

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

В.о. директора Інституту математики НАН України

д.ф.-м. н. _____ О. В. Антонюк

« 24 » _____ 2021 р.



ВИСНОВОК

Інституту математики Національної академії наук України

щодо дисертації **С. П. Ратушняк** на тему:

«*Фрактальні функції і розподіли їх значень*», подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії в галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111 «Математика»

Витяг

із протоколу № 5 засідання відділу динамічних систем та фрактального аналізу Інституту математики НАН України від 18 березня 2021 року

ПРИСУТНІ:

доктор фіз.-мат. наук, проф. Працьовитий М. В. (в.о. завідувача відділу), *рецензенти*: доктор фіз.-мат. наук, проф., завідувач відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Плакса С. А., доктор фіз.-мат. наук, проф., завідувач відділу теорії функцій Романюк А. С., *співробітники відділу*: доктор фіз.-мат. наук, проф. Торбін Г. М., кандидат фіз.-мат. наук Акбергенов А. А., кандидат фіз.-мат. наук Барановський О. М., кандидат фіз.-мат. наук Василенко Н. А., кандидат фіз.-мат. наук Карвацький Д. М., *співробітник відділу теорії функцій* доктор фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб. Романюк В. С., *співробітники відділу теорії випадкових процесів*: доктор фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. НАН України Портенко М. І., доктор фіз.-мат. наук, проф. Пилипенко А. Ю., кандидат фіз.-мат. наук Руденко О. В., кандидат фіз.-мат. наук Рябов Г. В., а також доктор фіз.-мат. наук, проф. Радченко В. М. (Київський національний університет імені Тараса Шевченка, професор кафедри математичного аналізу), доктор фіз.-мат. наук, проф. Турбін А. Ф. (Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, провідний науковий співробітник), кандидат фіз.-мат. наук, доц. Макаручук О. П. (Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, доцент кафедри прикладної математики, статистики та економіки), кандидат фіз.-мат. наук, проф. Гончаренко Я. В. (НПУ імені М. П. Драгоманова, завідувач кафедри

вищої математики), кандидат фіз.-мат. наук, доц. Лисенко І. М. (НПУ імені М. П. Драгоманова, доцент кафедри методології та методики навчання математики і фізики у вищій школі), кандидат фіз.-мат. наук, доц. Нікіфоров Р. О. (НПУ імені М. П. Драгоманова, завідувач кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь), кандидат фіз.-мат. наук, доц. Хворостіна Ю. В. (Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, заступник декана фізико-математичного факультету з наукової роботи), кандидат фіз.-мат. наук Василенко Н. М. (НПУ імені М. П. Драгоманова, молодший науковий співробітник відділу організації наукових досліджень), кандидат фіз.-мат. наук Панасенко О. Б. (Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, старший викладач кафедри алгебри і методики навчання математики), здобувачі й аспіранти: Вовчанський М. Б., Дмитренко С. О., Кривошия Р. В., Осауленко Р. Ю (всього 26 присутніх).

СЛУХАЛИ:

доповідь аспірантки Інституту математики НАН України Ратушняк Софії Петрівни за матеріалами дисертаційної роботи « Фрактальні функції і розподіли їх значень», поданої на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «Математика».

У доповіді здобувачка обгрунтувала актуальність теми, сформулювала мету і завдання дослідження, його наукову новизну і практичну значимість, розповіла про структуру і зміст роботи, її основні результати та методи їх отримання, підсумувала доповідь висновками.

В обговоренні взяли участь: доктор фіз.-мат. наук, проф. Плакса С. А., доктор фіз.-мат. наук, проф. Працьовитий М. В., доктор фіз.-мат. наук, проф. Романюк А. С., доктор фіз.-мат. наук, проф. Торбін Г. М.

На всі поставлені питання доповідачка дала ґрунтовні відповіді. Виступаючі відмітили актуальність теми, новизну та значну наукову цінність отриманих у дисертації результатів і зазначили, що робота відповідає всім вимогам, що висуваються до дисертацій на здобуття наукового ступеня доктора філософії.

Тему дисертації і наукового керівника доктора фізико-математичних наук, професора М.В. Працьовитого затверджено на засіданні Ученої ради Інституту математики НАН України (протокол № 11 від 19 грудня 2017 року).

Визначення напряму дослідження і постановка задач належать науковому керівникові — доктору фізико-математичних наук, професору М.В. Працьовитому. Основні результати, що виносяться на захист, авторка отримала самостійно. Результати, що опубліковані в спільних роботах, та включені до дисертації, належать дисертантці.

Дисертацію виконано у відділі динамічних систем та фрактального аналізу Інституту математики НАН України у рамках тем «Фрактальний аналіз неперервних функцій і мір» (№ держ. реєстр. 0111U000053); «Фрактальний аналіз математичних об'єктів зі складною локальною будовою» (№ держ. реєстр. 0107U000583); «Фрактальна геометрія числових

рядів і фрактальний аналіз стохастичних об'єктів, з ними пов'язаних» (№ держ. реєстр. 0118U002059); «Статистика сингулярних розподілів ймовірностей і фрактальні неперервні функції випадкових величин» (№ держ. реєстр. 0119U002582).

Висновок

про наукову новизну, теоретичне і практичне значення результатів дисертації

С. П. Ратушняк «Фрактальні функції і розподіли їх значень»,

подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії

за спеціальністю 111 «Математика»

Дисертація присвячена дослідженню фрактальних функцій, означених на відріжку $[0; 1]$ в термінах двосимвольного Q_2 -зображення чисел, що є самоподібним узагальненням класичного двійкового зображення, та його несамоподібного узагальнення — Q_2^* -зображення чисел; вивченню їх структурних, варіаційних, диференціальних, інтегральних властивостей.

У роботі вивчено два континуальні класи:

- 1) неперервних ніде не монотонних функцій, Q_2 -цифри значення яких задаються рекурентними співвідношеннями, залежними від відповідних пар Q_2 -цифр зображення аргумента;
- 2) функцій з фрактальними графіками, аргумент і значення яких подаються у формі Q_2^* -зображення чисел відрізка $[0; 1]$, а залежність цифр визначається послідовністю фінітних функцій φ_k на ланцюгу скріплених пар послідовних цифр зображення аргумента.

Серед основних результатів можна виділити такі:

- для функцій першого класу вивчено диференціальні властивості, зокрема отримано умови ніде не недиференційовності;
- встановлено необмеженість варіації;
- вичерпно вивчено масивність та тополого-метричні властивості множин рівнів;
- описано структурні та інтегральні властивості функцій;
- при заданому Q_2 -зображенні чисел доведено існування восьми конструкцій функцій з аналогічними властивостями;
- для функцій другого класу доведено, що існує лише 16 функцій, визначених сталими послідовностями фінітних функцій, які природнім чином поділяються на пари двоїстих функцій з неідентичними диференціальними властивостями;

- запропоновано матричний спосіб задання класу цих функцій та вивчено його групові властивості;
- знайдено підклас функцій, що є неперервними, доведено, що сім'я сталих функцій є континуальною;
- узагальнено інверсор Q_2 -зображення чисел, для нього вивчено диференціальні властивості, у випадку, коли Q_2^* -зображення є Q_2 -зображенням, описано самоафінні властивості графіка та інтегральні властивості;
- у роботі розв'язано кілька задач ймовірнісного змісту: встановлено лебегівську структуру розподілу значень функцій другого класу при рівномірному розподілі аргумента;
- отримано відповідь на питання про незалежність цифр Q_2 -зображення випадкової величини з заданим експоненційним розподілом на одиничному відрізку;
- доведено, що розподіл випадкової величини з незалежними цифрами Q_2 -зображення, похідна функції розподілу якого додатна, є або рівномірним або експоненційним в залежності від параметрів зображення.

Дисертаційна робота має теоретичний характер, її результати можуть бути використані в дослідженнях математичних об'єктів з фрактальними властивостями, означення яких використовують двосимвольні кодування дійсних чисел, відмінні від Q_2^* -зображення.

Результати дисертації є істотним внеском у конструктивну теорію локально складних функцій. Вони достатньо повно опубліковані в 20 наукових публікаціях, шість з яких є статтями у виданнях, внесених до переліку фахових видань, серед них дві статті у виданнях, що індексуються науко-метричною базою Scopus, а саме:

1. *Працьовитий М. В., Ратушняк С. П.* Розподіл значень однієї фрактальної функції від випадкового аргумента // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2014, № 16(2). — С. 150–160.
2. *Ратушняк С.П.* Взаємозв'язки двосимвольного та чотирисимвольного Q -зображень дробової частини дійсного числа // Збірник праць Інституту математики НАН України 2017, т. 14, № 4. — С. 137–146.
3. *Працьовитий М.В., Ратушняк С.П.* Властивості та розподіли значень фрактальних функцій, пов'язаних з Q_2 -зображенням дійсних чисел // Теорія ймовірностей та математична статистика. Вип. 2(99)/2018. — С. 187–202. (SCOPUS Q3)

4. *Працьовитий М.В., Ратушняк С.П.* Незалежність цифр Q_2 -зображення випадкової величини з заданим розподілом // *Збірник праць Інституту математики НАН України* 2019, т. 16, № 3. — С. 79–91.
5. *Працьовитий М.В., Ратушняк С.П.* Неперервна ніде не диференційовна функція із фрактальними властивостями, визначена в термінах Q_2 -зображення // *Нелінійні коливання*, Т.23. №2, 2020. — С.231–252.
6. *Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Dyvliakh N.V., Ratushniak S.P.* Inversor of digits of Q_2^* -representation of numbers // *Mat. Stud.* 55 (2021), P.37–43. (SCOPUS Q3)

Результати дисертаційного дослідження доповідались на 14-ти наукових конференціях: 4 всеукраїнських і 10 міжнародних, серед яких: Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь» (Київ, 2017), International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008) (Kyiv, 2017), Міжнародна конференція «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях» (Чернівці, 2018), Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations (Kyiv, 2018), International conference. Modern stochastics: theory and applications. IV. (Kyiv, 2018), International Conference of Young Mathematics (Kyiv, 2019), V Міжнародна науково-практична конференція «Відкриті еволюціонуючі системи» (Київ, 2020), International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach (Lviv, 2017), The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky (Vinnytsia, 2019).

Рецензенти рекомендують прийняти дисертацію Ратушняк Софії Петрівни «Фрактальні функції і розподіли їх значень» до захисту.

Враховуючи результати попередньої експертизи дисертації Ратушняк С.П. і повноту висвітлення публікацій основних результатів дослідження у публікаціях,

УХВАЛИЛИ:

1. Затвердити висновок про наукову новизну, теоретичне і практичне значення результатів дисертації Ратушняк Софії Петрівни «Фрактальні функції і розподіли їх значень».

2. Дисертаційна робота за обсягом та якістю проведених досліджень і публікацій задовольняє усі вимоги Постанови Кабінету Міністрів № 167 від 6 березня 2019 року "Про порядок проведення експерименту з присудження ступеня доктора філософії" (зі змінами, внесеними згідно з Постановою КМ № 979 від 21.10.2020).

3. Рекомендувати дисертаційну роботу С.П. Ратушняк «Фрактальні функції і розподіли їх значень» до захисту на здобуття наукового ступеня доктора філософії та утворити спе-

ціалізовану вчену раду з правом прийняття до розгляду та проведення разового захисту на здобуття доктора філософії за спеціальністю 111 «Математика» у складі:

Голова ради:

1. **Кочубей Анатолій Наумович**, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, завідувач відділу нелінійного аналізу;

Рецензенти:

2. **Романюк Анатолій Сергійович**, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач відділу теорії функцій;

3. **Плакса Сергій Анатолійович**, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу;

Опоненти:

4. **Радченко Вадим Миколайович**, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математичного аналізу Київського національного університету імені Тараса Шевченка;

5. **Чайченко Станіслав Олегович**, доктор фізико-математичних наук, професор, проєктор з науково-педагогічної роботи Донбаського державного педагогічного університету.

Головуючий на засіданні:

В.о. завідувача відділу динамічних систем
та фрактального аналізу,
доктор фізико-математичних наук, професор

М. В. Працьовитий

Секретар:

Старший науковий співробітник
лабораторії фрактального аналізу,
кандидат фізико-математичних наук

О. М. Барановський

Рецензенти:

Завідувач відділу теорії функцій,
доктор фізико-математичних наук, професор

А. С. Романюк

Завідувач відділу комплексного аналізу
і теорії потенціалу,
доктор фізико-математичних наук, професор

С. А. Плакса