

АНОТАЦІЯ

Ратушняк С. П. Фрактальні функції і розподіли їх значень. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — Математика. — Інститут математики НАН України, Київ, 2021.

Дисертаційне дослідження виконане в галузі конструктивної теорії дійсних функцій з локально складними тополого-метричними і фрактальними властивостями. Воно присвячене функціям, означеним на відрізку $[0; 1]$ в термінах двосимвольного Q_2 -зображення чисел, що є самоподібним узагальненням класичного двійкового зображення, та його несамоподібного узагальнення — Q_2^* -зображення чисел.

Функції з локально складною структурою — популярний об'єкт у сучасних наукових дослідженнях (суто математичних та прикладних). Серед неперервних функцій до таких відносяться сингулярні (функції, похідна яких майже скрізь у розумінні міри Лебега рівна нулю), ніде не монотонні (такі, що не мають проміжків монотонності) та ніде не диференційовні функції. До цього класу також відносять функції, що мають «масивні» множини особливостей різного характеру та множини рівнів; функції, що зберігають частоти цифр у тій чи іншій системі числення; функції, які трансформують міру та метричні розмірності борелівських множин тощо. Для їх вивчення широко залучаються засоби теорії фракталів (фрактальної геометрії та фрактального аналізу), ідеї самоподібності, самоафінності, автомодельності множин і різні системи кодування (зображення) дійсних чисел з використанням різних алфавітів (скінченних і нескінченних, сталих

і змінних, традиційних і надлишкових). Двосимвольні системи кодування чисел використовують алфавіт $\{0, 1\} = A$. Вони забезпечують технічні зручності в обчислювальній техніці і кодуванні інформації. В силу різних причин заслуговують на окрему (самостійну) увагу.

Створені у роботах Працьовитого М.В. і Торбіна Г.М. тополого-метрична і ймовірнісна теорії Q_2^* -зображення чисел знайшли багаточисельні застосування у різних галузях математики, зокрема у теорії динамічних систем конфлікту, яка розвивається у роботах Кошманенка В.Д. та його учнів. Ми використали цю систему для розвитку конструктивної теорії функцій, які мають фрактальні властивості, що відображаються у їх множинах рівнів, графіках, суттєвих для функції множинах (множина значень, множина різного роду особливостей функції тощо). Дана дисертаційна робота, в значній мірі, є продовженням досліджень властивостей локально складних функцій, які проводили Працьовитий М.В. та його учні: Барановський О.М., Василенко Н.А., Василенко Н.М., Гончаренко Я.В., Замрій І.В., Ісаєва Т.М., Калашніков А.В., Карвацький Д.М., Васькевич (Климчук) С.О., Макарчук О.П., Маркітан В.П., Маслоva Ю.П., Савченко І.О., Свинчук О.В., Панасенко О.Б., Чуйков А.С. та ін.

Q_2^* -зображення чисел відрізка $[0; 1]$ визначається нескінченною дворядковою стохастичною матрицею $\|q_{ik}\|$ з додатними елементами ($q_{ik} > 0$, $q_{0k} + q_{1k} = 1$), яка задовольняє умову $\prod_{k=1}^{\infty} \max\{q_{0k}, q_{1k}\} = 0$. Воно ґрунтується на розкладі числа в ряд:

$$x = \alpha_1 q_{1-\alpha_1, 1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\alpha_k q_{1-\alpha_k, k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i, i}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_2^*},$$

де $\alpha_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$. При цьому $\alpha_k \in A$ називається k -ою Q_2^* -цифрою зображення $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2^*}$ числа x .

Якщо $q_{ik} = q_i$, то Q_2^* -зображення називається Q_2 -зображення і у випадку $q_{0k} = \frac{1}{2} = q_{1k}$ є класичним двійковим зображенням.

Числа, що мають два Q_2^* -зображення, тобто числа виду $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}^{Q_2^*}0(1) = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}^{Q_2^*}1(0)$, називаються Q_2^* -бінарними, а числа, що мають єдине зображення — Q_2^* -унарними. Очевидно, що Q_2^* -бінарні числа утворюють зліченну множину, Q_2^* -унарні — континуальну.

У роботі досліджуються функції двох континуальних класів:

1. $f(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_2^*}) = \Delta_{\varphi_1(\alpha_1,\alpha_2)\varphi_2(\alpha_3,\alpha_4)\dots\varphi_n(\alpha_{2n-1},\alpha_{2n})\dots}^{Q_2^*}$;
2. $f(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_2^*}) = \Delta_{\varphi_1(\alpha_1,\alpha_2)\varphi_2(\alpha_2,\alpha_3)\dots\varphi_n(\alpha_n,\alpha_{n+1})\dots}^{Q_2^*}$;

де $\varphi_n(a, b)$ — фінітна функція двох змінних, яка означена на $A \times A$ і набуває значень з A , $n \in N$.

Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів основної частини, розбитих на підрозділи, висновків до розділів та загальних висновків, списку джерел та одного додатку, який містить список публікацій автора.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання і методи дослідження, зазначено наукову новизну отриманих результатів, їх практичне значення, зв'язок роботи з науковими темами й особистий внесок здобувача, вказано також, де було апробовано та опубліковано результати дисертації.

У першому розділі здійснено систематизацію відомостей, що стосуються тополого-метричних і фрактальних властивостей Q_2 -зображення і Q_2^* -зображення дійсних чисел відрізка $[0; 1]$, їх геометрії, основ фрактального аналізу та фрактальної геометрії, проведено огляд літератури за тематикою дисертаційного дослідження.

У другому розділі конструктивно описано континуальний клас неперервних ніде не монотонних функцій, аргумент і значення яких означені в термінах Q_2 -зображення чисел, що мають всюди щільні множини екстремумів, як в точках Q_2 -бінарних, так і в точках Q_2 -унарних. Вивчено їх структурні, варіаційні, автотельні та інтегро-диференціальні властивості, а також висвітлено властивості множин рівнів. Отримано умови ніде

не диференційовності функцій. Ніде не монотонні функції другого розділу є аналогами Трибін-функції, ніде не диференційовних функцій Вундерліха та Буша. На відміну від функцій Такагі, Окамото, вони досягають екстремумів не лише у Q_2 -бінарних точках.

У третьому розділі наведено конструкцію класу функцій, аргумент і значення яких подаються у формі Q_2^* -зображення чисел відрізка $[0; 1]$ (зокрема, Q_2 -зображення) одиничного відрізка, а залежність цифр визначається послідовністю фінітних функцій $\varphi_k : A \times A \rightarrow A \equiv \{0, 1\}$ на ланцюгу скріплених пар послідовних цифр зображення аргумента. Окрема увага приділена яскравому представнику цього класу функцій — інверсору цифр Q_2^* -зображення чисел, що є неперервною строго спадною, в переважній більшості випадків сингулярною функцією, двоїстою до тотожного перетворення відрізка.

Четвертий розділ присвячено двом задачам: 1) про розподіли цифр Q_2 -зображення випадкової величини з заданим розподілом; 2) про розподіл випадкової величини, породженої розподілами цифр її Q_2 -зображення, при умові наявності у нього додатної щільності у кожній точці деякого відрізка. У ньому вичерпно розв'язано другу задачу і отримано відповідь на питання стосовно незалежності цифр Q_2 -зображення випадкової величини з заданим експоненціальним розподілом на одиничному відрізку.

Додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дослідження.

Основні результати, які визначають наукову новизну дисертаційного дослідження:

- описано структурні, варіаційні, інтегро-диференціальні та фрактальні властивості континуального класу неперервних ніде не монотонних функцій, означених в термінах одного Q_2 -зображення (аргумента і значення функції), що мають нескінченні множини екстремумів, як в Q_2 -бінарних точках, так і в Q_2 -унарних точках;

- отримано умови недиференційовності функцій вказаного класу;
- при заданому Q_2 -зображенні чисел доведено існування восьми конструкцій функцій з аналогічними властивостями;
- конструктивно описано континуальний клас функцій, визначених ланцюговою залежністю Q_2^* -цифр зображення значення функції від пар послідовних Q_2^* -цифр зображення аргумента;
- для наведеного класу доведено, що існує лише 16 функцій, визначених сталими послідовностями, які природнім чином поділяються на пари двоїстих функцій, зі «схожими», але не ідентичними диференціальними властивостями. Запропоновано матричний спосіб задання класу цих функцій і доведено, що лише дві з них є неперервними. Окрема увага приділяється узагальненню інверсора Q_2 -зображення чисел. Для нього встановлено зв'язок з функцією розподілу випадкової величини двійкові цифри якої є незалежними, а розподіли визначаються спряженою матрицею даного Q_2^* -зображення. Для випадку, коли Q_2^* -зображення є Q_2 -зображення, описано самоафінні властивості графіка та інтегральні властивості функції;
- встановлено, що за умови, коли випадкова величина ξ має експоненційний розподіл на одиничному відрізку, то розподіли цифр її Q_2 -зображення, відмінного від класичного двійкового, є залежними випадковими величинами з залежністю, складнішою марковську;
- для випадкової величини з незалежними цифрами Q_2 -зображення, функція розподілу якої має додатну похідну в кожній точці деякого відрізка, доведено, що її розподіл є рівномірним або експоненційним, причому перший випадок має місце тоді і тільки тоді, коли цифри зображення мають однакові розподіли, визначені параметрами Q_2 -зображення; в другому випадку зображення є класичним двійковим, розподіли цифр визначаються геометричною прогресією зі знаменником $\frac{1}{2}$.

Дисертаційна робота має теоретичний характер, отримані результати можуть бути використані в подальших дослідженнях, а також при вивченні математичних об'єктів з фрактальними властивостями, означення яких використовують двосимвольні кодування дійсних чисел з нульовою надлишковістю, відмінні від Q_2^* -зображення.

Особливістю роботи є те, що в ній вперше запропоновано матричний підхід до визначення функцій другого класу і конструктивно описано всі функції зі сталою породжуючою послідовністю фінітних функцій (φ_k) , а для першого класу знайдено всі неперервні функції з фіксованою залежністю Q_2 -цифр значень функції.

Ключові слова: Q_2 -зображення, Q_2^* -зображення, самоподібна множина, самоподібна розмірність, розмірність Гаусдорфа-Безиковича, фрактальна функція, інверсор цифр Q_2^* -зображення, оператори лівостороннього і правостороннього зсуву цифр, множина рівня функції, розподіл значень функції, лебегівська структура розподілу.

ABSTRACT

Ratushniak S. P. Fractal functions and distributions of their values. — Qualification scientific work in the form of manuscript.

Thesis for doctor of philosophy degree in speciality 111 — Mathematics. — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2021.

The thesis belongs to the field of constructive theory of real functions with locally complicated topological, metric and fractal properties. It is devoted to the functions defined on the segment $[0; 1]$ in terms of the two-symbol Q_2 -representation of numbers, which is a self-similar generalization of the classic binary representation, and its non-self-similar generalization — Q_2^* -representation of numbers.

Functions with a locally complicated structure is a popular object in modern research (purely mathematical and applied). Singular (functions whose derivative is equal to zero almost everywhere with respect to Lebesgue measure), nowhere monotonic (those that have no intervals of monotonicity) and non-differentiable functions are among continuous functions of a such type. This class also includes functions having massive sets of features of different nature and level sets; functions preserving the frequency of digits in a numeral system; functions that transform the measure and metric dimensions of Borel sets, etc. To study them, the methods of fractal theory (fractal geometry and fractal analysis), ideas of self-similarity, self-affinity and scale-invariant of sets as well as various systems of encoding (representations) of real numbers with different alphabets (finite and infinite, constant and variable, traditional and redundant) are widely used. Two-symbol systems of

encoding of numbers use the alphabet $\{0, 1\} = A$. They provide technical convenience in computer technology and encoding of information. Due to various reasons, they deserve special (particular) attention.

Topological, metric and probability theories of Q_2^* -representation of numbers, which are created in the works of M.V. Pratsiovytyi and G.M. Torbin, are numerous applied in various fields of mathematics, in particular in the theory of dynamical systems of conflict, which is developing in the works of V.D. Koshmanenko and his followers. We used this system to develop a constructive theory of functions with fractal properties, which are reflected in their level sets, graphs, and sets essential for the function (e.g., set of values, set of various kinds of singularities of functions, etc.).

The thesis is largely a continuation of research of the properties of locally complicated functions, which was conducted by M.V. Pratsiovytyi and his followers: O.M. Baranovskyi, N.A. Vasylenko, N.M. Vasylenko, Ya.V. Goncharenko, T.M. Isaieva, I.V. Zamriy, A.V. Kalashnikov, D.M. Karvatsky, S.O. Vaskevych (Klymchuk), O.P. Makarchuk, V.P. Markitan, Yu.P. Maslova, I.O. Savchenko, O.V.Svynchuk, O.B. Panasenko, A.S. Chuikov and others.

We consider Q_2^* -representation of numbers of segment $[0; 1]$ defined by an infinite two-row stochastic matrix $\|q_{ik}\|$ with positive elements ($q_{ik} > 0$, $q_{0k} + q_{1k} = 1$) satisfying the identity $\prod_{k=1}^{\infty} \max\{q_{0k}, q_{1k}\} = 0$. It is based on the expansion of a number in a series:

$$x = \alpha_1 q_{1-\alpha_1, 1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\alpha_k q_{1-\alpha_k, k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i, i}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_2^*},$$

where $\alpha_k \in A$, $k \in N$. In this case, $\alpha_k \in A$ is called the k -th Q_2^* -digit of representation $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2^*}$ of a number x .

If $q_{ik} = q_i$, then a Q_2^* -representation is called a Q_2 -representation. In the case $q_{0k} = \frac{1}{2} = q_{1k}$, Q_2^* -representation is a classic binary representation.

Numbers allowing two Q_2^* -representations, i.e., numbers of the form $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m 0(1)}^{Q_2^*} =$

$\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_2^*}$, are called Q_2^* -binary; and numbers having a unique Q_2^* -representation are called Q_2^* -unary. It is obvious that set of Q_2^* -binary numbers is countable, while set of Q_2^* -unary numbers is a continuum set.

In the thesis we consider functions of two continuous classes:

1. $f(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_2^*}) = \Delta_{\varphi_1(\alpha_1,\alpha_2)\varphi_2(\alpha_3,\alpha_4)\dots\varphi_n(\alpha_{2n-1},\alpha_{2n})}^{Q_2^*}$;
2. $f(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_2^*}) = \Delta_{\varphi_1(\alpha_1,\alpha_2)\varphi_2(\alpha_2,\alpha_3)\dots\varphi_n(\alpha_n,\alpha_{n+1})}^{Q_2^*}$,

where $\varphi_n(a, b) : A \times A \rightarrow A$ is a function taking only finitely many distinct values for any $n \in N$.

The thesis consists of the abstract in Ukrainian and in English, list of notations, introduction, four chapters, divided into sections, conclusions for each chapter and general conclusions, bibliography, and appendix.

The introduction substantiates the relevance of the research topics, formulates the purpose, object, subject, tasks and methods of research, outlines the scientific novelty of the obtained results, their practical significance, the connection of the work with scientific programs and the personal contribution of the author and also points out where the results of thesis have been discussed and published.

In the first chapter, we systematized information related to topological, metric and fractal properties of Q_2 -representation and Q_2^* -representation of real numbers of segment $[0; 1]$, geometry of these representations, foundation of fractal analysis and fractal geometry, and reviewed the literature on the topic of thesis.

In the second chapter, we constructively described a continuum class of continuous nowhere monotonic functions the argument and values of which are defined in terms of Q_2 -representation of numbers. These functions have everywhere dense sets of extrema at Q_2 -binary points as well as at Q_2 -unary ones. Their structural, variational, self-similar, integral and differential properties were studied, also the properties of level sets were highlighted. We

have obtained the conditions for nowhere differentiability of the functions. Nowhere monotonic functions of the second chapter are analogous to the Tribin function, nowhere differentiable functions of Wunderlich and Bush. Unlike Takagi and Okamoto functions, they reach extrema not only at Q_2 -binary points.

In the third chapter, we present the construction of a class of functions the argument and values of which are given in the form of Q_2^* -representation of numbers (in particular, Q_2 -representation) of a unit segment. The dependence of digits is determined by a sequence of finite functions $\varphi_k : A \times A \rightarrow A \equiv \{0, 1\}$ on a chain of joint pairs of consecutive digits of the representation of the argument. Special attention is paid to the inversor of digits of the representation of the argument, which is the very interesting element of this class of functions. Inversor is a continuous strictly decreasing function (in fact, singular for most cases) being dual to the identical transformation of the segment.

In the fourth chapter, we consider two problems: 1) distributions of digits of Q_2 -representation of a random variable with a given distribution; 2) distribution of a random variable generated by the distributions of digits of its Q_2 -representation, under assumption that its probability distribution function has a positive derivative at each point of some segment. We comprehensively solve the second problem and answer the question about the independence of digits of Q_2 -representation of a random variable with a given exponential distribution on a unit segment.

The appendix contains a list of the applicant's publications on the topic of the thesis and information on the approbation of the research results.

The main results determining the scientific novelty of the thesis are the following:

- the structural, variational, integral, differential and fractal properties of a continuum class of continuous nowhere monotonic functions de-

- fined in terms of one Q_2 -representation having infinite sets of extrema (being either Q_2 -binary or Q_2 -unary) are described;
- the conditions for nowhere differentiability of functions of the specified class are obtained;
 - for a given Q_2 -representation of numbers, the existence of eight constructions of functions with similar properties is proved;
 - the continuum class of functions defined by the chain dependence of Q_2^* -digits of the representation of the value of the function on pairs of consecutive Q_2^* -digits of the argument representation is constructively described;
 - for the given class, it is proved that there are only 16 functions defined by constant sequences, which are naturally divided into pairs of dual functions with similar but not identical differential properties. A matrix method of definition of the class of these functions has been proposed. It is proved that only two of them are continuous. Particular attention is paid to the generalization of the inversor of the Q_2 -representation of numbers. We have established a connection of the inversor with the probability distribution function of a random variable whose binary digits are independent and the distributions are determined by the conjugate matrix of a given Q_2^* -representation. For the case when the Q_2^* -representation is a Q_2 -representation, the self-affine properties of the graph and the integral properties of the function are described.
 - it is established that if a random variable ξ has an exponential distribution on a unit segment, then the distributions of digits of its Q_2 -representation that is not the classic binary representation are dependent random variables, and the dependence is more complex than the Markov one;
 - for a random variable with independent digits of Q_2 -representation,

the probability distribution function of which has a positive derivative at each point of some segment, it is proved that its distribution is uniform or exponential, and the first case occurs if and only if the digits of the representation have the same distributions defined by the parameters of Q_2 -representation; in the second case, the representation is a classic binary representation and the distributions of digits are determined by a geometric progression with the common ratio $\frac{1}{2}$.

This is a theoretical investigation. The obtained results can be used in further research, as well as in the study of mathematical objects with fractal properties, whose definitions use two-symbol encoding of real numbers with zero redundancy, which is distinct from the Q_2^* -representation.

The peculiarity of the thesis is that at the first time it proposes a matrix approach to the definition of functions of the second class and constructively describes all functions with a fixed generating sequence of finite functions (φ_k) , and for the first class all continuous functions with fixed dependence of Q_2 -digits of values of function were found.

Key words: Q_2 -representation, Q_2^* -representation, self-similar set, self-similar dimension, Hausdorff-Bezikovitch dimension, fractal function, invensor of digits of Q_2^* -representation, left shift operator, right shift operator, level set of function, distribution of values of function, Lebesgue structure of probability distribution.