

Відгук
офіційного опонента на дисертацію
РАТУШНЯК Софії Петрівни
“Фрактальні функції і розподіли їх значень”

подану до захисту на здобуття
наукового ступеня доктора філософії
за спеціальністю 111 – математика

Робота присвячена двом континуальним класам локально складних функцій з фрактальними властивостями, які означені у термінах двосимвольних зображень дійсних чисел одиничного відрізка, що є узагальненнями двійкової системи числення (так звані Q_2 - та Q_2^* -зображення). Це неперервні ніде не монотонні функції, які при вказаних умовах недиференційовні, а також функції визначені перетворювачами пар цифр зображення аргумента у цифри зображення функції, за умови їх ланцюгової скріпленності.

1. Актуальність теми дослідження. Фрактальні властивості функцій пов'язані з такими поняттями теорії фракталів як самоподібність, самоафінність, автомодельність, фрактальна розмірність. Вони проявляються у властивостях множин, важливих для функцій. Це множини рівнів, множини особливостей варіаційного та диференціального характеру, графіки функцій тощо.

Функції з фрактальними властивостями сьогодні є актуальним об'єктом вивчення як в самій математиці, так і за її межами (як засвідчують багаточисельні публікації з досліджень фізичних процесів та явищ). Тривалий час розвиток теорії функцій з локально складною структурою стримувався відсутністю ефективних засобів їх аналітичного опису. На даний час потужним знаряддям їх дослідження стали різні системи зображення чисел. Серед них двосимвольні системи займають окрему нішу. Вони заслуговують на окрему увагу (важлива роль двійкової системи числення є загально визнаною).



Підпис Чайченка С. О. засвідчує
Начальник відділу кадрів

Е. С. Сілін

Теорія локально складних функцій має багату історію, незважаючи на те, що до цих пір не завершився її конструктивний етап розвитку. Обростають фактами індивідуальні теорії, присвячені окремим функціям та класам функцій, залежних від параметрів. Це сингулярні монотонні функції типу Кантора, Салема, Мінковського, яким присвячені дослідження різних авторів (Салем, Марсалья, Чатерджі, Працьовитий, Торбін, Барановський, Макарчук та інш.), недиференційовні функції (Такагі, Серпінський, Буш, Вундерліх, Окамото, Василенко, Калашников), сингулярні ніде не монотонні функції (Шукла, Гарг, Агаджанов, Працьовитий).

У дослідженнях немонотонних функцій з фрактальними властивостями практично не використовувались двосимвольні системи зображення чисел, бідність алфавіту яких не сприяла простоті аналітичного задання функції. У роботі розробляється смілива ідея довести, що двосимвольний алфавіт достатній для конструктування функцій з різними проявами фрактальності, включаючи неперервні функції і функції, які мають бідні множини точок розривів. Вважаю, що автору дисертаційного дослідження це вдалось.

2. Структура та зміст роботи. Дисертаційна робота загальним обсягом 144 сторінок складається з анотації (українською та англійською мовами), переліку скорочень та умовних позначень, вступу, 4-х розділів, розбитих на підрозділи, висновків до кожного з розділів та загальних висновків, списку використаних джерел (72 найменування) та додатку, який містить список публікацій автора та відомості про апробацію результатів.

Розділ 1 “Огляд літератури і концептуальні основи дослідження” має вступний характер. У ньому здійснено огляд літератури, наведено означення ключових понять і формулювання відомих фактів, які використовуються далі.

Розділ 2 “Клас неперервних ніде не монотонних функцій, означених в термінах Q_2^* -зображення чисел” присвячено неперервній ніде не монотонній функції, залежній від параметра, що набуває континуальну множину значень. Її особливістю є те, що свого максимального і мінімального значення на циліндрах (на



Підпис Чайченка С. О. засвідчує
Начальник відділу кадрів

Є. С. Сілін

спеціальних відрізках, які утворюють систему подрібнюючих розбиттів області визначення функції і визначаються цифрами зображення числа) вона набуває на їх кінцях. Тут вивчено варіаційні, інтегро-диференціальні і фрактальні властивості, симетрії графіка тощо. Знайдено умови недиференційовності функції.

Одним з основних результатів цього розділу вважаю знайдені автором умови ніде не диференційовності функції (теореми 2.6. – 2.9.). Важливими є результати вивчення інтегральних властивостей функції, які тісно пов’язані з симетріями графіка функцій, а також масивність множин рівнів функції. У цьому розділі автор вичерпно відповідає на запитання: скільки існує неперервних функцій з такою залежністю цифр аргумента і значення функції? Як з’ясувалось, вісім.

У цьому розділі, також, розглядаються функції, які є ніде не мотононними аналогами Трибін-функції, ніде не диференціової функції Вундерліха та Буша, аргумент і значення яких означені в термінах Q_2 -зображення чисел. Зокрема, доведено недиференційовність функції при умовах, що накладаються на параметри зображення, описано інтегральні властивості графіка, запропоновано узагальнення класу функцій зі збереженням властивостей.

У розділі 3 “Клас функцій, визначених ланцюгом перетворювачів цифр” вивчається континуальний клас принципово інших функцій. Кожна з них породжується ланцюговою залежністю цифр функції від пар цифр аргумента за умовою їх ланцюгової скріпленості (k -та цифра функції залежить від пари k -ої та $(k+1)$ -ої цифри аргумента). Автором встановлено, що при фіксованому зображенні і сталій залежності цифр існує 16 функцій цього класу, об’єднанні в пари двоїстих функцій; доведено, що лише 4 функції цього класу є неперервними. Яскравим представником неперервних функцій є інверсор цифр — строго спадна функція, фрактальними проявами якої є її сингулярність (вона має похідну рівну нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега) та самоафінність графіка. Проведено детальне вивчення окремих представників розривних функцій (вивчено фрактальні властивості множин значень, масивність рівнів, розподіли значень функції) Клас функцій, які вивчаються у третьому розділі, включають

Підпис Чайченка С. О. засвідчує
Начальник відділу кадрів



Є. С. Сілін

і функції із змінною залежністю. Доведено, що кожна з функцій $y = c$, $c \in [0; 1]$ належить цьому класу. Знайдено достатні умови належності множини значень функції до класу фрактальних множин канторівського типу, встановлено ряд інших властивостей функцій досліджуваного класу. Основними результатами цього розділу є: факти, що стосуються наповненості класів, фрактальних властивостей функцій та властивостей розподілів значень функцій.

У розділі 4 розв'язуються дві основні задачі: про розподіл Q_2 -цифр випадкової величини з заданим її експоненційним розподілом на відрізку та про розподіл випадкової величини з наперед заданими розподілами незалежних Q_2 -цифр за умови, що функція розподілу має додатну похідну в кожній точці деякого відрізка. Основним результатом цього розділу вважаю розв'язання другої задачі, яка дає вичерпну відповідь про існування розподілів випадкових величин, що породжені розподілами з нетривіальними щільностями незалежних Q_2 -цифр.

3. Наукова новизна результатів дисертаційної роботи. Наукову новизну складають самі об'єкти дослідження: конструктивно описані класи функцій, означені в термінах двосимвольних зображень, результати факторизації у класах, вивчення їх масивності, детальний опис структурних, варіаційних, диференціальних та тополого-метрических властивостей функцій і розподілів їх значень. Новою є ідея матричного підходу до означення функцій, реалізована у третьому розділі.

4. Достовірність та обґрунтованість отриманих результатів. Достовірність результатів, що виносяться на захист забезпечується строгими доведеннями теорем, які з достатньою повнотою наведені в роботі. Висновки до розділів і загальні висновки об'єктивно відображають зміст розділів та всієї роботи і є достатньо обґрунтованими. Порушення академічної добросовісності відсутні. Анотація достатньо повно відображає зміст та структуру дисертації, її наукову новизну та практичну значущість.

5. Повнота викладу результатів роботи в наукових публікаціях,



Підпис Чайченко С. О. засвідчує
Начальник відділу кадрів

Є. С. Сілін

зарахованих за темою дисертації. Результати дисертаційного дослідження С.П. Ратушняк опубліковані у 6 статтях, серед яких 2 — у журналах, що індексується наукометричною базою Scopus та у 14 тезах конференцій, серед яких 10 — міжнародних.

6. Зауваження. Істотних зауважень щодо змісту роботи немає. Наявні зауваження носять редакційний характер і стосуються оформлення роботи.

1. На стор. 32, властивість 4), зазначено, що $i = 1, m$, у той час як з контексту зрозуміло, що параметр m пробігає всі значення від 1 до m , тобто $m = 1, 2, \dots, m$.
2. Малюнок на стор. 34 виконано недбало.
3. Функція, яка вивчається у другому розділі, означена в термінах Q_2 -зображення чисел, тоді як у назві розділу говориться про Q_2^* -зображення, тобто має місце описка.
4. На стор. 43 у першій і другій виділеній формулі умова неперервності має бути записаною у вигляді $|r(x) - r(x_0)| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).
5. На стор. 46 в доведенні теореми 2.2 відсутнє пояснення до формули (2.4).
6. У доведенні теореми 2.3 над знаком границі зайва буква n .
7. На стор. 83 в доведені леми 3.3 для двоїстих функцій φ використовується позначення $\bar{\varphi}$, тоді як вище для позначення двоїстої функції введено позначення $\tilde{\varphi}$.
8. У розділі 3 зустрічається плутанина зі зображеннями Q_2 і Q_2^* . Наприклад, на стор. 88 теорема 3.7 дає відповідь на питання які функції є неперервними на відрізку $[0;1]$, що означені в термінах Q_2^* -зображення, а наслідок



Підпис Чайченко С. О. засвідчує
Начальник відділу кадрів

Є. С. Сілін

до цієї теореми сформульований вже для функцій, означенних в термінах Q_2 -зображення, тоді як даний наслідок очевидно правильний і для Q_2^* -зображення.

- На стор. 105 фігурують неозначені терміни “ Q_2 -раціональне чило” і “ Q_2 -ірраціональне чило”. З контексту зрозуміло, що мова йде про Q_2 -бінарне і Q_2 -унітарне числа (саме так означені такі числа в першому розділі).

Висловлені зауваження не є принциповими і не впливають на загальну високу оцінку дисертаційного дослідження.

7. Висновки. Вважаю, що дисертація “Фрактальні функції і розподіли їх значень” є самостійною завершеною науковою роботою, відповідає спеціальності 111 — математика, за обсягом проведених наукових досліджень, їх актуальністю, науковим рівнем, значимістю, кількістю та якістю публікацій, задовольняє всі вимоги Постанови Кабінету Міністрів України N 167 від 6 березня 2019 р. “Про проведення експерименту з присудження ступеня доктора філософії” (із змінами, внесеними згідно з Постановою КМ N 979 від 21 жовтня 2020 р.), а її авторка Ратушняк Софія Петрівна заслуговує присудження наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — математика.

Офіційний опонент

проректор з науково-педагогічної роботи

Донбаського державного педагогічного університету

доктор фізико-математичних наук, професор



Станіслав Чайченко

Надійшов 11.05.2021 р.