АНОТАЦІЯ

Кузнєцова І. В. Гомотопічні властивості гладких функцій на поверхнях. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «Математика» — Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2021.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню гомотопічних властивостей гладких функцій на поверхнях.

Гладкі функції на многовидах є важливими об'єктами досліджень у сучасній математиці і мають застосування в різних галузях науки. Зокрема, властивості таких функцій часто несуть інформацію про геометрію та топологію многовиду, на якому вони визначені.

Наприклад, М. Морс довів, що в околі кожної своєї *невиродженої* критичної точки гладка функція, після деякої заміни координат, має стандартний вигляд квадратичного многочлену (лема Морса). Це дозволило йому встановити зв'язок між числом невироджених критичних точок різних індексів з рангами та скрутами груп гомологій многовиду (слабкі та сильні нерівності Морса), а також отримати оцінки на число замкнутих геодезичних ріманового многовиду. Таким чином, виявилось, що можна отримати геометричну інформацію про многовид завдяки функціям Морса на ньому. Розвитком цих ідей, які отримали назву теорія Морса, займалися Л. Люстерник, Л. Шнірельман, Г. Чогошвілі, Л. Ельсгольц, Р. Бот, Е. Віттен, С. Новіков, В. Шарко та багато інших математиків XX ст.

С. Смейл отримав теорему про h-кобордизм (зокрема, цим довів гіпотезу Пуанкаре у розмірностях $\geqslant 5$), використовуючи методи скорочення невироджених критичних точок сусідніх індексів.

В. Шарко, використовуючи аналогічні ідеї, зміг отримати оцінки на міні-

мальне число критичних точок функцій Морса на заданому многовиді розмірності $\geqslant 6$. Зокрема ці оцінки уточнювали нерівності отримані Морсом, а також узагальнювали результати С. Смейла на неоднозв'язні многовиди. Також він довів «більш жорсткі» нерівності Морса для неоднозв'язних многовидів.

Компоненти зв'язності просторів функцій Морса в високих розмірностях описані В. Шарко [38], а на поверхнях вони класифіковані в роботах В. Шарка [39], С. Матвєєва, Х. Цишанга, О. Кудрявцевої та С. Максименка [18, 21]. Групи кобордизмів функцій Морса на поверхнях обчислили K. Ikegami і O. Saeki та B. Kalmar [7].

Інтерес до вивчення топології функцій, векторних полів, дифеоморфізмів на поверхнях значно зріс починаючи з 80-х років завдяки роботам А. Фоменка, його учнів і колег, щодо топологічної класифікації гамільтонових динамічних систем з двома стеменями вільності. Діяльність у даному напрямку в Україні була продовжена В. Шарко та його учнями. Топологічна класифікація функцій на компактних поверхнях були отримані в роботах: А. Болсінова та А. Фоменко, А. Ошемкова, В. Шарко, Є. Куленіча, О. Пришляка та його учнів, зокрема Б. Гладиш і Д. Личак, С. Максименка, О. Кадубовського, І. Юрчук і Є. Полуляха.

С. Максименко досліджував гомотопічні властивості стабілізаторів та орбіт гладких функцій на поверхнях відносно дії груп дифеоморфізмів. А саме, він вивчав відображення з класу $\mathcal{F}(M, P)$, який складається з гладких відображень з поверхні M у одновимірний многовид P, які приймають постійні значення на кожній зв'язній компоненті межі поверхні, критичні точки яких належать до внутрішності поверхні та такі, що в околі кожної критичної точки вони є гладко еквівалентними деяким однорідним многочленам без кратних множників.

Гомотопічні типи стабілізаторів та орбіт функцій з класу $\mathcal{F}(M, P)$ були обчислені у ряді робіт С. Максименка [24, 19], Б. Фещенка [4, 2], а також для функцій Морса у роботах О. Кудрявцевої [9, 35, 10, 11]. Зокрема, С. Максименко показав у роботі [19], що якщо $M \neq S^2, \mathbb{R}P^2$, то орбіта $\mathcal{O}_f(f)$ є асферичною[1], причому якщо f є відображенням Морса загального положення, то орбіта $\mathcal{O}_f(f)$ гомотопічно еквівалентна $(S^1)^k \simeq \mathbb{Z}^k$ для деякого k. Якщо ж $M = S^2$ або $\mathbb{R}P^2$, то $\pi_i \mathcal{O}_f(f) \simeq \pi_i(SO(3))$ для $i \geq 2$, а якщо f є функцією загального положення, то $\mathcal{O}_f(f)$ гомотопічно еквівалентна $(S^1)^k \times SO(3)$ для деякого k. Далі, О. Кудрявцева узагальнила ці результати і показала, що якщо M орієнтовна, а $f\colon M \to \mathbb{R}$ – функція Морса, то існує вільна дія деякої скінченної групи H на k-торі $(S^1)^k$, така, що $\mathcal{O}_f(f)$ гомотопічно еквівалентна $(S^1)^k/H$, якщо $M \neq S^2$, та гомотопічно еквівалентна $((S^1)^k/H) \times SO(3)$, якщо $M = S^2$.

Нехай M – орієнтовна поверхня відмінна від 2-сфери і 2-тору. Як зазначалося вище, $\mathcal{O}_f(f)$ є асферичною і, зокрема, її гомотопічний тип визначається лише фундаментальною групою $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$. Точна алгебраїчна структура таких груп була описана у роботі [24]. Зокрема, показано всі такі групи натежать класу $\mathcal{T}$ ізоморфізму груп, що породжується прямими добутками та певними типами вінцевих добутків.

Також у роботі С. Максименка [22] було показано, що обчислення фундаментальних груп орбіт відображень з класу $\mathcal{F}(M, P)$ на компактних поверхнях з ейлеровою характеристикою менше нуля зводиться до обчислення таких груп для відображень заданих на дисках та циліндрах та стрічках Мебіуса. Таким чином обчислення цих груп на дисках і циліндрах і дозволило отримати точну алгебраїчну структуру цих груп на компактних орієнтовних поверхнях відмінних від 2-сфери і 2-тора. Випадок тора був розглянутий у роботах [28], [29], [30], [4] С. Максименка і Б. Фещенка.

[1] Тобто $\pi_i \mathcal{O}_f(f) \simeq 0$ для всіх $i \geq 2$.

Відкритою залишалась задача описання фундаментальних груп орбіт гладких функцій з класу $\mathcal{F}(M,P)$ на неорієнтованих поверхнях M та у випадку коли M є 2-сферою.

Одним з основних результатів дисертації є *опис фундаментальних груп орбіт гладких відображень з класу $\mathcal{F}(B,P)$ на стрічці Мебіуса B.*

В розділі 1 наводяться допоміжні теоретичні відомості, що будуть використовуватися в подальшому викладі роботи. Зокрема, у §1.3 наводяться означення стабілізаторів $\mathcal{S}(f,X)$ і орбіт $\mathcal{O}(f,X)$, у §1.4 наводиться поняття графа Кронрода-Ріба відображення $f \in \mathcal{F}(M,P)$, а у §1.9 описані відомі результати про гомотопічні типи стабілізаторів $\mathcal{S}(f,X)$ і орбіт $\mathcal{O}(f,X)$.

У розділі 2 ми продовжуємо вивчати гомотопічні типи стабілізаторів $\mathcal{S}(f,X)$. Головні результати розділу, Теореми 2.1.2 і 2.1.3, пов'язані з групою $\pi_0\mathcal{S}(f,X)$ для випадку, коли M є стрічкою Мебіуса, $X=\partial M$, та $f: M \to P$ належить простору відображень $\mathcal{F}(M,P)$. У §2.2 доводимо Теорему 2.1.2. У §2.3 описані певні результати про відношення груп дифеоморфізмів неорієнтованого многовиду і його дволисного накриття. У §2.4 ми вводимо декілька підгруп стабілізатора $\mathcal{S}(f)$ і доводимо Теорему 2.4.2, яка дозволяє "спростити" дифеоморфізми із стабілізатора відображення $f \in \mathcal{F}(M,P)$. Ці результати продовжують [27, §3 & §7] на неорієнтовний випадок. У §2.5 описані відношення між групами $\mathcal{S}(f,\partial A)$ та $\mathcal{S}'(f,\partial A)$ для функцій на циліндрі $A = S^1 \times [0,1]$, див. Лему 2.5.1. У §2.6 ми доводимо Теорему 2.1.3.

Розділ 3 присвячений гомотопічному аналогу властивості «жорсткості». У §3.4 ми продовжуємо деякі результати на неперервні потоки. Підрозділ §3.5 присвячений гомеоморфізмам кола, які змінюють орієнтацію. У §3.7 ми досліджуємо потоки без нерухомих точок, а у §3.9 наводимо деякі результати про перехід від потоку на площині до потоку, записаного у полярних координатах. У §3.11 вводяться певні підповерхні поверхні M, які відповідають відображенню $f \in \mathcal{F}(M, P)$ та називаються *надщербленими циліндрами*. Ми доводимо Теорему 3.12.2, яка описує поведінку дифеоморфізмів, які змінюють орієнтацію регулярних листів відображення f, які містяться у цих надщерблених циліндрах. У §3.13 ми доводимо Лему 3.13.1, яка дозволяє змінювати f-зберігаючі дифеоморфізми так, що їх скінченна степінь буде ізотопною тотожному дифеоморфізму за допомогою f-зберігаючої ізотопії. Нарешті, у §3.13 і §3.14 ми доводимо Теорему 3.3.5.

В розділі 4 ми продовжуємо вивчати фундаментальні групи орбіт гладких функцій на поверхнях. В §4.2 описано як обчислювати $\pi_1\mathcal{O}(f)$ для відображень f на зв'язних компактних орієнтовних поверхнях M, відмінних від 2-тора і 2-сфери. Зокрема описані конструкції, які лежать в основі доведення Твердження 4.1.4(1).

В §4.3 ми доводимо Теорему 4.1.7(1).

В §4.6 описано як обчислювати $\pi_1\mathcal{O}(f)$ для функцій f на торі. Зокрема, описані конструкції, які лежать в основі доведення Твердження 4.1.4(2). В цьому підрозділі ми доводимо Теорему 4.1.7(2).

В §4.7 ми доводимо Теорему 4.7.2 про центри вінцевих добутків довільних груп A і B у випадку неефективної дії B на множині X. У Теоремі 4.7.6 ми також показуємо, що центр довільної групи G з класу $\mathcal{T}$ ізоморфні $\mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}$, де ω – довільна реалізація G. Ця теорема складає першу частину одного з основних результатів – Теореми 4.1.5.

В §4.8 ми знаходимо комутант групи $G \wr_n \mathbb{Z}$ (Теорема 4.8.2) і факторгрупи $G \wr_n \mathbb{Z}/[G \wr_n \mathbb{Z}, G \wr_n \mathbb{Z}]$ (Теорема 4.8.3). У Теоремі 4.8.4 доводиться, що факторгрупа $G/[G, G]$, де $G \in \mathcal{T}$, також ізоморфна $\mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}$, що складає другу частину Теореми 4.1.5.

Додаток містить список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Основні результати, які визначають наукову новизну дисертації:

- показано, що для кожного відображення з класу $\mathcal{F}(B, P)$ гладких відображень на стрічці Мебіуса B, існує єдиний критичний рівень, який розбиває B в об'єднання циліндра і 2-дисків (такий рівень названо спеціальним).

- для всіх відображень з $\mathcal{F}(B, P)$ обчислено фундаментальні групи їх орбіт за умови тривіальності дій стабілізаторів цих відображень на компонентах зв'язності доповнення до відповідних спеціальних критичних рівнів;

- доведено, що для довільного відображення з класу $\mathcal{F}(M, P)$ на зв'язній орієнтовній компактній поверхні M і для довільного дифеоморфізма, який залишає інваріантною кожну регулярну компоненту множини рівня цього відображення та змінює її орієнтацію, квадрат цього дифеоморфізма ізотопний тотожньому відображенню зі збереженням відображення (це твердження є гомотопічним та пошаровим аналогом властивості «жорсткості» для змінюючих орієнтацію лінійних рухів площини, яка стверджує, що кожен такий рух має порядок 2);

- розглянуто клас ізоморфізму груп $\mathcal{T}$, що породжується прямими добутками та певними типами вінцевих добутків, який містить фундаментальні групи орбіт всіх функцій з класу $\mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ на орієнтовних поверхнях крім 2-сфери. Для нього доведені такі результати:
  - отримано теореми реалізації для груп із класу $\mathcal{T}$ як фундаментальних груп орбіт функцій з класу $\mathcal{F}(M, P)$ на поверхнях відмінних від 2-сфери і 2-тора, зокрема за певних обмежень на поведінку функцій на межі;
  - також отримано теореми реалізації для груп із класу $\mathcal{T}$ як фундаментальних груп орбіт функцій з класу $\mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$ на 2-торі T^2;

– обчислено центр $Z(G)$ і фактор-групу по комутанту $G/[G,G]$ для кожної групи G з класу $\mathcal{T}$ і показано, що вони є вільними абелевими групами однакового рангу β_1. Зокрема, якщо G – фундаментальна група орбіти деякої функції $f \in \mathcal{F}(M,\mathbb{R})$, то β_1 є першим числом Бетті цієї орбіти, тобто рангом першої групи гомологій.

Результати дисертації носять теоретичний характер. Отримані в ній результати можуть бути використані в дослідженнях з топології, алгебри, математичної фізики, теорії симетрій диференціальних рівнянь в частинних похідних, теорії динамічних систем, теорії особливостей гладких відображень та інших галузей знань, методи яких базуються на топологічних властивостях гладких функцій.

Ключові слова: Функції Морса, дифеоморфізми, потоки, група Діедра.

ABSTRACT

Kuznietsova I. V. Homotopy properties of smooth functions on surfaces. — Manuscript.

The thesis for obtaining the the academic degree Doctor of Philosophy in speciality 111 – Mathematics. — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2021.

The thesis is devoted to study of homotopy properties of smooth functions on surfaces.

Smooth functions on manifolds are important research objects in modern mathematics and have applications in various fields of science. In particular, the properties of such functions often carry information about the geometry and topology of the manifold on which they are defined.

For example, M. Morse proved that in the neighborhood of each its *non-degenerate* critical point, a smooth function, after some substitution of coordinates, has the standard form of a quadratic polynomial (Morse Lemma). This allowed him to

establish a relationship between the number of non-degenerate critical points of various indices with the ranks and twists of groups of homologies of the manifold (weak and strong Morse inequalities), as well as to obtain estimates on the number of closed geodesic Riemannian manifolds. Thus, it turned out that it is possible to get geometric information about the manifold due to the Morse functions on it. The development of these ideas, which were called the Morse theory, was carried out by L. Lesternik, L. Schnirelman, G. Chogoshvili, L. Elsholts, R. Bot, E. Witten, S. Novikov, V. Sharko and many other mathematicians of the XX century.

S. Smale have obtained the theorem about h-cobordism (in particular, he proved the Poincare Conjecture in dimensions $\geqslant 5$.) using methods of cancellation of non-degenerate critical points of consecutive indices.

V. Sharko, using similar ideas, was able to obtain estimates on the minimum number of critical points of Morse functions on a given manifold of dimension $\geqslant 6$. In particular, these estimates refined the inequalities obtained by Morse, and also generalized the results of S. Smale to non-simply connected manifolds. He also proved «more rigid» Morse inequalities for unrelated manifolds.

The connected components of Morse function spaces in high dimensions are described by V. Sharko [38], and on surfaces they are classified in the works of V. Sharko [39], S. Matveev, H. Tsishang, O. Kudryavtseva and S. Maksimenko [18, 21]. Groups of cobordisms of Morse functions on surfaces were calculated by K. Ikegami and O. Saeki and B. Kalmar [7].

Interest in studying the topology of functions, vector fields, and diffeomorphisms on surfaces has grown significantly since the 80s thanks to the works of A. Fomenko, his students and colleagues, on the topological classification of Hamiltonian dynamical systems with two degrees of freedom. Activity in this direction in Ukraine were continued by V. Sharko and his students. Topological classification of functions on compact surfaces was obtained in the works: A. Bolsinov and A. Fomenko,

A. Oshemkova, V. Sharko, E. Kulinich, O. Prishlyak and his students, in particular B. Gladysh and D. Lychak, S. Maksymenko, O. Kadubovsky, I. Yurchuk and E. Polulyakh.

S. Maksimenko investigated the homotopic properties of stabilizers and orbits of smooth functions on surfaces with respect to the action of difeomorphism groups. Namely, he studied the maps from the class $\mathcal{F}(M, P)$, which consists of smooth maps from the surface M to the one-dimensional manifold P, which take constant values on each connected component of the surface boundary, whose critical points belong to the interior of the surface and are such that in the neighborhood of each critical point they are smoothly equivalent to some homogeneous polynomials without multiples.

Homotopic types of stabilizers and orbits of functions from the class $\mathcal{F}(M, P)$ were calculated in a number of works by S. Maksymenko [24, 19], B. Feschenko [4, 2], as well as for Morse functions in the works of O. Kudryavtseva [9, 35, 10, 11]. In particular, S. Maksymenko showed in [19] that if $M \neq s^2, \mathbb{R}P^2$, then the orbit of $\mathcal{O}_f(f)$ is aspherical[2], and if f is a Morse map of the general position, then the orbit $\mathcal{O}_f(f)$ is homotopically equivalent to $(S^1)^k \simeq\ z^k$ for some k. If $M = S^2$ or $\mathbb{R}P^2$, then $\pi_i\mathcal{O}_f(f) \simeq \pi_i(SO(3))$ for $i \geq 2$, and if f is a general position function, then $\mathcal{O}_f(f)$ is homotopically equivalent to $(S^1)^k \times SO(3)$ for some k. Further, O. Kudryavtseva generalized these results and showed that if M is orientable, and $f\colon M \to \mathbb{R}$ is a Morse function, then there exists a free action of some finite group H on k-torus $(S^1)^k$, such that $\mathcal{O}_f(f)$ is homotopically equivalent to $(S^1)^k/H$, if $M \neq S^2$, and is homotopically equivalent to $((S^1)^k/H) \times SO(3)$ if $M = S^2$.

Let M be an orientable surface other than a 2-sphere and a 2-torus. As noted above, $\mathcal{O}_f(f)$ is aspherical and, in particular, its homotopic type is determined only by the fundamental group $\pi_1\mathcal{O}_f(f)$. The exact algebraic structure of such groups

[2]i.e. $\pi_i\mathcal{O}_f(f) \simeq 0$ for all $i \geq 2$.

was described in [24].

Also in the work of S. Maksymenko [22] it was shown that the calculation of fundamental groups of orbits of maps from the class $\mathcal{F}(M,P)$ on compact surfaces with an Euler characteristic less than zero can be reduced to calculations of such groups for mappings given on disks, cylinders, and Mobius strips. Thus, the calculation of these groups on disks and cylinders made it possible to obtain an accurate algebraic structure of these groups on compact orientable surfaces other than the 2-sphere and 2-torus. The case of torus was considered in [28], [29], [30], [4] by S. Maksymenko and B. Feshchenko.

The problem of describing the fundamental groups of orbits of smooth functions from the class $\mathcal{F}(M,P)$ on non-orientable surfaces M and in the case when M is a 2-sphere remained open.

One of the main results of the dissertation is *description of fundamental groups of orbits of smooth maps from the class $\mathcal{F}(B,P)$ on the Mobius strip B.*

The section 1 provides auxiliary theoretical information that will be used in the further presentation of the work. In particular, in §1.4 the definitions of stabilizers $\mathcal{S}(f,X)$ and orbits $\mathcal{O}(f,X)$ are given, in §1.4 is given the concept of the Kronrod-Reeb graph of a map $f \in \mathcal{F}(M,P)$, and §1.9 describes the known results on homotopy types of stabilizers $\mathcal{S}(f,X)$ and orbits $\mathcal{O}(f,X)$.

In the section 2 we continue to study the homotopy types of stabilizers $\mathcal{S}(f,X)$. The main results of the section, Theorems 2.1.2 and 2.1.3, are related to the group $\pi_0\mathcal{S}(f,X)$ for the case when M is Moebius tape, $X = \partial M$, and $f : M \to P$ belongs to $\mathcal{F}(M,P)$. In §2.2 we prove the Theorem 2.1.2. In §2.4 we introduce several subgroups of $\mathcal{S}(f)$ and prove Theorem 2.4.2 allowing to “simplify” diffeomorphisms from the stabilizer of $f \in \mathcal{F}(M,P)$. These results extend [27, §3 & §7] to non-orientable case. §2.5 describes the relation between the groups $\mathcal{S}(f,\partial A)$ and $\mathcal{S}'(f,\partial A)$ for functions on the annulus $A = S^1 \times [0,1]$, see Lemma 2.5.1. Finally in §2.6 we prove Theorem 2.1.3.

The section 3 is devoted to the homotopy analogue of the property "rigidity". In §3.4 we discuss a notion of a shift map along orbits of a flow. §3.5 devoted to reversing orientation families of homeomorphisms of the circle. In § 3.7 we study flows without fixed point, and in §3.9 recall several results about passing from a flow on the plane to the flow written in polar coordinates. §3.11 introduces a certain subsurfaces of a surface M associated with a map $f \in \mathcal{F}(M, P)$ and called *chipped cylinders*. We prove Theorem 3.12.2 describing behaviour of diffeomorphisms reversing regular leaves of f contained in those chipped cylinders. In §3.13 we prove Lemma 3.13.1 allowing to change f-preserving diffeomorphisms so that its finite power will be isotopic to the identity by f-preserving isotopy. Finally, in §3.13 and §3.14 we prove Theorem 3.3.5.

In the section 4 we continue to study the fundamental groups of orbits of smooth functions on surfaces. §4.2 describes how to compute $\pi_1\mathcal{O}(f)$ for mappings of f on connected compact orientable surfaces M other than 2-torus and 2-sphere. In particular, the constructions that underlie the proof of Proposition 4.1.4(1) are described.

In §4.3 we prove Theorem 4.1.7(1).

§4.6 describes how to compute $\pi_1\mathcal{O}(f)$ for functions f on a torus. In particular, the constructions that underlie the proof of Proposition 4.1.4(2) are described. In this section we prove Theorem 4.1.7(2).

In §4.7 we prove Theorem 4.7.2 on the centers of wreath products of arbitrary groups A and B in the case of inefficient action of B on the set X. In Theorem 4.7.6 we also show that the center of an arbitrary group G of class $\mathcal{T}$ is isomorphic $\mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}$, where ω is an arbitrary realization of G. This theorem is the first part of one of the main results - Theorem 4.1.5.

In §4.8 we find the commutant of the group $G \wr_n \mathbb{Z}$ (Theorem 4.8.2) and the factor group $G \wr_n \mathbb{Z}/[G \wr_n \mathbb{Z}, G \wr_n \mathbb{Z}]$ (Theorem 4.8.3). In Theorem 4.8.4 it is proved that the factor group $G/[G,G]$, where $G \in \mathcal{T}$, is also isomorphic to $\mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}$, which is the second part of Theorem 4.1.5.

The application contains a list of publications of the applicant on the topic of the dissertation and information about testing the results of the dissertation.

The main results that determine the scientific novelty of the dissertation:

- it is shown that for every map from the class $\mathcal{F}(B, P)$ of smooth maps on the Mobius strip B, there is a unique critical level that splits B into the union of a cylinder and 2-disks (such a level is called special).

- for all mappings with $\mathcal{F}(B, P)$ the fundamental groups of their orbits are calculated in case where the actions of the stabilizers of these mappings are trivial on the connected components to the corresponding special critical levels;

- proved that for an arbitrary mapping from the class $\mathcal{F}(M, P)$ on a connected orientable compact surface M and for an arbitrary diffeomorphism that leaves invariant each regular component of the level set of this mapping and changes its orientation, the square of this diffeomorphism is isotopic to an identical mapping with preserving the map (this statement is a homotopic and foliated analog of the property of «rigidity» for orientation-changing linear motions of the plane, which states that each such movement has an order of 2);

- there was considered the isomorphism class of groups $\mathcal{T}$, which is generated by direct products and certain types of wreath products, which contains fundamental groups of orbits of all functions from the class $\mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ on oriented surfaces except for the 2-sphere. The following results have been proven for it:

- realization theorems are obtained for groups from the class $\mathcal{T}$ as fundamental groups of orbits of functions from the class $\mathcal{F}(M, P)$ on surfaces other than the 2-sphere and 2-torus, in particular under certain restrictions on the behavior of functions at the boundary;
- also obtained realization theorems for groups from the class $\mathcal{T}$ as fundamental groups of orbits of functions of the class $\mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$ on the 2-torus T^2;
- calculated the center $Z(G)$ and the quotient group by the commutant $G/[G, G]$ for each group G of the class $\mathcal{T}$ and showed that they are free Abelian groups of the same rank β_1. In particular, if G is the fundamental group of the orbit of some function $f \in \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$, then β_1 is the first Betti number of this orbit, that is, the rank of the first homology group.

The results of the dissertation are theoretical in nature. The results obtained in it can be used in research on topology, algebra, mathematical physics, the theory of symmetry of Partial Differential Equations, the theory of dynamical systems, the theory of features of smooth maps and other branches of knowledge, the methods of which are based on the topological properties of smooth functions.

Keywords: Morse functions, diffeomorphisms, flows, dihedral group.