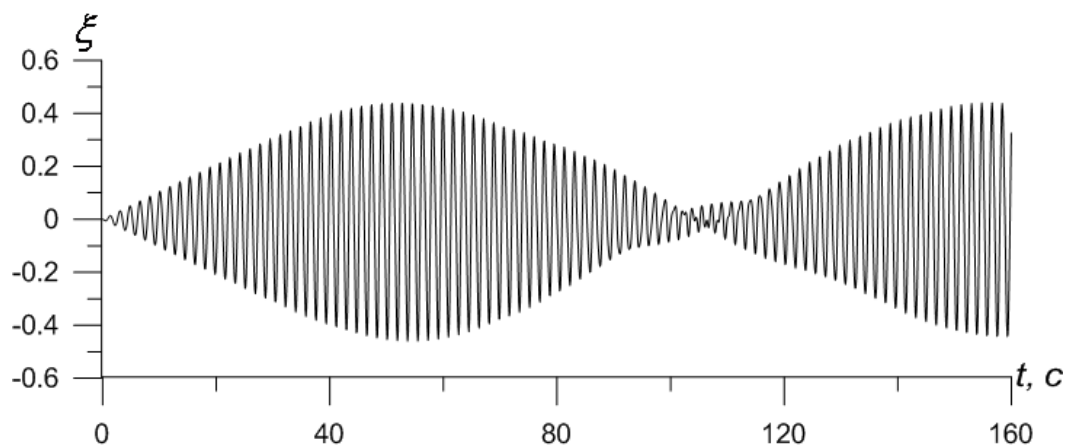


Рис. 4.36. Збурення вільної поверхні рідини у параболічному резервуарі при збудженні руху системи на резонансній частоті при співвідношенні мас резервуару та рідини $M_T = 10M_F$

В дослідженнях з параметричного резонансу найчастіше розглядалися випадки кругового циліндричного резервуару. Природно, що в практичних випадках резервуар може бути нециліндричної форми. Зміна форми резервуару має двояке значення. По-перше, змінюється нахил стінок і площа плоского днища, і ця властивість особливо яскраво проявляється при вертикальних рухах системи. По-друге, форма резервуару визначає величину співвідношення рухомої частини рідини до загальної. Відомо, що при коливаннях рідини тільки незначна частина об'єму рідини під вільною поверхнею рухається активно, тоді як амплітуди руху рідини в донній

частині зменшуються за експоненціальною залежністю з ростом глибини. Якщо в циліндрі об'єм донної частини великий, то в перевернутому конусі він значно менше, що зумовлює істотно більший внесок рухомості рідини в формування процесів сумісного руху резервуара з рідиною.

Табл. 4.6

$a_2(0)$	Максимуми амплітуди та час їх появи									
	R=0		R=0.25		R=0.5		R=0.75		R=1	
	max	$t_{\max}$	max	$t_{\max}$	max	$t_{\max}$	max	$t_{\max}$	max	$t_{\max}$
0.02	0.105	48.42	0.1094	46.7	0.1101	43.17	0.112	40.25	0.1149	38.12
0.05	0.1074	26.36	0.1118	24.38	0.1126	22.54	0.1146	22.63	0.1165	21.44
0.08	0.1188	14.31	0.1216	13.22	0.1226	12.21	0.1242	13.02	0.125	12.33
0.1	0.1303	10.31	0.1326	9.51	0.1334	8.78	0.1347	9.83	0.1356	7.75

Дослідимо узагальнення задачі Фарадея для резервуару у форму усіченого конуса, коли система рухається під дією гармонічної сили. Частота силового збудження вдвічі більше частоти по першій формі коливань, а амплітуда дорівнює половині ваги системи. Сумісний рух такої конструкції описується системою нелінійних диференціальних рівнянь (4.24) – (4.25). Розглянемо сімейство усічених конічних резервуарів з днищами радіусу $R = 0$, $R = 0,25$, $R = 0,5$, $R = 0,75$ та $R = 1$ (при цьому перший варіант відповідає звичайному конусу, а останній – резервуару циліндричної форми). Будемо завдавати початкові збурення вільної поверхні рідини з амплітудами 0,02; 0,05; 0,08; 0,1 в напрямку осі Ox . Результати дослідження наведені в Табл. 4.6, де показані значення максимальних амплітуд хвиль та час їх появи.

Аналіз табличних даних дозволяє зробити наступні висновки. Незалежно від амплітуди початкових збурень в системі встановлюються подібні за амплітудою хвилі, при цьому чим більше початкова обурення в системі, тим менше часу потрібно на вихід на означену хвилю. Якщо звернути увагу на вплив нахилу стінок і площі днища на величини збурених

хвиль, то видно, що максимальних хвиль розвиваються в разі циліндричного резервуара, коли площа днища максимальна, а відхилення форми резервуара від циліндричної мінімально. Така залежність монотонна і в разі звичайного конуса (площа днища нуль, нахил стінок в порівнянні з циліндричною формою максимальний) амплітуда збуреної хвилі мінімальна. В цілому залежність збурених хвиль від нахилу стінок резервуара є досить слабкою (відмінності не перевищують 10% для розглянутих випадків). Типові картини хвиль представлені на Рис. 4.37. При цьому помітний ефект модуляції коливань, який в класичній задачі Фарадея не проявляється, і обумовлений фактором сумісності руху резервуару з рідиною при збудженні руху силою, яка прикладається до резервуару в вертикальному напрямку.

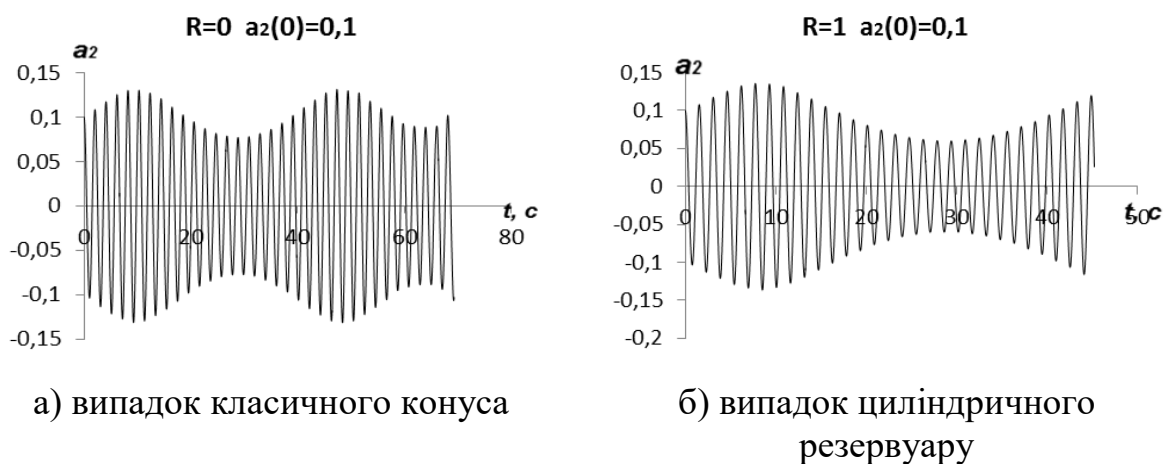


Рис. 4.37. Залежність амплітуди поверхневої хвилі у часі для узагальненої задачі Фарадея при збудженні руху вертикальною гармонічною силою

Розглянемо тепер випадок розвитку коливань на вільній поверхні в резервуарі конічної форми при заданих вертикальних рухах резервуару, однак для випадку, коли резервуар може здійснювати рухи в горизонтальному напрямку, обумовлені взаємодією рідини зі стінками резервуару. Будемо для порівняння розглядати випадок, коли рух резервуару в поперечному напрямку виключається (класична задача Фарадея). В обох випадках початкове збурення по першій формі приймається з амплітудою $0.025R$, а вертикальні коливання системи

відбуваються з амплітудою $0.01R$ на подвоєній власній частоті коливань. Як показано у п. 2.2, для класичної та неklasичної постановок задач частоти коливань будуть відрізнятися. Так власна частота коливань в класичній задачі Фарадея буде 3.13209 Гц (збігається з парціальною частотою), тоді як власна частота при наявності додаткового ступеня вільності – можливості руху резервуару в горизонтальному напрямку – буде 5.36356 Гц (для випадку, коли $M_T = 0,138M_F$). Зміна частот відбувається більш ніж в $1,7$ рази. Відповідно, параметричні резонанси відбуваються для класичної та неklasичної завдань Фарадея на різних частотах. Результати визначення зростання амплітуди коливань рідини на стінці резервуару в часі для класичної та неklasичної задачі Фарадея представлені на Рис. 4.38 і Рис. 4.39 відповідно.

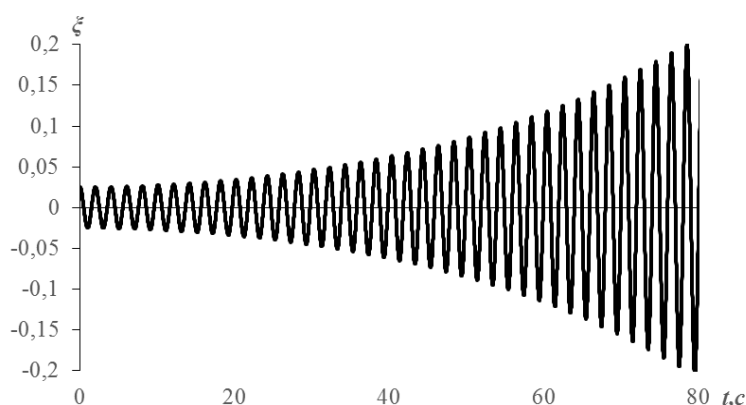


Рис. 4.38. Збурення вільної поверхні рідини на стінці резервуару в класичній задачі Фарадея (резервуар конічної форми)

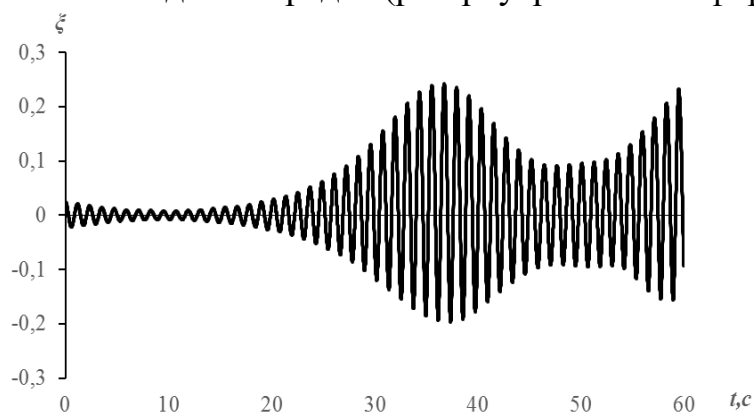


Рис. 4.39. Збурення вільної поверхні рідини на стінці резервуару в узагальненій задачі Фарадея (резервуар конічної форми)

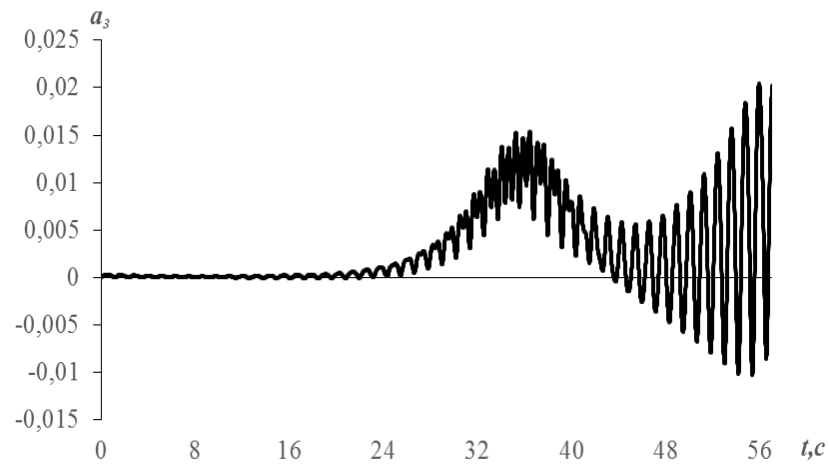


Рис. 4.40. Збурення у часі амплітуди першої осесиметричної форми в узагальненій задачі Фарадея (резервуар конічної форми)

Як можна бачити з Рис. 4.38 і Рис. 4.39, у випадку класичної задачі Фарадея зростання амплітуди збурення вільної поверхні рідини на стінці резервуару відбувається з обвідною, яка змінюється монотонно. У той же час у випадку узагальненої задачі Фарадея зміна у часі амплітуди коливань вільної рідини на стінці відбувається при наявності істотної модуляції. Аналіз показує, що зміна у часі амплітуди осесиметричної форми a_3 як показника ступеня нелінійності процесів також значно відрізняється. Якщо в класичній задачі Фарадея амплітуда також змінюється монотонно, то в узагальненій задачі Фарадея з урахуванням спільності руху рідини та тіла-носія ця залежність набагато складніше. Так в моменти часу між 32 і 40 с відбувається збільшення амплітуд коливань на вільній поверхні і форма a_3 зростає. Таке зростання відображає нелінійність профілів хвиль, коли висота гребня хвилі перевищує глибину западини. Таким чином, в узагальненій задачі Фарадея сильніше і раніше в часі проявляються нелінійні ефекти. Необхідно також відмітити, що ефекти сумісності руху в системі «резервуар - рідина з вільною поверхнею» для випадку конічного резервуару проявляються істотніше, ніж для випадку циліндричного резервуару. Це обумовлено тим, що в конічному резервуарі зона малорухомої рідини біля днища резервуару значно менше, ніж у випадку циліндричного резервуару. В моделі системи

це пов'язано зі зміною величини коефіцієнту $\bar{B}_r^1$, який визначає міру взаємозв'язку руху по формі коливань r (в даному випадку першої антисиметричної форми) з параметрами поступального руху резервуару.

Висновки до розділу

Досліджено задачу про розвиток параметричного резонансу в механічній системі «резервуар - рідина з вільною поверхнею» в умовах слабого прояву гравітаційно-капілярних ефектів, коли резервуар рухається у вертикальному напрямку за заданим гармонічним законом. Встановлено, що урахування в системі сил поверхневого натягу призводить до поглиблення взаємодії та енергообміну (лінійному і нелінійному) між формами коливань. Це призводить до того, що залежність від часу збурення вільної поверхні рідини в характерній точці - на стінці резервуару - стає нерегулярною і містить, крім гармоніки на резонансній частоті, також гармоніки на власних частотах форм коливань і комбінаційних частотах. При цьому, якщо наявність сил поверхневого натягу по вільній поверхні забезпечує більш швидкий вихід системи на режим параметричного резонансу, то наявність сил поверхневого натягу по контуру контакту забезпечує відхід від резонансу за рахунок збільшення енергетичного внеску осесиметричних форм коливань.

Внесення узагальненої дисипації в систему діє аналогічно виборчому фільтру, пригнічуючи комбінаційні частоти і залишаючи домінуючими тільки власну частоту першої антисиметричної форми для випадку $\theta_1 = 90^\circ$ і власні частоти першої осесиметричної і першої антисиметричної форм для випадку $\theta_1 < 90^\circ$. Таким чином, врахування капілярності в умовах слабкої інтенсивності гравітаційного поля істотно змінює характер розвитку параметричного резонансу в задачі Фарадея як в якісному, так і в кількісному аспектах.

Досліджено задачу про нелінійні коливання циліндричного резервуара, частково заповненого рідиною, під впливом горизонтальної гармонічної сили. Для трьох діапазонів зміни частоти зовнішнього силового збудження (резонансна, дорезонансна і зарезонансна частоти) описана специфіка поведінки системи. Показано, що для найбільш поширеного в практиці випадку співвідношення мас резервуара і рідини $M_T \approx (0,1 \div 0,25)M_F$, під дією горизонтальної гармонічної сили резервуар рухається не за гармонічним, а за більш складним квазіперіодичним законом. Для цього квазіперіодичного закону руху в різних частотних діапазонах характерна присутність ефектів амплітудної модуляції, зміни у часі середнього значення, вплив вищих форм коливань. І тільки значне збільшення маси резервуару (майже на два порядки) призводить до того, що коливання рідини практично не впливають на рух резервуару, і останній під дією гармонічної сили рухається за законом, близьким до гармонічного. Причина отриманих результатів полягає у відмові від гіпотези нехтування коливаннями на власних частотах системи, а також в урахуванні сумісного характеру руху системи «резервуар - рідина». Отримані результати узгоджуються з результатами нових теоретичних і експериментальних робіт.

Досліджено процес виходу системи «параболічний резервуар – рідина з вільною поверхнею» на усталений режим у випадку, коли рух резервуару збуджується гармонічною силою для різних співвідношень мас резервуару і рідини. Розглянуто особливості хвилеутворення при збільшенні параметра співвідношення маси резервуару до маси рідини. Визначено граничний коефіцієнт співвідношення маси резервуару і маси рідини для класичного параболоїда (0,5), при якому амплітудна модуляція проявляється в околі резонансної частоти.

ВИСНОВКИ

Побудовано варіанти узагальнення класичної задачі Фарадея з урахуванням: 1) сумісності коливань рідини та резервуару, 2) наявності додаткового ступеня вільності руху резервуару (можливості горизонтального переміщення або кутових коливань резервуару на маятниковому підвісі); 3) можливості вертикального силового збудження руху резервуару.

Для узагальнення задачі Фарадея виконано: 1) механічну постановку задачі для кожного випадку узагальнення; 2) отримання в аналітичному вигляді формул для обчислення власних частот сумісних коливань; 3) отримання в аналітичному вигляді формул для обчислення областей стійкості та нестійкості системи; 4) проведення якісного та спектрального аналізу результатів обчислювальних експериментів для виявлення властивостей руху системи і перевірки справедливості прийнятих гіпотез.

Дослідження проводилося на основі нелінійної багатомодової (до 12 форм коливань) дискретної моделі, яка побудована на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського. Дослідження проводилося на основі методу модальної декомпозиції з урахуванням коливань на власних частотах всіх форм.

Внесення в систему додаткового ступеня вільності (можливість горизонтального переміщення або кутових коливань резервуару на маятниковому підвісі) приводить до підвищення частоти параметричного резонансу, причому вона тим вище, чим менше маса резервуару по відношенню до маси рідини або чим коротше довжина маятникового підвісу.

При вертикальному збуренні руху резервуару з можливістю горизонтального переміщення або кутових коливань на маятниковому підвісі на відміну від класичної задачі Фарадея динамічні процеси в системі розвиваються як сукупність параметричного резонансу і вимушених

коливань. Для даного узагальнення задачі Фарадея можливий вихід системи на нелінійний режим коливань на будь-якій частоті.

Взагалі, вихід на усталений режим коливань в нелінійних багаточастотних системах типу “резервуар – рідина з вільною поверхнею” при параметричному збуренні руху резервуару не відбувається – спектр коливань збурення вільної поверхні рідини на стінці (як найбільш характерній точці, яка доступна для вимірів та спостереження) завжди містить гармоніки на власних та комбінаційних частотах.

Розглянуто побудову в аналітичному вигляді керування резервуаром (активної зовнішньої сили) для забезпечення руху резервуару за заданим законом. Для цього використовувалось декілька підходів: 1) побудова керування із зворотним зв’язком на основі вимірювання збурень (відхилень від закону програмного руху); 2) підхід, пов’язаний з можливістю компенсації головного вектору сил тиску рідини на стінки резервуару; 3) підхід на основі варіаційного принципу найменшого примушення Гауса, який дозволяє реалізувати в системі задані програмні закони руху та забезпечити мінімізацію енерговитрат на керування.

Для перевірки якості побудованого керування були розв’язані наступні задачі: 1) розгін резервуару із нерухомого положення за заданий час до необхідної швидкості і далі його рівномірний рух з цією швидкістю; 2) гальмування резервуару, який рухається рівномірно із заданою швидкістю, за заданий час до повної зупинки; 3) переміщення резервуару представляє собою заданий гармонічний закон.

Керування зі зворотним зв’язком побудовано на основі лінійної системи у збуреннях, при цьому фазовими координатами є відхилення від програмного закону руху. Перетворення систему у канонічну відносно фазових координат форму дозволило значно спростити аналітичну процедуру побудови керування на основі модального підходу або співставлення з еталонною системою. Для шуканого класу систем отримані також в аналітичному вигляді формули для коефіцієнтів квадратичного

функціоналу якості. Ці коефіцієнти можуть бути обрані таким чином, щоб керування забезпечило одночасно необхідну якість перехідних процесів в системі та мінімум квадратичного функціоналу.

Керування зі зворотним зв'язком на основі лінійної системи у збуреннях може бути використано тільки для забезпечення «комфортних» рухів резервуару, тобто при відсутності великих збурень вільної поверхні рідини. Однак, на відміну від методу компенсації, накопичення похибки при використанні керування зі зворотним зв'язком відсутнє, тому виконання програмного закону руху резервуару може здійснюватися на тривалих інтервалах часу.

Керування на основі компенсації головного вектору сил тиску рідини на стінки резервуару дозволяє зупинити резервуар при будь-яких початкових умовах. При цьому у заданий момент часу резервуар повністю зупиняється, а рідина продовжує коливання, не впливаючи на рух резервуару. Це означає, що метод компенсації доцільно використовувати при переміщеннях конструкцій з рідиною в межах відповідних технологічних або виробничих процесів. При розгоні резервуару керування в режимі компенсації можливо забезпечити набір швидкості при будь-яких інтенсивних впливах. Однак наявність запізнення призводить до накопичення похибки на тривалих інтервалах часу.

Керування, побудоване на основі варіаційного принципу найменшого примушення Гауса з використанням лінійних моделей руху системи та лінійних програмних законів, може бути застосовано тільки для забезпечення «комфортних» рухів резервуару, тобто при відсутності великих (в нелінійному діапазоні амплітуд) збурень вільної поверхні рідини. Для забезпечення руху резервуару при наявності високо інтенсивних навантажень на основі варіаційного принципу найменшого примусу Гауса розроблено нелінійні закони керування, які забезпечують необхідну для практики точність виконання програмних законів руху та мінімізацію енерговитрат на керування системою в цілому.

Досліджено параметричний резонанс в механічній системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею» за умови слабкого прояву поверхневого натягу, коли резервуар рухається у вертикальному напрямку за заданим гармонічним законом; встановлено, що наявність сил поверхневого натягу забезпечує більш швидкий вихід системи на резонансний режим, однак наявність сил поверхневого натягу по контуру контакту “пом’якшує” резонанс за рахунок збільшення енергетичного внеску осесиметричних форм коливань.

Визначено умови та особливості виходу коливань вільної поверхні рідини під дією зовнішньої сили на усталений режим за відсутності та (чи) наявності узагальненої дисипації в механічній системі; дослідження проводились для різних частотних діапазонів збудження. Встановлено, що тільки при зростанні в рідині узагальненої дисипації в системі спостерігається вихід на усталений режим.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абгарян К.А., Рапопорт И.М. Динамика ракет. – М.: Машиностроение, 1969. – 378 с.
2. Абрамсон Х.Н. Исследование нелинейных поперечных колебаний жидкости, заключенной в жесткие полости / Х.Н. Абрамсон, В.Х. Чу, Д.Д. Кана // Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Прикладная механика. – 1966. – 2, № 4. – С. 66–74.
3. Алексеев Л.И. К вопросу описаний немалых движений твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью // Тр. НИИ прикл. мат. и мех. при Томск. ун-те. – Томск: ун-т. – 1976. – 7. – С. 3-10.
4. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. – М.: Наука, 1976. – 424 с.
5. Афанасьев К.Е. Моделирование свободных границ в гидродинамике идеальной жидкости // Гидродинам. огранич. потоков. – Чебоксары, 1988. – С. 9–18.
6. Бабаков Н.А., Воронов А.А., Воронова С.А. и др. Теория автоматического управления. Часть I. Теория линейных систем автоматического управления. – М.: Высш. шк., 1986. – 367 с.
7. Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д. и др. Гидромеханика невесомости. – М.: Наука, 1976. – 504 с.
8. Базилевский А.В., Калиниченко В.А., Рожков А.Н. Влияние вязкости жидкости на поверхностные волны Фарадея // Изв. РАН. МЖГ. – 2018. – № 6. – С. 30-42.
9. Барина О.Н., Докучаев Л.В., Стажков Е.М. Приближенный метод решения задачи о колебаниях жидкости в полостях // Колебания упругих конструкций с жидкостью. – М.: ЦНТИ Волна, 1980. – С. 13–19.
10. Барняк М.Я., Луковский И.А. Определение частот и форм собственных колебаний идеальной жидкости при большой относительной глубине // Прикл. механика. – 1974. – 10. – № 5. – С. 109-115.
11. Барняк М.Я., Луковский И.А. Об одной модификации вариационного метода решения задачи о собственных колебаниях жидкости в сосудах // Прикл. механика. – 1977. – 13. – № 7. – С. 83-89.
12. Барняк М.Я. Реализация вариационного метода решения задачи о собственных колебаниях идеальной несжимаемой жидкости в горизонтальной цилиндрической полости с плоскими вертикальными

днищами // Прикладные методы исследования физико-механических процессов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. – С. 64–76.

13. Барняк М.Я. Приближенные методы решения задач динамики жидкости в горизонтальных и вертикальных цилиндрических полостях // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 1981. – С. 19–27.

14. Барняк М.Я., Луковский И.А. О потенциалах Стокса-Жуковского для цилиндрических сосудов с произвольным поперечным сечением // Динамика и устойчивость сложных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. – С. 43–51.

15. Барняк М.Я., Луковский И.А. К решению задач динамики идеальной несжимаемой жидкости в сферической полости и в горизонтальном круговом канале // Математическая физика и нелинейная механика. – 1985. – № 4. – С. 66-71.

16. Богомаз Г.И., Красников А.В., Щербак Л.В. Определение присоединенных масс жидкости в частично заполненной горизонтальной цилиндрической полости // Колебания, прочность и устойчивость сложных механических систем. – Киев: Наук. думка, 1979. – С. 72-76.

17. Богомаз Г.И., Комаренко А.Н. Определение гидродинамических коэффициентов уравнений движения цилиндра, частично заполненного жидкостью и наклоненного относительно горизонтальной плоскости // Динамика механических систем. – Киев: Наук. думка, 1983. – С. 76-85.

18. Богомаз Г.И., Кривовязюк Ю.П., Комаренко А.Н. Колебания цистерны в продольной плоскости ее симметрии // Динамические характеристики механических систем. – Киев: Наук. думка, 1984. – С. 48-56.

19. Богоряд И.Б. К решению задачи о колебаниях жидкости, частично заполняющей полость, вариационным методом // Прикл. математика и механика. – 1962. – 26. – № 6. – С. 1122-1127.

20. Богоряд И.Б., Дружинин И.А. Применение вариационного метода к расчету нелинейных колебаний жидкости в сосуде (задача Коши) // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. – Томск: Томск. ун-т, 1975. – С. 40-46.

21. Богоряд И.Б., Дружинин И.А., Дружинина Г.З., Либин Э.И. Введение в динамику сосудов с жидкостью. – Томск: Томск. ун-т, 1977. – 144 с.

22. Богоряд И.Б., Симонова Н.М. О колебаниях жидкости, частично заполняющей наклонный цилиндр // Колебания упругих конструкций с жидкостью. – М.: ЦНТИ Волна, 1980. – С. 39–44.

23. Богоряд И.Б., Дружинин И.А., Чахлов С.В. Исследование переходных процессов при больших возмущениях свободной поверхности жидкости в замкнутом отсеке // Динамика космических аппаратов и исследование космического пространства. – М.: Машиностроение, 1986. – С. 194-203.
24. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 600 с.
25. Бояршина Л.Г., Ганиев Р.Ф. О нелинейных колебаниях деформируемых тел с жидкостью, совершающих движение в пространстве // Прикл. механика. – 1976. – 12. – № 7. – С. 62-69.
26. Бояршина Л.Г., Ковальчук П.С. О волновых формах свободной поверхности жидкости, содержащейся в цилиндрическом сосуде // Прикл. механика. – 1986. – 22. – № 3. – С. 113–116.
27. Бояршина Л.Г., Ковальчук П.С., Пучка Г.Н., Холопова В.В. О динамической неустойчивости свободной поверхности жидкости в цилиндрическом сосуде при его продольном возбуждении // Прикл. механика. – 1987. – 23. – № 7. – С. 82–87.
28. Бояршина Л.Г., Ковальчук П.С. Анализ нелинейных волновых движений жидкости в цилиндрическом сосуде, совершающем заданные угловые движения // Прикл. механика. – 1990. – 26. – № 6. – С. 95–101.
29. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти т. / Ред. В.Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1980. – Т. 3. Колебания машин, конструкций и их элементов / под ред. Ф.М. Диментберга и К.С. Колесникова. – 1980. – 544 с.
30. Галиуллин А.С. Некоторые вопросы устойчивости программного движения. – Казань: Таткнигоиздат, 1960. – 252 с.
31. Галиуллин А.С. Построение систем программного движения. – М.: Наука, 1971. – 352 с.
32. Галкин М.С., Жмурин И.П. Определение форм колебаний в произвольных сосудах методом аналитического продолжения // Колебания упругих конструкций с жидкостью. – Новосибирск: НЭТИ, 1973. – С. 30-32.
33. Галкин М.С., Жмурин И.П. Определение форм колебаний в сосудах произвольной формы методом коллокаций // Колебания упругих конструкций с жидкостью. – Новосибирск: НЭТИ, 1974. – С. 63-74.
34. Ганеев А.М. Интегрирование упрощенных дифференциальных уравнений колебаний жидкости в грузовых отсеках судна // Труды Ленингр. ин-та водн. транспорта. – 1977. – № 158. – С. 95-98.

35. Ганиев Р.Ф., Холопова В.В. О колебательных формах движения свободной поверхности жидкости в движущихся полостях // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1975. – № 10. – С. 883-886.
36. Ганиев Р.Ф., Холопова В.В. Нелинейные колебания тела с жидкостью, совершающего движение в пространстве // Прикл. механика. – 1975. – 11. – № 11. – С. 115–126.
37. Ганиев Р.Ф., Холопова В.В. О нелинейных резонансных колебаниях тел с жидкостью // Прикл. механика. – 1977. – 13. – № 10. – С. 23–29.
38. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
39. Докучаев Л.В. Решение краевой задачи о колебаниях жидкости в конических полостях // Прикл. математика и механика. – 1964. – 18. – № 1. – С. 151–155.
40. Докучаев Л.В. О некоторых решениях уравнений Лапласа и Навье-Стокса, связанных с вращением тела с жидкостью // Мат. физика. – 1972. – 11. – С. 20-26.
41. Докучаев Л.В., Шетухин В.Л. Устойчивость немалых колебаний жидкости в сосуде, совершающем угловые движения // Теория устойчивости и ее приложения. – Новосибирск, 1979. – С. 100-106.
42. Дружинин И.А., Чахлов С.В. Расчет нелинейных колебаний жидкости в сосуде (задача Коши) // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. – Томск: Томск. ун-т, 1981. – С. 85-91.
43. Калиниченко В.А., Нестеров В.С., Секерж-Зенькович С.Я., Чаковский А.А. Экспериментальное исследование поверхностных волн при резонансе Фарадея // Изв. РАН. МЖГ. – 1995. – № 1. – С. 122-129.
44. Калиниченко В.А., Лиззарага-Селайя К., Секерж-Зенькович С.Я. О наблюдении стоячих волн большой амплитуды в условиях гармонического резонанса Фарадея // Изв. РАН. МЖГ. – 2000. – № 1. – С. 185-188.
45. Калиниченко В.А. Развитие сдвиговой неустойчивости в приузловых областях стоячей внутренней волны // Изв. РАН. МЖГ. – 2005. – № 6. – С. 120-126.
46. Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я. Экспериментальное исследование волн Фарадея максимальной высоты // Изв. РАН. МЖГ. – 2007. – № 6. – С. 120-126.

47. Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я. Экспериментальное исследование вторичных стационарных течений в поверхностных волнах Фарадея // Изв. РАН. МЖГ. – 2008. – № 1. – С. 141-148.
48. Калиниченко В.А. О разрушении волн Фарадея и формировании струйного всплеска // Изв. РАН. МЖГ. – 2009. – № 4. – С. 112-122.
49. Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я. О срыве параметрических колебаний жидкости // Изв. РАН. МЖГ. – 2010. – № 1. – С. 128-136.
50. Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Со А.Н. Волны Фарадея в прямоугольном сосуде с локальными нерегулярностями дна // Изв. РАН. МЖГ. – 2015. – № 4. – С. 83-91.
51. Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Со А.Н. Стоячие поверхностные волны в прямоугольном сосуде с локальными нерегулярностями стенок и дна // Изв. РАН. МЖГ. – 2017. – № 2. – С. 65-74.
52. Канторович Л.В., Крылов В.И. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 600 с.
53. Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. – М.: Наука, 1975. – 227 с.
54. Колесников К.С. Жидкостная ракета как объект регулирования. – М.: Машиностроение, 1969. – 298 с.
55. Колесников К.С., Самойлов Е.А., Рыбак С.А. Динамика топливных систем ЖРД. – М.: Машиностроение, 1975. – 171 с.
56. Колесников К.С. Динамика ракет. – М.: Машиностроение, 1980. – 376 с.
57. Комаренко А.Н., Луковский И.А., Фещенко С.Ф. К задаче о собственных значениях с параметром в краевых условиях // Укр. мат. журнал. – 1965. – 17, № 6. – С. 22-30.
58. Комаренко А.Н. Задача о собственных значениях с параметром в краевых условиях для эллиптических уравнений, вырождающихся на части границы области // Укр. мат. журнал. – 1966. – 18, № 6. – С. 3-11.
59. Комаренко А.Н. Обобщенная задача Неймана и соответствующие ей спектральные задачи для уравнений с вырождением на части границы области // Укр. мат. журнал. – 1969. – 21, № 6. – С. 757-767.
60. Комаренко А.Н., Луковский И.А. Нелинейные колебания жидкости в цилиндрическом сосуде в условиях, близких к невесомости // Динамика и устойчивость многомерных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974. – С. 52-60.

61. Комаренко А.Н., Луковский И.А. Устойчивость нелинейных колебаний жидкости в сосуде, совершающем гармонические колебания // Прикл. механика. – 1974. – 10. – № 10. – С. 97–102.
62. Комаренко А.Н. Асимптотическое разложение собственных функций задачи с параметром в краевых условиях в окрестности угловых граничных точек // Укр. мат. журнал. – 1980. – 32, № 6. – С. 653-659.
63. Комаренко А.Н. Определение частот и форм колебаний жидкости в несимметричных областях // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 1981. – С. 107-114.
64. Комаренко А.Н. Расчет динамических характеристик жидкости в горизонтально расположенном цилиндре // Аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. – С. 26-36.
65. Константинов О.В. Вплив сил поверхневого натягу на нелінійну динаміку системи резервуар-рідина в слабкому гравітаційному полі // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — Київ, Ін-т математики НАН України, 2006. — Т. 3. — № 4. — С. 198–213.
66. Константинов А.В. Влияние слабых гравитационно-капиллярных эффектов на поведение резервуара с жидкостью при сложном динамическом нагружении // Український математичний конгрес. – Ін-т математики НАН України, м. Київ. – 2010. – Секція 1, С. 63-72.
67. Константинов А.В. Нелинейная модель движения жидкости в полости вращения при наличии слабых гравитационно-капиллярных эффектов // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – т. 7, № 3. – С. 213-223.
68. Константинов А.В., Лимарченко О.С. Исследование параметрического резонанса в задаче М. Фарадея при наличии слабых гравитационных эффектов // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2011. – т. 8, № 2. – С. 83-100.
69. Константинов О.В., Лимарченко О.С. Узагальнена задача Фарадея про рух резервуару з рідиною // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2012. – вип. 16. – С. 76-85.
70. Константинов А.В. Параметрические колебания в системе «резервуар – жидкость со свободной поверхностью»: обобщения задачи Фарадея // International Workshop «Hydrodynamics of moving objects», Ukraine, Kiev. – 2012, April 23-23. – P. 58-73.

71. Константинов А.В. Особенности переходных процессов в классической задаче Фарадея в условиях слабой гравитации / А.В. Константинов // Матеріали міжнародної наукової конференції «Варіаційні методи механіки». – Київ. – 28-30 вересня 2012. – С. 70-80.
72. Константинов А.В., Лимарченко О.С. Нелинейные колебания с жидкостью со свободной поверхностью при горизонтальном силовом возбуждении // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – т. 9, № 1. – С. 188-202.
73. Константинов О.В., Лимарченко О.С. Вихід на параметричний резонанс в узагальненій задачі Фарадея про рух резервуара з рідиною // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2013. – вип. 17. – С. 73-80.
74. Константинов О.В. Узагальнена задача Фарадея для механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» за наявності пружного амортизатора // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2013, вип. 3. – С. 154-158.
75. Константинов А.В. Обобщенная задача Фарадея для резервуара, частично заполненного жидкостью, совершающего наклонные движения // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – т. 10, N 4-5. – С. 472-479.
76. Константинов А.В. Вынужденные нелинейные колебания жидкости в резервуаре параболической формы / А.В. Константинов, О.С. Лимарченко, И.Ю. Семенова // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – т. 11, №5. – С. 68-77.
77. Константинов О.В. Вплив узагальненої дисипації та сил поверхневого натягу на нелінійну динаміку системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» / О.В. Константинов, І.Ю. Семенова // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2015, спецвипуск. – С. 125-128.
78. Константинов А.В. Динамика резервуара в форме тела вращения, частично заполненного жидкостью, при сложном импульсном нагружении / А.В. Константинов, О.С. Лимарченко, К.В. Кинебас, О.Ю. Паранькина // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2016. – т. 13, № 3. – С. 117-128.
79. Константинов О.В. Задача про параметричний резонанс у системі резервуар-рідина з вільною поверхнею / О.В. Константинов, О.С. Лимарченко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – т. 14, № 1. – С. 171-185.

80. Константинов О.В. Модальне керування механічною системою «резервуар – рідина з вільною поверхнею» / О.В. Константинов, В.В. Новицький // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – т. 14, № 2. – С. 42-55.
81. Константинов О.В. Задачі динаміки сумісного руху резервуару з рідиною / О.В. Константинов // Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання». – Івано-Франківськ - Яремче. – 14-19 травня 2018. – С. 307-310.
82. Константинов О.В. Керування системою «резервуар – рідина» зі зворотним зв'язком на основі еталонної моделі / О.В. Константинов, В.В. Новицький, І.Ф. Святовец // Вісник Запорізького національного університету: Зб. наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2018. – № 1. – С. 35-47.
83. Константинов О.В. Програмне керування рухом резервуару з рідиною з вільною поверхнею на основі принципу найменшого примусу Гаусса / О.В. Константинов, В.В. Новицький // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2018. – т. 15, № 1. – С. 33-46 .
84. Константинов О.В. Керування резервуаром, частково заповненим рідиною, на основі принципу найменшого примусу Гауса (задача гальмування) // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2019. – № 1. – С. 85 – 88.
85. Константинов О.В. Динаміка системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» під дією зовнішнього силового збудження руху // Збірник праць Інституту математики НАНУ, 2019. – т. 16, № 2. – С. 38-49.
86. Красников А.В. Сила воздействия на горизонтальную цилиндрическую емкость колеблющейся в ней жидкости // Динамика и прочность высокоскоростного наземного транспорта. – Киев: Наук. Думка, 1976. – С. 86-88.
87. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
88. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. – М.: Наука, 1988. – 328 с.
89. Кубенко В.Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой. – Киев: Наук. Думка, 1979. – 183 с.
90. Кухаренко Н.В. Определение коэффициентов квадратичных функционалов в задаче аналитического конструирования регуляторов // Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика. – 1977. - № 4. – С. 197-201.

91. Ларин В.Б. Использование интегралов уравнений Эйлера в задаче аналитического конструирования регуляторов // Кибернетика и вычисл. техника. – 1974. – Вып. 23. – С. 41-44.
92. Либин Э.Е., Якутова Н.Г. О круговой волне в цилиндрическом сосуде // Колебания упругих конструкций с жидкостью. – Новосибирск: НЭТИ, 1974. – С. 137-141.
93. Лимарченко О.С. Вариационная формулировка задачи о движении резервуара с жидкостью // Доклады АН УССР, Сер. А. – 1978. – № 10. – С. 904–908.
94. Лимарченко О.С. Прямой метод решения нелинейных задач динамики резервуара, несущего жидкость // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1978. – № 11. – С. 999–1002.
95. Лимарченко О.С. Вариационный принцип для нестационарных многокомпонентных континуальных систем // Прикл. механика. – 1978. – 14. – № 10. – С. 28–34.
96. Лимарченко О.С. Исследование задач нелинейной динамики резервуара с жидкостью вариационным методом // Прикл. механика. – 1980. – 16. – № 1. – С. 99–105.
97. Лимарченко О.С. Влияние жидкого наполнения на движение резервуара // Прикл. механика. – 1980. – 16. – № 3. – С. 131–133.
98. Лимарченко О.С. Влияние капиллярности на динамику системы резервуар - жидкость // Прикл. механика. – 1981. – 17. – № 6. – С. 124–128.
99. Лимарченко О.С. Влияние способа динамического возбуждения резервуара на поведение жидкости // Прикл. механика. – 1982. – 18. – № 8. – С. 117–119.
100. Лимарченко О.С. Прямой метод исследования динамики тел с жидкостью // Космические исследования на Украине, 1982. – Вып. 16. – С. 82–88.
101. Лимарченко О.С. Прямой метод решения задачи о совместных пространственных движениях системы тело – жидкость // Прикл. механика. – 1983. – 19. – № 8. – С. 77–84.
102. Лимарченко О.С. Применение вариационного метода решения нелинейных задач динамики совместных движений резервуара с жидкостью // Прикл. механика. – 1983. – 19. – № 11. – С. 100–104.

103. Лимарченко О.С. Исследование некоторых нелинейных задач динамики совместного пространственного движения цилиндрического резервуара и частично заполняющей его жидкости. – Киев, 1984. – 57 с. – (Препринт / АН УССР, Ин-т математики, 84.58).
104. Лимарченко О.С. Реакция системы тело-жидкость со свободной поверхностью на действие внезапно приложенного момента // Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости многомерных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С. 27–37.
105. Лимарченко О.С. Исследование эффективности дискретных моделей при решении задачи об импульсном возбуждении резервуара с жидкостью // Мат. физика и нелин. механика. – 1985. – № 4. – С. 44–48.
106. Лимарченко О.С. Применение прямых методов к исследованию прикладных задач динамики тел, частично заполненных жидкостью. – Киев, 1987, 60 с. – (Препринт / АН УССР, Ин-т математики, 87.8).
107. Лимарченко О.С. Исследование нелинейного волнообразования жидкости в подвижном цилиндрическом резервуаре // Мат. физика и нелин. механика. – 1987. – № 8. – С. 12–19/
108. Лимарченко О.С. Уточненное определение форм колебаний жидкости в полостях вращения // Прикладные задачи динамики и устойчивости механических систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 45–52.
109. Лимарченко О.С. Исследование поведения системы цилиндрический резервуар – жидкость со свободной поверхностью при сложном динамическом нагружении // Прикл. механика. – 1987. – 23. – № 3. – С. 111–117.
110. Лимарченко О.С. Нелинейная модель движения жидкости в полости вращения // Математическое моделирование динамических процессов в системах тел с жидкостью. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 44–54.
111. Лимарченко О.С. Динамика тела с жидкостью при интенсивном падении продольной перегрузки // Моделирование динамических процессов взаимодействия в системах тел с жидкостью. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 24–33.
112. Лимарченко О.С., Луковский И.А., Тимоха А.Н. Нелинейные модели в прикладных задачах динамики тел с жидкостью со свободной поверхностью // Прикл. механика. – 1992. – 28. – № 11. – С. 108–109.

113. Лимарченко О.С., Пахомов И.И. О неустановившихся движениях типа круговой волны на свободной поверхности в прямоугольном баке // Математические методы исследования прикладных задач динамики тел, несущих жидкость. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1992. – С. 42–47.
114. Лимарченко О.С. Динамика резервуара с жидкостью со свободной поверхностью в режиме равномерного истечения // Прикл. механика. – 1993. – 29. – № 2. – С. 74-77.
115. Лимарченко О.С. Моделирование нестационарного движения осесимметричного бака с жидкостью // Прикл. механика. – 1994. – 30. – № 5. – С. 63-68.
116. Лимарченко О.С. Нестационарное вращение цилиндрического резервуара, частично заполненного вязкой жидкостью // Прикл. механика. – 1995. – №5. – С. 88-95.
117. Лимарченко О.С., Ясинский В.В. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. – Киев: Национальный технический университет Украины «КПИ», 1997. – 338 с.
118. Лимарченко О.С., Матараццо Дж., Ясинский В.В. Динамика вращающихся конструкций с жидкостью. – Киев, «ГНОЗИС», 2002. – 304 с.
119. Лимарченко О.С., Губська В.В. Задача про вимушені нелінійні коливання резервуару у формі усіченого конуса, частково заповненого рідиною // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. – 2012. – 1, № 4. – С. 73–76.
120. Лимарченко О.С., Губська В.В., Кудзіновська І.А. Силова взаємодія резервуару у формі усіченого конуса і рідини з вільною поверхнею при їх сумісному русі // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика, механіка. - 2014. - Випуск №2 (32). - С. 29-32.
121. Лимарченко О.С., Ткаченко Р.В. Колебания свободной поверхности жидкости в цилиндрическом резервуаре, находящемся на подвижной платформе // Прикл. механика. – 2014. – т. 50, № 3. – С. 69-76.
122. Лимарченко О.С., Семенович К.О. Перерозподіл енергії між резервуаром і рідиною з вільною поверхнею при кутових рухах системи // Нелінійні коливання. – 2016. – 19, № 1. – С. 85–92.
123. Лимарченко О.С., Семенович К.С. Динамічна взаємодія рідини з резервуаром на маятниковому підвісі за наявності рівномірного витікання // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика, механіка. – 2017. – Випуск №2. – С. 41-44.

124. Лимарченко О.С., Нефьодов О.О. Поведінка конструкцій з рідиною на маятниковому підвісі при сейсмічному збуренні руху // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – т. 14, № 2. – С. 56-64.
125. Лимарченко О.С., Нефьодов О.О. Вплив частотних характеристик збурення руху конструкції з рідиною на розвиток динамічних процесів // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2018. – т. 15, № 2. – С. 47-55.
126. Лимарченко О.С., Слюсарчук Ю.А., Паранькина О.Ю. Поведінка системи нециліндричний резервуар – рідина в зарезонансному діапазоні зміни частот // Механіка гіроскопічних систем. – 2018. – № 36. – С. 5-10.
127. Лимарченко О.С., Нефьодов О.О. Коливання рідини з вільною поверхнею в циліндричному резервуарі на маятниковому підвісі у разі багаточастотного руху точки підвісу // Information systems. Mechanics and Control. – 2018. – № 19. – С. 42-48.
128. Лимарченко О.С., Ковалець С.І., Мельник В.М. Особливості розвитку узагальненого фарадеевського ефекту для сферичних та еліпсоїдальних водойм // Механіка гіроскопічних систем. – 2019. – № 37. – С. 16-21.
129. Лимарченко О.С., Слюсарчук Ю.А. Аналіз силової взаємодії рідини і сферичного резервуару при збудженні руху системи періодичною силою // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика, механіка. – 2019. – Випуск №1. – С. 51-54.
130. Лимарченко О., Кліменков О., Нефьодов О., Константинов О. Характер прояву нелінійностей при вібраційному збудженні руху еліпсоїдального резервуару із рідиною з вільною поверхнею // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика, механіка. – 2020. – Випуск №1 (41). – С. 47-50.
131. Лимарченко О.С., Губська В.В., Сіренко О.О. Особливості дії пилоподібного силового навантаження на динаміку конструкції з рідиною // Інформаційні системи, механіка та керування. – 2020. – № 22. – С. 53-59.
132. Луковский И.О. Малі хвильові рухи однорідної нестисливої рідини в посудинах, які мають форму тіл обертання // Доп. АН УРСР. – 1961. – № 8. – С. 1013–1017.
133. Луковский И.О. Рівняння збуреного руху твердого тіла з порожниною, яка має форму тіла обертання і частково заповнена рідиною // Доп. АН УРСР. – 1962. – № 6. – С. 749–753.
134. Луковский И.А. О коэффициентах уравнений возмущенного движения твердого тела с осесимметрическими полостями, частично заполненными

жидкостью // Тр. конф. молодых ученых Ин-та математики АН УССР. – Киев, 1963. – С. 106–110.

135. Луковский И.А. О коэффициентах уравнений возмущенного движения твердого тела с осесимметрическими полостями, частично заполненными жидкостью // Тр. конф. молодых ученых Ин-та математики АН УССР. – Киев, 1963. – С. 106–110.

136. Луковский И.А. Об одном приближенном методе определения гидродинамических коэффициентов уравнений возмущенного движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью // Гидроаэромеханика. Харьков: Из-во ХГУ. – 1965. – Вып. 1. – С. 62–67.

137. Луковский И.А. Применение метода разложения по собственным функциям к решению краевых задач теории возмущенного движения твердого тела с жидкостью // Первая республ. мат. конф. молодых исследователей. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1965. – Вып. 1. – С. 462–469.

138. Луковский И.А. Расчет характеристик движения массы жидкости в полости, имеющей форму эллипсоида вращения // Прикл. механика. – 1965. – 1. – № 7. – С. 101–106.

139. Луковский И.А. Определение гидродинамических характеристик возмущенного движения твердого тела с полостями, разделенными радиальными перегородками и частично заполненными жидкостью // Гидроаэромеханика. – 1965. – Вып. 1. – С. 53–61.

140. Луковский И.А. К исследованию движения твердого тела с жидкостью, совершающей нелинейные колебания // Прикл. механика. – 1967. – 3. – №6. – С. 119–127.

141. Луковський І.О. До побудови розв'язку нелінійної задачі про вільні коливання рідини в посудинах довільної геометричної форми // Доповіді АН УРСР. Сер. А. – 1969. – № 3. – С. 207–210.

142. Луковский И.А. Об одном методе определения частот и присоединённых масс жидкости в подвижных полостях сложной геометрической формы // Труды I Респуб. конф. по аэрогидромеханике, теплообмену и массопереносу. – Киев: Киев. гос. ун-т, 1969. – С. 397–402.

143. Луковский И.А., Троценко В.А. Исследование нелинейных колебаний жидкости в подвижном сосуде с кольцевыми перегородками // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1972. – С. 157–168.

144. Луковский И.А., Троценко В.А. К исследованию колебаний жидкости в круговом цилиндре с упругими ребрами // Колебания упругих конструкций с жидкостью. – Новосибирск: Новосиб. электротехн. ин-т, 1973. – С. 124–135.
145. Луковский И.А. Нелинейные колебания жидкости в сосудах сложной геометрической формы. – Киев: Наук. думка, 1975. – 136 с.
146. Луковский И.А. О методах построения приближенных решений нелинейных краевых задач динамики ограниченного объема жидкости со свободной границей // Математизация знаний и научно–технический прогресс. – Киев: Наук. думка, 1975. – С. 129–148.
147. Луковский И.А. Вариационный метод в нелинейных задачах динамики ограниченного объема жидкости со свободной поверхностью // Колебания упругих конструкций с жидкостью. – М.: ЦНТИ Волна, 1976. – С. 260–265.
148. Луковский И.А., Коренева А.С. К задаче о пространственных нелинейных движениях жидкости в прямом круговом цилиндре // Динамика и устойчивость управляемых систем. – Киев: Ин–т математики АН УССР, 1977. – С. 93–103.
149. Луковский И.А. Вариационный метод решения задачи о нелинейных колебаниях жидкости в сосудах сложной геометрической формы // Динамика и устойчивость управляемых систем. – Киев: Ин–т математики АН УССР, 1977. – С. 45–61.
150. Луковский И.А. Вариационный метод в нелинейных задачах теории движения твердого тела с полостью, частично заполненной жидкостью. – Киев, 1978. – 34 с. – (Препринт / АН УССР, Ин–т математики, 78.22).
151. Луковский И.А., Пилькевич А.М. Исследование нелинейных колебаний жидкости в соосных круговых цилиндрах вариационным методом // Краевые задачи математической физики. – Киев: Ин–т математики АН УССР, 1978. – С. 79–91.
152. Луковский И.А. Применение вариационного принципа типа Остроградского к решению нелинейных задач динамики твердого тела с полостями, содержащими жидкость // Динамика и устойчивость механических систем. – Киев: Ин–т математики АН УССР, 1980. – С. 3–15.
153. Луковский И.А. Вариационная формулировка нелинейных краевых задач динамики ограниченного объема жидкости, совершающего заданное движение в пространстве // Прикл. механика. – 1980. – 16. – № 2. – С. 102–108.

154. Луковский И.А. Определение сил взаимодействия между телом и жидкостью в нелинейной задаче о движении тела с полостью, содержащей жидкость // Нелинейные краевые задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 181–190.
155. Луковский И.А. Приближенный метод решения нелинейных задач динамики жидкости в сосуде, совершающем заданное движение // Прикл. механика. – 1981. – 17. – № 2. – С. 89–96.
156. Луковский И.А. К определению потенциалов Жуковского в задаче о нелинейных волновых движениях жидкости в сосуде, совершающем угловые движения // Динамика твердых и упругих тел, взаимодействующих с жидкостью: Тр. IV семинара. – Томск: Томск. гос. ун-т, 1981. – С. 128–139.
157. Луковский И.А. Определение частот и форм колебаний жидкости в сосуде на основе вариационного принципа Бейтмена // Аналитические методы исследования сложных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. – С. 3–11.
158. Луковский И.А., Барняк М.Я., Комаренко А.Н. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. – К.: Наук. думка, 1984. – 295 с.
159. Луковский И.А., Билык А.Н. Нелинейные уравнения свободных колебаний жидкости в сосуде конической формы. – Препр. АН УССР. Ин-т математики; 84.46. – Киев, 1984. – 26 с.
160. Луковский И.А., Пилькевич А.М. Нелинейные уравнения пространственных движений твердого тела с цилиндрической полостью, содержащей жидкость. – Киев, 1984. – 40 с. – (Препринт / АН УССР, Ин-т математики, 84.18).
161. Луковский И.А., Пилькевич А.М. Таблицы гидродинамических коэффициентов нелинейных уравнений пространственных движений твердого тела с цилиндрической полостью, содержащей жидкость. – Киев, 1984. – 45 с. – (Препринт / АН УССР, Ин-т математики, 84.39).
162. Луковский И.А., Пилькевич А.М. Определение присоединенных моментов инерции ограниченного объема жидкости вариационным методом и методом теории возмущений // Динамика твердых и упругих тел, взаимодействующих с жидкостью: Тр. V семинара. – Томск: Томск. гос. ун-т, 1984. – С. 102–112.
163. Луковский И.А., Пилькевич А.М. О движении жидкости в колеблющемся прямом круговом цилиндре // Численно-аналитические

методы динамики и устойчивости многомерных систем. – Киев, 1985. – С. 3–11.

164. Луковский И.А., Билык А.Н. Вынужденные колебания жидкости в подвижных осесимметричных конических сосудах // Численно–аналитические методы динамики и устойчивости многомерных систем. – Киев, 1985. – С. 12–26.

165. Луковский И.А., Лимарченко О.С., Пилькевич А.М. Численно–аналитические методы в нелинейных задачах динамики ограниченного объема жидкости // Вычислительная аэрогидромеханика. – Самарканд, 1985. – С. 220–224.

166. Луковский И.А., Билык А.Н. Нелинейные уравнения движения жидкости в неподвижном сосуде, имеющем форму прямого осесимметричного конуса со сферическим днищем. – Препр. АН УССР. Ин-т математики; 85.67. – Киев, 1985. – 35 с.

167. Луковский И.А., Билык А.Н. Исследование вынужденных нелинейных колебаний жидкости в конических сосудах с малым углом раствора // Прикладные задачи динамики и устойчивости механических систем. – Киев, 1987. – С. 5–14.

168. Луковский И.А., Лимарченко О.С. Об эквивалентности конечномерных нелинейных математических моделей динамики тел, несущих жидкость со свободной поверхностью // Математическое моделирование динамических процессов в системах тел с жидкостью. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 4–13.

169. Луковский И.А., Лимарченко О.С., Пилькевич А.М. Численно–аналитические методы в нелинейных задачах динамики ограниченного объема жидкости // Прикл. механика. – 1988. – 24. – № 1. – С. 102–107.

170. Луковский И.А., Тимоха А.Н. Нелинейная динамика поверхности раздела жидкости и газа при наличии в газе высокочастотного акустического поля. Установившиеся режимы движения. – Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 88.9. – Киев, 1988. — 40 с.

171. Луковский И.А., Тимоха А.Н. Нелинейная динамика поверхности раздела жидкости и газа при наличии в газе высокочастотного акустического поля. Устойчивость установившихся режимов движения. – Препр. АН УССР. Ин-т математики; 88.10. – Киев, 1988. – 48 с.

172. Луковский И.А., Тимоха А.Н. К задаче управления свободной поверхностью ограниченного объема жидкости при помощи звука // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 7. – С. 52–55.

173. Луковский И.А., Троценко В.А., Усюкин В.И. Взаимодействие тонкостенных упругих элементов с жидкостью в подвижных полостях. – Киев: Наук. думка, 1989. – 240 с.
174. Луковский И.А., Тимоха А.Н. Собственные колебания свободной поверхности ограниченного объема жидкости, взаимодействующей с акустическим полем // Доклады АН УССР. – 1990. – № 12. – С. 24–26.
175. Луковский И.А., Тимоха А.Н. Вариационный принцип типа Бейтмена в задаче об акустическом взаимодействии со свободной поверхностью жидкости // Моделирование динамических процессов взаимодействия в системах тел с жидкостью. Сб. науч. трудов. – Киев, Ин-т математики АН УССР. – 1990. – С. 20–24.
176. Луковский И.А., Тимоха А.Н. Пространственные движения резервуара с жидкостью, находящейся под действием виброакустической нагрузки. – Препр. АН УССР. Ин-т математики; 90.33. – Киев, 1990. – 56 с.
177. Луковский И.А., Тимоха А.Н. Вынужденные нелинейные колебания жидкости и газа, возбуждаемые акустическим источником в газе // Колебания упругих конструкций с жидкостью. – Новосибирск, 1990. – С. 127–131.
178. Луковский И.А., Тимоха А.Н. Собственные колебания свободной поверхности ограниченного объема жидкости, взаимодействующего с акустическим полем // Доклады АН УССР, Сер. А. – 1990. – № 12. – С. 23–25
179. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкостью. – Киев: Наук. думка, 1990. – 295 с.
180. Луковский И.А., Тимоха А.Н. Об акустическом воздействии на свободную поверхность ограниченного объема жидкости // Акустич. журнал. – 1991. – 37, вып. 1. – С. 144–149.
181. Луковский И.А., Тимоха А.Н. О построении приближенных нелинейных моделей в задачах о взаимодействии акустического поля со свободной поверхностью жидкости // Доклады АН УССР, Сер. А. – 1991. – № 6. – С. 40–42.
182. Луковский И.А., Тимоха А.Н. Нелинейная динамика акустико-газожидкостных систем при высокочастотном взаимодействии // Гидромеханика. – 1992. – Вып. 65. – С. 52–59.
183. Луковский И.А., Тимоха А.Н. О влиянии вибрации на геометрию и устойчивость свободной поверхности ограниченного объема жидкости // Доклады НАН Украины. – 1993. – № 3. – С. 65–68.

184. Луковский И.А., Тимоха А.Н. Вариационные методы в нелинейных задачах динамики ограниченного объема жидкости. – Киев, Ин-т математики НАН Украины. – 1995. – 400 с.
185. Луковский И.А., Солодун А.В., Тимоха А.Н. Собственные колебания жидкости в усеченных конических баках // Акустичний вісник. – 2006. – 9, № 3. – С. 42–61.
186. Луковский И.А., Солодун А.В., Тимоха А.Н. О потенциале Стокса-Жуковского для полости в виде усеченного кругового конуса // Збірник праць Інституту математики НАНУ, 2008. – т. 5, № 2. – С. 44-56.
187. Луковский И.А., Солодун А.В., Тимоха А.Н. Линейная математическая модель пространственного движения конического бака с жидкостью // Акустичний вісник. – 2009. – 12, № 2. – С. 42–61.
188. Луковский И.А. Математические модели нелинейной динамики твёрдых тел с жидкостью. – Киев: Наук. думка, 2010. – 408 с.
189. Луковский И.А., Солодун А.В., Тимоха А.Н. Внутренние резонансы задачах колебаний жидкости в усеченных конических резервуарах // Збірник праць Інституту математики НАНУ, 2011. – т. 9, № 1. – С. 203-212.
190. Луковский И.А., Солодун А.В., Тимоха А.Н. Нелинейная асимптотическая модальная теория резонансных колебаний жидкости в срезанных конических баках // Акустичний вісник. – 2011. – 14, № 4. – С. 37–64.
191. Луковський І.О. Тензорне формулювання нелінійної крайової задачі про коливання ідеальної рідини в нахилених циліндричних резервуарах // Збірник праць Інституту математики НАНУ, 2013. – т. 10, № 3. – С. 71-87.
192. Луковский И.А., Солодун А.В. Вариационный метод исследования спектральной задачи о собственных колебаниях жидкости в соосных конических резервуарах // Збірник праць Інституту математики НАНУ, 2013. – т. 10, № 3. – С. 88-112.
193. Луковский И.А., Солодун А.В., Тимоха А.Н. О внутренних резонансах колебания жидкости в конических баках // Прикладна гідромеханіка. – 2013. – 15, № 2. – С. 46–52.
194. Луковський І.А., Солодун О.В., Тимоха О.М. Математичні проблеми нелінійної динаміки конічних резервуарів з рідиною. – Київ: Наук. думка, 2019. – 224 с.
195. Мак-Лахлан Н.В. Теория и приложения функций Матье. – М: ИЛ, 1953. – 477 с.

196. Максименко А.Л. Резонансные колебания свободной поверхности вытекающей жидкости // Прямые методы в задачах динамики и устойчивости многомерных систем. – Киев, Ин-т математики НАН Украины. – 1986. – С. 60-67.
197. Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. – М: Машиностроение, 1968. – 532 с.
198. Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкостью. – М: Машиностроение, 1971. – 536 с.
199. Микишев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. – М: Машиностроение, 1978. – 247 с.
200. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов / С.Г. Михлин. – М: Наука, 1966. – 432 с.
201. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М: Наука, 1970. – 512 с.
202. Моисеев Н.Н., Петров А.А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. – М: ВЦ АН СССР, 1966. – 269 с.
203. Нариманов Г.С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью / Г.С. Нариманов // Прикл. математика и механика. – 1966. – **30**, № 1. – С. 21–38.
204. Нариманов Г.С. О движении сосуда, частично заполненного жидкостью: учет немалости движения последней // Прикл. математика и механика. – 1957. – **21**, № 4. – С. 513–524.
205. Нариманов Г.С. О колебаниях жидкости в подвижных полостях // Изв. АН СССР. ОТН. – 1957. – № 10. – С. 71–74.
206. Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. – М: Машиностроение, 1977. – 208 с.
207. Неволин В.Г. Параметрическое возбуждение поверхностных волн // Инженерно-физический журнал. – 1984. – т. 47, № 6. – С. 1028-1042.
208. Новицкий В.В. Модальное управление механическими системами // Вопросы устойчивости и управления навигационных систем. – Киев: Институт математики АН УССР, 1988. – с. 70-75.

209. Новицкий В.В. Декомпозиция линейных систем и модальное управление // Препринт. – Киев: Институт математики АН УССР, 1990. – 27 с.
210. Новицкий В.В. Обобщение метода модальной декомпозиции на нестационарные системы // Устойчивость и управление в механических системах. – Киев: Институт математики НАН Украины, 1988. – с. 36-42.
211. Новицкий В.В. Декомпозиція та керування в лінійних системах. – Київ: Інститут математики НАН України, 2008. – 252 с.
212. Охоцимский Д.Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью // Прикл. мат. и мех. – 1956. – 20. – № 1. – С. 3-20.
213. Рабинович Б.И. Об уравнениях возмущенного движения твердого тела с цилиндрической полостью, частично заполненной жидкостью // Прикл. мат. и мех. – 1956. – 20. – № 1. – С. 39-50.
214. Рабинович Б.И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1975. – 416 с.
215. Райновський І.А., Тимоха О.М. Затухаючі резонансні стаціонарні коливання у вертикальному круговому резервуарі // Збірник праць Інституту математики НАНУ, 2017. – т. 14, № 2. – С. 180-204.
216. Рапопорт И.М. Динамика упругого тела, частично заполненного жидкостью / И.М. Рапопорт. – М: Машиностроение, 1966. – 393 с.
217. Румянцев В.В. О некоторых вариационных принципах в механике сплошных сред // Прикл. математика и механика. – 1973. – 37, № 6. – С. 963–973.
218. Селезов И.Т. О выборе масштабов при физическом моделировании волн малой амплитуды // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1977. – № 1. – С. 40–44.
219. Стажков Е.М. Быстросходящийся метод, обусловленный выбором оптимального положения начала координат, в задаче о колебаниях жидкости // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. – Томск: Томск. ун-т, 1978. – С. 125-132.
220. Столбецов В.И. О колебаниях жидкости в сосуде, имеющем форму прямоугольного параллелепипеда // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1967. – № 1. – С. 67–76.

221. Столбецов В.И. О немалых колебаниях жидкости в прямом круговом цилиндре // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1967. – № 2. – С. 59–66.
222. Столбецов В.И., Фишкис В.М. Об одной механической модели жидкости, совершающей немалые колебания в сферической полости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1968. – № 5. – С. 119–123.
223. Столбецов В.И. О нелинейных колебаниях жидкости в оболочках различной формы // Колебания упругих конструкций с жидкостью. – Новосибирск: НЭТИ, 1974. – С. 205–209.
224. Столбецов В.И. О нелинейных колебаниях жидкости в конической полости // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. – Томск: Томский ун-т, 1975. – С. 106–111.
225. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. – М.: Наука, 1964. – 440 с.
226. Стретт М.Д. Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике. – ДНТВУ, 1935. – 400 с.
227. Тимоха А.Н. О формах равновесия свободной поверхности ограниченного объема жидкости, находящейся в высокочастотном акустическом поле // Прикладные задачи динамики и устойчивости механических систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 22–26.
228. Тимоха А.Н. О капиллярно-звуковых формах равновесия / А.Н. Тимоха // Математическое моделирование динамических процессов в системе тел с жидкостью. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 77–84.
229. Тимоха А.Н. Об устойчивости режима, порожденного «нетривиальной» осесимметричной капиллярно-звуковой равновесной формой // Устойчивость движения твердых тел и деформируемых систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 4–6.
230. Тимоха А.Н. О формах равновесия свободной поверхности ограниченного объема жидкости, находящейся в условиях вибровоздействия // Моделирование динамических процессов взаимодействия в системах тел с жидкостью. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 15–20.
231. Тимоха А.Н. Формулировка нелинейных краевых задач пространственного движения твердого тела с жидкостью, подверженной воздействию акустического поля // Проблемы динамики и устойчивости многомерных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. – С. 52–59.

232. Тимоха А.Н. Вариационный подход к решению задачи о равновесии свободной поверхности жидкости в вибрирующем сосуде // Математические методы исследования прикладных задач динамики тел, несущих жидкость. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 27–35.
233. Тимоха А.Н. Поведение свободной поверхности жидкости в вибрирующем ограниченном сосуде. – Киев, 1992. – 46 с. – (Препринт / НАН Украины, Ин-т математики, 92.22).
234. Тимоха А.Н. О воздействии звука на характер собственных колебаний поверхности раздела жидкость-газ в ограниченном объеме // Акуст. журнал. – 1993. – **39**, вып. 2. – С. 357–361.
235. Тимоха А.Н. О множественности виброкапиллярных рельефов: симметричные и асимметричные деформации / А.Н. Тимоха // Доп. Нац. АН України. – 2001. – № 3. – С. 61–66.
236. Фещенко С.Ф., Луковский И.А., Рабинович Б.И., Докучаев Л.В. Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. — К.: Наук. думка, 1969. – 232 с.
237. Формальский А.М. Управление движением неустойчивых объектов. – М. : Физматлит, 2013. – 232 с.
238. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. – М. : Физматлит, 2006. – 328 с.
239. Шклярчук Ф.Н. Приближенный метод расчета колебаний жидкости в полостях вращения // Колебания упругих конструкций с жидкостью. – М.: ЦНТИ Волна, 1976. – С. 397-404.
240. Шклярчук Ф.Н. Динамика конструкций летательных аппаратов. – М.: МАИ, 1983. – 79 с.
241. Шетухин В.Л., Шмаков В.П. Приближенный метод решения задачи о колебаниях жидкости в полостях вращения // Прикл. механика. – 1983. – 19. – № 9. – С. 91-95.
242. Шмаков В.П. К вычислению собственных колебаний жидкости в неподвижных сосудах // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. – Томск: Томск. ун-т, 1978. – С. 157-162.
243. Шмаков В.П. Построение корректирующих функций в методе Бубнова-Галеркина // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1981. - № 2. – С. 80-92.

244. Abramson H. Dynamic behavior of liquid in moving container // Appl. Mech. Revs. – 1963. – 16. – N 7. – P. 501-506.
245. Abramson H. (Ed.) The dynamic behavior of liquid in moving container. – Washington: NASA SP-106, 1966. – 467 p.
246. Bauer H. The response of propellant in an arbitrary circular cylindrical tank due to single pulse excitation // Developm. Theoret. and Appl. Mech. Vol. 2. – Oxford – London – Edinburg - New-York – Paris – Frankfurt: Pergamon Press, 1965. – P. 351-383.
247. Bauer H. Response of liquid in a rectangular container // J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civil. Eng. – 1966. – 42. – N 6. – P. 1-23.
248. Bauer H. Hydroelastic vibration in a rectangular container // Int. J. Solid and Struct. – 1981. – 17. – N 7. – P. 639-652.
249. Bauer H., Eidel W. Non-linear liquid motion in conical containers // Acta Mech. – 1988. – 73. – N 1-4. – P. 11-31.
250. Bauer H., Eidel W. Liquid oscillation in a prolate spheroidal container // Eng.-Arch. – 1989. – 59. – N 5. – P. 371-381.
251. Becker J.M., Miles J.W. Standing radial cross-waves // J. Fluid Mech. – 1991. – 222. – P. 471-499.
252. Benjamin T.B., Ursell F. The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. – Proc. R. Soc. Lond. A. – 1954. – 225 (1163), P. 505-515.
253. Bruyninckx H., Khatib O. Gauss' principle and the dynamics of redundant and constrained manipulators // Proceedings 2000 ICRA. Millennium Conference. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Symposia Proceedings. – 2010. – Vol. 11, N 4. – P. 2563-2568.
254. Chen Y., Hwang W., Ko Ch. Sloshing behaviours of rectangular and cylindrical liquid tanks subjected to harmonic and seismic excitations // Earthquake Engineering And Structural Dynamics. – 2007. – Vol. 36. – P. 1701-1717.
255. Chu W.H. Subharmonic oscillations in an arbitrary tank resulting from axial excitation // J. Appl. Mech., Trans. ASME. – 1968. – 35. – P. 148-154.
256. Dickmanns E.D. Dynamic vision for perception and control of motion. – London : Springer-Verlag Limited, 2007. – 474 p.

257. Faraday M. On the forms and states assumed by fluids in contact vibrating elastic surfaces // *Phil. Trans. of the Royal Society of London*. – 1831. – 121. – P. 319-346.
258. Faltinsen O.M., Rognebakke O.M., Lukovsky I.A., Timokha A.N. Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2000. – 407. – P. 201-234.
259. Faltinsen O.M., Timokha A.N. Adaptive multimodal approach to nonlinear sloshing in a rectangular tank // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2001. – 432. – P. 167-200.
260. Faltinsen O.M., Timokha A.N. Asymptotic modal approximation of nonlinear resonant sloshing in a rectangular tank with small fluid depth // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2002. – 470. – P. 319-357.
261. Faltinsen O.M., Rognebakke O.F., Timokha A.N. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2003. – 487. – P. 1-42.
262. Faltinsen O.M., Rognebakke O.F., Timokha A.N. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin. Part 2. Effect of higher modes // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2005. – 523. – P. 199-218.
263. Faltinsen O.M., Rognebakke O.F., Timokha A.N. Classification of three-dimensional nonlinear sloshing in a square-base tank with finite depth // *Journal of Fluids and Structures*. – 2005. – 20, Issue 1. – P. 81-103.
264. Faltinsen O.M., Rognebakke O.M., Timokha A.N. Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth // *Physics of Fluids*. – 2006. – 1. – № 18. – P. 1-14.
265. Faltinsen O.M., Rognebakke O.F., Timokha A.N. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square-base basin. Part 3. Base ratio perturbations // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2006. – 551. – P. 93-116.
266. Faltinsen O.M., Timokha A.N. *Sloshing*. – Cambridge University Press. – 2009. – 608 p.
267. Faltinsen O.M., Firoozkoobi R., Timokha A.N. Effect of central slotted screen with a high solidity ratio on the secondary resonance phenomenon for liquid sloshing in a rectangular tank // *Physics of Fluids*. – 2011. – 23, Issue 6, Art. No. 062106. – P. 1-13.
268. Faltinsen O.M., Timokha A.N. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square-base basin. Part 4. Oblique forcing and linear viscous damping // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2017. – 822. – P. 139-169.

269. Faltinsen O.M., Timokha A.N. Undamped eigenperiods of a sea-based gravity monotower // *Applied Mathematical Modelling*. – 2016. – 40. – P. 8217-8243.
270. Faltinsen O.M., Lukovsky I.A., Timokha A.N. Resonant sloshing in an upright annular tank // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2016. – 804. – P. 608-645.
271. Faltinsen O.M., Lagodzinskyi O., Timokha A.N. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin. Part 5. Three-dimensional non-parametric tank forcing // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2020. – 894, A10. – P. 1-42.
272. Gavriluk I., Lukovsky I.A., Timokha A.N. Sloshing in a circular conical tank // *Hybrid Methods in Engineering*. – 2001. – 3, Issue 4. – P. 322-378.
273. Gavriluk I., Lukovsky I., Timokha A. Linear sloshing in a truncated conical tank // *Report on Numerical Mathematics Universität Jena*. – 2006. – P. 6-23
274. Gavriluk I., Hermann U., Lukovsky I., Solodun A., Timokha A. Linear sloshing in a truncated conical tank // *Report on Numerical Mathematics Universität Jena*. – 2006. – P. 6-23.
275. Gavriluk I., Hermann M., Lukovsky I., Solodun O., Timokha A. Multimodal method for linear liquid sloshing in rigid tapered conical tank // *Eng. Comput.* – 2012. – 29, № 2. – P. 198 – 220.
276. Gavriluk I., Hermann M., Lukovsky I., Solodun O., Timokha A. Weakly-nonlinear sloshing in a truncated circular conical tank // *Fluid Dynamics Research*. – 2013. – 45, Paper ID 055512. – P. 1-30.
277. Gurchenkov A., Nosov M., Tsurkov V. Control of Fluid-Containing Rotating Rigid Bodies. – CRC Press, 2013. – 160 p.
278. Henderson D.M., Miles J.W. Faraday waves in 2:1 internal resonance // *J. Fluid Mech.* – 1991. – 222. – P. 449-470.
279. Hermann M., Timokha A. Modal modelling of the nonlinear resonant sloshing in a rectangular tank I: A single-dominant model // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. – 2005. – 15, № 9. – P. 1431-1458.
280. Hermann M., Timokha A. Modal modelling of the nonlinear resonant fluid sloshing in a rectangular tank II: Secondary resonance // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. – 2008. – 18, N 11. – P. 1845-1867.

281. Hermann M., Gavriluk I., Lukovsky I., Solodun A., Timokha A. Natural sloshing frequencies in rigid truncated conical tanks // Eng. Comput. – 2008. – 25, № 6. – P. 518 – 540.
282. Hermann M., Gavriluk I., Lukovsky I., Solodun A., Timokha A. Modal modeling of the fluid–structure interaction associated with sloshing in a tapered conical tank // Reports of Numerical Mathematics, FSU Jena. – 2010. – № 10-02. – 17 pp.
283. Hocking L.M. Waves produced by a vertically oscillating plate // J. Fluid Mech. – 1987. – 179. – P. 267–281.
284. Housner G.W. Dynamic analysis of fluids in containers subjected to acceleration. Nuclear Reactors and Earthquakes. — Report No. TID 7024, U.S. Atomic Energy Commission. Washington D.C., 1963
285. Ibrahim R. Liquid sloshing dynamics: theory and applications / R. Ibrahim. – Cambridge University Press. – 2005. – 950 p.
286. Ibrahim R. Recent advances in physics of fluid parametric sloshing and related problems // Journal of Fluid Engineering. – September 2015. – Vol. 135. – P. 090801-1–090801-52.
287. Ikeda T. Autoparametric Resonances in Elastic Structures Carrying Two Rectangular Tanks Partially Filled with Liquid // J. Sound and Vibr. // 2007. – 302, N 4 – 5. – P. 657 – 682.
288. Ikeda T., Murakami Sh. Nonlinear Vibrations of Elastic Structures Containing a Cylindrical Liquid Tank under Vertical Excitation // J. Syst. Design and Dynam. – 2008. – 2, N 3. – P. 822 – 836.
289. Ikeda T., Murakami Sh., Ushio Sh. Nonlinear Parametric Vibrations of Elastic Structures Containing Two Cylindrical Liquid-Filled Tanks // J. Syst. Design and Dynam. – 2009. – 3, N 1. – P. 120 – 134.
290. Jameson A., Kreindler E. Inverse problem of linear optimal control // IEEE Trans. Autom. Contr. – 1973. – 11. – N 1. – P. 1-19.
291. Konstantinov A. Forced oscillations of the system «reservoir – capillary liquid with a free surface» // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2013, вип. 2. – С. 43-46.
292. Konstantinov A. Effect of viscous damping on forced oscillations of the system «reservoir – free surfaced liquid» / A. Konstantinov // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2013. – вип. 18. – С. 73-80.

293. Konstantinov A. Generalizations of the Faraday problem in mechanical system "reservoir–liquid with a free surface" /A. Konstantinov, O. Limarchenko, I. Semenova // Mathematical Modeling and Computing. – 2014. – Vol. 1, №1. – P. 45-60.
294. Konstantinov A. Effect of combine motion on variation of resonance properties in liquid sloshing problems /A. Konstantinov, O. Limarchenko, K. Semenovich // Mathematical Modeling and Computing. – 2015. – Vol. 2, N 1. – P. 48-57.
295. Konstantinov A.V. Nonlinear Dynamics of the Combined Motion of a Tank and a Fluid Partially Filling It / A.V. Konstantinov, O.S. Limarchenko // International Applied Mechanics. – 2016. – 52. – P. 520-528.
296. Konstantinov A.V. Nonlinear Problem of the Parametric Oscillations of a Noncylindrical Tank Partially Filled with a Fluid / A.V. Konstantinov, O.S. Limarchenko, V.N. Mel'nik, I.Yu. Semenova // International Applied Mechanics. – 2016. – 52. – P. 599-604.
297. Konstantinov A.V. Effect of the Viscosity and Capillarity of Fluid on the Nonlinear Dynamics of a Tank Partially Filled with a Fluid / A.V. Konstantinov, O.S. Limarchenko // International Applied Mechanics. – 2017. – 53. – P. 130-138.
298. Konstantinov A.V. Dynamic Methods of Damping the Oscillation in Structure–Free-Surface Fluid System / A.V. Konstantinov, O.S. Limarchenko, V.V. Lukyanchuk, A.A. Nefedov // International Applied Mechanics. – 2019. – 55. – P. 58-67.
299. Konstantinov A.V. Motion Control for Structure with Liquid Based on Compensation of the Liquid Hydrodynamic Response / A.V. Konstantinov, V.O. Limarchenko, O.S. Limarchenko // Journal of Automation and Information Sciences. – 2020. – 52, Issue 6. – P. 58-70.
300. Kubenko V.D., Koval'chuk P.S Modeling the Nonlinear Interaction of Standing and Traveling Bending Waves in Fluid-Filled Cylindrical Shells Subject to Internal Resonances // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 4. – P. 353 – 364.
301. Kubenko V.D., Koval'chuk P.S. Stability and Nonlinear Vibrations of Closed Cylindrical Shells Interacting with a Fluid Flow (Review) // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 1. – P. 12 – 63.
302. La Rocca M., Mele P., Armenio V. Variational approach to the problem of sloshing // Journal of Theoretical and Applied Fluid Mechanics. – 1997. – 1, N 4. – P. 280–310.

303. La Rocca M., Sciortino G. A generalization variational approach to the sloshing: experimental validation of the model // III International Conference “Engineering AeroHydroelasticity”, Prague, August 30-September 3. – 1999. – P. 256–261.
304. La Rocca M., Sciortino G., Boniforti M. A fully nonlinear model for sloshing in a rotating container // Fluid Dynamic Research. – 2000. – N 27. – P. 23–52.
305. La Rocca M., Sciortino G., Adduce C., Boniforti M.A. Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface // Physics of Fluids. – 2005. – 17, 062101. – P. 1–17.
306. Lewis D. J. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes // Proc. Royal Soc. of London. A. – 1950. – 202. – P. 81–96
307. Lewis A. The geometry of the Gibbs-Appell equations and Gauss' principle of least constraint // Reports on Mathematical Physics. – 1996. – Vol. 38, N 1. – P. 11–28.
308. Lilov L., Lorer M. Dynamic Analysis of Multirigid-Body System Based on the Gauss Principle // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1982. – Vol. 62, N 10. – P. 539–545.
309. Limarchenko O. Nonlinear properties for dynamic behavior of liquid with a free surface in a rigid moving tank // International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2000. – Vol. 1. – № 2. – P. 105-118.
310. Limarchenko O.S., Lukovsky I.A., Timokha A.N. Methods of modal decomposition for dynamics problems of liquid with free surface // International Conference dedicated to M. Lavrentyev. – Kiev. – 2000. – P. 67-68.
311. Limarchenko O.S. Specific features of application of perturbation techniques in problems of nonlinear oscillations of liquid with a free surface in cavities of non-cylindrical shape // Український математичний журнал. – 2007. – Т. 59. – № 1. – P. 44-70.
312. Limarchenko O.S. Nonlinear wave generation on a fluid in a moving parabolic tank / O.S. Limarchenko, I.Yu. Semenova // International Applied Mechanics. – 2011. – Vol. 46. – № 8. – P. 864-868.
313. Limarchenko O.S., Tkachenko R. Influence of Spring Attachment on the Dynamics of a Fluid-Filled Cylindrical Tank on a Moving Platform // International Applied Mechanics. – 2014. – Vol. 50. – № 3. – P. 289-294.

314. Limarchenko O.S. Influence of spring attachment on the dynamics of a fluid filled cylindrical tank on a moving platform / O.S. Limarchenko, R.V. Tkachenko // International Applied Mechanics. – 2014. – 50, N 3. – P. 289–294.
315. Limarchenko O., Cattani C., Pilipchuk V. Structure of geometrical nonlinearities in liquid sloshing in tanks of non-cylindrical shapes // Mathematical Modeling and Computing. – 2014. – 1, N 2. – P. 195–213.
316. Limarchenko O.S., Semenov K.O. Energy redistribution between the reservoir and liquid with free surface for angular motions of the system // J. of Mathematical Sciences. – 2017. – 222, N 3. – P. 296–303.
317. Limarchenko O., Nefedov A. Resonant modes of the motion of a cylindrical reservoir on a movable pendulum suspension with a free-surface liquid / O. Limarchenko, A. Nefedov // Mathematical Modeling and Computing. – 2018. – 5, N 2. – P. 178–183.
318. Limarchenko O.S., Semenov K.O. Effect of the Coriolis forces on dynamics of the system reservoir-liquid under uniform outflowing // Mathematical Modeling and Computing. – 2018. – 5, № 1. – C. 34–40.
319. Limarchenko O.S., Nefedov O.O. Peculiarities of dynamics of the reservoir with a free-surface liquid on pendulum suspension with the moving suspension point // Mathematical Modeling and Computing. – 2018. – 5, № 1. – C. 41–47.
320. Limarchenko O.S., Nefedov O.O. Resonant modes of the motion of a cylindrical reservoir on a movable pendulum suspension with a free-surface liquid // Mathematical Modeling and Computing. – 2018. – 5, № 2. – C. 178–183.
321. Lomen D.O., Fontenot L.L. Fluid behavior in parabolic containers under going vertical excitation // J. Math. Phys. – 1967. – 46. – № 1. – P. 43–53.
322. Luke J.C. A variational principle for a fluid with a free surface // J. Fluid Mech. – 1967. – 27. – № 2. – P. 395–397.
323. Lukovsky I.A., Timokha A.N. Steady-state nonlinear sloshing in a rectangular tank: passage to shallow water // Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki. – 2000. – Issue 11. – P. 48–51.
324. Lukovsky I.A. Nonlinear Dynamics. Mathematical Models for Rigid Bodies with a Liquid / I.A. Lukovsky. — De Gruyter. — 2015. — 394 + xvi p.
325. Lukovsky I.A., Timokha A.N. Multimodal method in sloshing // Нелінійні Коливання. — 2015. — 18, No 3. — P. 3–20.
326. Mathiessen L. Akustische versuche, die kleinsten transversalivellen der flussigkeiten betrefFend // Annalen der Physik. – 1868. – 134. – P. 107–117.

327. Mathiessen L. Über die transversal-schwingungen tonender tropharer und elastischer flusSigkeiten // Annalen der Physik. – 1870. – 141. – P. 375–393.
328. Mathieu E. Memoire sur le mouvement vibratoire d’une membrane de forme elliptique // J. Math. Pures Appli. – 1868. – 13. – P. 137–203.
329. Miles J. Nonlinear surface waves in closed basins/ J. Miles // J. Fluid. Mech. – 1976. – 75, N. 3. – P. 419–448.
330. Miles J. Internally resonant surface waves in a circular cylinder // J. Fluid Mech. — 1984. — 149. — P. 1–14.
331. Miles J. Resonantly forced surface waves in a circular cylinder // J. Fluid Mech. — 1984. — 149. — P. 15–31.
332. Miles J.W. Note on a parametrically excited trapped cross-wave // J. Fluid Mech. – 1985. – 151. – P. 391–394.
333. Miles J.W. Parametrically excited, standing cross-waves // J. Fluid Mech. – 1988. – 186. – P. 119–127.
334. Miles J.W. Parametrically excited standing edge waves // J. Fluid Mech. – 1990. – 214. – P. 43–57.
335. Miles J. Wave motion in a viscous fluid of variable depth // J. Fluid Mech. — 1990. — 212. — P. 365–372.
336. Miles J., Henderson D. Parametrically forced surface waves // Annu. Rev. Fluid Mech. — 1990. — Vol. 22. — P. 143–165.
337. Miles J. Capillary boundary layer for established waves // J. Fluid Mech. — 1991. — 222. — P. 197–205.
338. Miles J. Variational approximation for gravity waves in water of variable depth // J. Fluid Mech. — 1991. — 232. — P. 681–688.
339. Mitropolskiy Yu., Limarchenko O. Nonlinear properties of liquid wave motion in moving tank // Nonlinear oscillations. – 1999. – N 2. – P. 77-102.
340. Pal P. Sloshing of liquid in partially filled container — an experimental study // Int. J. of Recent Trends in Engineering. – 2009. – 1, N 6. – P. 1–5.
341. Penny W., Price A. Finite periodic stationary gravity waves in a perfect fluid // Phil.Trans. of the Royal Society of London. – 1952. – Ser. A. – 244. – P. 254–284.
342. Perko L.M. Large-amplitude motion of a liquid-vapour interface in an accelerating container // J. Fluid. Mech. – 1969. – 35. – P. 77–96.

343. Raynovskyy I.A., Timokha A.N. Resonant liquid sloshing in an upright circular tank performing a periodic motion // Journal of Numerical & Applied Mathematics. – 2016. – № 2 (122). – P. 71-82.
344. Raynovskyy I.A., Timokha A.N. Steady-state resonant sloshing in an upright cylindrical container performing a circular orbital motion // Mathematical Problems in Engineering. – 2018. – Article ID 5487178. – 8 pp.
345. Raynovskyy I.A., Timokha A.N. Damped steady-state resonant sloshing in a circular base container // Fluid Dynamics Research. – 2018. – 50, paper ID 045502. – 27 pp.
346. Raynovskyy I.A., Timokha A.N. Sloshing in Upright Circular Containers: Theory, Analytical Solutions, and Applications. – CRC Press/Taylor & Francis Group, 2020. – 170 pp.
347. Rayleigh J.W.S. On the crispations of fluid resting upon a vibrating support // Phil. Mag. – 1883. – 15. – P. 229–235.
348. Rayleigh J.W.S. On maintained vibrations // Phil. Mag. – 1883. – 15. – P. 229–235.
349. Rayleigh J.W.S. On the maintenance of vibrations by forces of double frequency and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure // Phil. Mag. – 1887. – 24. – P. 145–159.
350. Rayleigh J.W.S. Deep water waves, progressive or stationary, to the third order of approximation // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1915. – 91. – P. 345–353.
351. Redon S., Kheddar A., Coquillart S. Gauss' least constraints principle and rigid body simulations // Proceedings 2000 ICRA. Millennium Conference. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Symposia Proceedings. – 2002. – Vol. 11. – № 4. – P. 517-522.
352. Rognebakke O. Sloshing in Rectangular Tanks and Interaction with Ship Motions // Department of Marine Hydrodynamics, Faculty of Engineering Science and Technology, Norwegian University of Science and Technogy, Doctors Thesis, MTA-rapport 2002-151. – 180 P.
353. Sekerj-Zenkovich S.Y., Bordakov G.A., Kalinitchenko V.A., Shingareva I.K. Faraday Resonance in water waves at nearly critical depths // Exp. Therm. Fluid Science. – 1998. – Vol. 18. – № 2. – P. 123-133.
354. Shaoa W., Yanga J., Hu Z., Tao L. Coupled analysis of nonlinear sloshing and ship motions / W. Shaoa, J. Yanga, Z. Hu, L. Tao // Applied Ocean Research. — 2015. — 47. — P. 85–97.

355. Siekmann J., Chang Shin-Chin. On the dynamic of liquids in a cylindrical tank with a flexible bottom // *Ing. Arch.* – 1968. – 37. – N 3. – P. 99-109.
356. Skalak R., Yarimovych M. Forced large amplitude surface waves // *Proc. 4-th US Nat. Congr. Appl. Mech.* – 1962. – 2. – P. 1411–1418.
357. Solodun A.V., Timokha A.N. The Narimanov–Moiseev Multimodal Analysis of Nonlinear Sloshing in Circular Conical Tanks // *Applied Mathematical Analysis: Theory, Methods and Applications, Studies in Systems, Decision and Control*, vol. 177 /Eds. Dutta H., Peters J./ Springer Nature Switzerland AG, 2020, ISBN 978-3-39-99917-3 (eISBN 978-3-319-99918-0), Series ISSN 2198-4182, Chapter 9, pp. 267-309.
358. Takeshi Ikeda, Shin Murakami. Autoparametric resonances in a structure/fluid interaction system carrying cylindrical liquid tank // *Journal of Sound and Vibration.* – 2005. – 285. – P. 517 – 546.
359. Taylor G.I. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes // *Proc. Royal Soc. of London. A.* – 1950. – 201. – P. 192–196.
360. Timokha A.N., Lukovsky I.A. Multimodal method in sloshing // *Journal of Mathematical Sciences (USA).* – 2017. – 220, No. 3. – P. 239-253.
361. Timokha O.N., Raynovskyy I.A. Resonant steady-state sloshing in upright tanks performing a three-dimensional periodic motion // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки.* – 2017. – Вип. 3. – С. 225-228.
362. Timokha A.N. Nonlinear boundary-layer problems and laminar vortical stream generated by resonant sloshing in a circular-base tank // *Journal of Mathematical Sciences (USA).* – 2019. – 240, No. 3. – P. 358-373.
363. Udwadia F., Kalaba R. A New Perspective on Constrained Motion // *Proceedings: Mathematical and Physical Sciences.* – 1992. – Vol. 439. – № 1906. – P. 407-410.
364. Woodward J.H., Bauer H.F. Fluid behavior in a longitudinally excited cylindrical tank of arbitrary sector-annular cross section // *AIAA Journal.* – 1970. – 8. – N 4. – P. 713-719.
365. Zhang C., Li Y., Meng Q. Fully nonlinear analysis of second-order sloshing resonance in a three-dimensional tank // *Computers & Fluids.* — 2015. — 116. — P. 88–104.

