

## Відгук

офіційного опонента на дисертацію Калюжного-Вербовецького Дмитра Семеновича “Основи теорії вільних некомутативних функцій та деякі їх застосування в алгебрі і аналізі”, подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 “математичний аналіз”

Аналітичні функції від  $d$  некомутуючих змінних були започатковані в роботі Дж. Тейлора при побудові спектральної теорії для  $d$  операторів. Для таких функцій існують відповідні аналоги класичних формул (наприклад, аналог формули Брука – Тейлора). Подальший розвиток цей напрямок набув в роботах Войкулеску, Хадвіна, Хелтона, Мьюлі та інш. По суті, функції  $d$  некомутуючих змінних визначаються як функції на наборах  $d$  квадратних матриць всіх розмірів, що задовольняє умові одночасного переплетіння. Кільця некомутативних многочленів та косоного поля некомутуючих раціональних функцій вивчались в роботі Кона.

В теорії систем та теорії керування природно виникають некомутативні раціональні функції та степеневі ряди. Так, для консервативних систем передавальні функції приводять до відповідних аналогів стискаючих функцій (узагальнення відомого класу Шура на некомутативний випадок). Прикладами некомутативних раціональних функцій є квазідетермінанти, а прикладом формальних некомутативних степеневих рядів є ряд Бейкера - Кемпбела - Хаусдорфа.

Пошук єдиного підходу, який охопив би всі ці напрямки, і є основною темою дисертації. Актуальність досліджень в цьому напрямку є важливим підґрунтям розвитку загальних методів для різноманітних класів функцій в  $d$ -некомутуючих змінних.

Метою дисертаційної роботи є розвиток у повній природній загальності основ теорії функцій від вільних некомутуючих змінних, яка є основою єдиних методів досліджень вільних некомутуючих об'єктів.

Дисертація складається з анотації, вступу, десяти розділів, висновків, списку використаних джерел, який включає 158 найменувань, та додатку.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, вказано на зв'язок роботи з науковими програмами та темами, зазначено мету і задачі та об'єкт дослідження. А також висвітлено новизну результатів та охарактеризовано особистий внесок здобувача. Окрім того, наведено огляд літератури за темою дисертації та список основних понять, які використовуються в роботі.

В розділі 1 наведені результати щодо різних класів вільних некомутативних функцій, які стали мотивацією для побудови загальної теорії. У підрозділі 1.1 отримано опис областей регулярності для матричнозначних некомутативних раціональних функцій (теорема 1.5, теорема 1.11). Розвитку різницево-диференціального числення для некомутативних раціональних функцій присвячено підрозділ 1.3. В підрозділі

1.4 вивчаються симетрії матричнозначних некомутативних раціональних функцій. Вивченню збігання формальних некомутативних степенів присвячений розділ 1.5, 1.6. Використання отриманих результатів для консервативних систем наведені у розділі 1.7, до речі встановлена консервативність дилатації (теорема 1.37, 1.38) таких систем. Відповідні не комутативні аналоги інтерполяційних задач Каратеодорі і Каратеодорі - Феєра отримані у підрозділі 1.8 (теореми 1.49, 1.51, 1.55).

Другий розділ присвячений побудові загальної теорії некомутативних функцій. Над модулями будуються відповідні функції від некомутативних змінних, для яких визначаються основні правила різницево-диференційного числення.

У розділі 3 визначаються не комутативні функції вищого порядку та отримано їх різницево-диференційне числення. Цей формалізм дуже цікавий і до кінця ще не вичерпаний.

Розділ 4 присвячений застосуванню побудованого у розділах 2, 3 числення для отримання не комутативного аналогу формули Тейлора. Основним результатом цього розділу є теорема 4.1, яка і дає цю формулу Тейлора - Тейлора.

У розділі 5 досліджуються некомутативні функції на нільпотентних матрицях. Головними результатами цього розділу є теореми 5.6, 5.8.

Розділ 6 присвячений використанню формули Тейлора – Тейлора для алгебр. Основною теоремою цього розділу є теорема 6.1.

У розділі 7 вивчаються аналітичні не комутативні функції з різною специфікою та досліджується збіжність рядів Тейлора - Тейлора. Основним результатом є теорема 7.2, де встановлено область збіжності ряду Тейлора.

Розділи 8, 9, 10 присвячені вивченню збіжності у різних топологіях, а також вивчаються розширення відповідних сум.

Дисертація написана чіткою ясною мовою, з відповідною аргументацією аналізу кожної задачі, що вивчається.

По дисертації є наступні зауваження.

- 1) Є багато помилок філологічного характеру (заради стор. 2, особливий стор. 8 (автореферат), натурально (стор. 30) та інш.);
- 2) На стор. 31 згадується теорема Руана, але її формулювання не наведено.
- 3) Стор. 33 (скорочення ГТ-формула не дуже розумне).
- 4) Термін "інтегровності" стор. 161 не дуже гарно звучить.

Незважаючи на ці недоліки, вважаю, що дисертація Калюжного-Вербовецького Д. С. є закінченим науковим дослідженням і повністю відповідає вимогам, які пред'являються до дисертацій, поданих на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук, так як:

- 1) Побудована теорія матричнозначних некомутативних раціональних функцій, зокрема розвинуто диференціальне числення і досліджені оператори лівого та правого зворотних зсувів.
- 2) Розвинуто метод не комутативного ліфтингу, за допомогою якого, зокрема, результат про сингулярності застосовано для отримання аналогічного результату у комутативному випадку.
- 3) Досліджені некомутативні раціональні функції з симетріями, зокрема доведена так звана не комутативна обмежена дійсна лема без втрат.
- 4) Показано, що дисипативна не комутативна лінійна система завжди допускає консервативну дилатацію, і методом некомутативного ліфтингу знайдено критерій існування консервативної дилатації для відповідної дисипативної комутативної системи.
- 5) Знайдені критерії розв'язності інтерполяційних задач Каратеодорі і Каратеодорі – Феєра у некомутативному полікрузі.
- 6) Розвинуто різницево-диференціальне числення для не комутативних функцій у найбільш загальному випадку.
- 7) Введені не комутативні функції вищого порядку та встановлені їх основні властивості.
- 8) Отримана не комутативна формула Тейлора.
- 9) Знайдені співвідношення для коефіцієнтів формального степеневого ряду необхідні і достатні для того, щоб цей ряд був рядом Тейлора некомутативної функції.
- 10) Розглянуто три природні топології на некомутативному просторі і дані відповідні означення аналітичних некомутативних функцій; як аналітичне застосування некомутативної формули Тейлора, у кожній з трьох топологій доведено, що локально обмежена некомутативна функція має бути аналітичною.

Науковий рівень дисертації високий, а всі результати обґрунтовані і спираються на чіткі і коректні доведення. Отримані результати носять теоретичний характер і можуть бути використані для дослідження різноманітних задач, зокрема, інтерполяційних. Дослідження, що проведені автором, можуть бути корисними в наукових розробках, що проводяться у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б. І. Веркіна НАН України, Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна, Київському національному університеті імені Т. Г. Шевченка, Інституті прикладної математики і механіки НАН України, Інституті математики НАН

України, Дніпровському національному університеті імені О. Гончара, Одеському національному університеті ім. І. І. Мечнікова та інших. Автореферат ідентичним чином відображає основні положення і твердження дисертації. Публікації містять головні результати дисертаційної роботи.

На підставі вищезгаданого вважаю, що дисертаційна робота Калюжного-Вербоверхого Д. С. "Основи теорії вільних некомутативних функцій та деякі їх застосування в алгебрі і аналізі" задовольняє всім вимогам, що пред'являються до докторських дисертацій, а дисертант заслуговує присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 "математичний аналіз".

Доктор фізико-математичних наук, професор,  
провідний науковий співробітник  
Фізико-технічного інституту низьких  
температур ім. Б. І. Веркіна НАН України

В. О. Золотар'ов



Надійшов 29.04.2021р.