НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

КУЗНЄЦОВА ІРИНА ВАЛЕРІЇВНА

УДК 515.146.27 + 515.162.2

ГОМОТОПІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ НА ПОВЕРХНЯХ

111 – Математика

Дисертація на здобуття наукового ступеня
доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело __________________________ І. В. Кузнєцова

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник,
член-кореспондент НАН України
Максименко Сергій Іванович

Київ – 2021

АНОТАЦІЯ

Кузнєцова І. В. Гомотопічні властивості гладких функцій на поверхнях. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «Математика» — Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2021.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню гомотопічних властивостей гладких функцій на поверхнях.

Гладкі функції на многовидах є важливими об'єктами досліджень у сучасній математиці і мають застосування в різних галузях науки. Зокрема, властивості таких функцій часто несуть інформацію про геометрію та топологію многовиду, на якому вони визначені.

Наприклад, М. Морс довів, що в околі кожної своєї *невиродженої* критичної точки гладка функція, після деякої заміни координат, має стандартний вигляд квадратичного многочлену (лема Морса). Це дозволило йому встановити зв'язок між числом невироджених критичних точок різних індексів з рангами та скрутами груп гомологій многовиду (слабкі та сильні нерівності Морса), а також отримати оцінки на число замкнутих геодезичних ріманового многовиду. Таким чином, виявилось, що можна отримати геометричну інформацію про многовид завдяки функціям Морса на ньому. Розвитком цих ідей, які отримали назву теорія Морса, займалися Л. Люстерник, Л. Шнірельман, Г. Чогошвілі, Л. Ельсгольц, Р. Бот, Е. Віттен, С. Новіков, В. Шарко та багато інших математиків XX ст.

С. Смейл отримав теорему про h-кобордизм (зокрема, цим довів гіпотезу Пуанкаре у розмірностях $\geqslant 5$), використовуючи методи скорочення невироджених критичних точок сусідніх індексів.

В. Шарко, використовуючи аналогічні ідеї, зміг отримати оцінки на міні-

мальне число критичних точок функцій Морса на заданому многовиді розмірності $\geqslant 6$. Зокрема ці оцінки уточнювали нерівності отримані Морсом, а також узагальнювали результати С. Смейла на неоднозв'язні многовиди. Також він довів «більш жорсткі» нерівності Морса для неоднозв'язних многовидів.

Компоненти зв'язності просторів функцій Морса в високих розмірностях описані В. Шарко [38], а на поверхнях вони класифіковані в роботах В. Шарка [39], С. Матвєєва, Х. Цишанга, О. Кудрявцевої та С. Максименка [18, 21]. Групи кобордизмів функцій Морса на поверхнях обчислили K. Ikegami і O. Saeki та B. Kalmar [7].

Інтерес до вивчення топології функцій, векторних полів, дифеоморфізмів на поверхнях значно зріс починаючи з 80-х років завдяки роботам А. Фоменка, його учнів і колег, щодо топологічної класифікації гамільтонових динамічних систем з двома стеменями вільності. Діяльність у даному напрямку в Україні була продовжена В. Шарко та його учнями. Топологічна класифікація функцій на компактних поверхнях були отримані в роботах: А. Болсінова та А. Фоменко, А. Ошемкова, В. Шарко, Є. Кулініча, О. Пришляка та його учнів, зокрема Б. Гладиш і Д. Личак, С. Максименка, О. Кадубовського, І. Юрчук і Є. Полуляха.

С. Максименко досліджував гомотопічні властивості стабілізаторів та орбіт гладких функцій на поверхнях відносно дії груп дифеоморфізмів. А саме, він вивчав відображення з класу $\mathcal{F}(M, P)$, який складається з гладких відображень з поверхні M у одновимірний многовид P, які приймають постійні значення на кожній зв'язній компоненті межі поверхні, критичні точки яких належать до внутрішності поверхні та такі, що в околі кожної критичної точки вони є гладко еквівалентними деяким однорідним многочленам без кратних множників.

Гомотопічні типи стабілізаторів та орбіт функцій з класу $\mathcal{F}(M, P)$ були обчислені у ряді робіт С. Максименка [24, 19], Б. Фещенка [4, 2], а також для функцій Морса у роботах О. Кудрявцевої [9, 35, 10, 11]. Зокрема, С. Максименко показав у роботі [19], що якщо $M \neq S^2, \mathbb{R}P^2$, то орбіта $\mathcal{O}_f(f)$ є асферичною[1], причому якщо f є відображенням Морса загального положення, то орбіта $\mathcal{O}_f(f)$ гомотопічно еквівалентна $(S^1)^k \simeq \mathbb{Z}^k$ для деякого k. Якщо ж $M = S^2$ або $\mathbb{R}P^2$, то $\pi_i \mathcal{O}_f(f) \simeq \pi_i(SO(3))$ для $i \geq 2$, а якщо f є функцією загального положення, то $\mathcal{O}_f(f)$ гомотопічно еквівалентна $(S^1)^k \times SO(3)$ для деякого k. Далі, О. Кудрявцева узагальнила ці результати і показала, що якщо M орієнтовна, а $f\colon M \to \mathbb{R}$ – функція Морса, то існує вільна дія деякої скінченної групи H на k-торі $(S^1)^k$, така, що $\mathcal{O}_f(f)$ гомотопічно еквівалентна $(S^1)^k/H$, якщо $M \neq S^2$, та гомотопічно еквівалентна $((S^1)^k/H) \times SO(3)$, якщо $M = S^2$.

Нехай M – орієнтовна поверхня відмінна від 2-сфери і 2-тору. Як зазначалося вище, $\mathcal{O}_f(f)$ є асферичною і, зокрема, її гомотопічний тип визначається лише фундаментальною групою $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$. Точна алгебраїчна структура таких груп була описана у роботі [24]. Зокрема, показано всі такі групи натежать класу $\mathcal{T}$ ізоморфізму груп, що породжується прямими добутками та певними типами вінцевих добутків.

Також у роботі С. Максименка [22] було показано, що обчислення фундаментальних груп орбіт відображень з класу $\mathcal{F}(M, P)$ на компактних поверхнях з ейлеровою характеристикою менше нуля зводиться до обчислення таких груп для відображень заданих на дисках та циліндрах та стрічках Мебіуса. Таким чином обчислення цих груп на дисках і циліндрах і дозволило отримати точну алгебраїчну структуру цих груп на компактних орієнтовних поверхнях відмінних від 2-сфери і 2-тора. Випадок тора був розглянутий у роботах [28], [29], [30], [4] С. Максименка і Б. Фещенка.

[1] Тобто $\pi_i \mathcal{O}_f(f) \simeq 0$ для всіх $i \geq 2$.

Відкритою залишалась задача описання фундаментальних груп орбіт гладких функцій з класу $\mathcal{F}(M, P)$ на неорієнтованих поверхнях M та у випадку коли M є 2-сферою.

Одним з основних результатів дисертації є *опис фундаментальних груп орбіт гладких відображень з класу $\mathcal{F}(B, P)$ на стрічці Мебіуса B.*

В розділі 1 наводяться допоміжні теоретичні відомості, що будуть використовуватися в подальшому викладі роботи. Зокрема, у §1.3 наводяться означення стабілізаторів $\mathcal{S}(f, X)$ і орбіт $\mathcal{O}(f, X)$, у §1.4 наводиться поняття графа Кронрода-Ріба відображення $f \in \mathcal{F}(M, P)$, а у §1.8 описані відомі результати про гомотопічні типи стабілізаторів $\mathcal{S}(f, X)$ і орбіт $\mathcal{O}(f, X)$.

У розділі 2 ми продовжуємо вивчати гомотопічні типи стабілізаторів $\mathcal{S}(f, X)$. Головні результати розділу, Теореми 2.1.2 і 2.1.3, пов'язані з групою $\pi_0\mathcal{S}(f, X)$ для випадку, коли M є стрічкою Мебіуса, $X = \partial M$, та $f : M \to P$ належить простору відображень $\mathcal{F}(M, P)$. У §2.2 доводимо Теорему 2.1.2. У §2.3 описані певні результати про відношення груп дифеоморфізмів неорієнтованого многовиду і його дволисного накриття. У §2.4 ми вводимо декілька підгруп стабілізатора $\mathcal{S}(f)$ і доводимо Теорему 2.4.2, яка дозволяє "спростити" дифеоморфізми із стабілізатора відображення $f \in \mathcal{F}(M, P)$. Ці результати продовжують [27, §3 & §7] на неорієнтовний випадок. У §2.5 описані відношення між групами $\mathcal{S}(f, \partial A)$ та $\mathcal{S}'(f, \partial A)$ для функцій на циліндрі $A = S^1 \times [0, 1]$, див. Лему 2.5.1. У §2.6 ми доводимо Теорему 2.1.3.

Розділ 3 присвячений гомотопічному аналогу властивості «жорсткості». У §3.4 ми продовжуємо деякі результати на неперервні потоки. Підрозділ §3.5 присвячений гомеоморфізмам кола, які змінюють орієнтацію. У §3.7 ми досліджуємо потоки без нерухомих точок, а у §3.9 наводимо деякі результати про перехід від потоку на площині до потоку, записаного у полярних координатах. У §3.11 вводяться певні підповерхні поверхні M, які відповідають відображенню $f \in \mathcal{F}(M, P)$ та називаються *надщербленими циліндрами*. Ми доводимо Теорему 3.12.2, яка описує поведінку дифеоморфізмів, які змінюють орієнтацію регулярних листів відображення f, які містяться у цих надщерблених циліндрах. У §3.13 ми доводимо Лему 3.13.1, яка дозволяє змінювати f-зберігаючі дифеоморфізми так, що їх скінченна степінь буде ізотопною тотожному дифеоморфізму за допомогою f-зберігаючої ізотопії. Нарешті, у §3.13 і §3.14 ми доводимо Теорему 3.3.5.

В розділі 4 ми продовжуємо вивчати фундаментальні групи орбіт гладких функцій на поверхнях. В §4.2 описано як обчислювати $\pi_1\mathcal{O}(f)$ для відображень f на зв'язних компактних орієнтовних поверхнях M, відмінних від 2-тора і 2-сфери. Зокрема описані конструкції, які лежать в основі доведення Твердження 4.1.4(1).

В §4.3 ми доводимо Теорему 4.1.7(1).

В §4.6 описано як обчислювати $\pi_1\mathcal{O}(f)$ для функцій f на торі. Зокрема, описані конструкції, які лежать в основі доведення Твердження 4.1.4(2). В цьому підрозділі ми доводимо Теорему 4.1.7(2).

В §4.7 ми доводимо Теорему 4.7.2 про центри вінцевих добутків довільних груп A і B у випадку неефективної дії B на множині X. У Теоремі 4.7.6 ми також показуємо, що центр довільної групи G з класу $\mathcal{T}$ ізоморфні $\mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}$, де ω – довільна реалізація G. Ця теорема складає першу частину одного з основних результатів – Теореми 4.1.5.

В §4.8 ми знаходимо комутант групи $G \wr_n \mathbb{Z}$ (Теорема 4.8.2) і факторгрупи $G \wr_n \mathbb{Z}/[G \wr_n \mathbb{Z}, G \wr_n \mathbb{Z}]$ (Теорема 4.8.3). У Теоремі 4.8.4 доводиться, що факторгрупа $G/[G, G]$, де $G \in \mathcal{T}$, також ізоморфна $\mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}$, що складає другу частину Теореми 4.1.5.

Додаток містить список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Основні результати, які визначають наукову новизну дисертації:

- показано, що для кожного відображення з класу $\mathcal{F}(B, P)$ гладких відображень на стрічці Мебіуса B, існує єдиний критичний рівень, який розбиває B в об'єднання циліндра і 2-дисків (такий рівень названо спеціальним).

- для всіх відображень з $\mathcal{F}(B, P)$ обчислено фундаментальні групи їх орбіт за умови тривіальності дій стабілізаторів цих відображень на компонентах зв'язності доповнення до відповідних спеціальних критичних рівнів;

- доведено, що для довільного відображення з класу $\mathcal{F}(M, P)$ на зв'язній орієнтовній компактній поверхні M і для довільного дифеоморфізма, який залишає інваріантною кожну регулярну компоненту множини рівня цього відображення та змінює її орієнтацію, квадрат цього дифеоморфізма ізотопний тотожньому відображенню зі збереженням відображення (це твердження є гомотопічним та пошаровим аналогом властивості «жорсткості» для змінюючих орієнтацію лінійних рухів площини, яка стверджує, що кожен такий рух має порядок 2);

- розглянуто клас ізоморфізму груп $\mathcal{T}$, що породжується прямими добутками та певними типами вінцевих добутків, який містить фундаментальні групи орбіт всіх функцій з класу $\mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ на орієнтовних поверхнях крім 2-сфери. Для нього доведені такі результати:

  – отримано теореми реалізації для груп із класу $\mathcal{T}$ як фундаментальних груп орбіт функцій з класу $\mathcal{F}(M, P)$ на поверхнях відмінних від 2-сфери і 2-тора, зокрема за певних обмежень на поведінку функцій на межі;

  – також отримано теореми реалізації для груп із класу $\mathcal{T}$ як фундаментальних груп орбіт функцій з класу $\mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$ на 2-торі T^2;

– обчислено центр $Z(G)$ і фактор-групу по комутанту $G/[G,G]$ для кожної групи G з класу $\mathcal{T}$ і показано, що вони є вільними абелевими групами однакового рангу β_1. Зокрема, якщо G – фундаментальна група орбіти деякої функції $f \in \mathcal{F}(M,\mathbb{R})$, то β_1 є першим числом Бетті цієї орбіти, тобто рангом першої групи гомологій.

Результати дисертації носять теоретичний характер. Отримані в ній результати можуть бути використані в дослідженнях з топології, алгебри, математичної фізики, теорії симетрій диференціальних рівнянь в частинних похідних, теорії динамічних систем, теорії особливостей гладких відображень та інших галузей знань, методи яких базуються на топологічних властивостях гладких функцій.

Ключові слова: Функції Морса, дифеоморфізми, потоки, група Діедра.

ABSTRACT

Kuznietsova I. V. Homotopy properties of smooth functions on surfaces. — Manuscript.

The thesis for obtaining the the academic degree Doctor of Philosophy in speciality 111 – Mathematics. — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2021.

The thesis is devoted to study of homotopy properties of smooth functions on surfaces.

Smooth functions on manifolds are important research objects in modern mathematics and have applications in various fields of science. In particular, the properties of such functions often carry information about the geometry and topology of the manifold on which they are defined.

For example, M. Morse proved that in the neighborhood of each its *non-degenerate* critical point, a smooth function, after some substitution of coordinates, has the standard form of a quadratic polynomial (Morse Lemma). This allowed him to

establish a relationship between the number of non-degenerate critical points of various indices with the ranks and twists of groups of homologies of the manifold (weak and strong Morse inequalities), as well as to obtain estimates on the number of closed geodesic Riemannian manifolds. Thus, it turned out that it is possible to get geometric information about the manifold due to the Morse functions on it. The development of these ideas, which were called the Morse theory, was carried out by L. Lesternik, L. Schnirelman, G. Chogoshvili, L. Elsholts, R. Bot, E. Witten, S. Novikov, V. Sharko and many other mathematicians of the XX century.

S. Smale have obtained the theorem about h-cobordism (in particular, he proved the Poincare Conjecture in dimensions $\geqslant 5$.) using methods of cancellation of non-degenerate critical points of consecutive indices.

V. Sharko, using similar ideas, was able to obtain estimates on the minimum number of critical points of Morse functions on a given manifold of dimension $\geqslant 6$. In particular, these estimates refined the inequalities obtained by Morse, and also generalized the results of S. Smale to non-simply connected manifolds. He also proved «more rigid» Morse inequalities for unrelated manifolds.

The connected components of Morse function spaces in high dimensions are described by V. Sharko [38], and on surfaces they are classified in the works of V. Sharko [39], S. Matveev, H. Tsishang, O. Kudryavtseva and S. Maksimenko [18, 21]. Groups of cobordisms of Morse functions on surfaces were calculated by K. Ikegami and O. Saeki and B. Kalmar [7].

Interest in studying the topology of functions, vector fields, and diffeomorphisms on surfaces has grown significantly since the 80s thanks to the works of A. Fomenko, his students and colleagues, on the topological classification of Hamiltonian dynamical systems with two degrees of freedom. Activity in this direction in Ukraine were continued by V. Sharko and his students. Topological classification of functions on compact surfaces was obtained in the works: A. Bolsinov and A. Fomenko,

A. Oshemkova, V. Sharko, E. Kulinich, O. Prishlyak and his students, in particular B. Gladysh and D. Lychak, S. Maksymenko, O. Kadubovsky, I. Yurchuk and E. Polulyakh.

S. Maksimenko investigated the homotopic properties of stabilizers and orbits of smooth functions on surfaces with respect to the action of difeomorphism groups. Namely, he studied the maps from the class $\mathcal{F}(M, P)$, which consists of smooth maps from the surface M to the one-dimensional manifold P, which take constant values on each connected component of the surface boundary, whose critical points belong to the interior of the surface and are such that in the neighborhood of each critical point they are smoothly equivalent to some homogeneous polynomials without multiples.

Homotopic types of stabilizers and orbits of functions from the class $\mathcal{F}(M, P)$ were calculated in a number of works by S. Maksymenko [24, 19], B. Feschenko [4, 2], as well as for Morse functions in the works of O. Kudryavtseva [9, 35, 10, 11]. In particular, S. Maksymenko showed in [19] that if $M \neq s^2, \mathbb{R}P^2$, then the orbit of $\mathcal{O}_f(f)$ is aspherical[2], and if f is a Morse map of the general position, then the orbit $\mathcal{O}_f(f)$ is homotopically equivalent to $(S^1)^k \simeq\ z^k$ for some k. If $M = S^2$ or $\mathbb{R}P^2$, then $\pi_i \mathcal{O}_f(f) \simeq \pi_i(SO(3))$ for $i \geq 2$, and if f is a general position function, then $\mathcal{O}_f(f)$ is homotopically equivalent to $(S^1)^k \times SO(3)$ for some k. Further, O. Kudryavtseva generalized these results and showed that if M is orientable, and $f\colon M \to \mathbb{R}$ is a Morse function, then there exists a free action of some finite group H on k-torus $(S^1)^k$, such that $\mathcal{O}_f(f)$ is homotopically equivalent to $(S^1)^k/H$, if $M \neq S^2$, and is homotopically equivalent to $((S^1)^k/H) \times SO(3)$ if $M = S^2$.

Let M be an orientable surface other than a 2-sphere and a 2-torus. As noted above, $\mathcal{O}_f(f)$ is aspherical and, in particular, its homotopic type is determined only by the fundamental group $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$. The exact algebraic structure of such groups

[2] i.e. $\pi_i \mathcal{O}_f(f) \simeq 0$ for all $i \geq 2$.

was described in [24].

Also in the work of S. Maksymenko [22] it was shown that the calculation of fundamental groups of orbits of maps from the class $\mathcal{F}(M,P)$ on compact surfaces with an Euler characteristic less than zero can be reduced to calculations of such groups for mappings given on disks, cylinders, and Mobius strips. Thus, the calculation of these groups on disks and cylinders made it possible to obtain an accurate algebraic structure of these groups on compact orientable surfaces other than the 2-sphere and 2-torus. The case of torus was considered in [28], [29], [30], [4] by S. Maksymenko and B. Feshchenko.

The problem of describing the fundamental groups of orbits of smooth functions from the class $\mathcal{F}(M,P)$ on non-orientable surfaces M and in the case when M is a 2-sphere remained open.

One of the main results of the dissertation is *description of fundamental groups of orbits of smooth maps from the class $\mathcal{F}(B,P)$ on the Mobius strip B.*

The section 1 provides auxiliary theoretical information that will be used in the further presentation of the work. In particular, in §1.4 the definitions of stabilizers $\mathcal{S}(f,X)$ and orbits $\mathcal{O}(f,X)$ are given, in §1.4 is given the concept of the Kronrod-Reeb graph of a map $f \in \mathcal{F}(M,P)$, and §1.8 describes the known results on homotopy types of stabilizers $\mathcal{S}(f,X)$ and orbits $\mathcal{O}(f,X)$.

In the section 2 we continue to study the homotopy types of stabilizers $\mathcal{S}(f,X)$. The main results of the section, Theorems 2.1.2 and 2.1.3, are related to the group $\pi_0\mathcal{S}(f,X)$ for the case when M is Moebius tape, $X = \partial M$, and $f : M \to P$ belongs to $\mathcal{F}(M,P)$. In §2.2 we prove the Theorem 2.1.2. In §2.4 we introduce several subgroups of $\mathcal{S}(f)$ and prove Theorem 2.4.2 allowing to “simplify” diffeomorphisms from the stabilizer of $f \in \mathcal{F}(M,P)$. These results extend [27, §3 & §7] to non-orientable case. §2.5 describes the relation between the groups $\mathcal{S}(f,\partial A)$ and $\mathcal{S}'(f,\partial A)$ for functions on the annulus $A = S^1 \times [0,1]$, see Lemma 2.5.1. Finally in §2.6 we prove Theorem 2.1.3.

The section 3 is devoted to the homotopy analogue of the property "rigidity". In §3.4 we discuss a notion of a shift map along orbits of a flow. §3.5 devoted to reversing orientation families of homeomorphisms of the circle. In § 3.7 we study flows without fixed point, and in §3.9 recall several results about passing from a flow on the plane to the flow written in polar coordinates. §3.11 introduces a certain subsurfaces of a surface M associated with a map $f \in \mathcal{F}(M, P)$ and called *chipped cylinders*. We prove Theorem 3.12.2 describing behaviour of diffeomorphisms reversing regular leaves of f contained in those chipped cylinders. In §3.13 we prove Lemma 3.13.1 allowing to change f-preserving diffeomorphisms so that its finite power will be isotopic to the identity by f-preserving isotopy. Finally, in §3.13 and §3.14 we prove Theorem 3.3.5.

In the section 4 we continue to study the fundamental groups of orbits of smooth functions on surfaces. §4.2 describes how to compute $\pi_1\mathcal{O}(f)$ for mappings of f on connected compact orientable surfaces M other than 2-torus and 2-sphere. In particular, the constructions that underlie the proof of Proposition 4.1.4(1) are described.

In §4.3 we prove Theorem 4.1.7(1).

§4.6 describes how to compute $\pi_1\mathcal{O}(f)$ for functions f on a torus. In particular, the constructions that underlie the proof of Proposition 4.1.4(2) are described. In this section we prove Theorem 4.1.7(2).

In §4.7 we prove Theorem 4.7.2 on the centers of wreath products of arbitrary groups A and B in the case of inefficient action of B on the set X. In Theorem 4.7.6 we also show that the center of an arbitrary group G of class $\mathcal{T}$ is isomorphic $\mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}$, where ω is an arbitrary realization of G. This theorem is the first part of one of the main results - Theorem 4.1.5.

In §4.8 we find the commutant of the group $G \wr_n \mathbb{Z}$ (Theorem 4.8.2) and the factor group $G \wr_n \mathbb{Z}/[G \wr_n \mathbb{Z}, G \wr_n \mathbb{Z}]$ (Theorem 4.8.3). In Theorem 4.8.4 it is proved that the factor group $G/[G, G]$, where $G \in \mathcal{T}$, is also isomorphic to $\mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}$, which is the second part of Theorem 4.1.5.

The application contains a list of publications of the applicant on the topic of the dissertation and information about testing the results of the dissertation.

The main results that determine the scientific novelty of the dissertation:

- it is shown that for every map from the class $\mathcal{F}(B, P)$ of smooth maps on the Mobius strip B, there is a unique critical level that splits B into the union of a cylinder and 2-disks (such a level is called special).

- for all mappings with $\mathcal{F}(B, P)$ the fundamental groups of their orbits are calculated in case where the actions of the stabilizers of these mappings are trivial on the connected components to the corresponding special critical levels;

- proved that for an arbitrary mapping from the class $\mathcal{F}(M, P)$ on a connected orientable compact surface M and for an arbitrary diffeomorphism that leaves invariant each regular component of the level set of this mapping and changes its orientation, the square of this diffeomorphism is isotopic to an identical mapping with preserving the map (this statement is a homotopic and foliated analog of the property of «rigidity» for orientation-changing linear motions of the plane, which states that each such movement has an order of 2);

- there was considered the isomorphism class of groups $\mathcal{T}$, which is generated by direct products and certain types of wreath products, which contains fundamental groups of orbits of all functions from the class $\mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ on oriented surfaces except for the 2-sphere. The following results have been proven for it:

– realization theorems are obtained for groups from the class $\mathcal{T}$ as fundamental groups of orbits of functions from the class $\mathcal{F}(M, P)$ on surfaces other than the 2-sphere and 2-torus, in particular under certain restrictions on the behavior of functions at the boundary;

– also obtained realization theorems for groups from the class $\mathcal{T}$ as fundamental groups of orbits of functions of the class $\mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$ on the 2-torus T^2;

– calculated the center $Z(G)$ and the quotient group by the commutant $G/[G, G]$ for each group G of the class $\mathcal{T}$ and showed that they are free Abelian groups of the same rank β_1. In particular, if G is the fundamental group of the orbit of some function $f \in \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$, then β_1 is the first Betti number of this orbit, that is, the rank of the first homology group.

The results of the dissertation are theoretical in nature. The results obtained in it can be used in research on topology, algebra, mathematical physics, the theory of symmetry of Partial Differential Equations, the theory of dynamical systems, the theory of features of smooth maps and other branches of knowledge, the methods of which are based on the topological properties of smooth functions.

Keywords: Morse functions, diffeomorphisms, flows, dihedral group.

Список публікацій здобувача за тематикою дисертації

1. Iryna Kuznietsova, Sergiy Maksymenko. Homotopy properties of smooth functions on the Möbius band // Proceedings of the International Geometry Center Vol. 12, no. 3 (2019) pp. 1–29.

2. Iryna Kuznietsova, Sergiy Maksymenko. Reversing orientation homeomorphisms of surfaces // Proceedings of the International Geometry Center Vol. 13, no. 4 (2020) pp. 179–209.

3. І. В. Кузнєцова, Ю. Ю. Сорока. Перші числа Бетті орбіт функцій Морса на поверхнях // Укр. мат. журн., 2021, т. 73, No 2, С. 179-200.

4. Iryna Kuznietsova. Homotopy properties of Morse functions on the Möbius strip // Тези доповідей – The International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, Lviv, Ukraine.—2017.— P. 64.

5. Кузнєцова Ірина Валеріївна. First Betti numbers of orbits of Morse functions on surfaces // Тези доповідей — Міжнародна конференція молодих математиків, 6 – 8 червня, 2019, м. Київ, Україна, Інститут математики НАН України, 2019. — С. 83.

6. Iryna Kuznietsova, Sergiy Maksymenko. Properties of changing orientation homeomorphisms of the disk // Тези доповідей – International conference «Morse theory and its applications» devoted to the memory and 70th anniversary of Volodymyr Sharko, 2019, p. 32

7. I. Kuznietsova, S. Maksymenko. On the squares of diffeomorphisms of surfaces // Тези доповідей – International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis», 2020, p. 41.

ЗМІСТ

ВСТУП

Дисертація присвячена дослідженню гомотопічних властивостей гладких функцій на поверхнях.

Актуальність теми

Гладкі функції на многовидах є важливими об'єктами досліджень у сучасній математиці і мають застосування в різних галузях науки. Зокрема, властивості таких функцій часто несуть інформацію про геометрію та топологію многовиду, на якому вони визначені.

Наприклад, М. Морс довів, що в околі кожної своєї *невиродженої* критичної точки гладка функція, після деякої заміни координат, має стандартний вигляд квадратичного многочлену (лема Морса). Це дозволило йому встановити зв'язок між числом невироджених критичних точок різних індексів з рангами та скрутами груп гомологій многовиду (слабкі та сильні нерівності Морса), а також отримати оцінки на число замкнутих геодезичнихріманового многовиду. Таким чином, виявилось, що можна отримати геометричну інформацію про многовид завдяки функціям Морса на ньому. Розвитком цих ідей, які отримали назву теорія Морса, займалися Л. Люстерник, Л. Шнірельман, Г. Чогошвілі, Л. Ельсгольц, Р. Бот, Е. Віттен, С. Новіков, В. Шарко та багато інших математиків XX ст.

С. Смейл отримав теорему про h-кобордизм (зокрема, цим довів гіпотезу Пуанкаре у розмірностях $\geqslant 5$), використовуючи методи скорочення невироджених критичних точок сусідніх індексів.

В. Шарко, використовуючи аналогічні ідеї, зміг отримати оцінки на мінімальне число критичних точок функцій Морса на заданому многовиді розмірності $\geqslant 6$. Зокрема ці оцінки уточнювали нерівності отримані Морсом, а також узагальнювали результати С. Смейла на неоднозв'язні многовиди. Також він довів «більш жорсткі» нерівності Морса для неоднозв'язних многовидів.

Компоненти зв'язності просторів функцій Морса в високих розмірностях описані В. Шарко [38], а на поверхнях вони класифіковані в роботах В. Шарка [39], С. Матвєєва, Х. Цишанга, О. Кудрявцевої та С. Максименка [18, 21]. Групи кобордизмів функцій Морса на поверхнях обчислили K. Ikegami і O. Saeki та B. Kalmar [7].

Інтерес до вивчення топології функцій, векторних полів, дифеоморфізмів на поверхнях значно зріс починаючи з 80-х років завдяки роботам А. Фоменко, його учнів і колег, щодо топологічної класифікації гамільтонових динамічних систем з двома стеменями вільності. Діяльність у даному напрямку в Україні була продовжена В. Шарко та його учнями. Топологічна класифікація функцій на компактних поверхнях були отримані в роботах: А. Болсінова та А. Фоменко, А. Ошемкова, В. Шарко, Є. Кулініча, О. Пришляка та його учнів, зокрема Б. Гладиш і Д. Личак, С. Максименка, О. Кадубовського, І. Юрчук і Є. Полуляха.

С. Максименко досліджував гомотопічні властивості стабілізаторів та орбіт гладких функцій на поверхнях відносно дії груп дифеоморфізмів. А саме, він вивчав відображення з класу $\mathcal{F}(M, P)$, який складається з гладких відображень з поверхні M у одновимірний многовид P, які приймають постійні значення на кожній зв'язній компоненті межі поверхні, критичні точки яких належать до внутрішності поверхні та такі, що в околі кожної критичної точки вони є гладко еквівалентними деяким однорідним многочленам без кратних множників.

Гомотопічні типи стабілізаторів та орбіт функцій з класу $\mathcal{F}(M,P)$ були обчислені у ряді робіт С. Максименка [24, 19], Б. Фещенка [4, 2], а також для функцій Морса у роботах О. Кудрявцевої [9, 35, 10, 11]. Зокрема, С. Максименко показав у роботі [19], що якщо $M \neq S^2, \mathbb{R}P^2$, то орбіта $\mathcal{O}_f(f)$ є асферичною[3], причому якщо f є відображенням Морса загального положення, то орбіта $\mathcal{O}_f(f)$ гомотопічно еквівалентна $(S^1)^k \simeq \mathbb{Z}^k$ для деякого k. Якщо ж $M = S^2$ або $\mathbb{R}P^2$, то $\pi_i\mathcal{O}_f(f) \simeq \pi_i(SO(3))$ для $i \geq 2$, а якщо f є функцією загального положення, то $\mathcal{O}_f(f)$ гомотопічно еквівалентна $(S^1)^k \times SO(3)$ для деякого k. Далі, О. Кудрявцева узагальнила ці результати і показала, що якщо M орієнтовна, а $f\colon M \to \mathbb{R}$ – функція Морса, то існує вільна дія деякої скінченної групи H на k-торі $(S^1)^k$, така, що $\mathcal{O}_f(f)$ гомотопічно еквівалентна $(S^1)^k/H$, якщо $M \neq S^2$, та гомотопічно еквівалентна $((S^1)^k/H) \times SO(3)$, якщо $M = S^2$.

Нехай M – орієнтовна поверхня відмінна від 2-сфери і 2-тору. Як зазначалося вище, $\mathcal{O}_f(f)$ є асферичною і, зокрема, її гомотопічний тип визначається лише фундаментальною групою $\pi_1\mathcal{O}_f(f)$. Точна алгебраїчна структура таких груп була описана у роботі [24].

Також у роботі С. Максименка [22] було показано, що обчислення фундаментальних груп орбіт відображень з класу $\mathcal{F}(M,P)$ на компактних поверхнях з ейлеровою характеристикою менше нуля зводиться до обчислення таких груп для відображень заданих на дисках та циліндрах та стрічках Мебіуса. Таким чином обчислення цих груп на дисках і циліндрах і дозволило отримати точну алгебраїчну структуру цих груп на компактних орієнтовних поверхнях відмінних від 2-сфери і 2-тора. Випадок тора був розглянутий у роботах [28], [29], [30], [4] С. Максименка і Б. Фещенка.

Відкритою залишалась задача описання фундаментальних груп орбіт глад-

[3] Тобто $\pi_i\mathcal{O}_f(f) \simeq 0$ для всіх $i \geq 2$.

ких функцій з класу $\mathcal{F}(M, P)$ на неорієнтованих поверхнях M та у випадку коли M є 2-сферою.

Одним з основних результатів дисертації є *опис фундаментальних груп орбіт гладких відображень з класу $\mathcal{F}(B, P)$ на стрічці Мебіуса B.*

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами

Робота виконана в лабораторії топології у складі відділу алгебри і топології Ін- ституту математики НАН України в рамках державної науково-дослідної теми «Алгебраїчні та топологічні інваріанти гладких відображень», номер державної реєстрації 0116U000069.

Мета і завдання дослідження

Метою роботи є дослідження фундаментальних груп орбіт широкого класу гладких функцій на поверхнях відносно правих дій груп дифеоморфізмів поверхонь.

Об'єкт дослідження: різні класи гладких відображень поверхонь та їх гомотопійні властивості.

Предмет дослідження: гладкі функції на поверхнях та дифеоморфізми поверхонь, що зберігають функції.

Завдання дослідження:

- для стрічки Мебіуса B дослідити фундаментальні групи орбіт відображень з класу $\mathcal{F}(B, P)$.

- для зв'язних орієнтовних компактних поверхонь M дослідити множини дифеоморфізмів, які змінюють орієнтацію та зберігають задане відображення з класу $\mathcal{F}(M, P)$.

- отримати теореми реалізації груп з класу $\mathcal{T}$ у вигляді фундаментальних груп орбіт функцій з класу $\mathcal{F}(M,\mathbb{R})$, де M – компактна орієнтовна поверхня відмінна від 2-сфери;

- обчислити центр $Z(G)$ і фактор-групу по комутанту $G/[G,G]$ для кожної групи G з класу $\mathcal{T}$.

Методи дослідження

У роботі використовуються методи алгебри, алгебраїчної, геометричної та диференціальної топології, теорії динамічних систем та теорії особливостей.

Наукова новизна одержаних результатів

Результати роботи, що виносяться на захист:

- показано, що для кожного відображення з класу $\mathcal{F}(B,P)$ гладких відображень на стрічці Мебіуса B, існує єдиний критичний рівень, який розбиває B в об'єднання циліндра і 2-дисків (такий рівень названо спеціальним).

- для всіх відображень з $\mathcal{F}(B,P)$ обчислено фундаментальні групи їх орбіт за умови тривіальності дій стабілізаторів цих відображень на компонентах зв'язності доповнення до відповідних спеціальних критичних рівнів;

- доведено, що для довільного відображення з класу $\mathcal{F}(M,P)$ на зв'язній орієнтовній компактній поверхні M і для довільного дифеоморфізма, який залишає інваріантною кожну регулярну компоненту множини рівня цього відображення та змінює її орієнтацію, квадрат цього дифеоморфізма ізотопний тотожньому відображенню зі збереженням відображення (це твердження є гомотопічним та пошаровим аналогом властивості «жорсткості» для змінюючих орієнтацію лінійних рухів площини, яка стверджує, що кожен такий рух має порядок 2);

- розглянуто клас ізоморфізму груп $\mathcal{T}$, що породжується прямими добутками та певними типами вінцевих добутків, який містить фундаментальні групи орбіт всіх функцій з класу $\mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ на орієнтовних поверхнях крім 2-сфери. Для нього доведені такі результати:
  – отримано теореми реалізації для груп із класу $\mathcal{T}$ як фундаментальних груп орбіт функцій з класу $\mathcal{F}(M, P)$ на поверхнях відмінних від 2-сфери і 2-тора, зокрема за певних обмежень на поведінку функцій на межі;
  – також отримано теореми реалізації для груп із класу $\mathcal{T}$ як фундаментальних груп орбіт функцій з класу $\mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$ на 2-торі T^2;
  – обчислено центр $Z(G)$ і фактор-групу по комутанту $G/[G, G]$ для кожної групи G з класу $\mathcal{T}$ і показано, що вони є вільними абелевими групами однакового рангу β_1. Зокрема, якщо G – фундаментальна група орбіти деякої функції $f \in \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$, то β_1 є першим числом Бетті цієї орбіти, тобто рангом першої групи гомологій.

Практичне значення одержаних результатів

Результати дисертації носять теоретичний характер. Отримані в ній результати можуть бути використані в дослідженнях з топології, алгебри, математичної фізики, теорії симетрій диференціальних рівнянь в частинних похідних, теорії динамічних систем, теорії особливостей гладких відображень та інших галузей знань, методи яких базуються на топологічних властивостях гладких функцій.

Особистий внесок здобувача

Визначення загального плану досліджень та постановка задач належать науковому керівникові. Основні результати здобувачем отримано самостійно, а у роботах, які опубліковані у співавторстві, внесок усіх авторів є рівноцінним.

Апробація результатів

Результати дисертації доповідались та обговорювались на таких конференціях та семінарах:

- The International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, Lviv, Ukraine, 18-23 September 2017, p.64-65.
- «Міжнародна конференція молодих вчених», м. Київ, Інститут математики НАН України, 6–8 червня 2019 р., с.83
- International conference «Morse theory and its applications» dedicated to the memory and 70th anniversary of Volodymyr Sharko, м. Київ, Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова, 25-28 вересня 2019 р, с. 32-33.
- International conference «Algebraic and geometric methods of analysis», м. Одеса, онлайн конференція, 26-30 травня 2020 р., p.41
- Семінар кафедри геометрії, топології і динамічних систем, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ, 18 лютого 2021 р.

Публікації

Основні результати дисертації опубліковано в 3 статтях [12, 15, 36] в наукових виданнях, які входять до переліку фахових видань МОН України, серед них три статті [12, 15, 36] – в журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз даних (Web of Science, Scopus).

Також результати роботи представлені в матеріалах конференцій [6, 34, 14, 13].

Структура та обсяг дисертації

Дисертаційна робота складається з анотації (двома мовами), вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 39 найменувань, та додатку. Повний обсяг роботи 146 сторінок.

Подяки

Автор висловлює щиру вдячність своєму науковому керівникові, доктору фізико-математичних наук, завідувачу лабораторії топології Інституту математики НАН України Максименку Сергію Івановичу, і кандидату фізико-математичних наук, молодшому науковому співробітнику лабораторії топології Інституту математики НАН України Сороці Юлії Юріївні за співпрацю, увагу, підтримку та допомогу у роботі. Також автор дякує всім співробітникам лабораторії топології Інституту математики НАН України за натхнення та плідні дискусії, а також батькам та брату за поради та підтримку.

Розділ 1. Попередні відомості

1.1 Гладкі функції на поверхнях

Нехай M – компактна поверхня і P – дійсна пряма $\mathbb{R}$ або коло S^1.

Означення 1.1.1. *Нехай $\mathcal{F}(M,P)$ – підмножина $\mathcal{C}^\infty(M,P)$, що складаєтьcя з відображень $f : M \to P$, які мають такі властивості:*

(1) *відображення f приймає постійні значення на кожній компоненті зв'язності межі ∂M і не має критичних точок на ∂M;*

(2) *для кожної критичної точки z відображення f паросток f у точці z є $\mathcal{C}^\infty$ еквівалентним до деякого однорідного многочлена $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ без кратних множників.*

Відображення $f \in \mathcal{C}^\infty(M,P)$ будемо називати ***відображенням Морса****, якщо воно задовольняє умову (1) і всі його критичні точки є невиродженими. Позначимо через $\mathcal{M}(M,P)$ множину всіх відображень Морса з M в P. Відображення Морса f будемо називати* **відображенням загального положення***, якщо воно приймає різні значення у різних критичних точках.*

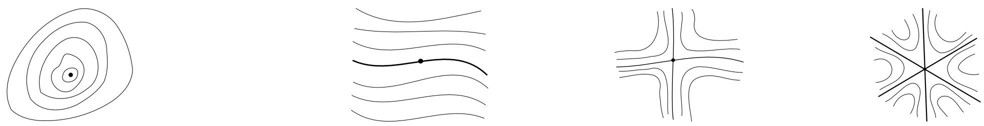
Оскільки многочлен $\pm x^2 \pm y^2$ є однорідним і не має кратних множників, з леми Морса випливає, що

$$\mathcal{M}(M,P) \subset \mathcal{F}(M,P).$$

Більш того, множина $\mathcal{M}(M,P)$ є відкритою і скрізь щільною у підмножині гладких відображень з $\mathcal{C}^\infty(M,P)$, які задовольняють умові (1). Тому $\mathcal{F}(M,P)$ складається з *більш ніж типових відображень з M в P*.

Добре відомо і легко довести, що кожен однорідний многочлен $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ є добутком скінченної кількості лінійних і незвідних над $\mathbb{R}$ квадратичних множників: $f=\prod_{i=1}^{l} L_i\cdot\prod_{j=1}^{q} Q_j$, де $L_i(x,y)=a_ix+b_iy$ та $Q_j(x,y)=c_ix^2+d_ixy+e_iy^2$. Припустимо, що $\deg f\geq 2$. Тоді початок координат 0 є єдиною критичною точкою відображення f тоді і тільки тоді, коли f не має кратних лінійних множників.

Таким чином з умови (2) випливає, що кожне відображення $f\in\mathcal{F}(M,P)$ має лише ізольовані критичні точки. Структура шарувань множин рівня біля критичних точок відображення $f\in\mathcal{F}(M,P)$ зображена на рисунку 1.1.1.1. Критична точка відображення $f\in\mathcal{F}(M,P)$, яка не є локальним екстремумом, буде називатися *сідлом*.



локальний екстремум сідла

Рис. 1.1.1.1: Топологічна структура множин рівня відображень з $\mathcal{F}(M,P)$ біля критичних точок.

Відмітимо також, що кожному відображенню $f\in\mathcal{F}(M,P)$ можна поставити у відповідність (неперервну) функцію ε_f з множини компонент зв'язності межі ∂M у $\{\pm1\}$, яка приймає значення -1, якщо на компоненті межі f має локальний мінімум, та $+1$, якщо на компоненті межі f має локальний максимум. У розділі 4 ми будемо вивчати підмножину класу $\mathcal{F}(M,P)$ функцій f, для яких ε_f співпадає з заданими неперервними функціями $\varepsilon\colon\partial M\to\{\pm1\}$.

1.2 Деякі конструкції, пов'язані з $f \in \mathcal{F}(M,P)$.

Нехай $f \in \mathcal{F}(M,P)$. Позначимо через Σ_f множину всіх критичних точок відображення f. Тоді з умови (2) випливає, що кожна точка $z \in \Sigma_f$ є ізольованою. У випадку коли $P = S^1$ можна також говорити про локальні екстремуми відображення f, і навіть про локальні мінімуми і максимуми, якщо ми зафіксуємо орієнтацію S^1.

Компоненту зв'язності K множини рівня $f^{-1}(c)$, $c \in P$, ми будемо називати *листом* (відображення f). Також ми будемо називати множини рівня та листи відображення f *регулярними*, якщо вони не містять критичних точок. Інакше ми будемо називати їх *критичними*.

Нехай $U = U_1 \sqcup U_2 \sqcup \dots \sqcup U_k$ – незв'язне об'єднання зв'язних одно- і двовимірних підмноговидів поверхні M. Ми будемо казати, що U є f*-адаптованим* підмноговидом, якщо для кожного $i = 1, \dots, k$ виконуються такі властивості:

1. якщо $\dim U_i = 1$, то U_i є регулярним листом відображення f;

2. якщо $\dim U_i = 2$, то всі компоненти зв'язності межі ∂U_i є регулярними листами відображення f.

Відмітимо, що скінченне об'єднання f-адаптованих підмноговидів також є f-адаптованим підмноговидом. Очевидно, якщо U є f-адаптованою підповерхнею, то обмеження $f|_U$ належить простору $\mathcal{F}(U,P)$.

Означення 1.2.1. *Нехай K – лист відображення f. Тоді* **f-регулярним околом** *листа K називається така f-адаптована підповерхня $R \subset M$, що*

1. R – зв'язна,

2. R містить K та $R \setminus K$ не містить критичних точок f.

Більш загально, нехай $K = \cup_{i=1}^{k} K_i$ – незв'язне об'єднання листів K_i відображення f. Для кожного K_i, $i = 1, \dots, k$, виберемо його f-регулярний окіл таким чином, щоб $U_i \cap U_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Тоді об'єднання $U = \cup_{i=1}^{k} U_i$ називається *f-регулярним околом K.*

Нехай R_K – f-регулярний окіл листа K та $D_1, \ldots, D_q$ – компоненти зв'язності $\overline{M \setminus R_K}$, дифеоморфні 2-дискам. Тоді об'єднання $N_K = R_K \cup D_1 \cdots \cup D_q$ будемо називати *канонічним околом K.*

Сингулярні шарування відображення f

Розглянемо більш тонке розбиття Ξ_f поверхні M, елементи якого належать одному з таких трьох типів:

(i) регулярні листи відображення f;

(ii) критичні точки відображення f;

(iii) компоненти зв'язності множин $K \setminus \Sigma_f$, де K пробігає всі критичні листи відображення f (очевидно, кожна така компонента є відкритим інтервалом).

Іншими словами, кожен критичний лист відображення f додатково розбивається критичними точками. Ми будемо називати Ξ_f *сингулярним шаруванням відображення f.*

1.3 Стабілізатори та орбіти гладких відображень

Нехай M – гладка компактна поверхня, тобто 2-вимірний многовид, який може бути незв'язним, неорієнтовним і мати непорожню межу, та P – дійсна пряма $\mathbb{R}$ або коло S^1. Тоді група $\mathcal{D}(M)$ $\mathcal{C}^\infty$-дифеоморфізмів поверхні M діє справа на просторі гладких відображень $\mathcal{C}^\infty(M, P)$ за таким правилом: результат дії дифеоморфізму $h \in \mathcal{D}(M)$ на $f \in \mathcal{C}^\infty(M, P)$ є композицією $f \circ h$. Тоді для кожного $f \in \mathcal{C}^\infty(M, P)$ можна визначити *стабілізатор* відображення f

$$\mathcal{S}(f) = \{h \in \mathcal{D}(M) \mid f \circ h = f\}$$

і його *орбіту*

$$\mathcal{O}(f) = \{f \circ h \mid h \in \mathcal{D}(M)\}$$

відносно вказаної вище дії.

Більш загально, позначимо через $\mathcal{D}(M, X)$ групу дифеоморфізмів поверхні M, нерухомих на замкненій підмножині $X \subset M$. Нехай також

$$\mathcal{S}(f, X) = \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}(M, X) \quad \text{and} \quad \mathcal{O}(f, X) = \{f \circ h \mid h \in \mathcal{D}(M, X)\}.$$

Наділимо $\mathcal{D}(M, X)$ та $\mathcal{C}^\infty(M, P)$ C^∞-топологіями Уітні і їх підпростори $\mathcal{S}(f, X)$ та $\mathcal{O}(f, X)$ індукованими топологіями. Тоді отримуємо відповідні топології на стабілізаторах і орбітах відображень $f \in \mathcal{C}^\infty(M, P)$. Нехай також $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M, X)$ та $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, X)$ – компоненти зв'язності просторів $\mathcal{D}(M, X)$ та $\mathcal{S}(f, X)$, які містять тотожне відображення, і $\mathcal{O}_f(f, X)$ – компонента зв'язності орбіти $\mathcal{O}(f, X)$, яка містить f. Позначимо також

$$\mathcal{S}'(f, X) = \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M, X).$$

Якщо $X = \varnothing$, то ми будемо виключати X із позначень.

Для орієнтовної поверхні M позначимо через $\mathcal{D}^+(M)$ групу дифеоморфізмів, які зберігають її орієнтацію. Також для $f \in \mathcal{C}^\infty(M, P)$ покладемо

$$\mathcal{S}^+(f) = \mathcal{D}^+(M) \cap \mathcal{S}(f), \qquad \mathcal{S}^-(f) = \mathcal{S}(f) \setminus \mathcal{S}^+(f),$$

звідки $\mathcal{S}^-(f)$ є іншим суміжним класом стабілізатора $\mathcal{S}(f)$ по $\mathcal{S}^+(f)$, відмінним від $\mathcal{S}^+(f)$.

1.4 Граф Кронрода-Ріба

Нехай M – компактна поверхня. Для заданого відображення $f \in \mathcal{F}(M, P)$ розглянемо розбиття поверхні M на листи цього відображення. Нехай також Γ_f – множина елементів цього розбиття і $p : M \to \Gamma_f$ – фактор відображення, яке кожному $x \in M$ ставить у відповідність лист відображення f, який містить x. Наділимо Γ_f відповідною фактор топологією. Тоді підмножина $W \subset \Gamma_f$ є відкритою тоді і тільки тоді, коли прообраз $p^{-1}(W)$ є відкритим у M.

Оскільки f приймає постійні значення на компонентах зв'язності межі ∂M і має тільки скінченну кількість критичних точок, то Γ_f є “топологічним графом”, тобто одновимірним CW-комплексом. Він також називається *графом Кронрода-Ріба* або просто *графом* відображення f.

Наступне твердження є очевидним.

Лема 1.4.1. *Для $f \in \mathcal{F}(M, P)$ такі умови є еквівалентними:*

(а) *кожний регулярний лист відображення f в* $\mathrm{Int}M$ *розбиває M;*

(б) *граф Γ_f відображення f є деревом.*

Наприклад, ці умови виконуються, якщо M є однією з таких поверхонь: 2-*диск, циліндр,* 2-*сфера, стрічка Мебіуса, проективна площина.* □

Наступне твердження є добре відомим для відображень Морса і може бути легко продовженим до відображень з M у P з ізольованими критичними точками, які приймають постійні значення на компонентах зв'язності межі ∂M.

Лема 1.4.2. cf. [16, Corollary 3.8]. *Нехай $f \in \mathcal{F}(M, P)$. Тоді фактор відображення $p : M \to \Gamma_f$ індукує епіморфізм*

$$p_* : H_1(M, \partial M, \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow H_1(\Gamma_f, \mathbb{Z})$$

між відповідними цілими групами гомологій.

Доведення. Можна легко показати, що існує неперервне відображення $s : \Gamma_f \to M$, таке, що $p \circ s$ є гомотопним до id_{Γ_f}, тому s є “*гомотопічним перерізом*” відображення $p : M \to \Gamma_f$. Тоді ми отримуємо таку комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd} & H_1(M,\mathbb{Z}) \arrow[dr, "p_*"] & \\ H_1(\Gamma_f,\mathbb{Z}) \arrow[ur, hook, "s_*"] \arrow[rr, "\mathrm{id}"] & & H_1(\Gamma_f,\mathbb{Z}), \end{tikzcd}$$

звідки випливає сюр'єктивність p_*. □

Наслідок 1.4.3. *Нехай M – 2-сфера або проективна площина з $k \geq 0$ дірками. Тоді для кожного $f \in \mathcal{F}(M,P)$ гомоморфізм p_* є нулем, звідки граф Кронрода-Ріба Γ_f відображення f є деревом.*

Доведення. Дійсно, для таких поверхонь гомоморфізм

$$i_* : H_1(\partial M,\mathbb{Z}) \to H_1(M,\mathbb{Z}),$$

індукований включенням $i : \partial M \subset M$, є сюр'єктивним. Оскільки f приймає постійні значення на компонентах межі ∂M, то $p_* \circ i_* = 0$, звідки p_* є нульовим епіморфізмом. Тому $H_1(\Gamma_f,\mathbb{Z}) = 0$, а отже Γ_f є деревом. □

1.5 Вінцеві добутки, породжені циклічними зсувами

Нехай G – група і $n,m \in \mathbb{N}$. Визначимо *неефективні* праві дії
$\alpha : G^{nm} \times \mathbb{Z}^2 \to G^{nm}$, $\beta : G^n \times \mathbb{Z} \to G^n$ групи $\mathbb{Z}^2$ на G^{nm} і $\mathbb{Z}$ на G^n циклічними зсувами координат за формулами:

$$\alpha((g_{i,j})_{i,j=1}^{n,m},(a,b)) = (g_{i+a,j+b})_{i,j=1}^{n,m} \qquad \beta((g_i)_{i=1}^{n},a) = (g_{i+a})_{i=1}^{n},$$

де $a,b \in \mathbb{Z}$. Ці дії дозволяють ввести структури груп на декартових добутках множин $G^{nm} \times \mathbb{Z}$ та $G^n \times \mathbb{Z}$ за такими стандартними формулами

$$(g_1,a_1,b_1)\cdot(g_2,a_2,b_2) = (\alpha(g_1,a_2,b_2)g_2, a_1+a_2, b_1+b_2), g_1,g_2 \in G^{nm}, a_1,a_2,b_1,b_2 \in \mathbb{Z},$$

$$(g_1,a_1)\cdot(g_2,a_2) = (\beta(g_1,a_2)g_2, a_1+a_2), g_1,g_2 \in G^n, a_1,a_2 \in \mathbb{Z}.$$

Отримані групи позначимо через $G \wr_{n,m} \mathbb{Z}^2$ та $G \wr_n \mathbb{Z}$ відповідно. Зауважимо, що ці групи є *вінцевими добутками* G з $\mathbb{Z}^2$ та G з $\mathbb{Z}$ відносно дій α та β.

Відмітимо, що мають місце ізоморфізми:

$$G \underset{1}{\wr} \mathbb{Z} \simeq G \times \mathbb{Z}, \qquad 1 \underset{n}{\wr} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}.$$

$$G \underset{1,1}{\wr} \mathbb{Z}^2 \simeq G \times \mathbb{Z}^2, \qquad 1 \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{Z}^2.$$

1.6 Зсуви вздовж орбіт потоків

Нехай X – топологічний простір.

Означення 1.6.1. *Неперервне відображення* $\mathbf{F} : X \times \mathbb{R} \to X$ *є* **(глобальним) потоком на** X, *якщо* $\mathbf{F}_0 = \mathrm{id}_X$ *та* $\mathbf{F}_s \circ \mathbf{F}_{\varphi_2} = \mathbf{F}_{s+\varphi_2}$ *для всіх* $s, \varphi_2 \in \mathbb{R}$, *де* $\mathbf{F}_s : X \to X$ *задається формулою* $\mathbf{F}_s(x) = \mathbf{F}(x, s)$. *Для* $x \in X$ *підмножина* $\mathbf{F}(x \times \mathbb{R}) \subset X$ *називається* **орбітою** *точки* x.

Добре відомо, що векторне поле F класу $\mathcal{C}^r$, $1 \leq r \leq \infty$, гладкого компактного многовиду X, яке є дотичним до ∂X, завжди породжує потік $\mathbf{F}$.

Далі будемо вважати, що $\mathbf{F}$ – потік на топологічному просторі X. Нехай також $V \subset X$ – підмножина цього простору. Будемо казати, що неперервне відображення $h : V \to X$ *зберігає орбіти потоку* $\mathbf{F}$ *на* V, якщо $h(\gamma \cap V) \subset \gamma$ для кожної орбіти γ потоку $\mathbf{F}$. Останнє означає, що для кожного $x \in U$ існує число $\alpha_x \in \mathbb{R}$, таке, що $h(x) = \mathbf{F}(x, \alpha_x)$. Відмітимо, що взагалі кажучи α_x не є єдиною і не неперервно залежить від x.

Навпаки, нехай $\alpha : V \to \mathbb{R}$ – неперервна функція, така, що її граф $\Gamma_\alpha = \{(x, \alpha(x)) \mid x \in V\}$ міститься в W. Для глобального потоку довільна неперервна функція $\alpha : V \to \mathbb{R}$ задовольняє цю умову. Тоді можна визначити відображення $\mathbf{F}_\alpha : V \to X$ за формулою

$$\mathbf{F}_\alpha(z) := \mathbf{F}(z, \alpha(z)) = \mathbf{F}_{\alpha(z)}(z).$$

Ми будемо називати $\mathbf{F}_\alpha$ *зсувом вздовж орбіт потоку* $\mathbf{F}$ *функцією* α, а функцію α будемо називати *функцією зсуву* для $\mathbf{F}_\alpha$.

Відмітимо, що $\mathbf{F}_\alpha$ зберігає орбіти потоку $\mathbf{F}$ на V і взагалі кажучи не є гомеоморфізмом.

1.7 Гамільтоновоподібні потоки для $g \in \mathcal{F}(M, P)$

Нехай M – орієнтовна компактна поверхня.

Означення 1.7.1. *Нехай $g \in \mathcal{F}(M, P)$ і Σ_f – множина всіх критичних точок відображення g. Гладке векторне поле F на M будемо називати* **гамільтоновоподібним** *для g, якщо виконуються такі умови.*

(а) *$F(z) = 0$ тоді і тільки тоді, коли z є критичною точкою відображення g.*

(б) *$F(g) \equiv 0$ всюди на M, тобто g постійне вздовж орбіт поля F.*

(в) *Нехай z – критична точка відображення g. Тоді існує локальне представлення відображення g у точці z, яке є однорідним многочленом $v : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ без кратних множників (як у Означенні 1.1.1) та для якого у тих самих координатах (x, y) біля початку координат 0 у $\mathbb{R}^2$ маємо $F = -v'_y \frac{\partial}{\partial x} + v'_x \frac{\partial}{\partial y}$.*

З (а) і Означення 1.1.1 випливає, що всі орбіти поля F є в точності елементами сингулярного шарування Ξ_g, тобто кожна орбіта поля F належить одному з таких типів:

- критична точка відображення g;
- регулярний лист відображення g, а тому є замкненою орбітою поля F;
- компонента зв'язності множин $K \setminus \Sigma_f$, де K пробігає всі критичні листи відображення g.

За [19, Lemma 5.1] або [23, Lemma 16] для кожного $g \in \mathcal{F}(M,P)$ існує гамільтоноводібне векторне поле. Для доведення візьмемо гамільтонове векторне поле F для g відносно довільної симплектичної форми ω на M, і тоді відповідно змінимо F біля кожної критичної точки відображення g згідно з (в) Означення 1.7.1.

Нехай F – гамільтоноводібне векторне поле для g. Оскільки g приймає постійні значення на компонентах межі поверхні M, то F є дотичним до ∂M і тому воно породжує потік $\mathbf{F} : M \times \mathbb{R} \to M$, який ми також будемо називати *гамільтоноводібним* для g.

Для кожної гладкої функції $\alpha : M \to \mathbb{R}$ нехай $\mathbf{F}_\alpha : M \to M$ – відображення, визначене за формулою

$$\mathbf{F}_\alpha(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x)), \qquad x \in M. \tag{1.1}$$

Тоді знову будемо називати $\mathbf{F}_\alpha$ *зсувом вздовж орбіт потоку* $\mathbf{F}$ за допомогою функції α. У свою чергу, α будемо називати *функцією зсуву* для $\mathbf{F}_\alpha$.

Очевидно, умова (б) Означення 1.7.1 еквівалентна припущенню, що

$$g \circ \mathbf{F}_t = g$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$, тобто $\mathbf{F}_t \in \mathcal{S}(g)$.

Більш загально, оскільки $\mathbf{F}_\alpha$ залишає інваріантною кожну орбіту потоку $\mathbf{F}$, ми бачимо, що $g \circ \mathbf{F}_\alpha = g$ для кожної функції $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$. Зокрема, $\mathbf{F}_\alpha$ є *дифеоморфізмом* тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{F}_\alpha \in \mathcal{S}(g)$. Більш того, у цьому випадку $\mathbf{F}_\alpha \in \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(g)$ і $\{\mathbf{F}_{t\alpha}\}_{t\in[0,1]}$ є ізотопією між id_M та $\mathbf{F}_\alpha$.

Позначимо через $F(\alpha)$ похідну Лі функції α відносно F і нехай

$$\Theta(F) = \{\alpha \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \mid 1 + F(\alpha) > -0\}. \tag{1.2}$$

Теорема 1.7.2. [19, Theorem 1.3], [23, Theorem 3].

Нехай $g \in \mathcal{F}(M,P)$, $\mathbf{F} : M \times \mathbb{R} \to M$ – потік породжений деяким гамільтоновим векторним полем F і $\varphi_F : \Theta(F) \to \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(g)$ – відображення, визначене за *формулою* $\varphi_F(\alpha) = \mathbf{F}_\alpha$. *Якщо* g *має принаймні одне* **сідло** *або* **вироджений локальний екстремум**, *то* φ_F *є* **гомеоморфізмом** *відносно* C^∞ *топологій і* $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(g)$ *є стягуваним (оскільки* $\Theta(F)$ *є опуклою).*

Інакше, існує $\theta \in \Theta(F)$, *така, що* φ_F *може бути представлене як композиція*

$$\varphi_F : \Theta(F) \xrightarrow{quotient} \Theta(F)/\{n\theta\}_{n\in\mathbb{Z}} \xrightarrow{homeomorphism} \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(g)$$

фактор відображення по замкненій дискретній підгрупі $Z = \{n\theta\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *множини* $\Theta(F)$ *і гомеоморфізму фактор простору* $\Theta(F)$ *по* Z *на* $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(g)$. *Зокрема,* φ_F *є нескінченним циклічним накриваючим відображенням і* $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(g)$ *є гомотопічно еквівалентним до кола.*

Наступне твердження є принциповим технічним результатом, отриманим у серії статей С.І. Максименка, див. [25, Lemma 6.1(iv)], та буде застосовуватись у розділі 3:

Лема 1.7.3. *Нехай* $\mathbf{F} : M \times \mathbb{R} \to M$ *– гамільтоновоподібний потік для* f *та* $h \in \mathcal{S}(f)$. *Тоді* $h \in \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$ *тоді і тільки тоді, коли існує* $\mathcal{C}^\infty$ *функція* $\alpha : M \to \mathbb{R}$, *така, що* $h(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x))$ *для всіх* $x \in M$. *Більш того, у цьому випадку гомотопія* $H : M \times [0;1] \to M$, *задана формулою* $H(x, \varphi_2) = \mathbf{F}(x, \varphi_2\alpha(x))$, *є ізотопією між* $H_0 = \mathrm{id}_M$ *та* $H_1 = h$ *у* $\mathcal{S}(f)$.

1.8 Відомості про гладкі функції на поверхнях

У наступному твердженні описана відома інформація про гомотопічні типи стабілізаторів і орбіт відображень $f \in \mathcal{F}(M, P)$.

Теорема 1.8.1. *Нехай* M *– зв'язна компактна поверхня,* $f \in \mathcal{F}(M, P)$, *та* X *– об'єднання скінченної кількості деяких листів відображення* f *і деяких його критичних точок. Тоді мають місце такі твердження.*

(1) *Відображення* $p : \mathcal{D}(M, X) \to \mathcal{O}(f, X)$, *визначене формулою* $p(h) = f \circ h$, *є головним локально тривіальним* $\mathcal{S}(f, X)$*-розшаруванням. Зокрема, відображення обмеження* $p : \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M, X) \to \mathcal{O}_f(f, X)$ *також є головним локально тривіальним* $\mathcal{S}'(f, X)$*-розшаруванням, [33], [19].*

(2) *Група* $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, X)$ *є гомопопічно еквівалентною колу тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:*

- M *– орієнтовна,* $\chi(M) \geq 0$, X *складається з не більш ніж* $\chi(M)$ *критичних точок відображення* f, *і кожна критична точка цього відображення є* **невиродженим локальним екстремумом**.

Інакше, $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, X)$ *є стягуваним, і у цьому випадку*

(а) *якщо* $M = S^2$, $X = \varnothing$ *та* f *є відображенням Морса з рівно двома критичними точками (мінімумом і максимумом), то* $\mathcal{O}_f(f)$ *є гомотопічно еквівалентною до* S^2;

(б) *інакше, якщо* $M = S^2$ *або* $\mathbb{R}P^2$ *та* $X = \varnothing$, *то* $\pi_k \mathcal{O}_f(f) \cong \pi_k S^3$ *для* $k \geq 2$;

(в) *інакше,* $\pi_k \mathcal{O}_f(f, X) = 0$ *для* $k \geq 2$, *[19], [23].*

(3) *Припустимо, що* $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, X)$ *є стягуваним. Тоді маємо таку коротку точну послідовність*[1]*:*

$$\pi_1 \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M, X) \xhookrightarrow{p} \pi_1 \mathcal{O}(f, X) \twoheadrightarrow \pi_0 \mathcal{S}'(f, X). \tag{1.3}$$

Якщо $\chi(M) < |X|$, *група* $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M, X)$ *також є стягуваною і з* (1.3) *випливає ізоморфізм*

$$\pi_1 \mathcal{O}_f(f, X) \cong \pi_0 \mathcal{S}'(f, X),$$

див. [19], [23].

[1] Всюди у дисертації стрілка $\hookrightarrow$ означає “*мономорфізм*” і $\twoheadrightarrow$ означає “*епіморфізм*”.

(4) *$\mathcal{O}_f(f, X) = \mathcal{O}_f(f, X \cup V)$ для довільного об'єднання компонент зв'язності межі V поверхні M, [37].*

(5) *Якщо f є відображенням Морса і має рівно n критичних точок, то $\mathcal{O}_f(f)$ є гомотопічно еквівалентною до деякого накриваючого простору n-го конфігураційного простору поверхні M, який у свою чергу є гомотопічно еквівалентним до деякого (можливо некомпактного) $(2n-1)$-вимірного CW-комплексу. Зокрема, $\pi_1\mathcal{O}_f(f)$ є підгрупою n-ї групи кіс $\mathcal{B}_n(M)$ поверхні M, [20].*

(6) *Нехай f є* **відображенням загального положення**. *Якщо $M = S^2$ та f має дві критичні точки, які є локальними екстремумами, то $\mathcal{O}_f(f)$ є гомотопічно еквівалентною до S^2. Інакше, якщо $M = S^2$ або $\mathbb{R}P^2$, то $\mathcal{O}_f(f)$ є гомотопічно еквівалентною до $\mathrm{SO}(3) \times (S^1)^k$ для деякого $k \geq 0$. У всіх інших випадках $\mathcal{O}_f(f)$ є гомотопічно еквівалентною до $(S^1)^k$ для деякого $k \geq 0$, [19].*

(7) *Нехай M є орієнтовною, $f \in \mathcal{M}(M, \mathbb{R})$ та $\chi(M) < |\mathrm{Fix}(\mathcal{S}'(f))|$ (що виконується, наприклад, якщо $\chi(M) < 0$ або якщо f є відображенням загального положення і має принаймні одну сідлову критичну точку). Тоді $\mathcal{O}_f(f)$ має гомотопічний тип фактор-простору $(S^1)^k/G$ k-тора $(S^1)^k$ по вільній дії деякої скінченної групи G, якщо $M \neq S^2$, і гомотопічний тип $((S^1)^k/G) \times \mathrm{SO}(3)$, якщо $M = S^2$, [9], [35], [10], і також [11] для функцій з локальними сингулярностями A_μ-типів, $\mu \in \mathbb{N}$.*

Результати в (7) отримані О. Кудрявцевою.

Відмітимо, що у випадку (в), наприклад якщо M відмінна від 2-сфери і проективної площини, $\mathcal{O}_f(f)$ є *асферичною*, і тому її гомотопічний тип повністю визначається фундаментальною групою $\pi_1\mathcal{O}_f(f)$.

Якщо f – відображення загального положення, то за (6) $\mathcal{O}_f(f)$ є гомотопічно еквівалентною деякому тору $(S^1)^k$, звідки $\pi_1\mathcal{O}_f(f) = \mathbb{Z}^k$ є вільною абелевою групою.

Нехай M є орієнтовною і відмінною від S^2. Тоді за (7) маємо деяку вільну дію скінченної групи G на торі $(S^1)^k$. Тоді фактор відображення $q : (S^1)^k \to (S^1)^k/G$ локально є накриваючим відображенням, звідки маємо таку коротку точну послідовність:

$$\pi_1(S^1)^k \hookrightarrow \pi_1(S^1)^k/G \twoheadrightarrow G,$$

яка згідно з (7) може бути переписана таким чином:

$$\mathbb{Z}^k \hookrightarrow \pi_1\mathcal{O}_f(f) \twoheadrightarrow G.$$

Ця послідовність була вперше відкрита в [19, Eq. (1.6)]. Зокрема, з неї випливає, що $\pi_1\mathcal{O}_f(f)$ є *кристалографічною* групою, тобто містить вільну абелеву нормальну підгрупу скінченного індексу. Більш того, згідно з (5) $\pi_1\mathcal{O}_f(f)$ є також підгрупоюof деякої групи кіс $\mathcal{B}_n(M)$ of M. Оскільки $\mathcal{B}_n(M)$ не має елементів скінченного порядку, $\pi_1\mathcal{O}_f(f)$ також не має таких елементів, і тому вона є групою *Бібербаха*.

Для подальшого опису відомих результатів, для кожної f-адаптованої зв'язної підповерхні $X \subset M$ нехай

$$\mathcal{P}_f(X) := \pi_1\mathcal{O}_{f|_X}(f|_X).$$

буде фундаментальною групою орбіти обмеження f на X. Зокрема, якщо ∂M непорожня або $\chi(M) < 0$, то з Теореми 1.8.1 ми отримуємо такі ізоморфізми:

$$\mathcal{P}_f(M) := \pi_1\mathcal{O}_f(f) \overset{(4)}{\cong} \pi_1\mathcal{O}_f(f, \partial M) \overset{(3)}{\cong} \pi_0\mathcal{S}'(f, \partial M). \tag{1.4}$$

1.9 Висновки

В розділі 1, для зручності, наводяться допоміжні теоретичні відомості, що будуть використовуватися в подальшому викладі роботи.

Розділ 2. Фундаментальна група орбіт гладких функцій на стрічці Мебіуса

2.1 Головні результати

У цьому розділі ми продовжуємо вивчати гомотопічні типи стабілізаторів $\mathcal{S}(f,X)$ і орбіт $\mathcal{O}(f,X)$, історія вивчення яких була описана у підрозділі 1.8. Головні результати розділу, Теореми 2.1.2 і 2.1.3, пов'язані з групою $\pi_0\mathcal{S}(f,X)$ для випадку, коли M є стрічкою Мебіуса, $X = \partial M$, та $f : M \to P$ належить простору відображень $\mathcal{F}(M,P)$.

У наступному твердженні зібрані декілька результатів про $\mathcal{P}_f(M)$.

Теорема 2.1.1. [22], [28], [29], [30], [4], [2]. *Нехай M – компактна поверхня. Тоді для кожного $f \in \mathcal{F}(M,P)$ існують попарно незв'язні f-адаптовані підповерхні $Y_1,\dots,Y_n \subset M$, кожна з яких містить критичні точки відображення f і має такі властивості.*

(1) *Якщо $\chi(M) < 0$, то кожна Y_i є або 2-диском, або циліндром, або стрічкою Мебіуса, і*
$$\mathcal{P}_f(M) \cong \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}_f(Y_i).$$

(2) *Нехай M є 2-диском і f має єдину критичну точку z, яка відповідно є локальним екстремумом. Якщо z – невироджена, то $\mathcal{P}_f(M) = \{1\}$. Інакше, $\mathcal{P}_f(M) = \mathbb{Z}$.*

(3) *якщо M є циліндром і f не має критичних точок, то $\mathcal{P}_f(M) = \{1\}$.*

(4) *Якщо M – 2-диск або циліндр і f має сідлові критичні точки, то кожна Y_i є 2-диском, і після відповідної їх перенумерації з двома індексами $\{Y_{i,j}\}$ група $\mathcal{P}_f(M)$ є ізоморфною одній з таких груп:*

$$\prod_{i=1}^{a}\Big((\prod_{j=1}^{b_i}\mathcal{P}_f(Y_{i,j}))\wr_{k_i}\mathbb{Z}\Big), \qquad \mathbb{Z}\times\prod_{i=1}^{a}\Big((\prod_{j=1}^{b_i}\mathcal{P}_f(Y_{i,j}))\wr_{k_i}\mathbb{Z}\Big),$$

для деяких a, b_i, k_i, $i = 1, \ldots, a$.

(5) *Нехай $M = T^2$ є 2-тором.*

(а) *Якщо граф Кронрода-Ріба Γ_f відображення f (див. означення у §1.4) є деревом, то кожна Y_i є 2-диском, і*

$$\mathcal{P}_f(T^2) \cong \big(\prod_{k=1}^{n}\mathcal{P}_f(Y_k)\big)\wr_{a,b}\mathbb{Z}^2.$$

для деяких $a, b \geq 1$.

(б) *Інакше, Γ_f містить єдиний цикл, $n = 1$, Y_1 є циліндром, і*

$$\mathcal{P}_f(T^2) \cong \mathcal{P}_f(Y_1)\wr_k\mathbb{Z}$$

для деякого $k \geq 1$.

Відмітимо, що у цій теоремі $\mathcal{P}_f(M)$, $\mathcal{P}_f(Y_i)$, $\mathcal{P}_f(Y_{i,j})$ можна замінити довільними групами типу (1.4). З іншої сторони, $\mathcal{P}_f(T^2) = \pi_1\mathcal{O}_f(f)$ не та ж сама, що $\pi_0\mathcal{S}'(f)$, оскільки $\pi_1\mathcal{D}(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ і згідно з (1.3) ми маємо таку коротку точну послідовність: $\mathbb{Z}^2 \hookrightarrow \pi_1\mathcal{O}_f(f) \twoheadrightarrow \pi_0\mathcal{S}'(f)$.

Теорема 2.1.1 показує, що для більшості поверхонь (можливо крім 2-сфери, проективної площини і пляшки Клейна) обчислення $\mathcal{P}_f(M)$ зводиться до випадків 2-диска і стрічки Мебіуса. Дійсно, випадки (1) та (5) зводять обчислення до 2-дисків, циліндрів і стрічок Мебіуса. Далі, у випадку (4) кожна $Y_{i,j}$ містить меншу кількість критичних точок, ніж f, звідки група $\mathcal{P}_f(Y_{i,j})$ має подібну структуру і можна використати індукцію за числом критичних точок відображення f з початковим індукційним кроком, даним у випадках (3) та (4).

Наша мета – описати структуру $\mathcal{P}_f(M)$ для випадку, коли M є стрічкою Мебіуса і при певних обеженнях на $f \in \mathcal{F}(M, P)$. Відкритими залишаються випадки 2-сфери і всіх неорієнтовних поверхонь.

Теорема 2.1.2. *Нехай B – стрічка Мебіуса і $f \in \mathcal{F}(B, P)$. Існує єдина критична компонента K деякої множини рівня відображення f з такими властивостями: якщо W є f-регулярним околом компоненти K та $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ – всі компоненти зв'язності замикання $\overline{B \setminus W}$ занумеровані таким чином, що $\partial B \subset Y_0$, то Y_0 є циліндром $S^1 \times [0,1]$ та кожна компонента Y_k, $k = 1, \dots, n$, є 2-диском. Зокрема,*

$$h(K) = K, \qquad h(Y_0) = Y_0, \qquad h\Big(\bigcup_{k=1}^{n} Y_k\Big) = \bigcup_{k=1}^{n} Y_k,$$

для кожного $h \in \mathcal{S}(f)$.

Нехай $\mathbf{Y} = \{Y_1, \dots, Y_n\}$ – сім'я всіх компонент зв'язності замикання $\overline{B \setminus W}$, які є 2-дисками, як у Теоремі 2.1.2. Оскільки $\bigcup_{k=1}^{n} Y_k$ є інваріантним відносно $\mathcal{S}(f, \partial B)$, ми маємо природну дію перестановками стабілізатора $\mathcal{S}(f, \partial B)$ на $\mathbf{Y}$.

Зафіксуємо орієнтацію кожної Y_k, $k = 1, \dots, n$, та покладемо $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} \times \{\pm 1\}$. Тоді дія стабілізатора $\mathcal{S}(f, \partial B)$ на $\mathbf{Y}$ продовжується до дії на $\hat{\mathbf{Y}}$, визначеної за таким правилом: якщо $h \in \mathcal{S}(f, \partial B)$ та $Y_k \in \mathbf{Y}$, то $h(Y_k, +1) = (h(Y_k), \delta)$ та $h(Y_k, -1) = (h(Y_k), -\delta)$, де

$$\delta = \begin{cases} +1, & \text{якщо обмеження } h|_{Y_k} : Y_k \to h(Y_k) \text{ зберігає орієнтацію,} \\ -1, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Нехай Q_f – нормальна підгрупа стабілізатора $\mathcal{S}(f, \partial B)$, що складається з дифеоморфізмів, які зберігають кожну компоненту Y_k з її орієнтацією. Іншими словами, Q_f є ядром неефективності дії стабілізатора $\mathcal{S}(f, \partial B)$ на $\hat{\mathbf{Y}}$. Тоді дія фактор групи $\mathcal{S}(f, \partial B)/Q_f$ на $\hat{\mathbf{Y}}$ є ефективною. Тим не менш індукована дія стабілізатора $\mathcal{S}(f, \partial B)/Q_f$ на $\mathbf{Y}$ взагалі кажучи не є ефективною.

Теорема 2.1.3. *Фактор група* $\mathcal{S}(f, \partial B)/Q_f$ **вільно діє** *на* $\hat{\mathbf{Y}}$, *і ми маємо ізоморфізм*

$$\pi_0 Q_f \cong \mathbb{Z} \times \prod_{i=0}^{n} \mathcal{P}_f(Y_i). \tag{2.1}$$

Зокрема, якщо $\mathcal{S}(f, \partial B) = Q_f$, *то*

$$\mathcal{P}_f(B) \cong \mathbb{Z} \times \prod_{i=0}^{n} \mathcal{P}_f(Y_i). \tag{2.2}$$

Згідно з (1) Теореми 2.1.1 інформація про $\mathcal{P}_f(B)$ дозволить обчислити $\mathcal{P}_f(M)$ для всіх неорієнтовних поверхонь з $\chi(M) < 0$. Разом з результатами у [27], які описують алгебраїчну структуру груп $\mathcal{P}_f(M)$ для випадку, коли M – 2-диск або циліндр, це дасть повний опис груп $\mathcal{P}_f(M)$ для всіх компактних поверхонь крім 2-сфери, проективної площини і пляшки Клейна. Також в ході доведення Теореми 2.1.3 ми отримаємо більш детальну інформацію про $\mathcal{P}_f(B)$.

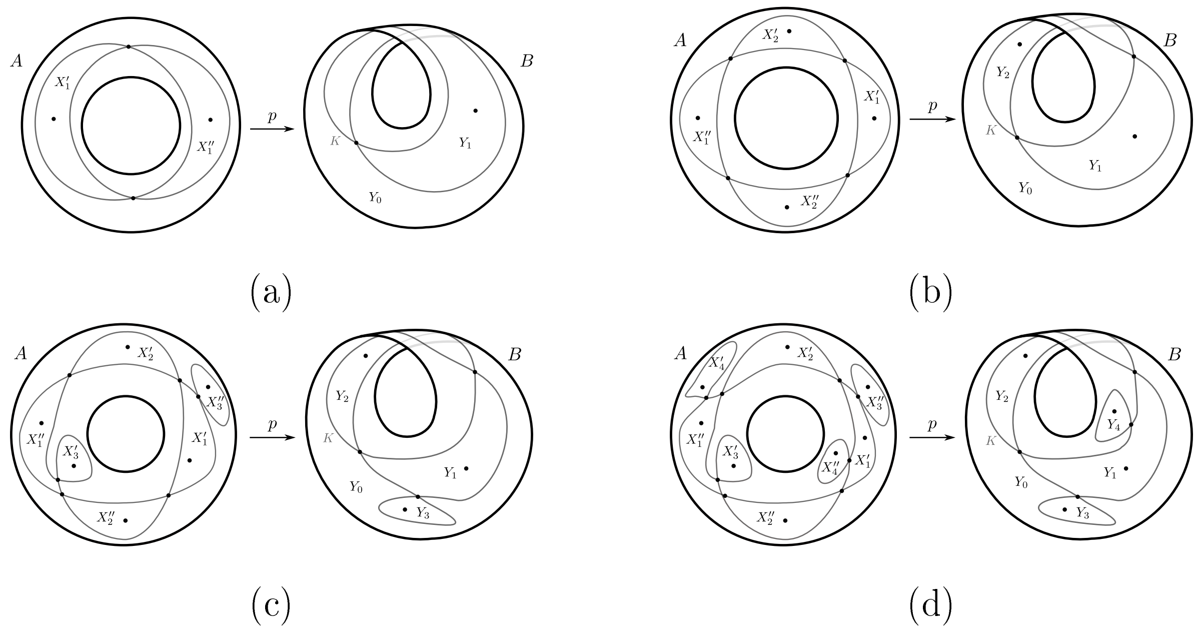


Рис. 2.1.3.1: Критичні множини рівня деяких функцій на стрічці Мебіуса

Приклади

Нехай $A = S^1 \times [0,1]$ – циліндр, $\xi(\phi, t) = (\phi+\pi, 1-t)$ – інволюція без нерухомих точок, яка змінює орієнтацію циліндра A. Тоді $B = A/\xi$ є стрічкою Мебіуса і фактор відображення $p : A \to B$ є орієнтовним дволисним накриттям B. На рисунку 2.1.3.1 зображено приклади критичних листів K функцій Морса $f : B \to \mathbb{R}$, описаних у Теоремі 2.1.2, і їх прообрази в A. Для спрощення зображення позначимо через Y_i компоненти зв'язності різниці $B \setminus K$ (а не різниці $B \setminus W$ як у Теоремі 2.1.2) і через X_i' та X_i'' – компоненти зв'язності прообразів $p^{-1}(Y_i)$ для $i \geq 1$.

Випадок (а). Існує $h \in \mathcal{S}(f, \partial B)$, такий, що $h(Y_1) = Y_1$, та який змінює орієнтацію компонент Y_i. Тоді $\mathcal{S}(f, \partial B)/Q_f \cong \mathbb{Z}_2$ і ця група породжується класом ізотопії дифеоморфізму h. Більш того, дія фактор групи $\mathcal{S}(f, \partial B)/Q_f$ на $\hat{\mathbf{Y}}$ є транзитивною.

Випадок (б). У цьому випадку $\mathcal{S}(f, \partial B)/Q_f \cong \mathbb{Z}_4$ породжується класом ізотопії дифеоморфізму $h \in \mathcal{S}(f, \partial B)$, такого, що $h(Y_1) = Y_2$, $h(Y_2) = Y_1$ та h^2 змінює орієнтації обох Y_1 та Y_2. Тепер дія стабілізатора $\mathcal{S}(f, \partial B)/Q_f$ на $\hat{\mathbf{Y}}$ також є транзитивною.

Випадок (в). Очевидно, кожний $h \in \mathcal{S}(f, \partial B)$ зберігає кожну компоненту Y_i, $i = 1, 2, 3$, з її орієнтацією. Це означає, що $\mathcal{S}(f, \partial B) = Q_f$, тому група $\mathcal{S}(f, \partial B)/Q_f$ є тривіальною.

Випадок (г). Тепер $\mathcal{S}(f, \partial B)/Q_f \cong \mathbb{Z}_2$ породжується класом ізотопії дифеоморфізму $h \in \mathcal{S}(f, \partial B)$, такого, що

$$h(Y_1, +) = (Y_1, -), \quad h(Y_2, +) = (Y_2, -), \quad h(Y_3) = (Y_4), \quad h(Y_4) = (Y_3).$$

2.2 Доведення Теореми 2.1.3

Нехай B – стрічка Мебіуса, $f \in \mathcal{F}(B, P)$, і Γ_f – граф Кронрода-Ріба відображення f, який згідно з Наслідком 1.4.3 є деревом. Нам потрібно знайти компоненту зв'язності K деякої множини рівня відображення f, яка задовольняє твердженню Теореми 2.1.3.

Нагадаємо, що з точністю до ізотопії і зміни орієнтації є рівно два класи двосторонніх простих замкнених кривих на стрічці Мебіуса:

($\mathcal{B}$) ізотопна до ∂B крива, яка розбиває B на циліндр і стрічку Мебіуса;

($\mathcal{N}$) гомопотна нулю крива, яка розбиває B на 2-диск і стрічку Мебіуса з диркою.

Зокрема, кожен регулярний лист γ відображення f є двосторонньою простою замкненою кривою у B, і тому він має один з зазначених вище типів ($\mathcal{B}$) або ($\mathcal{N}$). Відмітимо, що $p(\gamma)$ є внутрішньою точкою деякого відкритого ребра e графа Γ_f. Якщо γ' – інший регулярний лист, такий, що $p(\gamma') \in e$, то γ' є ізотопним до γ, і тому має той самий тип ($\mathcal{B}$) або ($\mathcal{N}$) що і γ. Тоді кожному ребру e графа Γ_f можна поставити у відповідність тип ($\mathcal{B}$) або ($\mathcal{N}$), який є типом прообразу $p^{-1}(w)$, де w – довільна точка на e.

Тому Теорему 2.1.3 можна переформулювати таким чином: *існує єдина вершина $v \in \Gamma_f$, яка має рівно одне інцидентне ($\mathcal{B}$)-ребро.* У цьому випадку $K = p^{-1}(v)$.

Для доведення нам потрібна наступна лема. Позначимо через $v_0 = p(\partial B)$ вершину графа Γ_f, яка відповідає межі ∂B.

Лема 2.2.1. (i) *Вершина $v \in \Gamma_f$ не може мати більше, ніж два інцидентні ($\mathcal{B}$)-ребра.*

(ii) *Нехай e – відкрите $(\mathcal{N})$-ребро, $w \in e$ – точка і T_w – компонента зв'язності множини $\Gamma_f \setminus w$, яка не містить v_0. Тоді кожне ребро в T_w теж є ребром типу $(\mathcal{N})$.*

Доведення. (i) Нехай $p^{-1}(v)$ – критичний лист відображення f, який відповідає v, $e_1, \ldots, e_m$ – всі $(\mathcal{B})$-ребра, інцидентні v, та γ_i, $i = 1, \ldots, m$, – лист відображення f, який відповідає деякій точці на e_i. Нехай також $Q = B \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m} \gamma_i$ та $Q_0, Q_1, \ldots, Q_k$ – всі компоненти зв'язності Q. Можна припустити, що $p^{-1}(v) \subset Q_0$, звідки

$$\bigcup_{i=1}^{m} \gamma_i \subset \overline{Q_0}.$$

Тепер за припущенням довільні дві криві γ_i та γ_j є незв'язними, не гомотопними нулю і ізотопними одна одній. Отже, вони обмежують циліндр A_{ij} у B з $\partial A_{ij} = \gamma_i \cup \gamma_j$.

Припустимо тепер, що $m \geq 3$, тому ми маємо щонайменше три циліндри A_{12}, A_{13} та A_{23}. Тоді їх об'єднання $Z = A_{12} \cup A_{13} \cup A_{23}$ є зв'язним.

Якщо внутрішності цих циліндрів є взаємно незв'язними, то

$$(A_{12} \setminus \gamma_1) \cap A_{23} = \gamma_2 \neq \varnothing, \qquad (A_{13} \setminus \gamma_1) \cap A_{23} = \gamma_3 \neq \varnothing,$$

звідки множина

$$Z \setminus \gamma_1 = (A_{12} \setminus \gamma_1) \cup A_{23} \cup (A_{13} \setminus \gamma_1)$$

була б зв'язною, що суперечить властивості про те, що $B \setminus \gamma_1$ є незв'язною.

Тоді, перенумерувавши індекси, якщо потрібно, можна припустити, що $A_{12} \subset A_{13}$, а тому $\gamma_2 \subset \mathrm{Int}A_{13}$. Але також $\gamma_2 \subset \overline{Q_0}$, звідки

$$Q_0 \subset A_{13} \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3) = \mathrm{Int}A_{12} \cup \mathrm{Int}A_{23},$$

а тому Q_0 міститься або у $\mathrm{Int}A_{12}$, або у $\mathrm{Int}A_{23}$. Припустимо для визначеності, що $Q_0 \subset \mathrm{Int}A_{12}$. Тоді $\overline{Q_0} \subset A_{12} \subset B \setminus \gamma_3$, що суперечить припущенню про те, що $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \gamma_i \subset \overline{Q_0}$. Тоді $m \leq 2$.

(ii) Відмітимо, що $p^{-1}(T_w)$ є відкритим диском. Тоді якщо $e' \subset T_w$ є відкритим ребром та $w' \in e'$ є точкою, то крива $p^{-1}(w)$ обмежує диск в $p^{-1}(T_w)$, а тому e' є ребром типу $(\mathcal{N})$. $\square$

Тепер ми можемо завершити Теорему 2.1.3. Спочатку покажемо, що така вершина v існує. Нехай $v_0 = p(\partial B)$ та $e_0 = (v_0, v_1)$ – єдине ребро графа Γ_f, інцидентне v_0, де v_1 – інша вершина e_0. Очевидно, e_0 є ребром типу $(\mathcal{B})$. Якщо більше немає $(\mathcal{B})$-ребер, інцидентних v_1, крім e_0, то $v = v_1$ – шукана вершина.

Інакше, згідно з (i) Леми 2.2.1 існує єдине $(\mathcal{B})$-ребро $e_1 = (v_1, v_2)$, інцидентне v_1 та відмінне від e_0. Використовуючи ті ж аргументи для e_1 і так далі ми зупинимось (завдяки скінченності Γ_f) на єдиному шляху

$$\pi : e_0 = (v_0, v_1), e_1 = (v_1, v_2), \ldots, e_m = (v_m, v)$$

взаємно відмінних $(\mathcal{B})$-ребер, такому, що його крайня вершина v має єдине $(\mathcal{B})$-ребро.

Доведемо єдиність v. Нехай v' – вершина Γ_f, відмінна від v, та k – число $(\mathcal{B})$-ребер, інцидентних v'. Нам потрібно довести, що $k = 0$ або 2. Якщо $v' \in \pi$, то за побудовою $k = 2$.

Ми стверджуємо, що $k = 0$ для всіх інших вершин. Дійсно, нехай T – компонента зв'язності доповнення $\Gamma_f \setminus \pi$, яка містить v'. Тоді T – піддерево, яке має єдину спільну вершину, наприклад, v_i, зі шляхом π. Нехай $e' = (v_i, v_i')$ – єдине ребро, яке належить T. Тоді за побудовою e' є ребром типу $(\mathcal{N})$, звідки за (ii) Леми 2.2.1 всі інші ребра T також є ребрами типу $(\mathcal{N})$. Зокрема, такими є всі ребра, інцидентні v', звідки $k = 0$. $\square$

2.3 Дифеоморфізми неорієнтовних многовидів

Нехай N – гладкий неорієнтовний зв'язний многовид розмірності m, $p\colon M \to N$ – орієнтоване дволисне накриття многовиду N та $\xi\colon M \to M$ –

відповідний $\mathcal{C}^{\infty}$ дифеоморфізм без нерухомих точок, який породжує групу $\mathbb{Z}_2$ накриваючих перетворень, тобто $\xi^2 = \mathrm{id}_M$ та $p \circ \xi = p$.

Дифеоморфізм $\tilde{h} \in \mathcal{D}(M)$ буде називатися *симетричним*, якщо він комутує з ξ, тобто $\tilde{h} \circ \xi = \xi \circ \tilde{h}$. Позначимо через $\widetilde{\mathcal{D}}(M, X)$ групу всіх симетричних дифеоморфізмів M, нерухомих на замкненій підмножині $X \subset M$, і через $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathrm{id}}(M, X)$ – тотожну компоненту лінійної зв'язності групи $\widetilde{\mathcal{D}}(M, X)$. Якщо множина X – порожня, ми будемо виключати її із позначень.

Мета цього розділу – знайти точні відношення між групами $\mathcal{D}(N)$ та $\widetilde{\mathcal{D}}(M)$, див. Лему 2.3.2 нижче.

Лема 2.3.1. *Нехай $Y \subset N$ – лінійно зв'язна підмножина. Тоді прообраз $X = p^{-1}(Y)$ є або лінійно зв'язним, або складається з двох незв'язних компонент лінійної зв'язності, які переставляються ξ.*

Доведення. Можна легко вивести з аксіоми підняття шляхів для накриваючого відображення $p : M \to N$, що $p(X) = Y$ для кожної компоненти лінійної зв'язності X' множини X. Тоді для кожної точки $y \in Y$ її прообраз $p^{-1}(y)$ перетинає кожну компоненту лінійної зв'язності множини X. Але $p^{-1}(y)$ складається з двох точок (позначимо їх x та $\xi(x)$), звідки X має складатись з однієї або двох компонент лінійної зв'язності. Більш того, якщо X має дві компоненти лінійної зв'язності X' та X'', такі, що $x \in X'$ та $\xi(x) \in X''$, то ξ переставляє x та $\xi(x)$, як і компоненти X' та X''. $\square$

Лема 2.3.2. *Для кожного $q \in \widetilde{\mathcal{D}}(M)$ існує дифеоморфізм $h \in \mathcal{D}(N)$, такий, що $p \circ q = h \circ p$, та відповідність $q \mapsto h$ є неперервним епіморфізмом $\rho : \widetilde{\mathcal{D}}(M) \to \mathcal{D}(N)$ з ядром $\ker(\rho) = \{\mathrm{id}_M, \xi\} \cong \mathbb{Z}_2$. Більш того, ρ задає ізоморфізм $\widetilde{\mathcal{D}}^{+}(M)$ на $\mathcal{D}(N)$, тому ми отримуємо таку комутативну діаграму,* *рядки якої є точними і всі вертикальні стрілки якої є ізоморфізмами:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_2 \arrow[r, hook, "i\mapsto(i,\mathrm{id}_M)"] \arrow[d, "\cong"', "i\mapsto\xi^i"] & \mathbb{Z}_2\times\widetilde{\mathcal{D}}^+(M) \arrow[r, two heads, "(i,q)\mapsto q"] \arrow[d, "\cong"', "(i,q)\mapsto\xi^i\circ q"] & \widetilde{\mathcal{D}}^+(M) \arrow[d, shift left, "\rho"] \\
\langle\xi\rangle \arrow[r, hook] & \widetilde{\mathcal{D}}(M) \arrow[r, two heads, "\rho"] & \mathcal{D}(N) \arrow[u, shift left, "s"]
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

де s – обернене відображення до ρ.

Більш того, s також індукує описані нижче ізоморфізми.

(1) *Для кожної підмножини $Y\subset N$ маємо ізоморфізм*

$$s\colon \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(N,Y)\cong\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathrm{id}}(M,p^{-1}(Y)). \tag{2.4}$$

(2) *Припустимо $Y\subset N$ є підмножиною, такою, що для кожної компоненти лінійної зв'язності Y' множини Y та $q\in\widetilde{\mathcal{D}}^+(M)$ обмеження*

$$q|_{p^{-1}(Y')},\ \xi|_{p^{-1}(Y')}\colon\ p^{-1}(Y')\to M$$

*є **різними відображеннями**, тобто вони приймають різні значення в деякій точці. Тоді ми також маємо ізоморфізм*

$$s\colon \mathcal{D}(N,Y)\cong\widetilde{\mathcal{D}}(M,p^{-1}(Y)). \tag{2.5}$$

*Наприклад, це виконується, якщо Y є m-вимірним підмноговидом або **двостороннім** $(m-1)$-вимірним підмноговидом, але не виконується, наприклад, коли Y є скінченною підмножиною.*

Доведення. Нехай $q\in\widetilde{\mathcal{D}}(M)$ та $h=\rho(q)\in\mathcal{D}(N)$. Тоді $\rho^{-1}(h)$ складається з двох дифеоморфізмів q та $\xi\circ q$, один з яких зберігає орієнтацію, а інший змінює її. Позначимо через $s(h)$ той з них, який зберігає орієнтацію. Тоді відповідність $h\mapsto s(h)$ є неперервним гомоморфізмом

$$s:\mathcal{D}(N)\to\widetilde{\mathcal{D}}^+(M),$$

для якого $\rho \circ s = \mathrm{id}_{\mathcal{D}(N)}$. Оскільки за означенням ξ комутує з усіма дифеоморфізмами з $\widetilde{\mathcal{D}}(M)$ та породжує ядро гомоморфізма ρ, ми отримуємо шукану діаграму (2.3).

(1) Спочатку помітимо, що $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathrm{id}}(M)$ також є тотожною компонентою лінійної зв'язності групи $\widetilde{\mathcal{D}}^{+}(M)$. Тоді ρ індукує ізоморфізм $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathrm{id}}(M)$ на компоненту лінійної зв'язності $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(N)$ групи $\mathcal{D}(N)$, звідки ми отримуємо обернений ізоморфізм

$$s\colon \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(N) \cong \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathrm{id}}(M),$$

співпадає з (2.4) для випадку $Y = \varnothing$.

Тепер припустимо, що $Y \subset N$ є непорожньою підмножиною та нехай $X = p^{-1}(Y)$. Очевидно, $\rho\big(\widetilde{\mathcal{D}}(M,X)\big) \subset \mathcal{D}(N,Y)$, тобто, якщо $h \in \widetilde{\mathcal{D}}(M)$ є нерухомим на X, то $\rho(q)$ є нерухомим на Y. Тоді

$$\rho\big(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathrm{id}}(M,X)\big) \subset \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(N,Y).$$

Навпаки, нехай $h \in \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(N,Y)$. Тоді існує ізотопія $H : N \times [0,1] \to N$, така, що $H_0 = \mathrm{id}_N$, $H_1 = h$, та кожен H_t є нерухомим на Y. Оскільки p є накриваючим відображенням, H підіймається до єдиної ізотопії $\widetilde{H} : M \times [0,1] \to M$, такої, що $\widetilde{H}_0 = \mathrm{id}_M$ та $\rho(\widetilde{H}_t) = H_t$. Зокрема, $\widetilde{H}_t \in \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathrm{id}}(M) \subset \widetilde{\mathcal{D}}^{+}(M)$, а тому $\widetilde{H}_t = s(H_t)$.

Залишається показати, що кожне $\widetilde{H}_t$ є нерухомим на X, звідки отримаємо включення

$$s(\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(N,Y)) \subset \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathrm{id}}(M,X)$$

та ізоморфізм (1). Нехай $x \in X$ та $y = p(x) \in Y$. Оскільки $H(x \times [0,1]) = y$, то

$$\widetilde{H}(x \times [0,1]) \subset p^{-1}(y) = \{x, \xi(x)\}.$$

Але остання множина є дискретною та $\widetilde{H}(x,0) = x$, звідки $\widetilde{H}(x \times [0,1]) = x$. Отже, $\widetilde{H}_t$ нерухоме на X.

(2) Нехай $X = p^{-1}(Y)$, тоді обмеження $p : X \to Y$ – дволисне накриваюче відображення. Як зазначено вище $\rho\bigl(\widetilde{\mathcal{D}}(M, X)\bigr) \subset \mathcal{D}(N, Y)$, а тому нам достатньо перевірити, що

$$s\bigl(\mathcal{D}(N, Y)\bigr) \subset \widetilde{\mathcal{D}}(M, X). \tag{2.6}$$

a) Припустимо, що множина Y є лінійно зв'язною. Нехай також $h \in \mathcal{D}(N, Y)$ та $q = s(h) \in \widetilde{\mathcal{D}}^{+}(M)$. Для доведення (2.6) потрібно перевірити, що q нерухомий на X.

Оскільки h нерухомий на Y, то $q(x) \in \{x, \xi(x)\}$ для всіх $x \in X$. За припущенням $h|_X \neq \xi|_X$, тому існує точка $x \in X$, така, що $q(x) \neq \xi(x)$, звідки $q(x) = x$.

Нехай X' – компонента лінійної зв'язності множини X, яка містить x. Тоді $q(X') = X'$ та обмеження $q|_{X'} : X' \to X'$ є єдиним підняттям тотожного відображення $\mathrm{id}_Y : Y \to Y$ для накриваючого відображення $p|_X : X \to Y$, для якого $q(x) = x$. Тоді $q|_X$ є тотожним, тобто q є нерухомим на X'.

Далі, припустимо, що існує інша компонента лінійної зв'язності X'' множини X. Тоді за Лемою 2.3.1 $\xi(X') = X''$ та $\xi(x) \in X''$. Оскільки $q(X') = X'$, то $q(X'') = X''$, а тому $q(\xi(x)) = \xi(x)$. Таким чином, дифеоморфізм q має нерухому точку в X'', а тому він нерухомий також і на X''. Іншими словами, $s(h) = q \in \widetilde{\mathcal{D}}(M, X)$, що доводить (2.6) для випадку, коли множина Y є лінійно зв'язною.

b) Тепер припустимо, що Y не є лінійно зв'язною, і нехай $\{Y_i\}_{i\in\Lambda}$ – множина всіх компонент лінійної зв'язності множини Y, тобто $Y = \bigcup\limits_{i\in\Lambda} Y_i$. Тоді за a)

$$s\bigl(\mathcal{D}(N, Y_i)\bigr) = \widetilde{\mathcal{D}}(M, p^{-1}(Y_i)), \qquad i \in \Lambda.$$

Отже,

$$s\big(\mathcal{D}(N,Y)\big) = s\big(\mathcal{D}(N, \underset{i\in\Lambda}{\cup} Y_i)\big) = s\big(\underset{i\in\Lambda}{\cap} \mathcal{D}(N,Y_i)\big) = \underset{i\in\Lambda}{\cap} s\big(\mathcal{D}(M,Y_i)\big) =$$

$$= \underset{i\in\Lambda}{\cap} \widetilde{\mathcal{D}}(M, p^{-1}(Y_i)\big) = \widetilde{\mathcal{D}}(M, \underset{i\in\Lambda}{\cup} p^{-1}(Y_i)\big) = \widetilde{\mathcal{D}}(M, p^{-1}(Y)\big).$$

Лема доведена. □

Лема 2.3.3. *Нехай* $f : N \to P$ – $\mathcal{C}^\infty$ *відображення,* $g = f \circ p : M \to P$*,*

$$\mathcal{S}(f) := \{h \in \mathcal{D}(N) \mid f \circ h = f\}, \qquad \widetilde{\mathcal{S}}(g) := \{q \in \widetilde{\mathcal{D}}(N) \mid g \circ q = g\}.$$

Мають місце такі твердження.

(а) $\rho(\widetilde{\mathcal{S}}(g)) = \mathcal{S}(f)$ *and* $\rho^{-1}(\mathcal{S}(f)) = \widetilde{\mathcal{S}}(g)$*;*

(б) *Припустимо, що* $\dim N = 2$*,* $f \in \mathcal{F}(N,P)$ *та нехай* Y *–* f*-адаптований підмноговид. Тоді* s *індукує ізоморфізм*

$$s : \mathcal{S}(f,Y) \cong \widetilde{\mathcal{S}}(g, p^{-1}(Y)). \tag{2.7}$$

Доведення. Нехай $q \in \widetilde{\mathcal{D}}(M)$ та $h = \rho(q) \in \mathcal{D}(N)$, тоді

$$q \circ \xi = \xi \circ q, \qquad p \circ q = h \circ p, \qquad g = f \circ p. \tag{2.8}$$

Нам потрібно показати, що $h \in \mathcal{S}(f)$ тоді і тільки тоді, коли $q \in \widetilde{\mathcal{S}}(g)$, тобто потрібно вивести з (2.8) еквівалентність таких рівностей:

$$f \circ h = f, \qquad g \circ q = g.$$

Нехай $x \in M$ та $y = p(x)$. Якщо $g \circ q(x) = g(x)$, то

$$f \circ h(y) = f \circ h \circ p(y) = f \circ p \circ q(x) = g \circ q(x) = g(x) = f \circ p(x) = f(y).$$

Навпаки, якщо $f \circ h(y) = f(y)$, то

$$g \circ q(x) = f \circ p \circ q(x) = f \circ h \circ p(x) = f \circ p(x) = g(x).$$

(б) Позначимо $X = p^{-1}(Y)$. Оскільки X є g-адаптованим підмноговидом, можна легко перевірити, що $\mathcal{S}(g,X) \subset \mathcal{D}^{+}(M)$. Тоді за (а) і Лемою 2.3.2 ρ ін'єктивно відображає $\widetilde{\mathcal{S}}(g,X)$ на $\mathcal{S}(f,Y)$.

Навпаки, з (а) випливає, що $s(\mathcal{S}(f)) \subset \widetilde{\mathcal{S}}(g)$. Тому з твердження (2) Леми 2.3.2 ми отримуємо, що

$$s\big(\mathcal{S}(f,Y)\big) = s\big(\mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}(N,Y)\big) \subset \widetilde{\mathcal{S}}(f) \cap \widetilde{\mathcal{D}}(M,X) = \widetilde{\mathcal{S}}(f,X).$$

Оскільки $\rho \circ s = \mathrm{id}_{\mathcal{D}^{+}(M)}$, то s ізоморфно відображає $\mathcal{S}(f,Y)$ на $\widetilde{\mathcal{S}}(f,X)$. $\square$

2.4 Групи $\Delta(f)$

Для $f \in \mathcal{F}(N,P)$ нехай $\Delta(f)$ – *нормальна* підгрупа стабілізатору $\mathcal{S}(f)$, яка складається з дифеоморфізмів h многовиду N, які мають такі дві властивості:

1) h залишає інваріантним кожний лист відображення f;

2) якщо z є *виродженим локальним екстремумом* відображення f, тому, зокрема, $h(z) = z$, то дотичне відображення $T_z h : T_z N \to T_z N$ є тотожним.

Для замкненої підмножини Y многовиду N визначимо такі три групи:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(N,Y) &= \{h \in \mathcal{D}(N) \mid h \text{ нерухомий на } Y\},\\
\mathcal{D}_{\mathrm{nb}}(N,Y) &= \{h \in \mathcal{D}(N) \mid h \text{ нерухомий на деякому околі } Y\},\\
\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(N,Y) &= \{h \in \mathcal{D}(N,Y) \mid h \text{ ізотопний } \mathrm{id}_N \text{ відносно } Y\}.
\end{aligned}$$

Визначимо також їх перетини з $\Delta(f)$ та $\mathcal{S}(f)$:

$$\begin{aligned}
\Delta(f,Y) &= \Delta(f) \cap \mathcal{D}(N,Y), & \mathcal{S}(f,Y) &= \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}(N,Y),\\
\Delta_{\mathrm{nb}}(f,Y) &= \Delta(f) \cap \mathcal{D}_{\mathrm{nb}}(N,Y), & \mathcal{S}_{\mathrm{nb}}(f,Y) &= \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\mathrm{nb}}(N,Y),\\
\Delta'(f,Y) &= \Delta(f) \cap \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(N,Y), & \mathcal{S}'(f,Y) &= \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(N,Y),\\
\Delta'_{\mathrm{nb}}(f,Y) &= \Delta'(f) \cap \mathcal{D}_{\mathrm{nb}}(N,Y), & \mathcal{S}'_{\mathrm{nb}}(f,Y) &= \mathcal{S}'(f) \cap \mathcal{D}_{\mathrm{nb}}(N,Y),
\end{aligned} \tag{2.9}$$

де множина Y буде виключена з позначень, якщо вона порожня. Наприклад, $\Delta'(f) = \Delta(f) \cap \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M)$. Наступну лему можна довести аналогічно до деведення [27, Lemma 3.4].

Лема 2.4.1. cf. [27, Lemma 3.4]. *Всі групи в* (2.9) *є нормальними підгрупами стабілізатора* $\mathcal{S}(f, Y)$.

Групи $\Delta'(f, Y)$, $\Delta(f, Y)$, $\mathcal{S}'(f, Y)$ *є об'єднаннями компонент лінійної зв'язності стабілізатора* $\mathcal{S}(f, Y)$. *Зокрема,* $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, Y)$ *є тотожною компонентою лінійної зв'язності кожної з цих груп.*

Аналогічно, групи $\Delta'_{\mathrm{nb}}(f, Y)$, $\Delta_{\mathrm{nb}}(f, Y)$ *та* $\mathcal{S}'_{\mathrm{nb}}(f, Y)$ *також є об'єднаннями компонент лінійної зв'язності стабілізатора* $\mathcal{S}_{\mathrm{nb}}(f, Y)$. □

З цього випливає, що $\pi_0\Delta(f, Y)$ можна розглядати як нормальну підгрупу групи $\pi_0\mathcal{S}(f, Y)$. Більш того, якщо f *не має вироджених локальних екстремумів*, то відповідна фактор група

$$\mathbf{G}(f, Y) := \frac{\mathcal{S}(f, Y)}{\Delta(f, Y)} = \frac{\mathcal{S}(f, Y)}{\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, Y)} \Big/ \frac{\Delta(f, Y)}{\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, Y)} = \frac{\pi_0\mathcal{S}(f, Y)}{\pi_0\Delta(f, Y)}$$

може бути інтерпретована як група автоморфізмів графа Кронрода-Ріба відображення f, індукована дифеоморфізмами з $\mathcal{S}(f, Y)$, див. наприклад [8], [32], [1], [23]. Якщо f має вироджені локальні екстремуми, то має місце подібна інтерпретація групи $\mathbf{G}(f, Y)$, але до графа Кронрода-Ріба відображення f потрібно приклеїти додаткові ребра до кожної вершини, яка відповідає кожному виродженому локальному екстремуму, див. деталі у [23]. Аналогічно, можна визначити

$$\mathbf{G}'(f, Y) = \frac{\pi_0\mathcal{S}'(f, Y)}{\pi_0\Delta'(f, Y)}, \qquad \mathbf{G}_{\mathrm{nb}}(f, Y) = \frac{\pi_0\mathcal{S}_{\mathrm{nb}}(f, Y)}{\pi_0\Delta_{\mathrm{nb}}(f, Y)},$$

$$\mathbf{G}'_{\mathrm{nb}}(f, Y) = \frac{\pi_0\mathcal{S}'_{\mathrm{nb}}(f, Y)}{\pi_0\Delta'_{\mathrm{nb}}(f, Y)}.$$

Наша мета – довести наступне твердженння, яке продовжує [27, Corollary 7.2] на неорієнтований випадок, та вивести з нього деякі корисні результати.

Теорема 2.4.2. cf. [19, Corollary 6.1], [27, Corollary 7.2]. *Нехай N – компактна поверхня, $f \in \mathcal{F}(N,P)$, $Y \subset N$ – компактний f-адаптований підмноговид та U_Y – f-регулярний окіл цього підмноговиду Y. Тоді такі включення є гомотопічними еквівалентностями:*

$$\mathcal{S}(f,U_Y) \ \subset\ \mathcal{S}_{\mathrm{nb}}(f,Y) \ \subset\ \mathcal{S}(f,Y), \tag{2.10}$$

$$\mathcal{S}'(f,U_Y) \ \subset\ \mathcal{S}'_{\mathrm{nb}}(f,Y) \ \subset\ \mathcal{S}'(f,Y), \tag{2.11}$$

$$\Delta(f,U_Y) \ \subset\ \Delta_{\mathrm{nb}}(f,Y) \ \subset\ \Delta(f,Y), \tag{2.12}$$

$$\Delta'(f,U_Y) \ \subset\ \Delta'_{\mathrm{nb}}(f,Y) \ \subset\ \Delta'(f,Y). \tag{2.13}$$

Доведення. Випадок, коли N – орієнтовна, доведений у [27]. Тому наша мета – продовжити доведення для випадку, коли N – неорієнтовна. Насправді це доведення – адаптація [27, Lemma 7.1], схожої на [19, Lemma 4.14], і тому ми лише вкажемо принципові аргументи.

Також відмітимо, що аналогічно до [27, Corollary 7.2] достатньо довести, що включення (2.10) є гомотопними еквівалентностями, тому вони індукують бієкції між компонентами лінійної зв'язності відповідних груп та включення відповідних компонент лінійної зв'язності є гомотопічними еквівалентностями.

Дійсно, помітимо, що групи в (2.11) є перетинами відповідних груп з (2.10) із компонентою $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(N)$ більшої групи $\mathcal{D}(N)$. Якщо компонента лінійної зв'язності $\mathcal{K}$ довільної групи в (2.11) перетинає $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(N)$, то $\mathcal{K}$ міститься в $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(N)$. Тоді включення (2.11) задають бієкції між компонентами лінійної зв'язності відповідних груп та згідно з (2.10) включення компонент лінійної зв'язності є гомотопічними еквівалентностями.

Доведення того, що (2.12) та (2.13) є гомотопічними еквівалентностями, аналогічні.

Отже, припустимо, що N – неорієнтовна зв'язна компактна поверхня. Розглянемо її орієнтоване дволисне накриття $p\colon M \to N$, та нехай $\xi\colon M \to M$ –

відповідний $\mathcal{C}^{\infty}$ дифеоморфізм без нерухомих точок, який породжує групу $\mathbb{Z}_2$ накриваючих перетворень, тобто $\xi^2 = \mathrm{id}_M$ та $p \circ \xi = p$.

Позначимо $g = f \circ p : M \to P$, $X = p^{-1}(Y)$ та $U_X = p^{-1}(U_Y)$. Тоді $g \in \mathcal{F}(M, P)$, $Y \subset N$ – компактний g-адаптований підмноговид поверхні M та U_X – g-регулярний окіл множини X.

Зафіксуємо гамільтоноводібне векторне поле F для g на M та нехай $\mathbf{F} : M \times \mathbb{R} \to M$ – потік, породжений F.

Нехай $\xi^* F = T\xi^{-1} \circ F \circ \xi : M \to TM$ – векторне поле на M, індуковане ξ з F. Тоді можна завжди вважати, див. [19, Lemma 5.1 (2)], що F є також *кососиметричним* відносно ξ у тому сенсі, що $\xi^* F = -F$, звідки

$$\xi \circ \mathbf{F}_t = \mathbf{F}_{-t} \circ \xi \tag{2.14}$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$. Дійсно, достатньо замінити F на $\frac{1}{2}(F + \xi^* F)$ і відповідно змінити його біля критичних точок відображення f для того, щоб зберегти властивість (в) Означення 1.7.1.

Лема 2.4.3. cf. [19, Lemma 4.14], [27, Lemma 7.1]. *Нехай $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}(g)$ – підмножина та $\gamma \colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}^{\infty}(X, \mathbb{R})$ – неперервне відображення, таке, що*

$$q(x) = \mathbf{F}(x, \gamma(q)(x)) \tag{2.15}$$

для всіх $q \in \mathcal{A}$ та $x \in X$. Тоді для довільної пари $U \subset V$ g-регулярних околів множини X, таких, що $\overline{U} \subset \mathrm{Int}V$, існує неперервне відображення $\beta \colon \mathcal{A} \to \Theta(F) \subset \mathcal{C}^{\infty}(M, \mathbb{R})$, див. (1.2), яке задовольняє такі умови.

(1) *Для кожного $q \in \mathcal{A}$ функція $\beta(q)$ продовжує $\gamma(q)$ на все M, задовольняє рівність (2.15) на U та нульова на $\overline{M \setminus V}$, тобто*

- *$\beta(q) = \gamma(q)$ на X,*
- *$q(x) = \mathbf{F}(x, \beta(q)(x))$ для всіх $x \in U$,*

- $\beta(q) = 0$ *на* $\overline{M \setminus V}$.

(2) *Якщо* $\gamma(q) = 0$ *та* q *– нерухомий на деякому* g*-регулярному околі* $U' \subset U$, *то* $\beta(q) \equiv 0$ *на* U'.

(3) *Гомотопія* $H\colon \mathcal{A} \times I \to \mathcal{S}(g)$, *визначена формулою*

$$H(q, t) = (\mathbf{F}_{t\beta(q)})^{-1} \circ q,$$

має такі властивості:

(a) $H_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ *та* $H_1(\mathcal{A}) \subset \mathcal{S}(g, U)$, *тому вона деформує* $\mathcal{A}$ *в* $\mathcal{S}(g)$ *у* $\mathcal{S}(g, U)$;

(б) *якщо* $\gamma(q) \equiv 0$ *та* q *– нерухомий на деякому* g*-регулярному околі* $U' \subset U$, *то* $H_t(q)$ *також нерухомий на* U' *для всіх* $t \in [0, 1]$.

Припустимо додатково, що F *є кососиметричним, тобто* $\xi^* F = -F$, *та виконується одна з таких умов:*

(i) *кожна компонента зв'язності множини* X *містить критичну точку відображення* g, *яка не є* ***невиродженим локальним екстремумом****;*

(ii) $\gamma(q) \equiv 0$ *для всіх* $q \in \mathcal{A} \cap \widetilde{\mathcal{S}}(g)$.

Тоді можна вважати, що

(4) $\beta(q) \circ \xi = -\beta(q)$ *для кожного* $q \in \mathcal{A} \cap \widetilde{\mathcal{S}}(g)$;

(5) $H\big((\mathcal{A} \cap \widetilde{\mathcal{S}}(g)) \times I\big) \subset \widetilde{\mathcal{S}}(g)$, *тобто множина* ξ*-симетричних дифеоморфізмів залишається інваріантною відносно гомотопії* H.

Доведення. Твердження (1)-(3) становлять [27, Lemma 7.1]. Тому нам потрібно перевірити твердження (4) та (5), пов'язані з кососиметричними дифеоморфізмами.

Коротко наведемо ідею доведення. Оскільки U_X – g-регулярний окіл множини X, для кожного $q \in \mathcal{A}$ функція $\gamma(q)\colon X \to \mathbb{R}$ єдиним чином продовжується до $\mathcal{C}^\infty$ функції $\widetilde{\gamma}(q)\colon V \to \mathbb{R}$, такої, що (2.15) виконується на V, тобто $q(x) = \mathbf{F}(x, \widetilde{\gamma}(q)(x))$ для всіх $x \in V$. Більш того, відповідність $q \to \widetilde{\gamma}(q)$ є неперервним відображенням $\widetilde{\gamma}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$.

Зафіксуємо $\mathcal{C}^\infty$ функцію $\mu\colon M \to [0,1]$ з такими властивостями:

- $\mu = 0$ на деякому околі замикання $\overline{M \setminus V}$;
- $\mu = 1$ на деякому околі замикання $\overline{U}$;
- $F(\mu) = 0$, тобто μ приймає постійні значення вздовж орбіт поля F.

Тоді шукане відображення $\beta\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ можна визначити формулою

$$\beta(q)(x) = \begin{cases} \widetilde{\gamma}(q)(x) \cdot \mu(x), & \text{для } x \in V, \\ 0, & \text{для } x \in M \setminus V. \end{cases} \tag{2.16}$$

Припустимо тепер, що F є кососиметричним відносно ξ. Нижче ми покажемо, що у цьому випадку

$$-\widetilde{\gamma}(q) \circ \xi = \widetilde{\gamma}(q), \tag{2.17}$$

для всіх $q \in \mathcal{A} \cap \widetilde{\mathcal{S}}(g)$.

Вважаючи, що (2.17) виконується, завершимо доведення Леми 2.4.3. Оскільки U та V є інваріантними відносно ξ та ξ відображає орбіти поля F на орбіти, можна замінити функцію μ на $\frac{1}{2}(\mu + \mu \circ \xi)$, не порушуючи вказані вище умови на μ, а отже додатково вважаємо, що

$$\mu \circ \xi = \mu. \tag{2.18}$$

Якщо тепер ми визначимо β тією ж самою формулою (2.16), то умови (4) та (5) будуть виконуватись.

(4) Якщо $q \in \mathcal{A} \cap \widetilde{\mathcal{S}}(g)$ та $x \in V$, то

$$\beta(q) \circ \xi(x) = \widetilde{\gamma}(q) \circ \xi(x) \cdot \mu \circ \xi(x) \overset{(2.17),(2.18)}{=\!=\!=} -\widetilde{\gamma}(q)(x) \cdot \mu(x) = -\beta(q)(x).$$

З іншої сторони, якщо $x \in M \setminus V$, то $\xi(x) \in M \setminus V$, а тому

$$\beta(q)(x) = \beta(q) \circ \xi(x) = 0.$$

(5) Відмітимо, що для кожного $q \in \mathcal{A} \cap \widetilde{\mathcal{S}}(g)$ та $t \in [0,1]$ маємо, що

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{t\beta(q)} \circ \xi(x) = \mathbf{F}_{t\beta(q)\circ\xi(x)}(\xi(x)) \overset{(2.14)}{=\!=} \xi \circ \mathbf{F}_{-t\beta(q)\circ\xi(x)}(x) \overset{(4)}{=\!=} \\ = \xi \circ \mathbf{F}_{t\beta(q)(x)}(x) = \xi \circ \mathbf{F}_{t\beta(q)}(x).\end{aligned}$$

Це означає, що відображення $\mathbf{F}_{t\beta(q)}$ належить $\widetilde{\mathcal{S}}(g)$, звідки

$$H(q,t) = (\mathbf{F}_{t\beta(q)})^{-1} \circ q \in \widetilde{\mathcal{S}}(g).$$

Отже, залишається довести (2.17). Нехай $q \in \mathcal{A} \cap \widetilde{\mathcal{S}}(g)$, а тому

$$q \circ \xi = \xi \circ q, \qquad q(x) = \mathbf{F}(x, \widetilde{\gamma}(q)(x))$$

для всіх $x \in V$. Тоді

$$\begin{aligned} &q \circ \xi(x) = \mathbf{F}\big(\xi(x), \widetilde{\gamma}(q) \circ \xi(x)\big) = \mathbf{F}_{\widetilde{\gamma}(q)\circ\xi(x)} \circ \xi(x) \overset{(2.14)}{=\!=\!=} \xi \circ \mathbf{F}_{-\widetilde{\gamma}(q)\circ\xi(x)}(x). \\ &\xi \circ q(x) = \xi \circ \mathbf{F}\big(x, \widetilde{\gamma}(q)(x)\big) = \xi \circ \mathbf{F}_{\widetilde{\gamma}(q)(x)}(x).\end{aligned}$$

Таким чином

$$\mathbf{F}_{-\widetilde{\gamma}(q)\circ\xi(x)}(x) = \mathbf{F}_{\widetilde{\gamma}(q)(x)}(x) = q(x)$$

для всіх $x \in V$. Іншими словами, $-\widetilde{\gamma}(q) \circ \xi$ та $\widetilde{\gamma}(q)$ є функціями зсуву для q на V.

(i) Припустимо, що кожна компонента зв'язності Y множини X містить вироджений локальний екстремум або сідлову критичну точку відображення g. Тоді відображення зсуву на V_Y є ін'єктивним, тобто довільні дві функції зсуву для q на V_Y мають співпадати. Таким чином, $-\widetilde{\gamma}(q)\circ\xi$ та $\widetilde{\gamma}(q)$ співпадають на всьому V.

(ii) Якщо $\gamma(q) \equiv 0$ на всій множині X, то $\gamma(q) = -\gamma(q)\circ\xi = 0$ на X, бо $\xi(X) = X$. Більш того, оскільки V є g-регулярним околом множини X, то X перетинає внутрішності всіх компонент зв'язності околу V. Тоді з [27, Lemma 6.1(ii)] випливає, що $-\widetilde{\gamma}(q)\circ\xi$ та $\widetilde{\gamma}(q)$ співпадають на всьому V. Лема 2.4.3 доведена. □

Тепер ми можемо довести, що включення (2.10) є гомотопічними еквівалентностями. Згідно з лемою 2.3.3(б), можна визначати групи з (2.10) за їх «симетричними» аналогами, і тому достатньо показати, що наступні включення є гомотопічними еквівалентностями:

$$\widetilde{\mathcal{S}}(g, U_X) \ \subset\ \widetilde{\mathcal{S}}_{\mathrm{nb}}(g, X) \ \subset\ \widetilde{\mathcal{S}}(g, X). \tag{2.19}$$

Нехай V – довільний g-регулярний окіл околу U_X, $\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{S}}(g, X)$, і $\gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ – постійне відображення у нульову функцію. Тоді для кожного $x \in X$ і $q \in \mathcal{A}$ маємо

$$\mathbf{F}(x, \gamma(q)(x)) = \mathbf{F}(x, 0) = x = q(x).$$

Таким чином, за лемою 2.4.3(5) існує гомотопія $H : \mathcal{A}\times I \to \mathcal{S}(g)$, для якої

- $H_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ і $H_1(\mathcal{A}) \subset \widetilde{\mathcal{S}}(g, V)$;
- якщо $q \in \mathcal{A}$ нерухома на деякому g-регулярному околі множини X, який містить U_X, то такою самою є і $H_t(q)$ для всіх $t \in [0, 1]$;

Іншими словами, H є деформацією $\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{S}}(g, X)$ в $\widetilde{\mathcal{S}}(g, V)$, яка залишає інваріантними множини $\widetilde{\mathcal{S}}(g, U_X)$ і $\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathrm{nb}}(g, X)$. Тому включення (2.19) і, отже, (2.10) є гомотопічними еквівалентностями. □

Спрощення дифеоморфізмів, що зберігають функцію за допомогою ізотопій.

Нехай N – неорієнтовна компактна зв'язна поверхня, $p : M \to N$ – орієнтовне дволисне накриття, і $\xi : M \to M$ – інволюція без нерухомих точок, що породжує групу $\mathbb{Z}_2$ накриваючих перетворень. Нехай також $f \in \mathcal{F}(N, P)$ і $g = f \circ p \in \mathcal{F}(M, P)$. Оскільки M орієнтовна, можна побудувати кососиметричний гамільтоновоподібний потік $\mathbf{F}$ на M для g.

Нехай $Y \subset N$ – зв'язна f-адаптована підповерхня і $W \subset N$ є f-адаптованим підмноговидом. Прзначимо $X = p^{-1}(Y)$ і $V = p^{-1}(W)$.

Нехай також $\mathcal{S}(g, V; X)$ є підмножиною $\mathcal{S}(g, V)$, що складається з дифеоморфізмів q, для яких існує функція $\alpha_q \in \mathcal{C}^\infty : X \to \mathbb{R}$ із наступними властивостями:

1. $q(x) = \mathbf{F}(x, \alpha_q(x))$ для всіх $x \in X$;

2. $\alpha_q = 0$ на $X \cap V$.

Позначимо

$$\widetilde{\mathcal{S}}(g, V; X) := \mathcal{S}(g, V; X) \cap \widetilde{\mathcal{D}}(M).$$

Очевидно, ми маємо таке включення:

$$\widetilde{\mathcal{S}}(g, V \cup X) \ \subset \ \widetilde{\mathcal{S}}(g, V; X), \tag{2.20}$$

оскільки для кожного $q \in \widetilde{\mathcal{S}}(g, V \cup X)$ можна покласти $\alpha_q \equiv 0$ на X.

Використовуючи ізоморфізм s з (2.7), покладемо

$$\mathcal{S}(f, W; Y) := s^{-1}\big(\widetilde{\mathcal{S}}(g, V; X)\big), \qquad \Delta(f, W; Y) := \Delta(f) \cap \mathcal{S}(f, W; Y).$$

Тоді ми, очевидно, маємо такі включення:

$$\Delta(f, W \cup Y) \subset \Delta(f, W; Y), \qquad \mathcal{S}(f, W \cup Y) \subset \mathcal{S}(f, W; Y) \tag{2.21}$$

Наслідок 2.4.4. cf. [27, Corollary 7.3]. *Нехай N є компактною поверхнею (орієнтовною чи ні), $f \in \mathcal{F}(N, P)$, W є f-адаптованим підмноговидом і Y – зв'язна f-адаптована підповерхня, яка містить щонайменше одну сідлову критичну точку відображення f. Тоді включення (2.21) є гомотопічними еквівалентностями.*

Доведення. Оскільки $\Delta(f)$ містить компоненти лінійної зв'язності стабілізатора $\mathcal{S}(f)$, то достатньо показати, що друге включення є гомотопічною еквівалентністю.

У випадку орієнтовної поверхні N дане твердження співпадає з [27, Corollary 7.3]. Коротко нагадаємо основні етапи його доведення. Оскільки Y є зв'язкою та містить сідлові критичні точки відображення f, можна показати, що для будь-якого $h \in \mathcal{S}(f, W; Y)$ існує єдина функція α_h, а відповідність $h \mapsto \alpha_h$ є неперервним відображенням $\gamma : \mathcal{S}(f, W; Y) \to \mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{R})$. Тоді існування деформації стабілізатора $\mathcal{S}(f, W; Y)$ у $\mathcal{S}(f, W \cup Y)$ гарантується лемою [27, Lemma 7.1], так само, як і лемою 2.4.3.

Припустимо, що N є неорієнтовною. Нехай $p : M \to N$ – орієнтовне дволисне накриття і $\xi : M \to M$ – інволюція без нерухомих точок, яка породжує групу $\mathbb{Z}_2$ накриваючих перетворень, $g = f \circ p \in \mathcal{F}(M, P)$, і F – кососиметричне гамільтоновоподібне векторне поле для g на M. Позначимо $X = p^{-1}(Y)$ і $V = p^{-1}(W)$. Тоді, згідно з випадком орієнтовності, включеня $\mathcal{S}(g, V \cup X) \subset \mathcal{S}(g, V; X)$ є гомотопічною еквівалентністю. Більш того, за (i) і (ii) Леми 2.4.3, деформація стабілізаотра $\mathcal{S}(g, V; X)$ у $\mathcal{S}(g, V \cup X)$ зберігає ξ-симетричні дифеоморфізми, що означає, що включення $\widetilde{\mathcal{S}}(g, V \cup X) \subset \widetilde{\mathcal{S}}(g, V; X)$ також є гомотопічною еквівалентністю.

Нарешті, маємо ізоморфізми топологічних груп (2.7):

$$s : \mathcal{S}(f, W \cup Y) \to \widetilde{\mathcal{S}}(g, V \cup X), \qquad s : \mathcal{S}(f, W; Y) \to \widetilde{\mathcal{S}}(g, V; X),$$

звідки включення $\mathcal{S}(f, W \cup Y) \subset \mathcal{S}(f, W; Y)$ також є гомотопічною еквівалентністю. $\square$

2.5 Функції на циліндрі

Лема 2.5.1. *Нехай $A = S^1 \times [0,1]$ та $f \in \mathcal{F}(A, P)$. Тоді ми маємо таку комутативну діаграму*

$$\begin{tikzcd}
\pi_0\Delta(f,\partial A) \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "\cong"'] & \pi_0\mathcal{S}(f,\partial A) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\cong"', "\psi"] & \mathbf{G}(f,\partial A) \arrow[d, "\cong"'] \\
\mathbb{Z} \times \pi_0\Delta'(f,\partial A) \arrow[r, hook, "\mathrm{id}_{\mathbb{Z}} \times j"] & \mathbb{Z} \times \pi_0\mathcal{S}'(f,\partial A) \arrow[r, two heads] & \mathbf{G}'(f,\partial A),
\end{tikzcd} \tag{2.22}$$

в якій j індукований включенням $\Delta(f, \partial A) \subset \mathcal{S}(f, \partial A)$, рядки є точними та вертикальні стрілки є ізоморфізмами.

Доведення. Нехай U – деякий f-регулярний окіл межі ∂A. Тоді можна побудувати скручування Дена $\tau : A \to A$ вздовж $S^1 \times 0$ з носієм в U, яке зберігає f, тобто $\tau \in \mathcal{S}(f, \partial A)$, див. наприклад [19, §6].

Добре відомо, що група класів відображень $\pi_0\mathcal{D}(A, \partial A)$ вільно породжується класом ізотопій τ, тому маємо наступний ланцюжок гомоморфізмів

$$\alpha\colon \mathcal{D}(A, \partial A) \longrightarrow \frac{\mathcal{D}(A, \partial A)}{\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(A, \partial A)} \equiv \pi_0\mathcal{D}(A, \partial A) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z},$$

де перша стрілка є природним гомоморфізмом у групу класів відображень циліндра A відносно ∂A, який кожному дифеоморфізму $h \in \mathcal{D}(A, \partial A)$ ставить у відповідність його клас ізотопій, а остання стрілка є ізоморфізмом. Можна також вважати, що $q(\tau) = 1$. Звідси обмеження α на $\mathcal{S}(f, \partial A)$:

$$\beta = \alpha|_{\mathcal{S}(f,\partial A)} : \mathcal{S}(f, \partial A) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$$

є сюр'єктивним. Більш того,

$$\ker(\beta) = \mathcal{S}(f, \partial A) \cap \ker(\alpha) = \mathcal{S}(f, \partial A) \cap \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(A, \partial A) =: \mathcal{S}'(f, \partial A).$$

Тоді ми маємо таку коротку точну послідовність:

$$\mathcal{S}'(f,\partial A) \twoheadrightarrow \mathcal{S}(f,\partial A) \xhookrightarrow{\beta} \mathbb{Z}, \tag{2.23}$$

і для β існує обернений справа $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathcal{S}(f,\partial A)$, визначений за формулою $\sigma(k) = \tau^k$, тобто $\beta \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$.

Згідно з (2.10) існує ізоморфізм, індукований природним включенням:

$$\pi_0\mathcal{S}'(f,U) \cong \pi_0\mathcal{S}'(f,\partial A),$$

звідки (2.23) зводиться до наступної точної полідовності:

$$\pi_0\mathcal{S}'(f,U) \hookrightarrow \pi_0\mathcal{S}(f,\partial A) \xrightarrow{\hat{\beta}} \mathbb{Z},$$

де для $\hat{\beta}$ існує правий обернений $\hat{\sigma} : \mathbb{Z} \to \pi_0\mathcal{S}(f,\partial A)$, який задається формулою $\hat{\sigma}(k) = [\tau]^k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Оскільки τ має носій в U, легко бачити, що τ комутує з кожним $h \in \mathcal{S}'(f,U)$. Тоді підгрупи $\pi_0\mathcal{S}'(f,U)$ і $\langle[\tau]\rangle \cong \mathbb{Z}$ взаємно комутують і породжують всю групу $\pi_0\mathcal{S}(f,\partial A)$. Отже, ізоморфізм (2.22) можна визначити за формулою

$$\psi([h]) = \bigl(\beta(h), [h \circ \tau^{-\beta(h)}]\bigr),$$

для $h \in \mathcal{S}(f,\partial A)$.

Розглядаючи $\pi_0\Delta(f,\partial A)$ як підгрупу $\pi_0\mathcal{S}(f,\partial A)$, можна легко перевірити, що ψ відображає $\pi_0\Delta(f,\partial A)$ у $\mathbb{Z} \times \pi_0\mathcal{S}'(f,\partial A)$, звідки ліва і права вертикальні стрілки у (2.22) є ізоморфізмами. □

2.6 Доведення Теореми 2.1.3

За Теоремою 2.1.2 існує єдиний критичний лист K відображення f, такий, що якщо W – f-регулярний окіл листа K та $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ – всі компоненти зв'язності замикання $\overline{B \setminus W}$, занумеровані так, що $\partial B \subset Y_0$, то Y_0 є циліндром $S^1 \times [0,1]$ та кожна Y_k, $k = 1, \ldots, n$, є 2-диском, див. рисунок 2.6.0.1.

Також існує природна дія стабілізатора $\mathcal{S}(f,\partial B)$ на $\hat{\mathbf{Y}} = \{Y_1, \ldots, Y_n\} \times \{\pm 1\}$.

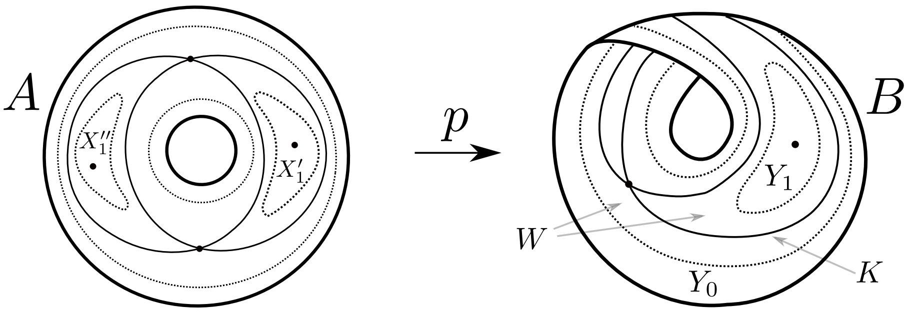


Рис. 2.6.0.1

Доведення того, що $\mathcal{S}(f, \partial B)/Q_f$ вільно діє на $\hat{\mathbf{Y}}$.

Заклеїмо межу ∂B 2-диском і позначимо отриману поверхню (яка є проективною площиною) через $\hat{B}$. Нехай також $\hat{Y}_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, є зв'язними компонентами $\hat{B} \setminus K$, які містять Y_i відповідно. Таким чином маємо CW-розбиття Ξ поверхні $\hat{B}$, 0-клітини якого є критичними точками відображення f, які належать до K, 1-клітини є зв'язними компонентами доповнення $K \setminus \Sigma_f$, а 2-клітинами є $\{\hat{Y}_i\}_{i=0,\ldots,n}$.

Зазначимо, що всі $h \in \mathcal{S}(f, \partial B)$ продовжуються до єдиного *гомеоморфізму* $\hat{h}$ поверхні $\hat{B}$, нерухомого на $\hat{B} \setminus B$. Більш того, оскільки $h(K) = K$, також маємо, що $\hat{h}$ є Ξ-клітинним, тобто він індукує перестановку клітин з Ξ.

Припустимо, що $\hat{h}(e) = e$ для деякої клітини e із Ξ. Якщо виконується одна з умов:

- $\dim e = 0$ або
- $\dim e = 1, 2$ і $\hat{h}$ зберігає її орієнтацію,

то ми будемо казати, що e є $\hat{h}^+$-*інваріантною*. Зокрема, $\hat{h}$ має $\hat{h}^+$-інваріантну клітину $\hat{Y}_0$.

Оскільки $\hat{h}$ також є ізотопним до $\mathrm{id}_{\hat{B}}$, його число Лефшеця $L(\hat{h}) = \chi(\hat{B}) = 1$. Тоді із [22, Corollary 5.6] випливає, що

(a) або кількість $\hat{h}^+$-інваріантних клітин розбиття Ξ співпадає з $\chi(\hat{B}) = 1$, (б) всі клітини розбиття Ξ є $\hat{h}^+$-інваріантними.

Припустимо, що $h(Y_i,+) = (Y_i,+)$ для деякого $i \in \{1,\dots,n\}$. Тоді $\hat{Y}_i$ є $\hat{h}^+$-інваріантною, а отже $\hat{h}$ має щонайменше дві $\hat{h}^+$-інваріантні клітини: Y_0 і Y_i. Оскільки $2 > 1 = L(\hat{h})$, з (б) ми отримуємо, що всі клітини розбиття Ξ є $\hat{h}^+$-інваріантними, звідки випливає $h(Y_j,+) = (Y_j,+)$ для всіх інших $j \in \{1,\dots,n\}$. Це означає, що дія факторгрупи $\mathcal{S}(f,\partial B)/Q_f$ на $\hat{\mathbf{Y}}$ є вільною.

Залишилося побудувати ізоморфізм (2.1)

$$\pi_0 Q_f \;\cong\; \mathbb{Z}\times\prod_{i=0}^{n}\mathcal{P}_f(Y_i).$$

Для доведення нам знадобляться наступні дві леми.

Лема 2.6.1. $Q_f = \mathcal{S}(f,\partial B; W)$.

Доведення. Нехай $h \in \mathcal{S}(f,\partial B;W)$. Тоді за Наслідком 2.4.4, h є ізотопним у $\mathcal{S}(f,\partial B;W)$ до деякого дифеоморфізма $h' \in \mathcal{S}(f,\partial B\cup W)$. Отже, h і h' діють на $\hat{\mathbf{Y}}$ однаком чином. Але h' є нерухомим на W, а отже і на ∂Y_i для всіх $i=1,\dots,k$. Звідси h' залишає інваріантними кожну Y_i і зберігає її орієнтацію, тобто $h'\in Q_f$. Отже, так само діє h, а тому і $h\in Q_f$, тобто $\mathcal{S}(f,\partial B;W)\subset Q_f$.

Навпаки, нехай $h \in Q_f$, $p : A \to B$ є орієнтовним дволисним накриттям поверхні B, і $q = s(h) \in \widetilde{\mathcal{S}}(g,\partial A)$ є єдиним підняттям h, нерухомим на ∂A. Тоді для кожного $i = 1,\dots,n$ прообраз $p^{-1}(Y_i)$ скдадається з двох компонент зв'язності X_i' і X_i'', див. Рисунок 2.6.0.1. Припущення, що $h(Y_i) = Y_i$ і h зберігає орієнтацію клітини Y_i призводить до того, що q залишає інваріантними обидві X_i' і X_i'' і зберігає їх орієнтацію. Отже, за [27, Lemma 7.4], для q існує єдина функція зсуву $\alpha_q : p^{-1}(W)\to\mathbb{R}$. Іншими словами, $q\in\widetilde{\mathcal{S}}(g,\partial A;p^{-1}(W))$, звідки за означенням $h = s^{-1}(q) = \rho(q) \in \mathcal{S}(f,\partial B;W)$. $\square$

Лема 2.6.2. *Має місце наступна комутативна діаграма:*

$$\begin{tikzcd}
\pi_0\Delta(f,\partial B;W) \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "\cong"] & \pi_0\mathcal{S}(f,\partial B;W) \arrow[d, "\cong"', "\psi"] \\
\mathbb{Z}\times\prod\limits_{i=0}^{n}\pi_0\Delta'(f|_{Y_i},\partial Y_i) \arrow[r, hook, "\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}\times j_0\times\cdots\times j_n"] & \mathbb{Z}\times\prod\limits_{i=0}^{n}\pi_0\mathcal{S}'(f|_{Y_i},\partial Y_i)
\end{tikzcd}$$

де $j, j_0, \dots, j_n$ *індуковані природним включенням, а вертикальні стрілки є ізоморфізмами. Зокрема, ми отримуємо ізоморфізм* (2.1)*:*

$$\pi_0 Q_f \cong \pi_0\mathcal{S}(f,\partial B;W) \cong \mathbb{Z}\times\prod_{i=0}^{n}\pi_0\mathcal{S}'(f|_{Y_i},\partial Y_i) = \mathbb{Z}\times\prod_{i=0}^{n}\mathcal{P}_f(Y_i).$$

Доведення. Оскільки j є мономорфізмом, достатньо побудувати ізоморфізм ψ, який індукує ліву вертикальну стрілку. За Теоремою 2.4.2 і Наслідком 2.4.4 наступні включення є гомотопічними еквівалентностями:

$$\mathcal{S}_{\mathrm{nb}}(f,\partial B\cup W) \ \subset\ \mathcal{S}(f,\partial B\cup W) \ \subset\ \mathcal{S}(f,\partial B;W),$$

звідки достатньо обчислити групу $\pi_0\mathcal{S}_{\mathrm{nb}}(f,\partial B\cup W)$. Зазначимо, що існує природний ізоморфізм

$$\alpha : \mathcal{S}_{\mathrm{nb}}(f,\partial B\cup W) \ \to\ \prod_{i=0}^{n}\mathcal{S}_{\mathrm{nb}}(f|_{Y_i},\,\partial Y_i), \qquad \alpha(h) = \bigl(h|_{Y_0},\dots,h|_{Y_n}\bigr),$$

який індукує ізоморфізм відповідних π_0-груп:

$$\pi_0\mathcal{S}_{\mathrm{nb}}(f,\partial B\cup W) \cong \prod_{i=0}^{n}\pi_0\mathcal{S}_{\mathrm{nb}}(f|_{Y_i},\,\partial Y_i).$$

Оскільки Y_0 є циліндром, з Леми 2.5.1 маємо:

$$\pi_0\mathcal{S}_{\mathrm{nb}}(f|_{Y_0},\,\partial Y_0) \ \cong\ \mathbb{Z}\times\pi_0\mathcal{S}'_{\mathrm{nb}}(f|_{Y_0},\,\partial Y_0).$$

Більш того, $\mathcal{S}_{\mathrm{nb}}(f|_{Y_i},\,\partial Y_i) = \mathcal{S}'_{\mathrm{nb}}(f|_{Y_i},\,\partial Y_i)$, $i = 1,\dots,n$, для всіх інших 2-дисків Y_i, звідки отримуємо необхідний ізоморфізм ψ:

$$\psi : \pi_0\mathcal{S}_{\mathrm{nb}}(f|_{Y_i},\,\partial Y_i) = \pi_0\mathcal{S}'_{\mathrm{nb}}(f|_{Y_i},\,\partial Y_i) \cong \pi_0\mathcal{S}'(f|_{Y_i},\,\partial Y_i).$$

Неважко показати, що ψ відображає $\pi_0\Delta(f, \partial B; W)$ (яка розглядається як підгрупа $\pi_0\mathcal{S}(f, \partial B; W)$) на $\mathbb{Z} \times \prod\limits_{i=0}^{n} \pi_0\Delta'(f|_{Y_i}, \partial Y_i)$. $\square$

Теорему 2.1.3 доведено.

2.7 Висновки

В цьому розділі показано, що відображення $f \in \mathcal{F}(B, P)$ зі стрічки Мебіуса B у коло або пряму P завжди має єдину критичну компоненту зв'язності K деякої множини рівня, таку, що K є інваріантною відносно $\mathcal{S}(f, \partial B)$, а доповнення $B \setminus N_K$ до деякого відкритого околу N_K компоненти K є об'єднанням замкнених 2-дисків $X_1, \dots, X_n$ та одного циліндра, що містить ∂B.

Більш того, за умови, що $\mathcal{S}(f, \partial B)$ залишає інваріантним також кожен диск X_i, обчислено групу $\pi_0\mathcal{S}(f, \partial B)$ класів ізотопії дифеоморфізмів з $\mathcal{S}(f, \partial B)$.

Разом з попередніми результатами цей результат дозволяє обчислити аналогічні групи $\pi_0\mathcal{S}(f, \partial N)$ для функцій $f \in \mathcal{F}(N, P)$ на довільних компактних неорієнтовних поверхнях N, відмінних від проективної площини і пляшки Клейна.

Розділ 3. Гомеоморфізми поверхонь, які змінюють орієнтацію

3.1 Властивість «жорсткості»

Цей розділ описує певні *пошарові* та *гомотопічні* аналоги властивості «жорсткості» для змінюючих орієнтацію лінійних рухів площини, яка стверджує, що *кожен такий рух має порядок* 2. Хоча мотивацією було вивчення деформацій гладких функцій на поверхнях (і ми доводимо відповідні твердження), отримані результати є цікавими і незалежно.

Нехай $\mathbb{D}_n = \{r, s \mid r^n = s^2 = 1, rs = sr^{-1}\}$ – *діедральна* група, тобто група симетрій правильного n-кутника. Тоді кожний "змінюючий орієнтацію" елемент записується як $r^k s$ для деякого k та має порядок 2:

$$(r^k s)^2 = r^k s r^k s = r^k r^{-k} s s = 1.$$

Більш загально, нехай $SO^-(2) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{smallmatrix}\right) \mid t \in [0; 2\pi) \right\}$ є *множиною* змінюючих орієнтацію ортогональних відображень площини $\mathbb{R}^2$, тобто клас суміжності групи $O(2)/SO(2)$, відмінний від $SO(2)$. Тоді знову можна легко перевірити, що кожен елемент з $SO^-(2)$ має порядок 2.

Інший аналог цього ефекту полягає у тому, що кожен рух прямої $\mathbb{R}$, який змінює орієнтацію, задається формулою: $f(x) = a - x$ для деякого $a \in \mathbb{R}$, а тому він має порядок 2, тобто $f(f(x)) = x$.

Відмітимо, що така властивість не виконується для "нежорстких рухів", таких як гомеоморфізми або дифеоморфізми прямої $\mathbb{R}$ або кола S^1. Наприклад, нехай $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задається формулою $h(x) = -x^3$. Він змінює орієнтацію, але $h(h(x)) = -(-x^3)^3 = x^9$, а тому квадрат не є тотожним.

Тим не менш, аналоги зазначених вище ефектів жорсткості для гомеоморфізмів можна отримати на «гомотопічному» рівні.

Наприклад, нехай $\mathcal{H}(S^1)$ – група всіх гомеоморфізмів кола S^1 та $\mathcal{H}^+(S^1)$, (відповідно $\mathcal{H}^-(S^1)$), – підгрупа (відповідно підмножина), яка складається з гомеоморфізмів, які зберігають (відповідно змінюють) орієнтацію. Наділимо ці простори компактно відкритими топологіями. Відмітимо, що має місце природне включення $O(2) \subset \mathcal{H}(S^1)$, яке *складаєтьса з двох включень* $SO^-(2) \subset \mathcal{H}^-(S^1)$ та $SO(2) \subset \mathcal{H}^+(S^1)$ між відповідними компонентами лінійної зв'язності. Добре відомо та легко побачити, що $SO^-(2)$ (відповідно $SO(2)$) є сильним деформаційним ретрактом підмножини $\mathcal{H}^-(S^1)$ (відповідно $\mathcal{H}^+(S^1)$). З цього випливає, що відображення $\mathsf{sq} : \mathcal{H}^-(S^1) \to \mathcal{H}^+(S^1)$, визначене формулою $\mathsf{sq}(h) = h^2$, є гомотопним нулю.

Мета цього розділу – довести параметричний варіант зазначених вище тверджень "жорсткості" для гомеоморфізмів у себе відкритих підмножин топологічних добутків $X \times S^1$, які зберігають першу координату (Теорема 3.8.1). Цей результат буде застосований до дифеоморфізмів, які зберігають функцію Морса на орієнтовних поверхнях та змінюють орієнтацію певних її регулярних листів (Теореми 3.3.1, 3.3.3 та 3.3.5).

3.2 Основні результати

Нехай M – компактна поверхня, $h : M \to M$ – гомеоморфізм та $\gamma \subset M$ – підмноговид поверхні M. Тоді γ є *h-інваріантним*, якщо $h(\gamma) = \gamma$.

Більш того, припустимо, що γ є зв'язним і *орієнтовним* h-інваріантним підмноговидом з $\dim \gamma \geq 1$. Тоді γ є *h^+-інваріантним* (відповідно *h^--інваріантним*), якщо обмеження $h|_\gamma : \gamma \to \gamma$ зберігає (відповідно змінює) орієнтацію підмноговиду γ. Якщо γ є нерухомою точкою гомеоморфізму h, то ми вважаємо, що γ є одночасно h^+- та h^--інваріантною.

Нас буде цікавити структура дифеоморфізмів, які зберігають $f \in \mathcal{F}(M, P)$ та змінюють орієнтації деяких регулярних листів відображення f. Наступну просту лему можна довести аналогічно до [19, Lemma 3.5].

Лема 3.2.1. *Нехай M – зв'язна орієнтовна поверхня і $h \in \mathcal{S}(f)$ такий, що кожен регулярний лист відображення f є h-інваріантним. Тоді кожний критичний лист відображення f також є h-інваріантним і такі умови є еквівалентними:*

(1) *деякий регулярний лист відображення f є h^+-інваріантним;*

(2) *всі регулярні листи відображення f є h^+-інваріантними;*

(3) *h зберігає орієнтацію поверхні M.*

Контрприклад 3.3. *Лема 3.2.1 порушується у випадку неорієнтовних поверхонь. Нехай M – стрічка Мебіуса і $f : M \to \mathbb{R}$ – функція Морса, яка має дві критичні точки: один локальний екстремум z та одне сідло y. Нехай також K – критичний лист відображення f, який містить y, і D та E – компоненти зв'язності множини $M \setminus K$, які містять z та ∂M відповідно. Тоді легко побудувати дифеоморфізм $h : M \to M$ (що називають* ***зсувом вздовж центрального кола стрічки Мебіуса****), який є нерухомим на ∂M і для якого D є h^--інваріантною. Тоді регулярні листи функції f у D є h^--інваріантними, тимчасом як регулярні листи f у E є h^+-інваріантними.*

Позначимо через $\Delta^-(f)$ *підмножину* стабілізатора $\mathcal{S}(f)$, яка складається з дифеоморфізмів h, таких, що *кожен регулярний лист відображення f є h^--інваріантним.*

Нехай $h \in \Delta^-(f)$. Тоді за Лемою 3.2.1 кожен критичний лист K відображення f є h^--інваріантним, хоча, h може міняти місцями критичні точки f у K та шари шарування Ξ_f, які містяться у K (тобто компоненти зв'язності $K \setminus \Sigma_f$). Відмітимо також, що взагалі кажучи $\Delta^-(f)$ може бути порожньою.

Наступну теорему можна розглядати як *гомотопічний* і *пошаровий* варіант вказаної вище властивості жорсткості для дифеоморфізмів, які зберігають f.

Теорема 3.3.1. *Нехай M – зв'язна компактна орієнтовна поверхня, $f \in \mathcal{F}(M,P)$ і $h \in \Delta^-(f)$. Тоді $h^2 \in \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$. Зокрема, для кожного $h \in \Delta^-(f)$ кожен шар шарування Ξ_f є $(h^2,+)$-інваріантним.*

Наслідок 3.3.2. *Нехай $\mathbf{or} : \pi_0\mathcal{S}(f) \to \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ – гомоморфізм орієнтації, визначений за формулами $\mathbf{or}(\mathcal{S}^+(f)) = 0$ та $\mathbf{or}(\mathcal{S}^-(f)) = 1$. Тоді для кожного $h \in \Delta^-(f)$ відображення $s : \mathbb{Z}_2 \to \pi_0\mathcal{S}(f)$, задане формулами $s(0) = [\mathrm{id}_M]$ та $s(1) = [h]$, є гомоморфізмом, який задовольняє $\mathbf{or} \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2}$. Іншими словами, s є перерізом гомоморфізма $\mathbf{or}$, звідки $\pi_0\mathcal{S}(f)$ є певним напівпрямим добутком груп $\pi_0\mathcal{S}^+(f)$ та $\mathbb{Z}_2$.*

Доведення. Достатньо відмітити, що з Теореми 3.3.1 випливає, що $[h]^2 = [\mathrm{id}_M]$ у $\pi_0\mathcal{S}(f)$. □

Тепер розглянемо ситуацію, коли не всі регулярні листи є h^--інваріантними. Щоб прояснити цю ситуацію, ми спочатку сформулюємо загальне твердження для випадку відображень на 2-диску і циліндрі.

Теорема 3.3.3. *Нехай M – зв'язна компактна орієнтовна поверхня, $f \in \mathcal{F}(M,P)$, V – регулярний лист відображення f і $h \in \mathcal{S}(f)$. Припустимо, що кожен регулярний лист відображення f у $\mathrm{Int}M$ розбиває M (це виконується, наприклад, коли M є 2-диском, циліндром або 2-сферою, див. Лему 1.4.1) і що V є h^--інваріантним. Тоді існує $g \in \mathcal{S}(f)$, який співпадає з h на деякому околі листа V і такий, що $g^2 \in \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$.*

Зауважимо, що Теорема 3.3.3 *не стверджує, що $g \in \Delta^-(f)$*, хоча g змінює орієнтацію листа V і його квадрат належить $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$.

Загальний результат

Теореми 3.3.1 та 3.3.3 є наслідками вказаної нижче Теореми 3.3.5. Нехай M – зв'язна компактна (необов'язково орієнтовна) поверхня, $f \in \mathcal{F}(M, P)$ та $h \in \mathcal{S}(f)$. Нехай також

- A є об'єднанням *всіх h^{-}-інваріантних регулярних листів відображення f*,
- $K_1, \ldots, K_k$ – всі критичні листи відображення f, такі, що $\overline{A} \cap K_i \neq \varnothing$;
- для $i = 1, \ldots, k$ нехай R_{K_i} – f-регулярний окіл листа K_i, вибраний так, що $R_{K_i} \cap R_{K_j} = \varnothing$ для $i \neq j$, та

$$Z := A \bigcup \Big(\bigcup_{i=1}^{k} R_{K_i}\Big).$$

  Очевидно, Z є f-адаптованою підповерхнею поверхні M і кожна її компонента зв'язності перетинає A.

Лема 3.3.4. *Припустимо, що Z є орієнтовною. Нехай також γ є компонентою межі поверхні Z. Розглянемо такі умови:*

(1) $\gamma \subset \mathrm{Int} M$;

(2) $\gamma = \partial U \cap \partial Z$ *для деякої компоненти зв'язності U замикання $\overline{M \setminus Z}$;*

(3) $h(\gamma) \cap \gamma = \varnothing$;

(4) $h(\gamma) \neq \gamma$.

Тоді (1)$\Leftrightarrow$(2) $\Rightarrow$ (3)$\Leftrightarrow$(4).

Доведення. (1)$\Leftrightarrow$(2) є очевидним, а (3)$\Leftrightarrow$(4) випливає з того, що γ є регулярним листом дифеоморфізма h та h переставляє листи відображення f.

(2)⇒(4) Припустимо, що $h(\gamma) = \gamma$. Нехай Z' – компонента зв'язності поверхні Z, яка містить γ. Тоді за побудовою Z' має перетинати A, звідки h змінює орієнтацію деяких регулярних листів в Z'. Оскільки Z' також є орієнтовною, ми отримуємо з Леми 3.2.1, що h змінює і орієнтацію γ. Це означає, що $\gamma \subset A$, а тому існує відкритий окіл $W \subset A$ компоненти γ, який складається з регулярних листів відображення f. Зокрема, регулярні листи в $W \cap \mathrm{Int} U$ мають міститися у A, що суперечить припущенню про те, що $\mathrm{Int} U \subset M \setminus Z \subset M \setminus A$. □

Отже, h міняє місцями компоненти межі поверхні Z, які належать внутрішності поверхні M. Ми накладемо таку умову на Z:

(B) *кожна компонента зв'язності перетину $\partial Z \cap \mathrm{Int} M$ розбиває M.*

Ця умова означає, що існує бієкція між компонентами межі перетину $\partial Z \cap \mathrm{Int} M$ та компонентами зв'язності доповнення $M \setminus Z$, звідки за Лемою 3.3.4 не буде жодної h-інваріантної компоненти зв'язності доповнення $M \setminus Z$.

Теорема 3.3.5. *Якщо Z – непорожня, орієнтовна і має властивість (B), то існує $g \in \mathcal{S}(f)$, такий, що $g = h$ на Z та $g^2 \in \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$.*

Доведення Теореми 3.3.1.

Припустимо, що M є орієнтовною і $h \in \Delta^-(f)$. Тоді в термінах Теореми 3.3.5, $Z = M$, і за цією теоремою існує $g \in \mathcal{S}(f)$, такий, що $g = h$ на Z та $g^2 \in \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$. Це означає, що $h = g$ та $h^2 \in \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$. □

Доведення Теореми 3.3.3.

Умова (B) випливає з припущення про те, що кожен регулярний лист відображення f у $\mathrm{Int} M$ розбиває M. □

3.4 Твердження про потоки

У цьому підрозділі ми продовжуємо деякі результати, отримані у [17, 25] для гладких потоків, на неперервний випадок.

Означення 3.4.1. *Нехай x не є нерухомою точкою потоку $\mathbf{F}$ та Y – топологічний простір. Нехай також U – відкритий окіл точки x та $\phi = (\zeta, \rho) : U \to Y \times \mathbb{R}$ – відкрите вкладення. Тоді пара (ϕ, U) буде називатися* **тривіалізацією** *потоку $\mathbf{F}$ в точці x, якщо існує $\varepsilon > 0$ і відкритий окіл V точки x в X, такі, що*

$$\phi \circ \mathbf{F}(z, \varphi_2) = \big(\zeta(z), \rho(z) + \varphi_2\big) \tag{3.1}$$

для всіх $(z, \varphi_2) \in V \times (-\varepsilon; \varepsilon)$.

Іншими словами, $\mathbf{F}$ є **локально спряженим** *до потоку $\mathbf{G} : (Y \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to Y \times \mathbb{R}$, заданого формулою $\mathbf{G}(y, s, \varphi_2) = (y, s + \varphi_2)$, оскільки тотожність (3.1) можна записати у вигляді*

$$\phi \circ \mathbf{F}(z, \varphi_2) = \big(\zeta(z), \rho(z) + \varphi_2\big) = \mathbf{G}\big(\zeta(z), \rho(z), \varphi_2\big) = \mathbf{G}(\phi(z), \varphi_2),$$

тобто

$$\phi \circ \mathbf{F}_{\varphi_2}(z) = \mathbf{G}_{\varphi_2} \circ \phi(z). \tag{3.2}$$

Добре відомо, що кожен потік класу $\mathcal{C}^2$ (породжений деяким векторним полем класу $\mathcal{C}^1$) на гладкому многовиді допускає тривіалізацію в кожній не нерухомій точці.

Лема 3.4.2. *Якщо (ϕ, U) є тривіалізацією потоку $\mathbf{F}$ у не нерухомій точці $x \in X$, то для довільного $\tau \in \mathbb{R}$ пара $(\phi \circ \mathbf{F}_{-\tau}, \mathbf{F}_\tau(U))$ є тривіалізацією цього потоку в точці $y = \mathbf{F}(x, \tau)$.*

Доведення. Позначимо $U' = \mathbf{F}_\tau(U)$ та $\phi' = \phi \circ \mathbf{F}_{-\tau}$. Нехай також ε і V визначаються як у Означенні 3.1 та $V' = \mathbf{F}_\tau(V)$ – окіл точки y. Тоді для довільних

$(z, \varphi_2) \in V' \times (-\varepsilon; \varepsilon)$ маємо

$$\phi' \circ \mathbf{F}_{\varphi_2}(z) = (\phi \circ \mathbf{F}_{-\tau}) \circ \mathbf{F}_{\varphi_2}(z) = (\phi \circ \mathbf{F}_{\varphi_2 - \tau})(z) =$$
$$= (\phi \circ \mathbf{F}_{\varphi_2}\big(\mathbf{F}_{-\tau}(z)\big) \overset{(3.1)}{=\!=} \mathbf{G}_{\varphi_2} \circ \phi(\mathbf{F}_{-\tau}(z)) = \mathbf{G}_{\varphi_2} \circ \phi'(z). \square$$

Наступна лема показує, що для потоків, які допускають тривіалізації (наприклад, для гладких потоків) кожне відображення, яке зберігає орбіти, допускає функцію зсуву біля кожної не нерухомої точки. Більш того, така функція локально визначається своїм значенням в цій точці.

Лема 3.4.3. (cf. [25, Lemma 6.1(i)]). *Нехай потік $\mathbf{F} : X \times \mathbb{R} \to X$ має тривіалізацію (ϕ, U) у деякій не нерухомій точці x. Нехай також $h : U \to X$ – неперервне відображення, яке зберігає орбіти потоку $\mathbf{F}$ і таке, що $h(x) = \mathbf{F}(x, \tau)$ для деякого $\tau \in \mathbb{R}$. Тоді існує відкритий окіл $V \subset U$ точки x і єдина неперервна функція $\alpha : V \to \mathbb{R}$, така, що*

(1) $\alpha(x) = \tau$;

(2) $h(z) = \mathbf{F}(z, \alpha(z))$ *для всіх* $z \in V$.

Якщо додатково X є многовидом класу $\mathcal{C}^r$, $(1 \leq r \leq \infty)$, $\mathbf{F}$ і h належать класу $\mathcal{C}^r$ та ϕ є $\mathcal{C}^r$ вкладенням, то α також належить класу $\mathcal{C}^r$.

Доведення. Доведення майже дослівно повторює аргументи [25, Lemma 6.2], доведення якої було для гладких потоків і базувалося на існуванні тривіалізації потоків. Для повноти викладу ми наведемо коротке доведення для неперервного випадку.

1) Спочатку припустимо, що $\tau = 0$, тому $h(x) = x$. Нехай V і ε – такі ж як у Означенні 3.4.1. Зменшуючи V можна також вважати, що $V \subset U \cap h^{-1}(U)$, тому, зокрема, $h(V) \subset U$. Позначимо $\hat{V} := \phi(V)$ та $\hat{U} := \phi(U)$. Тоді ці множини є відкритими і ми маємо коректно визначене відображення $\hat{h} = \phi \circ h \circ \phi^{-1}$:

$\hat{V} \to \hat{U}$, яке зберігає орбіти потоку $\mathbf{G}$ згідно з (3.2). Це означає, що $\hat{h}(y, \varphi_2) = \big(y, \eta(y, \varphi_2)\big)$ для деякої неперервної функції $Y \times \mathbb{R} \supset \hat{V} \xrightarrow{\eta} \mathbb{R}$. Визначимо іншу неперервну функцію $\alpha' : \hat{V} \to \mathbb{R}$ за формулою $\alpha'(y, \varphi_2) = \eta(y, \varphi_2) - \varphi_2$. Тоді

$$\hat{h}(y, \varphi_2) = \big(y, \varphi_2 + \alpha'(y, \varphi_2)\big) = \mathbf{G}\big(y, \varphi_2, \alpha'(y, \varphi_2)\big) = \mathbf{G}_{\alpha'}(y, \varphi_2),$$

тобто $\phi \circ h \circ \phi^{-1} = \hat{h} = \mathbf{G}_{\alpha'}$, звідки для кожної $z \in V$ маємо

$$h(z) = \phi^{-1} \circ \mathbf{G}_{\alpha'} \circ \phi(z) = \phi^{-1} \circ \mathbf{G}_{\alpha' \circ \phi(z)} \circ \phi(z) = \mathbf{F}_{\alpha' \circ \phi(z)}(z) = \mathbf{F}_{\alpha' \circ \phi}(z).$$

Отже, можна покласти $\alpha = \alpha' \circ \phi : V \to \mathbb{R}$. З цього випливає, що α є неперервною. Більш того, нехай $\hat{y}, \hat{\varphi}_2) = \phi(x)$. Оскільки $h(x) = x$, ми отримуємо, що $\widetilde{h}(\hat{y}, \hat{\varphi}_2) = \hat{y}, \hat{\varphi}_2)$, звідки $\eta(\hat{y}, \hat{\varphi}_2) = \hat{\varphi}_2$, звідки $\alpha'(\hat{y}, \hat{\varphi}_2) = 0$, а тому

$$\alpha(x) = \alpha' \circ \phi(x) = \alpha'(\hat{y}, \hat{\varphi}_2) = 0.$$

2) Якщо $\tau \neq 0$, то розглянемо відображення $\widetilde{h} : U \to X$, задане формулою $\widetilde{h} = \mathbf{F}_{-\tau} \circ h$. Тоді $\widetilde{h}(x) = \mathbf{F}_{-\tau} \circ h(x) = \mathbf{F}(\mathbf{F}(x, \tau), -\tau) = x$, звідки за 1) $\widetilde{h} = \mathbf{F}_{\hat{\alpha}}$ для єдиної неперервної функції $\hat{\alpha} : V \to \mathbb{R}$, такої, що $\hat{\alpha}(x) = 0$. Покладемо $\alpha = \hat{\alpha} + \tau$. Тоді $\alpha(x) = \tau$ та

$$h(z) = \mathbf{F}_{\tau} \circ \widetilde{h}(z) = \mathbf{F}(\mathbf{F}(z, \hat{\alpha}(z)), \tau) = \mathbf{F}(z, \hat{\alpha}(z) + \tau) = \mathbf{F}(z, \alpha(z)). \qquad \square$$

З формул для α випливає, що якщо X, $\mathbf{F}$, ϕ та h належать класу $\mathcal{C}^r$, $(1 \leq r \leq \infty)$, то α також належить класу $\mathcal{C}^r$.

Наслідок 3.4.4. *Припустимо, що $U \subset X$ є відкритою* **зв'язною** *підмножиною, такою, що кожна точка $x \in U$ не є нерухомою і допускає тривіалізацію потоку $\mathbf{F}$. Нехай також $\alpha, \alpha' : U \to \mathbb{R}$ – дві неперервні функції, такі, що $\mathbf{F}_{\alpha} = \mathbf{F}_{\alpha'}$ на U. Якщо $\alpha(x) = \alpha'(x)$ в деякій точці $x \in U$ (це виконується, наприклад, якщо $\mathbf{F}$ має щонайменше одну неперіодичну точку в U), то $\alpha = \alpha'$ на U.*

Доведення. Множина $A = \{\alpha(y) = \alpha'(y) \mid y \in U\}$ є замкненою і за припущенням непорожньою (містить x). Більш того, за Лемою 3.4.3 ця множина є відкритою, звідки $A = U$. $\square$

Наслідок 3.4.5. *Нехай $\mathbf{F} : X \times \mathbb{R} \to X$ – неперервний потік, $U \subset X$ – відкрита підмножина, така, що кожна точка $x \in U$ є не нерухомою і не періодичною та допускає тривіалізацію потоку $\mathbf{F}$, та $h : U \to X$ – відображення, яке зберігає орбіти. Тоді існує єдина неперервна функція $\alpha : U \to \mathbb{R}$, така, що $h(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x))$ для всіх $x \in U$.*

Якщо додатково X є многовидом класу $\mathcal{C}^r$, $(0 \leq r \leq \infty)$, $\mathbf{F}$ належить класу $\mathcal{C}^r$ та допускає $\mathcal{C}^r$ тривіалізацію і h належить класу $\mathcal{C}^r$, то α також належить класу $\mathcal{C}^r$.

Доведення. Оскільки кожна точка $x \in U$ є не нерухомою і не періодичною, то існує єдине число $\alpha(x)$, таке, що $h(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x))$. Більш того, оскільки $\mathbf{F}$ допускає тривіалізацію у точці x, то з Леми 3.4.3 випливає, що відповідність $x \mapsto \alpha(x)$ є неперервною функцією $\alpha : U \to \mathbb{R}$, яка також належить класу $\mathcal{C}^r$ при відповідних припущеннях гладкості на X, $\mathbf{F}$, ϕ та h. $\square$

Наступне твердження продовжує деякі результати, встановлені у [25] для гладких потоків, на неперервні потоки, які мають тривіалізації в кожній не нерухомій точці на довільних топологічних просторах.

Лема 3.4.6. (cf. [25, Lemmas 6.1-6.3]) *Нехай $\mathbf{F} : X \times \mathbb{R} \to X$ – деякий потік, $p : \widetilde{X} \to X$ – накриваюче відображення, а $\xi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ – накриваюче перетворення, тобто гомеоморфізм, для якого $p \circ \xi = p$. Тоді виконуються наступні твердження.*

(1) *Потік $\mathbf{F}$ піднімається до єдиного потоку $\widetilde{\mathbf{F}} : \widetilde{X} \times \mathbb{R} \to \widetilde{X}$, такого, що $p \circ \widetilde{\mathbf{F}}_{\varphi_2} = \mathbf{F}_{\varphi_2} \circ p$ для всіх $\varphi_2 \in \mathbb{R}$.*

(2) *Для будь-якої неперервної функції* $\alpha : X \to \mathbb{R}$ *відображення* $\widetilde{\mathbf{F}}_{\alpha\circ p} : \widetilde{X} \to \mathbb{R}$ *є підняттям відображення* $\mathbf{F}_{\alpha}$*, тобто*

(3) $\widetilde{\mathbf{F}}$ *комутує з* ξ *в тому сенсі, що* $\widetilde{\mathbf{F}}_{\varphi_2} \circ \xi = \xi \circ \widetilde{\mathbf{F}}_{\varphi_2}$ *для всіх* $\varphi_2 \in \mathbb{R}$*. Більш загально, для довільної функції* $\beta : \widetilde{X} \to \mathbb{R}$ *маємо* $\widetilde{\mathbf{F}}_{\beta} \circ \xi = \xi \circ \widetilde{\mathbf{F}}_{\beta\circ\xi}$*.*

(4) *Для неперервної функції* $\beta : \widetilde{X} \to \mathbb{R}$ *і точки* $z \in \widetilde{X}$ *розглянемо наступні (“глобальну” і “в точці”) умови:*

(g1) $\beta = \beta \circ \xi$;	(p1) $\beta(z) = \beta \circ \xi(z)$;
(g2) $\widetilde{\mathbf{F}}_{\beta} = \widetilde{\mathbf{F}}_{\beta\circ\xi}$;	(p2) $\widetilde{\mathbf{F}}_{\beta}(z) = \widetilde{\mathbf{F}}_{\beta\circ\xi}(z)$;
(g3) $\widetilde{\mathbf{F}}_{\beta} \circ \xi = \xi \circ \widetilde{\mathbf{F}}_{\beta}$;	(p3) $\widetilde{\mathbf{F}}_{\beta} \circ \xi(z) = \xi \circ \widetilde{\mathbf{F}}_{\beta}(z)$.

Тоді маємо наступну діаграму імплікацій:

$$\begin{tikzcd}
(g1) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (g2) \arrow[r, Leftrightarrow, "(2)"] \arrow[d, Rightarrow] & (g3) \arrow[d, Rightarrow] \\
(p1) \arrow[r, Rightarrow] & (p2) \arrow[r, Leftrightarrow, "(2)"] & (p3)
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

(i) *Якщо* z *не є ні нерухомою, ні періодичною точкою потоку* $\widetilde{\mathbf{F}}$*, то*(p2)$\Rightarrow$(p1)*.*

(ii) *Якщо* $\widetilde{X}$ *є лінійно зв'язним і* $\widetilde{\mathbf{F}}_{\beta}$ *– підняття деякого неперервного відображення* $h : X \to X$*, тобто* $h \circ p = p \circ \widetilde{\mathbf{F}}_{\beta}$*, то* (p3)$\Rightarrow$(g3)*, звідки всі умови у правому квадраті діаграми* (3.3) *є еквівалентними.*

(iii) *Якщо простір* $\widetilde{X}$ *є лінійно зв'язним, а* $\widetilde{\mathbf{F}}$ *не має нерухомих точок і допускає тривіалізацію у кожній точці* $\widetilde{X}$*, то* (g2)&(p1) $\Rightarrow$ (g1)*.*

Доведення. (1) Розглянемо наступну гомотопію (з «відкритими кінцями»)

$$\mathbf{G} = \mathbf{F} \circ (p \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}}) : \widetilde{X} \times \mathbb{R} \to X, \qquad \mathbf{G}(z, \varphi_2) = \mathbf{F}(p(z), \varphi_2),$$

і нехай $\widetilde{\mathbf{F}} : \widetilde{X} \times 0 \to \widetilde{X}$ задається формулою $\widetilde{\mathbf{F}}(z, 0) = z$. Тоді $\widetilde{\mathbf{F}}$ є підняттям відображення $\mathbf{G}|_{\widetilde{X}\times 0}$, тобто $p \circ \widetilde{\mathbf{F}}(z, 0) = p(z) = \mathbf{F}(p(z), 0) = \mathbf{G}(z, 0)$. Отже, $\widetilde{\mathbf{F}}$

продовжується до єдиного підняття $\widetilde{\mathbf{F}} : \widetilde{X} \times \mathbb{R} \to \widetilde{X}$ відображення $\mathbf{G}$. Легко перевірити, що це підняття є потоком на $\widetilde{X}$.

(2) Нехай $z \in \widetilde{X}$ і $\varphi_2 = \alpha \circ p(z)$. Тоді

$$p \circ \widetilde{\mathbf{F}}_{\alpha\circ p(z)}(z) = p \circ \widetilde{\mathbf{F}}_{\varphi_2}(z) \overset{(1)}{=} \mathbf{F}_{\varphi_2} \circ p(z) = \mathbf{F}_{\alpha\circ p(z)} \circ p(z) = \mathbf{F}_{\alpha} \circ p(z).$$

(3) Відмітимо, що відображення $\widetilde{\mathbf{F}}' : \widetilde{X} \times \mathbb{R} \to \widetilde{X}$, визначене формулою $\widetilde{\mathbf{F}}'_{\varphi_2} = \xi \circ \widetilde{\mathbf{F}}_{\varphi_2} \circ \xi^{-1}$ також є потоком на $\widetilde{X}$. Більш того,

$$p \circ \widetilde{\mathbf{F}}'_{\varphi_2} = p \circ \xi \circ \widetilde{\mathbf{F}}'_{\varphi_2} \circ \xi^{-1} = p \circ \widetilde{\mathbf{F}}_{\varphi_2} \circ \xi^{-1} = \mathbf{F}_{\varphi_2} \circ p \circ \xi^{-1} = \mathbf{F}_{\varphi_2} \circ p.$$

Тому $\widetilde{\mathbf{F}}'$ і $\widetilde{\mathbf{F}}$ – два підняття потоку $\mathbf{F}$, які співпадають в точці $\varphi_2 = 0$, а отже $\widetilde{\mathbf{F}}' = \widetilde{\mathbf{F}}$ за єдиністю піднятті в. Таким чином, для будь-якої неперервної $\widetilde{\alpha} : \widetilde{X} \to \mathbb{R}$ і $z \in \widetilde{X}$ маємо (cf. [25, Eq. (6.8)])

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{F}}_{\widetilde{\alpha}} \circ \xi(z) &= \widetilde{\mathbf{F}}\big(\xi(z), \widetilde{\alpha}(\xi(z))\big) = \widetilde{\mathbf{F}}_{\widetilde{\alpha}(\xi(z))} \circ \xi(z) \\ &= \xi \circ \widetilde{\mathbf{F}}_{\widetilde{\alpha}\circ\xi(z)}(z) = \xi \circ \widetilde{\mathbf{F}}_{\widetilde{\alpha}\circ\xi}(z).\end{aligned}$$

(4) Імплікації у Діаграмі (3.3) є тривіальними. Припустимо, що $\widetilde{X}$ (а отже і X) є лінійно зв'язними.

(i) Якщо z не є нерухомою і не є періодичною, то з рівності $\widetilde{\mathbf{F}}(z, a) = \widetilde{\mathbf{F}}(z, b)$ випливає, що $a = b$ для всіх a, b. Зокрема, це справджується для $a = \beta(z)$ і $b = \beta \circ \xi(z)$.

(ii) Припустимо, що $\widetilde{\mathbf{F}}_{\beta}$ є підняттям деякого неперервного відображення $h : X \to X$. Тоді $p \circ \widetilde{\mathbf{F}}_{\beta} \circ \xi = h \circ p \circ \xi = h \circ p$ і $p \circ \xi \circ \widetilde{\mathbf{F}}_{\beta} = p \circ \widetilde{\mathbf{F}}_{\beta} = h \circ p$, тобто обидва відображення $\widetilde{\mathbf{F}}_{\beta} \circ \xi$ та $\xi \circ \widetilde{\mathbf{F}}_{\beta}$ ає підняттями відображення h.

Тепер, якщо (p3) виконується, тобто $\widetilde{\mathbf{F}}_{\beta}\circ\xi(z) = \xi\circ\widetilde{\mathbf{F}}_{\beta}(z)$ для деякої точки $z \in \widetilde{X}$, то ці підняття повинні співпадати на всьому $\widetilde{X}$, звідки випливає властивість (g3).

(iii) Припустимо, що потік $\widetilde{\mathbf{F}}$ не має нерухомих точок і виконуються умови (g2) та (p1), тобто $\widetilde{\mathbf{F}}(y, \beta(y)) = \widetilde{\mathbf{F}}(y, \beta \circ \xi(y))$ для всіх $y \in \widetilde{X}$ та $\beta(z) = \beta \circ \xi(z)$

для деякої $z \in \widetilde{X}$. Зазначимо, що множина $A = \{y \in \widetilde{X} \mid \beta(y) = \beta \circ \xi(y)\}$ є замкненою. Більш того, внаслідок локальної єдиності функції зсуву (Наслідок 3.4.4) A також є відкритою. Оскільки $\widetilde{X}$ є зв'язним, множина A є або $\varnothing$, або $\widetilde{X}$. Але $z \in A$, звідки $A = \widetilde{X}$, тобто умова (g1) виконується. $\square$

Нехай $p : \widetilde{X} \to X$ – *регулярне* накриваюче відображення для лінійно зв'язних $\widetilde{X}$ та X, G – група накриваючих перетворень, $\mathbf{F} : X \times \mathbb{R} \to X$ – потік на X, а $\widetilde{\mathbf{F}} : \widetilde{X} \times \mathbb{R} \to \widetilde{X}$ його підняття, визначене, як в Лемі 3.4.6(1).

Наслідок 3.4.7. (cf. [25, Lemma 6.3]) *Припустимо, що всі орбіти потоку $\widetilde{\mathbf{F}}$ є незамкненими і не є нерухомими, а потік $\widetilde{\mathbf{F}}$ має тривіалізацію в усіх точках простору $\widetilde{X}$. Нехай також $h : X \to X$ – неперервне відображення, яке допускає підняття $\widetilde{h} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$, тобто $p \circ \widetilde{h} = h \circ p$, таке, що $\widetilde{h}$ залишає інваріантною кожну орбіту γ потоку $\widetilde{\mathbf{F}}$ і комутує з кожним елементом $\xi \in G$. Тоді існує єдина неперервна функція $\alpha : X \to \mathbb{R}$, для якої $h = \mathbf{F}_{\alpha}$.*

Знову, якщо $\widetilde{X}$, X, p, h, $\mathbf{F}$ та його тривіалізація належать класу $\mathcal{C}^r$, $(1 \leq r \leq \infty)$, то тоді функція α також належить до класу $\mathcal{C}^r$.

Доведення. Згідно з припущеннями на потік $\widetilde{\mathbf{F}}$ з Наслідку 3.4.5 отримуємо, що існує єдина неперервна функція $\beta : \widetilde{X} \to \mathbb{R}$, для якої $\widetilde{h} = \widetilde{\mathbf{F}}_{\beta}$. Нехай $\xi \in G$. Оскільки $\widetilde{h}$ комутує з ξ, тобто виконується умова (g3) Леми 3.4.6, ми одержуємо наступні імплікації:

$$\text{(g3)} \Longleftrightarrow \text{(g2)} \Longrightarrow \text{(p2)} \xRightarrow{\text{(i)}} \text{(p1)} \xRightarrow{\text{(iii)}} \text{(g1)}.$$

що означає $\beta \circ \xi = \beta$. Отже, β є інваріантною відносно всіх $\xi \in G$, а тому вона індукує єдину функцію $\alpha : X \to \mathbb{R}$, для якої $\beta = \alpha \circ p$. Оскільки p є локальним гомеоморфізмом, маємо, що α є неперервною. Більш того, за Лемою 3.4.6(2) $\widetilde{h} = \widetilde{\mathbf{F}}_{\beta} = \widetilde{\mathbf{F}}_{\alpha \circ p}$ є підняттям відображення $\mathbf{F}_{\alpha}$. Але $\widetilde{h}$ також є підняттям відображення h, звідки $h = \mathbf{F}_{\alpha}$.

Неважко побачити, що твердження про гладкість фукнції α випливає з відповідних частин доведення гладкості у використовуваних лемах. $\square$

3.5 Відображення кола у себе

Нехай $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ – одиничне коло на комплексній площині, $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ – універсальне накриваюче відображення, визначене за формулою $p(s) = e^{2\pi i s}$ і $\xi(s) = s + 1$ – дифеоморфізм множини $\mathbb{R}$, який породжує групу накриваючих перетворень $\mathbb{Z}$.

Позначимо через $C_k(S^1, S^1)$, $k \in \mathbb{Z}$ множину всіх неперервних відображень $h : S^1 \to S^1$ степеня k, тобто відображень, гомотопних до відображення $z \mapsto z^k$. Тоді $\{C_k(S^1, S^1)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – множина всіх компонент лінійної зв'язності простору $\mathcal{C}\left(S^1, S^1\right)$ із компактно відкритою топологією.

Для відображення $h : X \to X$ композицію $\underbrace{h \circ \cdots \circ h}_{n}$ буде зручно позначати h^n для $n \in \mathbb{N}$. Точка $x \in X$ називається *нерухомою* для h, якщо $h(x) = x$.

Лема 3.5.1. *Нехай $h : S^1 \to S^1$ – неперервне відображення і $\widetilde{h}_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – довільне підняття h відносно p, тобто неперервне відображення, для якого наступна діаграма є комутативною:*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\widetilde{h}_0"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ S^1 \arrow[r, "h"] & S^1 \end{tikzcd}$$

тобто $p \circ \widetilde{h}_0 = h \circ p$, або $e^{2\pi i \widetilde{h}_0(s)} = h(e^{2\pi i s})$ для $s \in \mathbb{R}$. Для $a \in \mathbb{Z}$ визначимо відображення $\widetilde{h}_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за формулою $\widetilde{h}_a = \xi^a \circ \widetilde{h}_0$, що означає $\widetilde{h}_a(s) = \widetilde{h}_0(s) + a$. Тоді наступні умови є еквівалентними:

(а) $h \in C_k(S^1, S^1)$;

(б) $\widetilde{h}_0 \circ \xi = \xi^k \circ \widetilde{h} = \widetilde{h}_k$, *тобто* $\widetilde{h}(s+1) = \widetilde{h}(s) + k$ *для всіх* $t \in \mathbb{R}$.

Більш того, нехай k позначає степінь відображення h. Тоді

(i) *h має щонайменше $|k-1|$ нерухомих точок;*

(ii) *$\{\widetilde{h}_{ak}\}_{a\in\mathbb{Z}}$ є множиною всіх можливих піднятттів відображення h;*

(iii) *$\widetilde{h}_a \circ \widetilde{h}_b = \xi^{a+kb} \circ h^2$ для всіх $a, b \in \mathbb{Z}$;*

(iv) *якщо $k=-1$, то $\widetilde{h}_a^2 = \widetilde{h}_0^2$ для всіх $a \in \mathbb{Z}$, іншими словами,* **для кожного підняття $\widetilde{h}_a$ відображення h_0, його квадрат $\widetilde{h}_a^2$ не залежить від** *a. Більш того,* **якщо A є множиною всіх нерухомих точок відображення h^2, то $p^{-1}(A)$ є множиною нерухомих точок відображення $\widetilde{h}_0^2$.**

Доведення. Всі твердження є простими. Твердження (i) є наслідком теореми про проміжне значення, а (ii) випливає з (б).

(iii) $\widetilde{h}_a \circ \widetilde{h}_b = \xi^a \circ \widetilde{h}_0 \circ \xi^b \circ \widetilde{h}_0 = \xi^a \circ \xi^{kb} \circ \widetilde{h}_0^2 = \xi^{a+kb} \circ \widetilde{h}_0^2$.

(iv) Якщо $k=-1$, то, за (iii), $\widetilde{h}_a \circ \widetilde{h}_a = \xi^{a-a} \circ \widetilde{h}_0^2 = \widetilde{h}_0^2$.

Отже, можна покласти $g := \widetilde{h}_0^2 = \widetilde{h}_a^2$ і таке відображення не залежить від $a \in \mathbb{Z}$. Нехай також $\tilde{A}$ – множина всіх нерухомих точок відображення g. Нам потрібно показати, що $\tilde{A} = p^{-1}(A)$.

Нехай $s \in \tilde{A}$ і $z = p(s)$. Тоді з рівності $s = g^2(s) = \widetilde{h}_a^2(s)$ випливає, що

$$z = p(s) = p \circ \widetilde{h}_a^2(s) = h^2 \circ p(s) = h^2(z),$$

тому $z \in A$, тобто $p(\tilde{A}) \subset A$, а отже $\tilde{A} \subset p^{-1}(A)$.

І навпаки, нехай $z \in A$ і $s \in \mathbb{R}$ є такими, що $z = p(s)$. Тоді існує єдине підняття $\widetilde{h}_a$ відображення h , для якого $\widetilde{h}_a(s) = s$. Але тоді $g(s) = \widetilde{h}_a^2(s) = s$, звідки $s \in \tilde{A}$. □

Наступний приклад показує, що ефект, описаний твердженням (iv) Леми 3.5.1 включає властивість *жорсткості* дзеркальних симетрій кола, яка згадувалась вище.

Приклад 3.6. *Нехай* $h(z) = \overline{ze^{-2\pi\phi}} e^{2\pi\phi} = \bar{z}e^{2\phi}$ *- дзеркальна симетрія комплексної площини відносно прямої, яка проходить через початок координат під кутом* ϕ *до додатнього напряму осі* x*. Тоді* h *є інволюцією, яка зберігає одиничне коло і обмеження* $h|_{S^1} : S^1 \to S^1$ *є відображенням степені* -1*, яке належить до* $SO^-(2)$*. Більш того, кожне його підняття* $h_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *задається формулою* $\widetilde{h}_a(s) = a + \phi - s$*. Але тоді* $\widetilde{h}_a^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ *не залежить від* a*. Більш того, множина нерухомих точок відображення* $\widetilde{h}_a^2$ *– це* $\mathbb{R}$*, що збігається із* $p^{-1}(S^1)$*, де* S^1 *є множиною нерухомих точок відображення* $h^2 = \mathrm{id}_{S^1}$*.*

Інше тлумачення вищезазначених результатів можна дати з точки зору *функції зсуву*.

Наслідок 3.6.1. *Нехай* $\mathbf{F} : S^1 \times \mathbb{R} \to S^1$ *– потік на колі* S^1*, який не має нерухомих точок, тому* S^1 *– єдина періодична орбіта потоку* $\mathbf{F}$ *деякого періоду* θ*.*

(1) *Нехай* $h : S^1 \to S^1$ *– деяке неперервне відображення. Тоді* $h \in C_1(S^1, S^1)$ *тоді і тільки тоді, коли існує неперервна функція* $\alpha : S^1 \to \mathbb{R}$*, для якої* $h = \mathbf{F}_\alpha$*. Така функція не є єдиною і визначається з точністю до сталого доданку* $n\theta$ *для* $n \in \mathbb{Z}$*. Якщо* $\mathbf{F}$ *та* h *належать до класу* $\mathcal{C}^r$*,* $(0 \le r \le \infty)$*, то такою ж є і* α*.*

(2) *Для кожного* $h \in C_{-1}(S^1, S^1)$ *існує єдина неперервна функція* $\alpha : S^1 \to \mathbb{R}$*, така, що*

(а) $h^2(z) = \mathbf{F}(z, \alpha(z))$ *для всіх* $z \in S^1$*;*

(б) $\alpha(z) = 0$ *для деякого* $z \in S^1$ *тоді і тільки тоді, коли* $h(z) = z$*, (за Лемою3.5.1*(i) *існують як мінімум дві такі точки);*

(в) *якщо* $\mathbf{F}$ *і* h *належать класу* $\mathcal{C}^r$*,* $(0 \le r \le \infty)$*, то* α *теж до нього належить.*

(3) *Нехай* $\alpha_k : S^1 \to \mathbb{R}$, $k = 0,1$*– дві неперервні функції, і для кожного* $t \in [0;1]$ *нехай* $\alpha_t : S^1 \to \mathbb{R}$ *і* $h_t : S^1 \to S^1$ *задаються формулами*

$$\alpha_{\varphi_2} = (1-\varphi_2)\alpha_0 + \varphi_2\alpha_1, \qquad\qquad h_{\varphi_2}(z) = ze^{2\pi i \alpha_k(z)}.$$

Якщо h_0 *і* h_1 *є гомеоморфізмами (дифеоморфізмами з класу* $\mathcal{C}^r$, $1 \le r \le \infty$*), то такими є і відображення* h_{φ_2} *для кожного* $\varphi_2 \in [0;1]$.

Доведення. Нехай $\widetilde{\mathbf{F}} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ єдине підняття $\mathbf{F}$ відносно накриття p. Тоді $\mathbb{R}$ є єдиною неперіодичною орбітою потоку $\widetilde{\mathbf{F}}$.

(1) Якщо $\alpha : S^1 \to \mathbb{R}$ – деяка неперервна функція, то відображення $\mathbf{F}_\alpha$ є гомотопним до тотоднього відображення за гомотопією $\{\mathbf{F}_{\varphi_2\alpha}\}_{\varphi_2\in[0;1]}$, звідки $\mathbf{F}_\alpha$ має степінь 1 (так само як і id_{S^1}).

Навпаки, нехай $h \in C_1(S^1, S^1)$ і нехай $\widetilde{h}$ є довільним підняттям відображення h. Тоді за Наслідком 3.4.5 існує єдина неперервна функція $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої $\widetilde{h} = \widetilde{\mathbf{F}}_\beta$. Більш того, оскільки h є відображенням степені 1, з Леми 3.5.1(б) маємо, що відображення $\widetilde{h}$ комутує з ξ, тобто виконується умова (g3) Леми 3.4.6. Оскільки $\widetilde{h} = \mathbf{F}_\beta$ є підняттям відображення h, з Леми 3.4.6(ii) випливає, що умова (g1) Леми 3.4.6 також виконується, тобто $\beta\circ\xi = \beta$. Отже, β індукує єдину функцію $\alpha : S^1 \to \mathbb{R}$, для якої $\beta = \alpha\circ p$ і $\widetilde{h} = \widetilde{\mathbf{F}}_{\alpha\circ p}$. Тоді за Лемою 3.4.6(2), $\widetilde{h}$ є підняттям відображення $\mathbf{F}_\alpha$. Але це також є підняття відображення h, звідки $h = \mathbf{F}_\alpha$.

(2) Оскільки $h \in C_{-1}(S^1, S^1)$, маємо $h^2 \in C_1(S^1, S^1)$, звідки (а) і (в) одразу випливають із (1).

(б) Через A позначимо множину всіх нерухомих точок відображення h^2. Нам потрібно довести, що $A = \alpha^{-1}(0)$. Очевидно, що якщо $\alpha(y) = 0$, то

$$h^2(y) = \mathbf{F}(y, \alpha(y)) = h^2(y) = \mathbf{F}(y, 0) = y.$$

В іншу сторону, нехай $y \in A$, тоді $h(y) = y$, і нехай $x \in \mathbb{R}$ – деяка точка, така, що $p(x) = y$. Тоді існує єдине підняття $\widetilde{h}$ відображення h, для якого $\widetilde{h}(x) = x$, і за Лемою 3.5.1(iv) $p^{-1}(A)$ є множиною нерухомих точок відображення $\widetilde{h}^2$. Більш того, оскільки $\widetilde{h}^2$ має степінь 1, з (1) маємо, що $\widetilde{h}^2 = \widetilde{\mathbf{F}}_{\alpha\circ p}$. Оскільки x також є нерухомою точкою відображення $\widetilde{h}^2$, ми отримуємо, що $0 = \alpha \circ p(x) = \alpha(y)$.

(3) Розглянемо два потоки на $\mathbb{R}$ і S^1 відповідно:

$$\widetilde{\mathbf{F}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \widetilde{\mathbf{F}}(x, \varphi_2) = x + \varphi_2,$$
$$\mathbf{F} : S^1 \times \mathbb{R} \to S^1, \qquad \mathbf{F}(z, \varphi_2) = ze^{2\pi i \varphi_2}.$$

Очевидно, що $\widetilde{\mathbf{F}}$ є підняттям $\mathbf{F}$, і $h_{\varphi_2} = \mathbf{F}_{\alpha_{\varphi_2}}$. Тоді за Лемою 3.4.6(2) відображення

$$\widetilde{h}_{\varphi_2} := \widetilde{\mathbf{F}}_{\alpha_{\varphi_2}\circ p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \widetilde{h}_{\varphi_2}(x) = x + (1 - \varphi_2)\alpha_0(x) + \varphi_2\alpha_1(x)$$

є підняттям відображення h_{φ_2}. Очевидно, що $\widetilde{h}_{\varphi_2} = (1-\varphi_2)\widetilde{h}_0 + \varphi_2\widetilde{h}_1$. Оскільки h_0 і h_1 є гомеоморфізмами (дифеоморфізмами класу $\mathcal{C}^r$), маємо, що відображення $\widetilde{h}_0$ і $\widetilde{h}_1$ також є гомеоморфізмами. Отже, такими ж є і їх *опукла лінійна комбінація* $\widetilde{h}_{\varphi_2}$ та індуковане відображення h_{φ_2}. $\square$

3.7 Потоки без нерухомих точок

Нехай X – гаусдорфовий топологічний простір і $\mathbf{F}\colon Y \times \mathbb{R} \to Y$ – неперервний потік на відкритій підмножині $Y \subset X \times S^1$, для якого виконуються наступні умови:

(Ф1) *орбіти потоку* $\mathbf{F}$ *є в точності компонентами зв'язності перетинів* $(x \times S^1) \cap Y$ *для всіх* $x \in X$.

(Ф2) *Потік* $\mathbf{F}$ *допускає тривіалізацію для кожної точки* $(y, s) \in Y$*;*

(Ф3) *множина* $B = \{x \in X \mid x \times S^1 \subset Y\}$ *є щільною в* X*;*

(Φ4) *для кожного $x \in X$, перетин $(x \times S^1) \cap Y$ має лише скінченну кількість компонент зв'язності (які за (Φ1) є орбітами потоку* $\mathbf{F}$*).*

Таким чином кожна орбіта потоку $\mathbf{F}$ є або $x \times S^1$, або деякою дугою $x \times S^1$, і, зокрема, потік $\mathbf{F}$ не має нерухомих точок. Також з умови (Φ3) випливає, що множина періодичних траєкторій потоку $\mathbf{F}$ є щільною у $X \times S^1$. Тоді доповнення до B:

$$A := X \setminus B = \{x \in X \mid x \times S^1 \not\subset Y\}$$

складається з точок $x \in X$, для яких $x \times S^1$ містять незамкнену орбіту потоку $\mathbf{F}$.

Також буде зручно використовувати наступні позначення для $x \in X$:

$$L_x := (x \times S^1) \cap Y, \qquad \widetilde{L}_x := p^{-1}(L_x) = (x \times \mathbb{R}) \cap \widetilde{Y}.$$

Приклад 3.8. *Нехай X – гладкий многовид, і G – векторне поле над $X \times S^1$, визначене формулою $G(x, s) = \frac{\partial}{\partial s}$, отже його орбіти є колами $x \times S^1$. Нехай $Y \subset X \times S^1$. Тоді добре відомо, що існує невід'ємна $\mathcal{C}^\infty$ функція $\alpha : X \times S^1 \to [0; +\infty)$, для якої $Y = (X \times S^1) \setminus \alpha^{-1}(0)$. Визначемо ще одне векторне поле F над $X \times S^1$ за формулою $F = \alpha G$. Нехай також*

$$\mathbf{F} : (X \times S^1) \times \mathbb{R} \to X \times S^1$$

є потоком над $X \times S^1$, породженим полем F. Тоді Y є множиною не нерухомих точок потоку $\mathbf{F}$, і індукований потік над Y задовольняє умови (Φ1) та (Φ2). Виконання інших двох умов (Φ3) і (Φ4) залежить тільки від вибору Y. Наприклад, вони будуть виконуватись, якщо доповнення $(X \times S^1) \setminus Y$ скінченне.

Теорема 3.8.1. *Нехай потік $\mathbf{F}$ задовольняє умови (Φ1)-(Φ4). Нехай також $h : Y \to Y$ – гомеоморфізм із наступними властивостями:*

(1) *$h(L_x) \subset x \times S^1$ для кожного $x \in X$, а отже h зберігає першу координату, і зокрема, залишає інваріантною кожну періодичну орбіту потоку $\mathbf{F}$, однак він може міняти місцями неперіодичні орбіти, що містяться в $x \times S^1$.*

(2) *Для кожного $x \in B$ обмеження $h : x \times S^1 \to x \times S^1$ має степінь -1 як відображення кола у себе.*

Тоді існує єдина неперервна функція $\alpha : Y \to \mathbb{R}$, для якої

(а) *$h^2(x,s) = \mathbf{F}(x,s,\alpha(x,s))$ для всіз $(x,s) \in Y$, зокрема h^2 зберігає **кожну** орбіту потоку $\mathbf{F}$;*

(б) *$\alpha(x,s) = 0$ рівносильно $h(x,s) = (x,s)$;*

(в) *якщо також X є многовидом класу $\mathcal{C}^r$, $(0 \le r \le \infty)$, потік $\mathbf{F}$ належить до класу $\mathcal{C}^r$ і допускає $\mathcal{C}^r$ тривіалізацію, і h налэжить до $\mathcal{C}^r$, то α також належить до класу $\mathcal{C}^r$.*

Доведення. Нехай $p\colon X \times \mathbb{R} \to X \times S^1$ – нескінченне циклічне накриття множини $X \times S^1$, визначене за формулою $p(x,s) = (x, e^{2\pi is})$ і $\xi(x,s) = (x, s+1)$ є дифеоморфізмом простору $X \times \mathbb{R}$, який породжує групу $\mathbb{Z}$ накриваючих перетворень. Зокрема, $p \circ \xi = p$. Позначимо $\widetilde{Y} = p^{-1}(Y)$. Тоді обмеження $p\colon \widetilde{Y} \to Y$ є накриттям множини Y.

Нехай $\widetilde{\mathbf{F}} : \widetilde{Y} \times \mathbb{R} \to \widetilde{Y}$ – підняття потоку $\mathbf{F}$, тоді

$$p \circ \widetilde{\mathbf{F}}(y, \varphi_2) = \mathbf{F}(p(y), \varphi_2), \qquad (y, \varphi_2) \in \widetilde{Y} \times \mathbb{R}.$$

Отже, орбіти потоку $\widetilde{\mathbf{F}}$ в точності є компонентами зв'язності простору $\widetilde{L}_x$ для всіх $x \in X$. Зокрема, всі орбіти потоку $\widetilde{\mathbf{F}}$ є незамкненими. Очевидно, що для

$x \in X$ наступні умови є еквівалентними:

- $x \times \mathbb{R}$ є орбіюю потоку $\widetilde{\mathbf{F}}$;
- $x \times \mathbb{R} \subset \widetilde{Y}$;
- $x \times S^1$ є орбітою потоку $\mathbf{F}$;
- $x \times S^1 \subset Y$, тобто $x \in B$.

Лема 3.8.2. *Нехай $\widetilde{h} : \widetilde{Y} \to \widetilde{Y}$ – деяке підняття гомеоморфізма h, тобто $p \circ \widetilde{h} = h \circ p$. Тоді виконуєтьcя наступні умови:*

(i) $\widetilde{h}(\widetilde{L}_x) \subset \widetilde{L}_x$ *для всіх* $x \in X$*;*

(ii) *якщо* $\widetilde{h}_1$ *– інше підняття гомеоморфізма* h*, то* $\widetilde{h}_1^2 = \widetilde{h}^2$*;*

(iii) *для кожного* $x \in X$ *обмеження* $\widetilde{h} : \widetilde{L}_x \to \widetilde{L}_x$ *строго спадає в тому сенсі, що якщо* $h(x, s) = (x, \varphi_2)$ *для деяких* $s, \varphi_2 \in \mathbb{R}$*, то* $s > \varphi_2$*;*

(iv) *для кожного* $x \in X$ *звуження* $\widetilde{h}^2$ *залишає інваріантними всі орбіти потоку* $\widetilde{\mathbf{F}}$*.*

Доведення. (i) Помітимо, що $p \circ \widetilde{h}(\widetilde{L}_x) = h \circ p(\widetilde{L}_x) = h(L_x) \subset L_x$, звідки

$$\widetilde{h}(\widetilde{L}_x) \subset p^{-1}\big(h(L_x)\big) \subset p^{-1}(L_x) = \widetilde{L}_x.$$

(ii) Нехай $x \in B$, отже $x \times S^1 \subset Y$ є орбітою потоку $\mathbf{F}$. Тоді звуження $p|_{x\times\mathbb{R}} : x \times \mathbb{R} \to x \times S^1$ є універсальним накриваючим відображенням, $h|_{x\times S^1} : x \times S^1 \to x \times S^1$ – відображення степені -1, а $\widetilde{h}|_{x\times\mathbb{R}}, \widetilde{h}_1|_{x\times\mathbb{R}} : x \times \mathbb{R} \to x \times \mathbb{R}$ є двома підняттями відображення $h|_{x\times S^1}$. Тоді за Лемою 3.5.1(iv) має місце рівність $\widetilde{h}^2|_{x\times\mathbb{R}} = \widetilde{h}_1^2|_{x\times\mathbb{R}}$. Тому $\widetilde{h}^2 = \widetilde{h}_1^2$ на $B \times \mathbb{R}$. Але за властивістю (Ф3), множина B є щільною в X, звідки $B \times \mathbb{R}$ є щільною в $X \times \mathbb{R}$. Оскільки простір X є гаусдорфовим, то звідси випливає рівність $\widetilde{h}^2 = \widetilde{h}_1^2$ на всій множині $X \times \mathbb{R}$.

(iii) Якщо $x \in B$, то $h|_{x\times S^1} : x \times S^1 \to x \times S^1$ є відображенням степені -1, звідки $\widetilde{h}|_{x\times\mathbb{R}} : x \times \mathbb{R} \to x \times \mathbb{R}$ зберігає орієнтацію прямої $x \times \mathbb{R}$, тобто строго спадає.

Припустимо, що $x \in X \setminus B$, тобто $x \times \mathbb{R} \not\subset \widetilde{Y}$. Нам потрібно показати, що відображення $\widetilde{h}|_{\widetilde{L}_x} : \widetilde{L}_x \to \widetilde{L}_x$ строго спадає, тобто якщо $(x, s_0), (x, s_1) \in \widetilde{L}_x$ є двома різними точками, для яких $s_0 < s_1$, $(x, t_0) = \widetilde{h}(x, s_0)$, і $(x, t_1) = \widetilde{h}(x, s_1)$, то $t_0 > t_1$.

Оскільки $\widetilde{h}$ є гомеоморфізмом, маємо $t_0 \neq t_1$. Припустимо, що $t_0 < t_1$. Тоді існує $a > 0$ і два відкриті околи $V \subset U$ точки x у X, для яких

$$\widetilde{h}\big(V \times s_i\big) \ \subset \ U \times (t_i - a; t_i + a), \quad i = 0, 1, \tag{3.4}$$

$$t_0 + a \ < \ t_1 - a. \tag{3.5}$$

За властивістю (Ф3), множина B є щільною в X, тому існує точка $y \in B \cap V \neq \varnothing$.

Тоді, з однієї сторони, $y \times \mathbb{R} \subset \widetilde{Y}$ є орбітою потоку $\widetilde{\mathbf{F}}$, і гомеоморфізм $\widetilde{h} : y \times \mathbb{R} \to y \times \mathbb{R}$ зберігає орієнтацію, тому якщо $(y, t'_i) = \widetilde{h}(y, s_i)$, $i = 0, 1$, то $t'_0 > t'_1$.

З іншої сторони, згідно з (3.4) $t'_i \in (t_i - a; t_i + a)$, звідки за (3.5):

$$t'_0 \ < \ t_0 + a \ < \ t_1 - a \ < \ t'_1,$$

що приводить до суперечності. Отже, $t_0 > t_1$.

(iv) Якщо $x \in B$, то $\widetilde{L}_x = x \times \mathbb{R}$ є орбітою потоку $\widetilde{\mathbf{F}}$ і за (i) вона є інваріантною відносно гомеоморфізма $\widetilde{h}$. Тоді вона також є інваріантною відносно гомеоморфізма $\widetilde{h}^2$.

Припустимо, що $x \in X \setminus B$. Тоді за властивістю (Ф4), якщо $L_x = (x \times S^1) \cap Y$ складається із скінченної кількості компонент зв'язності $I_0, \ldots, I_{n-1}$ для деякого n, пронумерованих у циклічному порядку взвовж кола $x \times S^1$. Звідси випливає, що $\widetilde{L}_x$ є незв'язним об'єднанням зліченної кількості відкритих інтервалів I_i, $(i \in \mathbb{Z})$, які є орбітами потоку $\mathbf{F}$, що дозволяє пронумерувати їх наступним чином: $\xi(\widetilde{I}_k) = \widetilde{I}_{k+n}$ і $p(\widetilde{I}_k) = I_{k \bmod n}$.

Оскільки $\widetilde{h}$ є строго спадним гомеоморфізмом множини $\widetilde{L}_x$, то існує $a \in \mathbb{Z}$, таке, що $\widetilde{h}(\widetilde{I}_k) = \widetilde{I}_{a-k}$. Отже,

$$\widetilde{h}^2(\widetilde{I}_k) = \widetilde{h}(\widetilde{I}_{a-k}) = \widetilde{I}_{a-(a-k)} = \widetilde{I}_k. \qquad \square$$

Тепер ми можемо вивести нашу Теорему з Леми 3.8.2.

(а) Застосовуючи Наслідок 3.4.7 до відображення h^2 маємо, що існує єдина неперервна функція $\alpha : Y \to \mathbb{R}$, для якої

$$\widetilde{h}^2(x,s) = \widetilde{\mathbf{F}}(x,s,\alpha \circ p(x,s)), \qquad h^2(x,s) = \mathbf{F}(x,s,\alpha(x,s)).$$

(б) Нехай $(x,s) \in X \times S^1$. Якщо $x \in B$, то $x \times S^1 \subset Y$ є орбітою потоку $\mathbf{F}$ і за Наслідком 3.6.1(б) $\alpha(x,s) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $h^2(x,s) = (x,s)$.

Припустимо, що $x \in X \setminus B$. Тоді (x,s) є не періодичною точкою потоку $\mathbf{F}$, звідки $h^2(x,s) = \mathbf{F}(x,s,\alpha(x,s)) = (x,s)$ може виконуватись тоді і тільки тоді, коли $\alpha(x,s) = 0$.

(в) Властивості гладкості функції α схожим чином випливають з тведження (в) Наслідку 3.4.7. $\square$

3.9 Полярні координати

Нехай $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times [0;+\infty)$, $\mathrm{Int}(\mathbb{H}) = \mathbb{R} \times (0;+\infty)$, і

$$p : \mathbb{H} \to \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2, \qquad p(\rho,\phi) = \rho e^{2\pi i\phi} = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi),$$

є *нескінченно розгалудженим накриваючим відображенням, яке задає полярні координати.*

Лема 3.9.1. ([25, Лема 11.1]) *Нехай $U \subset \mathbb{C}$ є відкритим околом точки 0, а $h : U \to \mathbb{C}$ є $\mathcal{C}^r$, $1 \le r \le \infty$, гладким вкладенням, для якого $h(0) = 0$. Тоді існує $\mathcal{C}^{r-1}$-вкладення $\widetilde{h} : p^{-1}(U) \to \mathbb{H}$, для якого $p \circ \widetilde{h} = h \circ p$.*

Припустимо також, що матриця Якобі $J(h,0)$ гомеоморфізма h є ортогональною в 0. Тоді існує $a \in \mathbb{R}$, таке, що для кожного $s \in \mathbb{R}$

$$\widetilde{h}(0,s) = \begin{cases} (0, a+s) \ \textit{if} \ J(h,0) \in \mathrm{SO}(2), \\ (0, a-s) \ \textit{if} \ J(h,0) \in \mathrm{SO}^{-}(2). \end{cases}$$

Отже, у другій умові (де h змінює орієнтацію) $\widetilde{h}^2(0,s) = (0,s)$, тобто $\widetilde{h}^2$ завжди є нерухомим на $0 \times \mathbb{R}$.

Нехай $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – однорідний многочлен без кратних множників степені $k \geq 2$ і $F = -\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$ – гамільтонове векторне поле многочлена f. Оскільки обмеження $p : \mathrm{Int}(\mathbb{H}) \to \mathbb{R}^2 \setminus 0$ є нескінченним циклічним накриваючим відображенням, поле F індукує векторне поле $\widetilde{F}$ на $\mathrm{Int}(\mathbb{H})$. Можна навіть отримати точні формули для $\widetilde{F}$ (див. [26, §4.2, Corolary 4.4]):

$$\widetilde{F}(r,\phi) = \left(\tfrac{\partial}{\partial\rho}, \tfrac{\partial}{\partial\phi}\right) \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\frac{1}{\rho}\sin\phi & \frac{1}{\rho}\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f'_y(z) \\ f'_x(z) \end{pmatrix},$$

де $z = p(\rho,\phi) = \rho e^{2\pi i}$. Останню формулу можна звести до більш спрощеної форми. Визначимо наступну функцію $q : \mathbb{C} \setminus 0 \to \mathbb{C}$ за допомогою формули

$$q(z) = \frac{-f'_y(z) + i f_x(z)}{z} = \frac{(-f'_y(z) + i f_x(z))\bar{z}}{|z|^2}.$$

Тоді

$$\widetilde{F}(r,\phi) = \mathrm{Re}(q(z))\tfrac{\partial}{\partial\rho} + \mathrm{Im}(q(z))\tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial}{\partial\phi}.$$

Оскільки f є однорідним степені $k \geq 2$, отримуємо, що $\widetilde{F}(r,\phi)$ гладко продовжується на $\mathbb{H}$.

Нехай $\mathbf{F}$ і $\widetilde{\mathbf{F}}$ є локальними потоками, породженими полями F і $\widetilde{F}$ відповідно. Тоді $\mathbf{F}_t \circ p(\rho,\phi) = p \circ \widetilde{\mathbf{F}}_t(\rho,\phi)$ у всіх випадках, коли визначені всі частини цієї рівності.

Приклад 3.10. *1) Нехай* 0 *є невиродженим локальним екстремумом функції* f*. Тоді можна припустити, що* $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$*. В цьому випадку*

$$F(x,y) = -y\tfrac{\partial}{\partial x} + x\tfrac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{F}(z,\varphi_2) = ze^{2\pi i\varphi_2},$$
$$\widetilde{F}(\rho,\phi) = \tfrac{\partial}{\partial\phi}, \qquad \widetilde{\mathbf{F}}(\rho,\phi,\varphi_2) = (\rho,\phi+\varphi_2).$$

2) Нехай 0 *є невиродженим сідлом, тоді можна припустити, що* $f(x,y) = xy$*. Тоді*

$$F(x,y) = -x\tfrac{\partial}{\partial x} + y\tfrac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{F}(x,y,\varphi_2) = \bigl(xe^{-\varphi_2}, ye^{\varphi_2}\bigr),$$
$$\widetilde{F}(\rho,\phi) = \rho\cos 2\phi\tfrac{\partial}{\partial\rho} + \sin 2\phi\tfrac{\partial}{\partial\phi}.$$

Зазначимо, за написання точних формул для потоку $\widetilde{\mathbf{F}}$ *є достатньо складною задачею.*

3) Якщо 0 *є виродженою критичною точкою функції* f*, і тому* $\deg f \geq 3$*, то ситуація є більш складною. Зазначимо, що в цьому випадку* $\widetilde{F}$ *дорівнює нулю на* $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R}\times 0$*, звідки* $\widetilde{\mathbf{F}}$ *нерухомий на цій прямій. Знову формули для потоків* $\mathbf{F}$ *і* $\widetilde{\mathbf{F}}$ *є дуже складними.*

Лема 3.10.1. (див. [26, Теорема 1.6], [25, Доведення Теореми 5.6]) *Нехай* $U \subset \mathbb{R}^2$ *– відкритий окіл початку координат* $0 \in \mathbb{R}^2$*,* $h : U \to \mathbb{R}^2$*– вкладення, яке зберігає орбіти потоку* $\mathbf{F}$*, а* $\alpha : U \setminus 0 \to \mathbb{R}$ *є* $\mathcal{C}^\infty$ *функцією, для якої* $h(x) = \mathbf{F}(x,\alpha(x))$ *для всіх* $x \in U\setminus 0$*. Нехай також* $\widetilde{h} : p^{-1}(U) \to \mathbb{H}$ *– деяке підняття вкладення* h*, як у Лемі 3.9.1. Тоді функція* α *може бути визначена в точці* x *так, що вона буде належати класу* $\mathcal{C}^\infty$ *в околі* U*, якщо виконується одна з наступних умов:*

(а) x *є невиродженим локальним екстремумом функції* f *або (можливо виродженою) сідловою точкою;*

(б) x *є виродженим локальним екстремумом функції* f *і* $\widetilde{h}$ *є нерухомим на прямій* $\mathbb{R}\times 0$*.*

(в) *x є виродженим локальним екстремумом функції f та існує відкритий окіл $V \subset U$ та інше вкладення $q : U \to \mathbb{R}^2$, для якого $q(V) \subset U$, q зберігає орбіти потоку* **F** *і* **змінює** *їх орієнтацію, і $h = q^2$.*

Доведення. Випадки (а) і (б) доведені в [26, Theorem 1.6], див. також доведення Теореми 5.6 у [25].

Випадок(б) $\Rightarrow$ випадок(в). Нехай $\widetilde{q} : p^{-1}(U) \to \mathbb{H}$ – довільне підняття вкладення q, як в Лемі 3.9.1. Тоді $\widetilde{q}^2$ є підняттям відображення $q^2 = h$. Більш того, оскільки $\widetilde{q}$ змінює орієнтацію орбіт, з Леми 3.9.1 маємо, що $\widetilde{q}^2$ є нерухомим на прямій $\mathbb{R} \times 0$. Таким чином, умова, що $\widetilde{h}$ є нерухомим на прямій $\mathbb{R} \times 0$ виконується. А отже, з доведеного випадку (б) випливає, що функція α може бути визначена в точці x так, що вона буде належати класу $\mathcal{C}^\infty$ в околі U. $\square$

3.11 Надщерблені циліндри відображення $f \in \mathcal{F}(M, P)$

Нехай $f \in \mathcal{F}(M, P)$. У подальшому викладі ми будемо використовувати такі позначення.

(i) $K_1, \dots, K_k$ позначають всі критичні листи відображення f, і

$$\mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^{k} K_i.$$

(ii) Нехай R_{K_i}, $i = 1, \dots, k$, є f-регулярними околами листів K_i, які вибрані так, що $R_{K_i} \cap R_{K_j} = \varnothing$ для $i \neq j$.

(iii) Нехай також $L_1, \dots, L_l$ є всіма компонентами зв'язності $M \setminus \mathcal{K}$;

(iv) Для кожного $i = 1, \dots, l$ нехай

$$\mathcal{N}_i = \overline{L_i} \setminus \Sigma_f.$$

Тоді існують скінченна підмножина $Q_i \subset \{-1, 1\} \times S^1$, іммерсія $\phi_i : \big([-1, 1] \times S^1\big) \setminus Q_i \to \mathcal{N}_i$ і $\mathcal{C}^\infty$-вкладення $\eta : [0, 1] \to P$, для яких наступна діаграма є комутативною:

$$\begin{array}{ccc} \big([0;1]\times S^1\big)\setminus Q_i & \xrightarrow{\ \phi\ } & \mathcal{N}_i \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ [0;1] & \xrightarrow{\ \eta\ } & P \end{array}$$

де p_1 є проекцією на першу координату. Відмітимо, що ϕ може бети не ін'єктивною тільки у точках з $\{-1,1\}\times S^1$, і це може статися тільки коли $P=S^1$, див. Приклад 3.12 та Рисунок 3.12.0.1d) нижче.

Ми будемо називати $\mathcal{N}_i$ *надщербленим* циліндром відображення f, див. Рисунок 3.11.0.1.

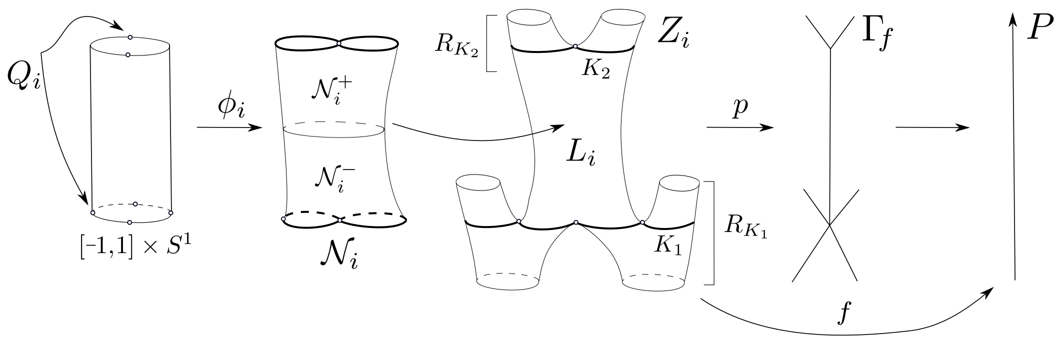


Рис. 3.11.0.1

Також буде зручно ввести наступні позначення:

$$\mathcal{N}_i^- = \phi_i\big([-1;0]\times S^1\big)\setminus Q_i\big), \qquad \mathcal{N}_i^+ = \phi_i\big([0;1]\times S^1\big)\setminus Q_i\big),$$
$$\mathrm{Int}\mathcal{N}_i = \phi_i\big((-1;1)\times S^1\big).$$

Ми будемо називати $\mathcal{N}_i^-$ і $\mathcal{N}_i^+$ *надщербленими напівциліндрами* циліндра $\mathcal{N}_i$ і відображення f, а $\mathrm{Int}\mathcal{N}_i$ – *внутрішністю* циліндра $\mathcal{N}_i$.

(v) Нехай також

$$Z_i = \mathcal{N}_i \bigcup \Big(\underset{\overline{\mathcal{N}_i}\cap K_j\neq\varnothing}{\cup} R_{K_j} \Big)$$

є об'єднанням надщербленого циліндра $\mathcal{N}_i$ з f-регулярними околами критичних листів функції f, які перетинають замикання $\overline{\mathcal{N}_i}$. Величину Z_i ми будемо називати *f-регулярним околом* циліндра $\mathcal{N}_i$.

Приклад 3.12. *a) Нехай $f : [0,1] \times S^1 \to P$ є відображенням класу $\mathcal{F}([0,1] \times S^1, P)$ без критичних точок, див. Рисунок 3.12.0.1a). Тоді воно має єдиний надщерблений циліндр $\mathcal{N} = [0,1] \times S^1$, який співпадає зі своїм f-околом і $\mathcal{K} = \varnothing$.*

b) Нехай $f : D^2 \to P$ є відображенням класу $\mathcal{F}(D^2, P)$, яке має тільки одну критичну точку z, див. Рисунок 3.12.0.1b). Тоді $\mathcal{K} = \{z\}$, відображення f має єдиний надщерблений циліндр $\mathcal{N} = D^2 \setminus \{z\}$, і його f-регулярний окіл є всім D^2.

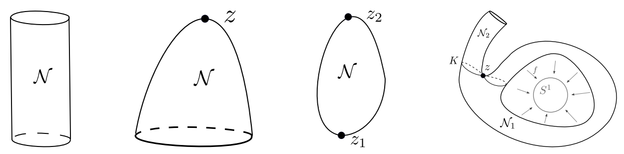
c) Нехай $f : S^2 \to P$ є відображенням класу $\mathcal{F}(S^2, P)$, яке має тільки дві критичні точки z_1 і z_2, які в цьому разі мають бути екстремумами відображення f, див. Рисунок 3.12.0.1c). Тоді $\mathcal{K} = \{z_1, z_2\}$, відображення f має єдиний надщерблений циліндр $\mathcal{N} = S^2 \setminus \{z_1, z_2\}$, і його f-регулярний окіл є всім S^2.

d) Нехай M є або 2-тором, або пляшкою Клейна з діркою і $f : M \to S^1$ є відображенням класу $\mathcal{F}(M, S^1)$, схематично показаним на Рисунку 3.12.0.1d). Воно має тільки одну критичну точку z і ця точка є сідлом, єдиний критичний лист $K = \mathcal{K}$, і два надщерблені циліндри $\mathcal{N}_1$ та $\mathcal{N}_2$. З Рисунка 3.12.0.1d) випливає, що $\overline{\mathcal{N}_1}$ перетинає тільки один K "з двох сторін", в тому сенсі, що обидва перетини $\overline{\mathcal{N}_1^-} \cap K$ і $\overline{\mathcal{N}_1^+} \cap K$ є не пустими.

e) Нехай $f : [0,1] \times S^1 \to \mathbb{R}$ є функцією Морса з одним мінімумом z є однією сідловою точкою y як на Рисунку 3.12.0.2. Тоді f має два критичні листи: точку z і критичний лист K, що містить y, і три надщерблених циліндра $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$, $\mathcal{N}_3$. Нехай R_K є f-регулярним околом листа K. Тоді відповідні f-регулярні околи надщерблених циліндрів задаються наступним чином:

$$Z_1 = \mathcal{N}_1 \cup \{z\} \cup R_K, \qquad Z_2 = \mathcal{N}_2 \cup R_K, \qquad Z_3 = \mathcal{N}_3 \cup R_K.$$

Наступна лема описує деякі прості властивості надщерблених циліндрів, які неважко довести.



a) b) c) d)

Рис. 3.12.0.1

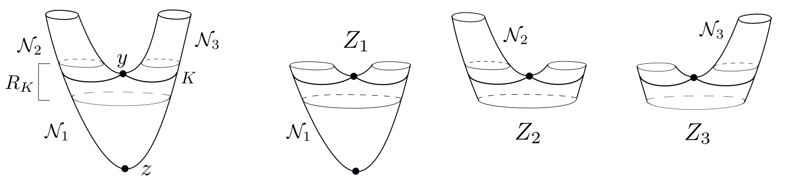


Рис. 3.12.0.2

Лема 3.12.1. *Нехай $\mathcal{N}$ є надщербленим циліндром відображення f, $\mathcal{N}^-$ і $\mathcal{N}^+$ є його надщербленими напівциліндрами, Z є f-регулярним околом циліндра $\mathcal{N}$, а $p : M \to \Gamma_f$ – проекція на граф відображення f. Тоді справедливі наступні твердження:*

(1) *$\mathcal{N}^-$ і $\mathcal{N}^+$ є орієнтовними многовидами. Більш того, якщо $P = \mathbb{R}$, то $\mathcal{N}$ також є орієнтовним. Однак, якщо $P = S^1$, то можна побудувати приклад відображення f, яке має неорієнтовний надщерблений циліндр, див. Приклад 3.12d).*

(2) *Обидва замикання $\overline{\mathcal{N}^-}$ і $\overline{\mathcal{N}^+}$ перетинають щонайбільше один критичний лист відображення f, і ці перетини складаютьcя з відкритих дуг, які є листами сингулярного шарування Ξ_f.*

(3) *Якщо $\mathcal{N} \cap K_i = \varnothing$, але $\overline{\mathcal{N}} \cap K_i \neq \varnothing$, то лист K_i критичною точкою відображення f, яка є локальним екстремумом.*

(4) *Якшо M є зв'язною, і $\overline{\mathcal{N}}$ не містить жодної сідлової точки відображення f, то $M = \overline{\mathcal{N}} = Z$, а f є одним з відображень з)-с) Прикладу 3.12.*

(5) *$\mathcal{N}' \cap \mathcal{N}'' \subset \mathcal{K}$ для будь-яких двох різних надщерблених циліндрів $\mathcal{N}'$ і $\mathcal{N}''$*

відображення f.

(6) *Кожен регулярний лист відображення f міститься у деякому надщербленому циліндрі f.*

Наступна теорема є принциповим технічним інструментом. Нехай M є (можливо неорієнтовною) компактною поверхнею, $f \in \mathcal{F}(M,P)$, $\mathcal{N}$ є надщербленим циліндром відображення f, а $Z = \mathcal{N} \bigcup \Big(\underset{\overline{\mathcal{N}} \cap K_j \neq \varnothing}{\cup} R_{K_j} \Big)$ – f-регулярний окіл циліндра $\mathcal{N}$.

Теорема 3.12.2. 1) *Нехай $V \subset \mathcal{N}$ – регулярний лист відображення f і $h \in \mathcal{S}(f|_Z)$ є дифеоморфізмом множини Z, таким, що $h(V) = V$ і h* **змінює** *орієнтацію листа V. Тоді кожен лист сингулярного шарування Ξ_f в Z є $(h^2,+)$-інваріантним, тобто h^2 не зміщує всі критичні точки відображення f у Z і зберігає всі інші листи шарування Ξ_f в Z разом з їх орієнтацією.*

2) *Припустимо також, що Z є орієнтовною і нехай $\mathbf{F}$ – деякий гамільтоновоподібний потік відображення $f|_Z$ на Z. Тоді існує єдина $\mathcal{C}^{\infty}$ функція $\alpha : Z \to \mathbb{R}$, для якої $h^2 = \mathbf{F}_{\alpha}$ на Z і $\alpha = 0$ у кожній нерухомій точці відображення h^2 в $\mathrm{Int}\mathcal{N}$ і у кожному локальному екстремумі z відображення f у Z.*

Доведення. 1) Зазначимо, що оскільки дифеоморфізм h змінює орієнтацію листа V, він також змінює орієнтацію всіх регулярних листів у циліндрі $\mathcal{N}$. Тому ці листи є $(h^2,+)$-інваріантними, і нам потрібно довести те саме для всіх інших листів шарування Ξ_f в Z.

Спочатку введемо наступні позначення. Якщо $\mathcal{K} \cap \overline{\mathcal{N}^-} \neq \varnothing$, то нехай K^- позначає єдиний критичний лист відображення f, який перетинає $\overline{\mathcal{N}^-}$, і нехай R_{K^-} є його f-регулярним околом. Інакше, коли $\mathcal{K} \cap \overline{\mathcal{N}^-} = \varnothing$, покладемо $K^- = R_{K^-} = \varnothing$. Визначимо далі K^+ та R_{K^+} аналогічним чином відносно $\mathcal{N}^+$. Тоді

$$Z = R_{K^-} \cup \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^+ \cup R_{K^+}.$$

Всі ці чотири множини є інваріантними для дифеоморфізма h, залишається довести, що h^2 зберігає листи шарування Ξ_f з їх орієнтаціями у кожній з цих множин.

1a) Покажемо, що h^2 *зберігає всі листи шарування* Ξ_f *в* $\mathcal{N}^-$.

Оскільки $\mathcal{N}^-$ є орієнтовним многовидом, можна побудувати гамільтоновоподібний потік дифеоморфізма f на $\mathcal{N}^-$. Очевидно, $\mathbf{F}$ задовольняє умови (Ф1)-(Ф4). Більш того, оскільки дифеоморфізм h змінює орієнтацію всіх періодичних орбіт потоку $\mathbf{F}$ у $\mathcal{N}^+$, з Теореми 3.8.1 випливає, що існує єдина $\mathcal{C}^\infty$ функція $\alpha : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$, така, що $h^2|_{\mathcal{N}^-} = \mathbf{F}_\alpha$ і α обертається в нуль в нерухомих точках відображення h^2 на регулярних листах відображення f у $\mathcal{N}^-$. Зокрема, кожна неперіодична орбіта потоку $\mathbf{F}$ в $\mathcal{N}^+$ також є $(h^2, +)$-інваріантною.

1b) Покажемо, що кожен лист шарування Ξ_f в K^- також є $(h^2, +)$-інваріантним. З цього буде випливати $(h^2, +)$-інваріантність всіх листів шарування Ξ_f в R_{K^-} (див. доведення імплікації (iii)⇒(i) в [25, Lemma 7.4]).

Якщо $K^- = \varnothing$ нема що доводити.

Якщо $K^- \cap \mathcal{N}^- = \varnothing$, то за Лемою 3.12.1(3) K^- є локальним екстремумом відображення f. Отже, K є елементом шарування Ξ_f і очевидно є інваріантним відносно відображення h, а отже і відносно h^2.

Тому будемо вважати, що $K^- \cap \mathcal{N}^- \neq \varnothing$. Тоді цей перетин містить неперіодичну орбіту γ потоку $\mathbf{F}$. Оскільки γ є $(h^2, +)$-інваріантною, з [19, Claim 7.1.1] або з [25, Lemma 7.4] випливає, що *всі елементи шарування* Ξ_f *також є* $(h^2, +)$-*інваріантними*.

Нагадаємо просте доведення цього факту. Дійсно, нехай v є вершиною γ, а отже і критичною точкою відображення f. Тоді $h(v) = v$, звідки h^2 зберігає множину всіх ребер, інцидентних до v. Більш ого, оскільки h^2 зберігає орієнтацію на v, він має також *зберігати циклічний порядок ребер, що входять до* v. Але оскільки γ (що є одним з таких ребер) є $(h^2, +)$-інваріантною, маємо, що всі інші ребра інцидентні до v. Застосовуючи ті самі аргументи до цих ребер і так далі, ми побачимо, що h^2 зберігає всі ребра K разом з їх орієнтаціями.

Доведення для $\mathcal{N}^+$ і R_{K^+} є аналогічними.

2) Припустимо тепер, що Z – деяка орієнтовна поверхня і $\mathbf{F}$ – деякий гамільтоновоподібний потік відображення f. З 1) ми знаємо, що h^2 зберігає всі орбіти потоку $\mathbf{F}$ разом з їх орієнтаціями.

2a) Ми стверджуємо, що *існує єдина $\mathcal{C}^\infty$ функція $\alpha : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$, для якої $h^2|_{\mathcal{N}} = \mathbf{F}_\alpha$ і α обертається в нуль на нерухомих точках відображення h^2 на періодичних орбітах.*

Якщо обидва K^- і K^+ є непустими та різними, то обмеження потоку $\mathbf{F}$ на $\mathcal{N}$ задовольняє умови (Ф1)-(Ф4). Більш того, оскільки дифеоморфізм h змінює орієнтацію всіх періодичних орбіт потоку $\mathbf{F}$, дане твердження випливає з Теореми 3.8.1, як в 1a).

Однак, якщо $K^- = K^+$, як у Прикладі 3.12d), ситуація трохи ускладнюється: $\mathcal{N}$ може не мати форму $([-1,1] \times S^1) \setminus Q$ для деякої скінченної множини $Q \subset \{-1,1\} \times S^1$, а отже Теорему 3.8.1 не можна буде застосувати безпосередньо. Тим не менше, цю теорему можна застосувати до кожної з множин $\mathcal{N}^-$, $\mathcal{N}^+$, $\mathrm{Int}\mathcal{N}$ і побудувати три функції

$$\alpha^- : \mathcal{N}^- \to \mathbb{R}, \qquad \alpha^- : \mathcal{N}^+ \to \mathbb{R}, \qquad \alpha^0 : \mathrm{Int}\mathcal{N} \to \mathbb{R}$$

які задовольняють умови $h^2|_{\mathcal{N}^-} = \mathbf{F}_{\alpha^-}$, $h^2|_{\mathcal{N}^+} = \mathbf{F}_{\alpha^+}$, $h^2|_{\mathrm{Int}\mathcal{N}} = \mathbf{F}_{\alpha^0}$, і обертаються в нуль в нерухомих точках відображення h^2 на періодичних орбітах. З єдиності таких функцій отримуємо $\alpha^- = \alpha^0$ на $\mathcal{N}^- \cap \mathrm{Int}\mathcal{N}$ і $\alpha^+ = \alpha^0$ на $\mathcal{N}^+ \cap \mathrm{Int}\mathcal{N}$.

Можливою проблемою є те, що $\mathcal{N}$ перетинає K^- «з двох сторін», а отже у загальному випадку α^+ і α^- можуть відрізнятись на $\mathcal{N}^- \cap \mathcal{N}^+ \cap K^-$. Однак, $\mathcal{N}^- \cap \mathcal{N}^+ \cap K^-$ складається з неперіодичних орбіт потоку $\mathbf{F}$, а отже для кожної такої орбіти γ з тотожності $h^2|_\gamma = \mathbf{F}_{\alpha^-}|_\gamma = \mathbf{F}_{\alpha^+}|_\gamma$ випливає, що $\alpha^- = \alpha^+$ на γ.

Отже, $\alpha^- = \alpha^+$ на $\mathcal{N}^- \cap \mathcal{N}^+ \cap K^-$, а тому ці функції задають коректно визначену $\mathcal{C}^\infty$ функцію $\alpha : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє $h^2|_{\mathrm{Int}\mathcal{N}} = \mathbf{F}_\alpha$ і α обертається в нуль на нерухомих точках відображення h^2 на періодичних орбітах.

2b) Залишається показати, що α *продовжується до функції зсуву для* h^2 *на* $R_{K^-} \cup R_{K^+}$, а отже і на всьому Z. Достатньо довести це для R_{K^-}.

Якщо $K^- = \varnothing$, то $R_{K^-} = \varnothing$ і тут нема чого доводити.

Якщо K^- є локальним екстремумом відображення f, то за Лемою 3.10.1 (випадки (а) і (в) для невиродженої і виродженої критичної точки) α може бути визначен на K^- і тому стає $\mathcal{C}^\infty$.

У всіх інших випадках K^- містить неперіодичну орбіту потоку $\mathbf{F}$. Тоді за імплікацією (ii)⇒(iv) з [25, Lemma 7.4], α продовжується до $\mathcal{C}^\infty$ функції зсуву для h^2 на R_{K^-}. Залишилося довести таку лему:

Лема 3.12.3. $\alpha(z) = 0$ *для всіх локальних екстремумів відображення* f *в* Z.

Доведення. Дійсно, легко бачити, що як завгодно малий окіл точки z містить деяку періодичну орбіту γ потоку $\mathbf{F}$. Оскільки дифеоморфізм h змінює орієнтацію орбіти γ, з Леми 3.5.1(i) маємо, що дифеоморфізм h завжди має щонайменше одну нерухому точку $x \in \gamma$ (насправді він має навіть дві такі точки). Тоді за наслідком 3.6.1(б) справедлива наступна рівність: $\alpha(x) = 0$. Отже, за неперервністю функції α отримуємо також, що $\alpha(z) = 0$. □

Теорема 3.12.2 доведена. □

3.13 Створення майже періодичних дифеоморфізмів

Нехай M – компактна орієнтовна поверхня, $f \in \mathcal{F}(M, P)$, Z є f-адаптованою підповерхнею, $h \in \mathcal{S}(f)$ є таким, що $h(Z) = Z$ і $m \geq 2$. Якщо $h^m|_Z$ є ізотопним до тотожнього відображення на Z за допомогою f-зберігаючої ізотопії, то наступна Лема 3.13.1 визначає умови, коли можна змінити h на $M \setminus Z$

таким чином, щоб його m-та степінь була f-зберігаючою ізотопією до тотожнього відображення на всьому M. Доведення подібне до доведення Леми [25, Lemma 13.1(3)], в якій M є 2-диском або циліндром.

Лема 3.13.1. (cf. [25, Lemma 13.1(3)]) *Нехай M – зв'язна компактна орієнтовна поверхня, $f \in \mathcal{F}(M,P)$, Z є f–адаптованою підповерхнею, і $h \in \mathcal{S}(f)$ є таким, що $h(Z) = Z$. Припустимо, що виконуються наступні умови:*

(1) *Кожна компонента поверхні Z містить як мінімум одну сідлову точку відображення f.*

(2) *h^m є ізотопним в $\mathcal{S}(f)$ до дифеоморфізма τ, нерухомого на деякому околі підповерхні Z (за [25, Lemma 7.1] ця умова виконується, якщо існує $\mathcal{C}^\infty$ функція $\alpha: Z \to \mathbb{R}$, для якої $h^m|_Z = \mathbf{F}_\alpha$).*

(3) *Існують $m \geq 2$ та $a \geq 1$, такі, що компоненти зв'язності множини $\overline{M \setminus Z}$ можуть бути занумеровані наступним чином*

$$
\begin{array}{cccc}
Y_{1,0} & Y_{1,1} & \cdots & Y_{1,m-1} \\
Y_{2,0} & Y_{2,1} & \cdots & Y_{2,m-1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
Y_{a,0} & Y_{a,1} & \cdots & Y_{a,m-1}
\end{array}
\tag{3.6}
$$

так, що $h(Y_{i,j}) = Y_{i,j+1 \bmod m}$ для всіх i, j, тобто h циклічно зсуває сповбці в (3.6).

Тоді існує $g \in \mathcal{S}(f)$, для якої $g = h$ на Z і $g^m \in \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$, тобто $g^m = \mathbf{F}_\beta$ для деякої $\mathcal{C}^\infty$ функції $\beta : M \to \mathbb{R}$.

Доведення. Нехай $Y_j = \bigcup\limits_{i=1}^{a} Y_{i,j}$, $j = 0, \ldots, m-1$ – об'єднання компонент з одного стовбця матриці (3.6). Тоді $h(Y_j) = Y_{j+1 \bmod m}$. Відмітимо, що з умови (3) випливає, що $h^m(Y_{i,j}) = Y_{i,j}$ для всіх i, j.

Покажемо, що шуканий дифеоморфізм $g \in \mathcal{S}(f)$ задається формулою:

$$g(x) = \begin{cases} h(x), & x \in Z \cup Y_0 \cup \dots \cup Y_{m-2}, \\ \tau^{-1} \circ h(x), & x \in Y_{m-1}. \end{cases}$$

Дійсно, за означенням $g = h$ на Z. Більш того, оскільки τ є нерухомим на деякому околі Z, він є також нерухомим біля $Z \cap Y_{m-1}$. Таким чином, $g = h = \tau^{-1} \circ h$ біля $Z \cap Y_{m-1}$, а тому g є коректно визначеним відображенням класу $\mathcal{C}^{\infty}$. Залишається довести, що $g^m = \mathbf{F}_{\beta} \in \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$ для деякої $\mathcal{C}^{\infty}$ функції $\beta : M \to \mathbb{R}$.

Нехай $\mathbf{F}$ – гамільтоновоподібний потік для f. Оскільки τ і h^m є ізотопними в $\mathcal{S}(f)$, маємо, що $\tau^{-1} \circ h^m \in \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$. Отже, за Лемою 1.7.3, $\tau^{-1} \circ h^m = \mathbf{F}_{\alpha}$ для деякої $\mathcal{C}^{\infty}$ функції $\alpha : M \to \mathbb{R}$.

Оскільки $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$ є нормальною підгрупою в $\mathcal{S}(f)$, маємо також, що

$$h^j \circ (\tau^{-1} \circ h^m) \circ h^{-j} = h^j \circ \tau^{-1} \circ h^{m-j} \in \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f), \qquad j = 0, \dots, m-1,$$

Отже, знову за Лемою 1.7.3, $h^j \circ \tau^{-1} \circ h^{m-j} = \mathbf{F}_{\alpha_j}$ для деякої $\mathcal{C}^{\infty}$ функції $\alpha_j : M \to \mathbb{R}$.

Оскільки τ є нерухомою на деякому околі підповерхні Z, для кожного j маємо

$$\mathbf{F}_{\alpha_j} = h^j \circ \tau^{-1} \circ h^{m-j} = \tau^{-1} \circ h^m = \mathbf{F}_{\alpha} \text{ on } Z.$$

Тоді з припущення (1), що кожна компонента зв'язності Z' поверхні Z містить сідлову точку, випливає, що потік $\mathbf{F}$ має незамкнену орбіту γ в Z'. Отже, $\alpha = \alpha_j$ на γ. Оскільки Z' є зв'язним, маємо, що з локальної єдиності функції зсуву для $\tau^{-1} \circ h^m|_Z$ (див. Наслідок 3.4.4) випливає $\alpha = \alpha_j$ біля Z' для всіх $j = 0, \dots, m-1$. Отже, $\alpha = \alpha_j$ біля всього Z для всіх $j = 0, \dots, m-1$.

Таким чином, ми отримали коректно визначену $\mathcal{C}^{\infty}$ функцію $\beta : M \to \mathbb{R}$, яка задається співвідношенням:

$$\beta(x) = \begin{cases} \alpha(x), & x \in Z, \\ \alpha_j(x), & x \in Y_j, \ j = 0, \dots, m-1. \end{cases}$$

Ми стверджуємо, що $g^m = \mathbf{F}_\beta$.

a) Дійсно, якщо $x \in Z$, то $g^m(x) = h^m(x) = \mathbf{F}_\alpha(x) = \mathbf{F}_\beta(x)$.

b) Також відмітимо, що $g(Y_{i,j}) = Y_{i,j+1 \bmod m}$ і $g(Y_j) = Y_{j+1 \bmod m}$. Тоді $g^m|_{Y_j}$ є наступною композицією відображень:

$$Y_j \xrightarrow{h} Y_{j+1} \xrightarrow{h} \cdots \xrightarrow{h} Y_{m-1} \xrightarrow{\tau^{-1}\circ h} Y_0 \xrightarrow{h} \cdots \xrightarrow{h} Y_j$$

і таким чином співпадає з $h^j \circ \tau^{-1} \circ h^{m-j} = \mathbf{F}_{\alpha_j} = \mathbf{F}_\beta$. □

3.14 Доведення Теореми 3.3.5

Нехай M – зв'язна компактна поверхня, $f \in \mathcal{F}(M,P)$, $h \in \mathcal{S}(f)$, A – об'єднання всіх регулярних листів відображення f, які є h^--інваріантними і $K_1, \ldots, K_k$ всі критичні листи віображення f, для яких $\overline{A} \cap K_i \neq \varnothing$. Для $i = 1, \ldots, k$, нехай R_{K_i} – f-регулярний окіл листа K_i, вибраний так, що $R_{K_i} \cap R_{K_j} = \varnothing$ для $i \neq j$ і

$$Z := A \bigcup \Big(\bigcup_{i=1}^{k} R_{K_i} \Big).$$

Припустимо, що Z є непорожньою та орієнтовною, і кожна компонента зв'язності γ множини $\partial Z \cap \mathrm{Int} M$ розбиває M. Нам потрібно показати, що існує $g \in \mathcal{S}(f)$, який співпадає з h на Z і для якого $g^2 \in \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$.

Лема 3.14.1. *Існує єдина $\mathcal{C}^\infty$ функція $\alpha : Z \to \mathbb{R}$, така, що $h^2|_Z = \mathbf{F}_\alpha$ і $\alpha = 0$ у кожній нерухомій точці відображення h^2 на h^--інваріантних регулярних листах f.*

Доведення. Нехай V – регулярний лист V відображення f, і $\mathcal{N}$ – надщерблений циліндр відображення f, для якого $V \subset \mathrm{Int}\mathcal{N}$. Якщо V є h^--інваріантним, то такими ж є також всі інші регулярні листи $V' \subset \mathrm{Int}\mathcal{N}$. Звідси випливає, що Z є об'єднанням f-регулярних околів $Z_1, \ldots, Z_l$ деяких надщерблених циліндрів $\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_l$ відображення f.

За Теоремою 3.12.2 для кожного $i = 1, \dots, l$ існує єдина $\mathcal{C}^\infty$ функція $\alpha_i : Z_i \to \mathbb{R}$, для якої $h^2|_{Z_i} = \mathbf{F}_{\alpha_i}$ і $\alpha = 0$ у кожній нерухомій точці відображення h^2 на кожному h^--інваріантному регулярному листі відображення f в Z_i.

Відмітимо, що якщо $Z_i \cap Z_j \neq \varnothing$, то всі копоненти зв'язності W цього перетину завжди містять неперіодичну обіту γ потоку $\mathbf{F}$. Тому за єдиністю функції зсуву (Наслідок 3.4.4) маємо, що $\alpha_i = \alpha_j$ на W.

Отже, функції $\{\alpha_i\}_{i=1,\dots,l}$ узгоджуються на відповідних перетинах, а тому вони задають єдину $\mathcal{C}^\infty$ функцію $\alpha : Z \to \mathbb{R}$, таку, що $h^2|_Z = \mathbf{F}_\alpha$. Тоді $\alpha = 0$ на кожному h^--інваріантному регулярному листі відображення f в Z_i. □

Якщо $M = Z$, то теорема доведена. Тому припустимо, що $M \neq Z$.

Лема 3.14.2. *Кількість компонент зв'язності множини $\overline{M \setminus Z}$ є* **парною**, *і вони можуть бути занумеровані парами чисел:*

$$\begin{array}{cccc} Y_{1,0} & Y_{2,0} & \dots & Y_{a,0} \\ Y_{1,1} & Y_{2,1} & \dots & Y_{a,1} \end{array} \tag{3.7}$$

для деякого $a > 1$ таким чином, що h переставляє рядки в (3.7), тобто $h(Y_{i,0}) = Y_{i,1}$ і $h(Y_{i,1}) = Y_{i,0}$ для всіх i.

Доведення. Нехай $Y_1, \dots, Y_q$ – всі компоненти зв'язності множини $\overline{M \setminus Z}$. Позначимо $\gamma_i := Y_i \cap Z$. Тоді за умовою (B), γ_i є єдиною спільною компонентою границі компоненти Y_i і множини Z.

Оскільки $h(Z) = Z$, маємо, що h індукує перестановку компонент зв'язності $\{Y_i\}_{i=1,\dots,q}$. Більш того, за Лемою 3.3.4 $h(\gamma_i) \cap \gamma_i = \varnothing$, звідки $h(Y_i) \cap Y_i = \varnothing$. З іншої сторони, $h^2 = \mathbf{F}_\alpha$, звідки $h^2(\gamma_i) = \mathbf{F}_\alpha(\gamma_i) = \gamma_i$, а тому $h^2(Y_i) = Y_i$.

Отже, $\{Y_i\}_{i=1,\dots,q}$ розбивається на пари, які переставляються відображенням h. □

Тепер достатньо застосувати Лему 3.13.1 при $m = 2$. Тоді існує g, така, що $g = h$ на Z і $g^2 \in \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$. Зазначимо, що кожна компонента множини Z містить принаймні одну сідлову точку відображення f, інакше за Лемою 3.12.1 (4) ми б мали $M = Z$. Тому перша умова (1) Леми 3.13.1 виконується. Друга умова (2) випливає з Леми 3.14.1 , а третя умова (3) випливає з Леми 3.14.2. Теорема 3.3.5 доведена. $\square$

3.15 Висновки

В даному розділі доведений параметричний аналог певних тверджень «жорсткості» для гомеоморфізмів у себе відкритих підмножин топологічних добутків $X \times S^1$, які зберігають першу координату (Теорема 3.8.1). Цей результат застосований до дифеоморфізмів, які зберігають функцію Морса на орієнтовних поверхнях та змінюють орієнтацію певних її регулярних листів. Зокрема, у Теоремі 3.3.1 доведено, що для довільного відображення з класу $\mathcal{F}(M, P)$ на зв'язній орієнтовній компактній поверхні M і для довільного дифеоморфізма h, який залишає інваріантною кожну регулярну компоненту множини рівня цього відображення та змінює її орієнтацію, h^2 є ізотопним тотожньому відображенню зі збереженням відображення.

Розділ 4. Перші числа Бетті орбіт функцій Морса на поверхнях

4.1 Твердження про класи $\mathfrak{G}$ та $\mathcal{T}$

Нехай M – компактна поверхня.

Оскільки $\pi_1\mathcal{O}_f(f)$ та $\pi_1\mathcal{O}(f)$ в точці f ізоморфні, то для спрощення позначень у цьому розділі ми будемо позначати $\pi_1\mathcal{O}_f(f)$ та $\pi_1\mathcal{O}_f(f, X)$ через $\pi_1\mathcal{O}(f)$ та $\pi_1\mathcal{O}(f, X)$ відповідно.

Нагадаємо, що кожному відображенню $f \in \mathcal{F}(M, P)$ можна поставити у відповідність (неперервну) функцію ε_f з множини компонент зв'язності межі ∂M у $\{\pm 1\}$, яка приймає значення -1, якщо на компоненті межі f має локальний мінімум, та $+1$, якщо на компоненті межі f має локальний максимум.

Нехай $\mathcal{E}_M$ – множина всіх неперервних функцій $\varepsilon\colon \partial M \to \{\pm 1\}$.

Для $\varepsilon \in \mathcal{E}_M$ позначимо через $\mathcal{F}(M, P, \varepsilon)$ $(Morse(M, P, \varepsilon))$ підмножину класу $\mathcal{F}(M, P)$ $(Morse(M, P))$ функцій f, для яких $\varepsilon_f = \varepsilon$.

Означення 4.1.1. *Нехай $\mathfrak{G}$ – мінімальна множина класів ізоморфізму груп, що задовольняє такі умови:*

1) $1 \in \mathfrak{G}$*;*

2) *якщо $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}$, то $G_1 \times G_2 \in \mathfrak{G}$;*

3) *якщо $G \in \mathfrak{G}$ і $n \geq 1$, то $G \wr_n \mathbb{Z} \in \mathfrak{G}$.*

Нехай також $\mathcal{T}$ – множина класів ізоморфізмів груп, що складаються з груп вигляду $G \wr_{n,m} \mathbb{Z}^2$, де $G \in \mathfrak{G}$ і $n, m \geq 1$.

Нехай також $\mathfrak{G}^O$ *— підклас* $\mathfrak{G}$*, що складається з груп* $(A \times B) \wr_n \mathbb{Z}$*, де* $A, B \in \mathfrak{G} \setminus \{1\}$ *і* $n \geq 1$*. Відмітимо, що* $\mathfrak{G}^O \subset \mathfrak{G} \subset \mathcal{T}$*.*

Зауваження 4.1.2. *Легко бачити, що* G *належить класу* $\mathfrak{G}$ *(*$\mathcal{T}$*) тоді і тільки тоді, коли* G *отримується з тривіальної групи скінченним числом операцій* $\times$*,* $\wr_n \mathbb{Z}$ *(та останньою операцією* $\wr_{n,m} \mathbb{Z}^2$ *у випадку класу* $\mathcal{T}$*). Таким чином, кожна група* $G \in \mathfrak{G}$ *(*$G \in \mathcal{T}$*) може бути записана як слово в алфавіті* $\mathcal{A}_{\mathfrak{G}} = \{1, \mathbb{Z}, (,), \times, \wr_2, \wr_3, \wr_4, \dots\}$ *(*$\mathcal{A}_{\mathcal{T}} = \{1, \mathbb{Z}, (,), \times, \wr_2, \wr_3, \dots, \wr_{1,1}, \wr_{1,2}, \dots\}$*). Ми будемо називати таке слово* **реалізацією** *групи* G *в алфавіті* $\mathcal{A}_{\mathfrak{G}}$ *(*$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$*). Очевидно, реалізація не є однозначно визначеною. Наприклад, існують такі реалізації однієї і тієї ж групи:*

$$\left(1 \underset{3}{\wr} \mathbb{Z}\right) \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \times \left(1 \underset{3}{\wr} \mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = 1 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

У [3, Лема 3.1] було показано, що для будь-якої функції $f \in \mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$ на 2-торі граф Кронрода-Ріба Γ_f або є деревом, або має єдиний цикл.

Введемо позначення

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_X(M,P) &:= \{\pi_1 \mathcal{O}(f,X) \mid f \in \mathcal{F}(M,P)\}, \\
\mathcal{M}_X(M,P) &:= \{\pi_1 \mathcal{O}(f,X) \mid f \in Morse(M,P)\}, \\
\mathcal{G}_X(M,P,\varepsilon) &:= \{\pi_1 \mathcal{O}(f,X) \mid f \in \mathcal{F}(M,P,\varepsilon)\}, \\
\mathcal{M}_X(M,P,\varepsilon) &:= \{\pi_1 \mathcal{O}(f,X) \mid f \in Morse(M,P,\varepsilon)\}, \\
\mathcal{G}^\Psi &:= \{\pi_1 \mathcal{O}(f) \mid f \in \mathcal{F}(T^2,\mathbb{R}), \Gamma_f - \text{дерево}\}, \\
\mathcal{M}^\Psi &:= \{\pi_1 \mathcal{O}(f) \mid f \in Morse(T^2,\mathbb{R}), \Gamma_f - \text{дерево}\}, \\
\mathcal{G}^O &:= \{\pi_1 \mathcal{O}(f) \mid f \in \mathcal{F}(T^2,\mathbb{R}), \Gamma_f \text{ містить єдиний цикл}\}, \\
\mathcal{M}^O &:= \{\pi_1 \mathcal{O}(f) \mid f \in Morse(T^2,\mathbb{R}), \Gamma_f \text{ містить єдиний цикл}\}.
\end{aligned}$$

Очевидно, що

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_X(M,P) &\subset \mathcal{G}_X(M,P), & \mathcal{M}^\Psi &\subset \mathcal{G}^\Psi, \\
\mathcal{M}_X(M,P,\varepsilon) &\subset \mathcal{G}_X(M,P,\varepsilon), & \mathcal{M}^O &\subset \mathcal{G}^O.
\end{aligned}$$

У роботах [4, 37, 30, 24] були отримані такі результати.

Твердження 4.1.3. *[37] Нехай M – зв'язна компактна поверхня і $f \in \mathcal{F}(M, P)$. Тоді $\mathcal{O}_f(f) = \mathcal{O}_f(f, \partial M)$. Зокрема,*

$$\pi_1\mathcal{O}(f) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f, \partial M),$$

а тому $\mathcal{G}_{\partial M}(M, P) = \mathcal{G}(M, P)$.

Твердження 4.1.4. *Нехай M – зв'язна компактна орієнтовна поверхня відмінна від 2-сфери.*

1. *Якщо M також відмінна від 2-тора, то $\mathcal{G}_{\partial M}(M, P) \subset \mathfrak{G}$, [24].*
2. *Якщо M – 2-тор, то*
   a) $\mathcal{G}^{\Psi} \subset \mathcal{T}$, [4],
   б) $\mathcal{G}^{O} \subset \mathfrak{G}$, [30, 29].

Більш точні формулювання Твердження 4.1.4 наведені у Твердженнях 4.2.5, 4.6.1, 4.6.2.

Основні результати.

Позначимо через $Z(G)$ та $[G, G]$ центр і комутант G відповідно. Наступна теорема показує, що число символів $\mathbb{Z}$ у реалізації групи $G \in \mathfrak{G}$ в алфавіті $\mathcal{A}_{\mathfrak{G}}$ (групи $G \in \mathcal{T}$ в алфавіті $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$) однозначно визначається групою G.

Теорема 4.1.5. *Нехай $G \in \mathfrak{G}$ ($G \in \mathcal{T}$), ω – довільна реалізація G в алфавіті $\mathcal{A}_{\mathfrak{G}}$ ($\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$) і $\beta_1(\omega)$ – число символів $\mathbb{Z}$ у реалізації ω. Тоді мають місце такі ізоморфізми:*

$$Z(G) \cong G/[G, G] \cong \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}.$$

Зокрема, число $\beta_1(\omega)$ залежить тільки від групи G.

З Твердження 4.1.4 і Теореми 4.1.5 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 4.1.6. *Нехай M – зв'язна компактна орієнтовна поверхня відмінна від 2-сфери і $f \in \mathcal{F}(M,P)$, де $P = \mathbb{R}$ для випадку $M = T^2$. Нехай також $G = \pi_1\mathcal{O}(f)$, ω – довільна реалізація G в алфавіті $\mathcal{A}_{\mathfrak{G}}$ для $M \neq T^2$ і в алфавіті $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ для $M = T^2$, а $\beta_1(\omega)$ – кількість символів $\mathbb{Z}$ у реалізації ω. Тоді перша цілочисельна група гомологій $H_1(\mathcal{O}_f(f),\mathbb{Z})$ орбіти $\mathcal{O}_f(f)$ є вільною абелевою групою рангу $\beta_1(\omega)$:*

$$H_1(\mathcal{O}_f(f),\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}.$$

Зокрема, $\beta_1(\omega)$ – це перше число Бетті орбіти $\mathcal{O}_f(f)$.

Доведення. Використаємо загальновідому теорему Гуревича, [5], згідно з якою для кожного лінійно-зв'язного топологічного простору X має місце ізоморфізм

$$H_1(X,\mathbb{Z}) \simeq \pi_1 X/[\pi_1 X, \pi_1 X].$$

Внаслідок теореми Гуревича, Тверджень 4.1.3, 4.1.4 і Теореми 4.1.5 отримуємо

$$H_1(\mathcal{O}_f(f),\mathbb{Z}) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f)/[\pi_1\mathcal{O}(f), \pi_1\mathcal{O}(f)] = G/[G,G] \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}. \qquad \square$$

Теорема 4.1.7.

1. *Нехай M – зв'язна компактна орієнтовна поверхня відмінна від 2-тора і 2-сфери та $\varepsilon\colon \partial M \to \{\pm 1\}$ – довільне відображення з $\mathcal{E}_M$. Тоді*

   а) якщо $M = S^1 \times [0,1]$, а ε – постійна, тобто приймає однакові значення на компонентах межі ∂M, то

   $$\mathcal{M}_{\partial A}(A,P,\varepsilon) = \mathcal{G}_{\partial A}(A,P,\varepsilon) = \mathfrak{G} \setminus \{1\},$$

   б) якщо $M = S^1 \times [0,1]$, а ε приймає різні значення на компонентах межі ∂M або $M \neq S^1 \times [0,1]$, то

   $$\mathcal{M}_{\partial M}(M,P,\varepsilon) = \mathcal{G}_{\partial M}(M,P,\varepsilon) = \mathfrak{G}.$$

2. *Мають місце такі тотожності*

   $$\mathcal{M}^{\Psi} = \mathcal{G}^{\Psi} = \mathcal{T}, \qquad \mathcal{M}^{O} = \mathcal{G}^{O} = \mathfrak{G}^{O}.$$

4.2 Побудова групи за заданим відображенням

В цьому розділі описані конструкції, які лежать в основі доведення Твердження 4.1.4(1).

У статті [22] було показано, що обчислення фундаментальних груп орбіт відображень з класу $\mathcal{F}(M,P)$ зводиться до обчислення таких груп для відображень заданих на дисках та циліндрах. Ще раз наведемо відомі основні результати. Вони також були зібрані у статті [24].

Твердження 4.2.1. *[24, Теорема 5.4] Нехай M – зв'язна компактна орієнтовна поверхня з від'ємною ейлеровою характеристикою і нехай $f \in \mathcal{F}(M,P)$. Нехай також K – об'єднання всіх неекстремальних критичних компонент множин рівня f, у яких ейлерова характеристика їх канонічних околів менше нуля, та нехай R – f-регулярний окіл K та $X_1,\ldots,X_k$ – компоненти зв'язності $\overline{M \setminus R}$. Тоді*

1. *X_i є 2-диском або циліндром для кожного i, $i = 1,\ldots,k$,*

2. *$\pi_1\mathcal{O}(f,\partial M) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f,\partial M \cup R) \simeq \prod_{i=1}^{k} \pi_1\mathcal{O}(f|_{X_i},\partial X_i)$.*

Для відображень на дисках та циліндрах були отримані такі результати.

Твердження 4.2.2. *[24, Теорема 5.6]*

Нехай $f \in \mathcal{F}(D^2,P)$ має єдину критичну точку z. Тоді z є локальним екстремумом, причому

1. *якщо z – невироджена, то $\pi_1\mathcal{O}(f,\partial D^2)$ є тривіальною групою,*

2. *якщо z – вироджена, то $\pi_1\mathcal{O}(f,\partial D^2) \simeq \mathbb{Z}$.*

Твердження 4.2.3. *[24, Теорема 5.5]*

Нехай $f \in \mathcal{F}(S^1 \times [0,1],P)$. Тоді

1. *якщо f не має критичних точок, то $\pi_1\mathcal{O}(f, S^1 \times 0)$ є тривіальною групою,*

2. $\pi_1\mathcal{O}(f, \partial(S^1 \times [0,1])) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f, S^1 \times 0)$.

3. *Нехай M – 2-диск або циліндр, V – компонента зв'язності ∂M та $f_M \in \mathcal{F}(M, P)$. Нехай також W – регулярна компонента зв'язності деякої множини рівня відображення f_M, яка розбиває M на дві компоненти зв'язності та нехай A і B – замикання цих компонент. Більш того, нехай $h(W) = W$ для всіх $h \in \mathcal{S}(f_M, V)$. Будемо вважати, що $V \subset A$. Тоді A – циліндр, B – 2-диск або циліндр та має місце такий ізоморфізм*

$$\pi_1\mathcal{O}(f_M, \partial M) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f_M|_A, \partial A) \times \pi_1\mathcal{O}(f_M|_B, \partial B).$$

Наслідок 4.2.4. *Нехай $f \in \mathcal{F}(S^1 \times [0,1], P)$, R – f-регулярний окіл компоненти зв'язності межі $\partial(S^1 \times [0,1])$ та $A = \overline{S^1 \times [0,1] \setminus R}$. Тоді*

$$\pi_1\mathcal{O}(f, \partial(S^1 \times [0,1])) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f|_A, \partial A).$$

Введемо такі позначення.

- (M, V) – одна з пар $(D^2, \partial D^2)$, $(S^1 \times [0,1], S^1 \times 0)$, $f \in \mathcal{F}(M, P)$.

- K – «найближча» до V критична компонента зв'язності деякої множини рівня f, тобто K – єдина критична компонента, така, що компонента зв'язності $M \setminus K$, яка містить V, не містить критичних точок.

- R_K – f-регулярний окіл K, який для достатньо малого ε та $c = f(K)$ є компонентою зв'язності прообразу $f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$, яка містить K та для якої $R_K \setminus K$ не містить критичних точок.

- $\mathbf{Z}$ – множина компонент зв'язності $\overline{M \setminus R_K}$. Оскільки $h(R_K) = R_K$ для будь-якого $h \in \mathcal{S}(f, V)$, то h переставляє елементи $\mathbf{Z}$, тобто виникає природня дія $\mathcal{S}(f, V)$ на $\mathbf{Z}$.

- $\mathcal{S}(\mathbf{Z}) = \{h \in \mathcal{S}(f, V) | h(Z) = Z$ для кожного $Z \in \mathbf{Z}\}$ – ядро неефективності дії $\mathcal{S}(f, V)$ на $\mathbf{Z}$. Таким чином, $\mathcal{S}(f, V)/\mathcal{S}(\mathbf{Z})$ ефективно діє на $\mathbf{Z}$.

- $\mathbf{Z}^{fix} = \{X_0, X_1, \ldots, X_a\}$ – множина елементів $\mathbf{Z}$, які є інваріантними відносно дії $\mathcal{S}(f, V)$. Занумеруємо X_i так, щоб X_0 був циліндром, який містить V, а X_1 був циліндром, який містить компоненту межі $S^1 \times 1$ у випадку $M = S^1 \times [0, 1]$. Тоді якщо $M = D^2$, то X_i будуть дисками при $i = 1, \ldots, n$, а якщо $M = S^1 \times [0, 1]$, то при $i = 2, \ldots, n$.

- $\mathbf{Z}^{reg} = \mathbf{Z} \setminus \mathbf{Z}^{fix} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_b\}$.

Твердження 4.2.5. *[24, Теорема 5.8]*

1. *Нехай $\mathbf{Z}^{reg} = \varnothing$, тобто $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^{fix} = \{X_0, X_1, \ldots, X_a\}$. Тоді*
$$\pi_1\mathcal{O}(f, \partial M) \simeq \prod_{i=1}^{a} \pi_1\mathcal{O}(f|_{X_i}, \partial X_i) \times \mathbb{Z}.$$

2. *Нехай $\mathbf{Z}^{reg} = \{Y_i\}_{i=1}^{b} \neq \varnothing$. Тоді $\mathcal{S}(f, V)/\mathcal{S}(\mathbf{Z}) \simeq \mathbb{Z}_m$ для деякого $m \geq 2$, причому $\mathbb{Z}_m$ діє напіввільно на $\mathbf{Z}$, тобто вільно на $\mathbf{Z}^{reg}$. Тому m ділить b і ця дія має $c = b/m$ орбіт. Зафіксуємо будь-які 2-диски $Y_1, Y_2 \ldots, Y_c$, які належать попарно різним орбітам дії $\mathbb{Z}_m$. Тоді $\mathbf{Z}^{fix} = \{X_0\}$ або $\mathbf{Z}^{fix} = \{X_0, X_1\}$. Більш того, виконуються такі властивості.*

   а) Якщо $\mathbf{Z}^{fix} = \{X_0\}$, то
$$\pi_1\mathcal{O}(f, \partial M) \simeq \prod_{i=1}^{c} \pi_1\mathcal{O}(f|_{Y_i}, \partial Y_i) \wr_m \mathbb{Z}.$$

   б) Якщо ж $\mathbf{Z}^{fix} = \{X_0, X_1\}$, то
$$\pi_1\mathcal{O}(f, \partial M) \simeq \prod_{i=1}^{c} \pi_1\mathcal{O}(f|_{Y_i}, \partial Y_i) \wr_m \mathbb{Z} \times \left(\pi_1\mathcal{O}(f|_{X_1}, \partial X_1)\right).$$

Наслідок 4.2.6. *Нехай $M = S^1 \times [0, 1]$ та $f \in \mathcal{F}(M, P, \varepsilon)$, де $\varepsilon \equiv 1$ або $\varepsilon \equiv -1$.*

Тоді $\pi_1\mathcal{O}(f, \partial M) \in \mathfrak{G} \setminus \{1\}$.

Таким чином у статті [24] описано, як саме отримати групу з класу $\mathfrak{G}$ за заданим відображенням. Ми опишемо як за заданою групою $G \in \mathfrak{G}$ побудувати відображення $f_1 \in \mathcal{F}(D^2, P)$ та $f_2 \in \mathcal{F}(S^1 \times [0,1], P)$ так, що $\pi_1\mathcal{O}(f_1, \partial D^2) \simeq G$ та $\pi_1\mathcal{O}(f_2, S^1 \times 0) \simeq G$.

4.3 Побудова відображення з заданою фундаментальною групою орбіти на поверхні

Лема 4.3.1. *Нехай $C = S^1 \times [0,1]$, $V = S^1 \times 0$, $f \in \mathcal{F}(C, P)$, $h \in \mathcal{S}(f, V)$ та W – регулярна компонента зв'язності деякої множини рівня відображення f. Якщо W – ізотопна до V, то $h(W) = W$.*

Доведення. Позначимо $h(W) = W'$. Оскільки W ізотопна до V, то W розбиває C на циліндри $A_0 \supset V$ та A_1. Нехай $h(A_0) = B_0$ та $h(A_1) = B_1$. Тоді W' розбиває C на циліндри $B_0 \supset V$ та B_1.

Припустимо, що $W' \neq W$. Оскільки W та W' є компонентами зв'язності множини рівня відображення f, то $W \cap W' = \varnothing$. А оскільки W та W' ізотопні до V, то або $A_0 \subset B_0$, або $B_0 \subset A_0$. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $A_0 \subset B_0$. Нехай $C' = B_0 \backslash A_0$. Тоді C' є циліндром, компонентами межі якого є W та W'. Оскільки $h \in \mathcal{S}(f, V)$, то W та W' лежать на спільній множині рівня відображення f, а отже A_0 та $B_0 = A_0 \cup C'$ містять різну кількість критичних точок відображення f, що неможливо. Отже, $h(W) = W$. □

Приклад 4.4. Нехай $G = A \times B$, де $A, B \in \mathfrak{G}$, та $C = S^1 \times [-1,1]$ – циліндр. Припустимо, що для будь-яких $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{E}_C$ існують відображення $f_A \in \mathcal{F}(C, P, \varepsilon_1)$, $f_B \in \mathcal{F}(C, P, \varepsilon_2)$ ($f_A \in Morse(C, P, \varepsilon_1)$, $f_B \in Morse(C, P, \varepsilon_2)$), для яких мають місце ізоморфізми

$$\pi_1\mathcal{O}(f_A, \partial C) \simeq A, \qquad \pi_1\mathcal{O}(f_B, \partial C) \simeq B.$$

Покажемо, що тоді для будь-якого $\varepsilon \in \mathcal{E}_C$ існує відображення $f \in \mathcal{F}(C, P, \varepsilon)$

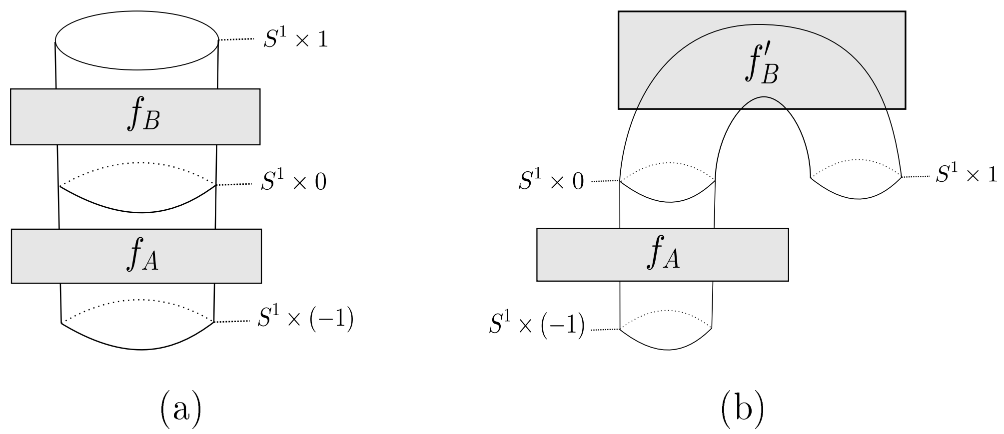


Рис. 4.4.0.1

$(f \in Morse(C, P, \varepsilon))$, таке, що

$$\pi_1 \mathcal{O}(f, \partial C) \simeq A \times B.$$

Неважко побудувати відображення $f_A \in \mathcal{F}(S^1 \times [-1,0], P, \varepsilon_A)$, $f_B \in \mathcal{F}(S^1 \times [0,1], P, \varepsilon_B)$, $f'_B \in \mathcal{F}(S^1 \times [0,1], P, \varepsilon'_B)$ $(f_A \in Morse(S^1 \times [-1,0], P, \varepsilon_A)$, $f_B \in Morse(S^1 \times [0,1], P, \varepsilon_B)$, $f'_B \in Morse(S^1 \times [0,1], P, \varepsilon'_B))$, які задовольняють наступним умовам:

1. $\pi_1 \mathcal{O}(f_A, \partial(S^1 \times [-1,0])) \simeq A$,
   $\pi_1 \mathcal{O}(f_B, \partial(S^1 \times [0,1])) \simeq \pi_1 \mathcal{O}(f'_B, \partial(S^1 \times [0,1])) \simeq B$,

2. $\varepsilon_A(S^1 \times (-1)) = -1$, $\varepsilon_A(S^1 \times 0) = 1$,
   $\varepsilon_B(S^1 \times 0) = -1$, $\varepsilon_B(S^1 \times 1) = 1$,
   $\varepsilon'_B(S^1 \times 0) = -1$, $\varepsilon'_B(S^1 \times 1) = -1$,

3. f_A, f_B, f'_B збігаються з проекцією $\varphi(x,t) = t$ в околі $S^1 \times 0$.

Визначимо відображення $g \in \mathcal{F}(C, P)$ і $g' \in \mathcal{F}(C, P)$ $(g \in Morse(C, P)$ і $g' \in Morse(C, P))$, зображені на Рисунку 4.4.0.1, так, щоб

$$g|_{S^1 \times [-1,0]} = g'|_{S^1 \times [-1,0]} = f_A, \qquad g|_{S^1 \times [0,1]} = f_B, \quad g'|_{S^1 \times [0,1]} = f'_B.$$

Тоді

$$\varepsilon_g(S^1 \times (-1)) = -1, \qquad \varepsilon_{g'}(S^1 \times (-1)) = -1,$$

$$\varepsilon_g(S^1 \times 1) = 1, \qquad \varepsilon_{g'}(S^1 \times 1) = -1.$$

Аналогічно,

$$-g \in \mathcal{F}(C, P), -g' \in \mathcal{F}(C, P)(-g \in Morse(C, P), -g' \in Morse(C, P))$$

і $\varepsilon_{-g} = -\varepsilon_g$, $\varepsilon_{-g'} = -\varepsilon_{g'}$. Тоді за Твердженням 4.2.3(3) мають місце ізоморфізми

$$\pi_1\mathcal{O}(g, \partial C) \simeq \pi_1\mathcal{O}(g', \partial C) \simeq \pi_1\mathcal{O}(-g, \partial C) \simeq \pi_1\mathcal{O}(-g', \partial C) \simeq A \times B.$$

Отже, для будь-якого $\varepsilon \in \mathcal{E}_C$ існує відображення

$$f \in \mathcal{F}(C, P, \varepsilon)(f \in Morse(C, P, \varepsilon)),$$

таке, що

$$\pi_1\mathcal{O}(f, \partial C) \simeq A \times B.$$

Приклад 4.5. Нехай $G = A \wr_n \mathbb{Z}$, де $A \in \mathfrak{G}$, та $C = S^1 \times [0, 1]$ – циліндр. Припустимо, що існує відображення $f_{D_A} \in \mathcal{F}(D_A, P)$ $(f_{D_A} \in Morse(D_A, P))$ з диска D_A в P, для якого $\pi_1\mathcal{O}(f_{D_A}, \partial D_A) \simeq A$.

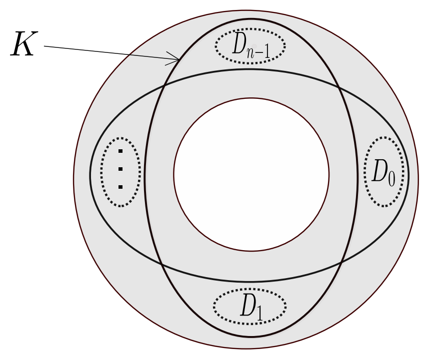


Рис. 4.5.0.1

Тоді для довільного $\varepsilon \in \mathcal{E}_C$ неважко побудувати відображення $f \in \mathcal{F}(C, P, \varepsilon)$ $(f \in Morse(C, P, \varepsilon))$, таке, що

1. f має критичний рівень K, показаний на Рисунку 4.5.0.1, на якому лежать n невироджених сідлових точок,

2. всі інші критичні точки містяться в дисках $D_0, \ldots, D_{n-1}$,

3. $\pi_1\mathcal{O}(f_{D_i}, \partial D_i) \simeq A$, $i = 0, \ldots, n-1$,

4. існує $h \in \mathcal{S}(f, S^1 \times 0)$, такий, що $h(D_i) = D_{(i+1) \bmod n}$, $i = 0, \ldots, n-1$.

Тоді за Твердженням 4.2.5 має місце ізоморфізм $\pi_1\mathcal{O}(f, \partial C) \simeq A \wr_n \mathbb{Z}$.

Нагадаємо, що для будь-якої функції $\varepsilon \in \mathcal{E}_M$ визначені класи

$$\mathcal{G}_X(M, P, \varepsilon) := \{\pi_1\mathcal{O}(f, X) \mid f \in \mathcal{F}(M, P, \varepsilon)\}, \tag{4.1}$$

$$\mathcal{M}_X(M, P, \varepsilon) := \{\pi_1\mathcal{O}(f, X) \mid f \in Morse(M, P, \varepsilon)\}. \tag{4.2}$$

Теорема 4.1.7.

Нехай M – зв'язна компактна орієнтовна поверхня відмінна від 2-тора і 2-сфери та $\varepsilon \in \mathcal{E}_M$. Тоді

1. *якщо M – циліндр та $\varepsilon \equiv 1$ або $\varepsilon \equiv -1$, то $\mathcal{M}_{\partial A}(A, P, \varepsilon) = \mathcal{G}_{\partial A}(A, P, \varepsilon) = \mathfrak{G} \setminus \{1\}$,*

2. *якщо M – циліндр та $\varepsilon(\partial M) = \{\pm 1\}$ або M не є циліндром, то*

$$\mathcal{M}_{\partial M}(M, P, \varepsilon) = \mathcal{G}_{\partial M}(M, P, \varepsilon) = \mathfrak{G}.$$

Доведення. Включення $\mathcal{G}_{\partial M}(M, P, \varepsilon) \subset \mathfrak{G}$, а отже і $\mathcal{M}_{\partial M}(M, P, \varepsilon) \subset \mathfrak{G}$, одразу випливають з Твердження 4.2.5. Покажемо включення в іншу сторону для випадку (2) та включення $\mathfrak{G} \setminus \{1\} \subset \mathcal{G}_{\partial M}(M, P, \varepsilon)$, $\mathfrak{G} \setminus \{1\} \subset \mathcal{M}_{\partial M}(M, P, \varepsilon)$ для випадку (1).

1. Покажемо, що $\{1\} \subset \mathcal{G}_{\partial M}(M, P, \varepsilon)$, де $M = S^1 \times [0, 1]$ – циліндр та $\varepsilon(\partial M) = \{\pm 1\}$.

Нехай $f \in \mathcal{F}(S^1 \times [0,1], P, \varepsilon)$ не має критичних точок. Тоді $\varepsilon(\partial(S^1 \times [0,1])) = \{\pm 1\}$ та за Твердженням 4.2.3(1),(2) маємо $\pi_1 \mathcal{O}(f, \partial(S^1 \times [0,1])) \simeq \pi_1 \mathcal{O}(f, S^1 \times 0) \simeq \{1\}$.

2. Покажемо, що $\mathfrak{G} \subset \mathcal{G}_{\partial D^2}(D^2, P, \varepsilon)$ та $\mathfrak{G} \setminus \{1\} \subset \mathcal{G}_{\partial M}(M, P, \varepsilon)$, де M – циліндр.

Нехай $G \in \mathfrak{G} \setminus \{1\}$. Оскільки $1 \underset{n}{\wr} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ та $B \times 1 = B$ для довільної $B \in \mathfrak{G}$, то існує реалізація ω групи G у вигляді

$$G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n,$$

де кожна група G_i має вигляд $G_i = \mathbb{Z}$ або $G_i = H_i \wr_{k_i} \mathbb{Z}$, $H_i \in \mathfrak{G} \setminus \{1\}$.

Позначимо через $s(\omega)$ сумарну кількість символів $\times$, $\wr_n$ для всіх $n \geq 1$ у реалізації ω. Доведення будемо проводити за індукцією по $s(\omega)$.

База індукції.

Побудова відображення з D^2 в P за тривіальною групою. Нехай $f \in \mathcal{F}(D^2, P)$ має єдину невироджену критичну точку. Тоді за Твердженням 4.2.2(1) маємо $\pi_1 \mathcal{O}(f, \partial D^2) \simeq \{1\}$.

Побудова відображення з D^2 в P за групою $\mathbb{Z}$. Нехай $f \in \mathcal{F}(D^2, P)$ має єдину вироджену критичну точку. Тоді за Твердженням 4.2.2(2) маємо $\pi_1 \mathcal{O}(f, \partial D^2) \simeq \mathbb{Z}$.

Побудова відображення з циліндра C в P за групою $\mathbb{Z}$. Нехай $f \in \mathcal{F}(D^2, P)$ має єдину невироджену критичну точку, тобто $\pi_1 \mathcal{O}(f, \partial D^2) \simeq \{1\}$. З Прикладу 4.5 при $A = \{1\}$ випливає, що для довільного $\varepsilon' \in \mathcal{E}_C$ можна побудувати відображення $f_C \in \mathcal{F}(C, P, \varepsilon')$, для якого $\pi_1 \mathcal{O}(f_C, \partial C) \simeq 1 \wr_n \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$.

Індукційне припущення. Припустимо, що якщо $s(\omega) < n$, то

$G \in \mathcal{G}_{\partial D^2}(D^2, P, \varepsilon)$ та $G \in \mathcal{G}_{\partial M}(M, P, \varepsilon)$, де M – циліндр.

Індукційний перехід. Покажемо, що якщо $s(\omega) = n$, то $G \in \mathcal{G}_{\partial D^2}(D^2, P, \varepsilon)$ та $G \in \mathcal{G}_{\partial M}(M, P, \varepsilon)$, де M – циліндр. Для випадку, коли M – циліндр, це випливає з Прикладів 4.4, 4.5. Покажемо, що для випадку з диском це також виконується.

Маючи відображення $f_{C'} \in \mathcal{F}(C', P, \varepsilon')$ з циліндра C' в P, де $\varepsilon' \in \mathcal{E}_{C'}$, та вміючи будувати відображення з диска в P за тривіальною групою можна побудувати відображення $f \in \mathcal{F}(D, P)$ з диска D в P, таке, що

$$\pi_1\mathcal{O}(f, \partial D) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f_{C'}, \partial C').$$

А саме, можемо визначити відображення $f \in \mathcal{F}(D, P)$ з диска D радіусу 2 в P, таке, що

1. $f(\widehat{D}) = [1, 2]$, $f(D \setminus \widehat{D}) = [0, 1]$, де $\widehat{D} \subset D$ – диск радіусу 1 з центром в центрі диска D,
2. $\pi_1\mathcal{O}(f|_{\widehat{D}}, \partial(\widehat{D})) \simeq \{1\}, \qquad \pi_1\mathcal{O}(f|_{D\setminus\widehat{D}}, \partial(D \setminus \widehat{D})) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f_{C'}, \partial C')$.

Відмітимо, що прообраз $f^{-1}(1) = S^1 \times 1$ є інваріантним відносно будь-якого $h \in \mathcal{S}(f, \partial D)$. Тоді за Твердженням 4.2.3(3)

$$\pi_1\mathcal{O}(f, \partial D) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f|_{D\setminus\widehat{D}}, \partial(D \setminus \widehat{D}) \times \pi_1\mathcal{O}(f_{\widehat{D}}, \partial\widehat{D}) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f_{C'}, \partial C') \times \{1\}.$$

Отже, $G \in \mathcal{G}_{\partial D^2}(D^2, P, \varepsilon)$ та $G \in \mathcal{G}_{\partial M}(M, P, \varepsilon)$, де M – циліндр.

3. Нехай поверхня M відмінна від диска та циліндра. Покажемо, що $\mathfrak{G} \subset \mathcal{G}_{\partial M}(M, P, \varepsilon)$.

Побудуємо відображення $f \in \mathcal{F}(M, P, \varepsilon)$, яке має хоча б одну точку локального максимуму, всі сідлові точки якого лежать на спільній компоненті зв'язності K деякої множини рівня відображення f та всі локальні екстремуми якого є невиродженими. Оскільки $\mathfrak{G} \subset \mathcal{G}_{\partial D^2}(D^2, P)$, то для $G \in \mathfrak{G}$ існує відображення $f_{D^2} \in \mathcal{F}(D^2, P)$ з диска D^2 в P, таке, що $\pi_1\mathcal{O}(f_{D^2}, \partial D^2) \simeq G$. Змінимо відображення f в f-регулярному околі D_m деякої точки локального максимуму таким чином, щоб $\pi_1\mathcal{O}(f|_{D_m}, \partial D_m) \simeq G$. Нехай N – канонічний окіл компоненти K, який містить всі компоненти зв'язності межі ∂M. Тоді

$N = M$, а отже N має від'ємну ейлерову характеристику. Нехай також R – f-регулярний окіл компоненти K, який містить всі компоненти зв'язності межі ∂M та для якого D_m є компонентою зв'язності замикання $\overline{M \setminus R}$. Всі інші компоненти зв'язності $\overline{M \setminus R}$ також є дисками, позначимо їх через $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Тоді за Твердженням 4.2.1 маємо ізоморфізм

$$\pi_1\mathcal{O}(f, \partial M) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f|_{D_m}, \partial D_m) \times \prod_{i=1}^{n} \pi_1\mathcal{O}(f|_{D_i}, \partial D_i).$$

Оскільки за Твердженням 4.2.2 для кожного $i = 1, \ldots, n$ маємо ізоморфізм $\pi_1\mathcal{O}(f|_{D_i}, \partial D_i) \simeq \{1\}$, то

$$\pi_1\mathcal{O}(f, \partial M) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f|_{D_m}, \partial D_m) \simeq G.$$

4. Легко бачити, що справджуються не тільки доведені включення, а і аналогічні включення для фундаментальних груп орбіт функцій Морса, а саме

1. $\{1\} \subset \mathcal{M}_{\partial M}(M, P, \varepsilon)$, де $M = S^1 \times [0, 1]$ – циліндр та $\varepsilon(\partial M) = \{\pm 1\}$,
2. $\mathfrak{G} \subset \mathcal{M}_{\partial D^2}(D^2, P, \varepsilon)$ та $\mathfrak{G} \setminus \{1\} \subset \mathcal{G}_{\partial M}(M, P, \varepsilon)$, де M – циліндр,
3. $\mathfrak{G} \subset \mathcal{M}_{\partial M}(M, P, \varepsilon)$, де поверхня M відмінна від диска та циліндра.

Для цього достатньо повторити попередні міркування, змінивши відображення за групою $\mathbb{Z}$ з D^2 в P таким чином.

Побудова відображення за групою $\mathbb{Z}$ з D^2 в P. Нехай $f \in Morse(D_A, P)$ – відображення з 2-диска D_A в P, яке має єдину невироджену критичну точку, тобто $\pi_1\mathcal{O}(f, \partial D_A) \simeq \{1\}$. Аналогічно до Прикладу 4.5 при $A = \{1\}$ можна побудувати відображення $f_{D^2} \in Morse(D^2, P)$ з диска D^2 в P, для якого $\pi_1\mathcal{O}(f_{D^2}, \partial D^2) \simeq 1 \wr_n \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$. $\square$

Зауваження 4.5.1. З Твердження 4.2.3 (1), (3) випливає, що у випадку, коли M – циліндр та $\varepsilon \equiv 1$ або $\varepsilon \equiv -1$, можна побудувати $f \in \mathcal{F}(M, P, \varepsilon)$ ($f \in Morse(M, P, \varepsilon)$) так, щоб $f(\partial M) = const$.

4.6 Побудова групи за заданою функцією на торі

Нехай $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ – 2-тор, $f \in \mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$ та Γ_f – граф Кронрода-Ріба функції f. Будемо позначати через $p_f\colon T^2 \to \Gamma_f$ проекцію T^2 на Γ_f. Нехай також $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2)$ – компонента зв'язності тотожного відображення id_{T^2} в $\mathcal{D}(T^2)$ та нехай $\mathcal{S}'(f) = \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2)$.

Нагадаємо, що Γ_f або є деревом, або містить єдиний цикл. У Твердженнях 4.6.1, 4.6.2 описана структура $\pi_1\mathcal{O}(f)$ для обох випадків.

1. Нехай Γ_f **є деревом.** Тоді згідно з [4, Лема 2.4] існує єдиний критичний рівень K функції f такий, що для f-регулярного околу N_K рівня K, інваріантного відносно $\mathcal{S}'(f)$, всі компоненти зв'язності замикання $\overline{T^2 \setminus N_K}$ є 2-дисками. Такі 2-диски позначимо через $D_1, \ldots, D_b$, а рівень K будемо називати спеціальним. Оскільки N_K є інваріантним відносно $\mathcal{S}'(f)$, то диски $D_1, \ldots, D_b$ також є інваріантними відносно $\mathcal{S}'(f)$. Тому кожне $h \in \mathcal{S}'(f)$ індукує перестановку $\rho(h)$ дисків $D_1, \ldots, D_b$. Таким чином, маємо гомоморфізм $\rho\colon \mathcal{S}'(f) \to \Sigma\{D_i\}_{i=1}^b$ з $\mathcal{S}'(f)$ в групу перестановок дисків $D_1, \ldots, D_b$. Нехай $G_K := \rho(\mathcal{S}'(f))$ – підгрупа в $\Sigma\{D_i\}_{i=1}^b$.

Твердження 4.6.1. *[4, 2, 28]. Мають місце такі властивості.*

1. *Для деяких $n, m \geq 1$ має місце ізоморфізм $G_K \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.*

2. *Існує переріз $s\colon G_K \to \mathcal{S}'(f)$ гомоморфізма ρ, тобто такий гомоморфізм, що $\rho \circ s = \mathrm{id}_{G_K}$.*

3. *Підгрупа $s(G_K) \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ вільно діє на T^2, а отже вільно діє на $D_1, \ldots, D_b$. Нехай r – кількість орбіт цієї дії. Тоді кожна орбіта складається з однакової кількості дисків mn, а отже $b = mnr$.*

4. *В кожній орбіті вільної дії $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ виберемо по одному диску та по-*

значимо їх $D_1, \dots, D_r$. *Тоді має місце ізоморфізм*

$$\pi_1\mathcal{O}(f) \simeq \Big(\prod_{i=1}^{r} \pi_1\mathcal{O}(f|_{D_i}, \partial D_i)\Big) \wr_{m,n} \mathbb{Z}^2.$$

2. Нехай Γ_f **містить єдиний цикл.** Виберемо довільну точку x на довільному ребрі цього циклу. Тоді $C = p_f^{-1}(x)$ є регулярною компонентою зв'язності деякої множини рівня функції f, яка не розбиває T^2. Нехай

$$\mathcal{C} = \{h(C) \mid h \in \mathcal{S}'(f)\} = \{C_0 = C, C_1, \dots, C_{n-1}\}.$$

Оскільки кожна C_i, $i = 0, \dots, n-1$, не розбиває тор та всі C_i попарно не перетинаються, то вони є попарно ізотопними. А отже їх можна перепозначити так, щоб у випадку $n \geq 2$ для кожного $i = 0, \dots, n-1$ криві C_i та $C_{(i+1) \bmod n}$ обмежували циліндр, який не містить інших кривих з $\mathcal{C}$.

Нехай R_{C_i} – f-регулярні околи C_i, $i = 0, \dots, n-1$, такі, що

$$\{h(R_C) \mid h \in \mathcal{S}'(f)\} = \{R_{C_0}, R_{C_1}, \dots, R_{C_{n-1}}\}.$$

Тоді компоненти зв'язності замикання $\overline{T^2 \setminus \cup_{i=0}^{n-1} R_{C_i}}$ – циліндри. Позначимо довільний такий циліндр через Q.

Твердження 4.6.2. *[29, 30].*

1. *Існує* $h \in \mathcal{S}'(f)$, *такий, що*

   а) h *не має нерухомих точок,*

   б) $h^n = \mathrm{id}_{T^2}$,

   в) $h(C_i) = C_{(i+1) \bmod n}$, $i = 0, \dots, n-1$.

   Таким чином h *індукує вільну дію* $\mathbb{Z}_n$ *на* T^2, *яка зберігає* f *є інваріантною та циклічно переставляє компоненти* C_i, $i = 0, \dots, n-1$. *Звідки,* *маємо комутативну діаграму*

$$\begin{tikzcd} T^2 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p"'] & \mathbb{R} \\ & T^2/\mathbb{Z}_n \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

де фактор-відображення $p\colon T^2 \to T^2/\mathbb{Z}_n$ *є* n*-листним накриттям тору* $T^2/\mathbb{Z}_n$ *та функція* $g \in \mathcal{F}(T^2/\mathbb{Z}_n, \mathbb{R})$ *має граф Кронрода-Ріба з єдиним циклом.*

2. *Має місце ізоморфізм*

$$\pi_1\mathcal{O}(f) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f|_Q, \partial Q) \wr_n \mathbb{Z}.$$

Нагадаємо, що $\mathcal{T}$ – множина класів ізоморфізмів груп, що складаються з груп вигляду $G \wr_{n,m} \mathbb{Z}^2$, де $G \in \mathfrak{G}$ і $n, m \geq 1$, а $\mathfrak{G}^O$ – підклас $\mathfrak{G}$, що складається з груп $(A \times B) \wr_n \mathbb{Z}$, де $A, B \in \mathfrak{G} \setminus \{1\}$ і $n \geq 1$.

Теорема 4.1.7. *Мають місце такі тотожності*

$$\mathcal{M}^\Psi = \mathcal{G}^\Psi = \mathcal{T}, \qquad \mathcal{M}^O = \mathcal{G}^O = \mathfrak{G}^O.$$

Доведення. З Твердження 4.6.1 випливають включення

$$\mathcal{G}^\Psi \subset \mathcal{T}, \mathcal{M}^\Psi \subset \mathcal{T}.$$

1. Покажемо, що мають місце включення $\mathcal{G}^O \subset \mathfrak{G}^O, \mathcal{M}^O \subset \mathfrak{G}^O$.

Нехай $f \in \mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$ – функція на торі, така, що Γ_f містить єдиний цикл. Тоді за Твердженням 4.6.2 маємо ізоморфізм $\pi_1\mathcal{O}(f) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f|_Q, \partial Q) \wr_n \mathbb{Z}$, де $Q \subset T^2$ – циліндр, визначений вище. Позначимо через ∂Q^{-1} та ∂Q^1 компоненти зв'язності межі ∂Q. Тоді $f(\partial Q^{-1}) < f(C)$ та $f(\partial Q^1) < f(C)$, де $C \in \mathcal{C}$. Відмітимо також, що $\varepsilon_{f|_Q}(\partial Q) = \pm 1$. Тому за теоремою про середнє значення існує компонента зв'язності W множини рівня відображення f, для якої

$f(W) = f(C)$. Позначимо через C_{-1} та C_1 циліндри, на які W розбиває Q. Тоді за Твердженням 4.2.3(3) маємо ізоморфізм

$$\pi_1\mathcal{O}(f|_Q, \partial Q) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f|_{C_{-1}}, \partial C_{-1}) \times \pi_1\mathcal{O}(f|_{C_1}, \partial C_1),$$

причому $\varepsilon_{f|_{C_{-1}}}(\partial C_{-1}) \equiv -1$ та $\varepsilon_{f|_{C_1}}(\partial C_1) \equiv 1$. З Наслідку 4.2.6 випливає, що $\pi_1\mathcal{O}(f|_{C_{-1}}, \partial C_{-1}), \pi_1\mathcal{O}(f|_{C_1}, \partial C_1) \in \mathfrak{G}^O$. Отже, $\mathcal{G}^O \subset \mathfrak{G}^O$, звідки $\mathcal{M}^O \subset \mathfrak{G}^O$.

2. Покажемо, що мають місце включення

$$\mathcal{T} \subset \mathcal{G}^\Psi, \mathcal{T} \subset \mathcal{M}^\Psi, \qquad \mathfrak{G}^O \subset \mathcal{G}^O, \mathfrak{G}^O \subset \mathcal{M}^O.$$

Для групи G побудуємо функцію $f \in \mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$ ($f \in Morse(T^2, \mathbb{R})$), для якої $\pi_1\mathcal{O}(f) \simeq G$.

Γ_f **є деревом.** Нехай $G \in \mathcal{T}$. Тоді $G = A \wr_{m,n} \mathbb{Z}$, де $A \in \mathfrak{G}$, $n, m \geq 1$.

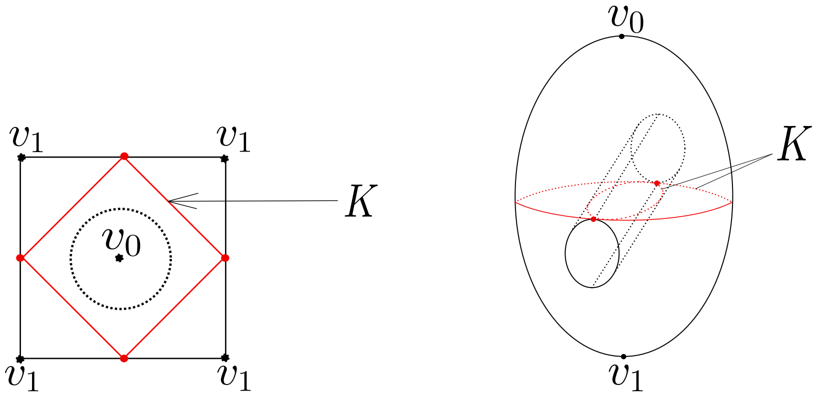


Рис. 4.6.2.1

Побудуємо функцію $f_0 \in \mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$ ($f_0 \in Morse(T^2, \mathbb{R})$), зображену на Рисунку 4.6.2.1, яка має 2 сідлові критичні точки на критичному рівні K, один невироджений максимум v_0 та один невироджений мінімум v_1. Тоді для інваріантного відносно $\mathcal{S}'(f_0)$ f_0-регулярного околу R_K рівня K замикання $\overline{T^2 \setminus R_K}$ складається з двох 2-дисків: диска D_0, який містить точку максимуму, та диска D_1, який містить точку мінімуму. Змінимо функцію f_0 в f_0-регулярному околі D_0 точки максимуму таким чином, щоб $\pi_1\mathcal{O}(f|_{D_0}, \partial D_0) \simeq A$. Це можна зробити за рахунок Теореми 4.1.7(1).

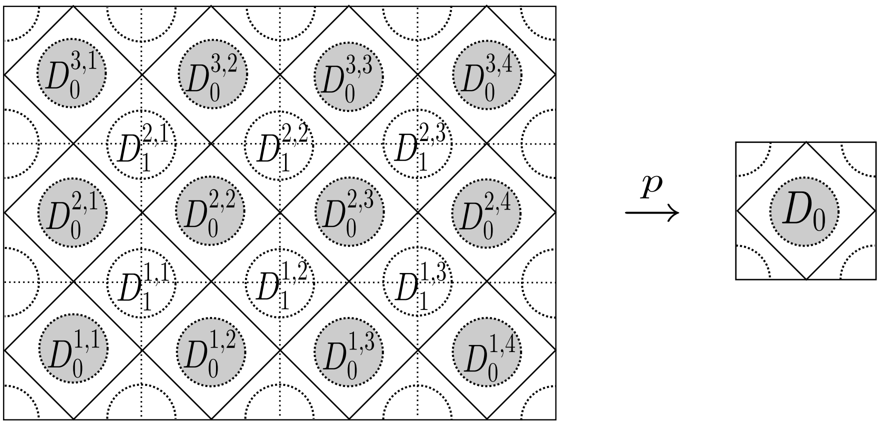


Рис. 4.6.2.2: $m = 3$, $n = 4$.

Візьмемо mn-листне накриття $p\colon T^2 \to T^2$ задане формулою

$p(x, y) = (mx \bmod 1, ny \bmod 1)$, де $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, та зображене на Рисунку 4.6.2.2. Нехай $p^{-1}(D_0) = \{D_0^{i,j}\}_{i,j=1}^{m,n}$, $p^{-1}(D_1) = \{D_1^{i,j}\}_{i,j=1}^{m,n}$ – множини компонент зв'язності прообразів дисків D_0 та D_1. Тоді функція $f\colon T^2 \to \mathbb{R}$, визначена за формулою $f := f_0 \circ p$ є шуканою функцією. Дійсно, легко бачити, що Γ_f — дерево та K – спеціальний рівень. Тоді за Твердженням 4.6.1 для деяких $k, l \geq 1$ маємо $G_K \simeq \mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_l$.

Покажемо, що $G_K \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$. Відмітимо, що дифеоморфізми тора $h_{i,j}(x, y) = (x + \frac{i}{m} \bmod 1, y + \frac{j}{n} \bmod 1)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, належать $\mathcal{S}'(f)$. Тому група цих дифеоморфізмів $\mathcal{H} = \{h_{i,j}\}_{i,j=1}^{m,n}$ є підгрупою $\mathcal{S}'(f)$.

Відмітимо, що $\rho(\mathcal{H})$ ін'єктивно вкладається у G_K та множини $\mathbb{D}_0 = \{D_0^{i,j}\}_{i,j=1}^{m,n}$, $\mathbb{D}_1 = \{D_1^{i,j}\}_{i,j=1}^{m,n}$ є інваріантними відносно $\mathcal{S}'(f)$. Оскільки за Твердженням 4.6.1 група $s(G_K)$ діє вільно на $\{D_0^{i,j}\}_{i,j=1}^{m,n}$, то кількість елементів у $s(G_K)$ та у G_K збігається з кількістю дисків у орбіті диска $D_0^{1,1}$, тобто дорівнює mn. Кількість елементів у $\rho(\mathcal{H})$ також дорівнює mn. Тому $G_K = \rho(\mathcal{H}) \simeq H \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.

Тоді за Твердженнями 4.6.1, 4.2.2 маємо

$$\pi_1\mathcal{O}(f) \simeq \Big(\pi_1\mathcal{O}(f|_{D_0^{1,1}}) \times \pi_1\mathcal{O}(f|_{D_1^{1,1}})\Big) \wr_{m,n} \mathbb{Z}^2 \simeq$$

$$\simeq (A \times 1) \wr_{m,n} \mathbb{Z}^2 \simeq A \wr_{m,n} \mathbb{Z}^2.$$

Γ_f **не є деревом.** Нехай $G \in \mathfrak{G}^O$. Тоді $G = (A \times B) \wr_n \mathbb{Z}$, де $A, B \in \mathfrak{G} \setminus \{1\}$ і $n \geq 1$. Побудуємо функцію $g \in \mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$ ($g \in Morse(T^2, \mathbb{R})$), яка має 2 сідлові критичні точки, один максимум та один мінімум. Нехай x – деяка точка на ребрі цього циклу, $C = p_f^{-1}(x)$ – відповідна регулярна компонента зв'язності деякої множини рівня функції g та C' – друга компонента зв'язності цієї множини рівня. Позначимо через R_C та $R_{C'}$ регулярні околи компонент C та C' відповідно. Тоді компоненти зв'язності C_A та C_B замикання $\overline{T^2 \setminus (R_C \cup R_{C'})}$ є циліндрами та $g|_{C_A} \in \mathcal{F}(C_A, \mathbb{R}, +1)$, $g|_{C_B} \in \mathcal{F}(C_B, \mathbb{R}, -1)$, причому $g(\partial C_A) = a$, $g(\partial C_B) = b$ для деяких $a, b \in \mathbb{R}$.

За Теоремою 4.1.7(1) та Зауваженням 4.5.1 можна вибрати такі функції $f_A \in \mathcal{F}(C_A, \mathbb{R}, -1)$, $f_B \in \mathcal{F}(C_B, \mathbb{R}, +1)$ ($f_A \in Morse(C_A, \mathbb{R}, -1)$, $f_B \in Morse(C_B, \mathbb{R}, +1)$), для яких

$$\pi_1\mathcal{O}(f_A) = A, \quad \pi_1\mathcal{O}(f_B) = B$$

та якщо замінити $g|_{C_A}$, $g|_{C_B}$ на f_A, f_B відповідно, то $g \in \mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$ ($g \in Morse(T^2, \mathbb{R})$).

Візьмемо n-листне накриття $p\colon T^2 \to T^2$ задане формулою $p(x, y) = (nx \bmod 1, y)$, де $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Відмітимо, що всі компоненти зв'язності замикання $\overline{T^2 \setminus p^{-1}(R_C)}$ є циліндрами. Позначимо довільний такий циліндр через Q.

Тоді за Твердженням 4.6.2 функція $f := g \circ p$ є шуканою, тобто $f \in \mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$ ($f \in Morse(T^2, \mathbb{R})$), Γ_f містить єдиний цикл та

$$\pi_1\mathcal{O}(f) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f|_Q, \partial Q) \wr_n \mathbb{Z} \overset{\text{Насл.4.2.4}}{\simeq} (A \times B) \wr_n \mathbb{Z}. \qquad \square$$

4.7 Центри вінцевих добутків

Наведемо означення обмежених і необмежених вінцевих добутків.

Нехай A і B – дві групи. Припустимо B діє на множині X, іншими словами ми маємо гомоморфізм φ з B у групу перестановок $\Sigma(X)$. Для $b \in B$ позначимо через $\varphi_b\colon X \to X$ відповідну перестановку. Нехай також $Map(X, A)$ – група всіх відображень $f\colon X \to A$ відносно операції поточкового множення. Тоді група B діє на $Map(X,A)$ за таким правилом: результат дії $b \in B$ на $f \in Map(X,A)$ є композицією:

$$f \circ \varphi_b\colon X \longrightarrow X \longrightarrow A.$$

Напівпрямий добуток $Map(X,A) \rtimes_\varphi B$ відносно цієї дії називається *необмеженим вінцевим добутком* A і B та позначається $A\,Wr_X B$. Таким чином, це прямий добуток $Map(X,A) \times B$ з операцією множення, визначеною формулою

$$(f_1, b_1) \cdot (f_2, b_2) = \big((f_1 \circ \varphi_{b_2}) \cdot f_2, b_1 \cdot b_2\big)$$

для $(f_1, b_1), (f_2, b_2) \in Map(X,A) \rtimes_\varphi B$.

Позначимо через $\sigma(f)$ носій функції $f \in Map(X,A)$:

$$\sigma(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq e, \text{ де } e \text{ є одиницею групи } A\},$$

а через $Map_{fin}(X,A)$ – підмножину $Map(X,A)$, що складається тільки з функцій зі скінченним носієм $|\sigma(f)| < \infty$. Напівпрямий добуток $Map_{fin}(X,A) \rtimes_\varphi B$ називається *обмеженим вінцевим добутком*, ми позначатимемо його $A\,wr_X B$.

Зауваження 4.7.1. *Якщо $X = \mathbb{Z}_n$ та $B = \mathbb{Z}$ діє на X циклічними зсувами, то $A\,Wr_{\mathbb{Z}_n}\mathbb{Z}$ є вінцевим добутком $A \wr_n \mathbb{Z}$. Якщо ж $X = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ та $B = \mathbb{Z}^2$ діє на X 2-циклічними зсувами, то $A\,Wr_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m}\mathbb{Z}^2$ є вінцевим добутком $A \wr_{n,m} \mathbb{Z}^2$.*

Центр групи A позначимо $Z(A)$. Нехай $\tilde{D}(A)$ позначає підгрупу $Map(X, Z(A))$ функцій $h : X \to Z(A)$ постійних на кожній орбіті дії групи B на X, і нехай $D(A)$ позначає підгрупу $Map_{fin}(X, Z(A))$ функцій з такою ж властивістю.

З Теореми 4.2 [31] випливає, що мають місце такі ізоморфізми:

$$Z(A\,Wr_X B) \cong \tilde{D}(A), \qquad Z(A\,wr_X B) \cong D(A),$$

де група B діє на X ефективно.

У випадку неефективної дії B на X для довільних груп A, B ми отримуємо більш загальну ситуацію. У цьому підрозділі ми узагальнюємо Теорему 4.2 [31] і розглядаємо випадок неефективної дії B на X.

Позначимо множину всіх орбіт B на X через $\mathcal{O}$, а множину скінченних орбіт через $\mathcal{O}_{fin}$. Нагадаємо, що прямий добуток множин V, індексований нескінченною множиною, складається з усіх нескінченних послідовностей елементів з V, а пряма сума складається тільки з послідовностей зі скінченним числом елементів відмінних від нуля.

Теорема 4.7.2. *Мають місце такі ізоморфізми:*

$$Z(A\ Wr_X B) = \tilde{D}(A) \times (\ker\varphi \cap Z(B)) \cong \Big(\prod_{\lambda\in\mathcal{O}} Z(A)\Big) \times (\ker\varphi \cap Z(B))\,, \quad (4.3)$$

$$Z(A\ wr_X B) = D(A) \times (\ker\varphi \cap Z(B)) \cong \Big(\bigoplus_{\lambda\in\mathcal{O}_{fin}} Z(A)\Big) \times (\ker\varphi \cap Z(B))\,. \quad (4.4)$$

Нехай $\tilde{Q}$ – підгрупа $A\ Wr_X B$, елементи (f, l) якої задовольняють умови:

a) f є постійною на кожній орбіті B на X, тобто $f(x) = a_\lambda$ для будь-якого $x \in O_\lambda$, $O_\lambda \in \mathcal{O}$, а кожен a_λ є елементом центру $Z(A)$,

b) $l \in \ker\varphi \cap Z(B)$, де $Z(B)$ – центр B.

Очевидно, якщо елемент з $A\ Wr_X B$ задовольняє умови a) і b), то елемент належить центру, тому $\tilde{Q} \subset Z(A\ Wr_X B)$.

Для будь-якого $y \in X$ і $c \in A$ визначимо відображення $g_{y,c} \in Map(X, A)$ за формулою:

$$g_{y,c}(x) = \begin{cases} c, & \text{if } x = y; \\ e, & \text{if } x \neq y. \end{cases} \quad (4.5)$$

Нехай S – множина елементів $(g_{y,c}, p)$ з $A\ Wr_X B$, де $p \in B$. Множина S є також підмножиною $A\ wr_X B$. Позначимо через $\tilde{C}(S)$ і $C(S)$ централізатор множини S у $A\,Wr_XB$ і централізатор множини S of $A\,wr_XB$ відповідно. Зрозуміло, що $Z(A\,Wr_XB) \subset \tilde{C}(S)$ та $Z(A\,wr_XB) \subset C(S)$. Тому, для групи $\tilde{Q}$ маємо вкладення:

$$\tilde{Q} \subset Z(A\,Wr_XB) \subset \tilde{C}(S).$$

Лема 4.7.3. *Виконуються такі рівності:*

$$Z(A\,Wr_XB) = \tilde{C}(S) = \tilde{Q}.$$

Доведення. Достатньо перевірити вкладення $\tilde{C}(S) \subset \tilde{Q}$.

Припустимо, що $(g_{y,c}, p) \in S$ та $(f, l) \in \tilde{C}(S)$, де $f, g_{y,c} \in Map(X, A)$, $g_{y,c}$ визначений у (4.5), та $l, p \in B$. Тоді, за означенням, маємо рівність $(f, l)(g_{y,c}, p) = (g_{y,c}, p)(f, l)$. Отже,

$$((f \circ \varphi_p) \cdot g_{y,c}, lp) = ((g_{y,c} \circ \varphi_l) \cdot f, pl)\,.$$

Тому, $lp = pl$ для будь-якого p, звідки $l \in Z(B)$, і ми отримуємо, що

$$(f \circ \varphi_p(x)) \cdot g_{y,c}(x) = (g_{y,c} \circ \varphi_l(x)) \cdot f(x). \tag{4.6}$$

Для $x \neq y, x \neq \varphi_l^{-1}(y)$ у (4.6) маємо:

$$f \circ \varphi_p(x) = f(x). \tag{4.7}$$

Рівність (4.7) виконується для кожного $p \in B$, тому f приймає одне й те саме значення на всій орбіті.

Відмітимо, що можна вибрати $g_{y,c}(x)$ з іншим фіксованим елементом y. Тому f є постійною на кожній орбіті B на X, тобто $f(x) = a_\lambda$ для кожного $x \in O_\lambda$, $O_\lambda \in \mathcal{O}$.

Залишилось показати, що кожен a_λ є елементом центру $Z(A)$ та $l \in \ker\varphi$.

Для цього проаналізуємо рівність (4.6) у випадку $x = y$. Можливі дві ситуації:

(i) якщо $\varphi_l(y) = y$, отримуємо

$$f(y)g_{y,c}(y) = g_{y,c}(y)f(y),$$

(ii) якщо $\varphi_l(y) \neq y$, отримуємо

$$f(y)g_{y,c}(y) = f(y).$$

Другий випадок неможливий, оскільки $g_{y,c}(y) \neq e$. Тому, $l \in \ker\varphi$. З першого випадку випливає, що для кожного $y \in X$ маємо $f(y) \in Z(A)$, оскільки $g_{y,c}(y) = c$, де c – довільний елемент A. Отже, умови a) та b) виконуються. $\square$

Лема 4.7.4. *Центр $Z(A\ wr_X B)$ є перетином $Z(A\ Wr_X B)$ та $A\ wr_X B$, тобто*

$$Z(A\ wr_X B) = Z(A\ Wr_X B) \cap (A\ wr_X B).$$

Доведення. Дійсно, вкладення $(Z(A\ Wr_X B) \cap (A\ wr_X B)) \subset Z(A\ wr_X B)$ очевидне.

Перевіримо протилежне вкладення. Припустимо $(f, l) \in Z(A\ wr_X B)$. Оскільки $S \subset A\ wr_X B$, отримуємо

$$Z(A\ wr_X B) \subset C(S) \subset \tilde{C}(S) \cap (A\ wr_X B) \overset{\text{Лема 4.7.3}}{=} Z(A\ Wr_X B) \cap (A\ wr_X B). \quad \square$$

Доведення Теореми 4.7.2. Для необмеженого вінцевого добутку $A\,Wr_X B$ кількість орбіт у $Z(A\,Wr_X B)$ може бути нескінченною, а для обмеженого вінцевого добутку $A\ wr_X B$ кількість орбіт у $Z(A\ wr_X B)$ може бути тільки скінченною.

Згідно з Лемою 4.7.3 та Лемою 4.7.4, мають місце такі бієкції

$$\psi_1 \colon Z(A\ Wr_X B) \to \prod_{\lambda \in \Lambda} Z(A) \times (\ker\varphi \cap Z(B)),$$

$$\psi_2 \colon Z(A\ wr_X B) \to \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_{fin}} Z(A) \times (\ker\varphi \cap Z(B)),$$

визначені за формулами $\psi_1(f, l) = (a_1, a_2, \ldots, a_{s_1}, l)$, $\psi_2(f, l) = (a_1, a_2, \ldots, a_{s_2}, l)$. Легко перевірити, що ψ_1 та ψ_2 є гомоморфізмами. $\square$

Наслідок 4.7.5.

$$Z\Big(A \underset{n}{\wr} \mathbb{Z}\Big) = \{(a, a, \ldots, a, nk) \mid a \in Z(A), k \in \mathbb{Z}\} \cong \tag{4.8}$$

$$\cong D(A) \times n\mathbb{Z} \cong Z(A) \times \mathbb{Z}.$$

$$Z\Big(A \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2\Big) = \Big\{(a)_{i,j=1}^{n,m}, nk, mp) \mid a \in Z(A), k, p \in \mathbb{Z}\Big\} \cong \tag{4.9}$$

$$\cong D(A) \times n\mathbb{Z} \times m\mathbb{Z} \cong Z(A) \times \mathbb{Z}^2.$$

$$Z(A \times B) \cong Z(A) \times Z(B). \tag{4.10}$$

Дійсно, для груп $A \underset{n}{\wr} \mathbb{Z}$ та $A \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2$ маємо тільки одну орбіту дії B на X. Згідно з Теоремою 4.7.2, отримуємо (4.8), (4.9) Наслідку 4.7.5, (4.10) очевидне.

Наприклад,

$$Z\Big(\big((\mathbb{Z} \wr_3 \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \wr_5 \mathbb{Z})\big) \wr_7 \mathbb{Z}\Big) \cong Z\Big((\mathbb{Z} \wr_3 \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \wr_5 \mathbb{Z})\Big) \times 7\mathbb{Z} \cong$$

$$\cong Z\Big((\mathbb{Z} \wr_3 \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \wr_5 \mathbb{Z})\Big) \times \mathbb{Z} \cong Z\big(\mathbb{Z} \wr_3 \mathbb{Z}\big) \times Z\big(\mathbb{Z} \wr_5 \mathbb{Z}\big) \times \mathbb{Z} \cong$$

$$\cong \mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^4 \times \mathbb{Z}.$$

Теорема 4.7.6. *Нехай $G \in \mathfrak{G}$ ($G \in \mathcal{T}$), ω – довільна реалізація G в алфавіті $\mathcal{A}_{\mathfrak{G}}$ ($\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$), а $\beta_1(\omega)$ – кількість символів $\mathbb{Z}$ у реалізації ω. Тоді $Z(G) \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}$.*

Доведення. Справедливість теореми випливає з Наслідку 4.7.5 та індукції по кількості символів 1 та $\mathbb{Z}$ у реалізації ω, яку позначатимемо через $l(\omega)$. Для зручності позначимо через $\widetilde{\omega}$ групу з класу $\mathfrak{G}$ ($\mathcal{T}$), визначену словом ω. Зокрема, ω є реалізацією $\widetilde{\omega}$ в алфавіті $\mathcal{A}$ (чи в $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$). Оскільки $\widetilde{\omega}$ є групою ізоморфною G, маємо

$$Z(G) = Z(\widetilde{\omega}).$$

Очевидно, якщо $l(\omega) = 1$, то ω – це або 1, або $\mathbb{Z}$, тому $Z(G) \simeq 1$ або $Z(G) \simeq \mathbb{Z}$ відповідно. Припустимо, що $Z(G) \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}$ для всіх слів з $l(\omega) \leq k$. Покажемо це для $l(\omega) = k + 1$. У цьому випадку реалізація ω – це або

1. прямий добуток $\omega_1 \times \omega_2$, такий, що $l(\omega_1) + l(\omega_2) = k+1$, $l(\omega_1) \leq k$, $l(\omega_2) \leq k$, або

2. вінцевий добуток $\omega_1 \wr_n \mathbb{Z}$, де $l(\omega_1) = k$, або

3. вінцевий добуток $\omega_1 \wr_{n,m} \mathbb{Z}^2$, де $l(\omega_1) = k-1$.

Із Наслідку 4.7.5, індуктивного припущення та очевидного спостереження, що $\beta_1(\omega_1) + \beta_1(\omega_2) = \beta_1(\omega_1 \times \omega_2)$, випливає, що у першому випадку

$$Z(\widetilde{\omega_1} \times \widetilde{\omega_2}) \cong Z(\widetilde{\omega_1}) \times Z(\widetilde{\omega_2}) \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega_1)} \times \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega_2)} \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega_1)+\beta_1(\omega_2)} \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega_1 \times \omega_2)} \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)},$$

у другому випадку

$$Z(\widetilde{\omega}) \simeq Z(\widetilde{\omega_1} \wr_n \mathbb{Z}) \simeq Z(\widetilde{\omega_1}) \times \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega_1)} \times \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega_1 \wr_n \mathbb{Z})} \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)},$$

а у третьому випадку

$$Z(\widetilde{\omega}) \simeq Z(\widetilde{\omega_1} \wr_{n,m} \mathbb{Z}^2) \simeq Z(\widetilde{\omega_1}) \times \mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega_1)} \times \mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega_1 \wr_{n,m} \mathbb{Z}^2)} \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}. \quad \square$$

4.8 Комутант

Теорема 4.8.1. *Для довільної групи G комутант $G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2$ співпадає з такою групою*

$$\left[G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2, G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2\right] = \left\{ \left((g_{i,j})_{i,j=1}^{n,m}, 0, 0\right) \mid \prod_{i,j=1}^{n,m} g_{i,j} \in [G,G] \right\}.$$

Доведення. Спочатку покажемо, що кожний $g = ((g_{i,j})_{i,j=1}^{n,m}, 0, 0)$, такий, що $\prod_{i,j=1}^{n,m} g_{i,j} \in [G,G]$, належить $\left[G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2, G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2\right]$.

Доведемо, що елементи h_1, h_2 групи $G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2$,

$$h_1 = ((g_{i,j})_{i,j=1}^{n,m}, k, s) \quad h_2 = ((g_{i,1})_{i=1}^{n}, \cdots, (g_{i,m-2})_{i=1}^{n}, (g_{i,m-1}g_{i,m})_{i=1}^{n}, e), k, s)$$

$\square$

Аналогічними до Теореми 4.8.2 міркуваннями можна встановити такий наслідок.

Наслідок 4.8.2. *Для довільної групи G комутант $G \underset{n}{\wr} \mathbb{Z}$ збігається з групою*

$$\left[G \underset{n}{\wr} \mathbb{Z}, G \underset{n}{\wr} \mathbb{Z}\right] = \left\{(g_1, g_2, \ldots, g_n, 0) \mid \prod_{i=1}^{n} g_i \in [G, G]\right\}.$$

Теорема 4.8.3. *Для довільної групи G мають місце такі ізоморфізми факторгруп*

$$G \underset{n}{\wr} \mathbb{Z}/[G \wr_n \mathbb{Z}, G \wr_n \mathbb{Z}] \cong G/[G, G] \times \mathbb{Z},$$

$$G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2/\left[G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2, G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2\right] \cong G/[G, G] \times \mathbb{Z}^2.$$

Доведення. Побудуємо гомоморфізми

$$\eta \colon G \wr_n \mathbb{Z} \to G/[G, G] \times \mathbb{Z}, \quad \mu \colon G \wr_{n,m} \mathbb{Z}^2 \to G/[G, G] \times \mathbb{Z}^2$$

визначені формулами

$$\eta((g_i)_{i=1}^{n}, k) = \left(\left(\prod_{i=1}^{n} g_i\right)[G, G], k\right),$$

$$\mu((g_{i,j})_{i,j=1}^{n,m}, k, p) = \left(\left(\prod_{i,j=1}^{n,m} g_{i,j}\right)[G, G], k, p\right).$$

Для перевірки, що η є гомоморфізмом, проведемо обчислення

$$\eta(a_1, a_2, \ldots, a_n, k)\eta(b_1, b_2, \ldots, b_n, p) = (a_1 a_2 \cdots a_n[G, G], k)(b_1 b_2 \cdots b_n[G, G], p) =$$

$$= (a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_n[G, G], k + p),$$

$$\eta((a_1, a_2, \ldots, a_n, k)(b_1, b_2, \ldots, b_n, p)) =$$

$$= \eta(a_{(1+p) \bmod n} b_1, a_{(2+p) \bmod n} b_2, \ldots, a_{(n+p) \bmod n} b_n, k + p) =$$

$$= (a_{(1+p) \bmod n} b_1 a_{(2+p) \bmod n} b_2 \cdots a_{(n+p) \bmod n} b_n[G, G], k + p).$$

Оскільки $G/[G,G]$ абелева, маємо

$$(a_{(1+p) \bmod n} b_1 a_{(2+p) \bmod n} b_2 \cdots a_{(n+p) \bmod n} b_n [G,G], k+p) =$$
$$= (a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_n [G,G], k+p),$$

тому η є гомоморфізмом.

Гомоморфізм η є сюр'єктивним, оскільки для кожного елементу $(h,n) \in G/[G,G] \times \mathbb{Z}$ існує елемент $(h, e, e, \cdots, n)$, що задовольняє

$$\varphi(h, e, e, \ldots, n) = (h, n).$$

Тоді, ядро η має вигляд $\ker \eta = \{(g_1, g_2, \ldots, g_n, 0) | \prod_{i=1}^{n} g_i \in [G,G]\}$ та співпадає з $[G \wr_n \mathbb{Z}, G \wr_n \mathbb{Z}]$.

Аналогічно перевіряється, що μ є сюр'єктивним гомоморфізмом. Ядро μ має вигляд $\ker \mu = \{(g_{i,j})_{i,j=1}^{n,m}, 0, 0) | \prod_{i,j=1}^{n,m} g_{i,j} \in [G,G]\}$ та співпадає з комутантом $\left[G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2, G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2\right]$. □

Теорема 4.8.4. *Нехай $G \in \mathfrak{G}$ ($G \in \mathcal{T}$), ω– довільна реалізація G в алфавіті $\mathcal{A}_{\mathfrak{G}}$ ($\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$) та $\beta_1(\omega)$ – кількість символів $\mathbb{Z}$ у реалізації ω. Тоді $G/[G,G] \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}$.*

Доведення. Доведення аналогічне доведенню Теореми 4.7.6. Замість Зауваження 4.7.5 достатньо застосувати Теорему 4.8.3 та твердження про те, що для довільних двох груп A та B виконується

$$A \times B/[A \times B, A \times B] \simeq A/[A,A] \times B/[B,B]. \tag{4.11}$$

Для доведення (4.11) достатньо перевірити, що відображення $\varphi\colon A \times B \to A/[A,A] \times B/[B,B]$, визначене формулою

$$(a,b) \mapsto (a[A,A], b[B,B]),$$

є сюр'єктивним гомоморфізмом з ядром $\ker \varphi = [A \times B, A \times B]$.

Оскільки φ є добутком сюр'єктивних гомоморфізмів φ_1, φ_2 визначених формулами

$$\begin{aligned} \varphi_1 \colon A \times B \to A/[A, A], &\qquad \varphi_1(a, b) = a[A, A], \\ \varphi_2 \colon A \times B \to B/[B, B], &\qquad \varphi_2(a, b) = b[B, B], \end{aligned}$$

воно також є сюр'єктивним гомоморфізмом.

Далі, відмітимо, що

$$\ker \varphi = \{(a, b) | a \in [A, A], b \in [B, B]\}.$$

Перевіримо, що $\ker \varphi \subset [A \times B, A \times B]$. Дійсно, нехай $(\prod[a_i, b_i], \prod[c_j, d_j]) \in \ker \varphi$, де $a_i, b_i \in A$, $c_j, d_j \in B$, тоді

$$(\prod_i [a_i, b_i], \prod_j [c_j, d_j]) = (\prod_i [a_i, b_i], e)(e, \prod_j [c_j, d_j]) = \prod_i ([a_i, b_i], e) \prod_j (e, [c_j, d_j]) =$$
$$= \prod_i [(a_i, e), (b_i, e)] \prod_j [(e, c_j), (e, d_j)] \in [A \times B, A \times B].$$

Навпаки, для будь-якого комутатору $[(a, b), (c, d)]$ в $[A \times B, A \times B]$ маємо

$$[(a, b), (c, d)] = (a, b)(c, d)(a^{-1}, b^{-1})(c^{-1}, d^{-1}) = ([a, c], [b, d]) \in \ker \varphi.$$

Теорема доведена. □

Тепер ми можемо отримати очевидне доведення одного з основних результатів, Теореми 4.1.5.

Доведення Теореми 4.1.5. При тих самих припущеннях, отримуємо з Теореми 4.7.6, що $Z(G) \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}$, та з Теореми 4.8.4, що $G/[G, G] \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}$. Тоді, очевидно,

$$Z(G) \cong G/[G, G] \cong \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}.$$ □

4.9 Висновки

Для множин класів $\mathfrak{G}$ і $\mathcal{T}$ ізоморфізму груп, що породжуються прямими добутками та певними типами вінцевих добутків, було доведено, що включення $\mathcal{M}(M,P) \subset \mathfrak{G}$, якщо M відмінна від 2-сфери S^2 і 2-тора T^2, та $\mathcal{M}(T^2,\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}$ є рівностями та описано деякі підкласи в $\mathcal{M}(M,P)$ при певних обмеженнях на поведінку функцій на межі ∂M.

Також доведено, що для довільної групи $G \in \mathfrak{G}$ ($G \in \mathcal{T}$) центр $Z(G)$ і фактор-група по комутанту $G/[G,G]$ є вільними абелевими групами однакового рангу, який легко обчислити із геометричних властивостей відображення Морса f, такого, що $\pi_1\mathcal{O}(f) \simeq G$. Зокрема, цей ранг є першим числом Бетті орбіти $\mathcal{O}(f)$ відображення f.

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена дослідженню гомотопічних властивостей гладких функцій на поверхнях. В роботі отримані такі результати:

- показано, що для кожного відображення з класу $\mathcal{F}(B,P)$ гладких відображень на стрічці Мебіуса B, існує єдиний критичний рівень, який розбиває B в об'єднання циліндра і 2-дисків (такий рівень названо спеціальним).
- для всіх відображень з $\mathcal{F}(B,P)$ обчислено фундаментальні групи їх орбіт за умови тривіальності дій стабілізаторів цих відображень на компонентах зв'язності доповнення до відповідних спеціальних критичних рівнів;
- доведено, що для довільного відображення з класу $\mathcal{F}(M,P)$ на зв'язній орієнтовній компактній поверхні M і для довільного дифеоморфізма, який залишає інваріантною кожну регулярну компоненту множини рівня цього відображення та змінює її орієнтацію, квадрат цього дифеоморфізма ізотопний тотожньому відображенню зі збереженням відображення (це твердження є гомотопічним та пошаровим аналогом властивості «жорсткості» для змінюючих орієнтацію лінійних рухів площини, яка стверджує, що кожен такий рух має порядок 2);
- розглянуто клас ізоморфізму груп $\mathcal{T}$, що породжується прямими добутками та певними типами вінцевих добутків, який містить фундаментальні групи орбіт всіх функцій з класу $\mathcal{F}(M,\mathbb{R})$ на орієнтовних поверх-

нях крім 2-сфери. Для нього доведені такі результати:

- отримано теореми реалізації для груп із класу $\mathcal{T}$ як фундаментальних груп орбіт функцій з класу $\mathcal{F}(M, P)$ на поверхнях відмінних від 2-сфери і 2-тора, зокрема за певних обмежень на поведінку функцій на межі;
- також отримано теореми реалізації для груп із класу $\mathcal{T}$ як фундаментальних груп орбіт функцій з класу $\mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$ на 2-торі T^2;
- обчислено центр $Z(G)$ і фактор-групу по комутанту $G/[G, G]$ для кожної групи G з класу $\mathcal{T}$ і показано, що вони є вільними абелевими групами однакового рангу β_1. Зокрема, якщо G – фундаментальна група орбіти деякої функції $f \in \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$, то β_1 є першим числом Бетті цієї орбіти, тобто рангом першої групи гомологій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] *Bolsinov, A. V.* Integrable Hamiltonian systems / A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko. — Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004. — Pp. xvi+730. — Geometry, topology, classification, Translated from the 1999 Russian original. http://dx.doi.org/10.1201/9780203643426.

[2] *Feshchenko, Bohdan.* Actions of finite groups and smooth functions on surfaces / Bohdan Feshchenko // *Methods Funct. Anal. Topology.* — 2016. — Vol. 22, no. 3. — Pp. 210–219.

[3] *Feshchenko, Bohdan.* Deformations of smooth functions on 2-torus / Bohdan Feshchenko // *Proc. Int. Geom. Cent.* — 2019. — Vol. 12, no. 3. — Pp. 30–50. https://doi.org/10.15673/tmgc.v12i3.1528.

[4] *Feshchenko, B. G.* Deformation of smooth functions on 2-torus whose Kronrod-Reeb graphs is a tree / B. G. Feshchenko // Topology of maps of low-dimensional manifolds. — Natsīonal. Akad. Nauk Ukraïni, Īnst. Mat., Kiev, 2015. — Vol. 12 of *Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos.* — Pp. 204–219.

[5] *Hatcher, Allen.* Algebraic topology / Allen Hatcher. — Cambridge University Press, Cambridge, 2002. — Pp. xii+544.

[6] *I., Kuznietsova.* Homotopy properties of Morse functions on the Möbius strip / Kuznietsova I. // The International Conference in Functional Analysis dedi-

cated to the 125th anniversary of Stefan Banach. — Lviv, Ukraine: 2017. — P. 64.

[7] *Kalmár, Boldizsár.* Cobordism group of Morse functions on unoriented surfaces / Boldizsár Kalmár // *Kyushu J. Math.* — 2005. — Vol. 59, no. 2. — Pp. 351–363. http://dx.doi.org/10.2206/kyushujm.59.351.

[8] *Kronrod, A. S.* On functions of two variables / A. S. Kronrod // *Uspehi Matem. Nauk (N.S.).* — 1950. — Vol. 5, no. 1(35). — Pp. 24–134.

[9] *Kudryavtseva, E. A.* Special framed Morse functions on surfaces / E. A. Kudryavtseva // *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.* — 2012. — no. 4. — Pp. 14–20. http://dx.doi.org/10.3103/S0027132212040031.

[10] *Kudryavtseva, E. A.* On the homotopy type of spaces of Morse functions on surfaces / E. A. Kudryavtseva // *Sb. Math.* — 2013. — Vol. 204, no. 1. — Pp. 75–113.

[11] *Kudryavtseva, E. A.* Topology of spaces of functions with prescribed singularities on the surfaces / E. A. Kudryavtseva // *Dokl. Akad. Nauk.* — 2016. — Vol. 93, no. 3. — Pp. 264–266.

[12] *Kuznietsova I., Maksymenko S.* Homotopy properties of smooth functions on the Möbius band / Maksymenko S. Kuznietsova I. // *Proc. of the Intern. Geom. Center.* — 2019. — Vol. 12, no. 3. — Pp. 1–29.

[13] *Kuznietsova I., Maksymenko S.* On the squares of diffeomorphisms of surfaces / Maksymenko S. Kuznietsova I. // Algebraic and geometric methods of analysis / Інститут математики НАН України. — м. Київ, Україна: 2019. — 6. — P. 64.

[14] *Kuznietsova I., Maksymenko S.* Properties of changing orientation homeomorphisms of the disk / Maksymenko S. Kuznietsova I. // «Morse theory and its applications» devoted to the memory and 70th anniversary of Volodymyr Sharko. — 2020. — P. 41.

[15] *Kuznietsova I., Maksymenko S.* Reversing orientation homeomorphisms of surfaces / Maksymenko S. Kuznietsova I. // *Proc. of the Intern. Geom. Center.* — 2020. — Vol. 13, no. 4. — Pp. 179–209.

[16] Lyapunov graphs for circle valued functions / Ketty A. de Rezende, Guido G. E. Ledesma, Oziride Manzoli-Neto, Gioia M. Vago // *Topology Appl.* — 2018. — Vol. 245. — Pp. 62–91. https://doi.org/10.1016/j.topol.2018.06.008.

[17] *Maksymenko, Sergiy.* Smooth shifts along trajectories of flows / Sergiy Maksymenko // *Topology Appl.* — 2003. — Vol. 130, no. 2. — Pp. 183–204.

[18] *Maksymenko, Sergey.* Path-components of Morse mappings spaces of surfaces / Sergey Maksymenko // *Comment. Math. Helv.* — 2005. — Vol. 80, no. 3. — Pp. 655–690.

[19] *Maksymenko, Sergiy.* Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces / Sergiy Maksymenko // *Ann. Global Anal. Geom.* — 2006. — Vol. 29, no. 3. — Pp. 241–285.

[20] *Maksymenko, Sergiy.* Homotopy dimension of orbits of Morse functions on surfaces / Sergiy Maksymenko // *Travaux Mathématiques.* — 2008. — Vol. 18. — Pp. 39–44.

[21] *Maksymenko, Sergiy.* Deformations of circle-valued Morse functions on

surfaces / Sergiy Maksymenko // *Укр. мат. журн.* — 2010. — Т. 62, № 10. — С. 1360–1366.

[22] *Maksymenko, Sergiy.* Functions on surfaces and incompressible subsurfaces / Sergiy Maksymenko // *Methods Funct. Anal. Topology.* — 2010. — Vol. 16, no. 2. — Pp. 167–182.

[23] *Maksymenko, Sergiy.* Functions with isolated singularities on surfaces / Sergiy Maksymenko // *Geometry and topology of functions on manifolds. Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos.* — 2010. — Vol. 7, no. 4. — Pp. 7–66.

[24] *Maksymenko, Sergiy.* Deformations of functions on surfaces by isotopic to the identity diffeomorphisms / Sergiy Maksymenko // *Topology Appl.* — 2020. — Vol. 282. — Pp. 107312, 48. https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107312.

[25] *Maksymenko, Sergiy.* Deformations of functions on surfaces by isotopic to the identity diffeomorphisms / Sergiy Maksymenko // *Topology Appl.* — 2020. — Vol. 282. — Pp. 107312, 48. https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107312.

[26] *Maksymenko, S. I.* Hamiltonian vector fields of homogeneous polynomials in two variables / S. I. Maksymenko // *Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos.* — 2006. — Vol. 3, no. 3. — Pp. 269–308, arXiv:math/0709.2511.

[27] *Maksymenko, S. I.* Deformations of functions on surfaces by isotopic to the identity diffeomorphisms / S. I. Maksymenko. — 2014. — P. arXiv:math/1311.3347.

[28] *Maksymenko, S. I.* Homotopy properties of spaces of smooth functions on 2-

torus / S. I. Maksymenko, B. G. Feshchenko // *Ukrainian Math. Journal.* — 2014. — Vol. 66, no. 9. — Pp. 1205–1212.

[29] *Maksymenko, S. I.* Orbits of smooth functions on 2-torus and their homotopy types / S. I. Maksymenko, B. G. Feshchenko // *Matematychni Studii.* — 2015. — Vol. 44, no. 1. — Pp. 67–84.

[30] *Maksymenko, S. I.* Smooth functions on 2-torus whose Kronrod-Reeb graph contains a cycle / S. I. Maksymenko, B. G. Feshchenko // *Methods Funct. Anal. Topology.* — 2015. — Vol. 21, no. 1. — Pp. 22–40.

[31] *Meldrum, J. D. P.* Wreath products of groups and semigroups / J. D. P. Meldrum. — Longman, Harlow, 1995. — Vol. 74 of *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics.* — Pp. xii+324.

[32] *Reeb, Georges.* Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées / Georges Reeb. Actualités Sci. Ind., no. 1183. — Hermann & Cie., Paris, 1952. — P. no book paging given. — Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 11, pp. 5–89, 155–156.

[33] *Sergeraert, Francis.* Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications / Francis Sergeraert // *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4).* — 1972. — Vol. 5. — Pp. 599–660.

[34] *I., Кузнєцова.* First Betti numbers of orbits of Morse functions on surfaces / Кузнєцова I. // Міжнародна конференція молодих математиків / Інститут математики НАН України. — м. Київ, Україна: 2019. — 6. — P. 64.

[35] *Кудрявцева, Е. А.* Топология пространств функций Морса на поверхностях / Е. А. Кудрявцева // *Мат. Заметки.* — 2012. — Vol. 92, no. 1-2. — Pp. 219–236.

[36] *Кузнєцова І. В., Сорока Ю. Ю.*. Перші числа Бетті орбіт функцій Морса на поверхнях / Сорока Ю. Ю.. Кузнєцова І. В. // *Укр. мат. журн.* — 2021. — Vol. 73, no. 2. — Pp. 179–200.

[37] *Максименко, Сергій.* Гомотопічний тип правих стабілізаторів та орбіт гладких функцій на поверхнях / Сергій Максименко // *Український математичний журнал.* — 2012. — Т. 64, № 9. — С. 1186–1203.

[38] *Шарко, В. В.* Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты) / В. В. Шарко. — Киев: Наук. думка, 1990. — С. 196.

[39] *Шарко, В. В.* Функции на поверхностях, I / В. В. Шарко // *Некоторые проблемы современой математики.* Праці Інституту математики НАН України. — Киев: Ин-т. математики НАН Украины, 1998. — Т. 25. — С. 408–434.

Додаток

Основні результати дисертації опубліковано в трьох статтях в наукових виданнях, які входять до переліку фахових видань МОН України. Всі три статті опубліковано в журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз даних (Web of Science, Scopus) та чотирьох збірниках тез конференцій.

1. Iryna Kuznietsova, Sergiy Maksymenko. Homotopy properties of smooth functions on the Möbius band // Proceedings of the International Geometry Center Vol. 12, no. 3 (2019) pp. 1–29.

2. Iryna Kuznietsova, Sergiy Maksymenko. Reversing orientation homeomorphisms of surfaces // Proceedings of the International Geometry Center Vol. 13, no. 4 (2020) pp. 179–209.

3. І. В. Кузнєцова, Ю. Ю. Сорока. Перші числа Бетті орбіт функцій Морса на поверхнях // Укр. мат. журн., 2021, т. 73, No 2, С. 179-200.

4. Iryna Kuznietsova. Homotopy properties of Morse functions on the Möbius strip // Тези доповідей – The International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, Lviv, Ukraine.—2017.—P. 64.

5. Кузнєцова Ірина Валеріївна. First Betti numbers of orbits of Morse functions on surfaces // Тези доповідей — Міжнародна конференція молодих математиків, 6 – 8 червня, 2019, м. Київ, Україна, Інститут математики НАН України, 2019. — С. 83.

6. Iryna Kuznietsova, Sergiy Maksymenko. Properties of changing orientation homeomorphisms of the disk // Тези доповідей – International conference «Morse theory and its applications» devoted to the memory and 70th anniversary of Volodymyr Sharko, 2019, p. 32

7. I. Kuznietsova, S. Maksymenko. On the squares of diffeomorphisms of surfaces // Тези доповідей – International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis», 2020, p. 41.

Результати дисертації доповідались та обговорювались на таких конференціях та семінарах:

1. The International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, Lviv, Ukraine, 18-23 September 2017, p.64-65.

2. «Міжнародна конференція молодих вчених», м. Київ, Інститут математики НАН України, 6–8 червня 2019 р., с.83

3. International conference «Morse theory and its applications» dedicated to the memory and 70th anniversary of Volodymyr Sharko, м. Київ, Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова, 25-28 вересня 2019 р, с. 32-33.

4. International conference «Algebraic and geometric methods of analysis», м. Одеса, онлайн конференція, 26-30 травня 2020 р., p.41

5. Семінар кафедри геометрії, топології і динамічних систем, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ, 18.02.2021 р.