ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу
Кузнєцової Ірини Валеріївни
«Гомотопічні властивості гладких функцій на поверхнях»,
поданої на здобуття наукового ступеня доктора філософії
за спеціальністю 111 «Математика»

1. Актуальність теми. Дисертаційна робота І.В. Кузнєцової вивчає гомотопійні властивості гладких функцій на поверхнях з краєм і є вагомим внеском до теорії Морса, яка, власне вивчає гладкі функції на многовидах і має важливі застовування у геометричній топології. Окрім основоположника цієї теорії Марстона Морса, її розвивали та збагачували своїми результатами багато видатних математиків, зокрема С. Смейл, Л. Люстернік, Л. Шнірельман, Г. Чогошвілі, Л. Ельсгольц, Р. Бот, С. Новіков, Е. Віттен, причому останні два математики з цього списку є лауреатами премії Філдза, а Едвард Віттен є насправді фізиком-теоретиком з рекордним h-індексом $\hbar = 193$ (згідно з Google Scholar) і $\hbar = 145$ згідно з наукометричною базою Scopus. В Україні теорія Морса традиційно розвивається у київській школі геометричної топології, заснованій Володимиром Шарком та його численними учнями та послідовниками. В руслі цієї актуальної тематики виконана також дисертаційна робота Ірини Валеріївни Кузнєцової.

2. Зміст роботи і новизна одержаних результатів. Дисертація (повний її обсяг – 146 сторінок друкованого тексту) складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку літератури, що містить 39 найменувань, та додатку, що містить список публікацій І.В. Кузнєцової за темою дисертації.

Перший розділ містить підготовчі відомості, а основні результати доводяться у другому, третьому та четвертому розділах.

У другому розділі доведено дві важливі теореми 2.1.2 та 2.1.3 про гомотопічні властивості орбіт гладких відображень з листа Мебіуса в пряму чи коло при дії певних груп, що зберігають рівні таких відображень. Ці теореми дозволяють обчислити фундаментальні групи таких орбіт для певних відображень на всіх неорієнтовних поверхнях з від'ємною ейлеровою характеристикою.

У третьому розділі вивчаються структура дифеоморфізмів компактних поверхонь, що стабілізують задану гладку функцію і міняють орієнтацію певних областей на многовиді. У теоремі 3.3.5 (яка є основним результатом цього розділу) доведено, що такі дифеоморфізми збігаються на цих областях з дифеоморфізмами, що стабілізують задану функцію і в квадраті є ізотопними до тотожнього дифеоморфізму. Цей результат дозволяє описати структуру стабілізатора даної гладкої функції на многовиді, вірніше, фактор-групи зв'язних компонент стабілізатора і є аналогом добре відомого факту, що міняючі орієнтацію ізометрії прямої чи кола мають порядок 2 у відповідній групі ізометрій.

Четвертий розділ стосується опису гомотопічних груп орбіт гладких функцій (зокрема, функцій Морса) на поверхнях. У 2015 році С.І. Максименком та його (колишнім) аспірантом Б. Фещенком було доведено, що для орієнтовних поверхонь відмінних від тора та 2-сфери вказані гомотопічні групи належать до найменшого класу груп $\mathfrak{G}$, що містять тривіальну групу і є замкненими відносно декартових добутків та вінцевих добутків на групи $\mathbb{Z}$, а для тора відповідний клас $\mathcal{T}$ є дещо ширшим і допускає утворення вінцевих добутків з групою $\mathbb{Z}^2$. Основним результатом розділу 4 є теорема реалізації 4.1.7, яка стверджує, що всі групи з класів $\mathfrak{G}$ чи $\mathcal{T}$ реалізуються як гомотопічні групи орбіт відповідних гладких функцій (зокрема Морса) на відповідних поверхнях. У зв'язці зі згаданими результатами Максименка та Фещенка, ця теорема дає повний опис гомотопічних груп орбіт певного типу гладких функцій на усіх орієнтовних поверхнях, відмінних від 2-сфери.

Крім того, в розділі 4 встановлено цікаві алгебраїчні факти про групи з класу $\mathcal{T}$, а саме, доведено, що для кожної групи G з цього класу її центр $Z(G)$ та абелізація $G/[G,G]$ ізоморфні вільній абелевій групі $\mathbb{Z}^{\beta_1}$ рангу β_1, рівного кількості символів $\mathbb{Z}$ у записі групи G у вигляді слова в алфівіті $\mathbb{Z}$, $\times$, $\wr_n$, $\wr_{n,m}$.

Усі отримані результати є новими, мають нетривіальні доведення і є важливими цеглинками у побудові загальної теорії гомотопічних властивостей гладких функцій на поверхнях, яка розбудовується С.І.Максименком та його численними учнями.

3. Обґрунтованість і достовірність одержаних результатів. Усі одержані у дисертаційній роботі результати є новими, достовірними і обґрунтованими, що забезпечено наявністю їх строгих доведень та відповідним рівнем публікацій.

4. Апробація результатів і публікації. Результати дисертації опубліковано у трьох статтях, дві з яких спільні з науковим керівником С.І. Максименком і опубліковані в журналі "Proceedings of the International Geometry Center" за 2019 та 2020 роки і третя – спільна з Юлією Сорокою у "Українському математичному журналі". Тобто рівнь публікацій задовольняє вимоги законодавства України щодо публікацій результатів дисертацій доктора філософії.

Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на 4 міжнародних конференціях та декількох семінарах (в Київському національному університеті імені Т.Г.Шевченка та Інституті Математики НАН України).

5. Практичне значення результатів дисертації. Результати дисертації носять теоретичний характер. Отримані в ній результати можуть бути використані в дослідженнях з топології, алгебри, математичної фізики, теорії симетрій диференціальних рівнянь в частинних похідних, теорії динамічних систем, теорії особливостей гладких відображень та інших галузей знань, методи яких базуються на топологічних властивостях гладких функцій.

6. Зауваження. Дисертаційна робота дбайливо оформлена і містить багато акуратно виконаних малюнків, що вдало доповнюють виклад основного матеріалу. Проте попри усі похвали, дисертація не позбавлена і деяких недоліків, а саме:

4_5: Видається, що перше "та" у фразі "на дисках та циліндрах та стрічках Мебіуса" слід замінити на кому. Подібна проблема стосується фрази "на дисках і циліндрах і дозволило" лінійкою нижче.

6_9: "ізоморфні" мало б бути "ізоморфний".

$6,23$: В теорії груп фактор-групу $G/[G,G]$ зазвичай називають *абелізацією* групи G.

$7,23$: У списку основних результатів на сторінках 7 та 23 твердження про "ізотопність тотожньому відображенню зі збереженнями відображення" сформульовано не надто зрозуміло. Можливо замість "збереження відображення" слід було писати "збереження рівнів відображення"?

$7,23$: У тому ж списку основних результатів не зовсім зрозуміла термінологія "клас ізоморфізму груп". Чому не просто "клас груп"?

27^2: Що означає *більш ніж типові відображення*? Це поняття в дисертації не означено.

27_{1-6}: Вартувало б пояснити чому функція ε_f є коректно визначеною.

28: Вартувало б дати строге означення "незв'язного об'єднання", яке фігурує в означенні f-адаптованого підмноговиду.

28: Підозрюю, що у твердженні "скінченне об'єднання f-адаптованих підмноговидів є f-адаптованим підмноговидом" пропущено важливе слово типу "неперетинне" або "дискретне" перед "об'єднання".

29: Обговорюючи поняття канонічного околу вартувало б щось сказати про його існування.

30: При обговоренні множини $\mathcal{S}^-(f) = \mathcal{S}(f) \setminus \mathcal{S}^+(f)$ вартувало б щось написати про умови за яких ця множина є непорожньою (інакше вона не буде "іншим суміжним класом").

31: При обговоренні графу Кронрода-Ріба вартувало б пояснити, чому цей граф є гаусдорфовим простором і додати необхідні цитування.

32: В означенні вінцевих добутків на початку розділу 1.5 слід зазначити, що операція додавання в індексах виконується за модулем n чи m.

33: В Означенні 1.6.1 використовуються досить дивні позначення: чому саме φ_2? Якщо вже з'явилося φ_2, то мало б бути і φ_1, замість якого є s. Може тоді логічно було б замінити φ_2 на t? Те ж зауваження стосується символу φ_2 в лемі 1.7.3.

33_5: Українською *граф* Γ_α мав би писатися як *графік*. Крім того не зрозуміло що це за множина W, яка раніше ніде не з'являлася.

34: На кінець розділу 1.6 автор пише, що $\mathbf{F}_\alpha$ зберігає орбіти потоку потоку $\mathbf{F}$ на V і взагалі кажучи не є гомеоморфізмом. Тут корисним був би приклад коли таке F_α дійсно не є гомеоморфізмом.

34: Виглядає, що в Означенні 1.7.1(б) пропущено знак похідної.

39^4: Навіщо було писати *локально* перед *накриваючим* при описі властивостей фактор-відображення?

39: При згадці груп Бібербаха не зайвим було б посилання (особливо маючи на увазі лише 39 позицій в списку літератури).

40: Перед теоремою 2.1.1 для зручності читача корисно було б нагадати зміст символу $\mathcal{P}_f(M)$.

45: На сторінці 45 використано неозначене поняття двосторонньої простої замкненої кривої. Що це означає? Екватор листа Мебіуса є двосторонньою чи односторонньою кривою?

45^{10}: В українській мові начебто немає слова *дирка*.

69: На початку розділу 3 автор пише, що кожен змінюючий орієнтацію рух площини має порядок 2. Це неправда, оскільки є ще дзеркальні зсуви, які задаються формулою $(x, y) \mapsto (x + a, -y)$ у відповідній системі координат. Дзеркальні зсуви мають нескінченний порядок.

107: В означенні 4.1.1 використовується неозначене поняття *класу ізоморфізмів*. Що воно означає? Чому недостатньо говорити просто про класи груп? В будь-якому випадку термінологія досить дивна: *клас ізоморфізмів* це клас елементами якого мали б бути ізоморфізми, хоча маються на увазі групи.

110: В теоремі 4.1.7 (та інших подібних твердженнях) при написанні 2-*торів* та 2-*сфер*, 2 слід брати в долари (для того, щоб воно не писалося похилим шрифтом).

111_3: Напевно замість 4.1.4(1) малося на увазі 4.1.7(1).

112^1: З формальної точки зору добуток $S^1 \times 0$ є порожнім, оскільки $0 = \emptyset$. Правильно було б писати $S^1 \times \{0\}$.

139–144: Список літератури не оформлено в одному стилі. Прізвища трапляються в найрізномінітніших стандартах: *Feshchenko Bogdan*, *Feshchenko B.G.*, *I.*, *Kuznetsova*, *Кузнєцова І.В.*, *Maksymenko Sergiy*, *Maksymenko S.I.*, *Сорока Ю.Ю..*, *Шарко В.В.*
Те ж стосується списку опублікованих праць в Додатку.

Проте вказані вище зауваження не є суттєвими і не впливають на загальне позитивне враження від цієї дисертаційної роботи.

7. Висновки. Вважаю, що дисертаційна робота "Гомотопічні властивості гладких функцій на поверхнях" відповідає галузі знань 11 – "Математика та статистика", спеціальності 111 – "Математика" та вимогам Порядку підготовки здобувачів вищої освіти ступеня доктора філософії та доктора наук у вищих навчальних закладах (наукових установах), затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 23 березня 2016 року № 261 (зі змінами і доповненнями від 03 квітня 2019 року № 283), в тому числі вимогам, передбаченим пунктом 10 Порядку проведення експерименту з присудження ступеня доктора філософії, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 06 березня 2019 року № 167 (із змінами, внесеними згідно з Постановою КМ №979 від 21 жовтня 2020 року), а також вимогам, передбаченим пенктом 2 Вимог до оформлення дисертації, затверджених Наказом Міністерства освіти і науки України від 12 січня 2017 року № 40, а її автор, Ірина Валеріївна Кузнєцова заслуговує присудження наукового ступеня доктора філософії з галузі знань 11 – "Математика і Статистика" за спеціальністю 111 – "Математика".

Офіційний опонент
доктор фізико-математичних наук, професор
кафедри алгебри, топології і основ математики
Львівського національного університету
імені Івана Франка **Т.О. Банах**

Підпис Банаха Т.О.
ПІДТВЕРДЖУЮ
ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР
ЛЬВІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА
ЗКПО 02070987