Про множину нормальних чисел, побудовану в термінах Q_s^* - представлення дійсних чисел

Кривошия Ростислав Вікторович

Інститут математики НАН України
Київ, Україна

29 квітня 2021 р.

Нехай $(q_0; q_1; ...; q_{s-1})$ — стохастичний вектор з строго додатними координатами. Відомо [2], що для довільного дійсного числа $x \in [0; 1]$ існує послідовність цифр $\alpha_n \in \{0; 1; ...; s-1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ така, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_3} q_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \ldots + \beta_{\alpha_{n+1}} q_{\alpha_n} q_{\alpha_{n-1}} \ldots q_{\alpha_1} + \ldots, \tag{1}$$

де $\beta_0 = 0, \beta_1 = q_0, \ldots, \beta_{s-1} = q_0 + q_1 + ... + q_{s-2}$.

Представлення (1) називається Q_s-представленням числа x. Число x у цьому випадку має зображення:

$$x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots}.$$

Q_s - раціональні числа:

$$\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)} = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n+1(0)}$$

Число x будемо називати Q_s-нормальним, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(x;(\gamma_1;\gamma_2;\ldots;\gamma_k))}{n} = \prod_{j=1}^{k} q_{\gamma_j},$$

де $N_n(x;(\gamma_1;\gamma_2;\ldots;\gamma_k))$ — кількість блоків $(\gamma_1;\ldots;\gamma_k)$ серед чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.
Якщо бути точним $N_n(x;(\gamma_1;\gamma_2;\ldots;\gamma_k))$ — це кількість номерів $j \in \{1;\ldots;n-k-1\}$, таких що $\alpha_{j+i-1} = \gamma_i$ для кожного $i \in \{1;\ldots;k\}$.

Якщо $q_0 = q_1 = \ldots = q_{s-1} = \frac{1}{s}$, ми маємо класичне означення нормального числа.

[redacted]

Теорема Вейля. Якщо (a_n) - послідовність різних цілих чисел, то послідовність $(a_n x)$ - рівномірно розподілена для майже всіх дійсних x.

Послідовність (x_n) називається **рівномірно розподіленою за модулем 1**, якщо для довільних дійсних $0 \leqslant a < b \leqslant 1$:

$$\frac{N_n([a;b])}{n} \to b - a, \quad (n \to \infty),$$

де $N_n([a;b])$ — кількість чисел серед $\{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_n\}$, які належать відрізку $[a;b]$.

Якщо взяти $a_n = s^n$(Харді та Літлвуд) $s^n x$- рівномірно розподілена для майже всіх $x \in \mathbb{R}$.

[redacted]

Нехай $(q_{0n}; q_{1n}; ...; q_{(s-1)n})$ — послідовність стохастичних векторів з строго додатними координатами, причому

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \max\{q_{0n}; q_{1n} \ldots; q_{(s-1)n}\} = 0.$$

тоді для довільного $x \in [0;1]$ існує послідовність цифр $\alpha_n \in \{0; ...; s-1\}$, така, що

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \beta_{\alpha_2 2} q_{\alpha_1 1} + \beta_{\alpha_3 3} q_{\alpha_1 1} q_{\alpha_2 2} + \ldots + \beta_{\alpha_{n+1}(n+1)} q_{\alpha_1 1} q_{\alpha_2 2} \ldots q_{\alpha_n n} + \ldots, \qquad (2)$$

де $\beta_{0n} = 0, \beta_{1n} = q_{0n}, \ldots, \beta_{(s-1)n} = q_{0n} + ... + q_{(s-2)n}$.
Q_s^*- зображення має вигляд

$$x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}.$$

Якщо $(q_{0n}; q_{1n}; ...; q_{(s-1)n}) \to (q_0; q_1; ...; q_{s-1})$ $(n \to \infty)$, то наведемо поняття Q_s^*- нормального числа.

Число x будемо називати Q_s^*- нормальним, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(x; (\gamma_1; \gamma_2; \ldots; \gamma_k))}{n} = \prod_{j=1}^{k} q_{\gamma_j},$$

де $N_n(x; (\gamma_1; \gamma_2; \ldots; \gamma_k))$ — кількість блоків $(\gamma_1; \ldots; \gamma_k)$ серед чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

[redacted]

Теорема 1. Якщо виконується умова

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left((q_{0n} - q_0)^2 + (q_{1n} - q_1)^2 + \ldots + (q_{(s-1)n} - q_{s-1})^2\right) < +\infty,$$

то майже всі числа є Q_s^*- нормальними.

Допоміжний об'єкт. Оператор зсуву

$$T(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_s}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$$

$$T_1(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$$

[redacted]

Лема 1. Перетворення $T(x)$ є ергодичним відносно міри Лебега.

Збереження міри

Зрозуміло, що

$$T^{-1}\left(\left[\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)};\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right]\right)=\bigcup_{k=0}^{s-1}\left[\Delta^{Q_s}_{k\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)};\Delta^{Q_s}_{k\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right]$$

Зрозуміло, що

$$\lambda\left(\left[\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)};\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right]\right)=q_{\alpha_1}\cdot q_{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot q_{\alpha_n}$$

$$\lambda\left[\Delta^{Q_s}_{k\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)};\Delta^{Q_s}_{k\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right]=q_k\cdot q_{\alpha_1}\cdot q_{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot q_{\alpha_n}$$

$$\lambda\left(\bigcup_{k=0}^{s-1}\left[\Delta^{Q_s}_{k\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)};\Delta^{Q_s}_{k\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right]\right)=\lambda\left(\left[\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)};\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right]\right)$$

Метрична транзитивність

$$T(U)=U\Rightarrow\lambda(U)=0$$

або 1

Здійснюється по аналогії з Q_2-представленням.
Методология. А.Г.Постников. Арифметическое моделирование случайных процессов. Тр. МИАН. СССР, 1960 г., том 57, 3-84 стр.

[redacted]

Лема 2. Для майже всіх чисел $x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ послідовність

$$x, T(x), T^2(x), \ldots, T^k(x), \ldots$$

є рівномірно розподіленою на $[0;1]$.

[redacted]

Доведення. Оскільки перетворення $T(x)$ є ергодичним відносно міри Лебега, то для заданого $h \in N$ за теоремою Біргкофа-Хінчіна

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} cos(2\pi h T^k(x))}{n} \to \int\limits_0^1 cos(2\pi hx)dx = 0 \;\; (n \to +\infty) \tag{3}$$

для майже всіх $x \in [0;1]$.

Позначимо через A_h множину тих $x \in [0;1]$, для яких виконується умова (3), тоді $\lambda(A_h) = 1$.

Зрозуміло, що $\lambda(A^*) = 1$, де $A^* = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$.

Отже, для довільного $x \in A^*$:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(2\pi h T^k(x))}{n} \to 0 \qquad \forall h \in N (n \to \infty).$$

Аналогічно показуємо, що існує множина B^* така, що $\lambda(B^*) = 1$ і для довільного $x \in B^*$:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(2\pi h T^k(x))}{n} \to \int\limits_0^1 \sin 2\pi h x dx = 0 \ \ (n \to +\infty) \ \forall h \in N.$$

Отже, для кожного $x \in A^* \cap B^*$

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} e^{2\pi i h T^k(x)}}{n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(2\pi h T^k(x)) + i \sum\limits_{k=1}^{n} \sin(2\pi h T^k(x))}{n} \to 0$$

$$(n \to +\infty) \; \forall h \in N,$$

тобто послідовність $T^n(x)$ є рівномірно розподіленою на $[0;1]$.
Зрозуміло, що

$$\{T(x)\} = T(x) \qquad \forall x \in [0;1).$$

Оскільки $\lambda(A^* \cap B^*) = 1$, маємо потрібне.

[redacted]

Відрізок

$$\Delta(\gamma_1;\gamma_2;\ldots;\gamma_l)=\left[\Delta^{Q_s}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_l(0)};\Delta^{Q_s}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_l(s-1)}\right]$$

будемо називати Q_s-циліндром l-го рангу.

[redacted]

Лема 3. Нехай M — множина всіх Q_s-циліндрів l-го рангу для кожного натурального l. Послідовність (x_n) є рівномірно розподіленою тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N(x_n;A)}{n}=\lambda(A),$$

для кожної множини $A\in M$, де $\lambda(\cdot)$ — міра Лебега.

[redacted]

Якщо (x_n) рівномірно розподілена, то очевидно рівність виконується. Розглянемо проміжок $[a; b]$, де $a > 0$ і $b < 1$ (випадок $a = 0$ або $b = 1$ розглядаються аналогічним чином).
Нехай

$$a = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots} \quad b = \Delta^{Q_s}_{\beta_1\beta_2\ldots}$$

Розглянемо послідовність відрізків

$$C_n = \left[\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}; \Delta^{Q_s}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n(s-1)}\right].$$

$$\tilde{C}_n = \left[\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}; \Delta^{Q_s}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n(0)}\right].$$

Зрозуміло, що знайдеться набір Q_s-циліндрів n-го рангу

$$\Delta\left(\eta_1^{(1)};\eta_2^{(1)};\ldots;\eta_n^{(1)}\right),\ \ldots,\ \Delta\left(\eta_1^{(j)};\eta_2^{(j)};\ldots;\eta_n^{(j)}\right),$$

такі, що

$$C_n=\bigcup_{i=1}^{j}\Delta\left(\eta_1^{(i)};\eta_2^{(i)};\ldots;\eta_n^{(i)}\right).$$

$$\lim_{l\to\infty}\frac{N_l(x_k;C_n)}{l}=\sum_{r=1}^{j}\lim_{l\to\infty}\frac{N_l\left(x_k;\Delta\left(\eta_1^{(r)};\ldots;\eta_n^{(r)}\right)\right)}{l}=$$

$$\sum_{i=1}^{j}\lambda\left(\Delta\left(\eta_1^{(r)};\ldots;\eta_n^{(r)}\right)\right)=\lambda(C_n).$$

Аналогічно доводиться, що

$$\lim_{l\to\infty}\frac{N_l(x_k;\tilde{C}_n)}{l}=\lambda(\tilde{C}_n).$$

Оскільки

$$\frac{N_l(x_k;\tilde{C}_n)}{l}\le\frac{N_l(x_k;(a;b))}{l}\le\frac{N_l(x_k;C_n)}{l}\ \forall n\in N,$$

то перейшовши до границі $l\to+\infty$ і врахувавши, що

$$\lim_{l\to\infty}\lambda(C_l)=b-a=\lim_{l\to\infty}\lambda(\tilde{C}_l),$$

$$\lim_{l\to\infty}\frac{N_l(x_k;(a;b))}{l}=b-a.$$

[redacted]

Лема 4. Число

$$z = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots}$$

є Q_s-нормальним тоді і тільки тоді, коли послідовність $(T_n(z))$ є рівномірно розподіленою.

Доведення. Нехай $(T_n(z))$ рівномірно розподілена.
Зрозуміло, що $N_n(T_k(z); \Delta(\gamma_1; \gamma_2; \ldots; \gamma_l))$ дорівнює кількості блоків $(\gamma_1; \gamma_2; \ldots; \gamma_l)$ серед цифр $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (оскільки число $\Delta^{Q_2}_{\eta_1\eta_2\ldots}$ належить відрізку $\Delta(\gamma_1; \gamma_2; \ldots; \gamma_l)$ лише тоді, коли $\eta_r = \gamma_r$ для кожного $r \in \{1; \ldots; l\}$.)

$$\frac{N_n(z; (\gamma_1; \ldots; \gamma_l))}{n} = \frac{N_n(T_k(z); \Delta(\gamma_1; \ldots; \gamma_l))}{n} \to$$

$$\lambda(\Delta(\gamma_1; \ldots; \gamma_l)) = \prod_{j=1}^{l} q_{\gamma_j} (n \to +\infty)$$

тобто z є Q_s-нормальним.

[redacted]

Теорема 1. Якщо виконується умова

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left((q_{0n}-q_0)^2+(q_{1n}-q_1)^2+\ldots+(q_{(s-1)n}-q_{s-1})^2\right)<+\infty,$$

то майже всі числа є Q_s^*- нормальними.

Розглянемо функцію

$$f:\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\to\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$$

1) Коректність

$$\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n+1(0)}=\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\to\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n+1(0)}=\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}$$

2) $f(x)$ - зростаюча

$$\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} < \Delta^{Q_s}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots} \Leftrightarrow \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} < \Delta^{Q_s^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$$

3) $f(x)$ - неперервна

$$f\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) - f\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(r)}\right) = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} - \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(r)} \to 0$$

$(n \to \infty)$ для заданого $r \in \{0; 1; \ldots; s-1\}$.

Легко отримати, що $f(x)$ - неперервна зліва та справа.

Нехай τ_n - послідовність в.в., яка набуває значень $0, 1, 2, \ldots, s-1$ з ймовірностями $q_{0n}, q_{1n}, \ldots, q_{(s-1)n}$.

$$\tau = \Delta^{Q_s}_{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_n \ldots}$$

З одного боку,

$$f\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right) - f\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}\right) = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)} - \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)} = q_{\alpha_1 1} \cdot q_{\alpha_2 2} \cdot \ldots \cdot q_{\alpha_n n}.$$

З іншого боку,

$$P\left(\tau \in \left[\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}; \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right]\right) = P(\tau_1 = \alpha_1) \cdot P(\tau_2 = \alpha_2) \cdot \ldots \cdot P(\tau_n = \alpha_n) = q_{\alpha_1 1} \cdot q_{\alpha_2 2} \cdot \ldots \cdot q_{\alpha_n n}.$$

Отже,

$$f\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right) - f\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}\right) = F_\tau\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right) - F_\tau\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}\right)$$

$$F_\tau(x) = f(x)$$

Нехай $L = \min(q_0; q_1; \ldots; q_n)$.
Маємо:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_j\left(\frac{q_{jn}}{q_j}-1\right)^2\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_j\left(\frac{(q_{jn}-q_j)^2}{q_j^2}\right) < \frac{1}{L^2}\sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_j(q_{jn}-q_j)^2) < +\infty.$$

Отже, $F_\tau(x)$ - абсолютно неперервна.

Зрозуміло, що $x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ - Q_s - нормальне $\Leftrightarrow f(x) = \Delta^{Q^*_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ - Q^*_s- нормальне.

Нехай A - множина Q_s - нормальних чисел,

$$A \cup B = [0;1], \qquad A_1 \cup B_1 = [0;1], \qquad A_1 = f(A), \qquad B_1 = f(B).$$

Припустимо, що $\lambda(A_1) < 1$, тоді $\lambda(B_1) > 0$, але $\lambda(B) = 0$, і $f(B) = B_1$, суперечність.
Отже, $\lambda(A_1) = 1$.

Лема 5. *Якщо* $(q_{0n}; q_{1n}; \ldots; q_{(s-1)n}) \to (q_0; q_1; \ldots; q_{s-1})$, *то*

$$T_1^k(x) - T^k(x) \to 0, \qquad (k \to \infty).$$

Наслідок 1. $T^k(x)$ рівномірно розподілена тільки тоді, коли $T_1^k(x)$ рівномірно розподілена.

Наслідок 2. Число $x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ є Q_s^* - нормальним лише тоді, коли $T_1^k(x)$ рівномірно розподілена.

- *Кейперс Л.,Ниддерейтер Г.* Равномерно распределение последовательностей:Пер.с англ./ Под ред. С. М. Ермакова. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985.–408с.
- *Турбин А.Ф.,Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения.–Киев: Наук.думка, 1992. – 208с.
- *De Bruijn N.G., Post K. A.* A remark on uniformly distributet sequences and Riemann integrability.— Indag.Math., 1968, 30, p.149-150.
- *Borel.E* Les probabilies denombrables et leurs applications arithmetiques. — Rend. Circ. Mat. Palermo, 1909, p. 247-271.
- *Borel.E* Lecons sur la theorie des fonctions, 2nd ed. – Paris: Gauthier – Villars, 1914.
- *Weil.H* Uber die Gibbssche Erscheinung und verwandte Konvergenzphanomene.— Rend. Circ. Math.Palermo, 1910, 30, S. 377-407.
- *Weil.H* Uber ein Problem aus dem Gebiete der diophantischen Approximationen. — Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, Math.-phys. Kl., 1914, S.234-244
- *Weil.H* Uber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. – Math. Ann., 1916, 77, S. 313-352.
- *Niven I., Zuckerman H.S.* On the definition of normal numbers. – Pacific J. Math., 1951, 1, p.