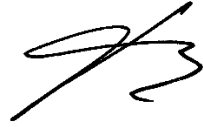


НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
Інститут математики НАН України

КОНСТАНТИНОВ Олександр Володимирович



УДК 532.595

НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ
ДИНАМІКИ ТА КЕРУВАННЯ КОНСТРУКЦІЯМИ З
РІДИНОЮ В РЕЖИМІ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ
ТА ПАРАМЕТРИЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ

01.02.01 – теоретична механіка

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

КИЇВ – 2021

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий консультант: доктор фізико-математичних наук, професор
НОВИЦЬКИЙ Віктор Володимирович,
Інститут математики НАН України, провідний
науковий співробітник

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
КОНОНОВ Юрій Микитович,
Інститут прикладної математики і механіки
НАН України, завідувач відділу

доктор фізико-математичних наук, професор
АВРАМЕНКО Ольга Валентинівна,
Центральноукраїнський державний педагогічний
університет імені Володимира Винниченка,
завідувач кафедри

доктор фізико-математичних наук, провідний
науковий співробітник
СЕМЕНОВ Юрій Асафійович,
Інститут гідромеханіки НАН України, старший
науковий співробітник

Захист відбудеться 21 вересня 2021 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої
вченої ради Д 26.206.02 в Інституті математики НАН України за адресою: 01024,
м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці Інституту математики
НАН України.

Автореферат розісланий 17 серпня 2021 року.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради



В.Б. Василик

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертація присвячена дослідженню динамічних особливостей сумісного руху механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» в нелінійному діапазоні зміни параметрів у режимі вимушених і параметричних коливань і при керуванні рухом таких систем за наявності параметричного збурення, силового збудження чи керування рухом резервуара.

Актуальність теми. Конструкції з рідиною з вільною поверхнею часто зустрічаються в сучасній техніці як складові компоненти транспортних і енергетичних систем, систем транспортування і зберігання різних екологічно небезпечних і технологічних рідин. При цьому відносна маса рідини може бути значна, тому рухомість рідини істотно впливає на динаміку і керування таких систем. Математичні моделі динаміки конструкцій із рідиною належать до різновиду об'єктів зі внутрішніми ступенями вільності, й у разі великої відносної маси рідини істотне врахування сумісного характеру руху складових компонент системи, що традиційно є складним завданням.

Досліджували задачу про коливання рідини з вільною поверхнею такі відомі науковці як Релей, Фарадей, М.В. Остроградський, Н. Bauer, J. Miles, L. Perko. Розвиток і постійне ускладнення умов експлуатації ракетно-космічних систем та інших об'єктів машинобудування і транспортних засобів, підвищення вимог до надійності й точності їхнього виконання функцій, висувають на перший план завдання створення ефективних експериментальних і теоретичних методів для оцінювання поведінки конструкцій у різних режимах експлуатації.

Лінійні моделі руху рідини відіграють важливу роль у методичному і прикладному аспекті. Саме на основі лінійних моделей вдається дослідити традиційно важливу задачу про частоти й форми коливань рідини в резервуарах. Лінійні моделі застосовувались також для створення динамічної моделі ракети-носія, які описували сумісний рух системи «рідина – пружний корпус – квазітвердий рух об'єкта – система керування рухом». У цьому напрямку треба назвати роботи таких дослідників, як К.А. Абгарян, Л.І. Алексєєв, І.Б. Богоряд, М.С. Галкін, Л.В. Докучаєв, К.С. Колесніков, І.О. Луковський, Г.Н. Мікішев, Д.Є. Охоцимський, Г.С. Наріманов, Б.І. Рабінович, М.М. Моїсєєв, О.О. Петров, В.П. Шмаков, Ф.Н. Шклярчук, Х. Абрамсон, Г. Бауер, R. Ibrahim та інші.

Обмеженість лінійної моделі для опису коливань рідини з великими амплітудами привела до розвитку математичних методів нелінійного моделювання. В середині 50-х років Г.С. Наріманов запропонував метод розв'язку задачі про коливання рідини з вільною поверхнею в резервуарі, що базується на ідеях методів теорії збурень. Згодом результати Г.С. Наріманова отримали подальший розвиток у роботах В.І. Столбецова, І.Г. Гатауліна, Л.В. Докучаєва, І.О. Луковського, Р.Ф. Ганієва та ін.

У середині 70-х років майже водночас було запропоновано кілька варіантів варіаційних методів розв'язку нелінійних задач динаміки тіл із рідиною у роботах J. Miles, І.О. Луковського, О.С. Лимарченка. В подальшому постановка математичних проблем і розв'язку прикладних задач нелінійного моделювання динаміки тіл із рідиною пов'язані з роботами І.Б. Богоряда, Р.Ф. Ганієва, Л.В. Докучаєва, І.О. Луковського, Г.Н. Мікішева, М.М. Моїсєєва, Г.С. Наріманова, О.О. Петрова, О.С. Лимарченка, І.Т. Селезова, В.Д. Кубенка, П.С. Ковальчука, А.Д. Мишкіса, О.М. Тимохи, В.І. Столбецова, Дж. Уїзема, Х. Абрамсона, Г. Бауера, Р. Гаттона, Дж. Майлза, Л. Перко, Ля Рокка та інших авторів.

Розвиток нових теоретичних підходів дав змогу вивчити багато явищ, які супроводжують формування динамічних властивостей поведінки тіл із рідиною. Наявні публікації свідчать про обмеженість досліджень за такими напрямками. Перше – врахування фактора сумісності при зв'язаному русі конструкції і рідини. Переважна кількість досліджень ґрунтується на моделі заданого руху конструкції. Проте при

зв'язаному русі найважливіше те, що в системі змінюються частоти коливань, а тому області прояву резонансів стають іншими. Понад те, можливі ситуації, коли змінюються і чисельні значення, і взаємне розташування власних частот системи. Це докорінно змінює прояв нелінійних властивостей. Друге – це продовження першого і пов'язане зі способом закріплення резервуара, що визначає додаткові ступені вільності, які виникають у системі і таким чином змінюють режими прояву сумісності руху. Особливо це стосується випадку, коли резервуар здійснює кутові рухи. Третє – в околі можливого прояву резонансних явищ навіть малі зміни частот збурення приводять до суттєвих змін характеру коливань, є суттєві відмінності поведінки систем у дорезонансних і зарезонансних діапазонах частот збудження руху. Таким чином, задачі нелінійної динаміки й керування конструкцій із рідиною, які враховують сумісний рух тіла-носія й рідини, яка його частково заповнює, досі актуальні й потребують подальших досліджень.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження за темою дисертації ввійшли до науково-дослідної роботи спочатку відділу аналітичної механіки, а потім відділу математичних проблем механіки та теорії керування Інституту математики НАН України: тема НДР «Математичні проблеми стійкості та керування у задачах аналітичної механіки», 2006 – 2010 роки, реєстраційний № 0106U000440; тема НДР «Математичні моделі у задачах аналітичної динаміки та дослідження їх стійкості, керування та спостереження», 2011 – 2015 роки, реєстраційний номер № 0111U001051; тема НДР «Дослідження математичних моделей в задачах динаміки, керування та спостережуваності», 2016 – 2020 роки, реєстраційний № 0116U003108.

Об'єкт дослідження. Об'єкт дослідження цієї роботи – це перехідні процеси нелінійної динаміки сумісного руху механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» за наявності параметричного збурення, силового збудження чи керування рухом резервуара.

Мета і завдання дослідження. Мета дисертаційної роботи полягає у виявленні динамічних особливостей сумісного руху механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» в нелінійному діапазоні зміни параметрів за наявності параметричного збурення, силового збудження чи керування рухом резервуара.

У роботі визначені такі завдання дослідження:

- побудова узагальнення класичної задачі Фарадея (за наявності додаткових ступенів вільності – можливості переміщень у горизонтальній площині й, особливо, здійснення кутових коливань) і аналіз перехідних процесів у нелінійних коливаннях механічної системи «резервуар – рідина», виявлення нових механічних ефектів;

- дослідження типових режимів поведінки систем тіл із рідиною для узагальненої задачі Фарадея з додатковою можливістю здійснення поперечного поступального і кутового руху, вивчення ролі механізму вимушених коливань у задачі про параметричні коливання тіл із рідиною, який у класичній постановці не проявляється взагалі;

- створення алгоритмів керування системою «резервуар – рідина» на основі лінійної моделі у збуреннях із використанням методів модального керування, еталонної моделі й мінімізації квадратичного функціоналу якості; апробація створених алгоритмів керування на нелінійній багатомодовій дискретній моделі і з'ясування границь їхнього можливого застосування (режими руху, амплітуди й частоти збурення вільної поверхні, прийнятна тривалість перехідних процесів тощо);

- створення алгоритмів керування системою «резервуар – рідина» на основі методу компенсації головного вектору гідродинамічних сил й варіаційного принципу найменшого примушення Гауса; порівняння обраних підходів з результатами керування, отриманого на основі лінійних моделей; застосування створених алгоритмів керування на нелінійній

багатомодовій дискретній моделі для здійснення програмних рухів за високо інтенсивних навантажень на систему «резервуар-рідина»;

– дослідження особливостей розвитку перехідних процесів у системі «резервуар-рідина» за наявності додаткових факторів під дією зовнішнього силового збудження руху (капілярність, узагальнена дисипація); виявлення характерних частотних діапазонів і умов та особливостей виходу на усталений режим коливань вільної поверхні рідини під дією зовнішньої сили, вивчення закономірностей прояву модуляції і супергармонік при формуванні коливань рідини і тіла-носія в різних частотних діапазонах.

Методи дослідження. Варіаційні методи математичної фізики, методи аналітичної й нелінійної механіки, математичні методи керування рухом механічних систем, чисельні методи реалізації й візуалізації результатів аналітичних процедур.

Наукова новизна одержаних результатів. Наукова новизна одержаних результатів полягає у тому, що:

– сформульовано узагальнення класичної задачі Фарадея про параметричні хвилі з урахуванням таких ефектів: 1) сумісності коливань рідини й резервуара; 2) наявності додаткового ступеня вільності руху резервуара (можливості горизонтального переміщення чи кутових коливань резервуара на маятниковому підвісі); 3) вертикального силового збудження руху резервуара; 4) впливу на розвиток параметричного резонансу капілярних сил і демпфування;

– для узагальненої задачі Фарадея: 1) виконано механічну постановку задачі для кожного випадку узагальнення; 2) отримано в аналітичній формі власні частоти сумісних коливань механічної системи; 3) побудовано в аналітичній формі області стійкості й нестійкості системи; 4) за наявності додаткових ступенів вільності виявлено, що поряд із параметричним резонансом виникає механізм вимушених (активних) коливань рідини, який провадить до виходу системи на нелінійний режим коливань на будь-якій частоті;

– дослідження сумісних рухів базується на нелінійній багатомодовій дискретній моделі, яка виводиться за допомогою варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського з попереднім відкиданням кінематичних в'язей;

– запропоновано алгоритм керування поступальним рухом резервуара із рідиною з використанням лінійної моделі у збуреннях на основі методів модального керування, еталонної моделі й мінімізації квадратичного функціоналу якості; створений алгоритм апробовано на нелінійній багатомодовій моделі й виявлено границі його застосування в межах лінійного діапазону збурень вільної поверхні рідини;

– запропоновано алгоритм керування поступальним рухом резервуара з рідиною в нелінійному діапазоні зміни амплітудних параметрів із застосуванням методу компенсації головного вектору гідродинамічних сил й варіаційного принципу найменшого примушення Гауса; обидва методи доцільно використовувати при переміщеннях конструкцій із рідиною в межах відповідних технологічних або виробничих процесів;

– досліджено параметричний резонанс у механічній системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею» за умови слабого прояву поверхневого натягу, коли резервуар рухається у вертикальному напрямку за заданим гармонічним законом; встановлено, що наявність сил поверхневого натягу забезпечує швидший вихід системи на резонансний режим, однак наявність сил поверхневого натягу за контуром контакту “пом’якшує” резонанс завдяки збільшенню енергетичного внеску осесиметричних форм коливань;

– визначено умови й особливості виходу коливань вільної поверхні рідини під дією зовнішньої сили на усталений режим за відсутності й наявності узагальненої дисипації в механічній системі; дослідження проводились для різних частотних діапазонів збудження.

Достовірність одержаних результатів. Достовірність одержаних результатів забезпечується коректністю постановки задачі, контролем виконання законів симетрії та

закону збереження енергії. Отримані результати узгоджуються на якісному рівні з результатами теоретичних і експериментальних досліджень вимушених коливань і класичної задачі Фарадея, а за параметрами нелінійної моделі – з параметрами дискретної моделі І.О. Луковського, що застосовувалася для вивчення усталених резонансних режимів.

Теоретичне значення і практична цінність результатів. Дослідження має теоретичний характер, його результати можуть бути використані для пояснення і прогнозування складних процесів хвилеутворення і взаємодії компонент у системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею», а також для керування рухом таких систем.

Особистий внесок здобувача. Особистий внесок здобувача визначається постановкою і дослідженням нового класу задач про параметричні і вимушені коливання резервуарів з рідиною з вільною поверхнею, дослідженням виходу коливань вільної поверхні рідини на різні модуляційні й усталені режими під дією зовнішніх сил.

Усі основні результати дисертаційної роботи автор отримав самостійно. В роботах, що опубліковані у співавторстві, співавторам належить участь в обговоренні постановок задач і рекомендацій щодо методів їхнього розв'язку.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи в цілому доповідались:

- на семінарі кафедри механіки суцільних середовищ механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівник – доктор технічних наук, професор О.С. Лимарченко) (м. Київ, 2013, 2015, 2019 рр.);
- на семінарі кафедри математичної фізики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівник – доктор фіз.-мат. наук, професор В.Г. Самойленко) (м. Київ, 2015, 2016 рр.);
- на семінарі «Математичні проблеми механіки та обчислювальна математика» при Інституті математики НАН України (керівники – академік НАН України І.О. Луковський і академік НАН України В.Л. Макаров) (м. Київ, 2012, 2017, 2020 рр.).

Окремі розділи дисертаційної роботи доповідались:

- на Чотирнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука, Україна, м. Київ, 19-21 квітня 2012 року;
- на конференції «International workshop: Hydrodynamics of moving objects», Україна, м. Київ, 23–25 квітня 2012 р.;
- на Міжнародній конференції «Сучасні математичні методи механіки», Україна, м. Київ, 28–30 вересня 2012 р.;
- на Міжнародній науковій конференції «Варіаційні методи механіки», Україна, м. Київ, 23-26 вересня 2013 р.;
- на науково-технічній конференції «Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: моделі та експеримент» (INTERPOR'15), Україна, м. Львів, 22–24 вересня 2015 р.
- на міжнародній конференції «XVIII International Conference «Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation», Україна, м. Київ, 24–26 травня 2017 р.;
- на Міжнародній науково-практичній конференції «Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання», Україна, м. Івано-Франківськ – Яремче, 14-19 травня 2018 р.;
- на міжнародній конференції «XIX International Conference «Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation», Україна, м. Київ, 22–24 травня 2019 р.;
- на V міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки», Україна, м. Київ, 28–30 серпня 2019 р.

Публікації. Зміст дисертації викладено у 30-ох наукових статтях і 6-ох тезах конференцій. Основні результати дисертації з достатньою повнотою опубліковано у 27 статтях, серед яких 8 статей [1-8] у виданнях квартиля Q3, внесених до наукометричної

бази даних Scopus, і 19 статей [9-27] у наукових фахових виданнях України. До публікацій, що додатково відображають наукові положення дисертації, належать статті [28-30].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації становить 297 сторінок, зокрема 83 рисунки, 6 таблиць і список використаних джерел зі 365 найменувань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі характеризується сучасний стан наукової проблеми, розглянутий у дисертаційній роботі, обґрунтовується актуальність обраної теми. Сформульовано мету й завдання дослідження, розкривається наукова новизна і практичне значення отриманих результатів. Наведено короткий зміст дисертації й дані про апробацію її результатів.

Перший розділ роботи присвячено аналізу сучасного стану математичних методів дослідження теорії нелінійних коливань системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» за умовами параметричного збурення, силового збудження чи керування рухом резервуара.

Другий розділ роботи присвячено узагальненню класичної задачі Фарадея про умови й характер виходу коливань механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» на режим параметричного резонансу.

Розглянуто циліндричний резервуар, частково заповнений рідиною. Резервуар розглядаємо як абсолютно тверде тіло, яке може здійснювати поступальні переміщення й кутові коливання під дією активних зовнішніх сил і моментів, а також за наявності кінематичних збурень. Рідину вважаємо ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух безвихровим. У роботі застосована математична модель, створена в роботах О.С. Лимарченка, яка пройшла багатосторонню апробацію, зокрема порівняння з результатами теоретичних і експериментальних досліджень інших авторів. Як незалежні параметри обрані амплітуди збудження a_i форм коливань ψ_i вільної поверхні рідини, параметри поступального ε_i і обертального α_i руху конструкції-носія. Згідно з теоремою про те, що безвихровий рух ідеальної нестисливої однорідної рідини цілком визначається рухом її границь (a_i визначають рух вільної поверхні рідини, ε_i і α_i – рух твердих границь області, яку займає рідина), обрані параметри повністю характеризують динаміку системи і є мінімальною системою параметрів. Водночас на основі цих параметрів цілком відновлюються характеристики руху вільної поверхні рідини ζ , поле швидкостей рідини і кутова швидкість руху резервуара ω_i .

У математичному плані система рівнянь руху – це нелінійна система звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, в якій другі похідні невідомих входять лінійно, що створює передумови для аналітичного приведення цієї системи рівнянь до форми Коші, зручної для подальшого чисельного інтегрування. Система рівнянь руху така

$$\begin{aligned} & \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \delta_{ir} + \sum_j a_j A_{rij}^3 + \sum_{j,k} a_j a_k A_{rijk}^4 \right\} + \ddot{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\alpha_r^v} \left\{ \bar{B}_r^1 + \sum_i a_i \bar{B}_r^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \bar{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \bar{B}_{rijk}^4 \right\} + \\ & + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{s=1}^3 \ddot{\alpha}_s \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_s} \left[E_{pr}^{1*} + \sum_i a_i E_{pri}^{2*} + \sum_{i,j} a_i a_j E_{prij}^{3*} \right] \right\} = \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j C_{ijr}^3 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k C_{ijk}^4 + \\ & + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p=1}^3 \omega_p \left[\sum_i \dot{a}_i (E_{pir}^{2*} - E_{pri}^{2*}) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j (E_{pijr}^{3*} + E_{pirj}^{3*} - E_{prij}^{3*} + E_{prji}^{3*}) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p,s=1}^3 \omega_p \omega_s \left[E_{psr}^2 + \sum_i a_i (E_{psir}^3 + E_{psri}^3) \right] + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p=1}^3 \omega_p^{(k)} \left[E_{pr}^{1*} + \sum_i a_i E_{pri}^{2*} + \sum_{i,j} a_i a_j E_{prij}^{3*} \right] + \\
& + \dot{\tilde{\varepsilon}} \cdot \left[\sum_i a_i \bar{D}_{ir}^2 + \sum_i \dot{a}_i a_j \bar{D}_{ijr}^3 + \sum_i \dot{a}_i a_j a_k \bar{D}_{ijk}^4 \right] + \frac{1}{2\alpha_r^v} \dot{\tilde{\varepsilon}} \cdot \sum_{p=1}^3 \omega_p \left[\bar{F}_{pr}^2 + \sum_i a_i (\bar{F}_{pir}^3 + \bar{F}_{pri}^3) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i,j} a_i a_j (\bar{F}_{pij}^4 + \bar{F}_{pir}^4 + \bar{F}_{pij}^4) \right] + g \frac{N_r}{\alpha_r^v} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 a_r + \\
& + g \frac{\alpha_r^c}{\alpha_r^v} (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) + g \frac{\alpha_r^s}{\alpha_r^v} (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) \quad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_i \ddot{a}_i \left(\bar{B}_i^1 + \sum_j a_j \bar{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \bar{B}_{ijk}^3 \right) + \ddot{\tilde{\varepsilon}} + \\
& + \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_{s=1}^3 \ddot{\alpha}_s \left[\sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_s} \left(\bar{F}_p^1 + \sum_i a_i \bar{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \bar{F}_{pij}^3 \right) \right] = \\
& = \frac{\bar{F}}{M_F + M_T} + \bar{g} + \frac{\rho}{M_F + M_T} \left(\sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \bar{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \bar{B}_{ijk}^3 \right) - \\
& - \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_{p=1}^3 \omega_p \left(\sum_i \dot{a}_i \bar{F}_{pi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \bar{F}_{pij}^3 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k \bar{F}_{pijk}^4 \right) - \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_{p=1}^3 \omega_p^{(k)} \left(\bar{F}_p^1 + \sum_i a_i \bar{F}_{pi}^2 \right); \quad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(E_{pi}^{1*} + \sum_j a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{j,k} a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) \right\} + \\
& + 2\ddot{\tilde{\varepsilon}} \cdot \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left[\bar{F}_p^1 + \sum_i a_i \bar{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \bar{F}_{pij}^3 + \sum_i a_i a_j a_k \bar{F}_{pijk}^4 \right] + \\
& + \sum_{n=1}^3 \ddot{\alpha}_n \left[2 \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{\alpha}_n} \left(\frac{1}{\rho} J_{res}^{ps} + A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) \right] = \\
& = 2 \sum_{p,s=1}^3 \left(\omega_{p,r}^* \omega_s + \omega_p^{(k)} \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \right) \left(\frac{1}{\rho} J_{res}^{ps} + A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) + \\
& + \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left(\sum_i \dot{a}_i E_{pi}^{1*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + 2\dot{\tilde{\varepsilon}} \cdot \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left(\bar{F}_p^1 + \sum_i a_i \bar{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \bar{F}_{pij}^3 \right) + \\
& + 2 \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \omega_s \left(\sum_i \dot{a}_i E_{psi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{psij}^3 \right) + \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(\sum_i \dot{a}_i \dot{a}_j E_{pij}^{2*} + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + \\
& + 2\dot{\tilde{\varepsilon}} \cdot \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(\sum_i \dot{a}_i \bar{F}_{pi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \bar{F}_{pij}^3 \right) + \frac{2g}{\rho} (M_T h_T + M_F h_F) \frac{\partial}{\partial \alpha_r} (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2) + \\
& + 2g \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \left[(\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \left(\sum_i a_i \alpha_i^c + Hl^c \right) + \right. \\
& \quad \left. + (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_3) \left(\sum_i a_i \alpha_i^s + Hl^s \right) \right] + \frac{2}{\rho} M_{ex}^r. \quad (3)
\end{aligned}$$

Система рівнянь руху містить три групи зв'язаних рівнянь: N рівнянь (1) для визначення узагальнених амплітудних параметрів a_i руху вільної поверхні рідини; три рівняння (2) для визначення параметрів ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$) поступального руху конструкції і три рівняння (3) для визначення параметрів ($\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$) кутового руху конструкції. В цілому система містить $N+6$ рівнянь, які описують спільний рух нелінійної системи «конструкція – рідина з вільною поверхнею», де N – кількість обраних форм коливань вільної поверхні. До системи рівнянь (1) – (3) входять індексні вирази, які характеризують динамічні зв'язки в системі, інерційні і статичні характеристики конструкції, а також зовнішні сили і моменти, що діють на конструкцію. При цьому всі ці коефіцієнти визначаються у квадратурах від форм коливань вільної поверхні рідини і потенціалів Стокса-Жуковського.

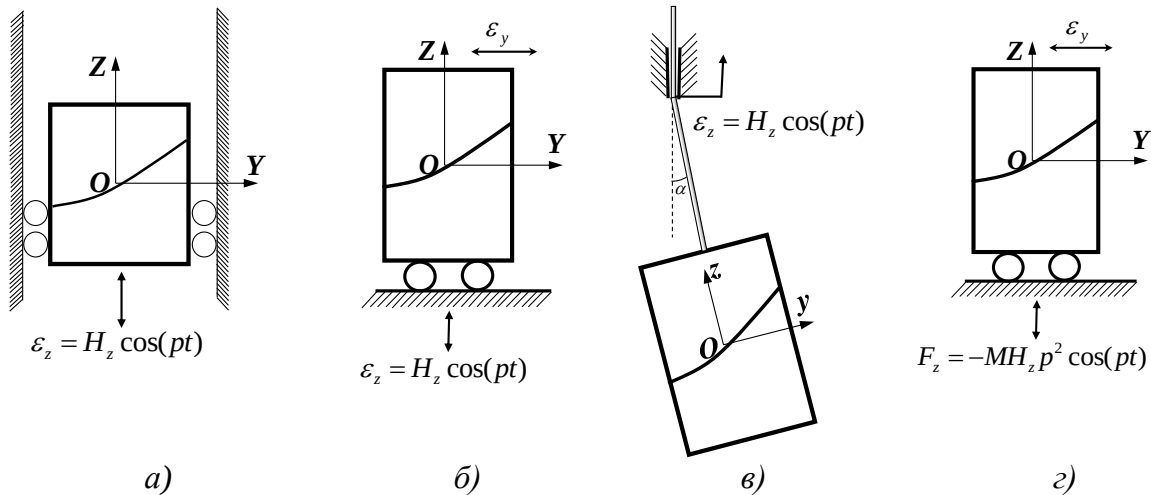


Рис. 1 Механічна постановка задачі Фарадея

У класичному експериментальному дослідженні Фарадея (Рис. 1а) резервуар рухається вертикально за заданим гармонічним законом, інші рухи – горизонтальні переміщення й кутові коливання – унеможливаються через жорстке закріплення. Однак, як показує практика, промислові конструкції й рухомі об'єкти з рідиною з вільною поверхнею, в яких відносна маса рідини велика, завжди здійснюють сумісний рух як сукупність горизонтальних переміщень і кутових коливань щодо центру мас за наявності параметричного повздовжнього збурення. Тому узагальнення класичної задачі Фарадея здійснено для таких механічних постановок задач:

- резервуар рухається вертикально за заданим гармонічним законом і може здійснювати горизонтальні переміщення завдяки поперечним коливанням рідини (внесення до системи додаткового ступеня вільності – можливості руху резервуара в горизонтальній площині, Рис. 1б);
- резервуар рухається вертикально за заданим гармонічним законом і може здійснювати кутові коливання щодо центру мас системи (внесення до системи додаткового ступеня вільності – можливості кутових рухів резервуару, Рис. 1в);
- резервуар рухається вертикально, але не за заданим гармонічним законом, а під дією гармонічної сили (Рис. 1г);
- резервуар рухається вертикально під дією гармонічної сили й може здійснювати горизонтальні переміщення чи кутові коливання щодо центру мас системи;

Узагальнення задачі Фарадея: внесення до системи додаткового ступеня вільності – можливості руху резервуара в горизонтальній площині. У класичній задачі Фарадея, коли рух резервуара здійснюється за заданим законом, маси рідини й резервуара в системі рівнянь (1) не враховуються. Тому найнижча власна частота механічної системи

«резервуар – рідина з вільною поверхнею» в цьому разі співпадає з найнижчою частотою коливань вільної поверхні рідини – частотою першої антисиметричної форми ψ_1 . В узагальненій задачі Фарадея за наявності в системі додаткового ступеня вільності – можливості горизонтального руху резервуара – система рівнянь (1) – (2) містить параметри – маси рідини та резервуара, від співвідношення яких змінюватиметься і власна частота системи в цілому. Для визначення власної частоти системи візьмемо рівняння (1) – (2) в лінеаризованій формі та застосуємо метод Гальоркіна, таким чином отримаємо формулу для визначення власної частоти механічної системи

$$\omega_e = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 - \lambda_1 \lambda_2}} = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 - \frac{\rho(B_1^{1y})^2}{\beta_{11}^q(M_T + M_F)}}}.$$

Як можна бачити з визначення ω_e , власна частота системи за збільшення маси резервуара M_T наближатиметься до власної частоти ω_1 першої антисиметричної форми ψ_1 . Цей факт підтверджує відому теорему з механіки про те, що при відкиданні в'язі власна частота в системі має знизитись. В цьому разі при збільшенні маси резервуара в'язь слабшає, оскільки коливання рідини все менше і менше впливають на характер коливань резервуара.

Нехай резервуар радіусу $R = 1$ м і маси M_T частково заповнений водою маси M_F до глибини $H = R$. Залежність $\frac{\omega_e}{\omega_1}$ від співвідношення мас резервуара й рідини показана на

Рис.2.

Для виходу системи в режим параметричного резонансу частота зовнішнього параметричного збурення має бути узгоджена саме зі власною частотою механічної системи. Власна частота системи співпадає з парціальною частотою коливань вільної поверхні рідини тільки у граничному випадку класичної задачі Фарадея (коли $M_T \rightarrow \infty$).

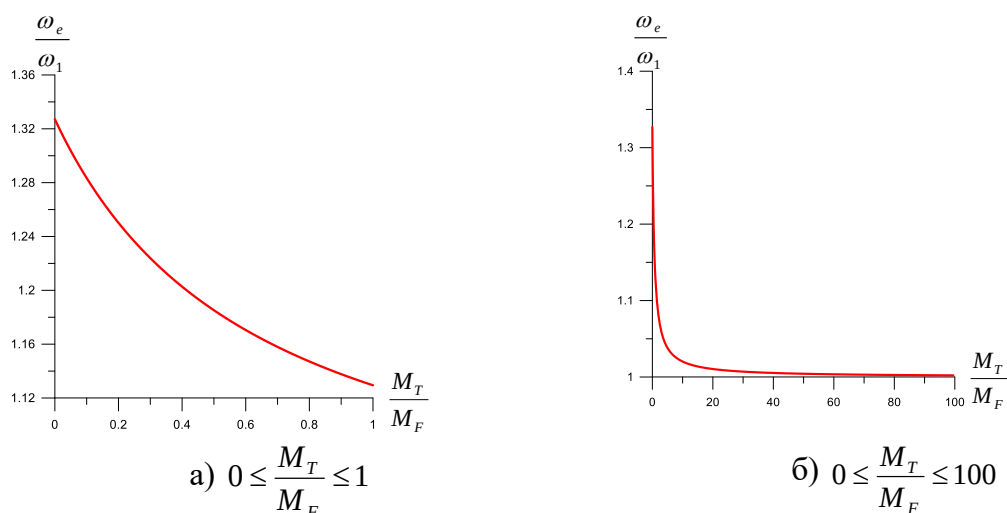


Рис. 2. Залежність власної частоти системи від співвідношення мас резервуару й рідини

На основі лінеаризованих рівнянь (1) – (2) і методу Гальоркіна побудовано в аналітичній формі рівняння границь областей стійкості й нестійкості для першого, другого і третього резонансу.

Розподіл першої і другої зони параметричного резонансу в узагальненій задачі Фарадея у площині $(\frac{\omega}{\omega_1}, \frac{H_z}{R})$ для різних співвідношень мас ($1 - M_F = 100M_T$, $2 - M_F = 10M_T$, $3 - M_F = M_T$, $4 - M_F = 0,1M_T$, $5 - M_F = 0,01M_T$) показаний на Рис.3а й Рис.3б відповідно. Як можна бачити з графіків, наявність додаткового ступеня вільності призводить до підвищення частоти параметричного резонансу, при цьому вона вище, що менше маса резервуара стосовно маси рідини, тобто ще більший вплив рухомості рідини. Крім того, що менша маса резервуара стосовно маси рідини, тим ширшає зона параметричного резонансу при збільшенні амплітуди зовнішнього збурення H_z .

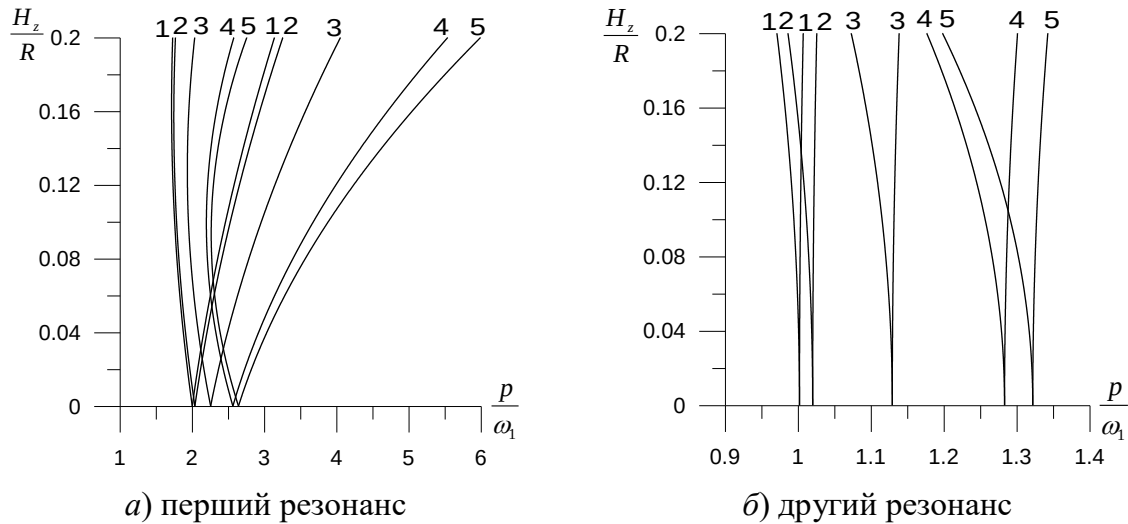


Рис.3. Розташування областей першого і другого резонансу в узагальненій задачі Фарадея (можливість горизонтального переміщення)

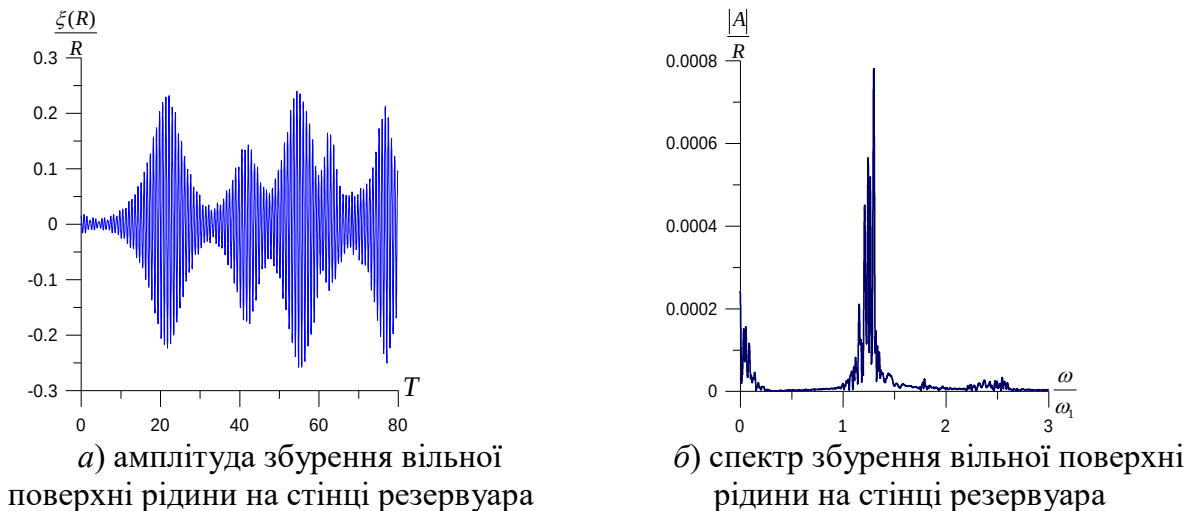


Рис.4. Вихід на режим параметричного резонансу за малих амплітуд збурень в узагальненій задачі Фарадея

Розгляньмо особливості виходу на режим параметричного резонансу для системи, в якій співвідношення мас резервуара й рідини $M_F = 0,01M_T$, а параметри руху резервуара за гармонічним законом дорівнюють $p = 2\omega_*$ та $H_z = 0,01R$. Графік зміни у часі амплітуди збурення вільної поверхні рідини на стінці резервуара $\xi(R)$ (у безрозмірній формі)

наведено на Рис.4а, а частотний спектр цього збурення – відповідно на Рис.4б. Як видно зі графіка $\xi(R)$, при заданому співвідношенні $p = 2\omega_\epsilon$, яке знайдене за формулами границь нестійкості для зони першого резонансу, система виходить на режим параметричного резонансу – амплітуда збурень на стінці зростає у понад 20 разів. При цьому виходу на усталений режим коливань не спостерігається – для збурення $\xi(R)$ характерна амплітудна модуляція, закон якої постійно змінюється у часі, а наявність гармонік на нульовій і близьких до нульової частотах означає присутність у спектрі тренду (середнього значення), який змінюється в досить широкому діапазоні. На частотному спектрі збурення на стінці (Рис.4б) видно домінуючий пік гармоніки на частоті $\omega = \omega_\epsilon \approx 0,5p \approx 1,2\omega_1$, що є підтвердженням виходу системи саме на режим параметричного резонансу (коли домінуюча частота коливань системи вдвічі менша від частоти зовнішнього збурення). Характерні для багатомодової нелінійної системи гармоніки спектру на комбінаційних частотах згруповані в околі домінуючої частоти – це теж додаткове свідчення розвитку в системі саме параметричного резонансу.

Для інших співвідношень маси резервуара й маси рідини, наведених на Рис.2 (тобто, коли маса резервуара зростає), кількість гармонік на комбінаційних частотах, близьких до $\omega = 0,5p$, в частотному спектрі $\frac{\xi(R)}{R}$, значно зменшується, що означає зменшення впливу коливань рідини на горизонтальні рухи резервуара, а в разі $M_F = 100M_T$ ці комбінаційні частоти взагалі відсутні – тут діє параметричний резонанс як у класичній задачі Фарадея (коливання рідини взагалі не впливають на коливання резервуара).

Границі області стійкості, задані для зони першого резонансу, перевірялись також для випадку, коли за малих амплітуд руху резервуара $H_z = 0,01R$ зовнішня частота збурення міститься в зоні стійкості, наприклад, дорезонансній $p = 1,5\omega_\epsilon \approx 2\omega_1$ та зарезонансній $p = 2,2\omega_\epsilon \approx 2,9\omega_1$ для співвідношення мас $M_F = 0,01M_T$. Для дорезонансної зони збурення характерна відсутність параметричного резонансу – збурення на стінці вільної поверхні рідини $\xi(R) \approx 0,1R$, тобто вони перебувають в лінійному режимі коливань. Для зарезонансної зони, навпаки, спостерігається параметричний резонанс (Рис. 5), причому, як можна бачити зі графіків амплітуд і частотного спектру, при виході на режим параметричного резонансу в системі спостерігається тільки перехідний процес, у якому істотно проявляється вплив вищих форм коливань.

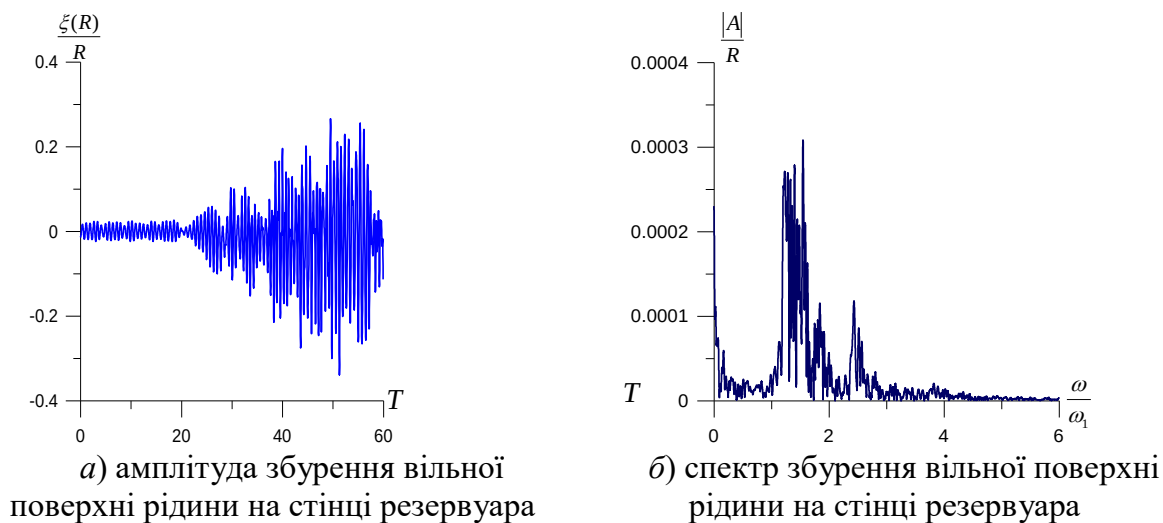


Рис.5. Коливання вільної поверхні рідини в зарезонансному діапазоні за малих амплітуд збурення в узагальненій задачі Фарадея

При збільшенні амплітуди збурення резервуара (на відміну від класичної задачі Фарадея) динамічні процеси в системі розвиваються як сукупність параметричного резонансу і вимушених коливань, тому в цьому разі можливий вихід на нелінійний режим. На Рис.6 показані результати дослідження коливань у системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею» при амплітуді резервуара $H_z = 0,1R$, частоті $p = 1,4\omega_e \approx 1,9\omega_1$ (дорезонансна зона) і співвідношенні мас $M_F = 0,01M_T$.

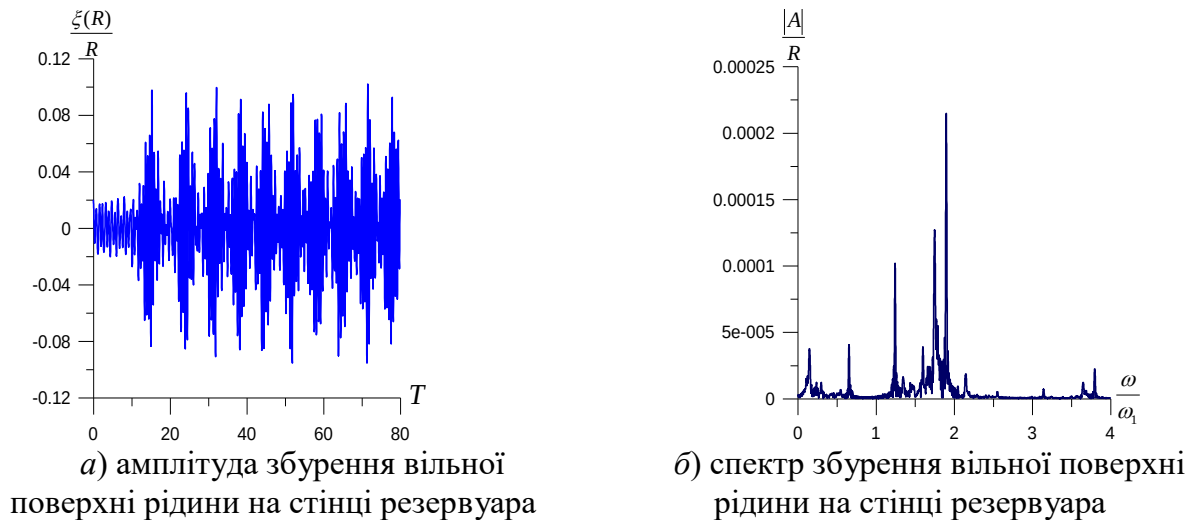


Рис.6. Коливання вільної поверхні рідини в дорезонансному діапазоні за великих амплітуд збурення в узагальненій задачі Фарадея

Не зважаючи на те, що частота зовнішнього збурення міститься в зоні стійкості, механічна система наближається до нелінійного режиму коливань. Як видно зі графіка частотного спектру, домінуюча гармоніка має частоту $\omega \approx p$, що означає перевагу механізму вимушених коливань над механізмом параметричного резонансу. При перенесенні частоти збурення резервуара до зарезонансної зони $p = 3,27\omega_e \approx 4,26\omega_1$ резонанс в системі розвивається впродовж одного періоду коливань, причому домінує механізм вимушених коливань (амплітуда гармоніки на частоті $\omega \approx p$ вдвічі більше від амплітуди гармоніки на частоті $\omega \approx 0,5p$). Механізм вимушених коливань виводить систему «резервуар – рідина з вільною поверхнею» в режим резонансу, навіть коли частота зовнішнього збурення резервуару не резонансна.

Узагальнення задачі Фарадея: внесення до системи додаткового ступеня вільності – можливості кутових рухів резервуара. На основі лінеаризованих рівнянь (1) і (3) з використанням методу Гальоркіна побудовано зони стійкості й нестійкості для системи «резервуар на маятниковому підвісі – рідина з вільною поверхнею». На Рис. 7 у площині «зовнішня частота p – амплітуда збудження H_z » побудовані області нестійкості для першої і другої власних частот відповідно для різних довжин маятникового підвісу (1 – $l = 100$ м, 2 – $l = 10$ м, 3 – $l = 1$ м). Області нестійкості обмежені кривими з однаковими номерами. Як можна бачити зі графіків, збільшення довжини маятникового підвісу сприяє зміщенню областей нестійкості до області низьких частот, що характерне для поступального руху. Крім того, збільшення довжини підвісу звужує області нестійкості для обох власних частот. Розташування областей нестійкості для другої власної частоти суттєвіше залежить від довжини підвісу, ніж для першої, – їхній перетин відбуватиметься тільки в діапазоні великих амплітуд зовнішнього впливу.

Вихід на режим параметричного резонансу спостерігається, якщо частота зовнішнього збурення лежить у зоні нестійкості, а початковим збуренням у системі може бути як мале

збурення вільної поверхні рідини, так і мале відхилення резервуара-маятника від вертикального положення. Збільшення частоти чи амплітуди зовнішнього збурення призводить до виходу системи на режим резонансу, навіть якщо ці зовнішні параметри належать до області стійкості. Водночас частотний спектр містить гармоніки, характерні як для механізму параметричного резонансу, так і для механізму вимушеного резонансу – тобто на частотах, які дорівнюють частоті зовнішнього збурення чи кратні до неї, на власних чи кратних до них частотах, а також на комбінаційних частотах.

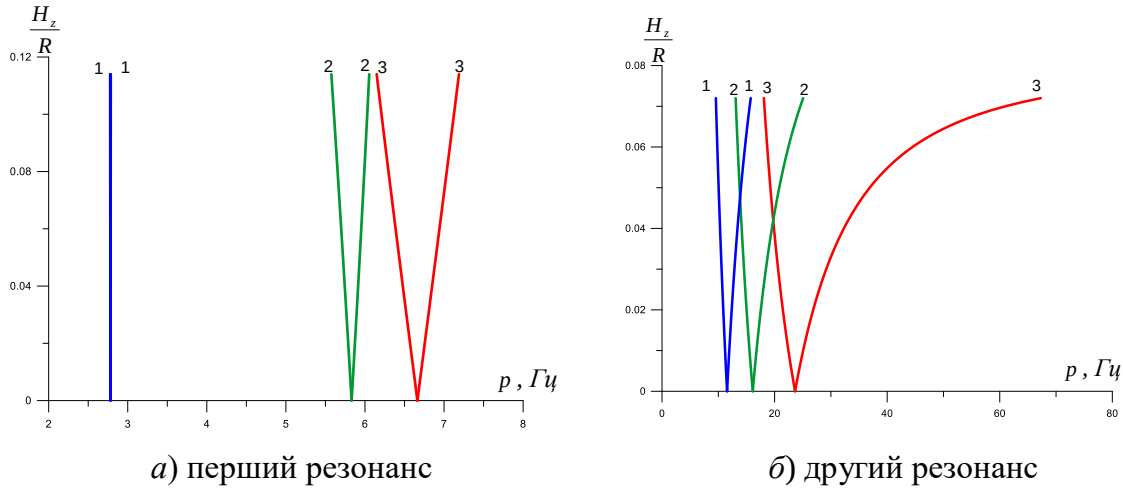


Рис.7. Розташування областей першого і другого резонансу в узагальненій задачі Фарадея (можливість кутових коливань навколо центру мас)

Узагальнення задачі Фарадея: внесення до системи додаткового ступеня вільності – можливості вертикальних рухів під дією гармонічної сили. Розгляньмо узагальнення задачі Фарадея, коли резервуар, частково заповнений рідиною, може здійснювати рухи у вертикальній площині, проте не за заданим законом $\varepsilon_z = H_z \cos(pt)$ (як у класичній задачі Фарадея), а під дією вертикальної гармонічної сили. Тут введені позначення: H_z, p – амплітуда й частота зовнішнього параметричного збурення, F_z – функція зовнішньої вертикальної сили, M – загальна маса системи. Величина зовнішньої вертикальної сили F_z , яка діє на дно резервуара, обрана таким чином, щоб забезпечити резервуарові таке ж саме прискорення вздовж вертикальної осі Oz , як і в разі класичної задачі Фарадея.

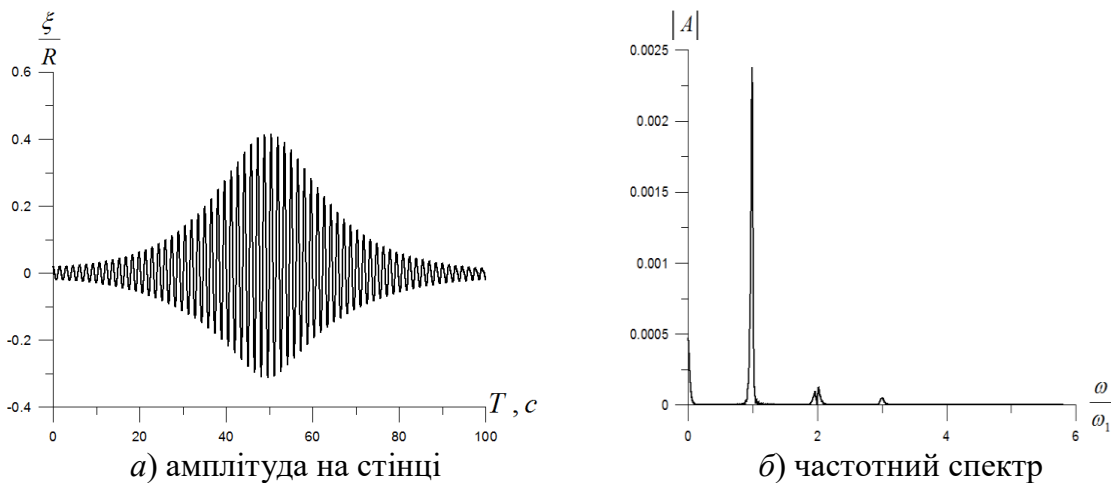


Рис. 8. Коливання вільної поверхні рідини, коли резервуар ($M_T = 1000M_F$) рухається вертикально під дією гармонічної сили

На Рис.8а наведено графік зміни у часі амплітуди вільної поверхні рідини під дією вертикальної гармонічної сили, а на Рис.8б – її частотний спектр, отриманий за допомогою швидкого перетворення Фур'є. Як можна бачити з Рис.8а, спостерігається вихід коливань вільної поверхні рідини на режим параметричного резонансу (амплітуда коливань збільшується в 40 разів), хоча збурення вільної поверхні рідини спричинені динамічним, а не кінематичним зовнішнім впливом. Наявність параметричного механізму підтверджується і характерним для параметричного резонансу частотним спектром (Рис.8б) – домінуючою частотою коливань вільної поверхні рідини є половина частоти зовнішнього впливу $\omega \approx 0,5p = \omega_1$. Близькість значень частоти коливань вільної поверхні й частоти параметричного впливу пояснюють наявність у коливаннях вільної поверхні рідини ефекту сильної амплітудної модуляції. Наявність цього самого ефекту призводить до явища антирезонансу – амплітуда збурення вільної поверхні на деякому інтервалі часу спадає до рівня $\xi = (0,01 \div 0,03)R$, тобто значення амплітуди спадає на порядок (приблизно в 10-12 разів) і тримається впродовж 3 періодів коливань першої антисиметричної форми. Як показують результати чисельних експериментів, для важкого резервуара коливання вільної поверхні рідини в класичній (при заданому законі руху резервуара) і узагальненій задачі Фарадея (при силовому збудженні руху) майже цілком співпадають. Причина такого збігу – це мала відносна маса рідини, силовий відгук якої в обох випадках не впливає на коливання резервуара, тому двостороння взаємодія між резервуаром і рідиною відсутня.

Розгляньмо аналогічну задачу для випадку легкого резервуара, тобто коли співвідношення мас резервуара й рідини становить, наприклад, $M_T = 0,001M_F$. На Рис.9а і Рис.9б наведені графіки збурення вільної поверхні рідини у класичній і узагальненій задачі Фарадея відповідно. Як можна бачити зі графіків, у легкому резервуарі в узагальненій задачі рухомість рідини зростає, тому амплітуда збурення вільної поверхні збільшується, при цьому структура частотного спектра аналогічна до випадку коливань важкого резервуара. На Рис.10а наведений графік переміщення легкого резервуара під дією вертикальної гармонічної сили. Як можна бачити зі графіка, через малу масу резервуара силовий відгук рідини на стінки резервуара істотно впливає на закон його руху. На відміну від класичної задачі Фарадея, легкий резервуар під дією вертикальної сили рухається по вісі OZ не за законом косинусоїди, а за складнішим законом. Це підтверджує і частотний спектр вертикального переміщення резервуара (Рис.10б), в якому присутні дві дуже близькі частоти.

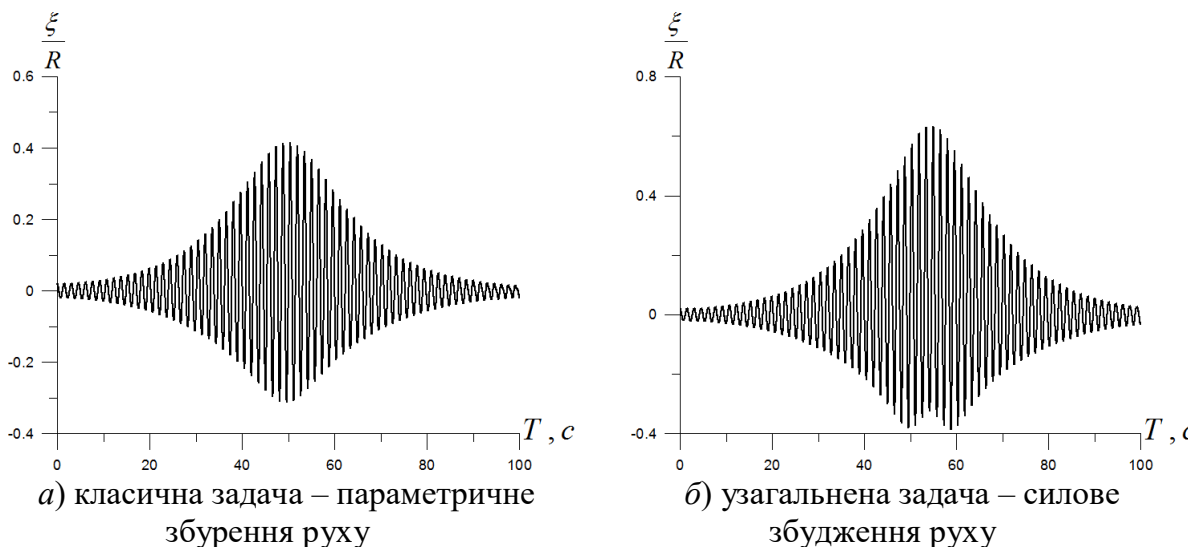


Рис. 9. Коливання вільної поверхні рідини, коли резервуар ($M_T = 0,001M_F$) рухається вертикально

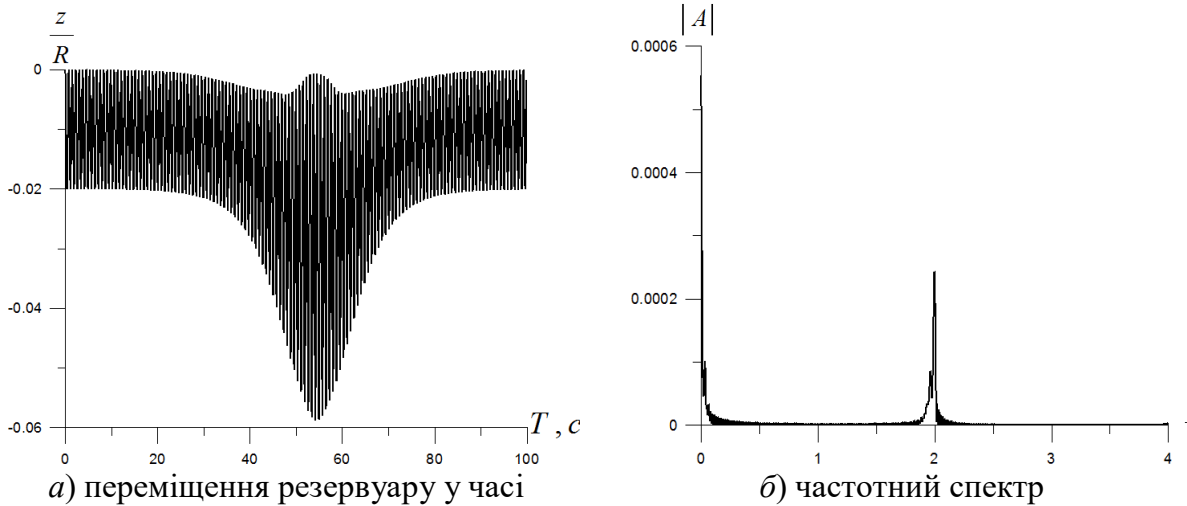


Рис. 10. Характеристики вертикального руху резервуара ($M_T = 0,001M_F$) під дією гармонічної сили

Якщо у класичній задачі Фарадея обрати відповідну частоту p й амплітуду H_z заданого закону руху з області нестійкості, то зрештою коливання вільної поверхні рідини вийдуть на режим параметричного резонансу. В узагальненій задачі Фарадея при дії на систему вертикальної періодичної сили за законом $F_z = -(M_T + M_F)H_z p^2 \cos(pt)$ з такими самими значеннями параметрів p і H_z виходу на режим резонансу (чи принаймні на нелінійний режим коливань) не відбувається.

Узагальнення задачі Фарадея: внесення до системи додаткового ступеня вільності – можливості вертикальних рухів під дією гармонічної сили й горизонтальних переміщень або кутових рухів навколо центру мас. Розгляньмо особливості динамічних процесів у системі, коли резервуар має два ступеня вільності – можливість переміщення у вертикальній площині під дією зовнішньої сили й можливість переміщення у горизонтальній площині завдяки коливанням вільної поверхні рідини. Нехай резервуар радіуса $R = 1$ м частково заповнений водою до глибини $H = R$, при цьому співвідношення мас резервуара й рідини дорівнює $M_T = 0,1M_F$.

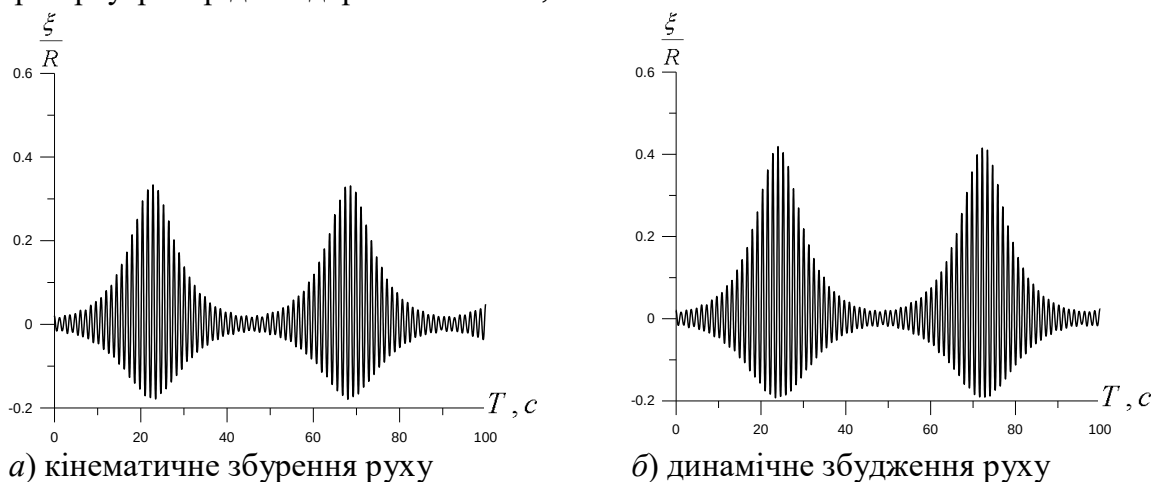


Рис. 11. Зміна амплітуди вільної поверхні рідини у часі в узагальненій задачі Фарадея

Як можна бачити з Рис. 11, за такого співвідношення мас і прийнятій амплітуді $H_z = 0,01R$ частота зовнішнього параметричного збурення має бути $2,494\omega_1 \leq p \leq 2,494\omega_1$, тобто, щоб вивести систему на режим параметричного резонансу, обираємо, наприклад,

значення $p = 2,55\omega_1$. На Рис.11 наведені амплітуди збурення у часі вільної поверхні рідини для випадку кінематичного збурення (а) й динамічного збудження (б) руху, а на Рис.12 – відповідні частотні спектри зміни амплітуди у часі. Як можна бачити з Рис.11, в обох випадках спостерігається вихід системи на режим параметричного резонансу за наявності глибокої амплітудної модуляції, розрізняються лише максимуми амплітуд. Спектри коливань вільної поверхні рідини (Рис.12) для обох узагальнень також подібні й характеризуються домінуванням основного тону і близьких до нього комбінаційних частот.

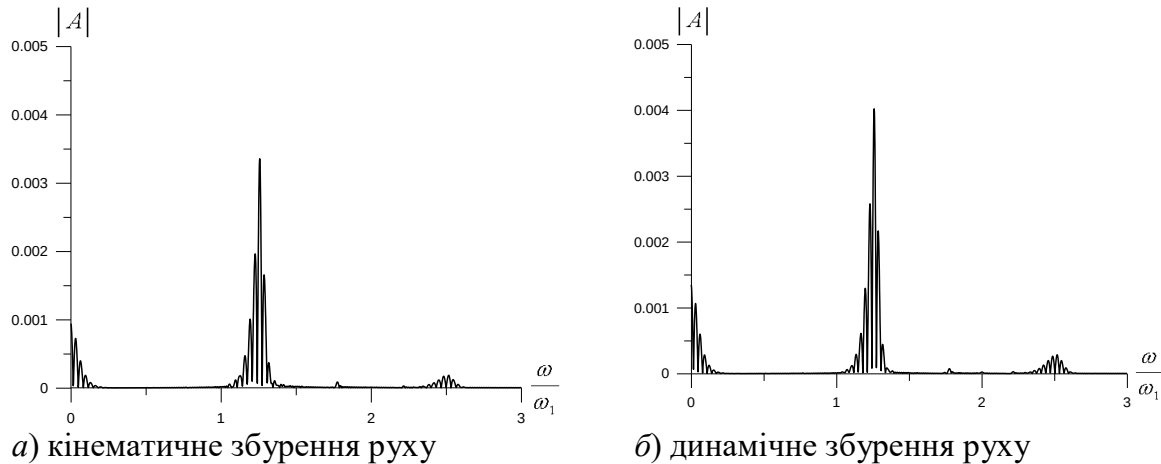


Рис. 12. Частотний спектр вільної поверхні рідини в узагальненій задачі Фарадея

Розгляньмо узагальнену задачу Фарадея, коли частота зовнішнього збудження дорівнює $p = 1,9\omega_1$, тобто розташована за границею області нестійкості в дорезонансній зоні. На Рис.13 наведені амплітуди збурення у часі вільної поверхні рідини для випадку кінематичного збурення (а) й динамічного збудження (б) руху, а на Рис.14 – відповідні частотні спектри зміни амплітуди у часі. Як можна бачити зі графіків зміни амплітуди, в обох випадках спостерігається вихід системи на режим резонансу, причому в разі кінематичного збурення ці амплітуди більше. Аналіз частотних спектрів (Рис.14) показує, що обох випадках у спектрі присутні гармоніки як у околі частоти $p \approx \omega_1$, так і в околі частоти $p \approx 1,9\omega_1$. Це означає, що в системі динамічні процеси розвиваються як сукупність параметричного резонансу й режиму вимушених коливань, причому режим вимушених коливань визначальний (гармоніки на цих частотах домінуючі). Аналогічна ситуація спостерігається і при збудженні системи на зарезонансній частоті.

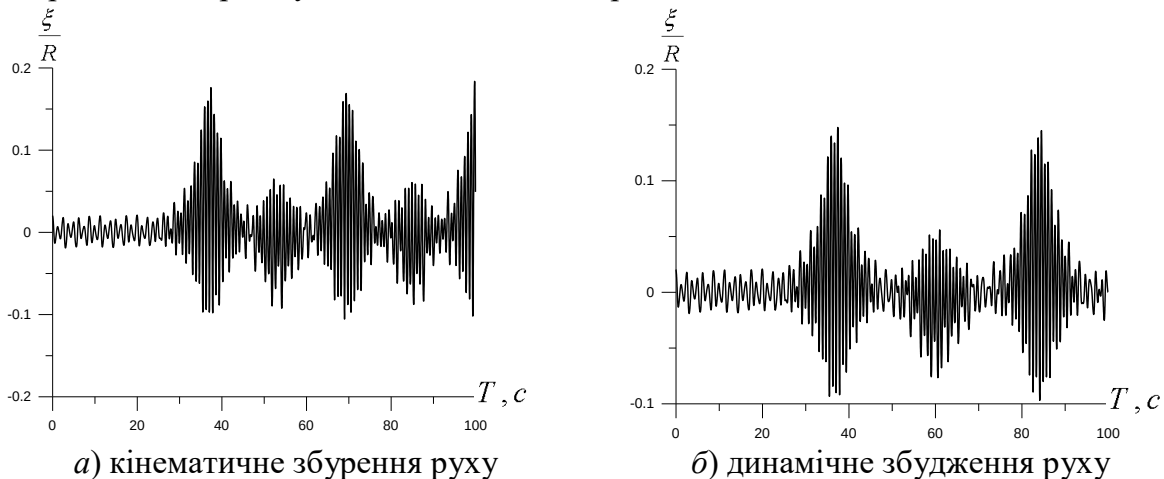


Рис.13. Зміна амплітуди вільної поверхні рідини у часі в узагальненій задачі Фарадея (дорезонансна зона)

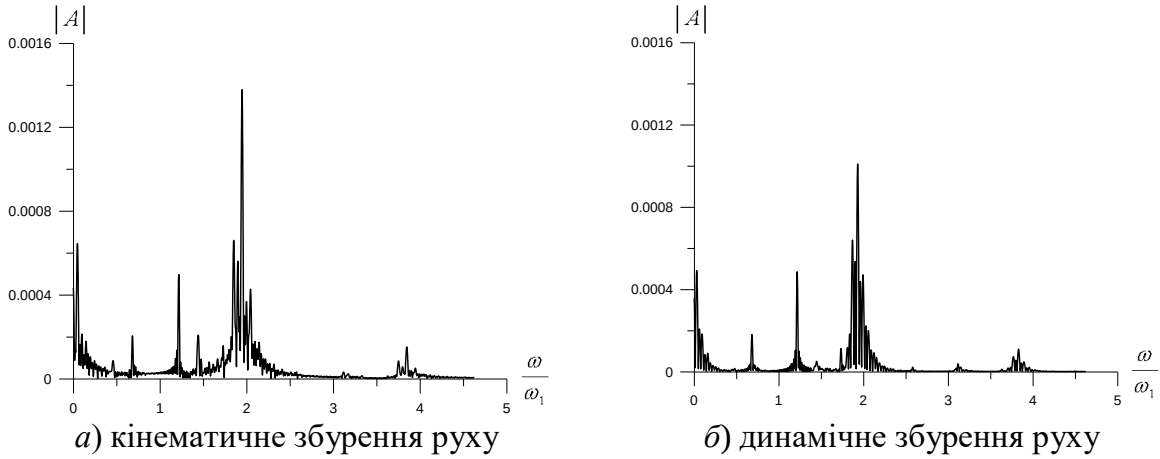


Рис. 14. Частотний спектр вільної поверхні рідини в узагальненій задачі Фарадея (дорезонансна зона)

Для узагальненої задачі з вертикальною гармонічною силою взагалі неможливо побудувати області стійкості й нестійкості. Проте наявність додаткового ступеня вільності також дає змогу вивести систему на нелінійний режим завдяки дії механізму вимушених коливань.

Таким чином, встановлено, що динамічні процеси в системі розвиваються як сукупність параметричного резонансу і вимушених коливань. За наявності додаткових ступенів вільності в узагальненій задачі Фарадея можливий вихід системи на нелінійний режим коливань на будь-якій частоті.

Третій розділ роботи присвячений побудові алгоритмів керування (активної зовнішньої сили, яка підведена до резервуара), яке забезпечить рух резервуара за заданим законом (програмний рух) за наявності постійно діючого збурення – коливань вільної поверхні рідини.

На основі лінійної моделі у збуреннях (відхиленнях переміщень і швидкостей від програмних значень) із використанням методів модального керування, еталонної моделі й мінімізації квадратичного функціоналу якості побудовано алгоритми керування зі зворотним зв'язком. Керування зі зворотним зв'язком на основі лінійної системи у збуреннях може бути використане для забезпечення «комфортних» рухів резервуару, тобто при відсутності великих збурень вільної поверхні рідини.

Поставлено задачу побудови керування F_y , яке б забезпечувало програмний рух резервуару з рідиною у напрямку Oy за заданим законом $\dot{\varepsilon}_y = f(t)$, $\varepsilon_y = \int f(t)dt$. При цьому закон руху рідини задається відповідно до моделі «затверділої» рідини, тобто збурення вільної поверхні рідини мають бути відсутні $\xi(t) = \dot{\xi}(t) = 0$. Тоді програмне керування F_{PR} будується відповідно до другого закону Ньютона й має форму $F_{PR} = (M_T + M_F)\ddot{\varepsilon}_y$. Однак, оскільки у системі присутні збурення – збурення початкових умов параметрів руху $\varepsilon_y, \dot{\varepsilon}_y, \xi, \dot{\xi}$ й коливання вільної поверхні рідини, введемо до системи лінійне керування зі зворотним зв'язком F_{BK} та постійними коефіцієнтами підсилення $l_i, i = 1..4$, у формі $F_{BK} = \sum_{i=1}^4 l_i x_i$, яке корегуватиме всі похибки – відхилення наявних значень параметрів руху від заданих програмних значень

$$x_1 = \xi(t), \quad x_2 = \dot{\xi}(t), \quad x_3 = \varepsilon_y - \int f(t)dt, \quad x_4 = \dot{\varepsilon}_y - f(t).$$

Таким чином, повне керування, яке діє на систему, має форму

$$F_y = F_{PR} + F_{BK} = (M_T + M_F) \ddot{\varepsilon}_y - \sum_{i=1}^4 l_i x_i,$$

де коефіцієнти підсилення зворотного зв'язку мають позитивні значення $l_i \geq 0, i = 1..4$, а сам зворотний зв'язок негативний для забезпечення стійкості системи керування.

Керування зі зворотним зв'язком побудуємо на основі лінеаризованої системи рівнянь руху (1) – (2), в якій буде враховано коливання вільної поверхні рідини $\xi(t)$ за першою антисиметричною формою a_1 з можливістю горизонтального переміщення резервуара вздовж горизонтальної координати ε_y . Відповідні рівняння мають форму

$$\ddot{a}_1 \beta_{11}^q + B_1^{1y} \ddot{\varepsilon}_y + g N_1 a_1 = 0, \quad \rho B_1^{1y} \ddot{a}_1 + (M_T + M_F) \ddot{\varepsilon}_y = 0,$$

чи, з урахуванням позначень, $\nu_1 = \frac{B_1^{1y}}{\beta_{11}^q}$, $\nu_2 = \rho B_1^{1y}$, частота першої антисиметричної

форми $\omega_1^2 = \frac{g N_1}{\beta_{11}^q}$, можуть бути наведені як

$$\ddot{a}_1 + \nu_1 \ddot{\varepsilon}_y + \omega_1^2 a_1 = 0, \quad \nu_2 \ddot{a}_1 + M \ddot{\varepsilon}_y = F_y. \quad (4)$$

Введемо також позначення для фазових змінних $x_1 = a_1(t)$, $x_2 = \dot{a}_1(t)$, $x_3 = \varepsilon_y - \int f(t) dt$, $x_4 = \dot{\varepsilon}_y - f(t)$, $u = F_{BK}$ та запишемо систему диференціальних рівнянь (4) у нормальній формі Коші

$$\dot{x} = Fx + Gu, \quad (5)$$

де x – вектор фазових змінних $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, u – керування, а матриця F та вектор G мають форму

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_1 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

з позначеннями $\lambda_1 = -\frac{M\omega_1^2}{M - \nu_1\nu_2}$, $\lambda_2 = \frac{\nu_2\omega_1^2}{M - \nu_1\nu_2}$, $\beta_1 = -\frac{\nu_1}{M - \nu_1\nu_2}$, $\beta_2 = \frac{1}{M - \nu_1\nu_2}$. У системі (4)

фазові змінні $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ мають сенс збурень, тобто відхилень дійсних значень параметрів руху системи від програмних.

Побудоване керування зі зворотним зв'язком має забезпечити асимптотичну стійкість руху системи у збуреннях. Для його побудови використовуватимемо метод, який розробив В.В. Новицький: рівняння системи у збуреннях (5) послідовно перетворюються на форму, канонічну за керуванням, потім на канонічну форму Гессенберга і, нарешті, на канонічну форму Фробеніуса.

Оскільки у системі (4) вектор керування має розмірність 1, то після перетворення система (5) у формі, канонічній за керуванням, має бути записана як

$$\dot{y} = Ay + Bu, \quad B = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T. \quad (7)$$

а після відповідних перетворень у канонічній формі Фробеніуса

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (8)$$

До системи (8) приєднаймо зворотний зв'язок $u = -\sum_i k_i y_i$ і отримаймо рівняння замкненої системи

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & \lambda_1 - k_3 & -k_4 \end{bmatrix} y. \quad (9)$$

Треба знайти значення коефіцієнтів k_i зворотного зв'язку, які б забезпечили асимптотичну стійкість замкненої системи (9). Як відомо, коефіцієнти характеристичного полінома матриці у формі Фробеніуса – це елементи нижнього рядка, тому характеристичний поліном системи (9) має форму

$$f(z) = z^4 + k_4 z^3 + (k_3 - \lambda_1) z^2 + k_2 z + k_1. \quad (10)$$

Для забезпечення асимптотичної стійкості системи (9) потрібно, щоб корені характеристичного полінома були дійсними негативними числами. Скористаймося для цього модальним принципом керування, тобто задаватимемо властивості замкненої системи через завдання значень коренів характеристичного полінома, а потім знайдемо значення коефіцієнтів підсилення k_i зворотного зв'язку. Задаємо значення коренів характеристичного полінома $\mu_i, i=1..4$, й отримуємо відповідну форму характеристичного полінома

$$f(z) = z^4 + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) z^3 + (\mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 + \mu_1 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 + \mu_2 \mu_4 + \mu_3 \mu_4) z^2 + (\mu_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_2 \mu_4 + \mu_1 \mu_3 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 \mu_4) z + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4.$$

Порівнюючи значення коефіцієнтів характеристичного полінома шуканої (5) і канонічної (9) систем, отримаємо значення коефіцієнтів підсилення k_i зворотного зв'язку в явній формі

$$k_1 = \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4, \quad k_2 = \mu_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_2 \mu_4 + \mu_1 \mu_3 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 \mu_4, \\ k_3 = \lambda_1 + \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 + \mu_1 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 + \mu_2 \mu_4 + \mu_3 \mu_4, \quad k_4 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4.$$

Визначаючи значення коренів характеристичного полінома, а, отже, й коефіцієнтів підсилення k_i зворотного зв'язку, можна задавати якість перехідних процесів у замкненій системі керування. Якщо задані корені характеристичного полінома – негативні дійсні числа або комплексні числа із негативною дійсною частиною, то система буде асимптотично стійкою.

Оскільки координатне перетворення неособливе, то воно не змінює спектральних характеристик шуканої системи (5), а, отже, характеристичні поліноми замкненої шуканої системи (5) та канонічної системи (9) співпадають. Звідси можна визначити коефіцієнти підсилення l_i зворотного зв'язку у шуканій системі (4) на основі знання коефіцієнтів підсилення k_i зворотного зв'язку у канонічній системі (9) таким чином

$$l_1 = k_3 - \frac{\beta_2 k_1}{(\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1) \beta_1}, \quad l_2 = k_4 - \frac{\beta_2 k_2}{(\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1) \beta_1}, \quad l_3 = \frac{k_1}{\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1}, \quad l_4 = \frac{k_2}{\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1} \quad (11)$$

та отримати замкнену систему керування (5), яка відповідає заданим вимогам, у формі

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 - \beta_1 l_1 & -\beta_1 l_2 & -\beta_1 l_3 & -\beta_1 l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_2 - \beta_2 l_1 & -\beta_2 l_2 & -\beta_2 l_3 & -\beta_2 l_4 \end{bmatrix} x.$$

Вибір коренів характеристичного полінома (10) має забезпечувати не тільки стійкість системи керування (зокрема, асимптотичну), а й підтримувати на відповідному рівні якості перехідних процесів, що відбуваються в системі. Для досягнення цієї мети пропонуємо спочатку задати параметри еталонного руху (чи еталонної системи), тобто рівень перерегулювання, тривалість перехідних процесів, декремент згасання, а потім на основі отриманої інформації задати корені (чи коефіцієнти) характеристичного поліному шуканої системи й обчислити коефіцієнти зворотного зв'язку.

Запишемо рівняння еталонної системи як

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_3 & \nu_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_5 & 0 & \lambda_4 & \nu_4 \end{bmatrix} y, \quad (12)$$

де параметри $\lambda_3, \nu_3, \lambda_4, \nu_4$ задаємо, базуючись на міркуваннях тривалості і якості перехідного процесу (аперіодичний процес, наявність коливань тощо). Перетворимо еталонну систему на канонічну форму Фробеніуса

$$\dot{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda_3\lambda_4 & -\lambda_3\nu_4 - \lambda_4\nu_3 & -\nu_3\nu_4 + \lambda_3 + \lambda_4 & \nu_3 + \nu_4 \end{bmatrix} Y,$$

тоді характеристичний поліном еталонної системи такий

$$f(z) = z^4 + (-\nu_3 - \nu_4)z^3 + (\nu_3\nu_4 - \lambda_3 - \lambda_4)z^2 + (\lambda_3\nu_4 + \lambda_4\nu_3)z + \lambda_3\lambda_4.$$

Зробимо співставлення коефіцієнтів характеристичних поліномів системи у канонічній формі (8) й еталонної системи (12) й отримаємо такі співвідношення

$$k_1 = -\nu_3 - \nu_4, k_2 = \nu_3\nu_4 - \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_1, k_3 = \lambda_3\nu_4 + \lambda_4\nu_3, k_4 = \lambda_3\lambda_4,$$

а далі, після підставляння у формули (11), обчислюємо коефіцієнти зворотного зв'язку в шуканій системі.

Розглянемо завдання визначення оптимального керування системи у збуреннях (5) – (6), коли критерій оптимальності заданий як квадратичний функціонал якості

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + \nu u^2) dt, \quad (13)$$

де $\nu > 0$, Q – діагональна матриця, а квадратична форма $x^T Q x = \sum_{i=1}^4 q_i x_i^2 \geq 0$ за будь-якого x ,

тобто невід'ємно визначена. Як відомо, оптимальне керування – це лінійна функція фазових координат

$$u = -(\frac{1}{\nu})G^T P x,$$

де симетрична постійна матриця P – це розв'язок нелінійного алгебраїчного рівняння Ріккати

$$-PF - F^T P + (\frac{1}{\nu})P G G^T P = Q,$$

а оптимальному керуванню відповідає рішення, що задовольняє критерій Сільвестра, тобто головні мінори матриці P мають бути більші від нуля чи дорівнювати нулю. Таким чином, для довільно заданих параметрів q_i в матриці Q оптимальне керування може не існувати, оскільки розв'язок P нелінійного алгебраїчного рівняння Ріккати може не задовольняти критерій Сильвестра.

Розгляньмо обернену задачу синтезу квадратичного критерію якості (13) для побудови оптимального керування в системі у збуреннях (5) – (6). Для цього побудуємо таку матрицю Q у критерії (13), що оптимальне керування завжди існуватиме й задовольнятиме необхідним додатковим критеріям.

Систему у збуреннях (5) – (6) використовуватимемо у канонічній стосовно фазових змінних формі (7) – (8), тоді функціонал якості (13) за допомогою перетворення $x = \tilde{T}y$,

$y = \tilde{T}^{-1}x$ матиме форму $J = \int_0^\infty (y^T C y + u^2) dt$, де

$$C = (\tilde{T}^{-1})^T Q \tilde{T}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1)^2 q_3 & 0 & (\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1) \beta_2 q_3 & 0 \\ 0 & (\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1)^2 q_4 & 0 & (\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1) \beta_2 q_4 \\ (\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1)^2 q_3 & 0 & \beta_1^2 q_1 + \beta_2^2 q_3 & 0 \\ 0 & (\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1)^2 q_4 & 0 & \beta_1^2 q_2 + \beta_2^2 q_4 \end{bmatrix}$$

Рівняння Ріккаті для трансформованої системи та функціоналу якості запишемо як

$$-SA - A^T S + \left(\frac{1}{\nu}\right) S B B^T S = C, \quad (14)$$

де S – розв’язок рівняння – симетрична матриця спеціальної структури. Оптимальне керування, побудоване на основі розв’язку рівняння Ріккаті S , має вигляд

$$u = -\sum_i k_i y_i = -\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^4 s_i y_i,$$

тобто залежить тільки від компонентів $s_i, i = 1..4$. Компоненти $s_i, i = 1..4$, знаходимо на основі співставлення з еталонною моделлю, а всі інші мусять мати такі значення, щоб матриця Q у функціоналі (13) була невід’ємно-визначеною. В розгорнутій формі матричне рівняння (14) таке

$$(\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1)^2 q_3 = \frac{s_1^2}{\nu}, \quad \beta_1^2 q_1 + \beta_2^2 q_3 = -2\lambda_1 s_3 - 2s_{10} + \frac{s_3^2}{\nu}, \quad (\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1) \beta_2 q_3 = -s_1 \lambda_1 - s_8 - \frac{s_1 s_3}{\nu},$$

$$(\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1)^2 q_4 = -2s_8 + \frac{s_2^2}{\nu}, \quad \beta_1^2 q_2 + \beta_2^2 q_4 = -2s_3 + \frac{s_4^2}{\nu}, \quad (\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1) \beta_2 q_4 = -s_1 - s_{10} - \frac{s_2 s_4}{\nu},$$

$$\frac{s_1 s_2}{\nu} - s_5 = 0, \quad \frac{s_1 s_4}{\nu} - s_9 = 0, \quad \frac{s_2 s_3}{\nu} - \lambda_1 s_2 - s_6 - s_9 = 0, \quad \frac{s_3 s_4}{\nu} - \lambda_1 s_4 - s_2 - s_7 = 0,$$

тобто розпадається на три незалежні системи, з розв’язку останньої знаходимо компоненти s_5, s_6, s_7, s_9

$$s_5 = \frac{s_1 s_2}{\nu}, \quad s_6 = \frac{s_2 s_3 - s_1 s_4 - \nu \lambda_1 s_2}{\nu}, \quad s_7 = \frac{s_3 s_4 - \nu s_2 - \nu \lambda_1 s_4}{\nu}, \quad s_9 = \frac{s_1 s_4}{\nu},$$

а розв’язок перших двох дає залежність компонентів матриці функціонала Q від параметрів s_8, s_{10} у формі $q_i = f(s_8, s_{10})$.

Керування зі зворотним зв’язком на основі лінійної системи у збуреннях може бути використане тільки для забезпечення «комфортних» рухів резервуара, тобто за відсутності великих збурень вільної поверхні рідини.

Для задач керування за наявності великих збурень вільної поверхні рідини побудовано алгоритми керування на основі компенсації головного вектора гідродинамічних сил та варіаційного принципу найменшого примушення Гауса.

На основі нелінійної математичної моделі сумісного руху конструкції з рідиною з вільною поверхнею запропонований алгоритм керування, що базується на компенсації силового гідродинамічного відгуку рідини (динамічної реакції), тобто задачу керування

системою «резервуар - рідина» зведено до керування рухом твердого тіла, коли керуючий вплив доповнюється силою, що компенсує силовий відгук рідини.

Систему диференціальних рівнянь руху (1) – (3) наведено так

$$\ddot{\vec{e}} = \frac{\vec{F} + \vec{R}}{M_F + M_T} + \vec{g}, \sum_{n=1}^3 \ddot{\alpha}_n \left[\sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{\alpha}_n} \left(\frac{1}{\rho} J_{res}^{ps} \right) \right] = \frac{1}{\rho} (M_R^r + M_{ex}^r),$$

де $\vec{F}$ та M_{ex}^r – відповідно зовнішня сила й момент, які діють на конструкцію, а $\vec{R}$ і M_R^r – головні вектори сил і моментів тиску рідини на стінки конструкції, які відповідно до варіаційного підходу визначаються автоматично як складова частина техніки варіювання. З рівнянь руху (1) – (3) можна вивести аналітичні вирази для цих параметрів силової і моментної взаємодії рідини з конструкцією (зауважимо, що в літературі про динаміку конструкцій із рідиною така силова взаємодія визначається зазвичай шляхом інтегрування сил тиску на стінках резервуара, що значно складніше і розглянуто лише для окремих випадків; тут же такий результат отримуємо автоматично як складову частину техніки варіювання і для загального випадку)

$$\vec{R} = \rho \left[\left(\sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right) - \sum_i \ddot{a}_i \left(\vec{B}_i^1 + \sum_j a_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right) \right] \quad (15)$$

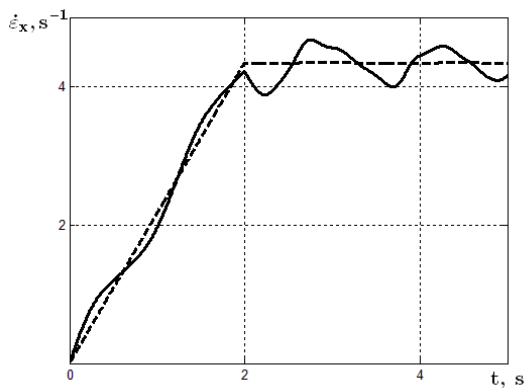
$$\begin{aligned} M_R^r = & -\frac{\rho}{2} \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(E_{pi}^{1*} + \sum_j a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{j,k} a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) \right\} - \\ & - \rho \sum_{n=1}^3 \ddot{\alpha}_n \left[\sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{\alpha}_n} \left(A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) \right] + \\ & + \rho \sum_{p,s=1}^3 \left(\omega_{p,r}^* \omega_s + \omega_p^{(k)} \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \right) \left(A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) + \\ & + \frac{\rho}{2} \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left(\sum_i \dot{a}_i E_{pi}^{1*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + \\ & + \rho \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \omega_s \left(\sum_i \dot{a}_i E_{psi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{psij}^3 \right) + \frac{\rho}{2} \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(\sum_i \dot{a}_i \dot{a}_j E_{pij}^{2*} + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Отримання параметрів силової взаємодії в аналітичній формі дає можливість не тільки кількісно оцінити силовий вплив рідини на стінки резервуара, а й запропонувати нові алгоритми керування конструкціями з рідиною.

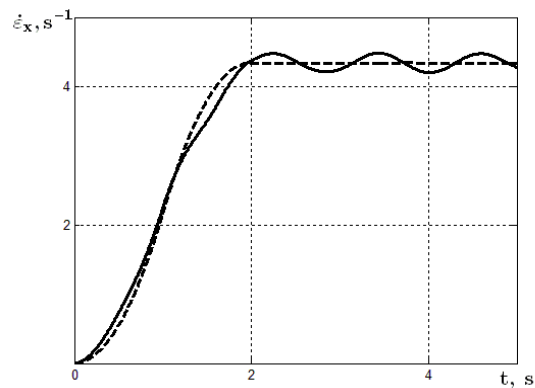
Розгляньмо випадок поступального руху конструкції з рідиною в горизонтальній площині. У цьому разі рух конструкції цілком заданий тільки одним параметром поступального руху e_x . Відповідно, два рівняння, що відповідають руху за напрямками y і z з системи рівнянь (2), а також три рівняння системи (3), відповідні до кутового руху конструкції, опускаються.

Розгляньмо задачу про розгін конструкції з рідиною за дії на неї сили у формі короткого імпульсу сили тривалістю $t_{im} = 2$ с. При цьому досліджується рух системи для чотирьох варіантів форми імпульсу сили, який прикладається до стінки резервуара й має однакову площу та тривалість (кількість руху, яка передається до системи), – прямокутний імпульс

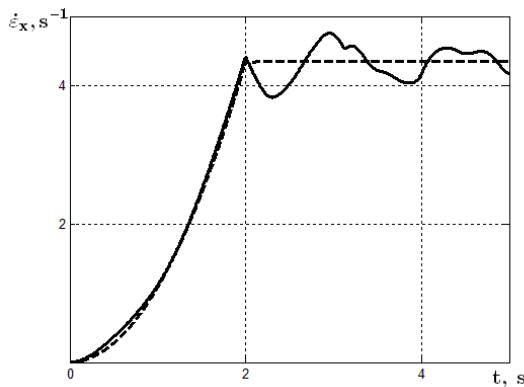
(Рис. 15а), імпульс у вигляді рівнобічного трикутника (Рис. 15б), імпульс у формі прямокутного трикутника з вертикальним заднім фронтом (Рис. 15в) та імпульс у формі прямокутного трикутника з вертикальним переднім фронтом (Рис. 15г). На Рис. 15 наведені графіки зміни швидкості руху конструкції в напрямку x у часі для випадку руху системи, коли рідина «затверділа» (штрихова лінія), для випадку повного врахування рухомості рідини (суцільна лінія), а також для випадку руху системи, коли дія імпульсу сили супроводжується компенсацією силового відгуку рідини на стінки резервуара, визначеної згідно з формулою (15). Зауважимо, що при цьому компенсація рухомості рідини здійснюється на всьому інтервалі руху на відміну від дії короткого імпульсу активної сили. Водночас результати розрахунків зміни швидкості руху конструкції цілком співпадають з випадком руху системи із «затверділою» рідиною. Результати обчислень наведені в безрозмірній формі шляхом віднесення лінійних розмірів до радіуса резервуара.



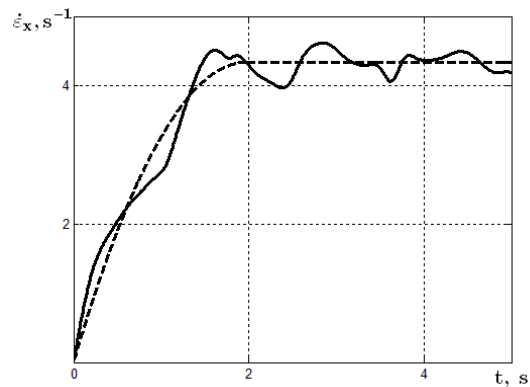
а) прямокутний імпульс



б) імпульс у формі рівнобічного трикутника



в) імпульс у формі прямокутного трикутника з вертикальним заднім фронтом



г) імпульс у формі прямокутного трикутника з вертикальним переднім фронтом

Рис.15. Швидкість резервуара під дією імпульсу сили в задачі розгону за співвідношення мас $M_T = 0,1M_F$

Для побудови керування на основі принципу найменшого примушення Гауса використовуватимемо систему рівнянь руху (1) – (2), в якій буде враховано коливання вільної поверхні рідини $\xi(t)$ за першою антисиметричною формою a_1 з можливістю горизонтального переміщення резервуару вздовж горизонтальної координати ε_y . Введемо позначення для фазових змінних $x_1 = a_1$, $x_2 = \dot{a}_1$, $x_3 = \varepsilon_y$, $x_4 = \dot{\varepsilon}_y$ й керування $u = F_y i$ запишемо систему (1) – (2) в нормальній формі Коші в узагальнених позначеннях

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = f_1(x_1, x_2) + b_1(x_1, x_2)u, \quad (17)$$

$$\dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = f_2(x_1, x_2) + b_2(x_1, x_2)u, \quad (18)$$

де зміст функцій f_1, f_2, b_1, b_2 залежить від вибору обраної для керування моделі (лінійна чи нелінійна до величин відповідного порядку малості).

Розгляньмо побудову керування для системи у формі (17) – (18), яке забезпечить реалізацію програмного руху резервуара за заданим законом зміни швидкості $\psi(x_4, t) = 0$. Отримаємо похідну за часом від програмного закону $\psi(x_4, t) = 0$, щоб можна було зв'язати цей програмний закон із рівняннями руху резервуара (3) – (4), тобто

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x_4} \dot{x}_4 = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x_4} (f_2 + b_2 u) \equiv R(\psi, x, t), \quad (5)$$

де $R(\psi, x, t)$ – довільна функція від збурення ψ , поточних координат x_1, x_2, x_3, x_4 та часу, на яку накладено умову $R(0, x, t) = 0$. Задачу мінімізації функціонала $L = u^2$ за наявності умови (5) зводимо до задачі безумовної мінімізації функціонала

$$L^* = u^2 + \lambda \left(\frac{d\psi}{dt} - R(\psi, x, t) \right) = u^2 + \lambda \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x_4} (f_2 + b_2 u) - R(\psi, x, t) \right),$$

де λ – множник Лагранжа. Використовуючи відому процедуру мінімізації, отримаємо два рівняння відносно шуканих змінних u й λ

$$\frac{\partial L^*}{\partial u} = 2u + \lambda \frac{\partial\psi}{\partial x_4} b_2 = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_4} b_2 u = R(\psi, x, t) - \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial x_4} f_2. \quad (6)$$

За допомогою позначень

$$p = \frac{\partial\psi}{\partial x_4} b_2, \quad c = R(\psi, x, t) - \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial x_4} f_2$$

запишемо систему (6) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} 2 & p \\ p & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}$$

й отримаємо її розв'язок

$$u = \frac{c}{p} = \frac{R(\psi, x, t) - \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial x_4} f_2}{\frac{\partial\psi}{\partial x_4} b_2}.$$

Розгляньмо тепер побудову керування, яке забезпечить реалізацію програмного руху резервуара, якщо швидкість повинна змінюватись за законом $\psi_2(x_4, t) = 0$, а амплітуда вільної поверхні рідини обмежена законом руху $\psi_1(x_1, x_2, t) = 0$. Отримаємо відповідні похідні за часом від програм руху, щоб можна було їх зв'язати з рівняннями руху резервуара

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} (f_1 + b_1 u) \equiv R_1(\psi_1, x, t),$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = \frac{\partial\psi_2}{\partial t} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_4} \dot{x}_4 = \frac{\partial\psi_2}{\partial t} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_4} (f_2 + b_2 u) \equiv R_2(\psi_2, x, t).$$

Як і в попередньому разі, отримаємо задачу безумовної мінімізації за наявності двох множників Лагранжа λ_1 й λ_2 для функціонала якості

$$L^* = u^2 + \lambda_1 \left(\frac{d\psi_1}{dt} - R_1(\psi_1, x, t) \right) + \lambda_2 \left(\frac{d\psi_2}{dt} - R_2(\psi_2, x, t) \right).$$

Після виконання процедури мінімізації отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u} &= 2u + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} b_1 + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2 = 0, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} b_1 u &= R_1(\psi_1, x, t) - \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} f_1, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2 u &= R_2(\psi_2, x, t) - \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} f_2, \end{aligned}$$

яку за допомогою позначень

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} b_1, \quad p_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2, \quad c_1 = R_1(\psi_1, x, t) - \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} f_1, \\ c_2 &= R_2(\psi_2, x, t) - \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} f_2, \end{aligned}$$

можна записати у матричній формі

$$\begin{bmatrix} 2 & p_1 & p_2 \\ p_1 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Програмне керування як розв'язок цієї системи таке

$$u = \frac{p_1 c_1 + p_2 c_2}{p_1^2 + p_2^2}.$$

Оберімо для побудови керування лінійну модель і конкретизуємо систему рівнянь (17) – (18). Лінеаризована система рівнянь (1) – (2) для першої антисиметричної форми a_1 та горизонтального переміщення резервуара ε_y має форму

$$\ddot{a}_1 \beta_{11}^q + B_1^{1y} \ddot{\varepsilon}_y + g N_1 a_1 = 0, \quad \rho B_1^{1y} \ddot{a}_1 + (M_T + M_F) \ddot{\varepsilon}_y = 0,$$

чи, з урахуванням позначень, $v_1 = \frac{B_1^{1y}}{\beta_{11}^q}$, $v_2 = \rho B_1^{1y}$, $\omega_1^2 = \frac{g N_1}{\beta_{11}^q}$, може бути наведена як

$$\ddot{a}_1 + v_1 \ddot{\varepsilon}_y + \omega_1^2 a_1 = 0, \quad v_2 \ddot{a}_1 + M \ddot{\varepsilon}_y = F_y,$$

і, нарешті, зведена до нормальної форми Коші

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda_1 x_1 + \beta_1 u, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = \lambda_2 x_1 + \beta_2 u, \quad (19)$$

з позначеннями $\lambda_1 = -\frac{M \omega_1^2}{M - v_1 v_2}$, $\lambda_2 = \frac{v_2 \omega_1^2}{M - v_1 v_2}$, $\beta_1 = -\frac{v_1}{M - v_1 v_2}$, $\beta_2 = \frac{1}{M - v_1 v_2}$.

Для лінійної моделі (19) обчислимо керування для обраних програмних законів руху резервуара:

А) швидкість резервуара змінюється за заданим законом $\psi(x_4, t) \equiv x_4 - V(t) = 0$, тоді програмне керування обчислюється як

$$u = \frac{1}{\beta_2} \dot{V}(t) - \frac{\lambda_2}{\beta_2} x_1 + \frac{1}{\beta_2} R_1(\psi, x, t);$$

Б) амплітуда коливань вільної поверхні рідини змінюється за заданим законом $\psi_1(x_4, t) \equiv x_1 - l(t) = 0$ (для «ідеального» випадку керування рідина взагалі нерухома, «затверділа», тобто $\psi_1(x_4, t) \equiv x_1 = 0$), швидкість резервуара змінюється за заданим законом $\psi_2(x_4, t) \equiv x_4 - V(t) = 0$, тоді програмне керування обчислюється як

$$u = \frac{\beta_2 \dot{V}(t) + \beta_1 \ddot{l}(t)}{\beta_1^2 + \beta_2^2} - \frac{\beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2} x_1 + \frac{\beta_1 R_1(\psi_1, x, t) + \beta_2 R_2(\psi_2, x, t)}{\beta_1^2 + \beta_2^2};$$

В) амплітуда коливань вільної поверхні рідини обмежена $|x_1| \leq A$, тобто існує залежність $\psi_1(x_1, x_2) \equiv x_1 + A \tanh(\mu x_2) = 0$, швидкість резервуара змінюється за заданим законом $\psi_2(x_4, t) \equiv x_4 - V(t) = 0$, тоді програмне керування обчислюється як

$$u = \frac{\beta_2 \dot{V}(t) \cosh^4(\mu x_2) - (A^2 \mu^2 \beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2 \cosh^4(\mu x_2)) x_1 - A \mu \beta_1 \cosh^2(\mu x_2) x_2}{A^2 \mu^2 \beta_1^2 + \beta_2^2 \cosh^4(\mu x_2)} + \frac{A \mu \beta_1 \cosh^2(\mu x_2) R_1(\psi_1, x, t) + \beta_2 \cosh^4(\mu x_2) R_2(\psi_2, x, t)}{A^2 \mu^2 \beta_1^2 + \beta_2^2 \cosh^4(\mu x_2)}.$$

На функції $R_1(\psi_1, x, t)$ та $R_2(\psi_2, x, t)$ накладається тільки одне обмеження, а саме: $R_i(0, x, t) = 0, i = 1, 2$. Таким чином, ці функції описують керування зі зворотним зв'язком, яке вимикається, коли програмні закони руху виконуються точно, тобто коли $\psi_i(x, t) = 0, i = 1, 2$. Структура функцій R_1 і R_2 обирається окремо для кожної конкретної задачі для забезпечення заданих характеристик руху системи, зокрема, асимптотичної стійкості, якості перехідного процесу, величини відхилень програмного руху від заданих значень, часу перехідних процесів тощо.

Розгляньмо випадок, коли треба за допомогою керування $u = F_y$ забезпечити резервуарові з рідиною спочатку підвищення швидкості від 0 до 5 м/с за 10 сек, а потім рівномірний рух із досягнутою швидкістю 5 м/с («комфортний» рух).

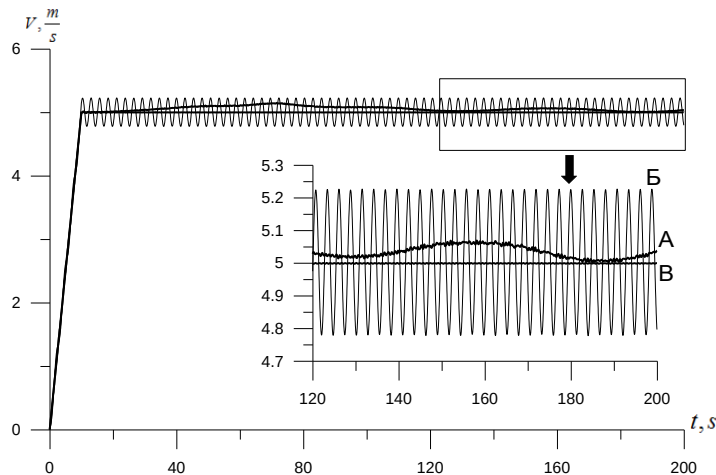


Рис. 16. Графік швидкості резервуара для випадку «комфортного» руху

На Рис. 16 показані результати моделювання, коли керування рухом забезпечується на основі заданих програм руху А, Б й В відповідно. Для моделі В у законі програмного руху вільної поверхні рідини $\psi_1(x_1, x_2) \equiv x_1 + A \tanh(\mu x_2) = 0$ обрані значення параметрів $A = 0,1R, \mu = 2$. Прямокутником на основному графіку зазначений інтервал часу від 120 до 200 секунд і окремо показаний у збільшеному масштабі. Як можна бачити зі графіків, «комфортний» рух резервуара може бути забезпечений за використання будь-якого керування (програма А, Б та В), однак найменша похибка виконання програмного руху

досягається у разі нелінійного керування (програма В). Нелінійність керування обумовлена нелінійністю програми руху вільної поверхні рідини. При цьому нелінійний закон керування забезпечує як рівномірний рух резервуар із заданою швидкістю, так і обмеження на амплітуду коливань вільної поверхні рідини. Лінійні керування, побудовані на основі програм А й Б, дають більшу похибку, ніж у разі В, при цьому величина цієї похибки ще більша, що більшу кількість програм руху треба задовольнити.

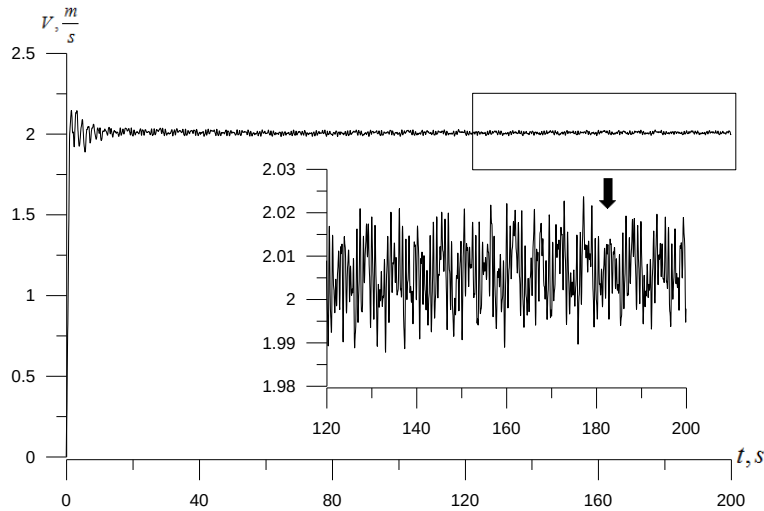


Рис. 17. Графік швидкості резервуара для випадку високо інтенсивних навантажень

Розгляньмо тепер випадок руху резервуару за наявності високо інтенсивних навантажень, коли треба за допомогою керування забезпечити підвищення швидкості від 0 до 2 м/с за 1 сек, а потім рівномірний рух із досягнутою швидкістю 2 м/с. Як показують обчислювальні експерименти, лінійне керування, побудоване на основі програм руху А та Б, взагалі непридатне для реалізації програмного закону за високо інтенсивних навантажень на резервуар. Тому на Рис. 17 показаний результат моделювання, коли керування рухом забезпечується на основі нелінійної моделі В. Для програмного руху вільної поверхні рідини $\psi_1(x_1, x_2) \equiv x_1 + A \tanh(\mu x_2) = 0$ обрані значення параметрів $A = 0,3R$, $\mu = 1$. Як можа бачити зі графіків, отримане керування дає змогу забезпечити рух резервуара за заданим законом із похибкою, прийнятною для практичних застосувань ($\sim 1\%$).

Показано, що обидва підходи забезпечують прийнятну для практики точність виконання програмного руху за будь-яких високо інтенсивних навантажень на систему, крім того, алгоритм керування на основі варіаційного принципу Гауса допомагає мінімізувати енергетичні витрати на керування.

Четвертий розділ роботи присвячений дослідженню умов і особливостей виходу коливань вільної поверхні рідини на усталений режим під дією зовнішньої сили за наявності узагальненої дисипації чи капілярності.

Узагальнення задачі Фарадея за наявності капілярності. Нехай резервуар радіуса $R = 0,3$ м частково заповнений рідиною до глибини $H = R$, при цьому співвідношення мас резервуара й рідини дорівнює $M_T = 0,25M_F$. Фізичні константи для рідини ρ й σ обирались із таблиць для води. Параметричний резонанс розглядаємо в полі слабких гравітаційних сил зі прискоренням $g = 0,001g_0$ ($g_0 = 9,81$ м/с² – прискорення вільного падіння на поверхні Землі), коли гравітаційно-капілярні ефекти суттєво впливають на динаміку системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею». Амплітуда початкового збурення вільної поверхні рідини на стінці резервуара задана за першою антисиметричною формою та дорівнює $a_1(0) = 0,01R$. Приймаємо, що резервуар здійснює вертикальні коливання вздовж

осі Oz за заданим законом $\varepsilon_z = H_z \cos(pt)$ із амплітудою $H_z = 0,02R$ і частотою $p = 2\omega_1$, де ω_1 – частота коливань вільної поверхні рідини пза обраних параметрів системи.

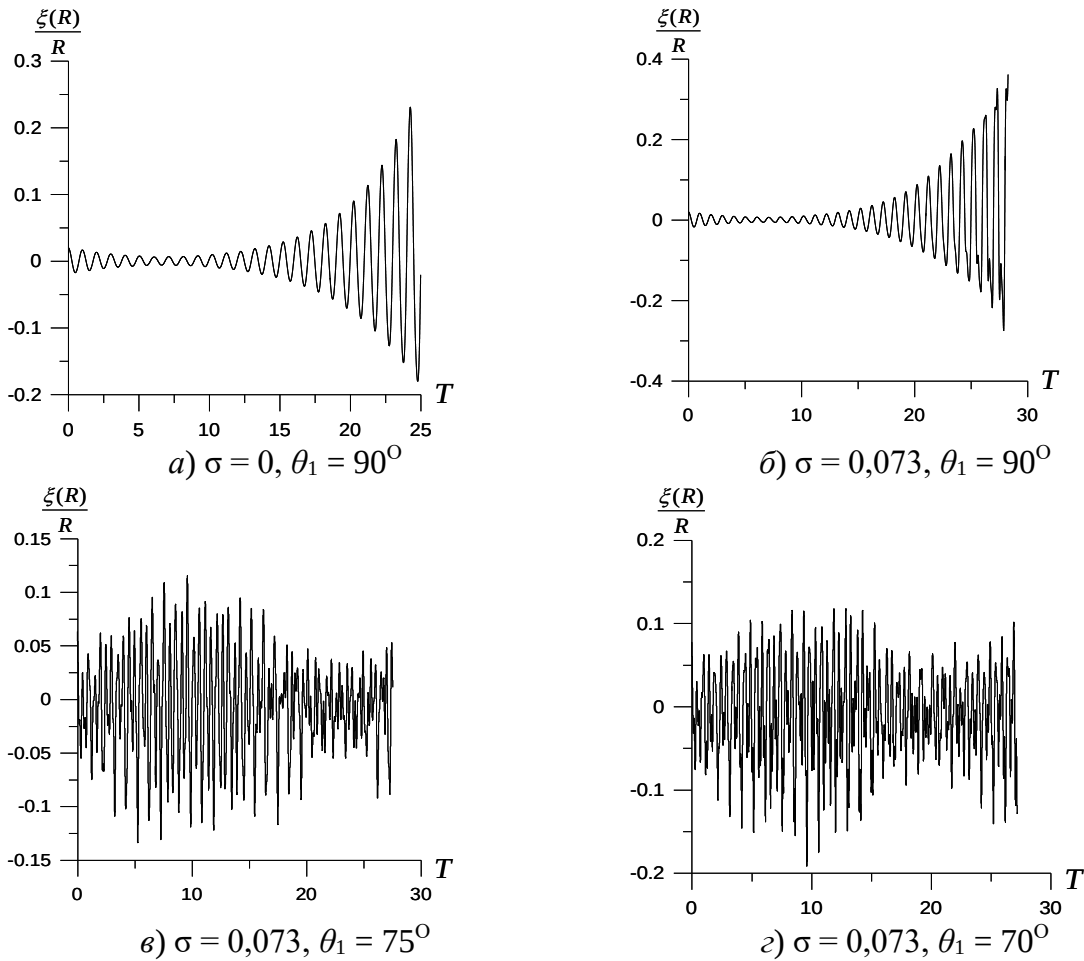


Рис. 18. Особливості параметричних коливань вільної поверхні рідини в полі слабких гравітаційно-капілярних сил

На Рис. 18 наведені амплітуди збурень вільної поверхні рідини $\xi(R)$ на стінці резервуара для значень коефіцієнта поверхневого натягу σ й контактного кута θ_1 . Як можна бачити з Рис. 18, урахування в системі сил поверхневого натягу на поверхні рідини (Рис. 18б) і за контуром контакту (Рис. 18в-г) призводить до появи на графіку зрізів і зламів, причому при значеннях контактного кута 75° і 70° коливання мають іррегулярний характер. Зокрема, при значеннях контактного кута 75° і 70° (Рис. 18в-г) спостерігається істотне зменшення амплітуди вільної поверхні на стінці резервуара (фактично, вихід із режиму параметричного резонансу), викликане дисперсією (перерозподілом) енергії від нижчих форм коливань до вищих. Урахування в системі сил поверхневого натягу на поверхні рідини (Рис. 18б) і за контуром контакту (Рис. 18в-г) призводить до швидшого виходу системи на нелінійний режим коливань. Якщо для випадку відсутності сил поверхневого натягу спостерігається тільки вихід на нелінійний режим коливань за 25 періодів (Рис. 18а), то наявність сил поверхневого натягу на поверхні рідини (Рис. 18б) вже призводить до параметричного резонансу з великими амплітудами $\xi(R) \approx 0,35R$. Подальше зменшення значення контактного кута сприяє швидшому долученню осесиметричних форм коливань до процесу нелінійного хвилеутворення, що і призводить до виходу коливань вільної поверхні рідини з зони параметричного резонансу (Рис. 18 в-г).

Таким чином, вплив сил поверхневого натягу на характер утворення і розвитку параметричного резонансу в системі має нелінійний характер. Внесення сил поверхневого натягу на поверхні рідини і за контуром контакту при кутах, близьких до 90° , призводить до параметричного резонансу, а подальше зменшення контактного кута сприяє перерозподілові енергії між формами коливань від нижчих до вищих, із одного боку, й від антисиметричних до осесиметричних, із іншого боку, що забезпечує в системі вихід із зони параметричного резонансу.

Вимушені коливання системи під дією горизонтального гармонічного силового збудження. Аналіз поведінки системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» дає можливість виділити три частотні діапазони зовнішнього збудження коливань відносно головної власної частоти системи: дорезонансний, резонансний і зарезонансний. У всіх цих трьох режимах спостерігаються ефекти, які дають змогу характеризувати процес коливань вільної поверхні як істотно неусталений. Поведінка системи «резервуар – рідина» під дією горизонтального силового збудження призводить до прояву таких нелінійних ефектів, як амплітудна модуляція (для всіх діапазонів), істотний вплив вищих гармонік (для дорезонансного і зарезонансного діапазонів), дрейф середнього значення амплітуд коливань системи (для всіх діапазонів). Встановлено також, що збільшення маси рідини щодо маси резервуара не сприяє виходу системи на умовно усталений режим коливань. Отримані результати на якісному рівні узгоджуються з результатами нових теоретичних і експериментальних робіт. На якісному рівні загальний результат описаних обчислювальних і натурних експериментів можна сформулювати таким чином – за відсутності сил поверхневого натягу і дисипації вихід коливань вільної поверхні рідини на усталений режим у класичному сенсі не відбувається, коливання мають нестационарний характер. Тільки за зростання в рідині узагальненої дисипації в системі спостерігається вихід на усталений режим.

ВИСНОВКИ

Побудовано варіанти узагальнення класичної задачі Фарадея з урахуванням: 1) сумісності коливань рідини й резервуара; 2) наявності додаткового ступеня вільності руху резервуара (можливості горизонтального переміщення чи кутових коливань резервуара на маятниковому підвісі); 3) можливості вертикального силового збудження руху резервуара.

Для узагальнення задачі Фарадея виконано: 1) механічну постановку задачі для кожного випадку узагальнення; 2) отримання в аналітичному вигляді формул для обчислення власних частот сумісних коливань; 3) отримання в аналітичному вигляді формул для обчислення областей стійкості й нестійкості системи; 4) проведення якісного і спектрального аналізу результатів обчислювальних експериментів для виявлення властивостей руху системи і перевірки справедливості прийнятих гіпотез.

Дослідження проводилося на основі нелінійної багатомодової (до 12 форм коливань) дискретної моделі, яка побудована на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського. Дослідження проводилося на основі методу модальної декомпозиції з урахуванням коливань на власних частотах усіх форм.

Внесення до системи додаткового ступеня вільності (можливість горизонтального переміщення чи кутових коливань резервуара на маятниковому підвісі) приводить до підвищення частоти параметричного резонансу, причому вона то вища, що менша маса резервуара стосовно маси рідини чи що коротша довжина маятникового підвісу.

За вертикального збурення руху резервуара з можливістю горизонтального переміщення чи кутових коливань на маятниковому підвісі на відміну від класичної задачі Фарадея динамічні процеси в системі розвиваються як сукупність параметричного

резонансу і вимушених коливань. Для цього узагальнення задачі Фарадея можливий вихід системи на нелінійний режим коливань на будь-якій частоті.

Взагалі, вихід на усталений режим коливань у нелінійних багаточастотних системах типу «резервуар – рідина з вільною поверхнею» за параметричного збурення руху резервуара не відбувається – спектр коливань збурення вільної поверхні рідини на стінці (як найхарактернішій точці, яка доступна для вимірів і спостереження) завжди містить гармоніки на власних і комбінаційних частотах.

Розглянуто побудову в аналітичній формі керування резервуаром (активної зовнішньої сили) для забезпечення руху резервуара за заданим законом. Для цього використовувалось кілька підходів: 1) побудова керування зі зворотним зв'язком на основі вимірювання збурень (відхилень від закону програмного руху); 2) підхід, пов'язаний з можливістю компенсації головного вектору сил тиску рідини на стінки резервуару; 3) підхід на основі варіаційного принципу найменшого примушення Гауса, який допомагає реалізувати в системі задані програмні закони руху й забезпечити мінімізацію енерговитрат на керування.

Для перевірки якості побудованого керування були розв'язані такі задачі: 1) розгін резервуару з нерухомого положення за заданий час до потрібної швидкості й далі його рівномірний рух з цією швидкістю; 2) гальмування резервуара, який рухається рівномірно з заданою швидкістю, за заданий час до цілковитої зупинки; 3) переміщення резервуара – це заданий гармонічний закон.

Керування зі зворотним зв'язком побудоване на основі лінійної системи у збуреннях, при цьому фазові координатами – це відхилення від програмного закону руху. Перетворення системи на канонічну щодо фазових координат форму значно спрощує аналітичну процедуру побудови керування на основі модального підходу чи зіставлення з еталонною системою. Для шуканого класу систем отримані також в аналітичному вигляді формули для коефіцієнтів квадратичного функціоналу якості. Ці коефіцієнти можуть бути обрані таким чином, щоб керування забезпечило водночас необхідну якість перехідних процесів у системі й мінімум квадратичного функціоналу.

Керування зі зворотним зв'язком на основі лінійної системи у збуреннях може бути використане тільки для забезпечення «комфортних» рухів резервуара, тобто за відсутності великих збурень вільної поверхні рідини. Однак, на відміну від методу компенсації, накопичення похибки при використанні керування зі зворотним зв'язком відсутнє, тому виконання програмного закону руху резервуара може здійснюватися на тривалих інтервалах часу.

Керування на основі компенсації головного вектора сил тиску рідини на стінки резервуару дає можливість зупинити резервуар за будь-яких початкових умов. При цьому у задану мить резервуар цілком зупиняється, а рідина продовжує коливання, не впливаючи на рух резервуара. Це означає, що метод компенсації доцільно використовувати при переміщеннях конструкцій із рідиною в межах відповідних технологічних або виробничих процесів. За розгону резервуара керування в режимі компенсації можливо забезпечити набір швидкості за будь-яких інтенсивних впливів. Однак наявність запізнення призводить до накопичення похибки на тривалих інтервалах часу.

Керування, побудоване на основі варіаційного принципу найменшого примушення Гауса з використанням лінійних моделей руху системи й лінійних програмних законів, може бути застосовано тільки для забезпечення «комфортних» рухів резервуара, тобто за відсутності великих (у нелінійному діапазоні амплітуд) збурень вільної поверхні рідини. Для забезпечення руху резервуара за наявності високо інтенсивних навантажень на основі варіаційного принципу найменшого примушення Гауса розроблено нелінійні закони

керування, які забезпечують потрібну для практики точність виконання програмних законів руху й мінімізацію енерговитрат на керування системою в цілому.

Досліджено параметричний резонанс у механічній системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею» за умови слабого прояву поверхневого натягу, коли резервуар рухається у вертикальному напрямку за заданим гармонічним законом; встановлено, що наявність сил поверхневого натягу забезпечує швидший вихід системи на резонансний режим, однак наявність сил поверхневого натягу за контуром контакту “пом’якшує” резонанс завдяки збільшенню енергетичного внеску осесиметричних форм коливань;

Визначено умови й особливості виходу коливань вільної поверхні рідини під дією зовнішньої сили на усталений режим за відсутності й наявності узагальненої дисипації в механічній системі; дослідження проводились для різних частотних діапазонів збудження. Встановлено, що тільки за зростання в рідині узагальненої дисипації в системі спостерігається вихід на усталений режим.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Limarchenko O.S. Generalizations of the Faraday problem in mechanical system "reservoir–liquid with a free surface" / O.S. Limarchenko, O.V. Konstantinov // *Mathematical Modeling and Computing*. – 2014. – Vol. 1, №1. – P. 45-60.
2. Konstantinov A.V. Nonlinear Dynamics of the Combined Motion of a Tank and a Fluid Partially Filling It / A.V. Konstantinov, O.S. Limarchenko // *International Applied Mechanics*. – 2016. – 52. – P. 520-528.
3. Konstantinov A.V. Problem of the Parametric Oscillations of a Noncylindrical Tank Partially Filled with a Fluid / A.V. Konstantinov, O.S. Limarchenko, V.N. Mel'nik, I.Yu. Semenova // *International Applied Mechanics*. – 2016. – 52. – P. 599-604.
4. Konstantinov A.V. Generalizing the Faraday Problem of the Parametric Oscillations of a Cylindrical Tank Partially Filled with a Fluid / A.V. Konstantinov, O.S. Limarchenko, V.N. Mel'nik, I.Y. Semenova // *International Applied Mechanics*. – 2017. – 53. – P. 59-66.
5. Konstantinov A.V. Effect of the Viscosity and Capillarity of Fluid on the Nonlinear Dynamics of a Tank Partially Filled with a Fluid / A.V. Konstantinov, O.S. Limarchenko // *International Applied Mechanics*. – 2017. – 53. – P. 130-138.
6. Konstantinov A. Effect of combine motion on variation of resonance properties in liquid sloshing problems / A. Konstantinov, O. Limarchenko, K. Semenovich // *Mathematical Modeling and Computing*. – 2015. – Vol. 2, N 1. – P. 48-57.
7. Konstantinov A.V. Dynamic Methods of Damping the Oscillation in Structure–Free-Surface Fluid System / A.V. Konstantinov, O.S. Limarchenko, V.V. Lukyanchuk, A.A. Nefedov // *International Applied Mechanics*. – 2019. – 55. – P. 58-67.
8. Konstantinov A.V. Motion Control for Structure with Liquid Based on Compensation of the Liquid Hydrodynamic Response / A.V. Konstantinov, V.O. Limarchenko, O.S. Limarchenko // *Journal of Automation and Information Sciences*. – 2020. – 52, Issue 6. – P. 58-70.
9. Константинов А.В. Нелинейная модель движения жидкости в полости вращения при наличии слабых гравитационно-капиллярных эффектов / А.В. Константинов // *Збірник праць Ін-ту математики НАН України*. – 2010. – т. 7, № 3. – С. 213-223.
10. Константинов А.В. Исследование параметрического резонанса в задаче М. Фарадея при наличии слабых гравитационных эффектов / А.В. Константинов, О.С. Лимарченко // *Збірник праць Ін-ту математики НАН України*. – 2011. – т. 8, № 2. – С. 83-100.

11. Константинов О.В. Узагальнена задача Фарадея про рух резервуару з рідиною / О.В. Константинов, О.С. Лимарченко // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2012. – вип. 16. – С. 76-85.
12. Константинов А.В. Нелинейные колебания с жидкостью со свободной поверхностью при горизонтальном силовом возбуждении / А.В. Константинов, О.С. Лимарченко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – т. 9, № 1. – С. 188-202.
13. Константинов О.В. Вихід на параметричний резонанс в узагальненій задачі Фарадея про рух резервуару з рідиною / О.В. Константинов, О.С. Лимарченко // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2013. – вип. 17. – С. 73-80.
14. Konstantinov A. Forced oscillations of the system «reservoir – capillary liquid with a free surface» / A. Konstantinov // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2013, вип. 2. – С. 43-46.
15. Константинов О.В. Узагальнена задача Фарадея для механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» за наявності пружного амортизатора / О.В. Константинов // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2013, вип. 3. – С. 154-158.
16. Константинов А.В. Обобщенная задача Фарадея для резервуара, частично заполненного жидкостью, совершающего наклонные движения / А.В. Константинов // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – т. 10, N 4-5. – С. 472-479.
17. Konstantinov A. Effect of viscous damping on forced oscillations of the system «reservoir – free surfaced liquid» / A. Konstantinov // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2013. – вип. 18. – С. 73-80.
18. Константинов А.В. Вынужденные нелинейные колебания жидкости в резервуаре параболической формы / А.В. Константинов, О.С. Лимарченко, И.Ю. Семенова // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – т. 11, №5. – С. 68-77.
19. Константинов О.В. Вплив узагальненої дисипації та сил поверхневого натягу на нелінійну динаміку системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» / О.В. Константинов, І.Ю. Семенова // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2015, спецвипуск. – С. 125-128.
20. Константинов А.В. Динамика резервуара в форме тела вращения, частично заполненного жидкостью, при сложном импульсном нагружении / А.В. Константинов, О.С. Лимарченко, К.В. Кинебас, О.Ю. Паранькина // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2016. – т. 13, № 3. – С. 117-128.
21. Константинов О.В. Задача про параметричний резонанс у системі резервуар-рідина з вільною поверхнею / О.В. Константинов, О.С. Лимарченко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – т. 14, № 1. – С. 171-185.
22. Константинов О.В. Модальне керування механічною системою «резервуар – рідина з вільною поверхнею» / О.В. Константинов, В.В. Новицький // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – т. 14, № 2. – С. 42-55.
23. Константинов О.В. Керування системою «резервуар – рідина» зі зворотним зв'язком на основі еталонної моделі / О.В. Константинов, В.В. Новицький, І.Ф. Святовец // Вісник Запорізького національного університету: Зб. наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2018. – № 1. – С. 35-47.
24. Константинов О.В. Програмне керування рухом резервуару з рідиною з вільною поверхнею на основі принципу найменшого примусу Гаусса / О.В. Константинов, В.В. Новицький // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2018. – т. 15, № 1. – С. 33-46.

25. Константинов О.В. Керування резервуаром, частково заповненим рідиною, на основі принципу найменшого примусу Гауса (задача гальмування) // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2019, № 1. – С. 85-88.

26. Константинов О.В. Динаміка системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» під дією зовнішнього силового збудження руху // Збірник праць Інституту математики НАНУ, 2019. – т. 16, № 2. – С. 38-49.

27. Лимарченко О., Кліменков О., Нефьодов О., Константинов О. Характер прояву нелінійностей при вібраційному збудженні руху еліпсоїдального резервуару із рідиною з вільною поверхнею // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика, механіка. – 2020. – Випуск №1 (41). – С. 47-50.

28. Константинов А.В. Влияние слабых гравитационно-капиллярных эффектов на поведение резервуара с жидкостью при сложном динамическом нагружении / А.В. Константинов // Український математичний конгрес. – Ін-т математики НАН України, м. Київ. – 2010. – Секція 1, С. 63-72.

29. Константинов А.В. Параметрические колебания в системе «резервуар – жидкость со свободной поверхностью»: обобщения задачи Фарадея / А.В. Константинов // International Workshop «Hydrodynamics of moving objects», Ukraine, Kiev. – 2012, April 23-23. – P. 58-73.

30. Константинов О.В. Задачі динаміки сумісного руху резервуару з рідиною / О.В. Константинов // Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання». – Івано-Франківськ - Яремче. – 14-19 травня 2018. – С. 307-310.

31. Константинов А.В. Параметрический резонанс (задача Фарадея) в системе «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» при наличии гравитационно-капиллярных эффектов // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, Київ, 19-21 квітня 2012 року / Матеріали конференції, т. 1. — Київ: Інститут математики НАН України, 2012. — С. 240.

32. Константинов О.В. Узагальнення задачі Фарадея в механічній системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею» / О.В. Константинов, В.М. Мельник // Науково-технічна конференція «Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: моделі та експеримент» (INTERPOR'15), Львів, 22-24 вересня 2015 року / Збірник матеріалів. — Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2015. — С. 20-21.

33. Константинов О.В. Узагальнена задача Фарадея для резервуару, частково заповненого рідиною, який може здійснювати кутові рухи на маятниковому підвісі // XVIII International Conference "Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation", Kyiv, May 24–26, 2017 / Thesis of conference reports. — Kyiv: T. Shevchenko National University, 2017. — P. 120.

34. Константинов А.В. Влияние обобщенной диссипации и сил поверхностного натяжения на нелинейную динамику системы «цилиндрический резервуар – жидкость со свободной поверхностью» / А.В. Константинов, И.Ю. Семенова // III міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки», Київ, 27-29 серпня 2015 року / Матеріали конференції. — Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2015. — С. 74.

35. Константинов О.В. Побудова керування системою «резервуар – рідина з вільною поверхнею» на основі розв'язку оберненої задачі мінімізації квадратичного функціоналу якості // XIX International Conference "Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation", Kyiv, May 22–24, 2019 / Thesis of conference reports. — Kyiv: T. Shevchenko National University, 2019. — P. 328-330.

36. Константинов О.В. Керування системою «резервуар – рідина з вільною поверхнею» з використанням принципу найменшого примусу Гауса // V міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки», Київ, 28-30 серпня 2019 року / Матеріали конференції. — Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2019. — С. 47.

АНОТАЦІЯ

Константинов О.В. Нелінійні задачі динаміки та керування конструкціями з рідиною в режимі вимушених коливань і параметричної взаємодії. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.01 «Теоретична механіка». – Інститут математики НАН України, Київ, 2021.

Дисертація присвячена дослідженню нових класів задач про нелінійні коливання складних механічних систем, складовими компонентами яких є великі рухомі маси рідини й резервуари, які виконують функції транспортування і зберігання рідини за різних видів параметричного збурення, зовнішнього збудження чи керування.

Здійснено узагальнення класичної задачі Фарадея для таких механічних постановок задач: 1) резервуар рухається вертикально за заданим гармонічним законом і може здійснювати горизонтальні переміщення завдяки поперечним коливанням рідини (внесення до системи додаткового ступеня вільності – можливості руху резервуара в горизонтальній площині); 2) резервуар рухається вертикально за заданим гармонічним законом і може здійснювати кутові коливання щодо центру мас системи (внесення до системи додаткового ступеня вільності – можливості кутових рухів резервуара); 3) резервуар рухається вертикально, але не за заданим гармонічним законом, а під дією гармонічної сили; 4) резервуар рухається вертикально під дією гармонічної сили й може здійснювати горизонтальні переміщення; 5) резервуар рухається вертикально під дією гармонічної сили й може здійснювати кутові коливання щодо центру мас системи. Для вище зазначених узагальнень задачі Фарадея побудовано зони стійкості й нестійкості, проведено якісний і спектральний аналіз коливань вільної поверхні рідини й резервуара. Встановлено, що динамічні процеси в системі розвиваються як сукупність параметричного резонансу і вимушених коливань. За наявності додаткових ступенів вільності в узагальненій задачі Фарадея можливий вихід системи на нелінійний режим коливань на будь-якій частоті.

Здійснено побудову й апробацію алгоритмів керування (обчислення активної зовнішньої сили, яка підведена до резервуара), яке забезпечить рух резервуара за заданим законом (програмний рух) за наявності постійно діючого збурення – коливань вільної поверхні рідини. На основі лінійної моделі у збуреннях (відхиленнях переміщень і швидкостей від програмних значень) на основі методів модального керування, еталонної моделі й мінімізації квадратичного функціоналу якості побудовано алгоритми керування зі зворотним зв'язком. Керування зі зворотним зв'язком на основі лінійної системи у збуреннях може бути використане для забезпечення «комфортних» рухів резервуара, тобто за відсутності великих збурень вільної поверхні рідини. Для задач керування за наявності великих збурень вільної поверхні рідини побудовано алгоритми керування на основі компенсації головного вектору сил тиску рідини на стінки резервуара та варіаційного принципу найменшого примусу Гауса. Показано, що обидва підходи забезпечують прийнятну для практики точність виконання програмного руху за будь-яких

високо інтенсивних навантажень на систему, крім того, алгоритм керування на основі варіаційного принципу Гауса дає змогу мінімізувати енергетичні витрати на керування.

Досліджено умови й особливості виходу коливань вільної поверхні рідини під дією зовнішньої сили на усталений режим за відсутності й наявності узагальненої дисипації чи капілярності. Дослідження проводились для різних частотних діапазонів збудження руху системи. За відсутності сил поверхневого натягу і дисипації вихід коливань вільної поверхні рідини на усталений режим у класичному сенсі не відбувається, коливання мають нестационарний характер. Тільки за зростання в рідині узагальненої дисипації в системі спостерігається вихід на усталений режим. Також встановлено, що наявність сил поверхневого натягу забезпечує швидший вихід системи на резонансний режим, однак наявність сил поверхневого натягу за контуром контакту “пом’якшує” резонанс завдяки збільшенню енергетичного внеску осесиметричних форм коливань.

Ключові слова: рідина з вільною поверхнею, варіаційні методи, задача Фарадея, параметричний резонанс, зони стійкості й нестійкості, математичні методи керування рухом, вимушені коливання.

ABSTARCT

Konstantinov O.V. Nonlinear problems of dynamics and control of structures with fluid in the mode of forced oscillations and parametric interaction. – Manuscript.

Doctor of Sciences thesis on Physics and Mathematics, speciality 01.02.01 – theoretical mechanics. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2021.

The dissertation deals with the research of new classes of problems of nonlinear oscillations of complex mechanical systems, the components of which are large moving masses of liquid and reservoirs, which perform the functions of liquid transport and storage under different types of parametric perturbation, external disturbance or control.

A generalization of the classical Faraday problem is done for the following mechanical problems 1) the tank moves vertically according to a given harmonic law and can perform horizontal motion due to transverse oscillations of the fluid (additional degree of freedom is added in the system, i.e., the potential of the tank motion in the horizontal plane); 2) the tank moves vertically according to the given harmonic law and can carry out angular oscillations about the center of masses of system (additional degree of freedom is added in the system, i.e., the potential of angular motion of the tank); 3) the tank moves vertically, but not according to a given harmonic law, but under the action of a harmonic force; 4) the tank moves vertically under the action of a harmonic force and can perform horizontal motion; 5) the tank moves vertically under the action of harmonic force and can perform angular oscillations about the center of mass of the system. For the above-mentioned generalizations of the Faraday problem, domains of stability and instability are constructed, and a qualitative and spectral analysis of the oscillations of the free surface of the liquid and the reservoir is performed. It is established that dynamic processes in the system are developed as a set of parametric resonance and forced oscillations. Under the presence of additional degrees of freedom in the generalized Faraday problem the system can enter a nonlinear mode of oscillations for any frequency.

Algorithms of motion's control of reservoir with liquid with a free surface is constructed and tested (calculation of the active external force applied to the tank), which will provide the tank motion according to a given law (prescribed motion) under the presence of constant perturbations, i.e., oscillations of the free surface of the liquid. Based on the linear model in perturbations (deviations of displacements and velocities from the program values) on the basis of modal control methods, reference model and minimization of the quadratic quality functional, feedback control algorithms are built. Feedback control based on a linear system in perturbations can be

used to provide «comfortable» tank movements, without large perturbations of the free surface of the liquid. or control problems under the presence of large perturbations of the free surface of the liquid, control algorithms are constructed on the basis of compensation of the main vector of fluid pressure forces on the tank walls and the variational principle of least Gaussian coercion. It is shown that both approaches provide acceptable for practice accuracy of program motion for any high-intensity loads on the system, in addition, the control algorithm based on the Gaussian variation principle allows the minimization of energy costs for control.

The conditions and specific features of the oscillations reaching the free surface of a liquid under the action of an external force at a steady state in the absence and presence of the generalized dissipation or capillarity are studied. The research was performed for different frequency ranges of excitations of the system motion. In the absence of surface tension and dissipative forces, the steady state oscillations of the free surface of the liquid in the classical sense do not occur, the oscillations are non-stationary. Only at with the growth of the generalized dissipation in the liquid the system reaching of the steady mode is observed. It is also established that the presence of surface tension forces provides a faster output of the system to the resonant mode, but the presence of surface tension forces along the contact contour "softens" the resonance by increasing the energy contribution of axisymmetric oscillations.

Keywords: liquid with free surface, variational methods, Faraday problem, parametric resonance, areas of stability and instability, mathematical methods of motion control, forced oscillations.

Підп. до друку 09.08.2021. Формат 60×84/16 . Папір друк. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 2,18. Ум. друк. арк. 2,03. Тираж 100 прим. Зам. 46.

Інститут математики НАН України
01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3

