

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**РАТУШНЯК Софія Петрівна**

УДК 517.5

ДИСЕРТАЦІЯ

**ФРАКТАЛЬНІ ФУНКЦІЇ І РОЗПОДІЛИ ЇХ ЗНАЧЕНЬ**

111 — Математика

Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня  
доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

\_\_\_\_\_ С. П. Ратушняк

Науковий керівник: **Працьовитий Микола Вікторович**,  
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2021

## АНОТАЦІЯ

*Ратушняк С. П.* Фрактальні функції і розподіли їх значень. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — Математика. — Інститут математики НАН України, Київ, 2021.

Дисертаційне дослідження виконане в галузі конструктивної теорії дійсних функцій з локально складними тополого-метричними і фрактальними властивостями. Воно присвячене функціям, означеним на відрізку  $[0; 1]$  в термінах двосимвольного  $Q_2$ -зображення чисел, що є самоподібним узагальненням класичного двійкового зображення, та його несамоподібного узагальнення —  $Q_2^*$ -зображення чисел.

Функції з локально складною структурою — популярний об'єкт у сучасних наукових дослідженнях (суто математичних та прикладних). Серед неперервних функцій до таких відносяться сингулярні (функції, похідна яких майже скрізь у розумінні міри Лебега рівна нулю), ніде не монотонні (такі, що не мають проміжків монотонності) та ніде не диференційовні функції. До цього класу також відносять функції, що мають «масивні» множини особливостей різного характеру та множини рівнів; функції, що зберігають частоти цифр у тій чи іншій системі числення; функції, які трансформують міру та метричні розмірності борелівських множин тощо. Для їх вивчення широко залучаються засоби теорії фракталів (фрактальної геометрії та фрактального аналізу), ідеї самоподібності, самоафінності, автомодельності множин і різні системи кодування (зображення) дійсних чисел з використанням різних алфавітів (скінченних і нескінченних, сталих

і змінних, традиційних і надлишкових). Двосимвольні системи кодування чисел використовують алфавіт  $\{0, 1\} = A$ . Вони забезпечують технічні зручності в обчислювальній техніці і кодуванні інформації. В силу різних причин заслуговують на окрему (самостійну) увагу.

Створені у роботах Працьовитого М.В. і Торбіна Г.М. тополого-метрична і ймовірнісна теорії  $Q_2^*$ -зображення чисел знайшли багаточисельні застосування у різних галузях математики, зокрема у теорії динамічних систем конфлікту, яка розвивається у роботах Кошманенка В.Д. та його учнів. Ми використали цю систему для розвитку конструктивної теорії функцій, які мають фрактальні властивості, що відображаються у їх множинах рівнів, графіках, суттєвих для функції множинах (множина значень, множина різного роду особливостей функції тощо). Дана дисертаційна робота, в значній мірі, є продовженням досліджень властивостей локально складних функцій, які проводили Працьовитий М.В. та його учні: Барановський О.М., Василенко Н.А., Василенко Н.М., Гончаренко Я.В., Замрій І.В., Ісаєва Т.М., Калашніков А.В., Карвацький Д.М., Васькевич (Климчук) С.О., Макарчук О.П., Маркітан В.П., Маслова Ю.П., Савченко І.О., Свинчук О.В., Панасенко О.Б., Чуйков А.С. та ін.

$Q_2^*$ -зображення чисел відрізка  $[0; 1]$  визначається нескінченною дворядковою стохастичною матрицею  $\|q_{ik}\|$  з додатними елементами ( $q_{ik} > 0$ ,  $q_{0k} + q_{1k} = 1$ ), яка задовольняє умову  $\prod_{k=1}^{\infty} \max\{q_{0k}, q_{1k}\} = 0$ . Воно ґрунтується на розкладі числа в ряд:

$$x = \alpha_1 q_{1-\alpha_1, 1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\alpha_k q_{1-\alpha_k, k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i, i}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_2^*},$$

де  $\alpha_k \in A$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . При цьому  $\alpha_k \in A$  називається  $k$ -ою  $Q_2^*$ -цифрою зображення  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2^*}$  числа  $x$ .

Якщо  $q_{ik} = q_i$ , то  $Q_2^*$ -зображення називається  $Q_2$ -зображення і у випадку  $q_{0k} = \frac{1}{2} = q_{1k}$  є класичним двійковим зображенням.

Числа, що мають два  $Q_2^*$ -зображення, тобто числа виду  $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}^{Q_2^*}0(1) = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}^{Q_2^*}1(0)$ , називаються  $Q_2^*$ -бінарними, а числа, що мають єдине зображення —  $Q_2^*$ -унарними. Очевидно, що  $Q_2^*$ -бінарні числа утворюють зліченну множину,  $Q_2^*$ -унарні — континуальну.

У роботі досліджуються функції двох континуальних класів:

1.  $f(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_2^*}) = \Delta_{\varphi_1(\alpha_1,\alpha_2)\varphi_2(\alpha_3,\alpha_4)\dots\varphi_n(\alpha_{2n-1},\alpha_{2n})\dots}^{Q_2^*}$ ;
2.  $f(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_2^*}) = \Delta_{\varphi_1(\alpha_1,\alpha_2)\varphi_2(\alpha_2,\alpha_3)\dots\varphi_n(\alpha_n,\alpha_{n+1})\dots}^{Q_2^*}$ ;

де  $\varphi_n(a, b)$  — фінітна функція двох змінних, яка означена на  $A \times A$  і набуває значень з  $A$ ,  $n \in N$ .

Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів основної частини, розбитих на підрозділи, висновків до розділів та загальних висновків, списку джерел та одного додатку, який містить список публікацій автора.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання і методи дослідження, зазначено наукову новизну отриманих результатів, їх практичне значення, зв'язок роботи з науковими темами й особистий внесок здобувача, вказано також, де було апробовано та опубліковано результати дисертації.

У першому розділі здійснено систематизацію відомостей, що стосуються тополого-метричних і фрактальних властивостей  $Q_2$ -зображення і  $Q_2^*$ -зображення дійсних чисел відрізка  $[0; 1]$ , їх геометрії, основ фрактального аналізу та фрактальної геометрії, проведено огляд літератури за тематикою дисертаційного дослідження.

У другому розділі конструктивно описано континуальний клас неперервних ніде не монотонних функцій, аргумент і значення яких означені в термінах  $Q_2$ -зображення чисел, що мають всюди щільні множини екстремумів, як в точках  $Q_2$ -бінарних, так і в точках  $Q_2$ -унарних. Вивчено їх структурні, варіаційні, автотельні та інтегро-диференціальні властивості, а також висвітлено властивості множин рівнів. Отримано умови ніде

не диференційовності функцій. Ніде не монотонні функції другого розділу є аналогами Трибін-функції, ніде не диференційовних функцій Вундерліха та Буша. На відміну від функцій Такагі, Окамото, вони досягають екстремумів не лише у  $\mathcal{Q}_2$ -бінарних точках.

У третьому розділі наведено конструкцію класу функцій, аргумент і значення яких подаються у формі  $\mathcal{Q}_2^*$ -зображення чисел відрізка  $[0; 1]$  (зокрема,  $\mathcal{Q}_2$ -зображення) одиничного відрізка, а залежність цифр визначається послідовністю фінітних функцій  $\varphi_k : A \times A \rightarrow A \equiv \{0, 1\}$  на ланцюгу скріплених пар послідовних цифр зображення аргумента. Окрема увага приділена яскравому представнику цього класу функцій — інверсору цифр  $\mathcal{Q}_2^*$ -зображення чисел, що є неперервною строго спадною, в переважній більшості випадків сингулярною функцією, двоїстою до тотожного перетворення відрізка.

Четвертий розділ присвячено двом задачам: 1) про розподіли цифр  $\mathcal{Q}_2$ -зображення випадкової величини з заданим розподілом; 2) про розподіл випадкової величини, породженої розподілами цифр її  $\mathcal{Q}_2$ -зображення, при умові наявності у нього додатної щільності у кожній точці деякого відрізка. У ньому вичерпно розв'язано другу задачу і отримано відповідь на питання стосовно незалежності цифр  $\mathcal{Q}_2$ -зображення випадкової величини з заданим експоненціальним розподілом на одиничному відрізку.

Додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дослідження.

Основні результати, які визначають наукову новизну дисертаційного дослідження:

- описано структурні, варіаційні, інтегро-диференціальні та фрактальні властивості континуального класу неперервних ніде не монотонних функцій, означених в термінах одного  $\mathcal{Q}_2$ -зображення (аргумента і значення функції), що мають нескінченні множини екстремумів, як в  $\mathcal{Q}_2$ -бінарних точках, так і в  $\mathcal{Q}_2$ -унарних точках;

- отримано умови недиференційовності функцій вказаного класу;
- при заданому  $Q_2$ -зображенні чисел доведено існування восьми конструкцій функцій з аналогічними властивостями;
- конструктивно описано континуальний клас функцій, визначених ланцюговою залежністю  $Q_2^*$ -цифр зображення значення функції від пар послідовних  $Q_2^*$ -цифр зображення аргумента;
- для наведеного класу доведено, що існує лише 16 функцій, визначених сталими послідовностями, які природнім чином поділяються на пари двоїстих функцій, зі «схожими», але не ідентичними диференціальними властивостями. Запропоновано матричний спосіб задання класу цих функцій і доведено, що лише дві з них є неперервними. Окрема увага приділяється узагальненню інверсора  $Q_2$ -зображення чисел. Для нього встановлено зв'язок з функцією розподілу випадкової величини двійкові цифри якої є незалежними, а розподіли визначаються спряженою матрицею даного  $Q_2^*$ -зображення. Для випадку, коли  $Q_2^*$ -зображення є  $Q_2$ -зображення, описано самоафінні властивості графіка та інтегральні властивості функції;
- встановлено, що за умови, коли випадкова величина  $\xi$  має експоненційний розподіл на одиничному відрізку, то розподіли цифр її  $Q_2$ -зображення, відмінного від класичного двійкового, є залежними випадковими величинами з залежністю, складнішою марковську;
- для випадкової величини з незалежними цифрами  $Q_2$ -зображення, функція розподілу якої має додатну похідну в кожній точці деякого відрізка, доведено, що її розподіл є рівномірним або експоненційним, причому перший випадок має місце тоді і тільки тоді, коли цифри зображення мають однакові розподіли, визначені параметрами  $Q_2$ -зображення; в другому випадку зображення є класичним двійковим, розподіли цифр визначаються геометричною прогресією зі знаменником  $\frac{1}{2}$ .

Дисертаційна робота має теоретичний характер, отримані результати можуть бути використані в подальших дослідженнях, а також при вивченні математичних об'єктів з фрактальними властивостями, означення яких використовують двосимвольні кодування дійсних чисел з нульовою надлишковістю, відмінні від  $Q_2^*$ -зображення.

Особливістю роботи є те, що в ній вперше запропоновано матричний підхід до визначення функцій другого класу і конструктивно описано всі функції зі сталою породжуючою послідовністю фінітних функцій  $(\varphi_k)$ , а для першого класу знайдено всі неперервні функції з фіксованою залежністю  $Q_2$ -цифр значень функції.

*Ключові слова:*  $Q_2$ -зображення,  $Q_2^*$ -зображення, самоподібна множина, самоподібна розмірність, розмірність Гаусдорфа-Безиковича, фрактальна функція, інверсор цифр  $Q_2^*$ -зображення, оператори лівостороннього і правостороннього зсуву цифр, множина рівня функції, розподіл значень функції, лебегівська структура розподілу.

## ABSTRACT

*Ratushniak S. P.* Fractal functions and distributions of their values. — Qualification scientific work in the form of manuscript.

Thesis for doctor of philosophy degree in speciality 111 — Mathematics. — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2021.

The thesis belongs to the field of constructive theory of real functions with locally complicated topological, metric and fractal properties. It is devoted to the functions defined on the segment  $[0; 1]$  in terms of the two-symbol  $Q_2$ -representation of numbers, which is a self-similar generalization of the classic binary representation, and its non-self-similar generalization —  $Q_2^*$ -representation of numbers.

Functions with a locally complicated structure is a popular object in modern research (purely mathematical and applied). Singular (functions whose derivative is equal to zero almost everywhere with respect to Lebesgue measure), nowhere monotonic (those that have no intervals of monotonicity) and non-differentiable functions are among continuous functions of a such type. This class also includes functions having massive sets of features of different nature and level sets; functions preserving the frequency of digits in a numeral system; functions that transform the measure and metric dimensions of Borel sets, etc. To study them, the methods of fractal theory (fractal geometry and fractal analysis), ideas of self-similarity, self-affinity and scale-invariant of sets as well as various systems of encoding (representations) of real numbers with different alphabets (finite and infinite, constant and variable, traditional and redundant) are widely used. Two-symbol systems of



encoding of numbers use the alphabet  $\{0, 1\} = A$ . They provide technical convenience in computer technology and encoding of information. Due to various reasons, they deserve special (particular) attention.

Topological, metric and probability theories of  $Q_2^*$ -representation of numbers, which are created in the works of M.V. Pratsiovytyi and G.M. Torbin, are numerous applied in various fields of mathematics, in particular in the theory of dynamical systems of conflict, which is developing in the works of V.D. Koshmanenko and his followers. We used this system to develop a constructive theory of functions with fractal properties, which are reflected in their level sets, graphs, and sets essential for the function (e.g., set of values, set of various kinds of singularities of functions, etc.).

The thesis is largely a continuation of research of the properties of locally complicated functions, which was conducted by M.V. Pratsiovytyi and his followers: O.M. Baranovskyi, N.A. Vasylenko, N.M. Vasylenko, Ya.V. Goncharenko, T.M. Isaieva, I.V. Zamriy, A.V. Kalashnikov, D.M. Karvatsky, S.O. Vaskevych (Klymchuk), O.P. Makarchuk, V.P. Markitan, Yu.P. Maslova, I.O. Savchenko, O.V.Svynchuk, O.B. Panasenko, A.S. Chuikov and others.

We consider  $Q_2^*$ -representation of numbers of segment  $[0; 1]$  defined by an infinite two-row stochastic matrix  $\|q_{ik}\|$  with positive elements ( $q_{ik} > 0$ ,  $q_{0k} + q_{1k} = 1$ ) satisfying the identity  $\prod_{k=1}^{\infty} \max\{q_{0k}, q_{1k}\} = 0$ . It is based on the expansion of a number in a series:

$$x = \alpha_1 q_{1-\alpha_1, 1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\alpha_k q_{1-\alpha_k, k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i, i}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_2^*},$$

where  $\alpha_k \in A$ ,  $k \in N$ . In this case,  $\alpha_k \in A$  is called the  $k$ -th  $Q_2^*$ -digit of representation  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2^*}$  of a number  $x$ .

If  $q_{ik} = q_i$ , then a  $Q_2^*$ -representation is called a  $Q_2$ -representation. In the case  $q_{0k} = \frac{1}{2} = q_{1k}$ ,  $Q_2^*$ -representation is a classic binary representation.

Numbers allowing two  $Q_2^*$ -representations, i.e., numbers of the form  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m 0(1)}^{Q_2^*} =$

$\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}^{Q_2^*}$ , are called  $Q_2^*$ -binary; and numbers having a unique  $Q_2^*$ -representation are called  $Q_2^*$ -unary. It is obvious that set of  $Q_2^*$ -binary numbers is countable, while set of  $Q_2^*$ -unary numbers is a continuum set.

In the thesis we consider functions of two continuous classes:

1.  $f(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_2^*}) = \Delta_{\varphi_1(\alpha_1,\alpha_2)\varphi_2(\alpha_3,\alpha_4)\dots\varphi_n(\alpha_{2n-1},\alpha_{2n})}^{Q_2^*}$ ;
2.  $f(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_2^*}) = \Delta_{\varphi_1(\alpha_1,\alpha_2)\varphi_2(\alpha_2,\alpha_3)\dots\varphi_n(\alpha_n,\alpha_{n+1})}^{Q_2^*}$ ,

where  $\varphi_n(a, b) : A \times A \rightarrow A$  is a function taking only finitely many distinct values for any  $n \in N$ .

The thesis consists of the abstract in Ukrainian and in English, list of notations, introduction, four chapters, divided into sections, conclusions for each chapter and general conclusions, bibliography, and appendix.

The introduction substantiates the relevance of the research topics, formulates the purpose, object, subject, tasks and methods of research, outlines the scientific novelty of the obtained results, their practical significance, the connection of the work with scientific programs and the personal contribution of the author and also points out where the results of thesis have been discussed and published.

In the first chapter, we systematized information related to topological, metric and fractal properties of  $Q_2$ -representation and  $Q_2^*$ -representation of real numbers of segment  $[0; 1]$ , geometry of these representations, foundation of fractal analysis and fractal geometry, and reviewed the literature on the topic of thesis.

In the second chapter, we constructively described a continuum class of continuous nowhere monotonic functions the argument and values of which are defined in terms of  $Q_2$ -representation of numbers. These functions have everywhere dense sets of extrema at  $Q_2$ -binary points as well as at  $Q_2$ -unary ones. Their structural, variational, self-similar, integral and differential properties were studied, also the properties of level sets were highlighted. We

have obtained the conditions for nowhere differentiability of the functions. Nowhere monotonic functions of the second chapter are analogous to the Tribin function, nowhere differentiable functions of Wunderlich and Bush. Unlike Takagi and Okamoto functions, they reach extrema not only at  $Q_2$ -binary points.

In the third chapter, we present the construction of a class of functions the argument and values of which are given in the form of  $Q_2^*$ -representation of numbers (in particular,  $Q_2$ -representation) of a unit segment. The dependence of digits is determined by a sequence of finite functions  $\varphi_k : A \times A \rightarrow A \equiv \{0, 1\}$  on a chain of joint pairs of consecutive digits of the representation of the argument. Special attention is paid to the inversor of digits of the representation of the argument, which is the very interesting element of this class of functions. Inversor is a continuous strictly decreasing function (in fact, singular for most cases) being dual to the identical transformation of the segment.

In the fourth chapter, we consider two problems: 1) distributions of digits of  $Q_2$ -representation of a random variable with a given distribution; 2) distribution of a random variable generated by the distributions of digits of its  $Q_2$ -representation, under assumption that its probability distribution function has a positive derivative at each point of some segment. We comprehensively solve the second problem and answer the question about the independence of digits of  $Q_2$ -representation of a random variable with a given exponential distribution on a unit segment.

The appendix contains a list of the applicant's publications on the topic of the thesis and information on the approbation of the research results.

The main results determining the scientific novelty of the thesis are the following:

- the structural, variational, integral, differential and fractal properties of a continuum class of continuous nowhere monotonic functions de-

- fined in terms of one  $Q_2$ -representation having infinite sets of extrema (being either  $Q_2$ -binary or  $Q_2$ -unary) are described;
- the conditions for nowhere differentiability of functions of the specified class are obtained;
  - for a given  $Q_2$ -representation of numbers, the existence of eight constructions of functions with similar properties is proved;
  - the continuum class of functions defined by the chain dependence of  $Q_2^*$ -digits of the representation of the value of the function on pairs of consecutive  $Q_2^*$ -digits of the argument representation is constructively described;
  - for the given class, it is proved that there are only 16 functions defined by constant sequences, which are naturally divided into pairs of dual functions with similar but not identical differential properties. A matrix method of definition of the class of these functions has been proposed. It is proved that only two of them are continuous. Particular attention is paid to the generalization of the inversor of the  $Q_2$ -representation of numbers. We have established a connection of the inversor with the probability distribution function of a random variable whose binary digits are independent and the distributions are determined by the conjugate matrix of a given  $Q_2^*$ -representation. For the case when the  $Q_2^*$ -representation is a  $Q_2$ -representation, the self-affine properties of the graph and the integral properties of the function are described.
  - it is established that if a random variable  $\xi$  has an exponential distribution on a unit segment, then the distributions of digits of its  $Q_2$ -representation that is not the classic binary representation are dependent random variables, and the dependence is more complex than the Markov one;
  - for a random variable with independent digits of  $Q_2$ -representation,

the probability distribution function of which has a positive derivative at each point of some segment, it is proved that its distribution is uniform or exponential, and the first case occurs if and only if the digits of the representation have the same distributions defined by the parameters of  $Q_2$ -representation; in the second case, the representation is a classic binary representation and the distributions of digits are determined by a geometric progression with the common ratio  $\frac{1}{2}$ .

This is a theoretical investigation. The obtained results can be used in further research, as well as in the study of mathematical objects with fractal properties, whose definitions use two-symbol encoding of real numbers with zero redundancy, which is distinct from the  $Q_2^*$ -representation.

The peculiarity of the thesis is that at the first time it proposes a matrix approach to the definition of functions of the second class and constructively describes all functions with a fixed generating sequence of finite functions  $(\varphi_k)$ , and for the first class all continuous functions with fixed dependence of  $Q_2$ -digits of values of function were found.

*Key words:*  $Q_2$ -representation,  $Q_2^*$ -representation, self-similar set, self-similar dimension, Hausdorff-Bezikovitch dimension, fractal function, invensor of digits of  $Q_2^*$ -representation, left shift operator, right shift operator, level set of function, distribution of values of function, Lebesgue structure of probability distribution.

### Список опублікованих праць здобувачки на тему дисертації

*Список публікацій здобувача за темою дисертації* 1. *Працьовитий М. В., Ратушняк С. П.* Розподіл значень однієї фрактальної функції від випадкового аргумента // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2014, № 16(2). — С. 150–160.

2. *Ратушняк С.П.* Взаємозв'язки двосимвольного та чотирисимвольного  $Q$ -зображень дробової частини дійсного числа // Збірник праць Інституту математики НАН України 2017, т. 14, № 4. — С. 137–146.

3. *Працьовитий М.В., Ратушняк С.П.* Властивості та розподіли значень фрактальних функцій, пов'язаних з  $Q_2$ -зображенням дійсних чисел // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2018, Вип. 2(99). — С. 187–202.

(Переклад. англ. мовою: Pratsiovytyi M.V., Ratushniak S.P. Properties and distributions of values of fractal functions related to  $Q_2$ -representations of real numbers // Theor. Probability and Math. Statist. 99. — 2019, P. 211–228. DOI:<https://doi.org/10.1090/tpms/1091>, SCOPUS, Web of Science, Q3)

4. *Працьовитий М.В., Ратушняк С.П.* Незалежність цифр  $Q_2$ -зображення випадкової величини з заданим розподілом // Збірник праць Інституту математики НАН України 2019, т. 16, № 3. — С. 79–91.

5. *Працьовитий М.В., Ратушняк С.П.* Неперервна ніде не диференційовна функція із фрактальними властивостями, визначена в термінах  $Q_2$ -зображення // *Гелінійні коливання*, Т.23. №2, 2020. — С.231–252.

6. *Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Dyvliakh N.V., Ratushniak S.P.* Inversor of digits of  $Q_2^*$ -representation of numbers // *Mat. Stud.* 55 (2021), P.37–43.

#### *Тези доповідей на конференціях*

1. *Ратушняк С.П.* Розподіл значень однієї фрактальної функції від випадкового аргумента // Відкриті еволюціонуючі системи. IV Міжнародна

науково-практична конференція відкриті еволюціонуючі системи, 20–21 05. 2017 р., Україна, Ніжин. — 45-52 с.

2. *Ратушняк С.П.* Розподіл значень функцій з фрактальними властивостями, означених в термінах  $Q_2$ -зображення чисел // Шоста Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики, 21-22 квітня 2017, Київ. – С. 30.

3. *Ратушняк С.П.* Неперервні функції з фрактальними властивостями і розподіли ймовірностей, ними породжені Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», Київ, Україна, 13-14 грудня 2017 року. - С. 73-74.

4. *Ратушняк С.П.* Розподіл значень однієї фрактальної функції, означеної в термінах  $Q_2$ -зображення // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008). June 7 – 1, 2017, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2017. — P. 122.

5. *Sofia Ratushniak and Mykola Pratsiovytyi* Distribution of values of fractal functions related to  $Q_2$ -representation of real numbers // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach. 18-23 september 2017, Lviv. P. – 79.

6. *Ратушняк С.П.* Клас фрактальних функцій, пов'язаних з  $Q_s$ -зображеннями дійсних чисел // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях, 17-19 вересня 2018, Чернівці. – С. 198.

7. *Ratushniak S.* Structural and self-similar properties of representatives of one class of fractal functions and distributions of their values // Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations: Abstracts. – Kyiv: National Pedagogical Drahomanov University and Institution of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, 2018. – P.29.

8. *Ратушняк С.П., Працьовитий М.В.* Неперервні функції, означені в термінах  $Q_2$ -зображення чисел і їх фрактальні властивості // Сьома Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики, 19-20 квітня 2018, Київ. – С. 51.

9. *Ratushniak S.* Properties and distribution of values of fractal functions related to  $Q_2$ -representation of real numbers. IV International conference. Modern stochastics: theory and applications. 24-26.05. 2018 Kyiv. – P. 52.

10. *Ратушняк С.П.* Один клас фрактальних функцій, пов'язаних з  $Q_2^*$ -зображенням чисел // Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання», 23.05.2019, Київ. – С. 47.

11. *Ратушняк С.П.* Густина множини значень фрактальних функцій, пов'язаних з  $Q_2$ -зображенням дійсних чисел. International Conference of Young Mathematics. June 6–8, 2019, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Kyiv: Institution of Mathematics of NAS of Ukraine, 2019. — С. 111.

12. *Pratsiovytyi M., Ratushniak S.* Mathematical structures with fractal properties in the space of sequences of zeros and ones // The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky. July 02-06,2019, Vinnytsia: Vasyl' Stus Donetsk National University, 2019. – P.89-90.

13. *Ратушняк С.П., Працьовитий М.В.* Неперервна ніде не диференційовна функція з фрактальними властивостями, визначена в термінах  $Q_2$ -зображення // IX Всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, Київ, 10-11 квітня 2020. – С.22.

14. *Працьовитий М.В., Ратушняк С.П.* Фрактальні властивості однієї неперервної ніде не монотонної функції, визначеної в термінах  $Q_2$ -зображення // Відкриті еволюціонуючі системи. V Міжнародна науково-практична інтернет-конференція, 19–21 травня 2020 року, Україна, Київ. — 211-212 с.



## ЗМІСТ

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Перелік скорочень і умовних позначень</b>  | <b>20</b> |
| <b>Вступ</b>  | <b>21</b> |
| <b>Розділ 1. Огляд літератури і концептуальні основи дослідження</b>  | <b>30</b> |
| 1.1. $\mathbb{Q}_2^*$ -зображення як узагальнення класичного двійкового . . . . .   | 30        |
| 1.2. Множини канторівського типу додатної міри Лебега . . . . .   | 33        |
| 1.3. $\mathbb{Q}_2^*$ -зображення і розмірність Гаусдорфа-Безиковича . . . . .  | 33        |
| 1.4. Фрактальні властивості функції . . . . .   | 36        |
| 1.5. Лебегівська структура і спектральні властивості розподілів випадкових величин . . . . .                                    | 37        |
| <b>Розділ 2. Клас неперервних ніде не монотонних функцій, означених в термінах <math>\mathbb{Q}_2^*</math>-зображення чисел</b> | <b>40</b> |
| 2.1. Означення об'єкта дослідження . . . . .  | 40        |
| 2.2. Неперервність та ніде не монотонність функції . . . . .  | 42        |
| 2.3. Множини рівнів функції . . . . .   | 44        |
| 2.4. Варіаційні властивості функції . . . . .   | 48        |
| 2.5. Диференціальні властивості функції . . . . .   | 50        |
| 2.6. Симетрії графіка та інтегральні властивості функції . . . . .  | 59        |
| 2.7. Узагальнення конструкції функції . . . . .   | 68        |
| 2.8. Взаємозв'язок дво- та чотирьохсимвольного $\mathbb{Q}$ -зображень . . . . .  | 69        |
| 2.8.1. Функція породжена взаємозв'язком дво- та чотирьохсимвольного $\mathbb{Q}$ -зображення . . . . .                          | 71        |
| <b>Висновки до розділу 2 . . . . .</b>  | <b>74</b> |

|  |     |
|--|-----|
| Розділ 3. Клас функцій, визначених ланцюгом перетворювачів цифр  | 75  |
| 3.1. Інверсор цифр $\mathbf{Q}_2^*$ -зображення чисел . . . . .  | 75  |
| 3.1.1. Самоафінність графіка та інтегральні властивості інверсора цифр $\mathbf{Q}_2$ -зображення чисел . . . . .        | 75  |
| 3.1.2. Узагальнення: інверсор $\mathbf{Q}_2^*$ -зображення чисел . . . . .   | 78  |
| 3.1.3. Інверсор і спряжені $\mathbf{Q}_2^*$ -зображення . . . . .  | 80  |
| 3.2. Конструкція одного класу функцій $\mathbf{S}$ , якому належить інверсор   | 82  |
| 3.3. Окремі випадки . . . . .  | 85  |
| 3.4. Множини значень функцій класу $\mathbf{S}$ . . . . .  | 86  |
| 3.5. Неперервність функцій класу $\mathbf{S}$ . . . . .  | 87  |
| 3.6. Фрактальна 101-функція, означена в термінах $\mathbf{Q}_2$ -зображення дійсних чисел . . . . .                      | 89  |
| 3.6.1. Фрактальні властивості графіка функції . . . . .  | 91  |
| 3.6.2. Множини рівнів 101-функції . . . . .  | 92  |
| 3.6.3. Розподіл значень 101-функції при заданому розподілі випадкового аргументу . . . . .                               | 94  |
| 3.7. Фрактальна $\mathbf{f}_{\varphi_6}$ функція, означена в термінах $\mathbf{Q}_2$ -зображення дійсних чисел . . . . . | 99  |
| 3.7.1. Множина значень функції $\mathbf{f}_{\varphi_6}$ . . . . .  | 100 |
| 3.7.2. Множини рівнів функції $\mathbf{f}_{\varphi_6}(\mathbf{x})$ . . . . .   | 101 |
| 3.7.3. Автомодельні властивості графіка функції . . . . .  | 102 |
| 3.7.4. Інтегральні властивості графіка функції $\mathbf{f}_{\varphi_6}(\mathbf{x})$ . . . . .                            | 103 |
| 3.7.5. Розподіл значень функції $\mathbf{f}_{\varphi_6}$ при заданому розподілі випадкового аргументу . . . . .          | 104 |
| 3.8. Функція $\mathbf{f}_{\varphi_2}$ з фрактальною множиною значень . . . . .   | 108 |
| 3.8.1. Множина значень функції $f_{\varphi_2}$ . . . . .   | 109 |
| 3.8.2. Множини рівнів функції $\mathbf{f}_{\varphi_2}$ . . . . .   | 111 |
| 3.8.3. Властивості графіка функції $\mathbf{f}_{\varphi_2}$ . . . . .  | 114 |

|   |            |
|---|------------|
| 3.8.4. Розподіл значень функції $f_{\varphi_2}(\mathbf{x})$ . . . . .   | 116        |
| Висновки до розділу 3 . . . . .   | 118        |
| <b>Розділ 4. Розподіли <math>\mathbb{Q}_2</math>-цифр випадкової величини з відомим розподілом</b>                          | <b>119</b> |
| 4.1. Незалежність цифр $\mathbb{Q}_2$ -зображення випадкової величини з заданим розподілом . . . . .                        | 119        |
| 4.1.1. Цифра $\mathbb{Q}_2$ -зображення числа як функція цього числа  | 119        |
| 4.1.2. Рівномірний розподіл . . . . .   | 121        |
| 4.1.3. Експоненційний розподіл на $[0; 1]$ . . . . .  | 122        |
| 4.2. Розподіл з додатною щільністю випадкової величини, породжений розподілами цифр її $\mathbb{Q}_2$ -зображення . . . . . | 125        |
| Висновки до розділу 4 . . . . .   | 128        |
| <b>Висновки</b>   | <b>129</b> |
| <b>Список використаних джерел</b>   | <b>131</b> |
| Додаток А. <b>Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації</b>         | <b>140</b> |

## ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ І УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

|                                     |  |
|-------------------------------------|--|
| $N$                                 | множина натуральних чисел;   |
| $R$                                 | множина дійсних чисел;   |
| $C_{[0,1]}$                         | простір неперервних на відрізку $[0, 1]$ функцій;  |
| $A = \{0, 1\}$                      | алфавіт двійкової системи числення;  |
| $L = A \times A \times \dots$       | простір послідовностей елементів алфавіту;   |
| $(c_1 c_2 \dots c_p)$               | період довжини $p$ у зображенні числа;   |
| $\alpha_k(x)$                       | $k$ -та цифра певного зображення числа $x$ ;   |
| $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^g$      | циліндр рангу $m$ з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ $g$ -зображення числа;                                       |
| $\nabla_{c_1 c_2 \dots c_m}^g$      | циліндричний інтервал (внутрішність циліндра) рангу $m$ з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ $g$ -зображення числа; |
| $ \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^g $    | довжина $g$ -циліндра $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^g$ ;   |
| $\lambda(E)$                        | міра Лебега множини $E$ ;  |
| $H^\alpha(E)$                       | $\alpha$ -мірна міра Гаусдорфа (або $H^\alpha$ -міра Гаусдорфа) множини $E$ ;                                |
| $\alpha_0(E)$                       | розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини $E$ ;   |
| $\mu_f(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m})$ | приріст функції $f$ на циліндрі рангу $m$ з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ ;                                    |
| $f^{-1}(y_0)$                       | множина рівня $y_0$ функції $f$ ;  |
| $f_{\overline{\varphi}}$            | функція, породжена послідовністю функцій $(\varphi_n)$ ;   |
| $f_{\varphi_k}$                     | функція, породжена сталою послідовністю $(\varphi_k)$ функцій $\varphi_k$ ;                                  |
| $E_f$                               | множина значень функції $f$ ;  |
| $\equiv$                            | рівність за означенням.  |

## ВСТУП

Дисертаційне дослідження виконане в галузі конструктивної теорії функцій з локально складною тополого-метричною структурою і фрактальними властивостями. Воно присвячене функціям, означеним в термінах двосимвольного  $Q_2^*$ -зображення чисел, зокрема,  $Q_2$ -зображення, яке є самоподібним узагальненням класичного двійкового зображення.

**Обґрунтування вибору теми дослідження.** Сьогодні активно вивчаються функції з локально складними властивостями структурного, варіаційного, інтегрально-диференціального, фрактального характеру. Серед неперервних [21] до цієї сім'ї відносяться сингулярні функції [28, 51] (неперервні функції, відмінні від константи, які мають похідну рівну нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега), ніде не монотонні функції [41] (функції, що не мають жодного проміжку монотонності), ніде не диференційовні функції [36, 43, 55] тощо. У цій сім'ї є функції обмеженої та необмеженої варіації, функції з самоафінними та автомодельними графіками [31, 35]. Для задання та дослідження таких функцій широко використовуються різні системи зображення (кодування) дійсних чисел зі скінченним [12] та нескінченним [23, 5, 29], сталим та змінним алфавітами, засоби топології, теорії міри і ймовірностей, фрактальної геометрії та фрактального аналізу [71, 56, 23]. Суттєво зріс інтерес до таких функцій у представників не математичних галузей. Вони цікаві фізикам, економістам, фахівцям у галузі кодування та декодування інформації, передачі сигналів тощо. Про це свідчать багаточисельні публікації. Особливу увагу привертають неперервні ніде не монотонні функції [6].

Ми кажемо, що функція має фрактальні властивості, якщо виконується

принаймні одна з умов: функція має

- 1) хоча би одну фрактальну множину рівня [50];
- 2) самоподібний, самоафінний, автомодельний або фрактальний графік (як множину в  $R^2$ ) [41];
- 3) фрактальну множину точок несталості (зокрема росту, спадання) [50];
- 4) фрактальну множину особливостей (диференціального [25, 24, 37, 43] або іншого характеру);
- 5) розподіл значень при рівномірному розподілі аргумента, зосереджений на фракталі [44];
- 6) трансформує фрактальну розмірність, принаймні однієї борелівської підмножини одиничного відрізка  $[0; 1]$  [2].

У метричному просторі  $C[0; 1]$  більшість (в топологічному сенсі) функцій мають фрактальні властивості, оскільки кожна ніде не диференційовна функція ними володіє, а відома теорема Банаха-Мазуркевича [3, 8] стверджує: такі функції у просторі  $C[0; 1]$  утворюють другу категорію Бера. Зауважимо, що клас неперервних ніде не монотонних є ширшим класу недиференційовних функцій. Одним з продуктивних методів задання таких функцій є задання їх перетворювачами цифр або автоматами зі скінченною пам'яттю [53, 33].

Існує багато різних систем зображення (іншими словами — кодування) дробової частини дійсних чисел, які використовують двосимвольний алфавіт  $A = \{0, 1\}$ . Такі системи кодування чисел є ефективним засобом розвитку метричної та ймовірнісної теорій дійсних чисел, теорії сингулярних розподілів випадкових величин [56], теорії груп перетворень простору [14, 57], теорії фракталів. Двосимвольні системи використовувались в цих цілях у роботах Салема [19], Марсальї [7], Маслової [36], Працьовитого [38], Кюрчева [26], Чуйкова [10], Буша [4], Вундерліха [22],... Серед робіт, нам відомих, практично відсутні локально складні функції, у яких аргумент і значення функції використовують одну і ту ж систему зобра-

ження чисел (виключення складають інверсори цифр зображення числа, оператори лівостороннього та правостороннього зсувів).

Нам цікаво було оцінити потенціал двосимвольних систем кодування чисел для розвитку теорії функцій з локально складною структурою і цільними множинами особливостей різного роду. У даній роботі більшість досліджуваних функцій використовують одну систему кодування чисел (це  $Q_2$ -зображення).

$Q_2^*$ -зображення чисел відрізка  $[0; 1]$  визначається нескінченною дворядковою стохастичною матрицею  $\|q_{ik}\|$  з додатними елементами ( $q_{ik} > 0$ ,  $q_{0k} + q_{1k} = 1$ ), яка задовольняє умову  $\prod_{k=1}^{\infty} \max\{q_{0k}, q_{1k}\} = 0$ . Воно ґрунтується на розкладі числа в ряд:

$$x = \alpha_1 q_{1-\alpha_1, 1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\alpha_k q_{1-\alpha_k, k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i, i}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_2^*},$$

де  $\alpha_k \in A$ ,  $k \in N$ . При цьому  $\alpha_k \in A$  називається  $k$ -ою  $Q_2^*$ -цифрою зображення  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2^*}$  числа  $x$ .

Якщо  $q_{ik} = q_i$ , то  $Q_2^*$ -зображення називається  $Q_2$ -зображення і у випадку  $q_{0k} = \frac{1}{2} = q_{1k}$  є класичним двійковим зображенням.

Числа, що мають два  $Q_2^*$ -зображення, тобто числа виду  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m 0(1)}^{Q_2^*} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m 1(0)}^{Q_2^*}$ , називаються  $Q_2^*$ -бінарними, а числа, що мають єдине зображення —  $Q_2^*$ -унарними. Очевидно, що  $Q_2^*$ -бінарні числа утворюють зліченну множину,  $Q_2^*$ -унарні — континуальну.

$Q_2$ -зображення дробової частини дійсного числа визначається одним параметром  $q_0 \in (0; 1)$ . Воно є двосимвольним самоподібним кодуванням чисел з нульовою надлишковістю, що узагальнює класичну двійкову систему і співпадає з нею при  $q_0 = \frac{1}{2}$ . В технічному відношенні двосимвольні системи кодування чисел мають суттєві переваги. Існуючий органічний зв'язок двійкової системи з системою числення з основою  $2^k$  легко переноситься на  $Q_2$  і  $Q_s$ -зображення при  $s = 2^k$ .

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами.** Робота виконана у рамках досліджень математичних об'єктів зі складною локальною будовою і фрактальними властивостями, що проводяться у відділі динамічних систем та фрактального аналізу Інституту математики НАН України й на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова. Дослідження проводилось у рамках таких науково-дослідних тем:

- фрактальний аналіз неперервних функцій і мір (№ держ. реєстр. 0111U000053);
- фрактальний аналіз математичних об'єктів зі складною локальною будовою (№ держ. реєстр. 0107U000583);
- фрактальна геометрія числових рядів і фрактальний аналіз стохастичних об'єктів, з ними пов'язаних (№ держ. реєстр. 0118U002059);
- статистика сингулярних розподілів ймовірностей і фрактальні неперервні функції випадкових величин (№ держ. реєстр. 0119U002582).

### **Мета і завдання дослідження.**

*Мета дослідження.* Для двох класів коректно означених функцій у термінах двоосновного кодування чисел одиничного відрізка засобами алфавіту  $A = \{0; 1\}$  вивчити структурні, варіаційні, автомодельні і фрактальні властивості, описати тополого-метричні властивості суттєвих для них множин (графіків, множин рівнів, множин особливостей різного роду тощо).

*Об'єкт дослідження.* Основним об'єктом дослідження є функція, аргумент і значення якої подаються у формі  $Q_2^*$ -зображення чисел відрізка  $[0; 1]$ , і розподіл її значень при заданому розподілі аргумента.

Розглядаються два класи функцій:

1.  $f(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2^*}) = \Delta_{\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2) \varphi_2(\alpha_3, \alpha_4) \dots \varphi_n(\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}) \dots}^{Q_2^*};$
2.  $f(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2^*}) = \Delta_{\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2) \varphi_2(\alpha_2, \alpha_3) \dots \varphi_n(\alpha_n, \alpha_{n+1}) \dots}^{Q_2^*};$



де  $\varphi_n(a, b)$  — фінітна функція двох змінних, яка означена на  $A^2$  і набуває значень з  $A$ .

При вивченні функцій 1-го класу розглядаються функції  $f$  з послідовністю функцій  $(\varphi_k)$ , які забезпечують неперервність  $f$ .

*Предмет дослідження.* Структурні, інтегро-диференціальні, варіаційні властивості функцій і розподілів значень, тополого-метричні, автомоделльні та фрактальні властивості суттєвих для них множин.

*Завдання дослідження.*

1. Оцінити потенціал двосимвольних систем кодування дійсних чисел як апарату для задання та дослідження функцій з фрактальними властивостями (неперервних ніде не монотонних, недиференційованих тощо), використовуючи  $Q_2$ -зображення чисел, яке є самоподібним узагальненням класичного двійкового зображення. Зосередити свою увагу на функціях, аргумент і значення яких використовують одне і теж зображення.
2. Знайти клас неперервних ніде не монотонних функцій з простою залежністю  $Q_2$ -цифр значення функції від  $Q_2$ -цифр значення аргумента. Вивчити їх структурні, варіаційні та диференціальні властивості.
3. Описати клас  $S$  функцій, залежність  $Q_2$ -цифр значення функції яких визначається послідовністю фінітних функцій, означених на прямому добутку алфавітів, і ланцюгом скріплених пар послідовних  $Q_2$ -цифр аргумента.
4. Для функцій класу  $S$  знайти форму їх адекватного опису через алгебраїчні структури, а також дати вичерпну відповідь про наявність у цьому класі неперервних функцій.
5. Для окремих представників класу  $S$  вивчити структурні і фрактальні властивості, а також лебегівську структуру розподілів їх значень при рівномірному розподілі аргумента.

6. З'ясувати, чи можливо для випадкової величини  $\xi$ , яка має експоненційний розподіл на відрізку знайти  $Q_2$ -зображення (відмінне від класичного двійкового) при якому  $Q_2$ -цифри випадкової величини  $\xi$  будуть неперервними.
7. З'ясувати, при яких умовах функція розподілу випадкової величини з незалежними цифрами свого  $Q_2$ -зображення має додатну похідну на деякому відрізку.

**Методи дослідження.** У роботі використовувалися методи математичного аналізу, теорії функцій, теорії ймовірностей, теорії фракталів (фрактальної геометрії та фрактального аналізу), метричної та ймовірнісної теорії чисел.

#### **Наукова новизна отриманих результатів.**

1. Описано структурні, варіаційні, інтегро-диференціальні та фрактальні властивості континуального класу неперервних ніде не монотонних функцій, означених в термінах одного  $Q_2$ -зображення, що мають нескінченні множини екстремумів, як в  $Q_2$ -бінарних точках, так і в  $Q_2$ -унарних точках. Отримано умови ніде не диференційовності функцій. При заданому  $Q_2$ -зображенні чисел доведено існування восьми конструкцій функцій з аналогічними властивостями.
2. Описано інтегро-диференціальні властивості інверсора  $Q_2^*$ -зображення чисел — функції, яка всі цифри  $Q_2^*$ -зображення аргумента змінює на протилежні.
3. Конструктивно описано клас функцій, визначених послідовностями фінітних функцій, що набувають значень з алфавіту  $Q_2^*$ -зображення.
4. Для представників пар двоїстих функцій, визначених сталими послідовностями фінітних функцій описано структурні та фрактальні властивості, а також розподіли їх значень.
5. Доведено, що цифри  $Q_2$ -зображення випадкової величини з експо-

ненційним розподілом на відрізку  $[0; 1]$  є незалежними тоді і тільки тоді, коли  $Q_2$ -зображення є класичним двійковим зображенням, причому розподіли її цифр визначаються геометричною прогресією зі знаменником  $\frac{1}{2}$ .

**Практичне значення отриманих результатів.** Робота носить в основному теоретичний характер, отримані результати можуть бути використані в подальших дослідженнях, а також при вивченні математичних об'єктів з фрактальними властивостями, означення яких використовують двосимвольне кодування дійсних чисел, відмінне від  $Q_2^*$ -зображення.

**Особистий внесок здобувача.** Всі результати дослідження, які вносяться на захист, отримані автором самостійно. У спільних публікаціях науковому керівнику належить постановка задач, перевірка результатів і деякі ідеї обґрунтування фактів.

**Апробація матеріалів дисертації.** Основні результати дослідження доповідалися на наукових конференціях різного рівня та наукових семінарах. Це такі конференції:

- Відкриті еволюціонуючі системи. IV Міжнародна науково-практична конференція відкриті еволюціонуючі системи, Україна, Ніжин 20–21 05. 2017 р.
- Шоста Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики, 21-22 квітня 2017, Київ.
- Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», Київ, Україна, 13-14 грудня 2017 р.
- International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008). June 7 – 1, 2017, Kyiv, Ukraine.
- Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих

- науках і інформаційних технологіях, Чернівці, 17-19 вересня 2018 р.
- Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations: Abstracts. – Kyiv: National Pedagogical Drahomanov University and Institution of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, 2018.
  - Сьома Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики, Київ, 19-20 квітня 2018 р.
  - International conference. Modern stochastics: theory and applications. IV. Kyiv, Ukraine, May 24-26, 2018.
  - Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання» Київ. 23 травня 2019 р.
  - International Conference of Young Mathematics. Kyiv, Ukraine. June 6–8, 2019.
  - IX Всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, Київ, 10-11 квітня 2020 р.
  - V Міжнародна науково-практична конференція «Відкриті еволюційні системи», Київ, 19-21 травня 2020 р.
  - International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach. Lviv, Ukraine. 18-23 september 2017.
  - The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky. Vinnytsia: Vasyl' Stus Donetsk National University, July 02-06, 2019.
  - IX Всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, Київ, 10–11 квітня 2020 р.
  - V Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Відкриті еволюційні системи», Україна, Київ. 19–21 травня 2020 р.

Це такі семінари:

- семінар з фрактального аналізу відділу теорії динамічних систем та

фрактального аналізу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз-мат наук, проф. М. В. Працьовитий).

**Публікації.** Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 6-и наукових працях. П'ять з яких [47, 59, 45, 46, 9] є статтями у наукових виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України, дві [9, 44] з яких входять до міжнародних наукометричних баз даних Scopus.

**Структура та обсяг дисертації.** Робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків до кожного розділу, загальних висновків, списку використаних джерел (72 найменування) і додатка, що містить публікації автора (20 найменувань). Загальний обсяг роботи — 144 сторінки.

**Подяка.** Щиру безмежну вдячність висловлюю своєму Наставнику, Вчителю, Науковому Керівнику доктору фізико-математичних наук, професору **Миколі Вікторовичу Працьовитому** за постановку задач, постійну увагу, підтримку та віру.

## РОЗДІЛ 1

### ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І КОНЦЕПТУАЛЬНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У цьому вступному розділі ми наводимо означення ключових понять і формулювання базових фактів, які будуть використовуватись у наступних розділах, проводимо огляд літератури і конкретизуємо завдання дослідження.

#### 1.1. $\mathbb{Q}_2^*$ -зображення як узагальнення класичного двійкового

Нехай  $A = \{0, 1\}$  — алфавіт двійкової системи числення,  $L = A \times A \times \dots$  — простір послідовностей нулів та одиниць. Нагадаємо [39], що *кодуванням чисел* відрізка  $[0; 1]$  засобами алфавіту  $A = \{0, 1\}$  називається сюр'єктивне відображення  $g$  множини  $L$  в  $[0; 1]$

$$L \ni (\alpha_n) \xrightarrow{g} x \in [0; 1].$$

При цьому послідовність  $(\alpha_n)$  називається  *$g$ -зображенням* числа  $x$ , що записується:  $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^g$ . Найпростішим кодуванням чисел відрізка  $[0; 1]$  є їх класичне двійкове зображення, яке ґрунтується на розкладі числа у двійковий ряд:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^k} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^2.$$

Нехай задано нескінченну стохастичну матрицю  $\|q_{ik}\|$  з двома рядками і нескінченною кількістю стовпців, яка має властивості:

- 1)  $q_{ik} > 0$ ,  $q_{0k} + q_{1k} = 1$ ;
- 2)  $\prod_{k=1}^{\infty} \max\{q_{0k}, q_{1k}\} = 0$ .

Покладемо  $\beta_{0k} \equiv 0$ ,  $\beta_{1k} \equiv q_{0k}$ ,  $\beta_{2k} \equiv 1$  для будь-якого  $k \in N$ .

**Теорема 1.1 ([70]).** Для будь-якого  $x \in [0; 1]$  існує послідовність  $(\alpha_n) \in L$  нулів та одиниць така, що

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\beta_{\alpha_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j j}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_2^*}. \quad (1.1)$$

**Означення 1.1.** Розклад числа  $x \in [0; 1]$  в ряд (1.1) називається його  $Q_2^*$ -представленням, а скорочений запис  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_2^*}$  —  $Q_2^*$ -зображенням. При цьому  $\alpha_k = \alpha_k(x)$  називається  $k$ -ою цифрою цього зображення.

*Зауваження 1.1.*  $Q_2^*$ -зображення є двосимвольним кодуванням чисел одиничного відрізка, зокрема дробової частини дійсного числа. При  $q_{ik} = q_i$  для будь-якого  $k \in N$   $Q_2^*$ -зображення є  $Q_2$ -зображенням [52], тому воно є узагальненням  $Q_2$ -зображення, а отже, і класичного двійкового зображення [38]. Для будь-якого  $m \in N$  матриця  $\|q_{in}\|_{n=m}^{\infty}$ , утворена з матриці  $\|q_{in}\|$ , задовольняє початкові вимоги до останньої і породжує своє  $Q_2^*(m)$ -зображення.

Однією з найпростіших задач, яка приводить до поняття  $Q_2^*$ -зображення чисел, є задача про аналітичний вираз функції розподілу випадкової величини з незалежними (взагалі кажучи, різнорозподіленими) цифрами свого двійкового зображення [52].

**Лема 1.1 ([70]).** Для довільного набору  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  нулів та одиниць виконується рівність

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m 1(0)}^{Q_2^*} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m 0(1)}^{Q_2^*}. \quad (1.2)$$

**Лема 1.2 ([70]).** Числа  $x_1 = \Delta_{c_1 \dots c_m 0 d_1 d_2 \dots}^{Q_2^*}$  і  $x_2 = \Delta_{c_1 \dots c_m 1 d'_1 d'_2 \dots}^{Q_2^*}$  перебувають у відношенні  $x_1 \leq x_2$ , а коли існує  $d_n - d'_n \neq 1$  — у відношенні  $x_1 < x_2$ .

**Наслідок 1.1 ([70]).** Якщо  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2^*} = x_1 < x_2 = \Delta_{\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_n \dots}^{Q_2^*}$ , то існує  $m$  таке, що  $0 = \alpha_m \neq \alpha'_m = 1$ , але  $\alpha_i = \alpha'_i$  при  $i < m$ .

**Теорема 1.2 ([70]).** Існує зліченна множина чисел, що мають два  $Q_2^*$ -зображення (це числа виду (1.2)). Всі решта чисел відрізка  $[0; 1]$  мають єдине  $Q_2^*$ -зображення.

**Означення 1.2.** Числа, які мають єдине  $Q_2^*$ -зображення називаються  $Q_2^*$ -унарними, а ті числа, що мають два  $Q_2^*$ -зображення —  $Q_2^*$ -бінарними.

Геометрію  $Q_2^*$ -зображення чисел, зокрема геометричний зміст цифр, достатньо повно розкривають властивості циліндрів.

Циліндром рангу  $m$  з основою  $c_1c_2\dots c_m$  називається множина  $\Delta_{c_1c_2\dots c_m}^{Q_2^*}$  всіх точок  $x \in [0; 1]$ , які мають  $Q_2^*$ -зображення  $\Delta_{c_1c_2\dots c_m}^{Q_2^*}\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\dots$ ,  $\alpha_{m+i} \in A$ . Циліндр  $\Delta_{c_1c_2\dots c_m}^{Q_2^*}$  є відрізком  $[a; b]$  з кінцями:

$$a = \beta_{\alpha_1,1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\beta_{\alpha_k,k} \prod_{j=1}^{k-2} q_{\alpha_j,j}), \quad b = a + \prod_{j=1}^m q_{\alpha_j,j}.$$

$Q_2^*$ -циліндри володіють такими властивостями:

- 1)  $\Delta_{c_1\dots c_m}^{Q_2^*} = \Delta_{c_1\dots c_m 0}^{Q_2^*} \cup \Delta_{c_1\dots c_m 1}^{Q_2^*}$ ;
- 2)  $[0; 1] = \bigcup_{c_1 \in A} \dots \bigcup_{c_m \in A} \Delta_{c_1\dots c_m}^{Q_2^*}$ ;
- 3) для  $\forall (c_n)$ :  $\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1\dots c_m}^{Q_2^*} = \Delta_{c_1\dots c_m \dots}^{Q_2^*}$ ;
- 4) якщо  $c_i = b_i$ ,  $i = 1, m$ , то  $\Delta_{c_1\dots c_m}^{Q_2^*} \cap \Delta_{b_1\dots b_m\dots b_k}^{Q_2^*} = \Delta_{b_1\dots b_m\dots b_k}^{Q_2^*}$ ;
- 5)  $\max \Delta_{c_1c_2\dots c_m}^{Q_2^*}(0) = \min \Delta_{c_1c_2\dots c_m}^{Q_2^*}(1)$ ;
- 6)  $|\Delta_{c_1c_2\dots c_m}^{Q_2^*}| = \prod_{i=1}^m q_{c_i i}$ ;
- 7)  $\frac{|\Delta_{c_1c_2\dots c_m i}^{Q_2^*}|}{|\Delta_{c_1c_2\dots c_m}^{Q_2^*}|} = q_{i,m+1}$ .

**Означення 1.3.** Множина  $\nabla_{c_1\dots c_m}^{Q_2^*}$ , що є внутрішністю циліндра  $\Delta_{c_1\dots c_m}^{Q_2^*}$ , називається *циліндричним  $Q_2^*$ -інтервалом рангу  $m$  з основою  $c_1c_2\dots c_m$* .

Очевидним є твердження: кожне  $Q_2^*$ -бінарне число є кінцем нескінченної кількості циліндрів різних рангів, починаючи з деякого. Найменший ранг такого циліндра називатимемо рангом  $Q_2^*$ -бінарного числа (точки).

Зауважимо, що існує дві послідовності циліндрів, одним з кінців яких є дане  $Q_2^*$ -бінарне число.



## 1.2. Множини канторівського типу додатної міри Лебега

Нехай задана  $(V_n)$  — послідовність непорожніх підмножин алфавіту  $A$ ,  
 $B = \{i : V_i \neq A\}$ ,  $W = \{j_1, \dots, j_k, \dots\} = N \setminus B$ ,  $j_{k+1} > j_k$ .

**Теорема 1.3.** Множина  $C[Q_2^*, V_n] = \{x : \alpha_n(x) \in V_n \subseteq A\}$  є

- 1) об'єднанням  $Q_2^*$ -циліндрів рангу  $n_0$ , якщо  $V_n = A$  для всіх  $n \geq n_0$ ,
- 2) ніде не щільною множиною, якщо  $V_n \neq A$  для нескінченної кількості значень  $n \in N$ , міра Лебега якої обчислюється за формулою

$$\lambda(C) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q_{j_k}).$$

**Наслідок 1.2.** Якщо ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} q_{i_k}$  збігається, то міра Лебега множини  $C[Q_2^*, V_n]$  є додатною, а коли розбігається — дорівнює нулю.

**Лема 1.3.** Якщо матриця  $Q_2^* = \|q_{in}\|$  має властивість:

$\sum_{n=1}^{\infty} q_{0n}q_{0,n+1} < \infty$  і послідовність  $(q_{0n})$  строго спадає, то множина  $D[Q_2^*; \overline{00}]$  всіх чисел відрізка  $[0; 1]$ ,  $Q_2^*$ -зображення яких немає пари  $00$  серед послідовних цифр має додатну міру Лебега.

## 1.3. $Q_2^*$ -зображення і розмірність Гаусдорфа-Безиковича

Для довільної обмеженої множини  $E \subset \mathbb{R}^1$  і для довільних  $\alpha > 0$  і  $\varepsilon > 0$  означається величина

$$m_{\varepsilon}^{\alpha}(E) = \inf_{|u_i| \leq \varepsilon} \left\{ \sum_i |u_i|^{\alpha} \right\},$$

де інфімум береться за всіма не більш як зліченими  $\varepsilon$ -покриттями множини  $E$  відрізками  $u_i$ .

**Означення 1.4.** Невід'ємне число

$$H_{\alpha}(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m_{\varepsilon}^{\alpha}(E) = \sup_{\varepsilon > 0} m_{\varepsilon}^{\alpha}(E) \quad (1.3)$$

називається  $\alpha$ -мірною мірою Гаусдорфа множини  $E$ .

Функція множини  $m_{\varepsilon}^{\alpha}(E)$  має властивості:

**Теорема 1.4.** Міра Гаусдорфа має властивості:

1.  $H^\alpha\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \sum_i H^\alpha(E_i)$ ;
2. Якщо  $\alpha_1 < \alpha_2$ , то  $H^{\alpha_1}(E) \geq H^{\alpha_2}(E)$ ;
3. Якщо  $H^{\alpha_1}(E) = 0$ , то  $H^{\alpha_2}(E) = 0$  при  $\alpha_1 < \alpha_2$ ;
4. Якщо  $H^{\alpha_2}(E) = \infty$ , то  $H^{\alpha_1}(E) = \infty$  при  $0 < \alpha_1 < \alpha_2$ .

**Означення 1.5.** Множина  $E \subset \mathbb{R}^1$  називається  $\mu^*$ -вимірною (вимірною по відношенню до зовнішньої міри  $\mu^*$ ), якщо для довільного  $A \subset \mathbb{R}^1$

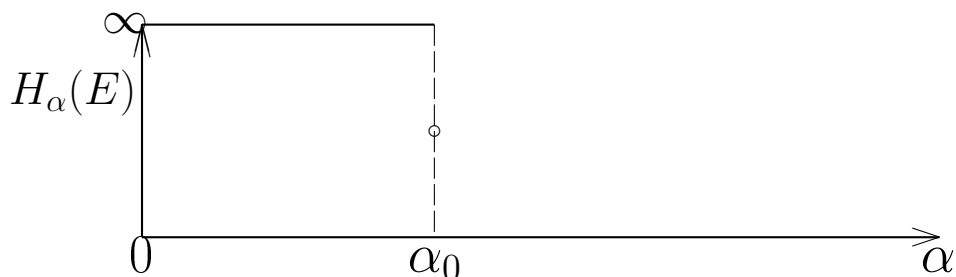
$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \bar{E}) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E).$$

*Зауваження 1.2.* На класі  $H^\alpha$ -вимірних множин зовнішня  $\alpha$ -мірна міра Гаусдорфа є зчисленно-адитивною, тобто є мірою.

**Означення 1.6.** Невід'ємне число

$$\alpha_0(E) = \sup\{\alpha : H_\alpha(E) = +\infty\} = \inf\{\alpha : H_\alpha(E) = 0\}$$

називається *розмірністю Гаусдорфа-Безиковича множини  $E$*



При  $\alpha = 1$  міра Гаусдорфа співпадає з зовнішньою мірою Лебега, а тому розмірність Гаусдорфа-Безиковича множин додатної міри Лебега рівна 1. Розмірність є показником масивності множини та «компактності» її точок.

**Теорема 1.5.** Розмірність Гаусдорфа-Безиковича має властивості:

1.  $\alpha_0(E) = 0$  для довільної не більш ніж зчисленної множини  $E$ ;
2.  $\alpha_0(E_1) \leq \alpha_0(E_2)$ , якщо  $E_1 \subset E_2$ ;
3.  $\alpha_0\left(\bigcup_n E_n\right) = \sup_n \alpha_0(E_n)$ ;
4. Якщо  $E_1$  і  $E_2$  — геометрично подібні, то  $\alpha_0(E_1) = \alpha_0(E_2)$ .

**Означення 1.7.** Множини, що мають дробову розмірність Гаусдорфа-Безиковича, називаються *фрактальними (фракталами)*. Ті нуль-множини Лебега простору  $\mathbb{R}^1$ , розмірність Гаусдорфа-Безиковича яких дорівнює 1, називаються *суперфракталами*, а континуальні множини, що мають нульову розмірність Гаусдорфа-Безиковича, називаються *аномально фрактальними*.

**Теорема 1.6.** Для того щоб компакт  $C$  мав нульову  $\alpha$ -мірну міру Гаусдорфа, необхідно і досить, щоб для кожного  $\varepsilon > 0$  існував скінченний розклад компакта  $C = u_1 \cup \dots \cup u_k$  такий, що

$$|u_1|^\alpha + \dots + |u_k|^\alpha < \varepsilon, \quad (1.4)$$

де  $|u_i| = \sup_{x,y \in u_i} |x - y|$  — діаметр множини  $u_i$ .

**Лема 1.4 ([56]).** Якщо  $E$  — СП-множина і існує таке  $\alpha$ , що  $0 < H_\alpha(E) < \infty$ , то її розмірність Хаусдорфа-Безиковича рівна самоподібній розмірності, тобто  $\alpha_0(E) = \alpha_s(E)$ .

**Теорема 1.7 ([56]).** Якщо  $E$  — обмежена замкнена СП-множина простору  $\mathbb{R}^1$ , то її самоподібна розмірність дорівнює розмірності Хаусдорфа-Безиковича.

**Лема 1.5 ([56]).** При визначенні розмірності Хаусдорфа-Безиковича множини  $E \subset [0, 1]$  можна обмежитись покриттями двійковими циліндрами, тобто означення розмірності Хаусдорфа-Безиковича, що ґрунтується на покриттях двійковими циліндрами, є еквівалентним означенню 1.6.

Нехай задано  $Q_2^*$ -зображення чисел проміжка  $[0; 1]$ ,  $W_{Q^*}$ -множина всіх  $Q_2^*$ -циліндрів,  $[0; 1] \supset E$  — фіксована множина,  $1 \geq \alpha$  — додатне число,  $\varepsilon > 0$ . Покладемо

$$l_\varepsilon^\alpha(E) \equiv \inf_{|\omega_i| \leq \varepsilon} \left\{ \sum_i |\omega_i|^\alpha : E \subset \bigcup_i \omega_i, \omega_i \in W_{Q^*} \right\},$$

де  $|\omega_i|$  — довжина циліндра  $\omega_i$ , а нижня грань береться за всеможливими покриттями множини  $E$   $Q_2^*$ -циліндрами, довжини яких не перевищують  $\varepsilon$ .

Очевидно, що числа  $l_\varepsilon^\alpha(E)$  і  $m_\varepsilon^\alpha(E)$ , взагалі кажучи, різні ( $l_\varepsilon^\alpha(E) \geq m_\varepsilon^\alpha(E)$ , оскільки у клас всеможливих покриттів множини  $E$  відрізками входить клас покриттів  $Q_2^*$ -циліндрами). Не дивлячись на це, функції  $H^\alpha(E)$  і  $L^\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l_\varepsilon^\alpha(E)$  змінної  $\alpha$  набувають значень 0 та  $\infty$  одночасно. А це є підставою вважати, що при визначенні розмірності Гаусдорфа–Безиковича довільної множини  $E \subset [0; 1]$  можна обмежитись покриттями множини  $E$   $Q_2^*$ -циліндрами. Цей висновок є наслідком наступного твердження.

**Теорема 1.8 ([56]).** *Якщо  $\inf_k \min_i \{q_{ik}\} > b > 0$ , то для будь-яких  $E \subset [0; 1]$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $\varepsilon > 0$  виконується подвійна нерівність*

$$m_\varepsilon^\alpha(E) \leq l_\varepsilon^\alpha(E) \leq 2(2^m + 1) \cdot m_\varepsilon^\alpha(E), \quad (1.5)$$

де  $m \in \mathbb{N}$  — найменше число, що задовольняють нерівність  $(1 - b) < b$ .

*Зауваження 1.3.* Умови теореми виконуються якщо матриця має асимптотичну властивість.

#### 1.4. Фрактальні властивості функції

Кажуть, що функція має фрактальні властивості, якщо виконується принаймні одна з умов: функція

- 1) має хоча би одну фрактальну множину рівня;
- 2) має фрактальний графік (як множину в  $R^2$ );
- 3) має фрактальну множину несталості;
- 4) має фрактальну множину особливостей (диференціального або іншого характеру);
- 5) трансформує фрактальну розмірність принаймні однієї борелівської підмножини відрізка  $[0; 1]$ ;

- 6) її розподіл значень при рівномірному розподілі аргумента зосереджений на фракталі;
- 7) тощо.

### 1.5. Лебегівська структура і спектральні властивості розподілів випадкових величин

Нагадаємо [34], що лебегівською структурою ймовірнісної міри  $\mu$  і її відповідної функції розподілу  $F_\mu(x) = \mu\{(-\infty; x)\}$  називаються розклади  $\mu(\cdot) = \alpha_1\mu_d(\cdot) + \alpha_2\mu_{ac}(\cdot) + \alpha_3\mu_s(\cdot)$ ,  $F_\mu(x) = \alpha_1F_d(x) + \alpha_2F_{ac}(x) + \alpha_3F_s(x)$ , де  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ ,  $\mu_d$ ,  $\mu_{ac}$ ,  $\mu_s$  — дискретна (чисто атомарна), абсолютно неперервна, сингулярна (ортогональна мірі Лебега) ймовірнісні міри (компоненти) відповідно;  $F_d$  — функція стрибків,  $F_{ac}$  — абсолютно неперервна функція,  $F_s$  — сингулярно неперервна функції розподілу.

Якщо один з коефіцієнтів  $\alpha_i = 1$ , то кажуть, що ймовірнісна міра (функція розподілу) має чистий лебегівський тип (чисто дискретний, якщо  $\alpha_1 = 1$ , чисто абсолютно неперервний, якщо  $\alpha_2 = 1$ , чисто сингулярний, якщо  $\alpha_3 = 1$ ). У протилежному випадку, кажуть, що міра (функція розподілу) є нетривіальною сумішшю тих компонент, біля яких коефіцієнт відмінний від нуля.

Встановити структуру розподілу ймовірностей (ймовірнісної міри, функції розподілу випадкової величини) означає знайти його лебегівський розклад (знайти вирази мір  $\mu_d$ ,  $\mu_{ac}$ ,  $\mu_s$  або функцій  $F_d$ ,  $F_{ac}$ ,  $F_s$  і обчислити коефіцієнти  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ).

Структура і властивості розподілу випадкової величини  $\xi = \Delta_{\xi_1\xi_2\dots\xi_n\dots}^{Q_2}$ , цифри  $Q_2$ -зображення якої є незалежними і набувають значень 0 і 1 з ймовірностями  $p_{0n}$  і  $p_{1n} \equiv 1 - p_{0n}$  відповідно, в значній мірі є вивченим [52, 56].

**Теорема 1.9 ([52, 56]).** *Випадкова величина  $\xi$  має чистий лебегівський тип розподілу, а саме:*

1) чисто дискретний (і навіть вироджений) тоді і тільки тоді, коли

$$M \equiv \prod_{n=1}^{\infty} \max \{p_{0n}, p_{1n}\} > 0;$$

2) абсолютно неперервний (навіть рівномірний) тоді і лише тоді, коли

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^1 (1 - \frac{p_{in}}{q_i})^2 < \infty \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^0 \sqrt{p_{ik} \cdot q_{ik}}) > 0$$

3) чисто сингулярний тоді і тільки тоді, коли  $M = 0$  і  $K = \infty$ .

У випадку неперервності вираз функції розподілу випадкової величини  $\xi$  має вигляд:

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \rho_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\rho_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\alpha_j(x)j}), & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \quad (1.6)$$

де  $\alpha_k(x)$  —  $k$ -та цифра  $Q_2$ -зображення числа  $x$ ,  $\rho_{0k} = 0$ ,  $\rho_{1k} = p_{0k}$ . В цьому випадку функція розподілу  $F_{\xi}(x)$ , при умові  $0 < p_0 < 1$ , породжує нове  $Q'_2$ -зображення ( $Q'_2 = \{p_0; p_1\}$ ) чисел відрізка  $[0; 1]$ .

**Лема 1.6.** Якщо  $\xi$  — випадкова величина з заданим розподілом на відрізку  $[0; 1]$ , то цифра  $\xi_n$  її  $Q_2$ -зображення  $\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots}^{Q_2}$  є випадковою величиною, причому

$$P\{\xi_n = i\} = P\{\xi \in \bigcup_{c_1 \in A} \dots \bigcup_{c_{n-1} \in A} \Delta_{c_1 \dots c_{n-1} i}^{Q_2}\}. \quad (1.7)$$

*Доведення.* Справді, оскільки  $\xi$  — вимірна функція на  $[0; 1]$ , тобто така, що для будь-якого дійсного  $x$  множина  $\{\omega : \xi(\omega) < x\}$  є борелівською, то очевидно, що множина  $\{u : \xi_n(u) = i \in A\}$  борелівська. При цьому вказана ймовірність є наслідком рівності подій

$$\{\alpha_n(x) = i\} = \{x \in \bigcup_{c_1 \in A} \dots \bigcup_{c_{k-1} \in A} \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} i}^{Q_2}\}. \quad \square$$

Традиційними задачами по відношенню до розвитку ймовірнісної теорії дійсних чисел і теорії сингулярних розподілів, є задачі:

- 1) вивчити розподіли цифр  $\xi_k$  зображення  $\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots}^{Q_2}$  випадкової величини  $\xi$  за наперед заданим її розподілом;
- 2) вивчити розподіл випадкової величини  $\xi$  за заданими розподілами її цифр  $\xi_k$  у певному зображенні.

Ще донедавна сингулярні міри (як і сингулярні функції) представляли найменш вивчений клас з трьох існуючих класів чистих лебегівських типів мір. Сьогодні є актуальною задача: знайти природну нішу існування нетривіальних сумішей сингулярних розподілів (ймовірнісних мір) з іншими. «Перспективними» в цьому відношенні є розподіли значень фрактальних функцій випадкових величин [50]. Разом з цим, методологія дослідження таких об'єктів поки що бідна.

У теорії розподілів випадкових величин, зокрема сингулярних, продуктивним є поняття спектра розподілу. Відомо, що спектр є замкненою множиною, яка не містить ізольованих точок.

**Означення 1.8.** Спектром ймовірнісної міри  $\mu$  (розподілу випадкової величини  $\xi$ , що відповідає мірі  $\mu$  і має функцію розподілу  $F_\xi$ ) називається множина

$$S_\mu \equiv S_\xi = \{x : P\{\xi \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\} > 0, \varepsilon > 0\} = \\ = \{F_\xi(x + \varepsilon) - F_\xi(x - \varepsilon) > 0, \varepsilon > 0\}.$$

Множина  $S_\mu$  є мінімальною замкненою множиною, на якій зосереджена міра ( $\mu(R \setminus S_\mu) = 0$ ). Тому спектр ще називають топологічним носієм міри  $\mu$ . Якщо  $\mu$  є неперервною мірою, то  $S_\mu$  є доскональною.

## РОЗДІЛ 2

## КЛАС НЕПЕРЕРВНИХ НІДЕ НЕ МОНОТОННИХ ФУНКЦІЙ, ОЗНАЧЕНИХ В ТЕРМІНАХ $Q_2^*$ -ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

Цей розділ присвячений континуальному класу неперервних нідє не монотонних функцій, які свого максимального і мінімального значення на  $Q_2$ -циліндрі набувають не обов'язково на його кінцях. Тут вивчаються варіаційні, інтегро-диференціальні, автомодельні та фрактальні властивості функцій, зокрема «симетрії» їх графіків.

### 2.1. Означення об'єкта дослідження

Розглядається функція  $r$ , означена рівністю

$$r(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k} \dots}^{Q_2}) = \Delta_{r_1 r_2 \dots r_k \dots}^{Q_2}, \quad (2.1)$$

де

$$r_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } (\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0), \\ 1, & \text{якщо } (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0), \end{cases}$$

$$r_{k+1} = \begin{cases} r_k, & \text{якщо } (\alpha_{2k+1}, \alpha_{2k+2}) = (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}), \\ 1 - r_k, & \text{якщо } (\alpha_{2k+1}, \alpha_{2k+2}) \neq (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}). \end{cases}$$

**Лема 2.1.** *Означення функції  $r$  рівністю (2.1) є коректним, оскільки виконується рівність  $r(\Delta_{c_1 \dots c_m 1(0)}^{Q_2}) = r(\Delta_{c_1 \dots c_m 0(1)}^{Q_2})$ .*

*Доведення.* Розглянемо можливі випадки: 1)  $m = 2k$ ; 2)  $m = 2k - 1$  окремо.

1) Нехай  $m = 2k$  і  $r(\Delta_{c_1 \dots c_m 1(0)}^{Q_2}) = \Delta_{b_1 \dots b_k b(1-b)}^{Q_2}$ .



Якщо  $(c_{2k-1}, c_{2k}) = (1, 0)$ , то  $(c_{2k-1}, c_{2k}) \neq (0, 1)$ , а отже,

$$r(\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} c_{2k} 0(1)}^{Q_2}) = \Delta_{b_1 \dots b_k [1-b_k](b_k)}^{Q_2} = r(\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} c_{2k} 1(0)}^{Q_2}).$$

Якщо  $(c_{2k-1}, c_{2k}) \neq (1, 0)$ , а  $(c_{2k-1}, c_{2k}) = (0, 1)$ , то

$$r(\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} c_{2k} 0(1)}^{Q_2}) \neq \Delta_{b_1 \dots b_k [1-b_k](b_k)}^{Q_2} = r(\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} c_{2k} 1(0)}^{Q_2}).$$

Якщо  $(c_{2k-1}, c_{2k}) \neq (1, 0)$  і  $(c_{2k-1}, c_{2k}) = (0, 1)$ , то

$$r(\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} c_{2k} 0(1)}^{Q_2}) = \Delta_{b_1 \dots b_k b_k (1-b_k)}^{Q_2} = r(\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} c_{2k} 1(0)}^{Q_2}).$$

2) Нехай  $m = 2k - 1$ . Тоді  $r(\Delta_{c_1 \dots c_{2k-2} c_{2k-1} 1(0)}^{Q_2}) = \Delta_{b_1 \dots b_{k-1} b_k (1-b_k)}^{Q_2}$ , а оскільки,  $(c_{2k-1}, 0) \neq (1, 1)$ , то

$$r(\Delta_{c_1 \dots c_{2k-2} c_{2k-1} 0(1)}^{Q_2}) = \Delta_{b_1 \dots b_{k-1} [1-b_k](b_k)}^{Q_2}.$$

Отже,  $r(\Delta_{c_1 \dots c_{2k-2} c_{2k-1} 0(1)}^{Q_2}) = r(\Delta_{c_1 \dots c_{2k-2} c_{2k-1} 1(0)}^{Q_2})$ . Коректність означення функції  $r$  обґрунтовано. Лему доведено.  $\square$

**Лема 2.2.** *Образом  $Q_2$ -бінарної точки при відображенні  $r \in Q_2$ -бінарна точка. Значення  $y_0 = r(x)$  функції  $r \in Q_2$ -бінарним числом тоді і тільки тоді, коли  $Q_2$ -зображення числа  $x$  має період з двох цифр.*

*Доведення.* Перша частина твердження є очевидною.

Нехай  $y_0 = \Delta_{b_1 \dots b_k 0(1)}^{Q_2} = \Delta_{b_1 \dots b_k 1(0)}^{Q_2}$  і  $r(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k} \dots}^{Q_2}) = y_0$ . Безпосередньо з означення функції  $r$  маємо

$$b_1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0) \text{ і } b_{j+1} = b_j \Leftrightarrow (\alpha_{2j+1}, \alpha_{2j+2}) = (\alpha_{2j-1}, \alpha_{2j}).$$

Тому  $(\alpha_{2k+3}, \alpha_{2k+4}) \neq (\alpha_{2k+1}, \alpha_{2k+2})$ , але  $(\alpha_{2n+1}, \alpha_{2n+2}) = (\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n})$  для всіх  $n > k+2$ , тобто  $Q_2$ -зображення числа  $x$  є періодичним, причому період утворює дві цифри.

Обернене твердження (якщо  $Q_2$ -зображення числа  $x$  має період з двох цифр, то число  $y = r(x)$  є  $Q_2$ -бінарним) є очевидним. Це впливає безпосередньо з означення функції  $r$ . Лему доведено.  $\square$

*Зауваження 2.1.* Якщо другу умову в означенні функції  $r$  замінити умовою

$$\varphi : \begin{cases} 1 - r_k, & \text{якщо } (\alpha_{2k+1}, \alpha_{2k+2}) = (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}), \\ r_k, & \text{якщо } (\alpha_{2k+1}, \alpha_{2k+2}) \neq (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}), \end{cases}$$

то означення функції втратить коректність, оскільки

$$r(\Delta_{00(1)}^2) = \Delta_{00(10)}^{Q_2} \neq r(\Delta_{01(0)}^{Q_2}) = \Delta_{11(01)}^{Q_2}.$$

При цьому, добившись коректності означення домовленістю використовувати лише одне з двох існуючих зображень  $Q_2$ -бінарного числа, отримати неперервність функції неможливо.

## 2.2. Неперервність та ніде не монотонність функції

**Теорема 2.1.** *Функція  $r$  є неперервною і ніде не монотонною. Її множиною значень є відрізок  $[0; 1]$ .*

*Доведення.* Нехай  $x_0 = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}^{Q_2}$  —  $Q_2$ -унарна точка відрізка  $[0; 1]$  і  $y_0 = r(x_0) = \Delta_{b_1 b_2 \dots b_k \dots}^{Q_2}$ ,  $x_0 \neq x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{m-1} [1-c_m] \alpha_{m+1} \dots}^{Q_2}$ ,  $2k$  — найбільше число, що не перевищує  $m$ . Тоді

$$\begin{aligned} |r(x) - r(x_0)| &= |\Delta_{b_1 \dots b_k b b_{k+2} \dots}^{Q_2} - \Delta_{b_1 b_2 \dots b_k [1-b] \bar{b}_{k+1} \bar{b}_{k+2} \dots}^{Q_2}| = \\ &= \left( \prod_{i=1}^k q_{b_i} \right) |\Delta_{b b_{k+2} b_{k+3} \dots}^{Q_2} - \Delta_{[1-b] \bar{b}_{k+2} \bar{b}_{k+3}}^{Q_2}| \leq \\ &\leq (\max\{q_0, q_1\})^k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty \Leftrightarrow x \rightarrow x_0). \end{aligned}$$

Оскільки  $r(0) = r(\Delta_{(0)}^{Q_2}) = \Delta_{(0)}^{Q_2} = 0$ ,  $r(1) = r(\Delta_{(1)}^{Q_2}) = \Delta_{(1)}^{Q_2} = 1$ , то множиною значень функції  $r$  є відрізок  $[0; 1]$ .

Неперервність функції  $r$  у довільній  $Q_2$ -бінарній точці  $x_0 = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 0(1)}^{Q_2} = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 1(0)}^{Q_2}$  є по суті наслідком попередньої леми. Цей висновок можна обґрунтувати детальніше наступними міркуваннями.

Очевидно, що число  $y_0 = r(x_0)$  має зображення  $\Delta_{b_1 \dots b_k b(1-b)}^{Q_2} = r(\Delta_{c_1 \dots c_m 0(1)})$  і  $\Delta_{b_1 \dots b_k [1-b](b)}^{Q_2} = r(\Delta_{c_1 \dots c_m 1(0)})$ , де  $k = \frac{1}{2}m$ , якщо  $m$  — парне,  $k = \frac{1}{2}(m + 1)$ , якщо  $m$  — не парне.

Якщо число  $x < x_0$  і достатньо близьке до  $x_0$ , то воно має зображення  $\Delta_{c_1 \dots c_m 0 \underbrace{1 \dots 1}_{2n+1} d_1 d_2 \dots}$ . Тоді очевидно, що  $x \rightarrow x_0$  рівносильно  $n \rightarrow \infty$  і

$$|r(x) - r(x_0)| < q_b \cdot q_{1-b}^n \prod_{i=1}^k q_{b_i} \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow x \rightarrow x_0.$$

Отже, функція  $r$  неперервна в точці  $x_0$  зліва.

Якщо число  $x > x_0$  і достатньо близьке до  $x_0$ , то воно має зображення  $\Delta_{c_1 \dots c_m 1 \underbrace{0 \dots 0}_{2n+1} e_1 e_2 \dots}$ . Тоді очевидно, що  $x \rightarrow x_0$  рівносильно  $n \rightarrow \infty$ . А тому

$$|r(x) - r(x_0)| < q_{1-b} \cdot q_b^n \prod_{i=1}^k q_{b_i} \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow x \rightarrow x_0.$$

Отже, функція  $r$  неперервна в точці  $x_0$  справа. Неперервність функції доведено.

Для доведення ніде не монотонності функції досить показати, що функція не є монотонною в довільному циліндрі парного рангу (з довільною основою). Для цього розглянемо циліндр  $\Delta_{c_1 \dots c_{2k}}^{Q_2}$  і точки  $x_1 = \Delta_{c_1 \dots c_{2k} d_1 d_2 10(01)}$ ,  $x_2 = \Delta_{c_1 \dots c_{2k} d_1 d_2 10(10)}$ ,  $x_3 = \Delta_{c_1 \dots c_{2k} d_1 d_2 10(1101)}$ , де  $(d_1, d_2) \neq (1, 0)$  і їм відповідні значення функції:

$$y_1 = r(x_1) = \Delta_{b_1 \dots b_k b[1-b](b)}^{Q_2},$$

$$y_2 = r(x_2) = \Delta_{b_1 \dots b_k b(1-b)}^{Q_2},$$

$$y_3 = r(x_3) = \Delta_{b_1 \dots b_k (b[1-b])}^{Q_2}.$$

Очевидно, що  $x_1 < x_2 < x_3$ . Якщо  $b = 0$ , то  $y_1 < y_3 < y_2$ . Тоді добуток  $(y_2 - y_1)(y_3 - y_2) < 0$ .

Якщо  $b = 1$ , то  $y_2 < y_3 < y_1$  і  $(y_2 - y_1)(y_3 - y_2) < 0$ . Тому функція  $r$  на циліндрі  $\Delta_{c_1 \dots c_{2k}}^{Q_2}$  не є монотонною, а отже не має жодного проміжку монотонності.  $\square$

**Наслідок 2.1.** *На кожному  $Q_2$ -циліндрі функція  $r$  досягає свого найбільшого і найменшого значення.*

Нагадаємо, що *інверсором* цирф  $Q_2$ -зображення чисел (або просто інверсором  $Q_2$ -зображення) називається функція  $I$ , означена на відрізку  $[0; 1]$  рівністю

$$I(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}) = \Delta_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2] \dots [1-\alpha_n] \dots}^{Q_2}.$$

Відомо [51], що функція  $I$  є коректно-означеною, неперервною, строго спадною сингулярною функцією (тобто її похідна рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега).

*Зауваження 2.2.* Дві функції

$$f(x) = I(r(x)) \text{ і } g(x) = r(I(x))$$

як суперпозиції двох неперервних функцій є неперервними і різними. Вони мають властивості, схожі з властивостями функції  $r$ .

### 2.3. Множини рівнів функції

**Лема 2.3.** *Образом  $Q_2$ -циліндра парного рангу  $2k$  при відображенні  $y = r(x)$  є  $Q_2$ -циліндр рангу  $k$ .*

*Доведення.* Розглянемо циліндр  $\Delta_{c_1 \dots c_{2k}}^{Q_2}$  і точку  $x_0 = \Delta_{c_1 \dots c_{2k} \alpha_{2k+1} \alpha_{2k+2} \dots}^{Q_2}$ , що йому належить. Нехай  $y_0 = r(x_0) = \Delta_{b_1 \dots b_k a_1 \dots a_m \dots}^{Q_2}$ . Очевидно, що число  $y_0$  належить циліндру  $\Delta_{b_1 \dots b_k}^{Q_2}$ . Покажемо, що в  $\Delta_{c_1 \dots c_{2k}}^{Q_2}$  існують точки  $x_1$  і  $x_2$  такі, що  $f(x_1) = \Delta_{b_1 \dots b_k(0)}^{Q_2}$ ,  $f(x_2) = \Delta_{b_1 \dots b_k(1)}^{Q_2}$ . Це в силу неперервності функції  $r$  завершить доведення.

Якщо  $b_k = 0$ , то взявши  $(\alpha_{2n+1}, \alpha_{2n+2}) = (c_{2k-1}, c_{2k})$  для всіх  $n \geq k$ , отримаємо  $x_1 = \Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} c_{2k} (c_{2k-1} c_{2k})}^{Q_2}$ , для якої  $r(x_1) = \Delta_{b_1 \dots b_{k-1} b_k(0)}^{Q_2}$ . А взявши

$(\alpha_{2n+1}, \alpha_{2n+2}) = (c_{2k-1}, 1 - c_{2k})$  для всіх  $n$  таких, що  $n \geq k$ , отримаємо  $x_2 = \Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} c_{2k} (c_{2k-1} [1 - c_{2k}])}^{Q_2}$ , для якої  $r(x_2) = \Delta_{b_1 \dots b_{k-1} b_k(1)}^{Q_2}$ .

Якщо  $b_k = 1$ , то вибір періоду для цифр чисел  $x_1$  і  $x_2$  слід зробити протилежним:  $x_1 = \Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} c_{2k} (c_{2k-1} [1 - c_{2k}])}^{Q_2}$  і  $x_2 = \Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} c_{2k} (c_{2k-1} c_{2k})}^{Q_2}$ .  $\square$

**Лема 2.4.** Прообразом циліндра  $\Delta_{b_1 \dots b_k}^{Q_2}$  є кожен з циліндрів  $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}}^{Q_2}$ ,

$$de \overline{\alpha_1 \alpha_2} = \begin{cases} \overline{00}, & \text{якщо } b_1 = 0, \\ \overline{c_1 d_1} \neq \overline{00}, & \text{якщо } b_1 = 1; \end{cases}$$

$$\overline{\alpha_{2i-1} \alpha_{2i}} = \begin{cases} \overline{\alpha_{2i-3} \alpha_{2i-2}}, & \text{якщо } b_i = b_{i-1}, \\ \overline{c_i d_i} \neq \overline{\alpha_{2i-3} \alpha_{2i-2}}, & \text{якщо } b_i \neq b_{i-1}; \end{cases} \quad i = \overline{2, k}.$$

Кількість  $t$  прообразів циліндра  $\Delta_{b_1 \dots b_k}^{Q_2}$  при відображенні  $r$  обчислюється за формулою

$$t = t(\Delta_{b_1 \dots b_k}^{Q_2}) = \begin{cases} 3^{N_k}, & \text{якщо } b_1 = 0, \\ 3^{N_k+1}, & \text{якщо } b_1 \neq 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

$N_k = \#\{i : b_{i+1} \neq b_i, i = \overline{1, k-1}\}$  – кількість  $i$ , для яких  $b_{i+1} \neq b_i$ .

*Доведення.* Перша частина твердження впливає безпосередньо з означення функції  $r$  і попередньої леми. Використаємо метод математичної індукції. Очевидно, що прообразами циліндра  $\Delta_0^{Q_2}$  є циліндр  $\Delta_{00}^{Q_2}$ , а циліндра  $\Delta_1^{Q_2}$  є циліндри:  $\Delta_{01}^{Q_2}$ ,  $\Delta_{10}^{Q_2}$ ,  $\Delta_{11}^{Q_2}$ . Циліндри 2-го рангу мають такі прообрази:

- 1)  $\Delta_{00}^{Q_2} - \Delta_{0000}^{Q_2}$ ;
- 2)  $\Delta_{01}^{Q_2} - \Delta_{0001}^{Q_2}, \Delta_{0010}^{Q_2}, \Delta_{0011}^{Q_2}$ ;
- 3)  $\Delta_{10}^{Q_2} - \Delta_{0100}^{Q_2}, \Delta_{0110}^{Q_2}, \Delta_{0111}^{Q_2}, \Delta_{1000}^{Q_2}, \Delta_{1001}^{Q_2}, \Delta_{1011}^{Q_2}, \Delta_{1100}^{Q_2}, \Delta_{1101}^{Q_2}, \Delta_{1110}^{Q_2}$ ;
- 4)  $\Delta_{11}^{Q_2} - \Delta_{0101}^{Q_2}, \Delta_{1010}^{Q_2}, \Delta_{1111}^{Q_2}$ .

Отже, для  $k = 1$  і 2 рівність (2.2) виконується.

Припустимо, що вона виконується для  $k = n$  і розглянемо  $k = n + 1$ , а саме циліндр  $\Delta_{b_1 \dots b_n b_{n+1}}^{Q_2}$  рангу  $n + 1$ . Згідно з припущенням кількість прообразів циліндра  $\Delta_{b_1 \dots b_n}^{Q_2}$  дорівнює  $3^{N_k}$ , якщо  $b_1 = 0$ , і  $3^{N_k+1}$ , якщо  $b_1 = 1$ .

Якщо  $b_{n+1} = b_n$ , то зрозуміло, що кількість прообразів циліндрів  $\Delta_{b_1 \dots b_n}^{Q_2}$  і  $\Delta_{b_1 \dots b_n b_{n+1}}^{Q_2}$  однакова.

Якщо ж  $b_{n+1} \neq b_n$ , то  $m(\Delta_{b_1 \dots b_n b_{n+1}}^{Q_2}) = 3 \cdot m(\Delta_{b_1 \dots b_n}^{Q_2})$ , тобто рівність (2.2) виконується і в цьому випадку. Лемму доведено.  $\square$

**Теорема 2.2.** *Множина  $Q_2$ -бінарного рівня є скінченною, а кожна множина  $Q_2$ -унарного рівня функції  $r$  є континуальною, ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.*

*Доведення.* Розглянемо довільну  $Q_2$ -унарну точку

$$y_0 = \Delta_{\underbrace{0 \dots 0}_{a_1} \underbrace{1 \dots 1}_{b_1} \underbrace{0 \dots 0}_{a_2} \underbrace{1 \dots 1}_{b_2} \dots \underbrace{0 \dots 0}_{a_n} \underbrace{1 \dots 1}_{b_n} \dots}^{Q_2}, \text{ де } a_1 \in Z_0; a_{i+1}, b_i \in N.$$

Ясно, що множині  $y_0^{-1}$  рівня  $y_0$  належить кожна точка виду

$$x = \Delta_{\underbrace{0 \dots 0}_{2a_1} \underbrace{ab \dots ab}_{2b_1} \underbrace{cd \dots cd}_{2a_2} \underbrace{ab \dots ab}_{2b_2} \dots}^{Q_2},$$

де  $(a, b) \neq (0, 0)$ ,  $(c, d) \neq (a, b)$ . А множина таких точок очевидно є континуальною, оскільки на нескінченній кількості місць цифр існує принаймні три альтернативи.

Розглянемо  $Q_2$ -бінарний рівень  $y_0 = \Delta_{b_1 \dots b_k 1(0)}^{Q_2} = \Delta_{b_1 \dots b_k 0(1)}^{Q_2}$ . Очевидно, що множина  $y_0^{-1}$  рівня  $y_0$  збігається з множиною точок виду

$$x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k-1} \alpha_{2k} a_1 a_2 (c_1 c_2)}^{Q_2} \quad (2.3)$$

і

$$x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k-1} \alpha_{2k} d_1 d_2 (e_1 e_2)}^{Q_2}, \quad (2.4)$$

де  $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0)$  якщо  $b_1 = 0$  і  $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ , якщо  $b_1 = 1$

$(\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}) = (\alpha_{2n-3}, \alpha_{2n-2})$ , якщо  $b_n = b_{n-1}$  і

$(\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}) \neq (\alpha_{2n-3}, \alpha_{2n-2})$ , якщо  $b_n \neq b_{n-1}$ .  $\square$

**Наслідок 2.2.** *Кожна множина  $Q_2$ -бінарного рівня*

$$y_0 = \Delta_{b_1 b_2 \dots b_k 1(0)}^{Q_2} = \Delta_{b_1 b_2 \dots b_k 0(1)}^{Q_2}$$

складається з  $2 \cdot 3^{N_k + b_1 + 1}$ , де  $N_k = \#\{i : b_{i+1} \neq b_i, i = \overline{1, k-1}\}$  – кількість  $i$ , для яких  $b_{i+1} \neq b_i$ .

**Теорема 2.3.** Якщо  $E_n$  – множина, що є об'єднанням відрізків, і  $E_{n+1} \subset E_n$  для  $n \in N$ , то міра Лебега множини  $E = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$  обчислюється за формулою

$$\lambda(E) = \lambda(E_1) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(E_{n+1})}{\lambda(E_n)} = \lambda(E_1) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(E_n \setminus E_{n+1})}{\lambda(E_n)}\right). \quad (2.5)$$

*Доведення.* Оскільки  $E_{n+1} \subset E_n$ , то  $\lambda(E_{n+1}) \leq \lambda(E_n)$ ,

$$\begin{aligned} \lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(E_n) = \\ &= \lambda(E_1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(E_n)}{\lambda(E_{n-1})} \cdot \frac{\lambda(E_{n-1})}{\lambda(E_{n-2})} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda(E_2)}{\lambda(E_1)} = \\ &= \lambda(E_1) \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda(E_{i+1})}{\lambda(E_i)} = \lambda(E_1) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(E_{n+1})}{\lambda(E_n)}. \end{aligned}$$

Оскільки  $E_{n+1} = E_n \setminus (E_n \setminus E_{n+1})$ , то  $\lambda(E_{n+1}) = \lambda(E_n) - \lambda(E_n \setminus E_{n+1})$ . Тоді

$$\begin{aligned} \lambda(E) &= \lambda(E_1) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(E_n) - \lambda(E_n \setminus E_{n+1})}{\lambda(E_n)} = \\ &= \lambda(E_1) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(E_n \setminus E_{n+1})}{\lambda(E_n)}\right). \quad \square \end{aligned}$$

**Наслідок 2.3.** При виконанні умов теореми

$$\lambda(E) = 0 \Leftrightarrow S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(E_n \setminus E_{n+1})}{\lambda(E_n)} = \infty;$$

$$\lambda(E) > 0 \Leftrightarrow S < \infty.$$

**Теорема 2.4.** Множина

$r(y_0)^{-1} = \{x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{Q_2}, \text{ де } (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0), (\alpha_{2k+1}, \alpha_{2k+2}) \neq (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k})\}$   
рівня  $y_0 = \Delta_{(10)}^{Q_2}$  функції  $r$  є найбільш масивною. Вона є континуальною, ніде не щільною, має міру Лебега нуль.

*Доведення.* Покажемо, що множина  $r(y_0)^{-1}$  континуальна. Для цього встановимо взаємно однозначну відповідність  $g(y_0^{-1}) = [0; 1]$  між точками

даної множини і точками  $x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^2$  відрізка  $[0; 1]$ :

$$g(c_i) : \begin{cases} 0, & \text{якщо } (\alpha_{2i}(y_0^{-1}), \alpha_{2i+1}(y_0^{-1})) = (0, 0), \\ 1, & \text{якщо } (\alpha_{2i}(y_0^{-1}), \alpha_{2i+1}(y_0^{-1})) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Відповідність  $g$  дає підстави стверджувати, що потужність множини рівня  $y_0 = \Delta_{(10)}^{Q_2}$  є континуальною.

Нехай  $(\alpha; \beta)$  — деякий інтервал з  $[0; 1]$ . Легко вказати  $Q_2$ -циліндр парного рангу  $\Delta_{c_1 \dots c_{2k}}^{Q_2}$ , який повністю належить  $(\alpha; \beta)$ . Тоді циліндричний інтервал  $\nabla_{c_1 \dots c_{2k} c_{2k-1} c_{2k}}^{Q_2}$  не містить точок множини  $r^{-1}(y_0)$ . Отже,  $r^{-1}(y_0)$  є ніде не щільною згідно з означенням.

Міра Лебега множини  $r^{-1}(y_0)$  обчислюється за формулою (2.5):

$$\lambda(r^{-1}(y_0)) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{k+1})}{\lambda(F_k)} = \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\lambda(\overline{F}_{k+1})}{\lambda(F_k)} \right), \quad (2.6)$$

де  $F_k$  — множина  $Q_2$ -циліндрів рангу  $k$ , серед внутрішніх точок яких є точки множини  $r^{-1}(y_0)$ ,  $\overline{F}_{k+1} \equiv F_k \setminus F_{k+1}$ .

Для довільного набору  $(c_1, c_2, \dots, c_m)$  нулів та одиниць виконується

$$0 < A \leq \min \frac{|\Delta_{c_1 \dots c_{2k} ij}^{Q_2}|}{|\Delta_{c_1 \dots c_{2k}}^{Q_2}|} \leq \frac{\lambda(\overline{F}_{k+1})}{\lambda(F_k)} \leq \max \frac{|\Delta_{c_1 \dots c_{2k} ij}^{Q_2}|}{|\Delta_{c_1 \dots c_{2k}}^{Q_2}|} \leq B < 1,$$

де  $A = \min\{q_0^2, q_0 q_1, q_1^2\}$ ,  $B = \max\{q_0^2, q_0 q_1, q_1^2\}$ .

Нескінченний добуток (2.6) рівний нулю тоді і тільки тоді, коли ряд  $\sum \frac{\lambda(\overline{F}_{k+1})}{\lambda(F_k)}$  розбігається. А це гарантує умова  $\frac{\lambda(\overline{F}_{k+1})}{\lambda(F_k)} > \min\{q_0^2, q_0 q_1, q_1^2\}$ , яка засвідчує порушення необхідної умови збіжності останнього ряду.  $\square$

**Наслідок 2.4.** Міра Лебега множини  $r^{-1}(y_0)$  рівня  $y_0 = \Delta_{b_1 b_2 \dots b_n}^{Q_2}$  при  $b_m \neq b_{m+1}$  функції  $r$  рівна нулю

$$r^{-1}(y_0) = \{x \in [0; 1] : r(x) = y_0\} = C[Q_2; (\alpha_{2m-1} \alpha_{2m}) \neq (\alpha_{2m+1} \alpha_{2m+2})].$$

## 2.4. Варіаційні властивості функції

**Теорема 2.5.** Функція  $r$  має необмежену варіацію.



*Доведення.* Коливання (різниця максимуму і мінімуму) функції  $r$  на  $Q_2$ -циліндрі парного рангу дорівнює довжині його образу, тому варіація  $V(r)$  функції  $r$  є більшою ніж сумарна довжина образів  $V_k$  усіх  $Q_2$ -циліндрів рангу  $2k$  для будь-якого  $k \in N$ , тобто

$$V(r) > V_k = \sum_{\alpha_1=0}^1 \sum_{\alpha_2=0}^1 \dots \sum_{\alpha_{2k}=0}^1 |r(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k}}^{Q_2})|.$$

Враховуючи, що існує лише один  $Q_2$ -циліндр 2-го рангу  $\Delta_{00}^{Q_2}$ , що є образом циліндра 2-го рангу  $\Delta_{0000}^{Q_2}$ , а решта циліндрів є образом принаймні трьох циліндрів 4-го рангу, то

$$V_2 > 3 - |r(\Delta_{0000}^{Q_2})| = 3 - 2q_0^2.$$

Аналогічно міркуючи стосовно довільного циліндра  $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_8}^{Q_2}$  8-го рангу, отримуємо

$$V_4 > (3 - 2q_0^2)^2.$$

За індукцією  $V_{4k} > (3 - 2q_0^2)^k$ . Але  $3 - 2q_0^2 > 1$ , тому  $\lim_{k \rightarrow \infty} V_{4k} = \infty$ , отже,  $r$  — функція необмеженої варіації.  $\square$

**Лема 2.5.** *Нехай  $r(\Delta_{c_1 \dots c_{2k}}^{Q_2}) = \Delta_{b_1 \dots b_k}^{Q_2}$ . Якщо  $b_k = 0$ , то функція  $r$  найбільшого значення на циліндрі  $\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} c_{2k}}^{Q_2}$  досягає в трьох точках, а найменшого в одній, якщо ж  $b_k = 1$ , то навпаки, а саме: при  $b_k = 1$  маємо*

$$\max_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_{2k}}^{Q_2}} r(x) = r(\Delta_{c_1 \dots c_{2k} (c_{2k-1} c_{2k})}^{Q_2}), \quad \min_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_{2k}}^{Q_2}} r(x) = r(\Delta_{c_1 \dots c_{2k} (ab)}^{Q_2}),$$

де  $(a, b) \neq (c_{2k-1}, c_{2k})$ , а при  $b_k = 0$  маємо:

$$\min_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_{2k}}^{Q_2}} r(x) = r(\Delta_{c_1 \dots c_{2k} (c_{2k-1} c_{2k})}^{Q_2}), \quad \max_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_{2k}}^{Q_2}} r(x) = r(\Delta_{c_1 \dots c_{2k} (ab)}^{Q_2}),$$

де  $(a, b) \neq (c_{2k-1}, c_{2k})$ .

Справді, якщо  $b_k = 0$ , то

$$r(\Delta_{c_1 \dots c_{2k} (ab)}^{Q_2}) = \Delta_{b_1 \dots b_{k-1} 0(1)}^{Q_2} = \max \Delta_{b_1 \dots b_{k-1} b_k}^{Q_2},$$

$$r(\Delta_{c_1 \dots c_{2k}(c_{2k-1}c_{2k})}^{Q_2}) = \Delta_{b_1 \dots b_{k-1}(0)}^{Q_2} = \min \Delta_{b_1 \dots b_{k-1}b_k}^{Q_2}.$$

Якщо  $b_k = 1$ , то

$$r(\Delta_{c_1 \dots c_{2k}(c_{2k-1}c_{2k})}^{Q_2}) = \Delta_{b_1 \dots b_{k-1}(1)}^{Q_2} = \max \Delta_{b_1 \dots b_{k-1}b_k}^{Q_2},$$

$$r(\Delta_{c_1 \dots c_{2k}(ab)}^{Q_2}) = \Delta_{b_1 \dots b_{k-1}1(0)}^{Q_2} = \min \Delta_{b_1 \dots b_{k-1}b_k}^{Q_2}.$$

## 2.5. Диференціальні властивості функції

Легко довести, що коли існує скінченна похідна функції  $y = r(x)$  в точці  $x_0 = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k} \dots}^{Q_2}$ , то вона обчислюється за формулою

$$r'(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k-1} \alpha_{2k}(1)}^{Q_2}) - r(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k-1} \alpha_{2k}(0)}^{Q_2})}{|\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k-1} \alpha_{2k}}^{Q_2}|}. \quad (2.7)$$

Тому відсутність скінченної границі

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|r(\Delta_{\alpha_1(x_0) \dots \alpha_{2k-1}(x_0) \alpha_{2k}(x_0)}^{Q_2})|}{|\Delta_{\alpha_1(x_0) \dots \alpha_{2k-1}(x_0) \alpha_{2k}(x_0)}^{Q_2}|},$$

де  $|r(\Delta_{\alpha_1(x_0) \dots \alpha_{2k-1}(x_0) \alpha_{2k}(x_0)}^{Q_2})|$  — коливання (різниця найбільшого і найменшого значення) функції  $r$  на циліндрі  $\Delta_{\alpha_1(x_0) \dots \alpha_{2k}(x_0)}^{Q_2}$ , є аргументом для висновку: функція в точці  $x_0$  не має похідної.

Якщо  $x_0 = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k} \dots}^{Q_2}$  і  $r(x_0) = \Delta_{b_1 b_2 \dots b_k \dots}^{Q_2}$ , то

$$\frac{|r(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k}}^{Q_2})|}{|\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k}}^{Q_2}|} = \frac{|\Delta_{b_1 b_2 \dots b_k}^{Q_2}|}{|\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k}}^{Q_2}|} = \prod_{i=1}^k \frac{q_{b_i}}{q_{\alpha_{2i-1}} q_{\alpha_{2i}}}.$$

Тому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|r(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k}}^{Q_2})|}{|\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k}}^{Q_2}|} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{q_{b_k}}{q_{\alpha_{2k-1}} q_{\alpha_{2k}}}.$$

Відношення  $\frac{q_{b_i}}{q_{\alpha_{2i-1}} q_{\alpha_{2i}}}$  може набувати не більше чотирьох значень. Справді,  $\frac{q_0}{q_0 q_1} = \frac{q_1}{q_1^2} = \frac{1}{q_1} > 1$ ,  $\frac{q_1}{q_0 q_1} = \frac{q_0}{q_0^2} = \frac{1}{q_0} > 1$ ,  $\frac{q_0}{q_1^2}$ ,  $\frac{q_1}{q_0^2}$ . Тому має місце наступне твердження.

**Теорема 2.6.** Якщо  $q_0 > q_1^2$  і  $q_1 > q_0^2$ , що рівносильно  $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < q_0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , то функція  $r$  є ніде не диференційовною (не має скінченної похідної у жодній точці).

**Наслідок 2.5.** Якщо  $q_0 = \frac{1}{2}$ , то функція  $r$  є ніде не диференційовною.

Вивчимо детальніше диференційовні властивості функції  $r$  при послаблених умовах на  $q_0$  на предмет наявності нескінченної похідної.

**Теорема 2.7.** Якщо  $x_0 \in [0; 1]$  є  $Q_2$ -унарним числом, причому точкою максимуму або точкою мінімуму функції  $r$ , то в цій точці функція  $r$  не має похідної (ні скінченної, ні нескінченної).

*Доведення.* 1) Якщо  $x_0 = \Delta_{a_1 \dots a_{2k}}^{Q_2}$  — точка максимуму функції  $r$ , тобто існує таке  $\varepsilon > 0$ , що значення функції  $r$  в кожній точці  $\varepsilon$ -околу  $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$  точки  $x_0$  не перевищує  $y_0$ , то існує такий номер  $k$ , що циліндр  $\Delta_{a_1 \dots a_{2k}}^{Q_2}$ , який містить точку  $x_0$ , повністю належить інтервалу  $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ . Тоді  $x_0$  є точкою найбільшого значення функції на всіх циліндрах  $\Delta_{a_1 \dots a_{2k} a_{2k+1} \dots a_{2(k+n)}}^{Q_2}$ ,  $n \in N$  і  $r(x_0) = \Delta_{b_1 \dots b_k(1)}^{Q_2}$ ,  $x_0 = \Delta_{a_1 \dots a_{2k}(cd)}^{Q_2}$ , де  $(0, 0) \neq (c, d) \neq (1, 1)$ .

Нехай  $x_n$  — точка найменшого значення функції  $r$  на циліндрі  $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_{2(k+n)}}^{Q_2}$ . Очевидно, що  $x_n \rightarrow x_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ),

$$r(x_0) - r(x_n) = |\Delta_{b_1 \dots b_k \underbrace{1 \dots 1}_n}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^k q_{b_i} \right) \cdot q_1^n,$$

$$|x_0 - x_n| < |\Delta_{a_1 \dots a_{2k} \underbrace{cd \dots cd}_{2n}}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^k q_{a_{2i-1}} q_{a_{2i}} \right) \cdot (q_c q_d)^n.$$

Тоді

$$\frac{r(x_0) - r(x_n)}{|x_n - x_0|} > \prod_{i=1}^k \frac{q_{b_i}}{q_{a_{2i-1}} q_{a_{2i}}} \left( \frac{q_1}{q_c q_d} \right)^n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty),$$

оскільки  $\frac{q_1}{q_c q_d}$  дорівнює  $\frac{1}{q_0}$  або  $\frac{1}{q_1}$ . Отже,  $r'(x_0)$  не існує.

2) Аналогічно доводиться твердження у другому випадку.

Якщо  $x_0 = \Delta_{a_1 \dots a_{2k}}^{Q_2}$  — точка мінімуму функції  $r$ , тобто  $r(x_0) \leq r(x)$  при всіх  $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$  для деякого  $\varepsilon > 0$ , то існує таке  $k \in N$ , що

$\Delta_{a_1 \dots a_{2k}}^{Q_2} \subset (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ . Тоді  $x_0$  є точкою найменшого значення функції  $r$  на всіх циліндрах  $\Delta_{a_1 \dots a_{2k} a_{2k+1} \dots a_{2(k+n)}}^{Q_2}$ ,  $n \in N$ . При цьому  $x_0 = \Delta_{a_1 \dots a_{2k}(cd)}^{Q_2}$  і  $r(x_0) = \Delta_{b_1 \dots b_k(0)}^{Q_2}$ , а оскільки  $x_0$  —  $Q_2$ -унарне число, то  $(0; 0) \neq (c, d) \neq (1, 1)$ .

Нехай  $x_n$  — точка найбільшого значення функції  $r$  на циліндрі  $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_{2(k+n)}}^{Q_2}$ . Очевидно, що  $x_n \rightarrow x_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ),

$$r(x_n) - r(x_0) = |\Delta_{b_1 \dots b_k \underbrace{0 \dots 0}_n}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^k q_{b_i} \right) \cdot q_0^n$$

$$|x_n - x_0| < |\Delta_{a_1 \dots a_{2k} \underbrace{cd \dots cd}_{2n}}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^k q_{a_{2i-1}} q_{a_{2i}} \right) \cdot (q_c q_d)^n.$$

Але  $(c, d) \in \{(0; 1), (1; 0)\}$ , тоді  $\frac{q_0}{q_c q_d} > 1$  і

$$\frac{r(x_n) - r(x_0)}{|x_n - x_0|} > \left( \prod_{i=1}^k \frac{q_{b_i}}{q_{a_{2i-1}} q_{a_{2i}}} \right) \left( \frac{q_0}{q_c q_d} \right)^n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty).$$

Тому в жодному з випадків 1) і 2) не існує скінченної границі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r(x_n) - r(x_0)}{x_n - x_0},$$

а отже, і скінченної похідної  $r'(x_0)$ .

Оскільки  $x_0$  — точка екстремуму функції, то  $r(x_0) = \Delta_{b_1 \dots b_k(b)}$ , причому є точкою максимуму, якщо  $b = 1$ , і точкою мінімуму, якщо  $b = 0$ . Але тоді  $x_0$  має таке  $Q_2$ -зображення  $\Delta_{c_1 \dots c_{2k}(cd)}$ , причому  $(0, 0) \neq (c, d) \neq (1, 1)$ , оскільки за умовою  $x_0$  —  $Q_2$ -унарне число. Кожен циліндр, достатньо великого рангу, який містить точку  $x_0$ , має вигляд  $\Delta_{c_1 \dots c_{2k} \underbrace{cd \dots cd}_{2n}}^{Q_2} = [u_n; v_n]$ , де  $u_n = \Delta_{c_1 \dots c_{2k} \underbrace{cd \dots cd}_{2n}(0)}^{Q_2}$ ,  $v_n = \Delta_{c_1 \dots c_{2k} \underbrace{cd \dots cd}_{2n}(1)}^{Q_2}$ . Тоді згідно з означенням функції  $r(u_n) = r(v_n)$  і  $\frac{r(u_n) - r(v_n)}{u_n - v_n} = 0$  для будь-якого  $n \in N$ . Тому, враховуючи попередні висновки і попереднє зауваження, констатуємо: функція  $r$  в точці  $x_0$  не має ні скінченної, ні нескінченної похідної. Теорему доведено.  $\square$

**Теорема 2.8.** *Функція  $r$  не має скінченної похідної в жодній  $Q_2$ -бінарній точці, причому якщо  $Q_2$ -бінарна точка є точкою екстремуму функції, то в ній функція немає ні скінченної, ні нескінченної похідної.*

*Доведення.* Нехай  $x_0 = \Delta_{c_1 \dots c_m 1(0)}^{Q_2} = \Delta_{c_1 \dots c_m 0(1)}^{Q_2}$  — довільна  $Q_2$ -бінарна точка. Можливі випадки: 1)  $m = 2k$ , 2)  $m = 2k - 1$ . Розглянемо їх окремо.

1) Нехай  $m = 2k$  і  $r(\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 1(0)}^{Q_2}) = \Delta_{b_1 \dots b_k b(1-b)}^{Q_2}$ ,  $r(\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 0(1)}^{Q_2}) = \Delta_{b_1 \dots b_k d(1-d)}^{Q_2}$ .

1.1. Якщо  $b = 0 = d$ , то  $x_0$  — точка максимального значення функції на циліндрах

$$\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 10 \underbrace{0 \dots 0}_{2n}}^{Q_2}, \quad (2.8)$$

$$\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 01 \underbrace{1 \dots 1}_{2n}}^{Q_2}, \quad n \in N. \quad (2.9)$$

Нехай  $x_n$  — точка найменшого значення функції  $r$  на циліндрі  $\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 10 \underbrace{0 \dots 0}_{2n}}^{Q_2}$ , а  $\bar{x}_n$  — точка найменшого значення функції на циліндрі  $\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 01 \underbrace{1 \dots 1}_{2n}}^{Q_2}$ . Тоді

$$r(x_n) = \Delta_{b_1 \dots b_k 0 \underbrace{1 \dots 1}_n(0)}^{Q_2} = r(\bar{x}_n),$$

$$r(x_0) - r(x_n) = r(x_0) - r(\bar{x}_n) = |\Delta_{b_1 \dots b_k 0 \underbrace{1 \dots 1}_n}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^k q_{b_i} \right) q_0 q_1^n;$$

$$|\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 10 \underbrace{0 \dots 0}_{2n+2}}^{Q_2}| < x_n - x_0 < |\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 10 \underbrace{0 \dots 0}_{2n}}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^k q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}} \right) q_1 q_0^{2n+1},$$

$$|\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 01 \underbrace{1 \dots 1}_{2n+2}}^{Q_2}| < x_0 - \bar{x}_n < |\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 01 \underbrace{1 \dots 1}_{2n}}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^k q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}} \right) q_0 q_1^{2n+1},$$

$$\left( \prod_{i=1}^k \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}}} \right) \frac{1}{q_1} \left( \frac{q_1}{q_0^2} \right)^n < \frac{r(x_0) - r(x_n)}{x_n - x_0} < \left( \prod_{i=1}^k \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}}} \right) \frac{1}{q_1 q_0^2} \left( \frac{q_1}{q_0^2} \right)^n,$$

$$\frac{r(x_0) - r(\bar{x}_n)}{x_0 - \bar{x}_n} > \left( \prod_{i=1}^k \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}}} \right) \frac{1}{q_1^{n+1}} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

В цьому випадку функція не має ні скінченної, ні нескінченної похідної в точці  $x_0$ .

1.2. Якщо  $b = 1 = 1 - d$ , то  $x_0$  є точкою найменшого значення функції  $r$  на циліндрах  $\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 10 \underbrace{0 \dots 0}_{2n}}^{Q_2}$  і найбільшого значення — на циліндрах  $\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 01 \underbrace{1 \dots 1}_{2n}}^{Q_2}$ ,  $n \in N$ .

Нехай  $x_n$  — точка найбільшого значення функції  $r$  на циліндрі  $\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 10 \underbrace{0 \dots 0}_{2n}}^{Q_2}$ , а  $\bar{x}_n$  — точка найменшого значення функції на циліндрі  $\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 01 \underbrace{1 \dots 1}_{2n}}^{Q_2}$ . Тоді

$$r(x_n) = \Delta_{b_1 \dots b_k 1 \underbrace{0 \dots 0}_n}^{Q_2}; \quad r(\bar{x}_n) = \Delta_{b_1 \dots b_k 0 \underbrace{1 \dots 1}_n}^{Q_2},$$

$$r(x_n) - r(x_0) = |\Delta_{b_1 \dots b_k 1 \underbrace{0 \dots 0}_n}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^k q_{b_i} \right) q_1 q_0^n,$$

$$0 < x_n - x_0 < |\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 10 \underbrace{0 \dots 0}_{2n}}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^{2k} q_{c_i} \right) q_1 q_0^{2n+1},$$

$$\frac{r(x_n) - r(x_0)}{x_n - x_0} > \left( \prod_{i=1}^k \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}}} \right) \frac{1}{q_0^{n+1}} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

Разом з цим

$$r(x_0) - r(\bar{x}_n) = |\Delta_{b_1 \dots b_k 0 \underbrace{1 \dots 1}_n}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^k q_{b_i} \right) q_0 q_1^n,$$

$$|\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 01 \underbrace{1 \dots 1}_{2n+2}}^{Q_2}| < x_0 - \bar{x}_n < |\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 01 \underbrace{1 \dots 1}_{2n}}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^{2k} q_{c_i} \right) \cdot q_0 q_1^{2n+1},$$

$$\frac{r(x_0) - r(\bar{x}_n)}{x_0 - \bar{x}_n} > \left( \prod_{i=1}^k \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}}} \right) \frac{1}{q_1^{n+1}} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

Отже, в цьому випадку функція скінченної похідної не має.

1.3. Якщо  $b = 0 = 1 - d$ , то  $x_0$  є точкою найбільшого значення функції  $r$  на кожному з циліндрів послідовності (2.8) і точкою найменшого значення на кожному з циліндрів послідовності (2.9). Якщо  $x_n$  — точка найменшого значення на циліндрі (2.8), то

$$r(x_0) - r(x_n) = |\Delta_{b_1 \dots b_k 0 \underbrace{1 \dots 1}_n}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^k q_{b_i} \right) q_0 q_1^n,$$

$$|\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 10 \underbrace{0 \dots 0}_{2n+2}}^{Q_2}| < x_n - x_0 < |\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 10 \underbrace{0 \dots 0}_{2n}}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^{2k} q_{c_i} \right) \cdot q_1 q_0^{2n+1},$$

$$\left( \prod_{i=1}^k \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}}} \right) \frac{1}{q_1} \left( \frac{q_1}{q_0^2} \right)^n < \frac{r(x_0) - r(x_n)}{x_n - x_0} < \left( \prod_{i=1}^k \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}}} \right) \frac{1}{q_1 q_0^2} \left( \frac{q_1}{q_0^2} \right)^n.$$

Якщо  $\bar{x}_n$  — точка найбільшого значення функції на циліндрі (2.9), то

$$r(\bar{x}_n) - r(x_0) = |\Delta_{b_1 \dots b_k 1 \underbrace{0 \dots 0}_n}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^k q_{b_i} \right) q_1 q_0^n,$$

$$|\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 01 \underbrace{1 \dots 1}_{2n+2}}^{Q_2}| < x_0 - \bar{x}_n < |\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 01 \underbrace{1 \dots 1}_{2n}}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^{2k} q_{c_i} \right) \cdot q_0 q_1^{2n+1},$$

$$\left( \prod_{i=1}^k \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}}} \right) \frac{1}{q_0} \left( \frac{q_0}{q_1^2} \right)^n < \frac{r(\bar{x}_n) - r(x_0)}{x_0 - \bar{x}_n} < \left( \prod_{i=1}^k \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}}} \right) \frac{1}{q_0 q_1^2} \left( \frac{q_0}{q_1^2} \right)^n.$$

Оскільки  $\frac{q_1}{q_0^2} > 1$  або  $\frac{q_0}{q_1^2} > 1$ , то принаймні одне з відношень  $\frac{r(x_0) - r(x_n)}{x_n - x_0}$  або  $\frac{r(\bar{x}_n) - r(x_0)}{x_0 - \bar{x}_n}$  прямує до нескінченності, коли  $n \rightarrow \infty$ . Це є свідченням того, що  $r'(x_0)$  не існує. Якщо при цьому одне з чисел  $\frac{q_1}{q_0^2} > 1$  або  $\frac{q_0}{q_1^2} > 1$  менше або рівне 1, то функція не має ні скінченної, ні нескінченної похідної.

1.4. Якщо  $b = 1 = d$ , тобто  $r(\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 1(0)}) = \Delta_{b_1 \dots b_k 1(0)}^{Q_2} = r(\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 0(1)})$ , то  $x_0$  — точка найменшого значення функції на циліндрах обох видів (2.8), (2.9). Якщо  $x_n$  — точка найбільшого значення функції  $r$  на циліндрі (2.8), то

$$r(x_n) - r(x_0) = |\Delta_{b_1 \dots b_k 1 \underbrace{0 \dots 0}_n}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^k q_{b_i} \right) q_1 q_0^n,$$

$$|\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 10 \underbrace{0 \dots 0}_{2n+2}}^{Q_2}| < x_n - x_0 < |\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 10 \underbrace{0 \dots 0}_{2n}}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^{2k} q_{c_i} \right) \cdot q_1 q_0^{2n+1},$$

$$\frac{r(x_n) - r(x_0)}{x_n - x_0} > \left( \prod_{i=1}^k \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}}} \right) \frac{1}{q_0^{n+1}} \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty).$$

Якщо  $\bar{x}_n$  — точка найбільшого значення функції  $r$  на циліндрі (2.9), то

$$r(\bar{x}_n) - r(x_0) = |\Delta_{b_1 \dots b_k 1 \underbrace{0 \dots 0}_n}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^k q_{b_i} \right) q_1 q_0^n,$$

$$|\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 01 \underbrace{1 \dots 1}_{2n+2}}^{Q_2}| < x_0 - \bar{x}_n < |\Delta_{c_1 \dots c_{2k} 01 \underbrace{1 \dots 1}_{2n}}^{Q_2}| = \prod_{i=1}^{2k} q_{c_i} \cdot q_0 q_1^{2n+1},$$

$$\left( \prod_{i=1}^k \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}}} \right) \frac{1}{q_0} \left( \frac{q_0}{q_1^2} \right)^n < \frac{r(\bar{x}_n) - r(x_0)}{x_0 - \bar{x}_n} < \left( \prod_{i=1}^k \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}}} \right) \frac{1}{q_0 q_1^2} \left( \frac{q_0}{q_1^2} \right)^n.$$

Отже, у цьому випадку не існує границі (ні скінченної, ні нескінченної) відношення приросту функції до приросту аргумента, при умові, що приріст аргумента прямує до нуля, а тому не існує і похідної.

2) Розглянемо випадок:  $m = 2k - 1$ , тобто точку

$$x_0 = \Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 1(0)}^{Q_2} = \Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 0(1)}^{Q_2}$$

і їй відповідне значення

$$r(\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 1(0)}^{Q_2}) = \Delta_{b_1 \dots b_{k-1} b_k (1-b_k)}^{Q_2}, r(\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 0(1)}^{Q_2}) = \Delta_{b_1 \dots b_{k-1} [1-b_k] (b_k)}^{Q_2}.$$

У цьому випадку  $x_0$  є точкою найбільшого значення функції  $r$  на всіх циліндрах однієї з послідовностей  $\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 1 \underbrace{0 \dots 0}_{2n}}^{Q_2}$  або  $\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{2n}}^{Q_2}$ , а на циліндрах іншої послідовності — точкою найменшого значення.

Якщо  $b_k = 0$ , то  $x_0$  є точкою найбільшого значення функції на кожному з циліндрів першої послідовності і точкою найменшого значення функції на циліндрах другої послідовності.

Якщо  $x_n$  — точка найменшого значення функції на  $\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 1 \underbrace{0 \dots 0}_{2n}}^{Q_2}$ , то



$$r(x_0) - r(x_n) = |\Delta_{b_1 \dots b_{k-1} 0 \underbrace{1 \dots 1}_n}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^{k-1} q_{b_i} \right) q_0 q_1^n,$$

$$|\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 1 \underbrace{0 \dots 0}_{2n+2}}^{Q_2}| < x_n - x_0 < |\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 1 \underbrace{0 \dots 0}_{2n}}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^{k-1} q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}} \right) q_{c_{2k-1}} q_1 q_0^{2n}.$$

Звідки

$$\begin{aligned} \left( \prod_{i=1}^k \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}}} \right) \cdot \frac{q_0}{q_{c_{2k-1}} q_1} \cdot \left( \frac{q_1}{q_0^2} \right)^n &< \frac{r(x_0) - r(x_n)}{x_n - x_0} < \\ &< \left( \prod_{i=1}^k \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}}} \right) \cdot \frac{1}{q_{c_{2k-1}} q_0 q_1} \cdot \left( \frac{q_1}{q_0^2} \right)^n. \end{aligned}$$

Якщо  $\bar{x}_n$  — точка найбільшого значення функції на  $\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{2n}}^{Q_2}$ , то

$$r(\bar{x}_n) - r(x_0) = |\Delta_{b_1 \dots b_{k-1} 1 \underbrace{0 \dots 0}_n}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^{k-1} q_{b_i} \right) q_1 q_0^n,$$

$$|\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{2n+2}}^{Q_2}| < x_0 - \bar{x}_n < |\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{2n}}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^{k-1} q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}} \right) q_{c_{2k-1}} q_0 q_1^{2n}.$$

Звідки

$$\begin{aligned} \left( \prod_{i=1}^k \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}}} \right) \cdot \frac{q_1}{q_{c_{2k-1}} q_0} \cdot \left( \frac{q_0}{q_1^2} \right)^n &< \frac{r(\bar{x}_n) - r(x_0)}{x_0 - \bar{x}_n} < \\ &< \left( \prod_{i=1}^k \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}}} \right) \cdot \frac{1}{q_{c_{2k-1}} q_0 q_1} \cdot \left( \frac{q_0}{q_1^2} \right)^n. \end{aligned}$$

Оскільки принаймні одне з чисел  $\frac{q_1}{q_0}$  або  $\frac{q_0}{q_1}$  більше 1, то одне принаймні з відношень  $\frac{r(x_0) - r(x_n)}{x_0 - x_n}$  або  $\frac{r(\bar{x}_n) - r(x_0)}{\bar{x}_n - x_0}$  прямує до  $-\infty$ , коли  $n \rightarrow \infty$ . Якщо при цьому інше число менше рівне 1, то границя відношень нескінченною бути не може.

Якщо  $b_k = 1$ , то  $x_0$  є точкою найменшого значення функції на кожному з циліндрів послідовності (2.8) і точкою найбільшого значення функції на циліндрах послідовності (2.9).

Якщо  $x_n$  — точка найбільшого значення функції  $r$  на  $\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 1 \underbrace{0 \dots 0}_{2n}}^{Q_2}$ , то

$$r(x_n) - r(x_0) = |\Delta_{b_1 \dots b_{k-1} 1 \underbrace{0 \dots 0}_n}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^{k-1} q_{b_i} \right) q_1 q_0^n,$$

$$|\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 1 \underbrace{0 \dots 0}_{2n+2}}^{Q_2}| < x_n - x_0 < |\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 1 \underbrace{0 \dots 0}_{2n}}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^{k-1} q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}} \right) q_{c_{2k-1}} q_1 q_0^{2n}.$$

Звідки

$$\frac{r(x_n) - r(x_0)}{x_n - x_0} < \prod_{i=1}^{k-1} \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}}} \cdot \frac{1}{q_{c_{2k-1}} q_0^n} \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty).$$

$$\begin{aligned} \left( \prod_{i=1}^k \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}}} \right) \cdot \frac{1}{q_{c_{2k-1}} q_0^n} &< \frac{r(x_n) - r(x_0)}{x_n - x_0} < \\ &< \left( \prod_{i=1}^k \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}}} \right) \cdot \frac{1}{q_{c_{2k-1}} q_0^{n+2}} \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Якщо  $\bar{x}_n$  — точка найменшого значення функції  $r$  на  $\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{2n}}^{Q_2}$ , то

$$r(x_0) - r(\bar{x}_n) = |\Delta_{b_1 \dots b_{k-1} 0 \underbrace{1 \dots 1}_n}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^{k-1} q_{b_i} \right) q_0 q_1^n,$$

$$0 < x_0 - \bar{x}_n \leq |\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{2n}}^{Q_2}| = \left( \prod_{i=1}^{k-1} q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}} \right) q_{c_{2k-1}} q_0 q_1^{2n}.$$

Звідки

$$\frac{r(x_0) - r(\bar{x}_n)}{x_0 - \bar{x}_n} \geq \left( \prod_{i=1}^{k-1} \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}}} \right) \cdot \frac{1}{q_{c_{2k-1}} q_1^n} \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty).$$

Тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r(x_n) - r(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r(x_0) - r(\bar{x}_n)}{x_0 - \bar{x}_n} = \infty.$$

Як бачимо, в усіх випадках похідна функції  $r$  в точці  $x_0$  не існує.  $\square$

**Теорема 2.9.** Якщо  $q_0 = q_1^2$ , що рівносильно  $q_0 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ , або  $q_1 = q_0^2$ , що рівносильно  $q_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , то функція  $r$  не має скінченної похідної в жодній точці.

*Доведення.* Враховуючи теореми 2.7, 2.8, для доведення твердження досить розглянути лише точку  $x_0$ , що є  $Q_2$ -унарним числом, тобто

$$x_0 = \Delta_{Q_2} \underbrace{0 \dots 0}_{d_1} \underbrace{1 \dots 1}_{e_1} \dots \underbrace{0 \dots 0}_{d_n} \underbrace{1 \dots 1}_{e_n} \dots$$

Припустимо, що існує скінченна похідна  $r'(x_0)$ . Тоді вона обчислюється за формулою

$$r'(x_0) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{q_{b_k}}{q_{\alpha_{2k-1}(x_0)} q_{\alpha_{2k}(x_0)}}.$$

При виконанні умов теореми серед множників нескінченного добутку немає жодного, меншого 1. При цьому серед них множників більших числа

$$M = \min \left\{ \frac{1}{q_0}, \frac{1}{q_1}, \frac{q_{1-i}}{q_i^2} \neq 1 \right\} > 1$$

існує нескінченна кількість. Тому добуток є нескінченним, що суперечить скінченності  $r'(x_0)$ . Теорему доведено.  $\square$

## 2.6. Симетрії графіка та інтегральні властивості функції

Функція  $r$  інтегровна на  $[0; 1]$ , оскільки є неперервною. Інтеграл  $\int_0^1 r(x) dx$  дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції. Введемо позначення для частин графіка

$$\Gamma = \{(x; y) : x \in [0; 1], y = r(x)\}$$

функції  $r$ :

$$\Gamma_{ij} = \{(x, y) : x \in \Delta_{ij}^{Q_2}, y = r(x), (i, j) \in A^2\},$$

$$\Gamma_{c_1 \dots c_{2k}} = \{(x; y) : x \in \Delta_{c_1 \dots c_{2k}}^{Q_2}, y = r(x), c_i \in A, i = \overline{1, 2k}\},$$

а також для інтегралів:

$$S = \int_0^1 r(x)dx, \quad S_{ij} = \int_{x \in \Delta_{ij}^{Q_2}} r(x)dx, \quad (i, j) \in A^2.$$

**Лема 2.6.** *Графік  $\Gamma$  функції  $r$  і його частина  $\Gamma_{00}$  афінно-еквівалентні, причому  $\varphi(\Gamma) = \Gamma_{00}$ , де*

$$\varphi : \begin{cases} x' = q_0^2 x, \\ y' = q_0 y. \end{cases}$$

*Доведення.* Нехай  $M(x, y) \in \Gamma$ ,  $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{Q_2}$ ,  $y = r(x) = \Delta_{b_1 b_2 \dots b_k}^{Q_2}$ . Розглянемо образ  $M'(x'; y')$  точки  $M(x, y)$  під дією афінного перетворення  $\varphi$ :  $x' = q_0^2 x = \Delta_{00\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^2$ ,  $y' = q_0 y = \Delta_{0b_1 b_2 \dots b_k}^{Q_2}$ . Очевидно, що  $r(x') = y'$ , а отже,  $M' \in \Gamma_{00}$  і що кожна точка  $M'(x', y') \in \Gamma_{00}$  є образом єдиної точки  $M(x, y) \in \Gamma$ . Лему доведено.  $\square$

**Наслідок 2.6.** *Рівність  $r(q_0^2 x) = q_0 r(x)$  виконується для  $\forall x \in [0; 1]$ .*

**Наслідок 2.7.** *Має місце рівність*

$$\int_0^{q_0^2} r(x)dx = q_0^3 \int_0^1 r(x)dx,$$

зокрема при  $q_0 = \frac{1}{2}$  маємо

$$\int_0^{\frac{1}{4}} r(x)dx = \frac{1}{2^3} \int_0^1 r(x)dx.$$

Альтернативне (аналітичне) обґрунтування останньої рівності:

$$\begin{aligned} \int_0^{q_0^2} r(x)dx &= \int_{x \in \Delta_{00}^{Q_2}} q_0(\beta_{b_2} + \beta_{\alpha_3} q_{\alpha_2} + \dots) d(0 + q_0^2(\beta_{\alpha_3} + \beta_{\alpha_4} q_{\alpha_3} + \dots)) = \\ &= q_0^3 \int_{x \in \Delta_{00}^{Q_2}} (\beta_{b_2} + \beta_{\alpha_3} q_{\alpha_2} + \dots) d(\beta_{\alpha_3} + \beta_{\alpha_4} q_{\alpha_3} + \dots) = q_0^2 \int_0^1 r(x)dx. \end{aligned}$$

**Лема 2.7.** Якщо точка  $M(x, y)$  належить частині  $\Gamma_{00}$  графіка функції  $r$ , тобто  $x = \Delta_{00\alpha_3\alpha_4\dots\alpha_{2k}\dots}^{Q_2}$ ,  $y = r(x) = \Delta_{0b_2b_3\dots b_k\dots}^2$ , то точка  $M'$  з координатами

$$\begin{cases} x' = I(x) = \Delta_{11[1-\alpha_3][1-\alpha_4]\dots[1-\alpha_{2k}]\dots}^2, \\ y' = I(y) = \Delta_{1[1-b_2][1-b_3]\dots[1-b_k]\dots}^{Q_2}, \end{cases}$$

належить частині  $\Gamma_{11}$  і навпаки.

*Доведення.* Зауважимо, що

$$\begin{cases} (\alpha_{2i+1}, \alpha_{2i+2}) = (\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i}) \Leftrightarrow (1 - \alpha_{2i+1}, 1 - \alpha_{2i+2}) = (1 - \alpha_{2i-1}, 1 - \alpha_{2i}), \\ b_{i+1} = b_i \Leftrightarrow 1 - b_{i+1} = 1 - b_i, i \in N. \end{cases}$$

1) Якщо  $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ , то  $b_2 = 0$ ,  $x' = \Delta_{1111[1-\alpha_5][1-\alpha_6]\dots}^{Q_2}$ ,  $y' = \Delta_{11[1-b_3][1-b_4]\dots}^{Q_2}$ .

Тому очевидно, що  $r(x') = y'$ .

2) Якщо  $(\alpha_3, \alpha_4) \neq (0, 0)$ , то  $b_2 = 1$ ,

$$x' = \Delta_{11[1-\alpha_3][1-\alpha_4][1-\alpha_5][1-\alpha_6]\dots}^{Q_2}, y' = \Delta_{10[1-b_3][1-b_4]\dots}^{Q_2}.$$

І в цьому випадку, як бачимо,  $r(x') = y'$ .

Якщо  $M(x, y) \in \Gamma_{11}$ , то аналогічні міркування (за цією ж логічною схемою) приводить до висновку:  $M'(x', y') \in \Gamma_{00}$ . Лему доведено.  $\square$

**Наслідок 2.8.** Для будь-якого  $x \in \Delta_{00}^{Q_2} \cup \Delta_{11}^{Q_2}$  виконується рівність

$$r(I(x)) = I(r(x)).$$

**Наслідок 2.9.** Якщо  $q_0 = \frac{1}{2}$ , то має місце рівність

$$\int_{\Delta_{11}^2} r(x)dx = \frac{1}{4} - \int_0^{\frac{1}{4}} r(x)dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^3} \int_0^1 r(x)dx.$$

Справді, якщо  $q_0 = \frac{1}{2}$ , то  $I(x) = 1 - x$ ,  $I(y) = 1 - y$ , а тому

$$\int_{\Delta_{11}^2} r(x)dx = \int_{\frac{3}{4}}^1 r(x)dx = \int_{\frac{1}{4}}^0 (1 - y)d(1 - x) =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4}} (1 - r(x)) dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^3} \int_0^1 r(x) dx.$$

**Наслідок 2.10.** Якщо  $q_0 = \frac{1}{2}$ , то

$$\int_{\Delta_{00}^2 \cup \Delta_{11}^2} r(x) dx = \frac{1}{4}.$$

**Лема 2.8.** Перетворення одиничного квадрата  $[0; 1]^2$

$$\varphi : \begin{cases} x' = I(x) = \Delta_{[1-\alpha_1(x)][1-\alpha_2(x)] \dots [1-\alpha_{2k}(x)] \dots}^{Q_2} \\ y' = y, \end{cases}$$

відображає частину  $\Gamma_{01}$  графіка  $\Gamma$  функції  $r$  на частину  $\Gamma_{10}$ .

*Доведення.* Нехай  $M(x, y) \in \Gamma_{01}$ , тобто  $x = \Delta_{01\alpha_3\alpha_4 \dots \alpha_{2k} \dots}^{Q_2}$ ,  $y = r(x) = \Delta_{1b_2 \dots b_k \dots}^{Q_2}$ . Образ  $M'(x', y')$  точки  $M$  під дією перетворення  $\varphi$  має координати:  $x' = I(x) = \Delta_{10[1-\alpha_3][1-\alpha_4] \dots [1-\alpha_{2k}] \dots}^{Q_2}$ ,  $y' = \Delta_{1b_2 \dots b_k \dots}^{Q_2}$ .

Якщо  $(\alpha_3, \alpha_4) = (0, 1)$ , то  $b_2 = 1$  і  $x' = \Delta_{1010[1-\alpha_5][1-\alpha_6] \dots}^{Q_2}$ ,  $y' = \Delta_{11b_3 \dots b_k \dots}^{Q_2}$ . Звідки бачимо, що  $r(x') = y'$ .

Якщо  $(\alpha_3, \alpha_4) \neq (0, 1)$ , то  $b_2 = 0$  і тому  $r(x') = y'$ . Отже,  $M'(x', y') \in \Gamma_{10}$ .  
Обернене перетворення відображає  $\Gamma_{10}$  на  $\Gamma_{01}$ . Лему доведено.  $\square$

**Наслідок 2.11.** Для будь-якого  $x \in \Delta_{01}^{Q_2} \cup \Delta_{10}^{Q_2}$  виконується рівність

$$r(I(x)) = r(x).$$

**Наслідок 2.12.** Якщо  $q_0 = \frac{1}{2}$ , то

$$\int_{\Delta_{10}^2} r(x) dx = \int_{\Delta_{01}^2} r(x) dx.$$

Справді, при  $q_0 = \frac{1}{2}$  маємо  $I(x) = 1 - x$ , а тому

$$\int_{\Delta_{10}^2} r(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} r(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} r(1-t) d(1-t) =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} r(t) d(1-t) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} r(t) dt = \int_{\Delta_{01}^2} r(x) dx.$$

**Лема 2.9.** *Перетворення одиничного квадрата  $[0; 1]^2$*

$$\varphi : \begin{cases} x' = q_0^2 + q_0 q_1 x, \\ y' = q_0 + q_1 y, \end{cases}$$

*переводить частину  $\Gamma_{01}$  графіка  $\Gamma$  функції  $r$  в частину  $\Gamma_{0101}$ .*

*Доведення.* Нехай  $M(x; y) \in \Gamma_{01}$ , тобто

$$x = \Delta_{01\alpha_3\alpha_4\dots}^{Q_2}, \quad y = r(x) = \Delta_{1b_2b_3\dots}^{Q_2}.$$

Образ  $M = \varphi(M)$  точки  $M$  має координати:

$$x' = q_0^2 + q_0 q_1 x = \Delta_{0101\alpha_3\alpha_4\dots}^{Q_2},$$

$$y' = q_0 + q_1 y = \Delta_{11b_2b_3\dots}^{Q_2}.$$

Очевидно, що  $r(x') = y'$  і  $M' \in \Gamma_{0101}$ . Лемі доведено.  $\square$

**Наслідок 2.13.** *Для будь-якого  $x \in \Delta_{01}^{Q_2}$  виконується рівність*

$$r(q_0^2 + q_0 q_1 x) = q_0 + q_1 r(x).$$

**Наслідок 2.14.** *Має місце рівність*

$$\int_{\Delta_{0101}^{Q_2}} r(x') dx' = q_0^3 q_1^2 + q_0 q_1^2 \int_{\Delta_{01}^{Q_2}} r(x) dx.$$

Справді,

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_{0101}^{Q_2}} r(x') dx' &= \int_{\Delta_{01}^{Q_2}} [q_0 + q_1 r(x)] d(q_0^2 + q_0 q_1 x) = q_0 q_1 \int_{\Delta_{01}^{Q_2}} [q_0 + q_1 r(x)] dx = \\ &= q_0^2 q_1 (q_0 - q_0^2) + q_0 q_1^2 \int_{\Delta_{01}^{Q_2}} r(x) dx = q_0^3 q_1^2 + q_0 q_1^2 \int_{\Delta_{01}^{Q_2}} r(x) dx. \end{aligned}$$

**Наслідок 2.15.** Якщо  $q_0 = \frac{1}{2}$ , то

$$\int_{\Delta_{0101}^{Q_2}} r(x) dx = \frac{1}{32} + \frac{1}{8} \int_{\Delta_{01}^{Q_2}} r(x) dx$$

Далі нам корисними будуть оператори лівостороннього та правостороннього зсувів. Нагадаємо їх означення [20, 27].

Оператором лівостороннього зсуву цифр цифр  $Q_2$ -зображення чисел (оператором лівостороннього зсуву) називається функція  $\omega$ , означена при домовленості не використовувати зображення з періодом (1) рівністю:

$$\omega(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q_2}) = \Delta_{\alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}.$$

Оператор лівостороннього зсуву є кусково-лінійною функцією, яка має вираз

$$\omega(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}) = \frac{1}{q_{\alpha_1}(x)} + \frac{\beta_{\alpha_1}(x)}{q_{\alpha_1}(x)} + \frac{\beta_{\alpha_1}(x)}{q_{\alpha_1}(x)} = \begin{cases} \frac{x}{q_0}, & \text{при } \alpha_1 = 0, \\ \frac{x}{q_1} + \frac{q_0}{q_1}, & \text{при } \alpha_1 = 1. \end{cases}$$

$$\omega^n(x) = \omega(\omega^{n-1}(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2})) = \Delta_{\alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \dots}^{Q_2}.$$

Оператором правостороннього зсуву цифр  $Q_2$ -зображенням чисел (оператором правостороннього зсуву) з параметром  $i \in \{0, 1\}$  називається функція  $\delta_i$ , означена рівністю:

$$\delta_i(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}) = \Delta_{i \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}.$$

Оператором правостороннього зсуву  $\delta_i$  є лінійною зростаючою функцією, яка має вираз  $\delta_i(x) = \beta_i + q_i(x)$ , що є оберненою до куска функції, визначеного на циліндрі  $\Delta_i^{Q_2} = [iq_{1-i}; q_i + iq_{1-i}] = [\beta_i; \beta_{i+1}]$ .

$$\delta_{i_1 \dots i_n}(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}) = \Delta_{i_1 i_2 \dots i_n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}.$$

**Теорема 2.10.** Частина  $\Gamma_{01}$  графіка  $\Gamma$  функції  $r$  має структуру

$$\Gamma_{01} = \Gamma_{0100} \cup \Gamma_{0101} \cup \Gamma_{0110} \cup \Gamma_{0111}, \quad (2.10)$$



де  $\Gamma_{01ij} = \{x \in \Delta_{01ij}^2, y = r(x)\}$ ,  $(i, j) \in A^2$ . При цьому відображення

$$1) \varphi : \begin{cases} x' = \delta_{0100}(x) = q_0^2 + q_0^3 q_1 x = \Delta_{0100\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots}^{Q_2}, \\ y' = \delta_{10}y = q_0 + q_0 q_1 y = \Delta_{10b_1 b_2 \dots}^{Q_2}, \\ r(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k} \dots}^{Q_2}) = \Delta_{b_1 b_2 \dots b_k \dots}^{Q_2} = y, \end{cases}$$

переводить графік  $\Gamma$  в його частину  $\Gamma_{0100}$ ;

$$2) \varphi : \begin{cases} x' = \delta_{01}(I[\omega^2(x)]) = q_0^2 + q_0 q_1 I(\omega^2(x)) = \Delta_{01[1-\alpha_3(x)][1-\alpha_4(x)]\dots}^{Q_2}, \\ y' = y = r(x), \end{cases}$$

переводить графік  $\Gamma_{0100}$  в його частину  $\Gamma_{0111}$  і навпаки;

$$3) \varphi : \begin{cases} x' = \delta_{01}(I[\omega^2(x)]) = q_0^2 + q_0 q_1 I(\omega^2(x)) = \Delta_{01[1-\alpha_3(x)][1-\alpha_4(x)]\dots}^{Q_2}, \\ y' = \delta_1(I[\omega(y)]) = q_0 + q_1 I(\omega(y)) = \Delta_{1[1-b_2][1-b_3]\dots}^{Q_2}, \\ r(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k} \dots}^{Q_2}) = \Delta_{b_1 b_2 \dots b_k \dots}^{Q_2} = y, \end{cases}$$

переводить  $\Gamma_{0101}$  в  $\Gamma_{0110}$  і навпаки.

*Доведення.* Рівність (2.10) є очевидною.

1) Нехай  $M(x; y) \in \Gamma$ ,  $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k} \dots}^{Q_2}$ ,  $y = r(x) = \Delta_{b_1 b_2 \dots b_k \dots}^{Q_2}$ .

Розглянемо образ  $M'(x'; y')$  точки  $M$  під дією відображення  $\varphi$ :

$$x' = q_0^2 + q_0^3 q_1 x = \Delta_{0100\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k} \dots}^{Q_2}, y' = q_0 + q_0 q_1 y = \Delta_{10b_1 b_2 \dots b_k \dots}^{Q_2}.$$

Очевидно, що  $r(x') = y'$ , а отже,  $M' \in \Gamma_{0100}$ . Твердження 1) доведено.

2) Нехай  $M(x; y) \in \Gamma_{0100}$ , тобто  $x = \Delta_{0100\alpha_5 \alpha_6 \dots \alpha_{2k} \dots}^{Q_2}$ ,  $y = r(x) = \Delta_{10b_3 b_4 \dots b_k \dots}^{Q_2}$ .

Образ  $M'(x'; y')$  точки  $M$  під дією відображення  $\varphi$  має координати:

$$x' = \delta_{01}(I[\omega^2(x)]) = \Delta_{0111[1-\alpha_5][1-\alpha_6]\dots}^{Q_2}, y' = y = r(x) = \Delta_{10b_3 b_4 \dots b_k \dots}^{Q_2}.$$

Оскільки рівність  $(\alpha_5, \alpha_6) = (0, 0)$  рівносильна  $(1 - \alpha_5, 1 - \alpha_6) = (1, 1)$ , то  $r(x') = y'$ . Тому  $\varphi(\Gamma_{0100}) = \Gamma_{0111}$ . Друга частина твердження впливає з інволютивності відображення  $\varphi$ . Твердження 2) доведено.

3) Нехай  $M(x; y) \in \Gamma_{0101}$ , тобто  $x = \Delta_{0101\alpha_5 \alpha_6 \dots \alpha_{2k} \dots}^{Q_2}$ ,  $y = r(x) = \Delta_{11b_3 b_4 \dots b_k \dots}^{Q_2}$ .

Розглянемо точку  $\varphi(M) = M'(x'; y')$ :

$$\begin{cases} x' = \Delta_{0110[1-\alpha_5][1-\alpha_6]...}^{Q_2}, \\ y' = \Delta_{10[1-b_3][1-b_4]...}^{Q_2}, \end{cases}$$

Якщо  $(\alpha_5, \alpha_6) = (0; 1)$ , то  $x' = \Delta_{011010[1-\alpha_7][1-\alpha_8]...}^{Q_2}$  і  $b_3 = 1$ ,  $y' = \Delta_{100[1-b_4][1-b_5]...}^{Q_2}$ .  
Звідки  $r(x') = y'$  і  $M'(x'; y') \in \Gamma_{0110}$ .

Якщо  $(\alpha_5, \alpha_6) \neq (0; 1)$ , то  $(1-\alpha_5, 1-\alpha_6) \neq (1; 0)$ ,  $b_3 = 0$  і  $y' = \Delta_{101[1-b_4][1-b_5]...}^{Q_2}$ .  
Тому  $\varphi(\Gamma_{0101}) = \Gamma_{0110}$ . Перетворення  $\varphi$  є інволютивним, тому твердження 3) доведено.  $\square$

**Наслідок 2.16.** Для будь-якого  $x \in [0; 1]$  виконується рівність

$$r(q_0^2 + q_0^3 q_1 x) = q_0 + q_0 q_1 r(x).$$

**Наслідок 2.17.** Має місце рівність

$$\int_{\Delta_{0100}^{Q_2}} r(x) dx = q_0^4 q_1 + q_0^4 q_1^2 \int_0^1 r(x) dx,$$

зокрема при  $q_0 = \frac{1}{2}$  маємо  $\int_{\Delta_{0100}^2} r(x) dx = \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \int_0^1 r(x) dx$ .

Справді,

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_{0100}^{Q_2}} r(x') dx' &= \int_0^1 q_0 + q_0 q_1 r(x) d(q_0^2 + q_0^3 q_1 x) = \\ &= q_0^4 q_1 \int_0^1 [1 + q_1 r(x)] dx = q_0^4 q_1 + q_0^4 q_1^2 \int_0^1 r(x) dx. \end{aligned}$$

**Наслідок 2.18.** Для будь-якого  $x \in \Delta_{0100}^{Q_2} \cup \Delta_{0111}^{Q_2}$  виконується рівність

$$r(q_0^2 + q_0 q_1 I[\omega^2(x)]) = r(x),$$

що рівносильно  $r(\Delta_{01ii}^{Q_2} \alpha_5 \alpha_6 \dots) = r(\Delta_{01[1-i][1-i][1-\alpha_5][1-\alpha_6]...}^{Q_2})$ .

**Наслідок 2.19.** *Має місце рівність*

$$\int_{\Delta_{0111}^{Q_2}} r(x)dx = q_0q_1 \int_{\Delta_{0100}^{Q_2}} r(q_0^2 + q_0q_1I[\omega^2(x)])dI[\omega^2(x)].$$

**Наслідок 2.20.** *Якщо  $q_0 = \frac{1}{2}$ , то*

$$\int_{\Delta_{0111}^2} r(x)dx = \int_{\Delta_{0100}^2} r(x)dx = \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \int_0^1 r(x)dx.$$

**Наслідок 2.21.** *Для будь-якого  $x \in \Delta_{0101}^{Q_2} \cup \Delta_{0110}^{Q_2}$  виконується рівність*

$$\delta_1(I[\omega(r(x))]) = r(\delta_{01}(I[\omega^2(x)])) \Leftrightarrow r(q_0^2 + q_0q_1I[\omega^2(x)]) = q_0 + q_1I[\omega(r(x))].$$

**Наслідок 2.22.** *Якщо  $q_0 = \frac{1}{2}$ , то  $\int_{\Delta_{0101}^{Q_2} \cup \Delta_{0110}^{Q_2}} r(x)dx = \frac{3}{32}$ .*

Справді, оскільки  $\Gamma_{0101}$  і  $\Gamma_{0110}$  симетричні відносно точки  $C(\frac{3}{8}; \frac{3}{4})$ , то

$$\int_{\Delta_{0101}^2 \cup \Delta_{0110}^2} r(x)dx = \int_{\Delta_{0110}^2} r(x)dx + \int_{\Delta_{0101}^2} r(x)dx = (\frac{3}{64} + S) + (\frac{3}{64} - S) = \frac{3}{32},$$

де  $S = \frac{1}{16} = \int_{\Delta_{0101}^2} r(x)dx$ .

**Наслідок 2.23.** *Якщо  $q_0 = \frac{1}{2}$ , то  $\int_0^1 r(x)dx = \frac{3}{5}$ .*

Справді, враховуючи попередні твердження

$$\begin{aligned} \int_0^1 r(x)dx &= [\int_{\Delta_{00}^{Q_2}} r(x)dx + \int_{\Delta_{01}^{Q_2}} r(x)dx] + 2 \int_{\Delta_{01}^{Q_2}} r(x)dx = \\ &= \frac{1}{4} + 2[2 \int_{\Delta_{0100}^{Q_2}} r(x)dx + (\int_{\Delta_{0101}^{Q_2}} r(x)dx + \int_{\Delta_{0110}^{Q_2}} r(x)dx)] = \\ &= \frac{1}{4} + 2[2(\frac{1}{36} + \frac{1}{64} \int_0^1 r(x)dx) + \frac{3}{32}] = \frac{9}{16} + \int_0^1 r(x)dx. \end{aligned}$$

Звідки отримуємо, що  $\int_0^1 r(x)dx = \frac{3}{5}$ .

## 2.7. Узагальнення конструкції функції

Якщо зафіксувати елемент  $e \in A = \{0; 1\}$ , пару  $(i, j) \in A^2 \equiv A \times A$  і замінити умови в означенні функції  $r(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k} \dots}^{Q_2}) = \Delta_{r_1 r_2 \dots r_k \dots}^{Q_2}$  на

$$r_1 = \begin{cases} e, & \text{якщо } (\alpha_1, \alpha_2) = (i, j), \\ 1 - e, & \text{якщо } (\alpha_1, \alpha_2) \neq (i, j), \end{cases}$$

$$r_{k+1} = \begin{cases} r_k, & \text{якщо } (\alpha_{2k+1}, \alpha_{2k+2}) = (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}), \\ 1 - r_k, & \text{якщо } (\alpha_{2k+1}, \alpha_{2k+2}) \neq (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}), \end{cases}$$

то отримаємо узагальнення  $f$  функції  $r$  зі збереженням властивостей неперервності, ніде не монотонності, варіаційних та диференціальних властивостей, причому частково зміняться «симетрії» графіка і інтегральні властивості.

**Лема 2.10.** *Означення функції  $f$  є коректним, а саме значення функції не залежить від зображення  $Q_2$ -бінарної точки, тобто*

$$f(\Delta_{a_1 \dots a_m 0(1)}^{Q_2}) = f(\Delta_{a_1 \dots a_m 1(0)}^{Q_2}). \quad (2.11)$$

*Доведення.* Нехай  $x_0 = \Delta_{a_1 \dots a_m 1(0)}^{Q_2} = \Delta_{a_1 \dots a_m 0(1)}^{Q_2}$ .

Випадки: 1)  $m = 2k$  і 2)  $m = 2k - 1$  розглянемо окремо.

1) Нехай  $m = 2k$  і  $r(\Delta_{a_1 \dots a_{2k} 1(0)}^{Q_2}) = \Delta_{b_1 \dots b_k b(1-b)}^{Q_2}$ .

Якщо  $(a_{2k-1}, a_k) = (1, 0)$ , то  $(a_{2k-1}, a_{2k}) \neq (0, 1)$ , а отже,

$$f(\Delta_{a_1 \dots a_{2k} 0(1)}^{Q_2}) = \Delta_{b_1 \dots b_k [1-b_k](b_k)}^{Q_2}.$$

Якщо  $(a_{2k-1}, a_k) \neq (1, 0)$ , то  $(a_{2k-1}, a_{2k}) = (0, 1)$ , а отже,

$$f(\Delta_{a_1 \dots a_{2k} 0(1)}^{Q_2}) = \Delta_{b_1 \dots b_k b_k(1-b_k)}^{Q_2}.$$

Якщо  $(1, 0) \neq (a_{2k-1}, a_k) \neq (1, 0)$ , то

$$f(\Delta_{a_1 \dots a_{2k} 0(1)}^{Q_2}) = \Delta_{b_1 \dots b_k [1-b_k](b_k)}^{Q_2}.$$

Отже,  $f(\Delta_{a_1 \dots a_{2k} 0(1)}^{Q_2}) = f(\Delta_{a_1 \dots a_{2k} 1(0)}^{Q_2})$ .

2) Нехай  $m = 2k - 1$ . Тоді  $f(\Delta_{a_1 \dots a_{2k-1} 1(0)}^{Q_2}) = \Delta_{b_1 \dots b_{k-1} b_k(1-b_k)}^{Q_2}$  і оскільки  $(a_{2k-1}, 0) \neq (1, 1)$ , то

$$f(\Delta_{a_1 \dots a_{2k-1} 0(1)}^{Q_2}) = \Delta_{b_1 \dots b_{k-1} [1-b_k](b_k)}^{Q_2}.$$

Отже, і в цьому випадку виконується рівність (2.11). Коректність функції  $f$  обґрунтовано. Лему доведено.  $\square$

*Зауваження 2.3.* Існує 8 способів вибору елемента  $e$  і пари  $(i; j)$ . Тому дана конструкція містить 8 різних функцій. Зокрема при  $e = 0$  і  $(i; j) = (1; 1)$  маємо  $f(x) = r(I(x))$ , а при  $e = 1$  і  $(i; j) = (0; 0)$  маємо  $f(x) = I(r(x))$ .

## 2.8. Взаємозв'язок дво- та чотирьохсимвольного $Q$ -зображень

$Q_2$ -зображення дробової частини числа визначається одним параметром  $q_0 \in (0; 1)$ . Воно є двосимвольним самоподібним кодуванням чисел з нульовою надлишковістю, що узагальнює класичну двійкову систему і співпадає з нею при  $q_0 = \frac{1}{2}$ . В технічному відношенні двосимвольні системи кодування чисел мають суттєві переваги. Існуючий органічний зв'язок двійкової системи з системою числення з основою  $2^k$  легко переноситься на  $Q_2$  і  $Q_s$ -зображення при  $s = 2^k$ . Цьому взаємозв'язку присвячений цей параграф.

Нехай  $2 \leq s$  – задане натуральне число,  $A_s \equiv \{0, 1, \dots, s-1\}$ ,  $\bar{q} = (q_0, q_1, \dots, q_{s-1})$  – стохастичний вектор з додатними координатами. Означення  $Q_s$ -зображення числа  $x \in [0; 1]$  породжує наступне твердження.

**Теорема 2.11.** *Для будь-якого дійсного числа  $x \in [0; 1]$  існує послідовність  $(\alpha_n) \in L = A_s \times A_s \times \dots \times A_s \times \dots$  така, що*

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left( \beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_s}, \quad (2.12)$$

де  $\beta_0 \equiv 0$ ,  $\beta_{\alpha_k} \equiv \sum_{i=0}^{\alpha_k-1} q_i$ .

**Теорема 2.12.** Якщо  $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{Q_2}$  –  $Q_2$ -зображення числа  $x$  (яке визначається одним параметром  $q_0 \in (0; 1)$ ), то число  $x$  має  $Q'_4$ -зображенням  $\Delta_{a_1a_2\dots a_n\dots}^{Q'_4}$ , де  $q'_0 = q_0^2$ ,  $q'_1 = q_0q_1$ ,  $q'_2 = q_0q_1$ ,  $q'_3 = q_1^2$  і

$$a_n = \varphi(\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n} = 00, \\ 1, & \text{якщо } \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n} = 01, \\ 2, & \text{якщо } \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n} = 10, \\ 3, & \text{якщо } \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n} = 11. \end{cases}$$

*Доведення.* Справді, для довільного  $x \in [0; 1]$

$$\begin{aligned} x &= \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{Q_2} = \\ &= \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2}q_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_3}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2} + \beta_{\alpha_4}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}q_{\alpha_3} + \dots = \\ &= (\beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2}q_{\alpha_1}) + (\beta_{\alpha_3}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2} + \beta_{\alpha_4}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}q_{\alpha_3}) + \dots = \\ &= (\beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2}q_{\alpha_1}) + q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}(\beta_{\alpha_3} + \beta_{\alpha_4}q_{\alpha_3}) + \dots = \\ &= \beta'_{a_1} + \beta'_{a_2}q_{a_1}q_{a_2} + \beta'_{a_3}q_{a_1}q_{a_2}q_{a_3}q_{a_4} + \dots = \\ &= \beta'_{a_1} + \beta'_{a_2}q'_{a_1} + \beta'_{a_3}q'_{a_1}q'_{a_2} + \dots = \Delta_{a_1a_2\dots a_n\dots}^{Q'_4}, \end{aligned}$$

$$\text{де } q'_{a_n} = q_{\alpha_{2n-1}}q_{\alpha_{2n}} = \begin{cases} q_0^2, & \text{якщо } \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} = 00, \\ q_0q_1, & \text{якщо } \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} = 01, \\ q_0q_1, & \text{якщо } \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} = 10, \\ q_1^2, & \text{якщо } \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} = 11, \end{cases}$$

$$\beta'_{a_n} = \beta_{\alpha_{2n-1}} + \beta_{\alpha_{2n}}q_{\alpha_{2n-1}} = \begin{cases} \beta_0 + q_0\beta_0 = 0 & \text{при } \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} = 00, \\ \beta_0 + q_0\beta_1 = q_0^2 & \text{при } \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} = 01, \\ \beta_1 + q_1\beta_0 = q_0 & \text{при } \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} = 10, \\ \beta_1 + q_1\beta_1 = q_0 + q_0q_1 & \text{при } \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} = 11. \end{cases}$$

**Означення 2.1.**  $Q'_4$ -зображення числа утвореного внаслідок перекодування  $Q_2$ -зображення, називатимемо індукованим  $Q_2$ -зображенням.

**2.8.1. Функція породжена взаємозв'язком дво- та чотирьохсимвольного  $Q$ -зображення.** Нехай  $x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{Q_4}$  –  $Q_4$ -зображення числа  $x \in [0; 1]$ . Виконаємо його перекодування за допомогою двосимвольного алфавіту заміною цифри 0 парою цифр 00, цифри 1 – 01, цифри 2 – 10, цифри 3 – 11. Зрозуміло, що отримане двосимвольне зображення числа  $x$  буде  $Q_2$ -зображенням, коли  $Q_4$ -зображення є індукованим деяким  $Q_2$ -зображенням. В загальній постановці, суть задачі в наступному: при яких умовах на стохастичний вектор  $\bar{q}$  це буде так само?

Нехай  $Q_4 = (q_0, q_1, q_2, q_3) = \bar{q}$ ,  $Q_2 = (g_0, g_1) = \bar{g}$  – задані додатні стохастичні вектори. Розглядається функція

$$f(x) = f(\Delta_{a_1(x) a_2(x) \dots a_n(x) \dots}^{Q_4}) = \Delta_{\varphi(a_1) \varphi(a_2) \dots \varphi(a_n) \dots}^{Q_2} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2n-1} \alpha_{2n} \dots}^{Q_2}, \quad (2.13)$$

$$\text{де } \varphi(a_n) = \begin{cases} 00, & \text{при } a_n = 0, \\ 01, & \text{при } a_n = 1, \\ 10, & \text{при } a_n = 2, \\ 11, & \text{при } a_n = 3. \end{cases}$$

**Теорема 2.13.** *Функція  $f$  є коректно означеною рівністю (2.13), неперервною і строго зростаючою.*

*Доведення.* 1. Коректність означення могла би порушитися в  $Q_4$ -бінарних точках, тобто в точках виду  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{m-1} c_m(0)}^{Q_4} = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{m-1} [c_m-1](3)}^{Q_4}$ , а саме: коли «значення» функції від двох різних зображень одного й того ж аргументу не співпали би. Розглянемо різницю

$$\begin{aligned} & f(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{m-1} c_m(0)}^{Q_4}) - f(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{m-1} [c_m-1](3)}^{Q_4}) = \\ & = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2m-3} \alpha_{2m-2} \alpha_{2m-1} \alpha_{2m}(0)}^{Q_2} - \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2m-3} \alpha_{2m-2} \alpha'_{2m-1} \alpha'_{2m}(1)}^{Q_2} = \\ & = \left( \prod_{i=1}^{2m-2} g_{\alpha_i} \right) (\beta_{\alpha_{2m-1}} + \beta_{\alpha_{2m}} g_{\alpha_{2m-1}} + \beta_0 g_{\alpha_{2m-1}} g_{\alpha_{2m}} + \dots \\ & - \beta_{\alpha'_{2m-1}} - \beta_{\alpha'_{2m}} g_{\alpha'_{2m-1}} - g_{\alpha'_{2m-1}} g_{\alpha'_{2m}} [\beta_1 + \beta_1 g_1 + \dots]) = A \prod_{i=1}^{2m-2} g_{\alpha_i}, \end{aligned}$$

де  $A = \beta_{\alpha_{2m-1}} + \beta_{\alpha_{2m}} g_{\alpha_{2m-1}} - \beta_{\alpha'_{2m-1}} - \beta_{\alpha'_{2m}} g_{\alpha'_{2m-1}} - g_{\alpha'_{2m-1}} g_{\alpha'_{2m}}$ .

Можливі випадки.

Якщо  $c_m = 1$ , то  $A = \beta_1 g_0 - g_0 g_0 = 0$ .

Якщо  $c_m = 2$ , то  $A = \beta_1 - \beta_1 g_0 - g_0 g_1 = 0$ .

Якщо  $c_m = 3$ , то  $A = \beta_1 + \beta_1 g_0 - \beta_1 - g_0 g_1 = 0$ .

Отже,  $f(\Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_4}(0)) - f(\Delta_{c_1 \dots [c_m-1]}^{Q_4}(3)) = 0$ . Тому  $f$  коректно означена.

2. Для доведення неперервності функції в точці  $x_0$  покажемо, що  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$ . Розглянемо випадки, коли  $x_0 \in Q_4$ -унарною і  $Q_4$ -бінарною точкою.

У першому випадку умова  $x \rightarrow x_0$  рівносильна  $m \rightarrow \infty$ , де  $m$  таке натуральне число, що  $a_m(x_0) \neq a_m(x)$ , але  $a_j(x_0) = a_j(x)$  при  $j < m$ .

Нехай  $x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_{m-1} a'_m}^{Q_4}$  і  $x_0 = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_{m-1} a_m}^{Q_4}$ .

Розглянемо вираз

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| &= \lim_{m \rightarrow \infty} |f(\Delta_{a_1 a_2 \dots a_{m-1} a'_m}^{Q_4}) - f(\Delta_{a_1 a_2 \dots a_{m-1} a_m}^{Q_4})| = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} |\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha'_{2m-1} \alpha'_{2m}}^{Q_2} - \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2m-1} \alpha_{2m}}^{Q_2}| = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} |(\beta_{\alpha'_{2m-1}} + \beta_{\alpha'_{2m}} g_{\alpha'_{2m-1}} + \dots - \beta_{\alpha_{2m-1}} - \beta_{\alpha_{2m}} g_{\alpha_{2m-1}} - \dots) \prod_{i=1}^{2m-2} g_{\alpha_i}| \leq \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \prod_{i=1}^{2m-2} g_{\alpha_i} \right| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{2m-2} \max\{g_0, g_1\} = 0, \end{aligned}$$

оскільки  $0 \leq |(\beta_{\alpha'_{2m-1}} + \beta_{\alpha'_{2m}} g_{\alpha'_{2m-1}} + \dots - \beta_{\alpha_{2m-1}} - \beta_{\alpha_{2m}} g_{\alpha_{2m-1}} - \dots)| \leq 1$ .

Якщо  $x_0 \in Q_4$ -бінарною точкою, а саме:  $x_0 = \Delta_{a_1 \dots a_k}^{Q_4}(0) = \Delta_{a_1 \dots [a_k-1]}^{Q_4}(3)$ , то для доведення неперервності функції  $f$  в цій точці досить довести її неперервність зліва і справа в точці  $x_0$ . У першому випадку випадку можна аналогічно скористатися попередньою схемою міркувань для зображення  $x_0 = \Delta_{a_1 a_2 \dots [a_k-1]}^{Q_4}(3)$ , а в другому для зображення  $x_0 = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_k}^{Q_4}(0)$ .

3. Для доведення того, що функція  $f$  є строго зростаючою, використаємо означення: при довільних  $x_1 < x_2$  виконується нерівність  $f(x_1) < f(x_2)$ , тобто  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ .



Нехай маємо  $x_1 = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_m}^{Q_4}$ ,  $x_2 = \Delta_{a_1 a_2 \dots a'_m}^{Q_4}$ . Оскільки  $x_1 < x_2$  існує  $m \in N$ , таке, що  $a_m(x_1) < a_m(x_2)$ , але  $a_j(x_1) = a_j(x_2)$  при  $j < m$ .

Тоді  $\alpha_j(y_1) = \alpha_j(y_2)$ ,  $j = \overline{1, 2m-2}$  і

$$\begin{cases} \alpha_{2m-1}(y_1) = 0 \\ \alpha_{2m-1}(y_2) = 1, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \alpha_{2m-1}(y_1) = \alpha_{2m-1}(y_2) \\ \alpha_{2m}(y_1) = 0 \\ \alpha_{2m}(y_2) = 1. \end{cases} \quad \square$$

**Теорема 2.14.** Функция  $f$  є лінійною, а саме:  $f(x) = x$ , якщо

$$\begin{cases} q_0 = g_0^2, \\ q_1 = g_0 g_1 = q_2, \\ q_3 = q_1^2. \end{cases} \quad (2.14)$$

і сингулярною в решті випадків.

*Доведення.* 1. При виконанні умов (2.14) індуковане  $Q'_4$ -зображення  $Q_2$ -зображенням співпадає з заданим  $Q_4$ -зображенням (оскільки  $q'_0 = g_0^2 = q_0$ ,  $q'_1 = g_0 g_1 = q_1$ ,  $q'_2 = g_0 g_1 = q_2$ ,  $q'_3 = g_1^2 = q_3$ ), тому

$$f(x) = f(\Delta_{a_1(x) a_2(x) \dots a_n(x)}^{Q_4}) = \Delta_{(\alpha_1 \alpha_2)(\alpha_3 \alpha_4) \dots (\alpha_{2k-1} \alpha_{2k})}^{Q_2} = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{Q'_4} = x.$$

2. Припустимо, що умова (2.14) не виконується. Оскільки

$$f(\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{Q_4}) = \Delta_{(\alpha_1 \alpha_2)(\alpha_3 \alpha_4) \dots (\alpha_{2k-1} \alpha_{2k})}^{Q'_2} = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{Q'_4},$$

то  $f$  є функція розподілу випадкової величини  $\xi = \Delta_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n}^{Q_4}$  цифри  $\tau_n$   $Q_4$ -зображення якої є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, причому  $P\{\tau_n = i\} = p_i = q'_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ .

Добре відомо, що розподіл випадкової величини  $\xi$  є рівномірним, якщо  $p_i = q_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  і сингулярним коли існує  $p_i \neq q_i$ . Тому у випадку коли умови (2.14) не виконується  $F_\xi(x) = f(x)$  є сингулярною [56].  $\square$

## Висновки до розділу 2

У цьому розділі був сконструйований клас неперервних ніде не монотонних функцій, означених у термінах  $Q_2$ -зображення чисел, які визначались специфічним перетворювачем  $Q_2$ -зображення аргументу у цифри  $Q_2$ -зображення функції.

Доведено, що при фіксованому  $Q_2$ -зображенні цифр існує 8 функцій цього виду, але при наявності континуального класу  $Q_2$ -зображень ( $q_0 \in (0; 1)$ ) сім'я таких функцій є континуальною. Основними результатами цього розділу є теореми про диференціальні властивості функції (теореми 2.6, 2.7, 2.8, 2.9), а також теорема про інтегральні властивості функцій та наслідки з неї (теорема 2.10) і симетрії їх графіків. Наведені конструкції легко переносяться на  $Q_2^*$ -зображення чисел, але його несамоподібність ускладнює вивчення вказаних властивостей і в загальній постановці приводить до нерозв'язності окремих задач.

Конструкція функції, що вивчається в даному розділі, тісно пов'язана з Трибін-функцією, яка введена в статті [53] і вивчалась в роботах [31, 35, 55, 71] з функціями Буша [4] і Вундерліха [22], є аналогом функції, яка вивчалась в роботі [58].

Для класу функцій цього розділу залишилися відкритими питання про диференціальні властивості при  $q_0 \in (0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}) \cup (0; \frac{3+\sqrt{5}}{2})$ , фрактальні властивості множин  $Q_2$ -унарних рівнів і загальний вираз визначеного інтеграла Лебега функції  $r$ . В майбутньому плануємо детально вивчити розподіл значень функції  $r$  для випадкового аргумента з рівномірним та експоненціальним розподілом.

Результати цього розділу опубліковані у роботі [46, 59] та доповідалися на конференціях [69, 48].

## РОЗДІЛ 3

### КЛАС ФУНКЦІЙ, ВИЗНАЧЕНИХ ЛАНЦЮГОМ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ ЦИФР

У цьому розділі вивчаються функції, аргумент і значення яких подаються у формі  $Q_2^*$ -зображення (зокрема,  $Q_2$ -зображення) чисел одиничного відрізка, а залежність цифр визначається послідовністю фінітних функцій  $\varphi_k : A \times A \rightarrow A \equiv \{0, 1\}$  на ланцюгу цифр зображення аргумента. У дослідженні акцент зроблено на структурних, варіаційних, інтегродиференціальних та фрактальних властивостях функцій.

#### 3.1. Інверсор цифр $Q_2^*$ -зображення чисел

У роботах [51] вивчався інверсор цифр  $Q_2$ -зображення чисел, а саме функція  $I$ , означена рівністю

$$I(x = \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^{Q_2}) = \Delta_{[1-\alpha_1(x)][1-\alpha_2(x)]\dots[1-\alpha_n(x)]\dots}^{Q_2}. \quad (3.1)$$

Було встановлено коректність її означення рівністю (3.1), доведено неперервність, строгу монотонність і сингулярність при  $q_0 \neq 0, 5$  та лінійність при  $q_0 = 0, 5$ . У цьому пункті ми продовжуємо вивчення властивостей цієї функції і більше того, розглядаємо узагальнення, яке виникає при укрупненні моделі при заміні  $Q_2$ -зображення чисел його узагальненням  $Q_2^*$ -зображенням.

##### 3.1.1. Самоафінність графіка та інтегральні властивості інверсора цифр $Q_2$ -зображення чисел.

**Лема 3.1.** *Графік  $\Gamma$  функції  $I$  має складові*

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \text{ де } \Gamma_i = \{M(x; y) : x = \Delta_{i\alpha_2\alpha_3\dots}^{Q_2}, y = I(x)\}$$

$i$  є самоафінною множиною простору  $R^2$ , а саме:  $\Gamma_i = \varphi_i(\Gamma)$ , де

$$\varphi_i : \begin{cases} x' = \Delta_{i\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^{Q_2} = \beta_i + q_i x, \\ y' = \Delta_{[1-i][1-\alpha_1]\dots[1-\alpha_n]\dots}^{Q_2} = \beta_{1-i} + q_{1-i} I(x). \end{cases}$$

*Доведення.* 1. Спочатку доведемо, що  $\Gamma_i \subset \varphi_i(\Gamma)$ . Нехай  $M_*(x_*; y_*) \in \Gamma_i$ , тобто  $x_* = \Delta_{i\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{Q_2}$  і  $y_* = \Delta_{[1-\alpha_2]\dots[1-\alpha_n]\dots}^{Q_2}$ ,  $y_* = I(x_*)$ . Розглянемо точку  $M(x; y)$ , де  $x = \Delta_{\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{Q_2}$ ,  $y = \Delta_{[1-\alpha_2][1-\alpha_3]\dots[1-\alpha_n]\dots}^{Q_2}$ . Легко бачити, що  $I(x) = y$ . А отже,  $M_* \in \Gamma$  і  $M_* \in \varphi_i(\Gamma)$ , тобто  $\Gamma_i \subset \varphi_i(\Gamma)$ .

2. Для доведення включення  $\varphi_i(\Gamma) = \Gamma_i$  розглянемо точку  $M(x; y) \in \Gamma$  і її образ  $M'(x'; y')$  під дією афінного перетворення  $\varphi_i$ . Очевидно, що  $I(x') = y'$ , а оскільки першою цифрою  $Q_2$ -зображення числа  $x'$  є цифра  $i$ , то  $M' \in \Gamma_i$ . Отже,  $\varphi_i(\Gamma) \subset \Gamma_i$  і  $\varphi_i(\Gamma) = \Gamma_i$ . Лему доведено.  $\square$

**Наслідок 3.1.** Самоафінна розмірність графіка  $\Gamma$  функції  $I$  дорівнює числу  $\frac{-2}{\log_2(q_0 q_1)}$ , яке є дробовим при  $q_0 \neq \frac{1}{2}$ .

Справді, враховуючи структуру самоафінності графіка (вирази  $\varphi_0$  і  $\varphi_1$ ), рівняння для визначення самоафінної розмірності має вигляд

$$\left| \begin{array}{cc} q_0 & 0 \\ 0 & q_1 \end{array} \right|^{\frac{x}{2}} + \left| \begin{array}{cc} q_1 & 0 \\ 0 & q_0 \end{array} \right|^{\frac{x}{2}} = 1.$$

Його розв'язок є розмірністю графіка  $\Gamma$ .

**Теорема 3.1.** Для інверсора  $I$  цифр  $Q_2$ -зображення чисел виконується рівність

$$\int_0^1 I(x) dx = \frac{q_0^2}{1 - 2q_0 q_1}. \quad (3.2)$$

Має місце рівність

$$\int_{\Delta_{c_1\dots c_m}^{Q_2}} I(x) dx = AP + (q_0 q_1)^m \int_0^1 I(x) dx = AP + \frac{q_0^{m+2} q_1^m}{1 - 2q_0 q_1}, \quad (3.3)$$

$$\partial e P = |\Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_2}| = \prod_{i=1}^m q_{c_i}, \quad A = I(\Delta_{c_1 \dots c_m(1)}^{Q_2}) = \Delta_{[1-c_1] \dots [1-c_m](0)}^{Q_2}.$$

*Доведення.* За адитивною властивістю інтеграла

$$\int_0^1 I(x) dx = \int_0^{q_0} I(x) dx + \int_{q_0}^1 I(x) dx.$$

Враховуючи, що

$$I(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{Q_2}) = \beta_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\beta_{1-\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{1-\alpha_i}),$$

$$I(x = \Delta_{0\alpha_2 \dots \alpha_k}^{Q_2}) = q_0 + q_1(\beta_{1-\alpha_2} + \sum_{k=3}^{\infty} (\beta_{1-\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{1-\alpha_i})),$$

$$I(x = \Delta_{1\alpha_2 \dots \alpha_k}^{Q_2}) = 0 + q_0(\beta_{1-\alpha_2} + \sum_{k=3}^{\infty} (\beta_{1-\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{1-\alpha_i})),$$

і самоафінність графіка функції (див. попередню лему), маємо

$$\int_0^{q_0} I(x) dx = \int_{\Delta_0^{Q_2}} I(x) dx = \int_0^1 (q_0 + q_1 y) d(q_0 x) = q_0^2 + q_0 q_1 \int_0^1 I(x) dx,$$

$$\int_{q_0}^1 I(x) dx = \int_{\Delta_1^{Q_2}} I(x) dx = \int_0^1 (q_0 y) d(q_0 + q_1 x) = q_0 q_1 \int_0^1 I(x) dx.$$

Звідки отримуємо рівність

$$\int_0^1 I(x) dx = q_0^2 + 2q_0 q_1 \int_0^1 I(x) dx,$$

а отже, і рівність (3.2). Враховуючи, що 1) інтеграл виражає площу відповідної криволінійної трапеції; 2) площа має адитивну властивість; 3) графік є самоафінною фігурою; 4) функція  $I$  строго спадна, маємо

$$\int_{\Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_2}} I(x) d = |\Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_2}| I(\Delta_{c_1 \dots c_m(1)}^{Q_2}) + |\Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_2}| |\Delta_{[1-c_1] \dots [1-c_m]}^{Q_2}| \int_0^1 I(x) dx.$$

Але  $|\Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_2}| |\Delta_{[1-c_1] \dots [1-c_m]}^{Q_2}| = (q_0 q_1)^m$ . Тоді згідно з попередньою лемою, отримуємо рівність (3.3).  $\square$

**3.1.2. Узагальнення: інверсор  $Q_2^*$ -зображення чисел.** Нехай задано  $Q_2^*$ -зображення чисел відрізка  $[0; 1]$ , яке визначається матрицею  $\|q_{ik}\|$ .

**Означення 3.1.** Інверсором цифр  $Q_2^*$ -зображення чисел відрізка  $[0; 1]$  називається функція  $y = I^*(x)$ , означена рівністю

$$y = I^*(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q_2^*}) = \Delta_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2] \dots [1-\alpha_n] \dots}^{Q_2^*}.$$

Оскільки  $I^*(\Delta_{c_1 \dots c_n 0(1)}^{Q_2^*}) = I^*(\Delta_{c_1 \dots c_n 1(0)}^{Q_2^*})$ , то дане означення є коректним.

Якщо  $q_{0k} = \frac{1}{2}$  для будь-якого  $k \in N$ , тобто  $Q_2^*$ -зображення є класичним двійковим зображенням, то  $I^*(x) = 1 - x$ .

**Теорема 3.2.** Функція  $I^*(x)$  є неперервною, строго спадною, причому  $I^*(0) = 1$ ,  $I^*(1) = 0$ .

*Доведення.* Очевидно, що  $I^*(0 = \Delta_{(0)}^{Q_2^*}) = \Delta_{(1)}^{Q_2^*} = 1$ ,  $I^*(1 = \Delta_{(1)}^{Q_2^*}) = \Delta_{(0)}^{Q_2^*} = 0$ .

Нехай  $x_1 < x_2$ . Тоді згідно з наслідком 1.1  $x_1 = \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 0 d_1 d_2 \dots}^{Q_2^*}$ ,  $x_2 = \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 1 d'_1 d'_2 \dots}^{Q_2^*}$  і існує  $m \in N$  таке, що  $d_m - d'_m \neq 1$ . Згідно з наслідком 1.1 з леми 1.2

$$I^*(x_1) - I^*(x_2) = \Delta_{[1-c_1] \dots [1-c_m] 1 [1-d_1] \dots}^{Q_2^*} - \Delta_{[1-c_1] \dots [1-c_m] 0 [1-d'_1] \dots}^{Q_2^*} > 0.$$

Отже, функція  $I^*(x)$  є строго спадною.

Нехай  $x_0 = \Delta_{c_1 \dots c_n}^{Q_2^*}$  — будь-яка  $Q_2^*$ -унарна точка з  $(0; 1)$ ,  $x_0 \neq x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{Q_2^*}$ . Тоді існує  $m$  таке, що  $\alpha_i = c_i$  при  $i < m$  і  $\alpha_m \neq c_m$ . Умова  $x \rightarrow x_0$  рівносильна  $m \rightarrow \infty$ . Розглянемо вираз

$$\begin{aligned} |I^*(x) - I^*(x_0)| = & \left( \prod_{i=1}^{m-1} q_{c_i i} \right) |(\beta_{1-\alpha_m, m} + \beta_{1-\alpha_{m+1}, m+1} q_{1-\alpha_m, m} + \dots) - \\ & - (\beta_{1-c_m, m} + \beta_{1-c_{m+1}, m+1} q_{1-c_m, m} + \dots)|. \end{aligned}$$

Оскільки модуль у правій частині рівності не перевищує 1 як різниця двох чисел з  $[0; 1]$ , а  $\prod_{i=1}^{m-1} q_{c_i i} \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ , то  $|I^*(x) - I^*(x_0)| \rightarrow 0$ , коли  $(m \rightarrow \infty)$ . Отже, функція  $I^*(x)$  в точці  $x_0$  є неперервною.

Для  $Q_2^*$ -бінарної точки  $x_0 = \Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_2^*} 0(1) = \Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_2^*} 1(0)$  неперервність обґрунтовується аналогічно, але для доведення лівосторонньої неперервності використовується перше зображення, а для правосторонньої — друге. Отже,  $I^*(x)$  — неперервна в кожній точці відрізка  $[0; 1]$ .  $\square$

**Означення 3.2.** Якщо для матриці  $\|q_{ik}\|$  виконується рівність  $\lim_{k \rightarrow \infty} q_{0k} = q_0$ , то казатимемо, що вона має асимптотичну властивість.

**Теорема 3.3.** Якщо для майже всіх чисел  $x = \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^{Q_2^*}$  відрізка  $[0; 1]$  послідовність  $\frac{q_{1-\alpha_n(x)n}}{q_{\alpha_n(x)}}$  є або розбіжною, або має границю, відмінну від 1, то функція  $I^*(x)$  є сингулярною, тобто неперервною функцією, похідна якої рівна 0 майже скрізь (у розумінні міри Лебега).

*Доведення.* Функція  $I^*$ , будучи неперервною і монотонною, згідно з відомою теоремою Лебега має скінченну похідну майже скрізь. Розглянемо  $Q_2^*$ -унарну точку  $x_0 = \Delta_{c_1 \dots c_n \dots}^{Q_2^*}$ , в якій існує скінченна похідна  $I^*(x_0)$ . Тоді вона обчислюється за формулою

$$-I^*(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I^*(\Delta_{c_1 \dots c_n}^{Q_2^*} 0(1)) - I^*(\Delta_{c_1 \dots c_n}^{Q_2^*} 1(0))}{|\Delta_{[1-c_1] \dots [1-c_n]}^{Q_2^*}|} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{q_{1-c_n, n}}{q_{c_n n}}. \quad (3.4)$$

При виконанні умов теореми не виконується необхідна умова збіжності останнього нескінченного добутку. Тому згідно теореми Лебега похідна функції  $I^*$  дорівнює нулю. Це доводить сингулярність інверсора.  $\square$

**Наслідок 3.2.** Якщо матриця  $\|q_{ik}\|$  має асимптотичну властивість, причому  $0 < \lim_{k \rightarrow \infty} q_{0k} = q_0 < 1$  і  $q_0 \neq \frac{1}{2}$ , то функція  $I^*(x)$  є сингулярною.

*Доведення.* Якщо матриця  $\|q_{ik}\|$  має асимптотичну властивість, причому  $q_0 \neq \frac{1}{2}$ , то множники добутку (3.4) відокремлені від одиниці. А тому не виконується необхідна умова його збіжності. Отже, нескінченний добуток розбігається до нуля. А це є свідченням сингулярності функції  $I^*(x)$ .  $\square$

**Лема 3.2.** Нехай матриця  $\|q_{ik}\|$  має асимптотичну властивість. Якщо  $q_0 \neq \frac{1}{2}$ , то функція  $I^*$  в кожній  $Q_2$ -бінарній точці не має похідної (ні скінченної ні нескінченної).

*Доведення.* Нехай  $x_0 = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 0(1)}^{Q_2^*} = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 1(0)}^{Q_2^*}$  — будь-яка  $Q_2^*$ -бінарна точка інтервалу  $(0; 1)$ . Skorистаємось методом від супротивного. Припустимо, що існує похідна  $I^{*'}(x_0)$ . Тоді вона дорівнює циліндричній похідній, а саме може бути обчислена за формулами:

$$\begin{aligned} -I^{*'}(x_0) &= \left( \prod_{i=1}^m \frac{q_{1-c_i, i}}{q_{c_i}} \right) \frac{q_{1, m+1}}{q_{0, m+1}} \prod_{i=m+2}^{\infty} \frac{q_{1i}}{q_{0i}}; \\ -I^{*'}(x_0) &= \left( \prod_{i=1}^m \frac{q_{1-c_i, i}}{q_{c_i}} \right) \frac{q_{0, m+1}}{q_{1, m+1}} \prod_{i=m+2}^{\infty} \frac{q_{0i}}{q_{1i}}. \end{aligned}$$

При  $q_0 \neq \frac{1}{2}$  члени послідовностей  $\left(\frac{q_{0i}}{q_{1i}}\right)$  і  $\left(\frac{q_{1i}}{q_{0i}}\right)$  відокремленні від 1, а тому один з останніх множників у різних виразах похідної дорівнює нулю, а інший — нескінченності. Саме тому спільного значення ці вирази похідної не набувають. Отримане протиріччя доводить твердження.  $\square$

### 3.1.3. Інверсор і спряжені $Q_2^*$ -зображення.

**Означення 3.3.** Два  $Q_2^*$ -зображення, визначенні матрицями  $Q_2^* = \|q_{in}\|$  і  $\bar{Q}_2^* = \|\bar{q}_{in}\|$  відповідно, називаються спряженими, якщо  $\bar{q}_{0n} = q_{1n}$  для будь-якого  $n \in N$ .

**Теорема 3.4.** Для довільного числа  $x \in [0; 1]$  виконується рівність:

$$\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^{Q_2^*} + \Delta_{[1-\alpha_1(x)][1-\alpha_2(x)]\dots[1-\alpha_n(x)]\dots}^{\bar{Q}_2^*} = 1, \quad (3.5)$$

тобто має місце рівність  $I^*(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{Q_2^*}) = 1 - \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{\bar{Q}_2^*}$ .

*Доведення.* Для чисел 0 і 1 твердження очевидне. Його загальну правдоподібність засвідчують приклади для  $Q_2^*$ -бінарних чисел (1-го та 2-го рангу). Справді для числа  $x = \Delta_{1(0)}^{Q_2^*} = q_{01}$  і  $x' = \Delta_{0(1)}^{\bar{Q}_2^*} = \Delta_{1(0)}^{\bar{Q}_2^*} = \bar{q}_{01} = q_{11}$  маємо  $x + x' = q_{01} + q_{11} = 1$ .

Аналогічно, для  $x = \Delta_{01(0)}^{Q_2^*}$  і  $x' = \Delta_{10(1)}^{\bar{Q}_2^*} = \Delta_{11(0)}^{\bar{Q}_2^*}$ :  
 $\Delta_{01(0)}^{Q_2^*} + \Delta_{11(0)}^{\bar{Q}_2^*} = q_{01}q_{02} + (\bar{q}_{01} + \bar{q}_{11}\bar{q}_{02}) = q_{01}q_{02} + q_{11} + q_{01}q_{12} = q_{01}(q_{02} + q_{12}) + q_{11} = 1$ .

Для числа  $x = \Delta_{11(0)}^{Q_2^*}$  і  $x' = \Delta_{00(1)}^{\bar{Q}_2^*} = \Delta_{01(0)}^{\bar{Q}_2^*}$ :  
 $\Delta_{11(0)}^{Q_2^*} + \Delta_{01(0)}^{\bar{Q}_2^*} = (q_{01} + q_{11}q_{02}) + \bar{q}_{01}\bar{q}_{02} = q_{01} + q_{11}q_{02} + q_{11}q_{12} = 1$ .



Для  $Q_2^*$ -бінарних чисел 3-го рангу маємо:

$$\Delta_{001(0)}^{Q_2^*} + \Delta_{111(0)}^{\overline{Q_2^*}} = q_{01}q_{02}q_{03} + (q_{11} + q_{01}q_{12} + q_{01}q_{02}q_{13}) = q_{11} + q_{01}q_{12} + q_{01}q_{02} = 1;$$

$$\Delta_{011(0)}^{Q_2^*} + \Delta_{101(0)}^{\overline{Q_2^*}} = (q_{01}q_{02} + q_{01}q_{12}q_{03}) + (q_{11} + q_{01}q_{12}q_{13}) = 1;$$

$$\Delta_{101(0)}^{Q_2^*} + \Delta_{011(0)}^{\overline{Q_2^*}} = (q_{01} + q_{11}q_{02}q_{03}) + (q_{11}q_{12} + q_{11}q_{02}q_{13}) = 1;$$

$$\Delta_{111(0)}^{Q_2^*} + \Delta_{001(0)}^{\overline{Q_2^*}} = (q_{01} + q_{11}q_{02} + q_{11}q_{12}q_{03}) + q_{11}q_{12}q_{13} = 1.$$

Аналогічно рівність (3.5) перевіряється для будь-якого  $Q_2^*$ -бінарного числа.

Міркуючи загально, виконаємо перекодування циліндрів

$$\Delta_{c_1c_2\dots c_m}^{Q_2^*} = \Delta_{[1-c_1][1-c_2]\dots[1-c_m]} \text{ і числа } x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_2^*} = \Delta_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\dots[1-\alpha_n]\dots}$$

Легко бачити, що  $x' = 1 - x$ . Справді, подавши число  $x$  у вигляді

$$x = \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{a_1}\underbrace{0\dots 0}_{a_2}\dots\underbrace{0\dots 0}_{a_m}1\dots}, \text{ отримуємо } x' = \Delta_{\underbrace{1\dots 1}_{a_1}0\underbrace{1\dots 1}_{a_2}0\dots\underbrace{1\dots 1}_{a_m}0\dots}. \text{ Звідки}$$

очевидно, що  $x' + x = 1 = \Delta_{(1)}^{\overline{Q_2^*}}$ , оскільки  $|\Delta_{c_1\dots c_m}^{Q_2^*}| = \prod_{i=1}^m q_{c_i,i} = |\Delta_{[1-c_1]\dots[1-c_m]}^{\overline{Q_2^*}}|$ .

Тому  $x + x' = 1$ , що рівносильно рівності (3.5), а це і вимагалось довести.  $\square$

**Теорема 3.5.** *Інверсор  $I^*$  цифр  $Q_2^*$ -зображення чисел є сингулярною функцією тоді тільки тоді, коли*

$$L \equiv \sum_{n=1}^{\infty} [(1 - 2q_{0n})^2 + (1 - 2q_{1n})^2] = \infty \quad (3.6)$$

*і абсолютно неперервною при  $L < \infty$ .*

*Доведення.* Зображення  $\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^{Q_2^*}$  є значенням функції розподілу  $F_{\xi}(x)$  випадкової величини  $\xi = \Delta_{\xi_1\xi_2\dots\xi_n\dots}^2$ , цифри двійкового зображення якої є незалежними випадковими величинами, що мають розподіли  $P\{\xi_n = i\} = q_{in}$ ,  $i = 0, 1$ . Тому диференціальні властивості функцій  $I^*(x)$  і  $F_{\xi}(x)$  тісно пов'язані. Точніше: якщо існує скінченна похідна в точці  $x_0$  однієї функції, то в цій точці існує і скінченна похідна іншої функції. Таким чином, лебегівські властивості функцій ідентичні. Як відомо [49], умова (3.6) є необхідною і достатньою для сингулярності функції  $F_{\xi}(x)$ . Отже, вони є одночасно сингулярними або абсолютно неперервними.  $\square$

### 3.2. Конструкція одного класу функцій $S$ , якому належить інверсор

Нехай задано два  $Q_2^*$ -зображення чисел, визначені послідовностями  $(q_{0k})$  і  $(g_{0k})$  відповідно (друге називатимемо  $G_2^*$ -зображенням), і послідовність  $\bar{\varphi} \equiv (\varphi_k)$  фінітних функцій  $\varphi_k : A \times A \rightarrow A$ .

Розглядається функція  $f_{\bar{\varphi}}$  з  $\langle 0; 1 \rangle$  в  $\langle 0; 1 \rangle$ , означена рівністю

$$f_{\bar{\varphi}}(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_2^*}) = \Delta_{\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2) \varphi_2(\alpha_2, \alpha_3) \dots \varphi_k(\alpha_k, \alpha_{k+1}) \dots}^{G_2^*}. \quad (3.7)$$

Означення функції  $f_{\bar{\varphi}}$  буде коректним лише тоді, коли вираз (3.7) даватиме рівні значення для різних зображень  $Q_2^*$ -бінарного числа. Забезпечити це можна домовленістю використовувати лише те зображення, яке має період  $(0)$ . Зауважимо, що число 1 має єдине  $Q_2^*$ -зображення  $\Delta_{(1)}^{Q_2^*}$ .

Зрозуміло, що властивості функції  $f_{\bar{\varphi}}$  залежать від послідовності функцій  $\bar{\varphi} = (\varphi_k)$ , означених на послідовностях пар  $(\alpha_k, \alpha_{k+1})$  цифр зображення аргумента, а саме на ланцюгу скріплених пар цифр з ланками

$$(\alpha_1, \alpha_2) - (\alpha_2, \alpha_3) - (\alpha_3, \alpha_4) - \dots - (\alpha_{k-1}, \alpha_k) - (\alpha_k, \alpha_{k+1}) - \dots$$

Існує всього 16 різних функцій  $\varphi_k : A \times A \rightarrow A$ .

Функцію  $\varphi_k$  зручно асоціювати з матрицею  $\begin{pmatrix} a_{00}^{(k)} & a_{01}^{(k)} \\ a_{10}^{(k)} & a_{11}^{(k)} \end{pmatrix}$ , елементами якої є числа 0 та 1, а саме:  $a_{ij}^{(k)} = \varphi_k(i, j) \in A$ . Тоді кожному з функцій  $f_{\bar{\varphi}}$  можна ототожнювати з послідовністю матриць  $M_k = \begin{pmatrix} a_{00}^{(k)} & a_{01}^{(k)} \\ a_{10}^{(k)} & a_{11}^{(k)} \end{pmatrix}$ .

Ввівши групову операцію  $*$  над матрицями

$$M * M' = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a'_{00} & a'_{01} \\ a'_{10} & a'_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{00} & d_{01} \\ d_{10} & d_{11} \end{pmatrix},$$

де  $d_{ij} = |a_{ij} - a'_{ij}|$ , ми отримуємо комутативну групу матриць. Її нейтральним елементом є матриця, всі елементи якої рівні 0 (цій матриці при сталій

послідовності  $\bar{\varphi}$  відповідає тривіальна функція  $f_{\bar{\varphi}} = 0$ ) і кожна матриця сама собі симетрична. Операція над матрицями породжує групу функцій  $\varphi : A \times A \rightarrow A$ , а це в свою чергу індукує при сталій послідовності функцій  $\bar{\varphi}$  групу функцій  $f_{\bar{\varphi}}$ . При цьому результатом операції над парою двоїстих функцій  $\varphi$  і  $\tilde{\varphi}$ , тобто таких, що  $\tilde{\varphi} = 1 - \varphi$  є тривіальна функція  $f_{\tilde{\varphi}} = 1$ , якій відповідає матриця з елементами рівними 1. Кожна функція в цій групі є симетричною (оберненою) сама собі.

Серед 16 функцій  $\varphi$  існує 8 пар двоїстих, які мають на перший погляд «схожі» властивості і визначаються з точністю до «симетрії» цифр. Це функції  $f_{\varphi}$ , породжені наступними функціями:

$$\begin{aligned} \varphi_1(i, j) &= \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \cdot j = 0, \\ 1, & \text{якщо } i \cdot j \neq 0; \end{cases} & \varphi_2(i, j) &= \begin{cases} 0, & \text{якщо } i(i + j) \neq 1, \\ 1, & \text{якщо } i(i + j) = 1; \end{cases} \\ \varphi_3(i, j) &= \begin{cases} 0, & \text{якщо } i(i + j) = 0, \\ 1, & \text{якщо } i(i + j) \neq 0; \end{cases} & \varphi_4(i, j) &= \begin{cases} 0, & \text{якщо } j(i + j) \neq 1, \\ 1, & \text{якщо } j(i + j) = 1; \end{cases} \\ \varphi_5(i, j) &= \begin{cases} 0, & \text{якщо } j(i + j) = 0, \\ 1, & \text{якщо } j(i + j) \neq 0; \end{cases} & \varphi_6(i, j) &= \begin{cases} 0, & \text{якщо } i = j, \\ 1, & \text{якщо } i \neq j; \end{cases} \\ \varphi_7(i, j) &= \begin{cases} 0, & \text{якщо } i + j = 0, \\ 1, & \text{якщо } i + j \neq 0; \end{cases} \end{aligned}$$

або  $\varphi_1(i, j) = i \cdot j$ ,  $\varphi_2(i, j) = |i - j|i$ ,  $\varphi_3(i, j) = i$ ,  $\varphi_4(i, j) = |i - j|j$ ,

$\varphi_5(i, j) = j$ ,  $\varphi_6(i, j) = |i - j|$ ,  $\varphi_7(i, j) = i \cdot j + |i - j|$ , та їх двійниками.

Легко бачити істинність наступного твердження.

**Лема 3.3.** Для двоїстих функцій  $f_{\varphi}$  і  $f_{\bar{\varphi}}$  має місце рівність:

$$f_{\bar{\varphi}}(x) = I(f_{\varphi}(x)).$$

*Доведення.* Справді, якщо  $f_{\varphi}(x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \alpha_{n+1} \dots}^{Q_2}) = \Delta_{\varphi(\alpha_1, \alpha_2) \dots \varphi(\alpha_n, \alpha_{n+1}) \dots}^{Q_2}$ ,

то  $I(f_{\varphi}(x)) = I(\Delta_{\varphi(\alpha_1, \alpha_2) \varphi(\alpha_2, \alpha_3) \dots \varphi(\alpha_{n-1}, \alpha_n) \varphi(\alpha_n, \alpha_{n+1}) \dots}^{Q_2}) =$

$$\begin{aligned}
&= \Delta_{[1-\varphi(\alpha_1, \alpha_2)][1-\varphi(\alpha_2, \alpha_3)] \dots [1-\varphi(\alpha_{n-1}, \alpha_n)][1-\varphi(\alpha_n, \alpha_{n+1})] \dots}^{Q_2} = \\
&= \Delta_{\bar{\varphi}(\alpha_1, \alpha_2) \bar{\varphi}(\alpha_2, \alpha_3) \dots \bar{\varphi}(\alpha_{n-1}, \alpha_n) \bar{\varphi}(\alpha_n, \alpha_{n+1}) \dots}^{Q_2} = f_{\bar{\varphi}}(x). \quad \square
\end{aligned}$$

Дане твердження може породити ілюзію, що двоїсті функції мають «ідентичні» властивості, тому звернемо увагу на пару двоїстих функцій  $f_{\varphi_3}(x)$  і  $f_{\tilde{\varphi}_3}(x)$ , породжених  $Q_2$ -зображенням чисел і функціями  $\varphi_3(i, j) = i$  і  $\tilde{\varphi}_3(i, j) = 1 - i$ :

$$\begin{aligned}
f_{\varphi_3}(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}) &= \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2} = x; \\
f_{\tilde{\varphi}_3}(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}) &= \Delta_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2] \dots [1-\alpha_n] \dots}^{Q_2} = I(x).
\end{aligned}$$

Оскільки функція  $f_{\tilde{\varphi}_3}$  є інверсором цифр  $Q_2$ -зображення чисел і як зазначалось вище має непрості диференціальні властивості, а саме є сингулярною, то диференціальні властивості у двоїстих функцій можуть бути принципово різними. А тому заслуговують на окрему увагу.

Розглянемо пару двоїстих функцій  $f_{\varphi_5}$  і  $f_{\tilde{\varphi}_5}$ , породжених функціями  $\varphi_5(i, j) = j$  і  $\tilde{\varphi}_5(i, j) = 1 - j$ . Нескладно показати, що дані функції пов'язані з відомими функціями такими рівностями:

$$\begin{aligned}
f_{\varphi_5}(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}) &= \Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2} = w(x), \\
f_{\tilde{\varphi}_5}(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}) &= \Delta_{[1-\alpha_2][1-\alpha_3] \dots [1-\alpha_n] \dots}^{Q_2} = I(w(x)),
\end{aligned}$$

де  $I(x)$  — інверсор цифр  $Q_2$ -зображення чисел,  $w(x)$  — оператор лівостороннього зсуву цифр  $Q_2$ -зображення чисел.

Оскільки множина послідовностей ( $\varphi_n$ ) фінітних функцій  $\varphi_n$  є континуальною, то мова йде про континуальний клас  $S$  функцій  $f_{\bar{\varphi}}$ . Стосовно кожної з функцій  $f_{\bar{\varphi}}$  класу  $S$  нас цікавлять питання:

- неперервність функції, точки розриву і стрибки;
- тополого-метричні і фрактальні властивості множини значень функції;
- автотодельні властивості функції та її графіка;
- варіаційні властивості функції;
- трансформація фрактальної розмірності борелівських підмножин



$G_2^*$ )-перетворення» служить той факт, що  $f_{\overline{\varphi}}(x) = x$  за умови  $G_2^* = Q_2^*$ , тобто, коли  $q_{0k} = g_{0k}$  для будь-якого  $k \in N$ .

**Лема 3.5.** *Якщо  $\varphi_k(a, b) = a$  для будь-якого натурального  $k \in N$ , тобто  $f_{\overline{\varphi}}(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{Q_2^*}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{G_2^*}$ , то  $f_{\overline{\varphi}}$  є неперервною строго зростаючою функцією розподілу  $F_\xi$  випадкової величини  $\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k}^{Q_2^*}$ , цифри  $(\xi_k)$   $Q_2^*$ -зображення якої є незалежними і мають розподіли  $P\{\xi_k = i\} = g_{ik}$ . Функція  $F_\xi$  є або абсолютно неперервною, або сингулярною.*

Справді, вираз функції розподілу  $F_\xi$  випадкової величини  $\xi$  має  $G_2^*$ -представлення (зображення). Детальне обґрунтування цього можна знайти у роботах [70, 71], де вивчалися і інші властивості цієї функції, зокрема диференціального характеру. В цих роботах встановлено належність функції до чистих неперервних лебегівських типів і критерії абсолютної неперервності та сингулярності.

Зауважимо лише, що у загальному випадку локальні диференціальні властивості функції  $F_\xi$  є достатньо складними.

### 3.4. Множини значень функцій класу S

**Лема 3.6.** *Якщо в послідовності  $(\varphi_n)$  функція  $\varphi_m$  є константою  $i$ , то множина значень функції  $f_{\overline{\varphi}} \in S$  є підмножиною об'єднання циліндрів  $m$ -го рангу, а саме:*

$$E_{f_{\overline{\varphi}}} \subset \bigcup_{c_1 \in A} \bigcup_{c_2 \in A} \dots \bigcup_{c_{m-1} \in A} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{m-1} i}^{G_2^*} \quad (3.8)$$

*Доведення.* Нехай  $(\varphi_n)$  — послідовність, яка задовольняє умови твердження,  $f_{\overline{\varphi}}$  — їй відповідна функція. Оскільки  $\varphi_m(a, b) = i$  для будь-якої пари  $(a, b)$ , то  $m$ -та цифра  $G_2^*$ -зображення значень функції  $f_{\overline{\varphi}}$  не дорівнює  $1 - i$ , а тому виконується включення (3.8).  $\square$

**Наслідок 3.4.** *Якщо серед функцій послідовності  $(\varphi_n)$  існує нескінченна підпослідовність констант, то множина значень функції  $f_{\overline{\varphi}}$  є під-*

множиною множини канторівського типу  $C[G_2^*, V_k]$ , де

$$V_k = \begin{cases} A, & \text{якщо } \varphi_k \text{ — не константа;} \\ \{j_k\}, & \text{якщо } \varphi_k(a, b) = j_k. \end{cases}$$

### 3.5. Неперервність функцій класу S

**Лема 3.7.** *Кожна функція  $f_{\bar{\varphi}}$  класу S є неперервною на множині  $Q_2^*$ -унарних чисел.*

*Доведення.* Для того щоб довести неперервність в  $Q_2^*$ -унарній точці  $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2^*}$  відрізка  $[0; 1]$  покажемо, що

$$\lim_{x' \rightarrow x} |f(x') - f(x)| = 0. \quad (3.9)$$

З того, що  $x' \neq x$  слідує, що існує такий номер  $m$ , що  $\alpha_m(x') \neq \alpha_m(x)$  і  $\alpha_i(x') = \alpha_i(x)$ ,  $i < m$ . Тоді умова  $x' \rightarrow x$  рівносильна тому, що  $m \rightarrow \infty$ . Непорушуючи загальності, вважатимемо, що  $\alpha_m(x) = 1$ , тоді  $\alpha_m(x') = 0$ .

Розглянемо різницю значень функції  $f$  при  $x$  і  $x'$ :

$$\begin{aligned} f_{\bar{\varphi}}(x) - f_{\bar{\varphi}}(x') &= f_{\bar{\varphi}}(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m-1} 1 \alpha_{m+1} \dots}^{Q_2^*}) - f_{\bar{\varphi}}(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m-1} 0 \alpha'_{m+1} \dots}^{Q_2^*}) = \\ &= \Delta_{\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2) \dots \varphi_{m-1}(\alpha_{m-1}, 1) \varphi_m(1, \alpha_{m+1}) \dots}^{G_2^*} - \\ &= \Delta_{\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2) \dots \varphi_{m-1}(\alpha_{m-1}, 0) \varphi_m(0, \alpha'_{m+1}) \dots}^{G_2^*} = \prod_{j=1}^{m-2} g_{\varphi_j(\alpha_j, \alpha_{j+1}), j} \cdot A, \end{aligned}$$

де  $A = (\omega^{m-2}(\Delta_{\varphi_{m-1}(\alpha_{m-1}, 1) \varphi_m(1, \alpha_{m+1}) \dots}^{G_2^*}) - \omega^{m-2}(\Delta_{\varphi_{m-1}(\alpha_{m-1}, 0) \varphi_m(0, \alpha'_{m+1}) \dots}^{G_2^*}))$ .

Оскільки  $0 \leq |A| \leq 1$ , а  $\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{m-2} g_{\varphi_j(\alpha_j, \alpha_{j+1}), j} = 0$ , то  $A \prod_{j=1}^{m-2} g_{\varphi_j(\alpha_j, \alpha_{j+1}), j} \rightarrow 0$ , коли  $m \rightarrow \infty$ , а тому  $\lim_{x' \rightarrow x} |f_{\bar{\varphi}}(x') - f_{\bar{\varphi}}(x)| = 0$ .  $\square$

**Теорема 3.6.** *Для того щоб функція  $y = f_{\bar{\varphi}}(x)$  була неперервною, необхідно і достатньо, щоб її значення від двох різних зображень  $Q_2^*$ -бінарних чисел збігалися, тобто*

$$f_{\bar{\varphi}}(\Delta_{c_1 \dots c_m 0(1)}^{Q_2^*}) = f_{\bar{\varphi}}(\Delta_{c_1 \dots c_m 1(0)}^{Q_2^*}), \quad (3.10)$$

для будь-якого набору  $(c_1, \dots, c_m)$  нулів та одиниць.

*Доведення.* Нехай  $x_0 = \Delta_{c_1 \dots c_m 0(1)}^{Q_2^*} = \Delta_{c_1 \dots c_m 1(0)}^{Q_2^*}$  —  $Q_2^*$ -бінарна точка.

1. Необхідність. Якщо функція  $f_{\bar{\varphi}}$  неперервна в точці  $x_0$ , тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_{\bar{\varphi}}(x) = f_{\bar{\varphi}}(x_0),$$

то вона неперервна зліва в точці  $x_0$  і неперервна справа в цій точці.

Розглянемо послідовність  $x_n = \Delta_{c_1 \dots c_m 0 \underbrace{1 \dots 1}_n(0)}^{Q_2^*} \rightarrow x_0 - 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\bar{\varphi}}(x_n) = f_{\bar{\varphi}}(x_0) = f_{\bar{\varphi}}(\Delta_{c_1 \dots c_m 0(1)}^{Q_2^*}).$$

Розглянемо тепер послідовність  $\bar{x}_n = \Delta_{c_1 \dots c_m \underbrace{0 \dots 0}_n 1(0)}^{Q_2^*} \rightarrow x_0 + 0$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\bar{\varphi}}(\bar{x}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\bar{\varphi}}(\Delta_{c_1 \dots c_m \underbrace{0 \dots 0}_n 1(0)}^{Q_2^*}) = f_{\bar{\varphi}}(x_0) = f_{\bar{\varphi}}(\Delta_{c_1 \dots c_m 1(0)}^{Q_2^*}).$$

Отже, має місце рівність (3.10).

2. Достатність. Тепер доведемо, що з

$$f_{\bar{\varphi}}(x_0) = f_{\bar{\varphi}}(\Delta_{c_1 \dots c_m 0(1)}^{Q_2^*}) = f_{\bar{\varphi}}(\Delta_{c_1 \dots c_m 1(0)}^{Q_2^*}) \quad (3.11)$$

впливає неперервність  $f_{\bar{\varphi}}$  в точці  $x_0$ . Спочатку доведемо неперервність в точці  $x_0$  зліва. Для цього розглянемо число  $x < x_0$ , достатньо близьке до  $x_0$ , а саме:  $x = \Delta_{c_1 \dots c_m 0 \underbrace{1 \dots 1}_n \alpha_{m+n+2} \alpha_{m+n+3} \dots}^{Q_2^*}$ , і модуль різниці

$$\delta \equiv |f_{\bar{\varphi}}(x_0) - f_{\bar{\varphi}}(x)| = A_n |\omega^{m+n+1}(f_{\bar{\varphi}}(x)) - \omega^{m+n+1}(f_{\bar{\varphi}}(x_0))|,$$

де  $A_n = g_{\varphi_m(c_m, 0), m} g_{\varphi_{m+1}(0, 1), m+1} \prod_{j=1}^{m-1} g_{\varphi_j(c_j, c_{j+1}), j} \prod_{i=1}^n g_{\varphi_{m+1+i}(1, 1), m+1+i}$ .

Оскільки  $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$ , а  $A_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), то  $\delta \rightarrow 0$ , що рівносильно неперервності  $f_{\bar{\varphi}}$  в точці  $x_0$  зліва.

Аналогічними міркуваннями обґрунтовується неперервність функції в точці  $x_0$  справа. При цьому розглядається довільне  $x > x_0$ , достатньо близьке до  $x_0$ , а саме:  $x = \Delta_{c_1 \dots c_m 1 \underbrace{0 \dots 0}_n \alpha_{m+n+2} \alpha_{m+n+3} \dots}^{Q_2^*}$ .  $\square$

**Теорема 3.7.** *Якщо функція  $f_{\bar{\varphi}}$  неперервна в кожній точці відрізка  $[0; 1]$ , то вона є тотожним перетворенням, інверсором або константою.*



*Доведення.* Оскільки  $f_{\bar{\varphi}}$  неперервна на  $[0; 1]$ , то згідно з попереднім твердженням вона неперервна в кожній  $Q_2^*$ -бінарній точці, тобто

$$f_{\bar{\varphi}}(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}0(1)}^{Q_2^*}) = f_{\bar{\varphi}}(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}1(0)}^{Q_2^*}), n \in N.$$

Звідки слідує, що для будь-якого  $n \in N$  виконуються рівності  $\varphi_n(0, 1) = \varphi_n(1, 0) = \varphi_n(0, 0) = \varphi_n(1, 1)$  або  $\varphi_n(0, 1) \neq \varphi_n(1, 0) = \varphi_n(0, 0) \neq \varphi_n(1, 1)$ . В першому випадку маємо, що  $\varphi(a, b) = Const$ , а в другому випадку кожна з функцій  $\varphi_n$  задається матрицею  $\begin{pmatrix} i & i \\ j & j \end{pmatrix}$ , де  $\varphi_n(0, 1) = \varphi_n(0, 0) = i$ ,  $\varphi_n(1, 0) = \varphi_n(1, 1) = j$ ,  $i, j \in A$ . Такими функціями є  $y = f_{\bar{\varphi}}(x) = x$  і  $y = I(x)$ . Тому множина неперервних функцій класу  $S$  вичерпується константами, тотожним перетворення і інверсором цифр.  $\square$

**Наслідок 3.5.** *Функції класу  $S$ , окрім неперервних є неперервними на множині  $Q_2$ -унарних чисел і розривними на множині  $Q_2$ -бінарних чисел.*

### 3.6. Фрактальна 101-функція, означена в термінах

#### $Q_2$ -зображення дійсних чисел

Розглядається функція  $f_{\varphi_1}$ , визначена на  $[0; 1]$ , яка задовольняє умову

$$f_{\varphi_1}(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}\alpha_n\alpha_{n+1}\dots}^{Q_2}) = \Delta_{\varphi(\alpha_1,\alpha_2)\varphi(\alpha_2,\alpha_3)\dots\varphi(\alpha_{n-1},\alpha_n)\varphi(\alpha_n,\alpha_{n+1})\dots}^{Q_2}, \quad (3.12)$$

де  $\varphi_1(\alpha_n, \alpha_{n+1}) = \alpha_n \cdot \alpha_{n+1}$ ,  $n \in N$ .

Легко переконатися в тому, що для двох зображень  $Q_2$ -бінарного числа  $\Delta_{\alpha_1\dots\alpha_n 1(0)}^{Q_2} = \Delta_{\alpha_1\dots\alpha_n 0(1)}^{Q_2}$  має місце нерівність  $f_{\varphi_1}(\Delta_{\alpha_1\dots\alpha_n 1(0)}^{Q_2}) \neq f_{\varphi_1}(\Delta_{\alpha_1\dots\alpha_n 0(1)}^{Q_2})$ . Тому за для коректності означення функції домовимось не використовувати  $Q_2$ -зображення з періодом (1).

**Теорема 3.8.** *Область значень функції  $f_{\varphi_1}$  співпадає з множиною канторівського типу  $E_{f_{\varphi_1}} = C[Q_2, \overline{(101)}, \overline{(1)}]$ , де*

$$C[Q_2, \overline{(101)}, \overline{(1)}] \equiv \{x : x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots}^{Q_2} \mid \alpha_{n-1}\alpha_n\alpha_{n+1} \neq 101, (\alpha_n) \neq (1)\}.$$

*Доведення.* Доведемо, що  $E_{f_{\varphi_1}} \in C[Q_2, \overline{(101)}, \overline{(1)}]$ . Для цього візьмемо довільний елемент  $y$  із  $E_{f_{\varphi_1}}$  і покажемо, що він належить до  $C[Q_2, \overline{(101)}, \overline{(1)}]$ . Припустимо, що  $y \notin C[Q_2, \overline{(101)}, \overline{(1)}]$ , тоді  $y \in \overline{C[Q_2, \overline{(101)}, \overline{(1)}]}$ , тобто існує такий  $y$ ,  $Q_2$ -зображення якого має вигляд  $y = \Delta_{[\alpha_1\alpha_2]\dots 101\dots}^{Q_2}$ . Звідси слідує, що аргумент  $x$  можна відшукати з системи:

$$\begin{cases} \alpha_1\alpha_2 = \alpha_1(x)\alpha_2(x), \\ \dots\dots\dots, \\ \alpha_{k-1}\alpha_k = 1, \\ \alpha_k\alpha_{k+1} = 0, \\ \alpha_{k+1}\alpha_{k+2} = 1. \end{cases}$$

Але дана система є несумісною, а отже, такого  $x$  не існує, а тому і не існує  $y \in E_{f_{\varphi_1}}$ . Отже,  $y \in C[Q_2, \overline{(101)}, \overline{(1)}]$ . В силу того, що  $y$  вибирався довільний з  $E_{f_{\varphi_1}}$  слідує, що  $E_{f_{\varphi_1}} \subseteq C[Q_2, \overline{(101)}, \overline{(1)}]$ . Покажемо, що  $C[Q_2, \overline{(101)}, \overline{(1)}] \subseteq E_{f_{\varphi_1}}$ . Візьмемо довільний елемент  $y$  із  $C[Q_2, \overline{(101)}, \overline{(1)}]$ , й покажемо, що він належить до  $E_{f_{\varphi_1}}$ . Припустимо супротивне. Тоді  $y$  не можна подати у вигляді залежної змінної функції  $f_{\varphi_1}$ , тобто не існує такого  $x$ , який відобразиться в  $y$ . Це можливо лише тоді, коли в зображенні числа  $y$  є комбінація послідовних цифр 101, або (1), що неможливо за означенням множини  $C[Q_2, \overline{(101)}, \overline{(1)}]$ . Тому  $y \in E_{f_{\varphi_1}}$ , а в силу довільності вибору  $y$  слідує, що  $C[Q_2, \overline{(101)}, \overline{(1)}] \subseteq E_{f_{\varphi_1}}$ . Що й потрібно було довести.  $\square$

*Зауваження 3.2.* Міра Лебега множини  $C[Q_2, \overline{(101)}, \overline{(1)}]$  рівна 0.

**Теорема 3.9.** Множина значень  $E_{f_{\varphi_1}}$  функції  $f_{\varphi_1}$  є  $N$ -самоподібною множиною з  $N$ -самоподібною розмірністю, яка є розв'язком рівняння

$$(q_0)^x + (q_1)^x - (q_0q_1)^x + (q_0^2q_1)^x = 1. \quad (3.13)$$

*Доведення.* Легко бачити, що множина  $E_{f_{\varphi_1}}$  є зліченим об'єднанням своїх зменшених копій з різними коефіцієнтами, а саме:

$$E_{f_{\varphi_1}} = \Delta'_0 \cup \Delta'_{100} \cup \Delta'_{1100} \cup \dots,$$

де  $E_{f_{\varphi_1}} \stackrel{q_0}{\sim} \Delta'_0$ ,  $E_{f_{\varphi_1}} \stackrel{q_0^2 q_1}{\sim} \Delta'_{100}$ ,  $E_{f_{\varphi_1}} \stackrel{q_0^2 q_1^2}{\sim} \Delta'_{1100}$ . Тоді її самоподібна розмірність є розв'язком рівняння (3.13).  $\square$

**Наслідок 3.6.** Якщо  $q_0 = \frac{1}{2}$ , тобто функція  $f_{\varphi_1}(x)$  задана в двійковій системі числення, то самоподібна розмірність множини значень буде розв'язком рівняння  $(\frac{1}{2})^x + (\frac{1}{2^3})^x + (\frac{1}{2^4})^x + \dots = 1$ . Й відповідно рівною

$$x = \log_{\frac{1}{2}} \left( \sqrt[3]{\frac{11}{54} + \frac{\sqrt{421}}{54}} + \sqrt[3]{\frac{11}{54} - \frac{\sqrt{421}}{54}} + \frac{1}{3} \right) \approx 0,717.$$

### 3.6.1. Фрактальні властивості графіка функції.

**Теорема 3.10.** Графік функцій  $\Gamma_{f_{\varphi_1}} = \{(x; f_{\varphi_1}(x)) : x \in [0; 1)\}$  є  $N$ -самоафінною множиною, причому  $\Gamma_{f_{\varphi_1}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \psi_n(\Gamma_{f_{\varphi_1}})$ , де

$$\psi_n : \begin{cases} x' = q_1^{n-1} q_0 x + (1 - q_1^{n-1}), \\ y' = q_1^{n-2} q_0^2 x + (1 - q_1^{n-2}). \end{cases}$$

*Доведення.* Нехай  $G = \delta_0(\Gamma_{f_{\varphi_1}}) \cup \delta_{10}(\Gamma_{f_{\varphi_1}}) \cup \delta_{110} \dots \cup \delta_{\underbrace{1 \dots 1}_n 0}(\Gamma_{f_{\varphi_1}}) \cup \dots$ . Доведемо, що  $\Gamma_{f_{\varphi_1}} = G$ . Для цього спочатку покажемо, що  $G \subseteq \Gamma_{f_{\varphi_1}}$ . Розглянемо довільну точку  $M \in G$ . Тоді існує такий номер  $k$  для оператора  $\delta_k$ , що  $M \in \delta_{\underbrace{1 \dots 1}_n 0}(\Gamma_{f_{\varphi_1}})$ . Тобто

$$\psi_k : \begin{cases} x' = q_1^{k-1} q_0 x + (1 - q_1^{k-1}), \\ y' = q_1^{k-2} q_0^2 x + (1 - q_1^{k-2}). \end{cases}$$

Легко довести, що  $y_M \in f_{\varphi_1}(x_M)$ , тобто  $M \in \Gamma_{f_{\varphi_1}}$ . Покажемо, що  $\Gamma_{f_{\varphi_1}} \subseteq G$ .

Нехай  $M \in \Gamma_{f_{\varphi_1}}$ , тобто  $M(x; f_{\varphi_1}(x))$  і  $(\alpha_i(x)) = (\Delta_{\underbrace{1 \dots 1}_i 0})$ ,  $i \in N$ . Тоді

$$x = \Delta_{\underbrace{1 \dots 1}_i 0}^{Q_2} = q_1^{i-1} q_0 x + (1 - q_1^{i-1}),$$

а тому  $f_{\varphi_1}(x) = \Delta_{\underbrace{1 \dots 1}_i 0}^{Q_2} = q_1^{i-2} q_0^2 x + (1 - q_1^{i-2})$ .

А отже,  $M \in \delta_{\underbrace{1 \dots 1}_i 0}(\Gamma_{f_{\varphi_1}})$ . Що й вимагалось довести.  $\square$

**Наслідок 3.7.** Самоафінна розмірність графіка  $\Gamma_{f_{\varphi_1}}$  функції  $f_{\varphi_1}$  є

розв'язком рівняння:

$$q_0^x + \frac{(q_0^3 q_1)^{\frac{x}{2}}}{1 - q_1^x} = 1.$$

### 3.6.2. Множини рівнів 101-функції.

**Теорема 3.11.** *Функція  $f_{\varphi_1}$  має як скінченні, так і нескінченні рівні. Разом з цим кожен  $Q_2$ -бінарний рівень  $y_0$  функції  $f_{\varphi_1}$  є континуальним, а  $Q_2$ -унарний рівень  $y_0$  функції  $f_{\varphi_1}$  є континуальним тоді і тільки тоді, коли зображення числа  $y_0$  містить нескінченну кількість серій нулів, довжиною більшою 3.*

*Доведення.* Нехай  $y$  довільне число з  $E_{f_{\varphi_1}}$ . Оскільки  $y$  може бути як  $Q_2$ -бінарним, так  $Q_2$ -унарним, то розглянемо ці випадки окремо.

В першому випадку  $y$  має зображення  $y = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_2}$ ,  $m \in N_0$ . Тоді множина прообразів рівня  $y$  складається з точок пари  $Q_2$ -цифр зображення яких починаючи з  $(m+2)$ -го місця дорівнюють  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ . Перетворення  $g(\alpha_{m+i}(x), \alpha_{m+1+i}(x)) = 2\alpha_{m+i} + \alpha_{m+1+i}$ ,  $i \in \{2, 3, 4, \dots\}$ , яке парі цифр  $(\alpha_{m+i}(x), \alpha_{m+1+i}(x))$  ставить у відповідність трійкову цифру числа  $z = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}^3 \in [0; 1]$ . Таким чином між відрізком  $[0; 1]$  і множиною  $\omega^{m+1} f_{\varphi_1}^{-1}(y)$  встановлюється взаємно однозначна відповідність. А отже, потужності  $[0; 1]$  і  $f_{\varphi_1}^{-1}(y)$  співпадають.

Розглянемо випадок, коли  $y$  є  $Q_2$ -унарним числом. Нехай  $y$  в своєму  $Q_2$ -зображенні має нескінченну кількість серій нулів, довжиною більше трьох, тобто  $y = \Delta_{\underbrace{0 \dots 0}_{a_1} \underbrace{1 \dots 1}_{b_1} \underbrace{0 \dots 0}_{a_2} \underbrace{1 \dots 1}_{b_2} \dots}^{Q_2}$ ,  $b_i \in N$ ,  $a_j - 3 \in N$ . Тоді кожна множина рівня є множиною точок для яких прообрази серій нулів значення функції можна представити у вигляді

$$f_{\varphi_1}^{-1}(y) = \{x : x = \overline{\Delta}_{a_{11} a_{12} \dots a_{1s} b_1 a_{21} a_{22} \dots a_{2s} b_2 \dots}^{Q_2}, \alpha_{ij} \in \{1; 2\}, i \in N, j \in N\},$$

де  $\overline{\Delta}_{a_1 a_2 \dots}^{Q_2}$  — модифіковане нескінченно символічне  $Q_2$ -зображення. Відображення  $g$  встановлює бієкцію між множиною такого рівня і відрізком  $[0; 1]$

$$g(\alpha_j) : \begin{cases} 2, & \text{якщо } \alpha_j = 0, \\ 1, & \text{якщо } \alpha_j = 1, \end{cases} \quad \text{що й доводить континуальність.} \quad \square$$

**Лема 3.8.** Якщо число  $x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_2}$  задовольняє рівність

$$y_0 = f_{\varphi_1}(x) = \Delta_{\beta_1\dots\beta_k}^{Q_2} \underbrace{0\dots 0}_{s>3} \beta_{k+s+3}\beta_{k+s+4}\dots,$$

то для його  $Q_2$ -зображення виконуються умови

1.  $\alpha_k(x) = \beta_k(y_0)$ ;
2.  $\alpha_{k+1}(x) = 1 = \alpha_{k+2}(x) = \alpha_{k+s+2}(x) = \alpha_{k+s+3}(x)$ ;
3.  $\alpha_{k+3}(x) = 0 = \alpha_{k+s+1}(x)$ ;
4.  $\alpha_{k+s+4}(x) = \beta_{k+s+3}(y_0)$ ;
5.  $(\alpha_{k+4}, \alpha_{k+5}, \dots, \alpha_{k+s+1})$ -набір цифр, що не містить двох 1 підряд, тобто  $x = \Delta_{\alpha_1\dots\alpha_k 11\alpha_{k+3}\dots\alpha_{k+s+1} 11\alpha_{k+s+4}\dots}^{Q_2}$ .

*Доведення.* Для евристичної правдоподібності розглянемо приклад

$$y_0 = \Delta_{11000011\beta_9\beta_10\dots}^{Q_2}. \quad \text{Оскільки}$$

$$1 = \beta_1(y) = \alpha_1(x)\alpha_2(x), \text{ то } \alpha_1(x) = 1 = \alpha_2(x),$$

$$1 = \beta_2(y) = \alpha_2(x)\alpha_3(x), \text{ то } \alpha_3(x) = 1,$$

$$0 = \beta_4(y) = \alpha_4(x)\alpha_5(x), \text{ то } \alpha_5(x) = 0\alpha_5(x) = 1,$$

$$0 = \beta_5(y) = \alpha_5(x)\alpha_6(x), \text{ то } \alpha_6(x) = 0\alpha_6(x) = 1,$$

$$0 = \beta_6(y) = \alpha_6(x)\alpha_7(x), \text{ то } \alpha_7(x) = 0\alpha_7(x) = 1,$$

$$1 = \beta_7(y) = \alpha_7(x)\alpha_8(x), \text{ то } \alpha_7(x) = \alpha_8(x) = 1.$$

Отже, маємо

$$\alpha_1(x) = \beta_1(y) = 1, \alpha_2(x) = \alpha_3(x) = 1 = \alpha_7(x) = \alpha_8(x), \alpha_4(x) = 0 = \alpha_6(x),$$

$(\alpha_4(x), \alpha_5(x), \alpha_6(x))$  – не містить двох одиниць підряд.

Тепер скористаємося загальними міркуваннями. Безпосередньо з означення функції  $f_{\varphi_1}$  маємо:  $\beta_k(y) = \alpha_k(x)\alpha_{k+1}(x)$ ;

$$1 = \beta_{k+1}(y) = \alpha_{k+1}(x)\alpha_{k+2}(x), \text{ тоді маємо } \alpha_{k+1}(x) = \alpha_{k+2}(x) = 1;$$

$$0 = \beta_{k+2}(y) = \alpha_{k+2}(x)\alpha_{k+3}(x), \text{ оскільки } \alpha_{k+2}(x) = 1, \text{ то } \alpha_{k+3}(x) = 0;$$

$$0 = \beta_{k+j}(y) = \alpha_{k+j}(x)\alpha_{k+j+1}(x), j = \overline{2, k+s+1};$$

$$1 = \beta_{k+s+3}(y) = \alpha_{k+s+3}(x)\alpha_{k+s+4}(x). \quad \square$$

**3.6.3. Розподіл значень 101-функції при заданому розподілі випадкового аргументу.** Нехай  $\eta_k$  — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значення 0 і 1 з ймовірностями  $p_0, p_1$  відповідно, тобто

$$P\{\eta_n = 0\} = p_0, P\{\eta_n = 1\} = p_1, p_0 + p_1 = 1, n \in N. \quad (3.14)$$

**Лема 3.9.** *Якщо  $\eta_k$  і  $\eta_{k+1}$  незалежні випадкові величини з розподілами (3.14), то випадкова величина  $\tau_k \equiv \eta_k \eta_{k+1}$  набуває значень 0 і 1 з ймовірностями  $p_1^2$  і  $1 - p_1^2 = (1 - p_1)(1 + p_1) = p_0(1 + p_1)$  відповідно. Більше того, послідовності випадкових величин  $(\tau_{2k-1})$  — є попарно незалежними, як і члени послідовності  $(\tau_{2k})$ .*

*Доведення.* Згідно з незалежності випадкових величин  $\eta_k$  і  $\eta_{k+1}$ , маємо:

$$P\{\tau_k = 1\} = P\{\eta_k = 1 \wedge \eta_{k+1} = 1\} = P\{\eta_k = 1\}P\{\eta_{k+1} = 1\} = p_1^2;$$

$$P\{\tau_k = 0\} = 1 - P\{\xi_k = 0\} = 1 - p_1^2 = p_0(1 + p_1); \quad \square$$

Нас цікавить розподіл значень функції  $f_{\varphi_1}$ , аргументом якої є випадкова величина  $X$ , тобто розподіл випадкової величини:

$$Y = f_{\varphi_1}(X) = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots}^{Q_2}, \quad \xi_i = \eta_i \eta_{i+1}.$$

Вивчимо розподіл двовимірної випадкової величини  $(\xi_{n-1}; \xi_n)$ .

**Лема 3.10.** *Випадкові величини  $\xi_{n-1}$  і  $\xi_n, n = 2, 3, \dots$ , є корельованими.*

*Доведення.* Розглянемо умовний розподіл пари випадкових величин  $(\xi_{n-1}; \xi_n)$ . Обчислимо умовні ймовірності  $p_{ij} = P\{\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = i\}, i, j \in \{0, 1\}$ . Враховуючи розподіл цифр аргументу  $\eta_k, k \in N$ , отримуємо:

$$\begin{aligned} p_{00} &= P\{\xi_n = 0 \mid \xi_{n-1} = 0\} = \\ &= P\{\eta_{n-1} = 0 \wedge \eta_n = 0 \wedge \eta_{n+1} = 0\} + P\{\eta_{n-1} = 0 \wedge \eta_n = 0 \wedge \eta_{n+1} = 1\} + \\ &+ P\{\eta_{n-1} = 0 \wedge \eta_n = 1 \wedge \eta_{n+1} = 0\} + P\{\eta_{n-1} = 1 \wedge \eta_n = 0 \wedge \eta_{n+1} = 0\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + P\{\eta_{n-1} = 1 \wedge \eta_n = 0 \wedge \eta_{n+1} = 1\} = 5 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{8}; \\
p_{01} & = P\{\xi_n = 0 \setminus \xi_{n-1} = 1\} = P\{\eta_{n-1} = 1 \wedge \eta_n = 1 \wedge \eta_{n+1} = 0\} = \frac{1}{8}; \\
p_{10} & = P\{\xi_n = 1 \setminus \xi_{n-1} = 0\} = P\{\eta_{n-1} = 0 \wedge \eta_n = 1 \wedge \eta_{n+1} = 1\} = \frac{1}{8}; \\
p_{11} & = P\{\xi_n = 1 \setminus \xi_{n-1} = 1\} = P\{\eta_{n-1} = 1 \wedge \eta_n = 1 \wedge \eta_{n+1} = 1\} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Оскільки, безумовні розподіли величин  $\xi_{n-1}$  і  $\xi_n$  визначаються наступним чином:

$$P\{\xi_{n-1} = 0\} = P\{\xi_n = 0\} = \frac{3}{4}; \quad P\{\xi_{n-1} = 1\} = P\{\xi_n = 1\} = \frac{1}{4}.$$

Тоді безумовні математичні сподівання відповідно рівні:

$$M(\xi_{n-1}) = M(\xi_n) = \frac{1}{4}.$$

Обчислимо кореляційний момент для дискретних випадкових величин  $\xi_{n-1}$  і  $\xi_n$ :

$$\begin{aligned}
K_{\xi_{n-1}\xi_n} & = M[(\xi_{n-1} - M(\xi_{n-1}))(\xi_n - M(\xi_n))] = \\
& = M(\xi_{n-1}\xi_n) - M(\xi_{n-1})M(\xi_n) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

Оскільки кореляційний момент не дорівнює нулю, то випадкові величини  $\xi_{n-1}$  і  $\xi_n$  є корельованими, що й вимагалось довести.  $\square$

**Наслідок 3.8.** Випадкові величини  $\xi_{n-1}$  і  $\xi_n$ ,  $n = 2, 3, \dots$  є залежними.

**Наслідок 3.9.** Коефіцієнт кореляції випадкових величин  $\xi_{n-1}$  і  $\xi_n$  рівний  $\frac{1}{3}$ .

*Доведення.* Враховуючи, що дисперсії випадкових величин  $\xi_{n-1}$  і  $\xi_n$  відповідно рівні  $D(\xi_{n-1}) = D(\xi_n) = \frac{3}{16}$ , з означення коефіцієнта кореляції маємо:

$$r_{\xi_{n-1}\xi_n} = \frac{K_{\xi_{n-1}\xi_n}}{\sqrt{D(\xi_{n-1})D(\xi_n)}} = \frac{1}{3}. \quad \square$$

**Лема 3.11.** Спектром  $S_Y$  розподілу значень функції  $Y = f_{\varphi_1}(X)$ , коли  $p_1 p_0 \neq 0$ , є множина значень  $E_{f_{\varphi_1}}$  функції  $f_{\varphi_1}$ , доповнена точкою  $x_0 = 1$ .

*Доведення.* Оскільки спектр є мінімальна замкнена множина, на якій зосереджена ймовірність (зосереджений розподіл), і кожна точка множини

$E_{f_{\varphi_1}}$  значень функції  $f_{\varphi_1}$  є значенням випадкової величини  $Y$ , а при цьому  $x_0 = 1$  є граничною точкою множини і  $x_0 \notin E_{f_{\varphi_1}}$ , то  $x_0 \in S_Y$ .  $\square$

**Наслідок 3.10.** Спектр  $S_Y$  розподілу значень функції  $Y = f_{\varphi_1}(X)$  є множиною  $S^*$ -типу.

**Лема 3.12.** Для випадкової величини  $Y = f_{\varphi_1}(X) = \Delta_{[\eta_1\eta_2]\dots[\eta_n\eta_{n+1}]}^{Q_2}$ , при  $(m-1)$  – парному і парному відповідно справедливі наступні рівності:

$$P\{Y \in \Delta'_{\underbrace{0\dots 0}_{m-1}}\} = p_0^m + C_m^1 p_1 p_0^{m-1} + C_{m-1}^2 p_1^2 p_0^{m-2} + \dots + C_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} p_0^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} p_1^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}, \quad (3.15)$$

$$P\{Y \in \Delta'_{\underbrace{0\dots 0}_{m-1}}\} = p_0^m + C_m^1 p_1 p_0^{m-1} + C_{m-1}^2 p_1^2 p_0^{m-2} + \dots + C_{\frac{m}{2}+1}^{\frac{m}{2}} p_0^{\frac{m}{2}} p_1^{\frac{m}{2}}. \quad (3.16)$$

*Доведення.* Для емпіричної достовірності переконаємося, що формула справедлива для  $m = 1, 2, 3, 4$ :

$$\begin{aligned} P\{Y \in \Delta'_0\} &= P\{\eta_1 \cdot \eta_2 = 0\} = \\ &= P\{(\eta_1 = 0 = \eta_2) \vee (\eta_1 = 0 \wedge \eta_2 = 1) \vee (\eta_1 = 1 \wedge \eta_2 = 0)\} = \\ &= p_0^2 + 2p_0 p_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{Y \in \Delta'_{00}\} &= P\{\eta_1 \cdot \eta_2 = 0 \wedge \eta_2 \cdot \eta_3 = 0\} = \\ &= P\{(\eta_1 = 0 = \eta_2 \wedge \eta_3 = 0)\} + P\{(\eta_1 = 1 \wedge \eta_2 = 0 = \eta_3)\} + \\ &+ P\{(\eta_1 = 0 \wedge \eta_2 = 1 \wedge \eta_3 = 0)\} + P\{(\eta_1 = 0 = \eta_2 \wedge \eta_3 = 1)\} + \\ &+ P\{(\eta_1 = 1 \wedge \eta_2 = 0 \wedge \eta_3 = 1)\} = p_0^3 + 3p_0^2 p_1 + p_0 p_1^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{Y \in \Delta'_{000}\} &= P\{\eta_1 \cdot \eta_2 = 0 \wedge \eta_2 \cdot \eta_3 = 0 \wedge \eta_3 \cdot \eta_4 = 0\} = \dots \\ &= p_0^4 + 4p_0^3 p_1 + 3p_0^2 p_1^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{Y \in \Delta'_{0000}\} &= P\{\eta_1 \cdot \eta_2 = 0 \wedge \eta_2 \cdot \eta_3 = 0 \wedge \eta_3 \cdot \eta_4 = 0 \wedge \eta_4 \cdot \eta_5 = 0\} = \dots \\ &= p_0^5 + 5p_0^4 p_1 + 6p_0^3 p_1^2 + p_0^2 p_1^3; \end{aligned}$$

З'ясуємо, яка ймовірність «потрапляння» випадкової величини в циліндр  $m-1$ -го рангу (з усіма нулями)  $P\{Y \in \Delta'_{\underbrace{0\dots 0}_{m-1}}\}$ . Для цього нам потрібно знайти кількість  $m$ -місних комбінацій з однією одиницею, з двома



і т.д. до  $\frac{m}{2}(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1)$  в залежності від того  $m$  - парне (непарне), при цьому, щоб дві одиниці не стояли поруч (оскільки інакше добуток відповідних  $Q_2$ -цифр числа не дорівнюватиме нулю).

Очевидно, що комбінація, в якій немає жодного нуля єдина. Комбінацій, в яких одиниця лише один раз зустрічається  $m$ , тобто  $C_m^1$ , комбінацій з двома одиницями —  $C_{m-1}^2$ , з трьома —  $C_{m-2}^3$ , таким чином маємо, що ймовірність  $P\{Y \in \Delta'_{\underbrace{0 \dots 0}_{m-1}}\}$  обчислюється однією з формул (3.15), (3.16).  $\square$

**Лема 3.13.** *Кількість  $m$ -місних комбінацій з 0 і 1, таких, що не зустрічаються дві одиниці підряд є фібоначієвим числом, а саме: при  $m = 1, N_1 = \Phi_4 = 3, m = 2, N_2 = \Phi_5 = 5, \dots, m = k, N_k = \Phi_{k+2}$ .*

*Доведення.* Нехай маємо  $m$ -клітинок, серед яких можемо розташувати комбінації з 0 і 1, такі, що не зустрічаються дві одиниці підряд і нехай  $a_m$  і  $b_m$  — це кількість варіантів, що задовольняють вимогу і починаються з 0 та 1 відповідно,  $c_m = a_m + b_m$ .

Очевидно, що при  $n = 1, a_1 = 1, b_1 = 1$ , тобто  $c_1 = 2$ . При  $n = 2$  маємо (00, 01, 10)  $a_2 = 2, b_2 = 1$ , звідки  $c_2 = 3$ .

Розглянемо випадок при  $n_{m+1}$   $\underbrace{00100 \dots 0}_m$ , тоді  $a_{m+1} = c_n, b_{m+1} = a_m = c_{m-1}$ .

Тоді маємо  $c_{m+1} = a_{m+1} + b_{m+1} = c_m + c_{m-1}$ , тобто  $c_{m+1} = c_m + c_{m-1}$ , де  $c_1 = 2, c_2 = 3$ . Отже, послідовність кількості комбінацій співпадає з послідовністю Фібоначчі.  $\square$

**Наслідок 3.11.** *Справедлива наступна формула  $N_k = N_{k-1} + N_{k-2}$ , де  $N_k$ —кількість  $k$ -місних комбінацій з 0 і 1, які задовольняють  $Y \in \Delta'_{\underbrace{0 \dots 0}_{k-1}}$*

**Теорема 3.12.** *Для випадкової величини  $Y$  справедлива рівність:*

$$P\{Y \in \Delta'_{\underbrace{0 \dots 0}_m}\} = p_0 P\{Y \in \Delta'_{\underbrace{0 \dots 0}_{m-1}}\} + p_0 p_1 P\{Y \in \Delta'_{\underbrace{0 \dots 0}_{m-2}}\}. \quad (3.17)$$

*Доведення.* Згідно з наслідку леми 3.12 і леми 3.13 маємо, що  $P\{Y \in \Delta'_{\underbrace{0 \dots 0}_m}\} = p_0^{m+1} + C_{m+1}^1 p_1 p_0^m + C_{m+1}^2 p_1^2 p_0^{m-1} + \dots + C_{\frac{m+1}{2}+1}^{\frac{m+1}{2}} p_0^{\frac{m+1}{2}} p_1^{\frac{m+1}{2}}$ ,

$$P\{Y \in \underbrace{\Delta'_0 \dots 0}_{m-1}\} = p_0^m + C_m^1 p_1 p_0^{m-1} + C_{m-1}^2 p_1^2 p_0^{m-2} + \dots + C_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} p_0^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} p_1^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1},$$

$$P\{Y \in \underbrace{\Delta'_0 \dots 0}_{m-2}\} = p_0^{m-1} + C_{m-1}^1 p_1 p_0^{m-2} + C_{m-2}^2 p_1^2 p_0^{m-3} + \dots + C_{\frac{m-1}{2}+1}^{\frac{m-1}{2}} p_0^{\frac{m-1}{2}} p_1^{\frac{m-1}{2}}.$$

Тоді ймовірність належності  $Y$  циліндру  $\underbrace{\Delta'_0 \dots 0}_m$  виражається:

$$\begin{aligned} P\{Y \in \underbrace{\Delta'_0 \dots 0}_m\} &= p_0 \left( p_0^m + C_{m+1}^1 p_1 p_0^{m-1} + \dots + C_{\frac{m+1}{2}+1}^{\frac{m+1}{2}-1} p_0^{\frac{m+1}{2}-1} p_1^{\frac{m+1}{2}} \right) = \\ &= p_0 \left( p_0^m + C_m^1 p_1 p_0^{m-1} + \dots + C_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} p_0^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} p_1^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1} \right) + \\ &+ p_0 p_1 \left( [C_{m+1}^1 - C_m^1] p_0^{m-2} + [C_m^2 - C_{m-1}^2] p_1 p_0^{m-3} + \dots \right. \\ &\left. + \left[ C_{\frac{m+1}{2}+1}^{\frac{m+1}{2}} - C_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \right] p_1^{\frac{m+1}{2}-1} p_0^{\frac{m+1}{2}-2} \right). \end{aligned}$$

Використовуючи комбінаторні формули, маємо наступні співвідношення:

$$A_k = C_{m+1}^k - C_m^k = \frac{m!(k)}{k!(m-k+1)}.$$

$$A_1 = 1, A_2 = \frac{2m!}{2!(m-1)} = C_m^1, \dots, A_{\frac{m+1}{2}+1} = C_{\frac{m+1}{2}+1}^{\frac{m+1}{2}} - C_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor},$$

$$\text{де } \frac{m+1}{2} = z \in Z, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor = z-1, C_{z+1}^z - C_{z-1}^{z-1} = z = \frac{m+1}{2} = C_{\frac{m+1}{2}+1}^{\frac{m+1}{2}}.$$

Звідки маємо:

$$\begin{aligned} P\{Y \in \underbrace{\Delta'_0 \dots 0}_m\} &= p_0 (p_0^m + C_m^1 p_1 p_0^{m-1} + \dots + C_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} p_0^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} p_1^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}) + \\ &+ p_0 p_1 (p_0^{m-2} + C_m^1 p_1 p_0^{m-3} + \dots + C_{\frac{m-1}{2}+1}^{\frac{m-1}{2}} p_1^{\frac{m-1}{2}-1} p_0^{\frac{m-1}{2}-2}) = \\ &= p_0 P\{Y \in \underbrace{\Delta'_0 \dots 0}_{m-1}\} + p_0 p_1 P\{Y \in \underbrace{\Delta'_0 \dots 0}_{m-2}\}. \quad \square \end{aligned}$$

**Теорема 3.13.** *Розподіл значень функції  $Y = f_{\varphi_1}(X)$  з наперед заданою рівномірно розподіленою випадковою величиною  $X$  є неперервним.*

*Доведення.* Згідно з означенням неперервності розподілу досить довести, що ймовірність кожної одноточкової множини рівна 0. Для цього виразимо ймовірності «належності» випадкової величини  $Y$  «циліндричним»

множинам. Оскільки спектр розподілу випадкової величини  $Y$  представляється:

$$S_Y = \Delta'_0 \cup \Delta'_{100} \cup \dots \cup \underbrace{\Delta'_{1\dots 1}}_n 00 \cup \dots,$$

де  $\Delta'_{c_1 c_2 \dots c_m} \equiv \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_2} \cap S_Y$ , а

$$P\{Y \in \Delta'_0\} = p_0^2 + 2p_0 p_1, \quad P\{Y \in \underbrace{\Delta'_{1\dots 1}}_n 00\} = p_0^2 p_1^{n+1}.$$

Тоді покажемо, що  $P\{Y = 0\} = 0$ , тобто  $\lim_{m \rightarrow \infty} P\{Y \in \underbrace{\Delta'_{0\dots 0}}_m\} = 0$ .

Нехай  $\lim_{m \rightarrow \infty} P\{Y \in \underbrace{\Delta'_{0\dots 0}}_m\} = A$ , тоді із рівності (3.17):

$$P\{Y \in \underbrace{\Delta'_{0\dots 0}}_m\} = p_0 P\{Y \in \underbrace{\Delta'_{0\dots 0}}_{m-1}\} + p_0 p_1 P\{Y \in \underbrace{\Delta'_{0\dots 0}}_{m-2}\}$$

зробивши граничний перехід маємо  $A = p_0 A + p_0 p_1 A$ , звідки  $p_0 = 1$ . Але оскільки  $p_0 \neq 1, p_1 \neq 1$ , то  $A = 0$ . Теорема доведена.  $\square$

**Наслідок 3.12.** Розподіл значень функції  $Y = f_{\varphi_1}(X)$ , де  $X$ -неперервна випадкова величина з незалежними однаково розподіленими  $Q_2$ -цифрами, є сингулярним розподілом канторівського типу.

### 3.7. Фрактальна $f_{\varphi_6}$ функція, означена в термінах $Q_2$ -зображення дійсних чисел

Для наперед заданого  $Q_2$ -зображення дійсних чисел піввідрізка  $[0; 1)$  розглядається функція  $f_{\bar{\varphi}}$  породжена функцією  $\varphi_6$ :

$$\varphi_6(\alpha_n, \alpha_{n+1}) = |\alpha_n - \alpha_{n+1}| = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_n = \alpha_{n+1}; \\ 1, & \text{якщо } \alpha_n \neq \alpha_{n+1}. \end{cases}$$

**Лема 3.14.** Образом циліндра при відображенні  $f_{\varphi_6}$  є циліндр, а прообразом кожного циліндра є два циліндри «інверсні» один до одного, а саме:

$$f_{\varphi_6}(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha_{n+1}}^{Q_2}) = \Delta_{|\alpha_1 - \alpha_2| |\alpha_2 - \alpha_3| \dots |\alpha_n - \alpha_{n+1}|}^{Q_2};$$

$$f_{\varphi_6}^{-1}(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n c_{n+1}}^{Q_2}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha_{n+1}}^{Q_2} \cup \Delta_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2] \dots [1-\alpha_n][1-\alpha_{n+1}]}^{Q_2},$$



*Доведення.* 1) Легко показати, що  $f_{\varphi_6}(\Delta_{(10)}^{Q_2}) = f_{\varphi_6}(\Delta_{(01)}^{Q_2}) = \Delta_{(1)}^{Q_2} = 1$  і  $f_{\varphi_6}(\Delta_{(0)}^{Q_2}) = \Delta_{(0)}^{Q_2} = 0$ .

2) Будь-яке  $Q_2$ -унарне число  $y_0 \in (0; 1]$  можна подати у вигляді

$$[0; 1] \ni y_0 = \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{c_1-1}1\underbrace{0\dots 0}_{c_2-1}1\underbrace{0\dots 0}_{c_3-1}1\dots}, \text{ де } c_i \in N.$$

Воно, як легко бачити, є образом чисел виду

$$x = \Delta_{\underbrace{a\dots a}_{c_1}\underbrace{[1-a]\dots[1-a]}_{c_2}\underbrace{a\dots a}_{c_3}\underbrace{[1-a]\dots[1-a]}_{c_4}\dots}, \text{ де } a \in \{0; 1\}.$$

3) Якщо ж  $y_0 \in Q_2$ -бінарним числом, то його можна зобразити у вигляді

$$y_0 = \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{c_1-1}1\underbrace{0\dots 0}_{c_2-1}1\dots\underbrace{0\dots 0}_{c_k-1}1(0)} = \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{c_1-1}1\underbrace{0\dots 0}_{c_2-1}1\dots\underbrace{0\dots 0}_{c_k-1}0(1)}, \text{ де } c_i \in N.$$

Тоді очевидно, що  $f_{\varphi_6}^{-1}(\Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{c_1-1}1\underbrace{0\dots 0}_{c_2-1}1\dots\underbrace{0\dots 0}_{c_k-1}1(0)}) = \Delta_{\underbrace{1\dots 1}_{c_1}\underbrace{0\dots 0}_{c_2}\dots\underbrace{1\dots 1}_{c_k}(0)}$ ;

$$f_{\varphi_6}^{-1}(\Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{c_1-1}1\underbrace{0\dots 0}_{c_2-1}1\dots\underbrace{0\dots 0}_{c_k-1}0(1)}) = \left\{ \Delta_{\underbrace{a\dots a}_{c_1}\underbrace{[1-a]\dots[1-a]}_{c_2}\dots\underbrace{a\dots a}_{c_k}(a[1-a])} \right\},$$

де  $a \in A$ . Тоді  $E_{f_{\varphi_6}} = [0; 1]$  і теорему доведено в силу єдиності вказаних зображень.  $\square$

**3.7.2. Множини рівнів функції  $f_{\varphi_6}(x)$ .** Дослідимо множини рівнів функції  $f_{\varphi_6}(x)$ . Розглянемо декілька прикладів.

1.  $f_{\varphi_6}^{-1}(\Delta_{(0)}^{Q_2}) = \{\Delta_{(0)}^{Q_2}\};$
2.  $f_{\varphi_6}^{-1}(\Delta_{(1)}^{Q_2}) = \{\Delta_{(01)}^{Q_2}, \Delta_{(10)}^{Q_2}\};$
3.  $f_{\varphi_6}^{-1}(\Delta_{(001)}^{Q_2}) = \{\Delta_{(000111)}^{Q_2}, \Delta_{(111000)}^{Q_2}\};$
4.  $f_{\varphi_6}^{-1}(\Delta_{\underbrace{010011000111\dots 0\dots 0}_{n}\underbrace{1\dots 1}_{n}\dots}) = \left\{ \Delta_{\underbrace{0011101111010\dots 1}_{n}\underbrace{1\dots 1}_{n}\underbrace{01\dots 01}_{n}1\dots}, \right.$   
 $\left. \Delta_{\underbrace{1100010000101\dots 0}_{n}\underbrace{0\dots 0}_{n}\underbrace{10\dots 10}_{n}0\dots} \right\}.$

**Теорема 3.15.** Множина кожного  $Q_2$ -бінарного рівня  $y_0$  функції  $f_{\varphi_6}(x_0)$  складається з двох точок  $x_0$  і  $I(x_0)$ , а  $Q_2$ -унарного – з однієї.

*Доведення.* Доведення теореми випливає із властивості симетрії графіка функції:  $f_{\varphi_6}(x) = f_{\varphi_6}(I(x))$ . Множина  $Q_2$ -бінарного рівня складається

з однієї точки в силу домовленості не використовувати зображення, що містить 1 в періоді.  $\square$

### 3.7.3. Автономельні властивості графіка функції.

**Лема 3.15.** *Графік  $\Gamma_{f_{\varphi_6}}$  функції  $f_{\varphi_6}$  на множині  $Q_2$ -унарних точок має наступну "симетрію":*

$$f_{\varphi_6}(x) = f_{\varphi_6}(I(x)), \text{ де } I(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}^{Q_2}) = \Delta_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\dots[1-\alpha_k]}^{Q_2}.$$

*Доведення.* Згідно з означенням функції для довільного  $Q_2$ -унарного числа  $x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_{k-1}\alpha_k}^{Q_2}$  маємо

$$f_{\varphi_6}(x) = \Delta_{|\alpha_1-\alpha_2||\alpha_2-\alpha_3|\dots|\alpha_{k-1}-\alpha_k|}^{Q_2}, \quad I(x) = \Delta_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\dots[1-\alpha_{k-1}][1-\alpha_k]}^{Q_2}.$$

Тоді  $f_{\varphi_6}(I(x)) = \Delta_{|1-\alpha_1-1+\alpha_2|\dots|1-\alpha_{k-1}-1+\alpha_k|}^{Q_2} = \Delta_{|\alpha_2-\alpha_1|\dots|\alpha_k-\alpha_{k-1}|}^{Q_2} = f_{\varphi_6}(x)$ .

Лему доведено.  $\square$

**Теорема 3.16.** *Для графіка  $\Gamma_{f_{\varphi_6}}$  функції  $f_{\varphi_6}$  має місце наступна властивість автономельної симетрії:*

$$\Gamma_{f_{\varphi_6}} = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 = (\Gamma_{00} \cup \Gamma_{10}) \cup (\Gamma_{01} \cup \Gamma_{11}), \text{ де} \quad (3.18)$$

$$\Gamma_i = \{M(x, f_{\varphi_6}(x)) : x = \Delta_{i\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n}^{Q_2}, (\alpha_n) \in L\}, i \in \{0, 1\},$$

$$\Gamma_{ij} = \{M(x, f_{\varphi_6}(x)) : x = \Delta_{ij\alpha_3\dots\alpha_n}^{Q_2}, (\alpha_n) \in L\}, i, j \in \{0, 1\},$$

$$\Gamma_{ij} = g_{ij}(\Gamma_j), \quad (3.19)$$

$$g_{00} : \begin{cases} x' = q_0x, \\ y' = q_0y; \end{cases} \quad g_{10} : \begin{cases} x' = q_1x + q_0, \\ y' = q_1y + q_0; \end{cases}$$

$$g_{01} : \begin{cases} x' = q_0x, \\ y' = q_1y + q_0; \end{cases} \quad g_{11} : \begin{cases} x' = q_1x + q_0, \\ y' = q_0y. \end{cases}$$

*Доведення.* Рівність (3.18) очевидна. Доведемо рівність (3.19).

1. Нехай  $M(x; y) \in \Gamma_0$ , тобто  $x = \Delta_{0\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n}^{Q_2}$ ,  $y = f_{\varphi_6}(x) = \Delta_{c_1c_2\dots c_n}^{Q_2}$ . Тоді

1) для  $M'(x'; y') = g_{00}(M)$ , тобто

$$\begin{cases} x' = q_0x = \Delta_{00\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n}^{Q_2}, \\ y' = q_0y = \Delta_{0c_1c_2\dots c_n}^{Q_2}, \end{cases}$$

очевидно, що  $y' = f_{\varphi_6}(x')$  і  $M' \in \Gamma_{00}$ . А отже,  $g_{00}(\Gamma_0) \subset \Gamma_{00}$ .

2) для  $M'(x'; y') = g_{10}(M)$ , тобто

$$\begin{cases} x' = q_1x + q_0 = \Delta_{10\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n}^{Q_2}, \\ y' = q_1y + q_0 = \Delta_{1c_1c_2\dots c_n}^{Q_2}, \end{cases}$$

маємо  $y' = f_{\varphi_6}(x')$  і  $M' \in \Gamma_{10}$ . А отже,  $g_{10}(\Gamma_0) \subset \Gamma_{10}$ .

2. Нехай  $M(x; y) \in \Gamma_1$ , тобто  $x = \Delta_{1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n}^{Q_2}$ ,  $y = f_{\varphi_6}(x) = \Delta_{d_1d_2\dots d_n}^{Q_2}$ .

Тоді

1) для  $M'(x'; y') = g_{01}(M)$ , тобто

$$\begin{cases} x' = q_0x = \Delta_{01\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n}^{Q_2}, \\ y' = q_1y + q_0 = \Delta_{1d_1d_2\dots d_n}^{Q_2}, \end{cases}$$

очевидно, що  $y' = f_{\varphi_6}(x')$  і  $M' \in \Gamma_{01}$ . А отже,  $g_{01}(\Gamma_1) \subset \Gamma_{01}$ .

2) Для  $M'(x'; y') = g_{11}(M)$ , тобто

$$\begin{cases} x' = q_1x + q_0 = \Delta_{11\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n}^{Q_2}, \\ y' = q_0y = \Delta_{0d_1d_2\dots d_n}^{Q_2}, \end{cases}$$

маємо  $y' = f_{\varphi_6}(x')$  і  $M' \in \Gamma_{11}$ . А отже,  $g_{11}(\Gamma_1) \subset \Gamma_{11}$ .

Включення  $\Gamma_{ij} \subset g_{ij}(\Gamma_j)$  є очевидним. Тому рівність (3.19) доведена.  $\square$

### 3.7.4. Інтегральні властивості графіка функції $f_{\varphi_6}(x)$ .

**Лема 3.16.** Для функції  $f_{\varphi_6}$  виконуються наступні рівності:

$$f_{\varphi_6}(x) = \beta_{|\alpha_1-\alpha_2|} + q_{|\alpha_1-\alpha_2|} f_{\varphi_6}(\omega(x)),$$

$$\omega^n(f_{\varphi_6}(x)) = f_{\varphi_6}(\omega^n(x)),$$

де  $\omega(x)$  – оператор лівостороннього зсуву цифр.

**Теорема 3.17.** Функція  $f_{\varphi_6}$  є інтегровною на  $[0;1)$ . Інтеграл Лебега

рівний

$$\int_0^1 f_{\varphi_6}(x) dx = \frac{2q_0^2 q_1}{1 - q_0^3 - 3q_0 q_1^2}.$$

*Доведення.* Згідно теореми Лебега про інтегровність за Ріманом функція  $f_{\varphi_6}$  є інтегрованою, оскільки  $f_{\varphi_6}$  обмежена і неперервна майже скрізь на  $[0;1)$ . В силу адитивності інтеграла Лебега маємо рівність

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_{\varphi_6}(x) dx &= \int_0^1 (\beta_{|\alpha_1 - \alpha_2|} + q_{|\alpha_1 - \alpha_2|} f_{\varphi_6}(\omega(x))) dx = \\ &= \int_0^{q_0^2} q_0 f_{\varphi_6}(\omega(x)) dq_0^2 \omega(x) + \int_{q_0^2}^{q_0} (q_0 + q_1 f_{\varphi_6}(\omega(x))) dq_1 q_0 \omega(x) + \\ &+ \int_{q_0}^{q_0(1+q_1)} q_0 + q_1 f_{\varphi_6}(\omega(x)) dq_0 q_1 \omega(x) + \int_{q_0(1+q_1)}^1 (q_0 f_{\varphi_6}(\omega(x))) dq_1^2 \omega(x) = \\ &= q_0^3 \int_0^1 f_{\varphi_6}(x) dx + 2q_0^2 q_1 + 2q_0 q_1^2 \int_0^1 f_{\varphi_6}(x) dx + q_0 q_1^2 \int_0^1 f_{\varphi_6}(x) dx \end{aligned}$$

$$\int_0^1 f_{\varphi_6}(x) dx (1 - q_0^3 - 2q_0 q_1^2 - q_0 q_1^2) = 2q_0^2 q_1;$$

$$\int_0^1 f_{\varphi_6}(x) dx = \frac{2q_0^2 q_1}{1 - q_0^3 - 3q_0 q_1^2}. \quad \square$$

**3.7.5. Розподіл значень функції  $f_{\varphi_6}$  при заданому розподілі випадкового аргументу.** Нехай  $\eta_k$ -послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значення 0 і 1 з ймовірностями  $p_0, p_1$  відповідно, тобто

$$P\{\eta_n = 0\} = p_0, P\{\eta_n = 1\} = p_1, p_0 + p_1 = 1, n \in N. \quad (3.20)$$



Нас цікавить розподіл функції  $f_{\varphi_6}$  аргументом якої є випадкова величина  $X$ , тобто розподіл випадкової величини

$$Y = f_{\varphi_6}(X) = \Delta_{|\eta_1 - \eta_2| |\eta_2 - \eta_3| \dots |\eta_n - \eta_{n+1}| \dots}^{Q_2} = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}^{Q_2}, \xi_n = |\eta_n - \eta_{n+1}|,$$

коректність означення якої варто перевірити.

**Лема 3.17.** *Функція  $f_{\varphi_6}$  є вимірною, а саме, для будь-якого  $y \in \mathbb{R}$  множина  $D_y \equiv \{x : f_{\varphi_6}(x) < y\}$  є борелівською.*

*Доведення.* Для  $y \in (-\infty; 0] \cup [1; \infty)$  твердження є очевидним. Нехай тепер  $x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k \dots}^{Q_2}$  – будь-яке число з  $(0; 1)$ . Можливі наступні випадки:  $y$  –  $Q_2$ -бінарне число або  $y$  –  $Q_2$ -унарне число.

Якщо  $y$  –  $Q_2$ -раціональне число і  $y = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{k-1} 1(0)}^{Q_2}$ , то множина  $D_y \equiv \{x : f_{\varphi_6}(x) < y\}$  є скінченним об'єднанням попарно неперетинних множин, а саме:

$$D_y = \{|\alpha_1 - \alpha_2| < c_1\} \cup \{|\alpha_1 - \alpha_2| = c_1 \wedge |\alpha_2 - \alpha_3| < c_2\} \cup \dots \\ \cup \{|\alpha_i - \alpha_{i+1}| = c_i, i = \overline{1, k-1} \wedge |\alpha_k - \alpha_{k+1}| < c_k\}.$$

Кожен з елементів об'єднання є або порожньою множиною, або об'єднанням циліндричних піввідрізків. Тому  $D_y$  є борелівською множиною (як скінченне об'єднання борелівських множин).

Якщо  $y$  –  $Q_2$ -ірраціональне число і  $y = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k \dots}^{Q_2}$ , то множина  $D_y \equiv \{x : f_{\varphi_6}(x) < y\}$  є зліченим об'єднанням попарно неперетинних множин, а саме:

$$D_y = \{|\alpha_1 - \alpha_2| < c_1\} \cup \{|\alpha_1 - \alpha_2| = c_1 \wedge |\alpha_2 - \alpha_3| < c_2\} \cup \dots \\ \cup \{|\alpha_i - \alpha_{i+1}| = c_i, i = \overline{1, k-1} \wedge |\alpha_k - \alpha_{k+1}| < c_k\} \cup \dots$$

Кожен з елементів об'єднання є або порожньою множиною, або об'єднанням циліндричних піввідрізків. Тому  $D_y$  є борелівською множиною (як зліченне об'єднання борелівських множин). Лему доведено.  $\square$

**Наслідок 3.13.** *Якщо  $X$  – випадкова величина, то  $Y = f_{\varphi_6}(X)$  є випадковою величиною.*

**Лема 3.18.** *Спектром  $S_Y$  розподілу значень функції  $Y = f_{\varphi_6}(X)$  коли*

$p_1 p_0 \neq 0$ , є множина значень  $E_{f_{\varphi_6}}$  функції  $f_{\varphi_6}$ .

*Доведення.* Оскільки спектром розподілу є мінімальна замкнена множина, на якій зосереджена ймовірність (зосереджений розподіл), і кожна точка множини  $E_{f_{\varphi_6}}$  значень функції  $f_{\varphi_6}$  є можливим значенням випадкової величини  $Y$ , то  $S_Y = E_{f_{\varphi_6}}$ .  $\square$

**Теорема 3.18.** *Для того, щоб випадкові величини  $Y$  та  $X$  мали однакові неперервні розподіли, необхідно і достатньо, щоб  $p_0 = \frac{1}{2}$ .*

*Доведення. Необхідність.* Скористаємось методом від супротивного.

Нехай випадкові величини  $X$  та  $Y$  мають однакові розподіли і  $p_0 \neq \frac{1}{2}$ . Оскільки, випадкові величини  $X$  та  $Y$  мають однакові розподіли, то

$$P\{Y \in \Delta_0^{Q_2}\} = P\{X \in \Delta_{00}^{Q_2} \cup X \in \Delta_{11}^{Q_2}\} = P\{X \in \Delta_{00}^{Q_2}\} + P\{X \in \Delta_{11}^{Q_2}\} = p_0^2 + p_1^2.$$

Тоді  $p_0 = p_0^2 + p_1^2$ . Остання рівність виконується лише при  $p_0 = 1$  і  $p_0 = \frac{1}{2}$ . Але розподіл  $X$  неперервний, отже,  $p_0 \neq 1$ , а тому  $p_0 = \frac{1}{2}$ . Отримали суперечність. Необхідність доведено.

*Достатність.* Нехай маємо  $X = \Delta_{\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n}^{Q_2}$ ,  $P\{\eta_n = i\} = \frac{1}{2}$  і  $Y = f_{\varphi_6}(X) = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}^{Q_2}$ ,  $|\eta_n - \eta_{n+1}| = \xi_n$ . Тоді

$$P\{Y \in \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_2}\} = P\{X \in \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m \alpha_{m+1}}^{Q_2}\} + P\{X \in \Delta_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2] \dots [1-\alpha_m][1-\alpha_{m+1}]}^{Q_2}\},$$

де  $|\alpha_k - \alpha_{k+1}| = c_k$ ,  $k = \overline{1, m}$ ,

$$P\{Y \in \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_2}\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^m = P\{X \in \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_2}\}.$$

Достатність і всю теорему доведено.  $\square$

**Лема 3.19.** *Якщо виконується рівність*

$$\max\{p_0, p_1\} \equiv p_{max} < q_0^{q_0} q_1^{q_1}, \quad (3.21)$$

то  $p_0 \neq q_0$ .

*Доведення.* Припустимо супротивне. Нехай  $p_0 = q_0$ . Можливі випадки:

- 1)  $p_{max} = p_0$ ;
- 2)  $p_{max} = 1 - p_0$ .

Тоді у першому випадку маємо

$$p_0 < p_0^{p_0}(1 - p_0)^{1-p_0} \Leftrightarrow 1 < p_0^{p_0-1}(1 - p_0)^{1-p_0} = \left(\frac{1 - p_0}{p_0}\right)^{1-p_0}.$$

Оскільки  $p_{max} = p_0$ , то  $\frac{1-p_0}{p_0} < 1$  і  $\left(\frac{1-p_0}{p_0}\right)^{1-p_0} < 1$ . Отримали протиріччя. У другому випадку маємо

$$1 - p_0 < p_0^{p_0}(1 - p_0)^{1-p_0} \Leftrightarrow 1 < p_0^{p_0}(1 - p_0)^{-p_0} = \left(\frac{p_0}{1 - p_0}\right)^{p_0}.$$

Оскільки  $p_{max} = 1 - p_0$ , то  $\frac{p_0}{1-p_0} < 1$  і  $\left(\frac{p_0}{1-p_0}\right)^{p_0} < 1$ . Знову отримали протиріччя, яке доводить твердження. Отже, якщо виконується нерівність (3.21), то й виконується  $p_0 \neq q_0$ . Лему доведено.  $\square$

**Теорема 3.19.** 1) *Розподіл випадкової величини  $Y$  є неперервним тоді і тільки тоді, коли таким є розподіл випадкової величини  $X$ .*  
2) *Якщо виконується умова*

$$p_{max} < q_0^{q_0} q_1^{q_1}, p_{max} = \max\{p_0, p_1\},$$

*то випадкові величини  $X$  і  $Y$  мають вингулярно неперервні розподіли салемівського типу.*

*Доведення.* 1. Перше твердження є наслідком того, що кожен рівень функції  $f_{\varphi_6}$  містить не більше двох точок.

2. Відомо [52], що при  $p_0 \neq q_0$  розподіл випадкової величини  $X$  є сингулярним. Виконання цієї умови гарантують умови теореми і попередня лема. Отже, розподіл випадкової величини  $X$  є сингулярним.

Нагадаємо, що  $Q_2$ -нормальним числом називається число  $x$ , для якого частоти  $\nu_1(x) = q_1$ ,  $\nu_0(x) \equiv 1 - \nu_1(x)$ , де

$$\nu_1(x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_1(x, n)}{n}, \quad N_1(x, n) \equiv \sum_{i=1}^n \alpha_i(x).$$

Відомо [52, 56], що множина  $H_{Q_2}$  всіх  $Q_2$ -нормальних чисел відрізка  $[0; 1]$  є множиною повної міри Лебега, тобто  $\lambda(H_{Q_2}) = 1$ .

Нехай  $x \in H_{Q_2} \cap W_X \cap W_Y$ , де  $W_Y$  – множина, в точках якої існує скінченна похідна функції розподілу випадкової величини  $Y$  (відома теорема Лебега констатує повноту міри Лебега цієї множини). Тоді згідно з лемою

$$\begin{aligned} F'_Y(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P\{Y \in \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{Q_2}\}}{|\Delta_{\alpha_1(x) \alpha_2(x) \dots \alpha_n(x)}^{Q_2}|} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P\{X \in \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha_{n+1}}^{Q_2}\} + P\{X \in \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha_{n+1}}^{Q_2}\}}{|\Delta_{\alpha_1(x) \alpha_2(x) \dots \alpha_n(x)}^{Q_2}|} = \\ &= \frac{p_0^s p_1^k + p_0^k p_1^s}{q_0^{N_0(x,n)} q_1^{N_1(x,n)}}, \end{aligned}$$

$$s + k = n + 1, \quad N_0 \equiv n - N_1.$$

Тоді

$$\frac{P\{Y \in \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_2}\}}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_2}|} = \frac{p_0^s p_1^k + p_0^k p_1^s}{q_0^{N_0} q_1^{N_1}} \leq \frac{2p_{max}^{m+1}}{q_0^{N_0} q_1^{N_1}} = \left( \frac{2^{\frac{1}{2}} p_{max}}{q_0^{\frac{N_0}{m}} q_1^{\frac{N_1}{m}}} \right)^m.$$

Якщо  $\frac{p_{max}}{q_0^{\frac{1}{m}} q_1^{\frac{1}{m}}} < 1$ , то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{P\{Y \in \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_2}\}}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_2}|} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{2^{\frac{1}{2}} p_{max}}{q_0^{\frac{N_0}{m}} q_1^{\frac{N_1}{m}}} \right)^m = 0,$$

де  $\lim_{m \rightarrow \infty} q_i^{\frac{N_i}{m}} = q_i^{q_i}, i \in \{0, 1\}$ . Отже,  $Y = f_{\varphi_6}(X)$  сингулярно розподілена випадкова величина. Теорему доведено.  $\square$

### 3.8. Функція $f_{\varphi_2}$ з фрактальною множиною значень

Розглянемо функцію  $f_{\bar{\varphi}}$ , породжена функцією  $\varphi_2(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Очевидно, що матричному заданню функції еквівалентне задання рівністю  $\varphi_2(i, j) = |i - j|i$ , де  $i, j \in A$ .



жина канторівського типу (ніде не щільна множина нуль міри Лебега)

$$E_{f_{\varphi_2}} = C \equiv C[Q_2, \overline{11}] \equiv \{x : \alpha_k(x)\alpha_{k+1}(x) \neq 11, k \in N\},$$

яка має самоподібну розмірність, що є розв'язком рівняння

$$q_0^x + (q_0q_1)^x = 1 \quad (3.23)$$

і співпадає з розмірністю Гаусдорфа-Безиковича.

*Доведення.* Число  $y_0 \in C$  має вигляд

$$\left[ \begin{array}{l} y_0 = \Delta_{(0)}^{Q_2}, \\ y_0 = \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{c_1-1}1\underbrace{0\dots 0}_{c_2}1\dots\underbrace{0\dots 0}_{c_m}1(0)}, \\ y_0 = \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{c_1-1}1\underbrace{0\dots 0}_{c_2}1\dots\underbrace{0\dots 0}_{c_k}1\dots}, \quad c_k \in N. \end{array} \right.$$

Очевидно, що  $f_{\varphi_2}(\Delta_{(0)}^{Q_2}) = \Delta_{(0)}^{Q_2}$  і

$$f_{\varphi_2}(\Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{c_1}1\underbrace{0\dots 0}_{c_2+1}1\dots\underbrace{0\dots 0}_{c_k+1}1(0)}) = \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{c_1-1}1\underbrace{0\dots 0}_{c_2}1\dots\underbrace{0\dots 0}_{c_k}1(0)};$$

$$f_{\varphi_2}(\Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{c_1}1\underbrace{0\dots 0}_{c_2+1}1\dots\underbrace{0\dots 0}_{c_k+1}1\dots}) = \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{c_1-1}1\underbrace{0\dots 0}_{c_2}1\dots\underbrace{0\dots 0}_{c_k}1\dots}.$$

Отже,  $C \subset E_{f_{\varphi_2}}$ .

Покажемо, що  $E_{f_{\varphi_2}} \setminus C = \emptyset$ . Скористаємось методом від супротивного. Нехай  $E_{f_{\varphi_2}} \setminus C \neq \emptyset$ , тобто існує таке  $y = \Delta_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_n\dots}^{Q_2}$ , що для деякого  $k \in N$   $\gamma_k(y)\gamma_{k+1}(y) = 11$ . Тоді для прообразу  $x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{Q_2}$  значення  $y$

маємо систему рівностей 
$$\begin{cases} \gamma_k = |\alpha_k - \alpha_{k+1}| \alpha_k = 1, \\ \gamma_{k+1} = |\alpha_{k+1} - \alpha_{k+2}| \alpha_{k+1} = 1, \end{cases}$$
 яка несумісна.

Це говорить про хибність припущення. Отже,  $E_{f_{\varphi_2}} = C$ .

Оскільки  $C = \Delta'_0 \cup \Delta'_{10}$ , де  $\Delta'_0 = \Delta_0^{Q_2} \cap C$ ,  $\Delta'_{10} = \Delta_{10}^{Q_2} \cap C$ , причому  $C$  подібна  $\Delta'_0$  і  $\Delta'_{10}$  з коефіцієнтом подібності  $q_0$  і  $q_0q_1$  відповідно, то  $C$  є самоподібною множиною, розмірність якої є розв'язком рівняння (3.23).

Оскільки множина  $C$  задовольняє умову відкритої множини, то її самоподібна розмірність співпадає з розмірністю Гаусдорфа-Безиковича.  $\square$

**Наслідок 3.14.** При  $q_0 = \frac{1}{2}$  самоподібна розмірність множини  $E_{f_{\varphi_2}}$  рівна  $\log_2(\sqrt{5} + 1) - 1$ .

### 3.8.2. Множини рівнів функції $f_{\varphi_2}$ .

**Теорема 3.21.** Кожна множина  $Q_2$ -бінарного рівня функції  $f_{\varphi_2}$  є скінченною, причому

1) множини рівнів  $y_0 = \Delta_{(0)}^{Q_2}$  і  $y_0 = \Delta_{1(0)}^{Q_2}$  односточкові, а саме:

$$f_{\varphi_2}^{-1}(\Delta_{(0)}^{Q_2}) = \Delta_{(0)}^{Q_2}, \quad f_{\varphi_2}^{-1}(\Delta_{1(0)}^{Q_2}) = \Delta_{1(0)}^{Q_2};$$

2) множина рівня  $y_0 = \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{s_1} 1 \underbrace{0\dots 0}_{s_2} 1 \dots \underbrace{0\dots 0}_{s_m} 1}_{(0)}^{Q_2}$  складається з

$S = (s_1 + 1)s_2 \dots s_m$  точок, а саме: з точок

$$x = \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{k_1} \underbrace{1\dots 1}_{s_1 - k_1} 1 \underbrace{0\dots 0}_{k_2} \underbrace{1\dots 1}_{s_2 - k_2} 1 \dots 1 \underbrace{0\dots 0}_{k_m} \underbrace{1\dots 1}_{s_m - k_m} 1}_{(0)}^{Q_2}, \quad k_1 = \overline{0}, s_1, k_{i+1} = \overline{1}, s_{i+1}, s_i \in N;$$

3) множина рівня  $y_1 = \Delta_{1 \underbrace{0\dots 0}_{s_1} 1 \underbrace{0\dots 0}_{s_2} \dots 1 \underbrace{0\dots 0}_{s_m} 1}_{(0)}^{Q_2}$  складається з

$S = s_1 s_2 \dots s_m$  точок, а саме:

$$x = \Delta_{1 \underbrace{0\dots 0}_{k_1} \underbrace{1\dots 1}_{s_1 - k_1} 1 \underbrace{0\dots 0}_{k_2} \underbrace{1\dots 1}_{s_2 - k_2} \dots 1 \underbrace{0\dots 0}_{k_m} \underbrace{1\dots 1}_{s_m - k_m} 1}_{(0)}^{Q_2}, \quad k_i = \overline{1}, s_i, s_i \in N, i = \overline{1, m}.$$

*Доведення.* 1. Перше твердження є очевидним.

2. Очевидною також є рівність  $f_{\varphi_2}(x) = y_0$ . Те, що інших прообразів число  $y_0$  не має випливає з того, що прообразом  $y_0$  є число,  $Q_2$ -зображення якого містить рівно  $m$  пар послідовних цифр 10, причому їх місця визначені заданим впорядкованим набором натуральних чисел:

$$s_1 + 1, s_1 + s_2 + 2, \dots, s_1 + s_2 + \dots + s_m + m.$$

Кількість прообразів  $y_0$  є наслідком комбінаторного правила множення.

3. Твердження для значення  $y_1$  функції  $f_{\varphi_2}$  обґрунтовується аналогічно. Більше того, друге твердження є частковим випадком третього. Але ми для більшої прозорості викладу віддали перевагу такому формулюванню теореми.  $\square$

**Теорема 3.22.** Якщо у зображенні  $Q_2$ -бінарного числа  $\tilde{y} \in E_{f_{\varphi_2}}$  кількість серій нулів з довжиною більшою 1 скінченна, то множина рівня  $\tilde{y}$  функції  $f_{\varphi_2}$  є скінченною, в протилежному випадку – континуальною, причому

$$1) f_{\varphi_2}^{-1}(\Delta_{(01)}^{Q_2}) = \{\Delta_{11(01)}^{Q_2}, \Delta_{0(10)}^{Q_2}\}, f_{\varphi_2}^{-1}(\Delta_{(10)}^{Q_2}) = \Delta_{1(01)}^{Q_2};$$

$$2) f_{\varphi_2}^{-1}(\Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{s_1} 1 \underbrace{0\dots 0}_{s_2} 1 \dots \underbrace{0\dots 0}_{s_m} (10)\dots}) = \{x = \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{k_1} \underbrace{1\dots 1}_{s_1-k_1} 1 \underbrace{0\dots 0}_{k_2} \underbrace{1\dots 1}_{s_2-k_2} 1 \dots 1 \underbrace{0\dots 0}_{k_m} \underbrace{1\dots 1}_{s_m-k_m} (10)}^{Q_2}\},$$

$$k_1 = \overline{0}, s_1, k_m = \overline{1}, s_m, s_i \in N, i = \overline{1, m};$$

$$3) Q_2\text{-зображення прообразу } x \text{ числа } y_{\bullet} = \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{s_1} 1 \underbrace{0\dots 0}_{s_2} 1 \dots \underbrace{0\dots 0}_{s_m} 1\dots} \text{ має вигляд}$$

$$x = \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{k_1} \underbrace{1\dots 1}_{s_1-k_1} 1 \underbrace{0\dots 0}_{k_2} \underbrace{1\dots 1}_{s_2-k_2} 1 \dots 1 \underbrace{0\dots 0}_{k_m} \underbrace{1\dots 1}_{s_m-k_m} 1\dots}^{Q_2}$$

$$k_1 = \overline{0}, s_1, k_m = \overline{1}, s_m, s_m \in N, m = 2, 3, \dots;$$

$$4) Q_2\text{-зображення прообразу числа } y_{*} = \Delta_{1 \underbrace{0\dots 0}_{s_1} 1 \underbrace{0\dots 0}_{s_2} 1 \dots \underbrace{0\dots 0}_{s_m} 1\dots} \text{ має вигляд}$$

$$x = \Delta_{1 \underbrace{0\dots 0}_{k_1} \underbrace{1\dots 1}_{s_1-k_1} 1 \underbrace{0\dots 0}_{k_2} \underbrace{1\dots 1}_{s_2-k_2} 1 \dots 1 \underbrace{0\dots 0}_{k_m} \underbrace{1\dots 1}_{s_m-k_m} 1\dots}^{Q_2}, k_m = \overline{1}, s_m, s_m \in N, m = 1, 2, \dots$$

*Доведення.* Рівності 1) є очевидними. Зрозуміло, що прообраз  $x = f_{\varphi_2}^{-1}(\tilde{y})$  значення  $\tilde{y} = \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{s_1} 1 \underbrace{0\dots 0}_{s_2} 1 \dots \underbrace{0\dots 0}_{s_m} (10)\dots}^{Q_2}$  містить період (10), який починається з  $(s_1 + \dots + s_m + m)$ -го місця. В цьому випадку потужність множини рівня  $\tilde{y}$  обчислюється за формулою  $S = (s_1 + 1)s_2 \cdot \dots \cdot s_m$ , обґрунтування якої аналогічне до наведеного при доведенні попередньої теореми.

Нехай тепер кількість серій нулів з потужністю, більшою за 1, є нескінченною. Зауважимо, що структура  $Q_2$ -зображення числа  $y_{\bullet}$  однозначно визначається послідовністю натуральних чисел  $(s_m)$ . Тому легко бачити, що у  $Q_2$ -зображенні прообразу  $x = x(s_m)$  числа  $y_{\bullet}$  серії нулів та одиниць чергуються, причому переходи серій одиниць в серії нулів здійснюються лише на наступній послідовності місць:  $l_m = s_1 + s_2 + \dots + s_m + m, m = 1, 2, \dots$ . Отже,  $f_{\varphi}(x) = y_{\bullet}$ .

Розглянемо спочатку випадок, коли серії нулів однакові і містять дві



цифри, тобто  $s_m = 2$ . Тоді маємо наступне  $Q_2$ -зображення  $y = \Delta_{(001)}^{Q_2}$ . Очевидно, що  $f_{\varphi_2}(\Delta_{(001)}^{Q_2}) = f_{\varphi_2}(\Delta_{(011)}^{Q_2}) = f_{\varphi_2}(\Delta_{(1(110))}^{Q_2}) = \Delta_{(001)}^{Q_2}$ . Але тоді й  $f_{\varphi_2}(\Delta_{(001011)}^{Q_2}) = \Delta_{(001)}^{Q_2}$ , проте  $f_{\varphi_2}(\Delta_{(001110)}^{Q_2}) \neq \Delta_{(001)}^{Q_2}$ . Тобто різні варіанти комбінацій трійок цифр "001" і "011" даватимуть  $\Delta_{(001)}^{Q_2}$ . Тоді рівень  $\Delta_{(001)}^{Q_2}$  складатиметься принаймі з точок, що в своєму  $Q_2$ -зображенні матимуть послідовність трійок "001" і "011". Тобто  $f_{\varphi_2}^{-1}(\Delta_{(001)}^{Q_2}) \supset \{x : x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \dots, c_{3m-2} c_{3m-1} c_{3m}} \in \{\overline{001}, \overline{011}\}, i \in N\}$ .

Остання множина має потужність континууму, оскільки на нескінченній кількості місць у зображенні прообразу значення  $y_\bullet$  існує альтернатива (два різних можливих варіанти). Отже, континуальною є і множина  $f_{\varphi_2}^{-1}(y_\bullet)$ .

Якщо окремі серії нулів мають більшу довжину, то на «їхніх місцях» кількість альтернатив лише збільшується (дивись міркування при доведенні 2-го твердження). Якщо  $s_m = 1$ , тобто  $y_\bullet = \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{s_1} 1 \underbrace{0\dots 0}_{s_2} 1 \dots \underbrace{0\dots 0}_{s_{m-1}} 1 0 1 \underbrace{0\dots 0}_{s_{m+1}} 1 \dots}$ , то для прообразу  $x$  числа  $y_\bullet$  не існує альтернатив для  $(j-1)$ ,  $j$ ,  $(j+1)$ -ої цифр, а саме:  $\alpha_{j-1}(x) = 1 = \alpha_{j+1}(x)$ ,  $\alpha_j(x) = 0$ , коли  $j = s_1 + s_2 + \dots + s_m + m - 1$ . Але альтернативи існують на нескінченній кількості місць, коли  $s_m > 1$  для нескінченної множини значень  $m$ . Тому в цьому випадку множина рівня  $y_\bullet$  є континуальною.

Доведення рівності 4) аналогічне до наведеного. □

**Теорема 3.23.** *Графік функції  $\Gamma_{f_{\varphi_2}} = (x; f(x)) : x \in [0; 1)$  є  $N$ -самоафінною множиною, причому  $\Gamma_{f_{\varphi_2}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \delta_n(\Gamma_{f_{\varphi_2}})$ , де*

$$\delta_0 : \begin{cases} x' = q_0 x; \\ y' = q_0 y, \end{cases} \quad \delta_n : \begin{cases} x' = q_1^{n-1} q_0 x + q_0 \sum_{i=1}^{n-1} q_1^i; \\ y' = q_0^{n-1} q_1 y + q_0^n. \end{cases}$$

*Доведення.* Нехай  $G = \delta_0(\Gamma_{f_{\varphi_2}}) \cup \delta_1(\Gamma_{f_{\varphi_2}}) \cup \delta_2(\Gamma_{f_{\varphi_2}}) \cup \dots \cup \delta_k(\Gamma_{f_{\varphi_2}}) \cup \dots$ . Доведемо, що  $\Gamma_{f_{\varphi_2}} = G$ . Для цього спочатку покажемо,  $G \subset \Gamma_{f_{\varphi_2}}$ . Розглянемо довільну точку  $M \in G$ . Тоді існує такий номер  $k$ , що  $M \in \delta_k(\Gamma_{f_{\varphi_2}})$ ,

тобто:

$$\begin{cases} x_M = x' = q_1^{k-1} q_0 x + q_0 \sum_{i=1}^{k-1} q_1^i, \\ y_M = y' = q_0^{k-1} q_1 y + q_0^k. \end{cases}$$

Легко бачити, що  $y_M \in f_{\varphi_2}(x_M)$ , тобто  $M \in \Gamma_{f_{\varphi_2}}$ . Покажемо, що  $\Gamma_{f_{\varphi_2}} \subset G$ .

Нехай  $M \in \Gamma_{f_{\varphi_2}}$ , тобто для деякого  $x \in [0; 1)$ :  $M(x; f_{\varphi_2}(x))$  і

$$(\alpha_m(x) \alpha_{m+1}(x) \dots \alpha_{m+n}(x)) = (\underbrace{1 \dots 1}_n 0), m, n \in N.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } x &= \Delta_{\underbrace{1 \dots 1}_{i-1}}^{Q_2} 0 \alpha_{i+1} \alpha_{i+2} \dots = q_1^{i-1} q_0 x + q_0 \sum_{j=1}^{i-1} q_1^j, \text{ а тому} \\ f_{\varphi_2}(x) &= \Delta_{\underbrace{0 \dots 0}_{i-2}}^{Q_2} 10 \gamma_{i+1} \gamma_{i+2} \dots = q_0^{i-1} q_1 y + q_0^i. \end{aligned}$$

Отже,  $M \in \delta_i(\Gamma_{f_{\varphi_2}})$ . Що й вимагалось довести.  $\square$

**Наслідок 3.15.**  $N$ -самоафінна розмірність графіка  $\Gamma_{f_{\varphi_2}}$  функції  $f_{\varphi_2}$  є розв'язком рівняння

$$q_0^x + \sum_{n=2}^{\infty} (q_0 q_1)^{n \frac{x}{2}} = 1.$$

**Наслідок 3.16.** При  $q_0 = \frac{1}{2}$   $N$ -самоафінна розмірність графіка  $\Gamma_{f_{\varphi_2}}$  функції  $f_{\varphi_2}$  рівна 1.

### 3.8.3. Властивості графіка функції $f_{\varphi_2}$ .

**Теорема 3.24.** Графік  $\Gamma_{f_{\varphi_2}} = \{(x; y) : x \in [0; 1), y = f_{\varphi_2}(x)\}$  функції  $f_{\varphi_2}$  є  $N$ -самоафінною множиною, причому

$$\Gamma_{f_{\varphi_2}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \delta_n(\Gamma_{f_{\varphi_2}}),$$

де  $\delta_0$  та  $\delta_n$  — афінні перетворення

$$\delta_0: \begin{cases} x' = q_0 x; \\ y' = q_0 y, \end{cases} \quad \delta_n: \begin{cases} x' = q_1^n q_0 x + q_0 \sum_{i=0}^{n-1} q_1^i; \\ y' = q_0^n q_1 y + q_0^n, \quad n \in N \end{cases}$$

*Доведення.* Нехай  $G \equiv \delta_0(\Gamma_{f_{\varphi_2}}) \cup \delta_1(\Gamma_{f_{\varphi_2}}) \cup \delta_2(\Gamma_{f_{\varphi_2}}) \cup \dots \cup \delta_k(\Gamma_{f_{\varphi_2}}) \cup \dots$ . Доведемо, що  $\Gamma_{f_{\varphi_2}} = G$ . Спочатку покажемо, що  $G \subset \Gamma_{f_{\varphi_2}}$ . Розглянемо довільну точку  $M'(x_{M'}; y_{M'}) \in G$ . Тоді існує такий номер  $k$ , що  $M' \in \delta_k(\Gamma_{f_{\varphi_2}})$ ,

де  $M' = \delta_k(M)$ ,  $M \in \Gamma_{f_{\varphi_2}}$ . Якщо  $k = 0$ , то

$$\begin{cases} x_{M'} = x' = q_0 x = \Delta_{0\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^{Q_2}, \\ y_{M'} = y' = q_0 y = \Delta_{0\alpha_1(y)\alpha_2(y)\dots\alpha_n(y)\dots}^{Q_2}. \end{cases}$$

Очевидно, що  $f_{\varphi_2}(x_{M'}) = y_{M'}$ , а отже,  $M' \in \Gamma_{f_{\varphi_2}}$ . Нехай  $k \in N$ , тобто

$$\begin{cases} x_{M'} = x' = q_1^k q_0 x + q_0 \sum_{i=0}^{k-1} q_1^i = \Delta_{\underbrace{1\dots 1}_k 0\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^{Q_2}, \\ y_{M'} = y' = q_0^k q_1 y + q_0^k = \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_k 10\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^{Q_2}. \end{cases}$$

Легко бачити, що  $y_{M'} = f_{\varphi_2}(x_{M'})$ , тобто  $M' \in \Gamma_{f_{\varphi_2}}$ . Отже,  $G \subset \Gamma_{f_{\varphi_2}}$ .

Покажемо, що  $\Gamma_{f_{\varphi_2}} \subset G$ . Нехай  $M(x, y) \in \Gamma_{f_{\varphi_2}}$ , тобто  $y = f_{\varphi_2}(x)$ ,  $x \in [0; 1)$ .

Якщо  $x = \Delta_{0\alpha_2\alpha_3\dots}^{Q_2} = q_0 \tilde{x}$ , де  $\tilde{x} = \Delta_{\alpha_2\alpha_3\dots}^{Q_2}$ , то  $y = f_{\varphi}(x) = \Delta_{0\gamma_2\gamma_3}^{Q_2} = q_0 \tilde{y}$ , де  $\tilde{y} = \Delta_{\gamma_2\gamma_3\dots}^{Q_2}$ , і  $M \in \delta_0(\Gamma_{f_{\varphi_2}})$ , а отже,  $M \in G$ . Якщо

$$x = \Delta_{\underbrace{1\dots 1}_i 0\alpha_{i+2}\alpha_{i+3}\dots}^{Q_2} = q_1^i q_0 \tilde{x} + q_0 \sum_{j=0}^i q_1^j, \text{ де } \tilde{x} = \Delta_{\alpha_{i+2}\alpha_{i+3}\dots}^{Q_2},$$

то

$$f_{\varphi_2}(x) = \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{i-1} 10\gamma_{i+2}\gamma_{i+3}\dots}^{Q_2} = q_0^i q_1 \tilde{y} + q_0^i, \text{ де } \tilde{y} = \Delta_{\gamma_{i+2}\gamma_{i+3}\dots}^{Q_2}.$$

Отже,  $M \in \delta_i(\Gamma_{f_{\varphi_2}})$ ,  $\Gamma_{f_{\varphi_2}} \subset G$ . Що й вимагалось довести.  $\square$

**Наслідок 3.17.**  $N$ -самоафінна розмірність графіка  $\Gamma_{f_{\varphi_2}}$  функції  $f_{\varphi_2}$  є розв'язком рівняння

$$q_0^x + \frac{(q_0 q_1)^x}{1 - (q_0 q_1)^{\frac{x}{2}}} = 1. \quad (3.24)$$

Вона при  $q_0 = \frac{1}{2}$  дорівнює 1.

Рівняння для визначення  $N$ -самоафінної розмірності графіка функції знаходиться з

$$\left| \begin{array}{cc} q_0 & 0 \\ 0 & q_0 \end{array} \right|^{\frac{x}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \begin{array}{cc} q_1^n q_0 & 0 \\ 0 & q_0^n q_1 \end{array} \right|^{\frac{x}{2}} = 1.$$

Воно після згортання лівої частини набуває вигляду (3.24).

**3.8.4. Розподіл значень функції  $f_{\varphi_2}(\mathbf{x})$ .** Нехай  $(\eta_k)$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значення 0 і 1 з ймовірностями  $p_0, p_1$  відповідно, тобто

$$P\{\eta_k = 0\} = p_0, \quad P\{\eta_k = 1\} = p_1, \quad p_0 + p_1 = 1, \quad \forall n \in N.$$

Нас цікавить розподіл значень функції, аргументом якої є випадкова величина  $X$ , тобто розподіл випадкової величини:

$$Y = f(X) = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots}^{Q_2}, \quad \xi_i = \varphi(\eta_i, \eta_{i+1}).$$

*Зауваження 3.3.* Коректність задання випадкової величини обґрунтовується аналогічно як в лемі 3.17.

**Лема 3.21.** *Випадкова величина  $\xi_k \equiv \varphi(\eta_k, \eta_{k+1})$  набуває значень 0 і 1 з ймовірностями  $p_0 p_1$  і  $1 - p_0 p_1$  відповідно.*

*Доведення.* Враховуючи незалежність випадкових величин  $\eta_k$  маємо:

$$P\{\xi_k = 1\} = P\{\eta_k > \eta_{k+1}\} = P\{\eta_k = 1\}P\{\eta_{k+1} = 0\} = p_0 p_1;$$

$$P\{\xi_k = 0\} = 1 - P\{\xi_k = 1\} = 1 - p_0 p_1 = p_0^2 + p_0 p_1 + p_1^2. \quad \square$$

**Теорема 3.25.** *Якщо розподіл  $X$  не є виродженим, то розподіл випадкової величини  $Y = f(X)$  є сингулярно неперервним розподілом канторівського типу.*

*Доведення.* Для обґрунтування висновку теореми досить довести, що розподіл випадкової величини  $Y$  не має атомів. Згідно з означенням неперервності розподілу для цього досить довести, що ймовірність кожної одноточкової множини рівна 0.

Зазначимо, що  $P\{Y = y_0\} = P\{X \in f^{-1}(y_0)\}$ . Тому якщо рівень  $y_0$  є скінченим або зліченим, то точка  $y_0$  не є атомом в силу неатомарності розподілу випадкової величини  $X$ . Якщо ж рівень  $y_0$  не є континуальним, то можливі випадки:

1.  $Q_2$ -зображення числа  $y_0$  починається цифрою 0;
2.  $Q_2$ -зображення числа  $y_0$  починається цифрою 1, які ми розглянемо окремо.

Нехай  $y_0 = \Delta_{0\dots 010\dots 010\dots 01\dots}^{Q_2}$ ,  $c_n \in N$ . Тоді рівень  $f^{-1}(y_0)$  складається з точок виду  $x = \Delta_{0\dots 01\dots 10\dots 01\dots 1\dots 0\dots 01\dots 1}^{Q_2}$ ,  $k_1 \in \{0, 1, 2, \dots, c_1\}$ ,  $k_n \in \{0, 1, 2, \dots, c_n - 1\}$  при  $n > 1$ . Оскільки  $\sum_{k=1}^{c_n} p_0^k p_1^{c_n-k} \leq \frac{1}{4}$ , то нескінчений добуток розбігається до нуля в силу того, що не виконується необхідна умова його збіжності. Отже,  $P\{Y = y_0\} = 0$ .

Оскільки  $P\{Y \in E_f\} = 1$ , а міра Лебега  $\lambda(E_f) = 0$ , то розподіл випадкової величини  $Y$  є сингулярним розподілом канторівського типу.  $\square$

### Висновки до розділу 3

У цьому розділі вивчались функції, означені ланцюговою залежністю  $Q_2$ -цифр зображення значення функції від пар  $Q_2$ -цифр зображення аргумента. Наведено загальну конструкцію функцій цього класу і вивчено властивості представників пар двоїстих функцій. Більшість функцій цього класу мають фрактальні властивості з різними їх проявами. Одні з них мали фрактальну структуру множини значень, інші фрактальні рівні та множини особливостей.

Окреме дослідження було присвячене інверсору цифр  $Q_2^*$ -зображення — неперервній строго спадній функції, що має фрактальною множиною точок недиференційовності. Для неї встановлено зв'язок з функцією розподілу випадкової величини двійкові цифри якої є незалежними, а розподіли визначаються спряженою матрицею даного  $Q_2^*$ -зображення. Для випадку коли  $Q_2^*$ -зображення є  $Q_2$ -зображення описано самоафінні властивості графіка та інтегральні властивості функції.

Основні результати цього розділу опубліковані в роботах [47, 44]. Вони пройшли апробацію на конференціях [16, 17, 18, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66].

## РОЗДІЛ 4

### РОЗПОДІЛИ $Q_2$ -ЦИФР ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ З ВІДОМИМ РОЗПОДІЛОМ

У цьому розділі вивчаються розподіли цифр  $Q_2$ -зображення випадкової величини з заданим розподілом і розподіл випадкової величини, породженої розподілами цифр її  $Q_2$ -зображення, на предмет наявності додатної щільності у кожній точці деякого відрізка.

#### 4.1. Незалежність цифр $Q_2$ -зображення випадкової величини з заданим розподілом

Традиційними для ймовірнісної теорії зображення дійсних чисел у фіксованій системі їх кодування є задачі: 1) вивчити розподіл цифр  $\xi_1, \xi_2, \dots$  зображення випадкової величини  $\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots}^g$  за наперед заданим її розподілом, зокрема встановити факт незалежності розподілів або вид їх залежності; 2) вивчити розподіл випадкової величини  $\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots}^g$  за заданими розподілами її цифр у фіксованій системі кодування чисел. Розглядаючи ці задачі у даному розділі, ми акцентуємо увагу на  $Q_2$ -зображенні чисел [56, 71], на рівномірному та експоненційному розподілу випадкової величини  $\xi$  на відрізку  $[0; 1]$ .

##### 4.1.1. Цифра $Q_2$ -зображення числа як функція цього числа.

Цифра  $\alpha_n = \alpha_n(x)$   $Q_2$ -зображення числа  $x$  є коректно означеною функцією на множині  $Q_2$ -унарних точок і стає такою на множині  $Q_2$ -бінарних точок після введення домовленості не використовувати зображення з періодом (1). Вона є константою на кожному циліндричному інтервалі  $n$ -го рангу, будучи обмеженою і маючи скінченне число розривів першого роду,

є інтегрованою на  $[0;1]$ :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \alpha_n(x) dx &= 1 \cdot \sum_{i_1 \in A} \dots \sum_{i_{n-1} \in A} |\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}^{Q_2}| = \\ &= q_1 \sum_{i_1 \in A} \dots \sum_{i_{n-1} \in A} |\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}^{Q_2}| = q_1. \end{aligned}$$

Дві множини  $A$  і  $B$  з  $[0;1]$  називаються [30] *метрично незалежними*, якщо для міри Лебега  $\lambda(\cdot)$  виконується рівність

$$\lambda(A \cap B) = \lambda(A) \cdot \lambda(B) \Leftrightarrow \frac{\lambda(A \cap B)}{\lambda(A)} = \frac{\lambda(B)}{1}.$$

Нехай  $\Delta_{c_i}^{k_i} \equiv \{x : \alpha_{k_i}(x) = c_i\}$ . Множини  $\Delta_{c_1}^{k_1}$  і  $\Delta_{c_2}^{k_2}$  при  $k_1 \neq k_2$  є метрично незалежними, оскільки

$$\lambda(\Delta_{c_1}^{k_1} \cap \Delta_{c_2}^{k_2}) = q_{c_1} q_{c_2} = \lambda(\Delta_{c_1}^{k_1}) \cdot \lambda(\Delta_{c_2}^{k_2}).$$

Аналогічно, якщо  $(k_1, k_2, \dots, k_m)$  — зростаючий набір натуральних чисел, то для міри Лебега виконуються рівності

$$\lambda(\Delta_{c_1}^{k_1} \cap \Delta_{c_2}^{k_2} \cap \dots \cap \Delta_{c_m}^{k_m}) = \prod_{j=1}^m q_{c_j} = \prod_{j=1}^m \lambda(\Delta_{c_j}^{k_j}).$$

**Лема 4.1.** *Якщо  $\xi$  — випадкова величина з заданим розподілом на  $[0;1]$ , то цифра  $\xi_n$  її  $Q_2$ -зображення є випадковою величиною, причому*

$$P\{\xi_n = i\} = P\{\xi \in \bigcup_{c_1 \in A} \dots \bigcup_{c_{n-1} \in A} \Delta_{c_1 \dots c_{n-1}}^{Q_2} i\}. \quad (4.1)$$

*Доведення.* Справді, оскільки  $\xi$  — вимірна функція на  $[0;1]$ , тобто така, що для будь-якого дійсного  $x$  множина  $\{\omega : \xi(\omega) < x\}$  є борелівською, то очевидно, що множина  $\{u : \xi_n(u) = i \in A\}$  борелівська. При цьому вказана ймовірність є наслідком рівності подій  $\{\alpha_n(x) = i\} = \{x \in \bigcup_{c_1 \in A} \dots \bigcup_{c_{k-1} \in A} \Delta_{c_1 \dots c_{k-1}}^{Q_2} i\}$ .  $\square$



#### 4.1.2. Рівномірний розподіл.

**Лема 4.2.** Якщо випадкова величина  $\xi$  має рівномірний на  $[0; 1]$  розподіл, то цифри  $(\xi_n)$  її  $Q_2$ -зображення  $\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots}^{Q_2}$  є незалежними і мають розподіли  $P\{\xi_n = 0\} = q_0$ ,  $P\{\xi_n = 1\} = q_1$ .

*Доведення.* Оскільки  $\xi$  має рівномірний на  $[0; 1]$  розподіл, то він є неперервним, тобто  $P\{\xi = x\} = 0$  для довільного  $x \in [0; 1]$ , і

$$P\{\xi \in \Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_2}\} = \lambda(\Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_2}) = \prod_{i=1}^m q_{c_i}$$

для будь-якого набору  $(c_1, \dots, c_m)$  нулів та одиниць. Тому

$$P\{\xi_1 = i\} = P(\xi \in \Delta_i^{Q_2}) = q_i, \quad i = 0, 1.$$

Зауважимо, що подія  $\{\xi \in \Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_2}\}$  рівносильна одночасному виконанню подій  $\{\xi_i = c_i\}$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Для умовних ймовірностей:

$$P\{\xi_n = 0 / \Delta_{c_1 \dots c_{n-1}}^{Q_2}\} = \frac{P\{\xi \in \Delta_{c_1 \dots c_{n-1} 0}^{Q_2}\}}{P\{\xi \in \Delta_{c_1 \dots c_{n-1}}^{Q_2}\}} = \frac{q_0 \prod_{i=1}^{n-1} q_i}{\prod_{i=1}^{n-1} q_i} = q_0,$$

$$P\{\xi_n = 1 / \Delta_{c_1 \dots c_{n-1}}^{Q_2}\} = \frac{P\{\xi \in \Delta_{c_1 \dots c_{n-1} 1}^{Q_2}\}}{P\{\xi \in \Delta_{c_1 \dots c_{n-1}}^{Q_2}\}} = \frac{q_1 \prod_{i=1}^{n-1} q_i}{\prod_{i=1}^{n-1} q_i} = q_1.$$

Як бачимо, умовні ймовірності не залежать від набору  $(c_1, \dots, c_{n-1})$ , а отже, і  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ . Тому

$$P\{\xi_n = i / \xi \in \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_{n-1}}^{Q_2}\} = P\{\xi_n = i\} = q_i,$$

що й вимагалось довести. □

**Наслідок 4.1.** Якщо випадкова величина має рівномірний розподіл на  $[0, 1]$ , то цифри її двійкового зображення є незалежними, однаково розподіленими і рівноймовірними.

**4.1.3. Експоненційний розподіл на  $[0; 1]$ .** Традиційно експоненційним розподілом ймовірностей з параметром  $\lambda$  на  $R^1$  називається розподіл, що має щільність

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot e^{-cx} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Експоненційним розподілом в.в.  $X$  на відрізку  $[0; 1]$  з параметром  $c \in R$ ,  $c \neq 0$ , називається розподіл з щільністю

$$f_c(x) = \frac{c}{e^c - 1} \cdot e^{cx}.$$

Коректність цього означення слідує з  $\int_0^1 f_c(x) dx = 1$ .

**Лема 4.3.** Якщо випадкова величина  $X$  має експоненційний розподіл з параметром  $c$  на відрізку  $[0; 1]$ , то її функція розподілу  $F_c$  має вигляд

$$F_c(x) = \frac{e^{cx} - 1}{e^c - 1}$$

і при цьому  $P\{X \in [a; b]\} = \frac{e^{ca}(e^{c(b-a)} - 1)}{e^c - 1}$ .

*Доведення.* Перша частина твердження є очевидною, оскільки  $F'_c(x) = f_c(x)$  і  $F_c(0) = 0$ ,  $F_c(1) = 1$ . Тоді

$$\begin{aligned} P\{X \in [a; b]\} &= F_c(b) - F_c(a) = \frac{e^{cb} - 1}{e^c - 1} - \frac{e^{ca} - 1}{e^c - 1} = \\ &= \frac{e^c - e^{ca}}{e^c - 1} = \frac{e^{ca}(e^{c(b-a)} - 1)}{e^c - 1}. \end{aligned}$$

Лему доведено. □

*Зауваження 4.1.* Поклавши  $\frac{c}{e^c - 1} = 0$  при  $c = 0$ , маємо  $f_0(x) = 1$ . Тому в цьому контексті рівномірний розподіл на відрізку  $[0; 1]$  можна вважати частинним випадком експоненційного.

**Лема 4.4.** Характеристична функція  $\varphi$  експоненційного розподілу на відрізку  $[0; 1]$  з параметром  $c$  має вигляд

$$\varphi(t) = \frac{c}{z} \cdot \frac{e^z - 1}{z}, \quad \text{де } z = it + c.$$

*Доведення.* Справді,

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx,$$

згідно з означенням характеристичної функції розподілу зі щільністю  $f(x)$ .

Тому для експоненційного розподілу на  $[0; 1]$  маємо

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_0^1 e^{itx} f_c(x) dx = \int_0^1 e^{itx} \cdot \frac{ce^{cx}}{e^c - 1} dx = \\ &= \frac{c}{e^c - 1} \cdot \int_0^1 e^{(it+c)x} dx = \frac{c}{e^c - 1} \int_0^1 e^{zx} dz = \\ &= \frac{c}{e^c - 1} \cdot \frac{1}{z} e^{zx} \Big|_0^1 = \frac{c}{e^c - 1} \cdot \frac{e^z - 1}{z}. \end{aligned}$$

Лему доведено. □

**Лема 4.5.** [7] Якщо  $q_0 = \frac{1}{2}$  і в.в.  $\xi$  має експоненційний розподіл на  $[0; 1]$  зі щільністю  $f_c(x) = \frac{ce^{cx}}{e^c - 1}$ , то цифри  $(\xi_n)$  її  $Q_2$ -зображення (в цьому випадку воно є двійковим) є незалежними і мають розподіли:

$$P\{\tau_n = 0\} = \frac{1}{1 + e^{\frac{c}{2^n}}} \equiv p_{0n}, P\{\tau_k = 1\} = \frac{e^{\frac{c}{2^n}}}{1 + e^{\frac{c}{2^n}}} \equiv p_{1n}. \quad (4.2)$$

**Теорема 4.1.** Якщо  $q_0 \neq \frac{1}{2}$  і при цьому  $\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots}^{Q_2}$  має експоненційний розподіл на відрізку  $[0; 1]$  зі щільністю  $f_c(x) = \frac{ce^{cx}}{e^c - 1}$ , то цифри  $(\xi_n)$  її  $Q_2$ -зображення є залежними, причому залежність складніша марківської.

*Доведення.* При виконанні умов теореми з урахуванням леми 4.3 і виразів кінців та довжин циліндрів, маємо

$$\begin{aligned} P(X \in \Delta_0^{Q_2}) &= \frac{e^{cq_0} - 1}{e^c - 1}, P\{X \in \Delta_1^{Q_2}\} = \frac{e^{cq_0}(e^{cq_1} - 1)}{e^c - 1}; \\ P\{X \in \Delta_{00}^{Q_2}\} &= \frac{e^{q_0^2 c} - 1}{e^c - 1}, P\{X \in \Delta_{01}^{Q_2}\} = \frac{e^{q_0^2 c}(e^{q_0 q_1 c} - 1)}{e^c - 1}; \end{aligned}$$

$$P\{X \in \Delta_{10}^{Q_2}\} = \frac{e^{q_0c}(e^{q_0q_1c} - 1)}{e^c - 1}, \quad P\{X \in \Delta_{11}^{Q_2}\} = \frac{e^{(1-q_1^2)c}(e^{q_1^2c} - 1)}{e^c - 1}.$$

Тоді

$$P\{\xi_2 = 0/\xi_1 = 0\} = \frac{P\{\xi \in \Delta_{00}^{Q_2}\}}{P\{\xi_1 = 0\}} = \frac{e^{q_0^2c} - 1}{e^{q_0c} - 1},$$

$$P\{\xi_2 = 0/\xi_1 = 1\} = \frac{P\{\xi \in \Delta_{10}^{Q_2}\}}{P\{\xi_1 = 1\}} = \frac{e^{q_0q_1c} - 1}{e^{q_1c} - 1},$$

$$P\{\xi_2 = 1/\xi_1 = 0\} = \frac{P\{\xi \in \Delta_{01}^{Q_2}\}}{P\{\xi_1 = 0\}} = \frac{e^{q_0^2c}(e^{q_0q_1c} - 1)}{e^{q_0c} - 1},$$

$$P\{\xi_2 = 1/\xi_1 = 1\} = \frac{P\{\xi \in \Delta_{11}^{Q_2}\}}{P\{\xi_1 = 1\}} = \frac{e^{(1-q_1^2)c}(e^{q_1^2c} - 1)}{e^{q_0c}(e^{q_1c} - 1)}.$$

Оскільки при  $q_0 \neq \frac{1}{2}$  виконується нерівність

$$P\{\xi_2 = i/\xi_1 = 0\} \neq P\{\xi_2 = i/\xi_1 = 1\},$$

то  $\xi_1$  і  $\xi_2$  не є незалежними ( $i = 0, 1$ ), тобто є залежними.

Оскільки

$$P\{\xi_3 = 0/\xi_2 = 0, \xi_1 = 0\} = \frac{P\{\xi \in \Delta_{000}^{Q_2}\}}{P\{\xi \in \Delta_{00}^{Q_2}\}} = \frac{e^{q_0^3c} - 1}{e^{q_0^2c} - 1},$$

$$\begin{aligned} P\{\xi_3 = 0/\xi_2 = 0, \xi_1 = 1\} &= \frac{P\{\xi \in \Delta_{100}^{Q_2}\}}{P\{\xi \in \Delta_{10}^{Q_2}\}} = \frac{e^{q_1q_0^2c} - 1}{e^{q_1q_0c} - 1} \neq \\ &\neq P\{\xi_3 = 0/\xi_2 = 0, \xi_1 = 0\}, \end{aligned}$$

то залежність в.в.  $(\xi_n)$  є складнішою, ніж марківська [54]. □

Аналогічні задачі можна ставити для різних розподілів випадкової величини  $\xi$  на  $[0, 1]$ . Природним є запитання про те, для яких розподілів випадкової величини  $\xi$  цифри її  $Q_2$ -зображення є незалежними.

## 4.2. Розподіл з додатною щільністю випадкової величини, породжений розподілами цифр її $Q_2$ -зображення

Розподіл випадкової величини  $\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots}^{Q_2}$ , цифри  $(\xi_n)$   $Q_2$ -зображення якої є незалежними і набувають значень 0 та 1 з ймовірностями  $p_{0n} \geq 0$ ,  $p_{1n} \equiv 1 - p_{0n}$  відповідно, в значній мірі є вивченим.

Відомо [52], що розподіл  $\xi$  має чистий лебегівський тип: дискретний — тоді і тільки тоді, коли

$$M \equiv \prod_{n=1}^{\infty} \max \{p_{0n}, p_{1n}\} > 0,$$

абсолютно неперервним, коли

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^1 \left(1 - \frac{p_{in}}{q_i}\right)^2 < \infty,$$

і сингулярний при  $M = 0$  і  $K = \infty$ .

Добре вивченими є тополого-метричні властивості спектра (мінімального замкненого носія) розподілу. Не вивченими є асимптотична поведінка модуля характеристичної функції випадкової величини  $\xi$ , її модуль неперервності та ін. питання. Природним є запитання: скільки у цьому класі розподілів таких, що мають додатну похідну функції розподілу на всьому відрізку  $[0;1]$  або деякому інтервалі? На це запитання при умові, що  $Q_2$ -зображення є класичним двійковим, вичерпну відповідь дано у роботі [7].

У випадку неперервності розподілу випадкової величини  $\xi$  її функція розподілу має вираз

$$F_{\xi}(x) = \alpha_1(x)p_{1-\alpha_1(x),1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\alpha_k(x)p_{1-\alpha_k(x),k} \prod_{i=1}^{k-1} p_{\alpha_i(x),i}), \text{ де } x = \Delta_{\alpha_1(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^{Q_2}.$$

Природним є запитання: чи є серед розподілів випадкових величин  $\xi$ , породжених розподілами незалежних цифр їх  $Q_2$ -зображення такі, що мають нетривіальну щільність, крім тих, що фігурували у лемах 4.3, 4.5? Цьому питанню підпорядковані наступні міркування.

**Лема 4.6** ([56]). Якщо в точці  $x_0$  існує похідна функції розподілу  $F_\xi$  випадкової величини  $\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}^{Q_2}$  з незалежними цифрами  $(\xi_n)$ , що мають розподіли  $P\{\xi_n = 0\} = p_{0n} \geq 0$  і  $P\{\xi_n = 1\} = p_{1n} \geq 0$ ,  $p_{0n} + p_{1n} = 1$ , то вона обчислюється за формулою

$$F'_\xi(x_0) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_{\alpha_n(x_0)n}}{q_{\alpha_n(x_0)}}.$$

**Лема 4.7.** Якщо в  $Q_2$ -бінарній точці  $x_0 = \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 0}^{Q_2} = \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 1}^{Q_2}$  існує скінчена похідна  $F'_\xi(x_0)$ , то

$$\frac{p_{0m}}{q_0} \prod_{i=m+1}^{\infty} \frac{p_{1i}}{q_1} = \frac{p_{1m}}{q_1} \prod_{i=m+1}^{\infty} \frac{p_{0i}}{q_0}. \quad (4.3)$$

*Доведення.* Оскільки  $F'_\xi(x_0) > 0$ , то згідно з попередньою лемою, маємо

$$\frac{p_{0m}}{q_0} \prod_{i=1}^{m-1} \frac{p_{c_i i}}{q_{c_i}} \prod_{i=m+1}^{\infty} \left( \frac{p_{1i}}{q_1} \right) = \frac{p_{1m}}{q_1} \prod_{i=1}^{m-1} \frac{p_{c_i i}}{q_{c_i}} \prod_{i=m+1}^{\infty} \left( \frac{p_{0i}}{q_0} \right).$$

Звідки отримуємо (4.3). □

**Лема 4.8.** Якщо  $F'(\Delta_{\underbrace{0 \dots 0}_{k-1} 1}^{Q_2}) > 0$ , то

$$\frac{q_1}{q_0 e^{c_k}} \prod_{i=k+1}^{\infty} \frac{q_0 e^{c_i}}{q_1} = 1. \quad (4.4)$$

*Доведення.* Оскільки похідна  $F'(\Delta_{\underbrace{0 \dots 0}_{k-1} 1}^{Q_2})$  існує і додатна, то вона згідно з лемою має вирази

$$F'(x_0) = \left( \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{q_1(1+e^{c_i})} \right) \frac{1}{q_0(1+e^{c_k})} \prod_{i=k+1}^{\infty} \frac{e^{c_i}}{q_1(1+e^{c_i})} \equiv A_k;$$

$$F'(x_0) = \left( \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{q_0(1+e^{c_i})} \right) \frac{e^{c_k}}{q_1(1+e^{c_k})} \prod_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{q_0(1+e^{c_i})} \equiv B_k.$$

Тоді

$$1 = \frac{A_k}{B_k} = \frac{q_1}{q_0 e^{c_k}} \prod_{i=k+1}^{\infty} \frac{q_0 e^{c_i}}{q_1},$$

що й вимагалось довести. □

**Наслідок 4.2.** Якщо (4.4), то або  $e^{c_i} = \frac{q_1}{q_0}$ ,  $i \in \{k, k+1, k+2, \dots\}$ , або

$$\begin{cases} q_0 = \frac{1}{2} = q_1, \\ c_k = c_{k+1} + c_{k+2} + \dots \end{cases}$$

**Теорема 4.2.** Якщо функція розподілу  $F_\xi$  випадкової величини  $\xi$ , цифри  $(\xi_n)$   $Q_2$ -зображення  $\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots}^{Q_2}$  якої є незалежними і мають розподіли  $P\{\xi_n = 0\} = p_{0n} \geq 0$  і  $P\{\xi_n = 1\} = p_{1n} \geq 0$ ,  $p_{0n} + p_{1n} = 1$ , має додатну похідну у всіх точках виду  $\Delta_{\underbrace{0 \dots 0}_{k-1}}^{Q_2} 1(0)$ ,  $k \in N$ , то виконується одна з умов:

- 1)  $p_{0n} = q_0$  для будь-якого  $n \in N$ ;
- 2)  $q_0 = \frac{1}{2}$  і  $p_{0n} = \frac{1}{1+e^{\frac{c}{2^n}}}$ ,  $p_{1n} = \frac{e^{\frac{c}{2^n}}}{1+e^{\frac{c}{2^n}}}$ .

У першому випадку  $\xi$  має рівномірний розподіл, а в другому — експоненційний розподіл на  $[0; 1]$  зі щільністю  $f(x) = \frac{ce^{cx}}{e^c - 1}$ ,  $c \in R$ .

*Доведення.* Якщо  $p_{ik} = 0$  для деякого  $k$ , то функція  $F_\xi$  є сталою на кожному циліндричному інтервалі  $\nabla_{c_1 \dots c_{k-1} i}^{Q_2}$ , а отже, і на  $\nabla_{\underbrace{0 \dots 0}_{k-1}}^{Q_2} i$ , а тому  $F'_\xi(\Delta_{\underbrace{0 \dots 0}_{k-1}}^{Q_2} 1(0)) = 0$  або не існує. Отже, для всіх  $k \in N$  виконуються нерівності  $0 \neq p_{ik} \neq 1$ . Тому розподіл цифри  $\xi_k$  можна представити у вигляді

$$p_{0k} = \frac{1}{1 + e^{c_k}}, \quad p_{1k} = \frac{e^{c_k}}{1 + e^{c_k}}. \quad (4.5)$$

Тоді для кожного  $k \in N$  виконується рівність (4.4). Тому згідно з наслідком з леми 4.4 або  $e^{c_i} = \frac{q_1}{q_0}$  (що рівносильно  $p_{0i} = q_0$ ) для будь-якого  $i \in N$ , або  $q_0 = \frac{1}{2}$  і разом з цим для будь-якого  $k \in N$  виконується рівність  $c_k = c_{k+1} + c_{k+2} + \dots$ , що рівносильно  $c_k = \frac{c}{2^k}$ , де  $0 \neq c \in R$ .  $\square$

## Висновки до розділу 4

Цей розділ було присвячено:

- 1) питанню незалежності цифр  $Q_2$ -зображення випадкової величини з заданим розподілом (рівномірним, експоненційним);
- 2) розподілам з додатною щільністю випадкових величин, які породжені незалежними розподілами цифр їх  $Q_2$ -зображення.

Основними результатами цього розділу є твердження:

- 1) цифри  $Q_2$ -зображення випадкової величини з експоненційним розподілом на відрізку є незалежними тоді і тільки тоді, коли  $Q_2$ -зображення є класичним двійковим, а розподіли їх значень визначаються геометричному прогресією;
- 2) якщо функція розподілу випадкової величини з незалежними цифрами  $Q_2$ -зображення має додатну похідну в кожній точці деякого відрізка, то розподіл є рівномірним або експоненційним, причому перший випадок має місце тоді і тільки тоді, коли цифри зображення мають однакові розподіли, визначені параметрами зображення (числами  $q_0$  і  $q_1$ ); в другому випадку зображення є класичним двійковим, розподіли цифр визначаються геометричною прогресією зі знаменником  $\frac{1}{2}$ .

Основні результати цього розділу опубліковані в роботі [45].



## ВИСНОВКИ

Двосимвольні системи кодування дійсних чисел мають значний потенціал для аналітичного опису і дослідження локально складних функцій з фрактальними властивостями (неперервних на відрізку або неперервних на множині повної міри, обмеженої та необмеженої варіації, монотонних та ніде не монотонних, сингулярних та ніде не диференційовних). Аргументом для такого висновку є наведені в дисертаційній роботі конструкції функцій, їх аналітичне задання і отриманий опис їх властивостей. У роботі здобуто такі результати:

- описано структурні, варіаційні, інтегро-диференціальні та фрактальні властивості континуального класу неперервних ніде не монотонних функцій, означених в термінах одного  $Q_2$ -зображення, що мають нескінченні множини екстремумів, як в  $Q_2$ -бінарних точках, так і в  $Q_2$ -унарних точках;
- отримано умови ніде не диференційовності функцій цього класу;
- при заданому  $Q_2$ -зображенні чисел доведено існування восьми конструкцій функцій з аналогічними властивостями;
- конструктивно описано новий континуальний клас функцій, визначених ланцюговою залежністю  $Q_2^*$ -цифр зображення значення функції від пар  $Q_2^*$ -цифр зображення аргумента;
- для наведеного класу доведено, що існує лише 16 функцій, визначених сталими послідовностями породжуючих залежності цифр фінітних функцій; ця родина природнім чином розпадається на пари двоїстих функцій, зі «схожими» варіаційними, але неідентичними властивостями диференціального та толого-метричного характеру. Запропоновано матричний спосіб задання класу цих функцій і дове-

дено, що лише дві з них є неперервними. Окрема увага приділяється узагальненню інверсора  $Q_2$ -зображення чисел, що ґрунтується на використанні  $Q_2^*$ -зображення. Для нього встановлено зв'язок з функцією розподілу випадкової величини, двійкові цифри якої є незалежними, а розподіли визначаються матрицею спряженого даному  $Q_2^*$ -зображення. Для випадку, коли  $Q_2^*$ -зображення є  $Q_2$ -зображенням, описано самоафінні властивості графіка та інтегральні властивості інверсора;

- встановлено, що за умови, коли випадкова величина  $\xi$  має експоненційний розподіл на одиничному відрізку, розподіли цифр її  $Q_2$ -зображення, відмінного від класичного двійкового, є залежними випадковими величинами, причому залежність складніша марковської;
- для випадкової величини з незалежними цифрами  $Q_2$ -зображення, функція розподілу якої має додатну похідну в кожній точці деякого відрізка, доведено, що її розподіл є рівномірним або експоненційним, причому перший випадок має місце тоді і тільки тоді, коли цифри зображення мають однакові розподіли, визначені параметрами  $Q_2$ -зображення; в другому випадку зображення є класичним двійковим, а розподіли цифр визначаються значеннями показникової функції від членів геометричної прогресії зі знаменником  $\frac{1}{2}$ .

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension // Ergod.Th. & Dynam. Sys. — 2004, **24**. — P. 1–16.
2. *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent  $Q$ - symbols // Methods of Functional Analysis and Topology, 2011. — Vol. 17, no.2. — P. 1-15.
3. *Banach S.* Uber die Baire'sche Katerogie gewisser Funktionnenmengen // Stud. Math. — 1931. — 3. — P.174–179.
4. *Bush K.A.* Continuous functions without derivatives // Amer. Math. Monthly. 1952. — 58, **no.4**. — P.222–225.
5. *Galambos J.* Representations of real numbers by infinite series. — Berlin: Springer-Verlag, 1976.— 146 P. — (Lect. Notes in Mathematics Vol. 502).
6. *Jarnicki M., Pflug P.* Continuous nowhere differentiable function. The Monsters of Analysis// Springer Monographs in Mathem. — 2015. — 299 p.
7. *Marsaglia G.* Random variables with independent binary digits — Ann. Math. Statist, 1971. — **42**, № 2. — P. 1922-1929. Те ж саме. Случайные величины з независимыми двоичными цифрами, Дж. Марсалья — Кибернет. сб. — 1983. — **20**.— С. 216-224.
8. *Mazurkiewicz S.* Sur les fonctions non derivables // Stud. Math. — 1931. — 3. — P.92–94.
9. Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Dyvliah N.V., Ratushniak S.P. Inversor of digits of  $Q_2^*$ -representative // Mat. Stud. 55 (2021), 37–43.
10. *Pratsiovytyi M., Chuikov A.* Continuous distributions whose functions preserve tails of an  $A_2$ -continued fraction representation of numbers // Ran-

- dom Operators and Stochastic Equations, 2019. Vol. 27(3), pp. 199-206.
11. *Pratsiovytyi M., Kyurchev D.* Properties of the distribution of the random variable defined by  $A_2$ -continued fraction with independent elements // Random Oper. Stochastic Equations – 2009. – Vol. 17., **no.1.** — P. 91–101.
  12. *Pratsiovytyi M., Vasylenko N.* Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation // International Journal of Math. Analysis, Vol.7, 2013. **no. 61-67.** — P.3155–3169.
  13. *Ptaysiovytyi M., Lysenko I., Maslova Yu.* Group of continuous transformations of real interval preserving tails of  $G_2$  — representation of numbers. *Algebra and Discrete Mathematics*, Volume 29 (2020). Number 1, pp. 99–108.
  14. *Pratsiovytyi M. V., Makarchuk O. P., and Klymchuk S. O.* Level sets of asymptotic mean of digits function for 4-adic representation of real number, *Methods Funct. Anal. Topology* 22 (2016), no. 2, 184-196.
  15. *Pratsiovytyi M., Ratushniak S.* Mathematical structures with fractal properties in the space of sequences of zeros and ones // The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky. July 02-06,2019, Vinnytsia, 2019. – P.89-90.
  16. *Ratushniak S., Pratsiovytyi M.* Distribution of values of fractal functions related to  $Q_2$ -representation of real numbers // *International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach.* 18-23 september 2017, Lviv, Ukraine. P. – 79.
  17. *Ratushniak S.* Properties and distribution of values of fractal functions related to  $Q_2$ -representation of real numbers. *IV International conference. Modern stochastics: theory and applications.* 24-26.05.2018 Kyiv. – P.42.
  18. *Ratushniak S.* Structural and self-similar properties of representatives of one class of fractal functions and distributions of their values // VI International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations: Abstracts. – Kyiv: NPDU and IM of NAS of Ukraine, 2018. – P.29.

19. *Salem R.* On some singular monotonic functions with are stricly increasing // Trans. Amer. Math. Soc. — 1943. — **53**. — P. 423–439.
20. *Schweiger F.* Ergodic theory of fibred system and metric number theory. Oxford Sci.Publ. — New York: Oxford Univ. Press, 1995.
21. *Thim Johan* Continuous howhere differentiable functions. Master's thesis. Lilea university of technology — 2003. — 94 p.
22. *Wunderlich W.* Eine uberall stetige und nirgends differenziebare funktion // Elem. Math. — 1952. — **no.7**. — Pp.73–79.
23. *Барановський О.М., Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Ряди Остроградського-Серпінського-Пірса та їх застосування. — К.: Наукова думка, 2013. — 288 с.
24. *Василенко Н. А., Працьовитий М. В.* Одна сім'я неперервних ніде не монотонних функцій з фрактальними властивостями // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2013. — **№ 14**. — С. 176–189.
25. *Гончаренко Я.В., Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Фрактальні властивості множин точок недиференційовності абсолютно неперервної та сингулярної функцій розподілу// Теорія ймовірностей та математична статистика, 2001. Т.65.–С.25-32.
26. *Дмитренко С. О., Кюрчев Д. В., Працьовитий М. В.* Ланцюгове  $A_2$ -зображення дійсних чисел // Український математичний журнал. — 2009. — том 61, **№ 4**. — С. 452–463.
27. *Замрій І.В., Працьовитий М.В.* Фрактальні властивості операторів, визначених в термінах  $Q_s$ -зображення дробової частини дійсного числа// Буковинський математичний журнал. 2018. — Т.6, №1-2. — С. 60–68.
28. *Замрій І.В., Працьовитий М.В.* Сингулярність інверсора цифр  $Q_3$ -зображення дробової частини дійсного числа, його фрактальні та

- інтегральні властивості// Нелінійні коливання, 2015. Т.18, №1.–С.55-70.
29. *Ісаєва Т. М., Працьовитий М. В.* Кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом і основою 2 // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2013. — №15. — С. 6–23.
  30. *Кац М.* Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел (пер. с. англ.) — М.:Изд-во иностранной литературы, — 1963. — 156 с.
  31. *Коваль В.В.* Самоафінні графіки функцій // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2004. — № 5. — С. 292–299.
  32. *Лисенко І. М., Працьовитий М.В.* Модифікація класичного двійкового зображення // Єдність навчання і наукових досліджень – головний принцип університету: Збірник наукових праць звітно-наукової конференції викладачів університету за 2011 р., 9-10 лютого 2012 р. Частина 2. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. — 294 с. — С. 10-13.
  33. *Лисовик Д. П.* Применение конечных преобразователей для задания фрактальных кривых // Кибернетика и системный анализ. — 1994. — №3. — С. 11–22.
  34. *Лукач Е.* Характеристические функции. Пер. с англ./ Под ред. В.М. Золотарева. — Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979 — 424 с.
  35. *Панасенко О.Б.* Фрактальна розмірність графіків неперервних канторівських проекторів // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2008, № 9. — С. 104–111.
  36. *Працьовитий М.В., Барановський О.М., Маслова Ю.П.* Узагальнення Трибін-функції// Нелінійні коливання, 2019., Т. 22, №3. — С. 380–390.

37. *Працьовитий М. В., Василенко Н. А.* Розподіли ймовірностей на графіках одного класу ніде не диференційовних функцій // Труды ИПММ НАН Украины — 2013. — **Том 26**. — С. 159–171.
38. *Працьовитий М. В.* Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. — К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. — 68 с.
39. *Працьовитий М.В.* Двосимвольні системи зображення (кодування) дійсних чисел // Студентські фізико-математичні етюди. — К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2010. — **№ 9**. — С.6–26.
40. *Працьовитий М. В., Калашніков А. В.* Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з  $Q$ -зображеннями чисел // Український математичний журнал. — 2013 — т. 65, **№3**. — С. 381–393.
41. *Працьовитий М.В., Калашніков А.В.* Про один клас неперервних функцій зі складною локальною будовою, більшість з яких сингулярні або недиференційовні // Труды ИПММ НАН Украины, 2011. — Том 23. — С. 180–191.
42. *Працьовитий М. В., Кюрчев Д. В.* Сингулярність розподілу випадкової величини, зображеної ланцюговим  $A_2$ -дробом з незалежними елементами // Теор. ймов. та мат. стат. — 2009. — **81**. — С. 139–154.
43. *Працьовитий М. В., Панасенко О. Б.* Фрактальні властивості одного класу однопараметричних неперервних недиференційовних функцій // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2006. — **№7**. — С. 160–167.
44. *Працьовитий М.В., Ратушняк С.П.* Властивості та розподіли значень фрактальних функцій, пов'язаних з  $Q_2$ -зображенням дійсних чисел // *Теорія ймовірностей та математична статистика.*, Вип.

- 2(99)/2018, — С. 187–202.
45. Працьовитий М.В., Ратушняк С.П. Незалежність цифр  $Q_2$ -зображення випадкової величини з заднім розподілом // *Збірник праць Інституту математики НАН України* 2019, т. 16, № 3, — С. 79–91.
  46. Працьовитий М.В., Ратушняк С.П. Неперервна ніде не диференційовна функція з фрактальними властивостями, визначена в термінах  $Q_2$ -зображення // *Нелінійні коливання*, Т.23. №2, 2020. — С.231–252.
  47. Працьовитий М. В., Ратушняк С. П. Розподіл значень однієї фрактальної функції від випадкового аргумента // *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — 2014, № 16 (2). — С. 150–160.
  48. Працьовитий М.В., Ратушняк С.П. Фрактальні властивості однієї неперервної ніде не монотонної функції, визначеної в термінах  $Q_2$ -зображення // *Відкриті еволюціонуючі системи. V Міжнародна науково-практична інтернет-конференція*, 19–21 травня 2020 року, Україна, Київ. — 211-212 с.
  49. *Працевитый Н.В.* Сингулярные распределения с фрактальными носителями канторовского и салемовского типов: Автореф. дис. на соиск. учёной степени канд. физ.-мат. наук 01.01.05 — Киев, 1987. — 15 с.
  50. *Працьовитий М. В., Свинчук О. В.* Розсіювання значень однієї фрактальної неперервної немонотонної функції канторівського типу // *Нелінійні коливання*, 2018., Том 21, №1. — С. 116–130.
  51. *Працьовитий М. В., Скрипник С. В.*  $Q_2$ -зображення дробової частини дійсного числа та інверсор його цифр // *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2013. — **15.** — С. 134–143.
  52. *Працевитый Н. В.* Случайные величины с независимыми  $Q_2$ -символами // *Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей.* — К.: Ин-т математики АН УССР, 1987. — С. 92–102.



53. *Працевитий Н.В.* Непрерывные канторовские проекторы // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — К.: КГ-ПИ, 1989. — С.95–105.
54. *Працьовитий М.В.* Фрактальні властивості розподілів випадкових величин,  $Q_2$ -знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. — К.: Ін-т математики АН України, 1994 — С.245–254.
55. *Працьовитий М.В.* Фрактальні властивості однієї неперервної ніде не диференційовної функції// Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Фіз-мат. науки. — **№3**, 2002. — С. 351–362.
56. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — К.: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.
57. *Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Аналітичне (символьне) представлення неперервних перетворень  $R^1$ , що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича // Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки — 2003. — **№ 4**. — С. 207–215.
58. *Працьовитий М.В., Чуйков А.С.* Неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах нега-трійкових і ланцюгових  $A_2$ -дробів. Зб. праць. ІМ НАН України, 2018. Т. 15, № 1. С. 147–161.
59. Ратушняк С.П. Взаємозв'язки двосимвольного та чотрисимвольного  $Q$ -зображень дробової частини дійсного числа // *Збірник праць Інституту математики НАН України* 2017, т. 14, № 4, — С. 137–146.
60. Ратушняк С.П. Розподіл значень однієї фрактальної функції від випадкового аргумента // Відкриті еволюціонуючі системи. IV Міжнародна науково-практична конференція відкриті еволюціонуючі системи, 20–21 05. 2017 р., Україна, Ніжин. — 45-52 с.
61. Ратушняк С.П. Розподіл значень функцій з фрактальними властивостями, означених в термінах  $Q_2$ -зображення чисел // Шоста Всеукра-

- їнська конференція молодих вчених з математики, 21-22 квітня 2017, Київ. – С. 30.
62. Ратушняк С.П. Неперервні функції з фрактальними властивостями і розподіли ймовірностей, ними породжені *Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь»*, Київ, Україна, 13-14 грудня 2017 року. - С. 73-74.
63. Ратушняк С.П. Розподіл значень однієї фрактальної функції, означеної в термінах  $Q_2$ -зображення // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008). June 7 – 1, 2017, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2017. — P. 122
64. Ратушняк С.П. Клас фрактальних функцій, пов'язаних з  $Q_s$ -зображеннями дійсних чисел // *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях*, 17-19 вересня 2018, Чернівці. – С. 198.
65. Ратушняк С.П., Працьовитий М.В. Неперервні функції, означені в термінах  $Q_2$ -зображення чисел і їх фрактальні властивості // *Сьома Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики*, 19-20 квітня 2018, Київ. – С. 51.
66. Ратушняк С.П. Один клас фрактальних функцій, пов'язаних з  $Q_2^*$ -зображенням чисел // *VIII Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання»*, 2019, Київ. – С. 47.
67. Ратушняк С.П. Густина множини значень фрактальних функцій, пов'язаних з  $Q_2$ -зображенням дійсних чисел. *International Conference of Young Mathematics*. June 6–8, 2019, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Kyiv: Institution of Mathematics of NAS of Ukraine, 2019. — С. 111.

68. Ратушняк С.П., Працьовитий М.В. Неперервна ніде не диференційовна функція з фрактальними властивостями, визначена в термінах  $Q_2$ -зображення // *IX Всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики*, Київ, 10-11.04 2020 – С.22.
69. Ратушняк С.П., Працьовитий М.В. Неперервна ніде не диференційовна функція з фрактальними властивостями, визначена в термінах  $Q_2$ -зображення // *IX Всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики*, 10–11 квітня 2020, Київ. — С.22.
70. *Торбин Г.М., Працевитый Н.В.* Случайные величины с независимыми  $Q^*$ -знаками // *Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи*. — Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992 г. — С.95-104.
71. *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — К.: Наукова думка, 1992. — 208 с.
72. *Целе У.* О пересечениях уровня в фрактальном случае // *Math. Nachr.* — 1982. — С. 93–101.

## Додаток А

**Список публікацій здобувача за темою дисертації  
та відомості про апробацію результатів дисертації**

Цей додаток містить список публікацій здобувачки за темою роботи та відомості про апробацію результатів дисертації.

**Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати  
дисертації:**

1. *Працьовитий М. В., Ратушняк С. П.* Розподіл значень однієї фрактальної функції від випадкового аргумента // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2014, № 16(2). — С. 150–160.
2. *Ратушняк С.П.* Взаємозв'язки двосимвольного та чотирисимвольного  $Q_2$ -зображень дробової частини дійсного числа // Збірник праць Інституту математики НАН України 2017, т. 14, № 4. — С. 137–146.
3. *Працьовитий М.В., Ратушняк С.П.* Властивості та розподіли значень фрактальних функцій, пов'язаних з  $Q_2$ -зображенням дійсних чисел // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2018, Вип. 2(99). — С. 187–202.  
(Переклад. англ. мовою: Pratsiovytyi M.V., Ratushniak S.P. Properties and distributions of values of fractal functions related to  $Q_2$ -representations of real numbers// Theor. Probability and Math. Statist. 99. — 2019, P. 211–228.)
4. *Працьовитий М.В., Ратушняк С.П.* Незалежність цифр  $Q_2$ -зображення випадкової величини з заданим розподілом // Збірник праць Інституту математики НАН України 2019, т. 16, № 3. — С. 79–91.

5. *Працьовитий М.В., Ратушняк С.П.* Неперервна ніде не диференційовна функція із фрактальними властивостями, визначена в термінах  $Q_2$ -зображення // *Нелінійні коливання*, Т.23. №2, 2020. — С.231–252.
6. *Pratsiovytyi M. V., Goncharenko Ya. V., Dyvliak N. V., Ratushniak S. P.* Inversor of digits of  $Q_2^*$ -representation of numbers // *Mat. Stud.* 55 (2021), P.37–43.

### **Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації**

1. *Ратушняк С.П.* Розподіл значень однієї фрактальної функції від випадкового аргумента // Відкриті еволюціонуючі системи. IV Міжнародна науково-практична конференція відкриті еволюціонуючі системи, 20–21 05. 2017 р., Україна, Ніжин. — 45-52 с.
2. *Ратушняк С.П.* Розподіл значень функцій з фрактальними властивостями, означених в термінах  $Q_2$ -зображення чисел // Шоста Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики, 21-22 квітня 2017, Київ. — С. 30.
3. *Ратушняк С.П.* Неперервні функції з фрактальними властивостями і розподіли ймовірностей, ними породжені Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», Київ, Україна, 13-14 грудня 2017 року. - С. 73-74.
4. *Ратушняк С.П.* Розподіл значень однієї фрактальної функції, означеної в термінах  $Q_2$ -зображення// International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008). June 7 – 1, 2017, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2017. — P. 122
5. *Sofia Ratushniak and Mykola Pratsiovytyi* Distribution of values of fractal functions related to  $Q_2$ -representation of real numbers // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anni-

- versary of Stefan Banach. 18-23 september 2017, Lviv. P. – 79.
6. *Ратушняк С.П.* Клас фрактальних функцій, пов'язаних з  $Q_s$ -зображеннями дійсних чисел // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях, 17-19 вересня 2018, Чернівці. – С. 198.
  7. *Ratushniak S.* Structural and self-similar properties of representatives of one class of fractal functions and distributions of their values // Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations: Abstracts. – Kyiv: National Pedagogical Drahomanov University and Institution of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, 2018. – P.29.
  8. *Ратушняк С.П., Працьовитий М.В.* Неперервні функції, означені в термінах  $Q_2$ -зображення чисел і їх фрактальні властивості // Сьома Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики, 19-20 квітня 2018, Київ. – С. 51.
  9. *Ratushniak S.* Properties and distribution of values of fractal functions related to  $Q_2$ -representation of real numbers. IV International conference. Modern stochastics: theory and applications. May 24-26, 2018 Kyiv. – P. 52.
  10. *Ратушняк С.П.* Один клас фрактальних функцій, пов'язаних з  $Q_2^*$ -зображенням чисел // Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання», 23.05.2019, Київ. – С. 47.
  11. *Ратушняк С.П.* Густина множини значень фрактальних функцій, пов'язаних з  $Q_2$ -зображенням дійсних чисел. International Conference of Young Mathematics. June 6–8, 2019, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Kyiv: Institution of Mathematics of NAS of Ukraine, 2019. — С. 111.
  12. *Pratsiovytyi M., Ratushniak S.* Mathematical structures with fractal

properties in the space of sequences of zeros and ones // The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky. July 02-06, 2019, Vinnytsia: Vasyl' Stus Donetsk National University, 2019. – P.89-90.

13. *Ратушняк С.П., Працьовитий М.В.* Неперервна ніде не диференційовна функція з фрактальними властивостями, визначена в термінах  $Q_2$ -зображення // IX Всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, Київ, 10-11 квітня 2020. – С.22.
14. *Працьовитий М.В., Ратушняк С.П.* Фрактальні властивості однієї неперервної ніде не монотонної функції, визначеної в термінах  $Q_2$ -зображення // Відкриті еволюціонуючі системи. V Міжнародна науково-практична інтернет-конференція, 19–21 травня 2020 року, Україна, Київ. — 211-212 с.

#### **Відомості про апробацію результатів дисертації**

- Відкриті еволюціонуючі системи. IV Міжнародна науково-практична конференція відкриті еволюціонуючі системи, Україна, Ніжин 20–21 05. 2017 р.
- Шоста Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики, 21-22 квітня 2017, Київ.
- Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», Київ, Україна, 13-14 грудня 2017 р.
- International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008). June 7 – 1, 2017, Kyiv, Ukraine.
- Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях, Чернівці, 17-19 вересня 2018 р.
- Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial

Tesellatons: Abstracts. – Kyiv: National Pedagogical Drahomanov University and Institution of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, 2018.

- Сьома Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики, Київ, 19-20 квітня 2018 р.
- International conference. Modern stochastics: theory and applications. IV. Kyiv, Ukraine, May 24-26, 2018.
- Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання» Київ. 23 травня 2019 р.
- International Conference of Young Mathematics. Kyiv, Ukraine. June 6–8, 2019.
- IX Всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, Київ, 10-11 квітня 2020 р.
- V Міжнародна науково-практична конференція «Відкриті еволюційні системи», Київ, 19-21 травня 2020 р.
- International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach. Lviv, Ukraine. 18-23 september 2017.
- The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky. Vinnytsia: Vasyl' Stus Donetsk National University, July 02-06, 2019.
- IX Всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, Київ, 10–11 квітня 2020 р.
- V Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Відкриті еволюційні системи», Україна, Київ. 19–21 травня 2020 р.

Це такі семінари:

- семінар з фрактального аналізу відділу теорії динамічних систем та фрактального аналізу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз-мат наук, проф. М. В. Працьовитий).