ВІДГУК

офіційного опонента, доктора фізико-математичних наук

Деркача Володимира Олександровича

на дисертацію

Калюжного-Вербовецького Дмитра Семеновича

"Основи теорії вільних некомутативних функцій та деякі її застосування в алгебрі і аналізі"

на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.01 – математичний аналіз

Дисертація присвячена побудові основ загальної теорії вільних некомутативних функцій, розвитку функціонального числення для систем некомутуючих операторів, дослідженню консервативних ділатацій некомутативних дисипативних лінійних систем, встановленню некомутативних аналогів класичних критеріїв розв'язності інтерполяційних задач Каратеодорі і Каратеодорі–Феєра.

Обертаючись до історії питання, згадаємо спочатку роботу Дж. Тейлора 1970 р., в якій було розвинуто спектральну теорію і функціональне числення для систем комутуючих операторів в гільбертовому просторі. Теорію характеристичних функцій кількох комплексних змінних для систем комутуючих несамоспряжених операторів було побудовано в монографії М. С. Лівшиця, Н. Кравицького, А. Маркуса і В. Віннікова. Новий погляд на проблему реалізації голоморфних функцій кількох змінних було запропоновано Дж. Аглером в роботі 1990 р., де зокрема будо введено клас стискаючих функцій, який зараз називають класом Шура-Аглера.

В наступних роботах Дж. Тейлора були зроблені перши кроки в напрямку побудови спектральної теорії для наборів некомутуючих операторів на основі теорії вільних некомутативних функцій. Основні ідеї побудови некомутативного різницево-диференціального числення у цих працях, хоча і були представлені не в повній загальності, мали великий потенціал для використання і узагальнення. У 90-х роках 20-го століття починається бурхливий розвиток теорії вільної ймовірності у працях Д. Войкулеску і його послідовників, де використовується некомутативне аналітичне функціональне числення Дж. Тейлора.

Некомутативні функції виникають у різних областях алгебри і аналізу. Найважливішими спеціальними випадками їх є некомутативні многочлени, некомутативні раціональні функції, та некомутативні степеневі ряди. Квазідетермінанти і симетричні некомутативні функції, які вивчались у працях І. Гельфанда, В. Ретаха і їх співробітників, є прикладами некомутативних многочленів і раціональних функцій. Некомутативні формальні степеневі ряди грають провідну роль в теорії автоматів та формальних мов, а також виникають як передавальні функції некомутативних лінійних систем.

Інший напрямок досліджень функцій від кількох некомутуючих матриць, пов'язаний з різними інженерними застосуваннями, призводить в 21-у столітті до виникнення нової дисципліни – некомутативної дійсної напівалгебраїчної геометрії. Особливе значення в задачах оптимізації відіграє вивчення додатності некомутативних многочленів або некомутативних раціональних функцій на певних класах матричних наборів або на певних некомутативних множинах. Відмітимо тут роботи У. Хелтона і С. Маккалоу, в яких було отримано зображення додатних некомутативних многочленів як суми квадратів інших некомутативних многочленів.

Як бачимо, тематика дисертації досить широка і придатна до застосувань у різних областях алгебри і аналізу, в теорії вільної ймовірності, теорії автоматів і формальних мов, в теорії багатовимірних лінійних систем, в некомутативній алгебраїчній і напівалгебраїчній геометрії. З огляду на це актуальність дисертації не викликає сумнівів.

Дисертація складається з анотації (українською і англійською мовами), вступу, десяти розділів, висновків, списку використаних джерел, списку найважливіших понять та позначень і додатку, що містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

У вступі обгрунтовано актуальність теми, вказано зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, визначено мету і задачі, об'єкт, предмет, та методи дослідження, вказано наукову новизну та оригінальність результатів, охарактеризовано особливий внесок здобувача, наведено список конференцій та семінарів, на яких дисертаційна робота пройшла апробацію. Також у вступі дається огляд існуючої літератури, що мотивувала здобувача, та огляд недавніх робіт, у яких було використано результати дисертації та які продовжили дослідження в даній галузі, наведено стислий огляд роботи та основних понять і результатів.

У першому розділі наведені результати здобувача щодо різних класів вільних некомутативних функцій, які послужили мотивацією для розробки основ загальної теорії.

У підрозділі 1.1 вивчаються матричнозначні некомутативні раціональні функції і доводиться некомутативний аналог добре відомої теореми, що описує сингулярності матричнозначної раціональної функції однієї змінної як особливі точки резольвенти її мінімальної реалізації (Теорема 1.5). Методом некомутативного ліфтінгу, розвинутим у цьому підрозділі (та пізніше ще раз використаним у підрозділі 1.7), цей результат застосовується до комутативного налаштування, що дозволяє отримати його комутативний аналог, Теорему 1.11. У підрозділі 1.2 останній результат, в свою чергу, використовується для того, щоб отримати стискаюче детермінантне зображення для строго $\mathcal{B}$-стійкого (комутативного) многочлена p, тобто многочлена, що не має нулів у замкненій одиничній полікулі. У наступних підрозділах 1.3-1.5 розробляється різницево-диференціальне числення для некомутативних раціональних функцій, вивчаються некомутативні матричнозначні раціональні функції з симетріями, досліджуються формальні степеневі ряди матричнозначних некомутативних раціональних функцій.

У підрозділі 1.6 розглядаються формальні степеневі ряди з операторними коефіцієнтами від двох наборів некомутуючих змінних вигляду

$$K(x, x') = \sum_{w, w' \in \mathcal{G}_d} x^w x'^{w'^\top} K_{w,w'}$$

і доводиться, що такий ряд є формальним некомутативним додатним ядром (тобто операторнозначна функція $K_{w,w'}$ є додатним ядром на вільному моноїді $\mathcal{G}_d$) тоді і тільки тоді, коли її значення на наборах матриць будь-якого розміру є додатним ядром на деякому некомутативному околі нуля, де степеневий ряд збігається (Теорема 1.30). Більше того, для додатності ядра є достатнім його додатна напіввизначеність на співпадаючих наборах. Як наслідок, отримається аналог результатів У. Хелтона і С. Маккалоу (Теорема 1.32), який встановлює, що кожний так званий спадковий некомутативний многочлен, додатний на наборах спільно нільпотентних матриць, є "квадратом" іншого некомутативного многочлена.

У підрозділі 1.7 вивчаються консервативні ділатації лінійних дисипативних систем Форнасіні-Маркесіні, як у некомутативному, так і у комутативному налаштуванні. Доведено, що у некомутативному випадку такі ділатації завжди існують (Теорема 1.38), а у комутативному випадку, шляхом некомутативного ліфтінгу отримано критерій існування консервативних ділатацій (Теорема 1.43).

В дисертації введено некомутативні класи Шура-Аглера $\mathcal{S}A_d^{nc}(\mathcal{U}, Y)$ і Герглотца-Аглера $\mathcal{H}A_d^{nc}(\mathcal{Y})$ і розглянуто некомутативні версії класичних інтерполяційних задач Каратеодорі і Каратеодорі–Феєра в цих класах. Отримано аналоги критеріїв Теплиця і Шура розв'язності цих інтерполяційних задач у термінах значень многочлена, визначеного скінченним відрізком ряду Тейлора деякої некомутативної функції, на наборах спільно нільпотентних стискаючих матриць достатньо великого розміру (Теореми 1.51, 1.55).

У розділі 2 вводяться основні поняття загальної теорії некомутативних функцій: некомутативного простору $\mathcal{M}_{\rm nc}$ – як множини квадратних матриць будь-якого розміру над даним модулем $\mathcal{M}$ над комутативним кільцем $\mathcal{R}$; і некомутативної функції f – як відображення з одного некомутативного простору у другий, яке зберігає розмір матриць і є інваріантним щодо прямих сум і подібностей. Коли $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$, матриці над $\mathcal{M}$ можуть бути ототожнені з наборами матриць над $\mathcal{R}$ і некомутативні функції - з функціями від d

некомутуючих матриць усіх розмірів. У пропозиції 2.1 доведено, що відображення f є некомутативною функцією, тобто є інваріантним щодо прямих сум і подібностей тоді і тільки тоді, коли воно є інваріантним щодо переплетень:

$$XT = TY \Longrightarrow f(X)T = Tf(Y)$$

для матриць X, Y над $\mathcal{M}$, можливо, різних розмірів і матриці T над $\mathcal{R}$ відповідного розміру. Саме така умова інваріантності щодо переплетень виникає в працях Дж. Тейлора. Вводяться праві і ліві некомутативні різницево-диференціальні оператори Δ_R і Δ_L, на некомутативних функціях. Встановлюються основні правила різницево-диференціального числення, встановлюються різницеві формули першого порядку, показується, що $\Delta_R f(X, Y)(Z)$ як функція X і Y також є інваріантною, у певному сенсі, щодо прямих сум і подібностей, або еквівалентно, щодо переплетень. Таким чином, її можна розглядати як некомутативну функцію вищого (першого) порядку, де f вважається некомутативною функцією нульового порядку.

У розділі 3 вводиться загальне означення некомутативних функцій порядку k, $k = 0, 1, \ldots$. Вони залежать від $k+1$ аргументів і їх значення - k-лінійні відображення, певним чином інваріантні щодо прямих сум і подібностей, або еквівалентно, щодо переплетень. Класи таких функцій позначаються як $\mathcal{T}^k$. Оператор Δ_R поширено до відображення з $\mathcal{T}^k$ у $\mathcal{T}^{k+1}$, для всіх k і отримано різницеві формули першого порядку для некомутативних функцій вищого порядку. У підрозділі 3.4 знайдені необхідні умови інтегровності, тобто існування для некомутативної функції $f \in \mathcal{T}^k$ такої некомутативної функції $g \in \mathcal{T}^0$, що $f = \Delta_R^k g$.

У розділі 4 числення некомутативних різницево-диференціальних операторів вищого порядку застосовано для отримання некомутативного аналогу формули Брука Тейлора, яку у дисертації названо формулою Тейлора – Тейлора, на честь Брука Тейлора і Джозефа Тейлора (Теорема 4.1):

$$\begin{aligned} f(X) = \sum_{\ell=0}^{N} \Delta_R^{\ell} f(\underbrace{Y, \ldots, Y}_{\ell+1 \text{ разів}})(\underbrace{X - Y, \ldots, X - Y}_{\ell \text{ разів}}) \\ + \Delta_R^{N+1} f(\underbrace{Y, \ldots, Y}_{N+1 \text{ разів}}, X)(\underbrace{X - Y, \ldots, X - Y}_{N+1 \text{ разів}}). \end{aligned}$$

У розділі 5 некомутативні функції на нільпотентних матрицях описуються як суми їх рядів Тейлора–Тейлора (Теорема 5.2). У Теоремі 5.6 цей результат поширюється на нільпотентні матриці навколо довільного матричної точки і ряди Тейлора–Тейлора з довільним матричним центром. У підрозділі 5.2 знайдені співвідношення для коефіцієнтів некомутативного степеневого ряду, які є необхідними і достатніми для того, щоб цей степеневий ряд був рядом Тейлора–Тейлора своєї суми на некомутативній множині нільпотентних матриць. У розділі 6 доведено, що некомутативна функція, яка є многочленом від матричних елементів для матриць кожного розміру так, що степені усіх цих многочленів обмежені, є некомутативним многочленом.

У розділі 7 вводяться і досліджуються аналітичні некомутативні функції у різних налаштуваннях та збіжність відповідних рядів Тейлора – Тейлора. В цьому розділі кільце $\mathcal{R}$ є полем $\mathbb{C}$. Розглядаються три природні топології на некомутативному просторі $\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ над векторним простором $\mathcal{V}$ над $\mathbb{C}$ і відповідні поняття аналітичності для некомутативних функцій: скінченно-відкриту топологію і некомутативні функції аналітичні на зрізах, топологію норми і аналітичні (за нормою) некомутативні функції, рівномірну топологію і рівномірно аналітичні некомутативні функції. Основний феномен, встановлений у цьому розділі, для всіх трьох налаштувань - це те, що локально обмежена некомутативна функція має бути аналітичною. У підрозділі 7.4 результати про аналітичність поширені на некомутативні функції вищих порядків.

У розділі 8 досліджується збіжність некомутативних степеневих рядів у трьох різних топологіях, що введені у розділі 7. Результати є зворотними до результатів розділу 7. В кожній топології отримані формули типу Коші–Адамара для радіусів збіжності та найкращі оцінки величини області збіжності різної форми. Описані також максимальні некомутативні множини, де сума ряду є аналітичною на зрізах (відповідно, аналітичною та рівномірно аналітичною) некомутативною функцією і наводиться багато прикладів, що ілюструють відмінності між різними типами областей збіжності.

У розділі 9 визначаться та вивчаються так звані розширення на доданки прямих сум некомутативних множин та функцій. Подібним чином встановлюються властивості розширень на доданки прямих сум некомутативних функцій вищого порядку (пропозиція 9.3).

Результати про подібностно інваріантні обгортки некомутативних множин і відповідні розширення некомутативних функцій представлені в розділі 10.

Зауваження. У дисертації трапляються описки і термінологічні неточності, наприклад:

(1) стор. 2, рядок 16 знизу, замість терміну "зсув назад" краще вживати "зворотній зсув";

(2) стор. 7, рядок 14, замість терміну "подібностно інваріантний конверт" на мій погляд краще вживати "подібностно інваріантна обгортка";

(3) стор. 77, рядок 5, замість "спостерігаєм" повинно бути "спостерігаємо";

(4) стор. 82, рядок 16, для множини наборів d унітарних операторів використовується позначення $\mathcal{U}^d$, що трохи спантеличує, тому що одним рядком вище $\mathcal{U}$ позначає гільбертів простір.

Переходячи до загальної оцінки дисертації, відмітимо, що дисертація Д. С. Калюжного-Вербовецького є завершеною працею, в ній побудовано основи нової математичної теорії вільних некомутативних функцій, що узагальнює дослідження аналітичних функцій кількох некомутуючих змінних Дж.

Тейлора і створює можливість досліджувати з єдиної точки зору різноманітні некомутативні об'єкти, що виникають у різних областях алгебри і аналізу. В ній отримано низку нових, вагомих результатів, які охоплюють задачі з теорії некомутативних лінійних систем, теорії некомутативних раціональних функцій, некомутативні інтерполяційні задачі, а також різні задачі з некомутативної алгебри і теорії операторів. Ця робота вже має деякі застосування і великий потенціал для подальших застосувань у теорії вільної ймовірності, некомутативній напівалгебраїчній геометрії, теорії некомутативних лінійних систем, теорії операторів. Усі наведені у дисертації результати є новими. Вони чітко сформульовані і повністю обгрунтовані, вчасно опубліковані, що забезпечує достовірність дисертаційних положень та висновків з них. Автореферат правильно відображає зміст дисертації.

На підставі сказаного вважаю, що дисертаційна робота "Основи теорії вільних некомутативних функцій та деякі її застосування в алгебрі і аналізі" за актуальністю тематики і одержаними в ній науковими результатами повністю відповідає усім вимогам щодо докторських дисертацій зі спеціальності 01.01.01. - математичний аналіз, зокрема вимогам постанови Кабінету Міністрів України за №567 від 24 липня 2013 року "Про затвердження Порядку присудження наукових ступенів" зі змінами і доповненнями, внесеними постановами Кабінету Міністрів України від 19 серпня 2015 року за №656, від 30 грудня 2015 року за №1159, від 27 липня 2016 року за №567 і наказом №40 МОН України від 12 січня 2017 року, а її автор Калюжний-Вербовецький Д. С. заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01. - математичний аналіз.

26 квітня 2021 р.

Офіційний опонент -
доктор фізико-математичних наук,
професор — В. О. Деркач

Міністерство освіти і науки України * Донецький національний університет імені Василя Стуса * Ідентифікаційний код 02070803

Підпис провідного наукового співробітника науково-дослідної частини Донецького національного університету ім. Василя Стуса, Деркача Володимира Олександровича засвідчую

Підпис Деркача В.О.
ЗАСВІДЧУЮ
Вчений секретар університету
О.Г. Важеніна
«26» квітня 2021 р.

Надійшов 29.04.2021