

ВІДГУК

офіційного опонента
на дисертаційну роботу

Д. С. Калюжного-Вербовецького

“Основи теорії вільних некомутативних функцій
та деякі її застосування в алгебрі і аналізі”

прийняту до захисту на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук зі спеціальності
01.01.01 – математичний аналіз

1. Актуальність теми дисертації

Дисертація містить нові результати по конструктивному дослідженні функцій від багатьох некомутативних аргументів. Некомутативні операції відіграють важливу роль в різних розділах математики. В алгебрі це некомутативні групи, а в математичному аналізі навіть добуток лінійних обмежених операторів і добутки квадратних матриць із числовими коефіцієнтами є некомутативними. В математиці вже давно використовують конкретні функції від некомутуючих аргументів. Це, наприклад, комутатори двох операторів, різниця резольвент двох операторів і т.п. В алгебрах Лі використовують подвійний комутатор від трьох аргументів, а також суму трьох таких комутаторів при циклічній перестановці аргументів. Проте систематичне дослідження загальних функцій від некомутуючих аргументів розпочато лише 50 років тому.

На початку 70-х років 20 століття у працях J.L. Taylor з'явилися аналітичні функції від некомутуючих аргументів, для яких було розроблено різницево-диференціальне числення, побудовано аналог класичної формули Тейлора розкладу функції в степеневий ряд і отримані результати із некомутативної спектральної теорії операторів. Пізніше ці дослідження були просунуті і перенесені на різні класи функцій в роботах D.Alpay, J.A.Ball, P.M. Cohn, J.V. Helton, P.S. Muhly, G. Popescu, D.V. Voiculescu, V. Vinnikov і проведено застосування в теорії систем і теорії керування, а також у вільній ймовірності. В розробку нових результатів вагомий внесок зробив автор дисертації в співпраці з професорами D.Alpay, J.A.Ball, V. Vinnikov.

Той факт, що в 90-х роках 20 століття один із математичних корифеїв I.M. Гельфанд опублікував декілька робіт по некомутативних функціях і квазідетермінантах є безумовним доказом доцільності створення і можливості розвитку змістового математичного аналізу для функцій із некомутуючими аргументами.

Таким чином, тема дисертації відноситься до важливого сучасного наукового напряму в математичному аналізі і його застосуваннях.

2. Зміст дисертації

Дисертація, об'ємом 309 сторінок, складається із анотації, вступу, десяти розділів, висновків, списку 183 використаних джерел, списку найважливіших понять та позначень та додатку, що містить список публікацій дисертанта за темою дисертації та відомості про апробацію результатів.

У вступі дисертації обґрунтовано актуальність теми, вказано зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, визначено мету і задачі, об'єкт, предмет, та методи дослідження, вказано наукову новизну та оригінальність результатів, охарактеризовано особистий внесок дисертанта, наведено список конференцій та семінарів, на яких дисертаційна робота пройшла апробацію, дається огляд існуючої літератури, що мотивувала дисертанта, та огляд недавніх робіт, у яких було використано результати дисертації та які продовжили дослідження в даній галузі, наведено стислий огляд роботи та основних понять і результатів.

У першому розділі вивчаються матричнозначні некомутативні раціональні функції і доводиться теорема про сингулярності таких функцій (теорема 1.5), використовується метод некомутативного ліфтінгу, розвинuto різницево-диференціальне числення для некомутативних раціональних функцій, викладено ряд нових важливих результатів, про які буде мова у наступному, 3-му розділі відгуку.

У розділі 2 будуються основи теорії вільних некомутативних функцій, вводяться основні поняття і позначення, вводяться праві і ліві некомутативні різницево-диференціальні оператори Δ_R і Δ_L на некомутативних функціях, встановлюються правила некомутативного різницево-диференціального числення.

У розділі 3 вивчаються некомутативні функції вищого порядку, так що звичайна некомутативна функція f має порядок нуль, а $\Delta_R f$ має порядок один.

У розділі 4 різницево-диференціальне числення для некомутативних функцій вищих порядків застосовано для отримання некомутативної формулі Тейлора, яку в дисертації названо формулою Тейлора–Тейлора, на честь Брука Тейлора і Джозефа Л. Тейлора.

У розділі 5 вивчаються некомутативні функції на нільпотентних матрицях усіх розмірів навколо матричної точки. Кожна така функція є сумою свого ряду Тейлора–Тейлора з центром у цій точці (теорема 5.6). Отримані необхідні і достатні умови для коефіцієнтів некомутативного степеневого ряду, за яких він є рядом Тейлора–Тейлора своєї суми (теореми 5.13 і 5.15).

У розділі 6 доведено дуже цікавий алгебраїчний наслідок формули Тейлора–Тейлора, теорема 6.1. Припустимо, що f – некомутативна функція, яка є многочленом від матричних елементів для кожного матричного розміру, і степені цих многочленів обмежені однією константою. Тоді f – некомутативний многочлен.

У розділі 7 вводяться три природні топології на некомутативному просторі, і для кожної з них дається означення некомутативної аналітичної функції. Головний наслідок формулі Тейлора–Тейлора в аналізі, доведений в цьому розділі, це, що локально обмежена некомутативна функція є аналітичною, при чому цей факт вірний для кожної з трьох топологій і відповідного поняття аналітичності.

У розділі 8 будується теорія збіжності некомутативних степеневих рядів, у кожній з трьох топологій, введених у розділі 7. Даються формули типу Коши–Адамара для оцінок розміру областей збіжності. Досліджуються максимальні некомутативні множини різної форми, де ряд збігається. Для випадку $\mathcal{M} = \mathbb{C}^d$ вивчається також збіжність некомутативних степеневих рядів уздовж вільного моноїду.

У розділах 9 і 10 розглядаються розширення некомутативних множин та некомутативних функцій на доданки прямих сум і на подібностю інваріантні конверти некомутативних множин. Ці розділи мають більш технічний характер, який дозволяє значно скоротити громіздкі доведення в багатьох місцях дисертації і можуть бути використані для подальшої роботи у цій області.

3. Основні результати

В дисертації і авторефераті вказано 20 нових результатів, отриманих особисто дисертантом. На думку опонента головними з них є наступні:

- 1) доведено теорему 1.5, що характеризує сингулярності матричнозначних некомутативних раціональних функцій як особливих точок резольвенти у мінімальній реалізації і, як наслідок, доведено її комутативний аналог і отримані стискаючі детермінантні зображення комутативних многочленів, що є строго стійкими в одиничній матричній полікулі;
- 2) отримано формулу, що пов’язує перетин нульових підпросторів коефіцієнтів степеневого ряду некомутативної матричнозначної раціональної функції з перетином нульових підпросторів значень цієї функції на матрицях достатньо великого розміру; ця формула є узагальненням добре відомого алгебраїчного факту про відсутність раціональних тотожностей вірних на матрицях усіх розмірів;
- 3) доведено теорему, що характеризує формально додатні некомутативні ядра у термінах додатних ядер, що отримані обчисленням відповідного некомутативного степеневого ряду на наборах спільно нільпотентних матриць, або на наборах матриць з деякого околу нуля, в якому цей некомутативний степеневий ряд збігається (теореми 1.30 і 1.31); зокрема, нільпотентна версія цього результату дає як наслідок теорему 1.32 про факторізацію т. зв. спадкового додатного некомутативного многочлена, що є аналогом відомого результату У. Хелтона про зображення додатних некомутативних многочленів як сум квадратів інших некомутативних многочленів;
- 4) отримано існування консервативних ділатаций для некомутативних дисипативних лінійних систем (теорема 1.38) і, як наслідок, отримано критерій

існування консервативних ділатацій для комутативних дисипативних лінійних систем (теорема 1.43);

5) отримані критерії розв'язності некомутативних аналогів інтерполяційних задач Карateодорі і Карateодорі–Феєра, що узагальнюють класичні критерії Теплиця і Шура на некомутативний випадок (теореми 1.51 і 1.55).

4. Достовірність нових результатів

Доведення як в самій дисертації, так і в публікаціях приведені в строгій та детальній формі, прийнятній в сучасній математиці. Автореферат правильно і повно відображає зміст дисертації. Достовірність нових результатів можна підкріпити такими фактами:

- 1) Результати опубліковані в 10 статтях в престижних зарубіжних журналах.
- 2) Результати доповідались більш, ніж на 20 міжнародних конференціях і семінарах в різних країнах світу (США, Канада, Німеччина, Франція, Нідерланди, Австрія, Грузія, Австралія, Японія, Ізраїль, Україна).
- 3) На роботи дисертанта є не тільки багато посилань інших авторів, але є і використання його результатів для розв'язання своїх проблем.
- 4) Дисертант є співавтором першої монографії по математичному аналізу функції із некомутуючими аргументами.

5. Зауваження по дисертації

Дисертація і автореферат написані досить чітко. Проте можна зробити такі зауваження:

- 1) В тексті є невелике число "русиzmів ". Так, в словах квазі, еквівалентний та інших буква "і"російська. Уявна частина комплексного числа названа "уявленою".
- 2) В дисертації, на відміну від публікацій, є можливість і доцільність приводити ілюстративні приклади для всіх нових понять. В дисертації є ряд змістовних прикладів і ілюстративний приклад (1.5) різницево–диференціального оператора. Було б корисним привести приклад Т.Т. формули. Корисно було би пояснити, чому функції від некомутуючих аргументів важливі у вільній ймовірності.
- 3) Було б корисним розглянути функції від некомутуючих аргументів, для яких комутатор кожних двох аргументів є певними лінійними функціями всіх аргументів. Можливо сам дисертант, або один із його учнів розгляне такі функції.

6. Висновок

На основі вищеприведеного, можна констатувати, що дисертація є завершеною науковою працею, в якій побудовано основи загальної теорії вільних некомутативних функцій, розроблено некомутативне різницево–диференціальне

числення, розвинута теорія некомутативних аналітических функцій, теорія збіжності некомутативних степеневих рядів, а також є приклади застосування побудованої теорії вільних некомутативних функцій в алгебрі і аналізі. Дисертація вносить вагомий вклад в розвиток одного із важливих напрямів сучасного математичного аналізу і його застосувань, розробку математичного апарату для функцій з некомутативними аргументами.

Дисертаційна робота “Основи теорії вільних некомутативних функцій та деякі її застосування в алгебрі і аналізі” за актуальністю тематики і одержаними в ній науковими результатами повністю відповідає усім вимогам щодо докторських дисертацій, зокрема вимогам постанови Кабінету Міністрів України за №567 від 24 липня 2013 року “Про затвердження Порядку присудження наукових ступенів” зі змінами і доповненнями, внесеними постановами Кабінету Міністрів України від 19 серпня 2015 року за №656, від 30 грудня 2015 року за №1159, від 27 липня 2016 року за №567 і наказом №40 МОН України від 12 січня 2017 року, а її автор Дмитро Семенович Калюжний-Вербовецький заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук зі спеціальністі 01.01.01. - математичний аналіз.

Офіційний опонент -
головний науковий співробітник
Інституту математики НАН України
доктор фізико-математичних наук, професор
28 квітня 2021 р.

Надійчив 29.04.21 р.

