Міністерство освіти і науки України
Південноукраїнський національний педагогічний університет
імені К. Д. Ушинського

Національна академія наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Калюжний-Вербовецький Дмитро Семенович

УДК 512.57, 517.2, 517.5

ДИСЕРТАЦІЯ

Основи теорії вільних некомутативних функцій та деякі її застосування в алгебрі і аналізі

01.01.01 – математичний аналіз

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.
Д. С. Калюжний-Вербовецький

Науковий консультант
Пивоварчик Вячеслав Миколайович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ – 2021

Анотація

Калюжний-Вербовецький Д. С. Основи теорії вільних некомутативних функцій та деякі її застосування в алгебрі і аналізі.–Кваліфікаційна праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01–Математичний аналіз.–Південноукраїнський національний педагогічний університет ім. К. Д. Ушинського.–Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2021.

Метою цієї роботи є систематичний розвиток, у повній природній загальності, основ теорії функцій вільних некомутуючих змінних. Ця теорія пропонує єдиний спосіб розгляду багатьох вільних некомутативних (н.к.) об'єктів, що виникають у різних галузях математики.

Аналітичні функції від d некомутуючих змінних з'явилися у новаторській праці Дж. Л. Тейлора у н.к. спектральній теорії на початку 70-х років 20 століття. Основна ідея полягає в тому, що функція від d некомутуючих змінних - це функція на наборах d квадратних матриць всіх розмірів, що є інваріантною при одночасному переплетенні (або еквівалентно - інваріантною щодо прямих сум і одночасної подібності). Тейлор показав, що такі функції дозволяють добре диференціальне (точніше, різницево-диференціальне) числення, аж до некомутативного аналогу класичної формули (Брука) Тейлора. Теорія була просунута далі у працях Войкулеску на початку 21 століття з орієнтацією на застосування у теорії вільної ймовірності.

У чисто алгебраїчній ситуації многочлени та раціональні функції від d некомутуючих змінних та їх значення на наборах d матриць довільного фіксованого розміру (над комутативним кільцем $\mathcal{R}$) є центральними об'єктами в теорії поліноміальних і раціональних тотожностей. Н.к. різницево-диференціальний оператор у налаштуванні н.к. многочленів добре відомий як універсальна деривація на вільній алгебрі.

У теорії систем і теорії керування н.к. раціональні функції і формальні степеневі ряди виникають природньо як впізнавані формальні степеневі ряди теорії автоматів та формальних мов і як передавальні функції багатовимірних систем з еволюцією уздовж вільного моноїду. Зокрема, передавальні функції консервативних н.к. багатовимірних систем характеризуються як формальні степеневі ряди, значення яких на певному класі наборів d операторів є стискаючими. З'являються такі класи формальних степеневих рядів як некомутативне узагальнення класичного класу Шура стискаючих аналітичних функцій на одиничному крузі в теорії операторних моделей для рядкових стисків та більш загальних некомутуючих наборів операторів, в теорії зображень алгебри Кунця і в узагальненій алгебрі Харді, пов'язаній з W^* - відповідністю.

Виходячи з іншого напрямку, виявляється, що більшість проблем оптимізації, що з'являються в теорії систем та теорії керування, є безрозмірними і проблема містить раціональні вирази від цих матричних змінних, які, таким чином, мають

однакову форму, незалежну від матричних розмірів. Це призводить до вивчення таких методів, як лінійні матричні нерівності (LMI) у контексті н.к. опуклості і н.к. дійсної напівалгебраїчної геометрії, де розглядаються многочлени та раціональні функції від d некомутуючих змінних обчислені на наборах d матриць над $\mathbb{R}$.

Квазидетермінанти та н.к. симетричні функції є важливими прикладами н.к. раціональних функцій, тоді як формальний ряд Бейкера–Кемпбела–Хаусдорфа є важливим прикладом формального н.к. степеневого ряду. Згадаємо тут також н.к. неперервні дроби.

Наша робота забезпечує уніфіковану основу для вивчення всіх цих об'єктів. Як заради потенційних застосувань, так і заради розвитку теорії в її природній загальності, виявляється, що правильне налаштування для теорії н.к. функцій - це матриці всіх розмірів над заданим векторним простором або заданим модулем. В особливому випадку, коли модуль є $\mathcal{R}^d$, $n\times n$ матриці над $\mathcal{R}^d$ можна ідентифікувати з наборами d матриць розміру $n \times n$ над $\mathcal{R}$, і ми маємо функції d змінних, ключові приклади яких наведені вище.

У розділі 1 ми представляємо наші результати щодо різних класів некомутативних функцій, що забезпечили нас мотивацією та прийомами для роботи над загальною теорією н.к. функцій. У підрозділі 1.1 розроблена теорія матричнозначних н.к. раціональних функцій з точки зору їх значень на наборах d матриць усіх розмірів. Спочатку ми вводимо матричнозначні некомутативні раціональні вирази, а потім визначаємо матричнозначні н.к. раціональні функції як класи еквівалентності матричнозначних н.к. раціональних виразів. Тоді ми доводимо теорему про особливості таких функцій, теорему 1.5, де множина особливостей матричнозначної н.к. раціональної функції описується з точки зору її мінімальної реалізації н.к. лінійною системою. Доведення використовує поняття лівого та правого некомутативних зсувів назад для раціональних виразів, які також введені та вивчаються в підрозділі 1.1. Після цього доведена теорема 1.11, де комутативний аналог теореми про особливості встановлюється за допомогою н.к. ліфтінгу матричнозначної комутативної раціональної функції, а потім застосовуючи некомутативний результат, теорему 1.5.

У підрозділі 1.2 теореми особливості з підрозділу 1.1 застосовуються для отримання стискаючого детермінантного зображення довільного стійкого у полікулі комутативного многочлена.

У підрозділі 1.3 ми представляємо різницево-диференціальне числення для матричнозначних н.к. раціональних функцій. Теорія тут незалежна, але паралельна загальній теорії н.к. функцій, яку ми обговорюємо в розділі 2.

У підрозділі 1.4 ми представляємо зразок результату для матричнозначних некомутативних раціональних функцій із симетріями. Доведено так звану обмежену дійсну лему без втрат для матрично-J-унітарних н.к. раціональних функцій.

У підрозділі 1.5 встановлюється формула, яка пов'язує перетин нульових підпросторів коефіцієнтів $\mathfrak{F}_w$ н.к. формального степеневого ряду $\mathfrak{F} = \sum_{w\in\mathcal{G}_d} x^w\mathfrak{F}_w$

матричнозначної раціональної н.к. функції (тут $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ є вільним моноїдом на d твірних) із перетином нульових підпросторів значень $\mathfrak{F}$ на наборах d матриць достатньо великого розміру. З цієї формули випливає добре відомий факт, що н.к. раціональна функція, яка зникає на матрицях усіх розмірів, дорівнює нулю.

У підрозділі 1.6 представлений інший тип взаємозв'язку між коефіцієнтами н.к. формального степеневого ряду та його значеннями на матрицях усіх розмірів у налаштуванні додатних ядер. Н.к. формальний степеневий ряд $K(x,x') = \sum_{w,w'\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d} x^w x'^{w'^\top} K_{w,w'}$ від двох наборів d змінних називається формально додатним ядром, якщо його матриця коефіцієнтів $K_{w,w'}$ є додатно напіввизначеною. Показано, що н.к. ядро $K(x,x')$ є формально додатним тоді і тільки тоді, коли функція $K(X,X')$ є додатним ядром від двох наборів матриць: коли X і X' - це набори d спільно нільпотентних матриць усіх розмірів (і тоді сума, що визначає $K(X,X')$, є скінченною), і коли X і X' належать якійсь н.к. кулі, де ряд збігається. Більше того, у налаштуванні нільпотентних матриць достатньо мати оператори $K(X,X)$ додатно напіввизначеними. Як наслідок, встановлюється факторизація додатних некомутативних спадкових многочленів, яка є аналогом результату Дж. В. Хелтона про зображення додатного н.к. многочлена як суми квадратів некомутативних многочленів та іншого результату С. Маккалоу про факторизацію додатних н.к. спадкових многочленів.

У підрозділі 1.7 ми представляємо результати про консервативні ділатації дисипативних лінійних систем як у комутативному, так і в н.к. випадках. Подібно до 1D випадку, ці результати можуть бути використані для вивчення функцій з комутативного або н.к. класу Шура–Аглера. Виявляється, хоча такі розширення завжди існують в н.к. випадку, відповідні результати в комутативному випадку різні для різних класів систем. Ми доводимо, що для комутативних систем Форнасіні–Маркесіні це не завжди так, і ми представляємо критерій існування консервативних ділатацій Форнасіні - Маркесіні. Розроблено методики використання н.к. результатів для вивчення комутативних багатовимірних лінійних систем.

У підрозділі 1.8 наведено н.к. аналоги класичних критеріїв розв'язності задач Каратеодорі та Каратеодорі–Феєра. Відповідне переформулювання класичних теорем Тепліця та Шура дає класичні критерії у термінах значень многочлена, коефіцієнти якого є даними задачі, на довільних нільпотентних стисках. Ми знайшли н.к. аналоги цих критеріїв у термінах значень даного н.к. многочлена на наборах d спільно нільпотентних стисків.

Починаючи з розділу 2, ми розробляємо загальну теорію вільних н.к. функцій. У розділі 2 ми вводимо н.к. функції та їх різницево-диференціальне числення. У підрозділі 2.1, ми визначаємо н.к. простори, н.к. множини та н.к. функції і доводимо, що властивість інваріантності щодо прямих сум та подібностей еквівалентна інваріантності щодо переплетень (пропозиція 2.1). У підрозділі 2.2 ми вводимо правий та лівий різницево-диференціальні оператори Δ_R і Δ_L через обчислення н.к. функції f на блочно-трикутній матриці, а потім беремо правий верхній (лівий нижній) блочний кут і показуємо, що $\Delta_R f(X,Y)(Z)$ і $\Delta_L f(X,Y)(Z)$ є лінійно залежними від Z (пропозиції 2.4 та 2.6). Ми приступаємо до формулювання

основних правил н.к. різницево-диференціального числення у підрозділі 2.3 та встановлюємо формули скінченнних різниць першого порядку у підрозділі 2.4. У підрозділі 2.5 ми доводимо, що $\Delta_R f(X,Y)(Z)$ і $\Delta_L f(X,Y)(Z)$ інваріантні щодо прямих сум і подібностей як функції від X і Y (у термінології розділу 3, $\Delta_R f$ і $\Delta_L f$ - н.к. функції порядку 1). Ми завершуємо розділ 2, обговорюючи в підрозділі 2.6 напрямковий і (в особливому випадку некомутативних функцій на модулі $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$) частковий н.к. різницево-диференціальні оператори.

У розділі 3 ми спочатку вводимо н.к. функції вищого порядку, а потім розширюємо поняття різницево-диференціальних операторів до цих функцій, що призводить до числення вищого порядку для н.к. функцій, як звичайних, так і вищого порядку. У підрозділі 3.1, ми даємо означення н.к. функцій порядку k і вводимо класи $\mathcal{T}^k$ цих функцій (так що оригінальні н.к. функції належать до класу $\mathcal{T}^0$). Значення н.к. функцій порядку k є k-лінійними відображеннями матриць над модулями, які також можна інтерпретувати як елементи тензорних добутків $k+1$ матричних модулів (зауваження 3.4 та 3.5). Це дозволяє нам визначити природне відображення $\mathcal{T}^k \otimes \mathcal{T}^\ell \to \mathcal{T}^{k+\ell+1}$, $k, \ell = 0, 1, \ldots$, і, отже, — відображення з тензорного добутка $k+1$ класів $\mathcal{T}^0$ (можливо, над різними операторними просторами) до $\mathcal{T}^k$ (зауваження 3.6) і інтерпретувати н.к. функцію вищого порядку в термінах н.к. функцій порядку 0. Далі ми продовжуємо у підрозділі 3.2 правий різницево-диференціальний оператор Δ_R до відображення класів $\mathcal{T}^k \to \mathcal{T}^{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$. У цьому означенні ми обчислюємо $f(X^0, \ldots, X^k)$, де f -це н.к. функція порядку k, а останній аргумент є взятим у вигляді блочної матриці $X^k = \left[\begin{smallmatrix} X^{k\prime} & Z \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{smallmatrix}\right]$, а потім беремо верхній правий кутовий блок матричного значення. Розширений оператор Δ_R також є лінійною функцією від Z (пропозиції 3.8 та 3.9). Починаючи з цього моменту, ми концентруємося на правій версії числення, оскільки ліву версію можна розробити аналогічно або просто отримати з правої за симетрією.

Ітерований оператор $\Delta_R^\ell \colon \mathcal{T}^k \to \mathcal{T}^{k+\ell}$ також може бути обчисленим безпосередньо, обчислюючи н.к. функцію на блочній верхньо-бідіагональній матриці, а потім взявши верхній правий кутовий блок її матричного значення (теореми 3.11 та 3.12). Означення розширеного оператора Δ_R стає прозорішим, коли ми інтерпретуємо н.к. функції вищого порядку за допомогою тензорних добутків н.к. функцій порядку 0 (зауваження 3.17).

Ми також можемо взяти X^j у $f(X^0, \ldots, X^k)$ у верхньому блочно–трикутному вигляді, що веде до операторів ${}_j\Delta_R \colon \mathcal{T}^k \to \mathcal{T}^{k+1}$, $j = 0, 1, \ldots$ (так що $\Delta_R = {}_k\Delta_R$), що також розширює оригінальний оператор $\Delta_R \colon \mathcal{T}^0 \to \mathcal{T}^1$ (зауваження 3.18). У підрозділі 3.3 ми встановлюємо різницеві формули першого порядку для н.к. функцій вищого порядку (теорема 3.19) та їх узагальнену версію для випадку матриць X і Y, можливо різного розміру, де ми обчислюємо функцію вищого порядку у цих формулах (теорема 3.20). Подібні формули дійсні для операторів ${}_j\Delta_R$ (зауваження 3.22).

У підрозділі 3.4 ми показуємо, що для н.к. функції $f \in \mathcal{T}^k$, яка інтегрується k разів, тобто може бути представленою як $\Delta_R^k g$ з $g \in \mathcal{T}^0$, ми маємо

${}_i\Delta_{R\,j}\Delta_R f = {}_j\Delta_{R\,i}\Delta_R f$, для всіх $i, j = 0, \ldots, k$. Нарешті, ми обговорюємо у підрозділі 3.5 напрямкові н.к. різницево-диференціальні оператори вищого порядку; зокрема, коли базовим модулем є $\mathcal{R}^d$, ми обговорюємо часткові н.к. різницево-диференціальні оператори Δ_R^w, $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$.

У розділі 4 ми встановлюємо формулу Тейлора–Тейлора (теорема 4.1 або більш загальна теорема 4.2; у випадку $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$ — наслідок 4.4 і, у тензорній інтерпретації коефіцієнтів $\Delta_R^{w^\top} f$–теорема 4.6). Ми показуємо у зауваженні 4.3, що коефіцієнти у формулі Тейлора - Тейлора, багатолінійні відображення $f_\ell = \Delta_R f(Y, \ldots, Y)$, $\ell = 0, 1, \ldots$, задовольняють певним умовам сумісності. Їх відповідні умови для послідовності $f_w = \Delta_R^{w^\top} f(Y, \ldots, Y)$, $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$, у випадку, коли $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$, встановлено в зауваженні 4.5.

Як перше застосування формули Тейлора–Тейлора, ми описуємо у розділі 5 н.к. функції на наборах $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M})$ (або, загальніше, на $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}; Y)$) нільпотентних матриць (або матриць нільпотентних навколо Y) над модулем $\mathcal{M}$ – див. означення у підрозділі 0.2.1. У підрозділі 5.1 ми показуємо, що кожна така н.к. функція є сумою її ряду Тейлора–Тейлора (теореми 5.2, 5.4, 5.6 та 5.8). Далі ми показуємо, що коефіцієнти н.к. степеневого ряду, що представляє н.к. функцію, є однозначно визначеними. Фактично, цей ряд є єдиним і дорівнює відповідному ряду Тейлора–Тейлора (теореми 5.9 та 5.10). У підрозділі 5.2 ми показуємо, що, навпаки, для даної послідовності $f_\ell\colon\ (\mathcal{M}^{s\times s})^\ell \to \mathcal{N}^{s\times s}$, $\ell = 0, 1, \ldots$ багатолінійних відображень, що задовольняє умови сумісності, сума $\sum_{\ell=0}^{\infty}(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y)^{\odot_s \ell} f_\ell$ - це н.к. функція на $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}; Y)$ зі значеннями в $\mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ (теорема 5.13), а також версію цього результату, теорему 5.15, для випадку $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$ і послідовності багатолінійних відображень $f_w\colon\ (\mathcal{M}^{s\times s})^\ell \to \mathcal{N}^{s\times s}$, $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$, що задовольняє відповідні умови сумісності. Ці результати є алгебраїчними за своєю природою, оскільки сума відповідних рядів скінченна у кожній точці з $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}; Y)$.

У розділі 6 ми наводимо деякі інші алгебраїчні застосування формули Тейлора - Тейлора. Доведено, що н.к. функція на $(\mathbb{K}^d)_{\mathrm{nc}}$, де $\mathbb{K}$ нескінченне поле, яка є многочленом від матричних елементів при обчисленні на $n \times n$ матрицях, $n = 1, 2, \ldots$, обмеженого ступеня, обов'язково є н.к. многочленом (теорема 6.1). Умова обмеженості ступеня є суттєвою і не може бути опущена (приклад 6.3). Однак, якщо ми не вимагаємо цю умову, то справедливе наступне: довільна н.к. функція на $(\mathbb{K}^d)_{\mathrm{nc}}$, яка є многочленом ступеня M_n від матричних елементів при обчисленні на $n \times n$ матрицях, це сума н.к. многочлена і нескінченного ряду однорідних многочленів f_j, що зникають на всіх наборах d матриць розміру $n \times n$ для $j > M_n$ (теорема 6.4). Ми також отримуємо узагальнення теореми 6.1 для н.к. функцій, які є многочленами на зрізах, на (набагато загальніших) н.к. просторах (теорема 6.8).

У розділі 7 ми вивчаємо аналітичні н.к. функції та збіжність їх рядів Тейлора–Тейлора. Ми розглядаємо три різні топології на н.к. просторі $\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ (над комплексним векторним простором $\mathcal{V}$) або три типи збіжності н.к. степеневого ряду, і, відповідно, три типи аналітичності н.к. функції: скінченно відкриту топологію та аналітичність на зрізах, топологію норми та аналітичність на $n \times n$ матрицях

над $\mathcal{V}$ для кожного $n = 1, 2, \ldots$, та рівномірно відкриту топологію та рівномірну (відносно n) аналітичність. Головна особливість аналітичних н.к. функцій, встановлена в розділі 7, – це що локальна обмеженість тягне за собою аналітичність у кожному з трьох налаштувань. У першій частині підрозділу 7.1 ми вводимо скінченно-відкриту топологію на $\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ і доводимо, що н.к. функція, яка є локально обмеженою на зрізах, є аналітичною на зрізах і обговорюємо збіжність відповідного ряду Тейлора–Тейлора (теорема 7.2). У другій частині підрозділу 7.1, ми показуємо, що н.к. функція, яка є локально обмеженою (щодо топології норми на $\mathcal{V}^{n\times n}$, для кожного n) є аналітичною, і її ряд Тейлора–Тейлора збігається рівномірно і абсолютно на певних відкритих повних кругових н.к. множинах навколо центру $Y \in \Omega_s$ (теорема 7.4) або на відкритих кулях із центром у Y (наслідок 7.5). Ми також встановлюємо єдиність розвинення у збіжний степеневий ряд, в обох вищезазначених топологіях (теорема 7.9). У підрозділі 7.2, ми вводимо та вивчаємо рівномірно-відкриту топологію на н.к. просторі $\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ над операторним простором $\mathcal{V}$. У підрозділі 7.3, ми показуємо, що рівномірно локально обмежена н.к. функція є рівномірно аналітичною, і її ряд Тейлора–Тейлора збігається рівномірно і абсолютно на певних рівномірно-відкритих повних кругових н.к. множинах навколо Y (теорема 7.21), або на певних рівномірно-відкритих матрично-кругових н.к. множинах (теорема 7.23), або на рівномірно-відкритих н.к. кулях (наслідок 7.26). Ми також доводимо версію цього результату для випадку, коли $\mathcal{V} = \mathbb{C}^d$ і ряд Тейлора–Тейлора є збіжним уздовж $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ (теорема 7.29 та наслідок 7.31). У підрозділі 7.4 ми вводимо та вивчаємо аналітичні н.к. функції вищого порядку, також у трьох різних налаштуваннях. Основні результати є аналогічними результатам у підрозділах 7.1 та 7.3.

У розділі 8 ми вивчаємо збіжність н.к. степеневих рядів у трьох різних топологіях, що введені у розділі 7 до (аналітичної у відповідному сенсі) н.к. функції. Результати є зворотними до результатів підрозділів 7.1 та 7.3. Ми обговорюємо збіжність н.к. степеневого ряду в скінченно-відкритій топології (відповідно, в топології норми та в рівномірно-відкритій топології) у підрозділі 8.1 (відповідно, 8.2 та 8.3). В кожній топології ми маємо оцінки типу Коші–Адамара для радіусів збіжності та найкращі оцінки величини області збіжності різної форми. Ми також характеризуємо максимальні н.к. множини, де сума ряду є аналітичною на зрізах (відповідно, аналітичною та рівномірно аналітичною) н.к. функцією і наводимо багато прикладів що ілюструють відмінності між різними типами областей збіжності.

У розділі 9 ми визначаємо та вивчаємо так звані розширення на доданки прямих сум н.к. множин та функцій. Якщо н.к. множина Ω є інваріантною щодо подібностей, тоді можна продовжити Ω на більшу н.к. множину, $\Omega_{\mathrm{d.s.e.}}$, яка містить разом з матрицею, яка розкладається у пряму суму матриць, кожний прямий доданок розкладання. Це розширення зберігає багато властивостей Ω (пропозиція 9.1). Тоді ми можемо розширити н.к. функцію f на Ω до н.к. функції $f_{\mathrm{d.s.e.}}$ на $\Omega_{\mathrm{d.s.e.}}$, яка успадковує найважливіші властивості f, зокрема, аналітичність (пропозиція 9.2). Подібним чином ми визначаємо і встановлюємо властивості розширень на

доданки прямих сум н.к. функцій вищого порядку (пропозиція 9.3). Ми також визначаємо та вивчаємо розширення на доданки прямих сум послідовностей f_ℓ, $\ell = 0, 1, \ldots$, (відповідно, f_w, $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$) багатолінійних відображень, що задовольняють умови сумісності (відповідно, їх аналоги у випадку $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$) у пропозиції 9.4 (відповідно, у пропозиції 9.6).

Для того, щоб визначити праві (ліві) різницево-диференціальні оператори через обчислення н.к. функції f на блочній верхньо-трикутній (нижньо-трикутній) матриці з Ω, нам потрібна н.к. множина Ω, що є допустимою справа (зліва), тобто для (скажімо, верхнього) блоку трикутної матриці $\left[\begin{smallmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{smallmatrix}\right]$ ми можемо помножити Z на деякий оборотний елемент r кільця $\mathcal{R}$, так що $\left[\begin{smallmatrix} X & rZ \\ 0 & Y \end{smallmatrix}\right] \in \Omega$. Тоді ми можемо визначити $\Delta_R f(X, Y)(rZ)$ і розширити це означення на довільні Z за лінійністю $\Delta_R f(X, Y)(\cdot)$. Хоча властивості Δ_R (Δ_L) можна встановити за допомогою цих масштабувань, це створює громіздкі технічні ускладнення у доведеннях. Щоб їх обійти, ми визначаємо так званий подібностно інваріантний конверт, $\widetilde{\Omega}$, н.к. множини Ω, який є найменшою н.к. множиною, що містить Ω, та інваріантною щодо подібностей. Тоді виявляється, що $\widetilde{\Omega}$ також інваріантна щодо формування блочно-трикутних матриць (пропозиція 10.2). Нашим наступним кроком є розширення н.к. функції f на Ω до н.к. функції $\widetilde{f}$ на $\widetilde{\Omega}$. Таке розширення є єдиним (пропозиція 10.3). Подібне розширення побудовано для н.к. функції вищого порядку (пропозиція 10.5). Виявляється, що $(\Delta_R \widetilde{f})|_{\Omega \times \Omega} = \Delta_R f$ (зауваження 2.5), що дозволяє нам доводити різні твердження про різницево-диференціальні оператори у всьому рукопису, припускаючи, не втрачаючи загальності, що базова н.к. множина Ω є інваріантною щодо подібностей. Результати про подібностно інваріантні конверти та відповідні розширення н.к. функцій представлені в розділі 10.

Ключові слова: Вільна некомутативна функція, різницево-диференціальне числення, формула Тейлора–Тейлора, спільно нільпотентні матриці, розширення на прямі суми, подібностно інваріантні конверти.

Abstract

Kaliuzhnyi-Verbovetskyi D. S. Foundations of free noncommutative function theory and some its applications in algebra and analysis.–Qualifying work with the right of the manuscript.

Thesis for the doctor of mathematical and physical sciences degree in speciality 01.01.01–Mathematical Analysis.–South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushinsky.–Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2021.

The goal of this work is to develop, in a systematic way and in a full natural generality, the foundations of a theory of functions of free noncommuting variables. This theory offers a unified treatment for many free noncommutative objects appearing in various branches of mathematics.

Analytic functions of d noncommuting variables originate in the pioneering work of J. L. Taylor on noncommutative spectral theory in the early 70s of 20th century. The underlying idea is that a function of d noncommuting variables is a function on d-tuples of square matrices of all sizes that is invariant under simultaneous intertwinings (or equivalently – invariant under direct sums and simultaneous similarities). Taylor showed that such functions admit a good differential (more precisely, difference-differential) calculus, all the way to the noncommutative counterpart of the classical (Brook) Taylor formula. The theory has been pushed forward by Voiculescu in the beginning of 21st century with an eye towards applications in free probability.

In a purely algebraic setting, polynomials and rational functions in d noncommuting indeterminates and their evaluations on d-tuples of matrices of an arbitrary fixed size (over a commutative ring $\mathcal{R}$) $\mathcal{R}$ are central objects in the theory of polynomial and rational identities. The noncommutative difference-differential operator in the setting of noncommutative polynomials is well known as the universal derivation on the free algebra.

In systems and control, noncommutative rational functions and formal power series appear naturally as recognizable formal power series of the theory of automata and formal languages and as transfer functions of multidimensional systems with evolution along the free monoid. In particular, transfer functions of conservative noncommutative multidimensional systems are characterized as formal power series whose values on a certain class of d-tuples of operators are contractive. Such classes of formal power series appear as the noncommutative generalization of the classical Schur class of contractive analytic functions on the unit disc in the operator model theory for row contractions and more general noncommuting operator tuples, in the representation theory of the Cuntz algebra, and in generalized Hardy algebras associated to a W^*-correspondence.

Coming from a different direction, it turns out that most optimization problems appearing in systems and control are dimension-independent, i.e., the natural variables are matrices, and the problem involves rational expressions in these matrix variables which have therefore the same form independent of matrix sizes. This leads to exploring

such techniques as Linear Matrix Inequalities (LMIs) in the context of noncommutative convexity and noncommutative real semialgebraic geometry, where one considers polynomials and rational functions in d noncommuting indeterminates evaluated on d-tuples of matrices over $\mathbb{R}$.

Quasideterminants and noncommutative symmetric functions are important examples of nc rational functions, whereas formal Baker–Campbell–Hausdorff series are an important example of nc formal power series. Let us also mention here nc continued fractions.

Our work provides a unified framework for study of all these objects. Both for the sake of potential applications and for the sake of developing the theory in its natural generality, it turns out that the proper setting for the theory of noncommutative (nc) functions is that of matrices of all sizes over a given vector space or a given module. In the special case when the module is $\mathcal{R}^d$, $n \times n$ matrices over $\mathcal{R}^d$ can be identified with d-tuples of $n \times n$ matrices over $\mathcal{R}$, and we recover nc functions of d variables, key examples of which appeared above.

In Chapter 1, we present our results on various classes of nc functions, which provided us with motivation and techniques for a work on the general nc function theory. In Section 1.1, a theory of matrix-valued rational nc functions is developed in terms of evaluations of them on d-tuples of matrices of all sizes. We first introduce matrix-valued nc rational expressions, and then define matrix-valued rational nc functions as classes of equivalence of matrix-valued nc rational expressions. Then we prove a theorem on singularities for such functions, Theorem 1.5, where the singularity set of a matrix-valued nc rational function is described in terms of its minimal nc linear system realization. The proof uses the notions of left and right nc backward shifts for a rational expressions, which are also introduced and studied in Section 1.1. Then Theorem 1.11 is proved, where the commutative analog of the singularity theorem is established using a nc lifting of underlying matrix-valued commutative rational function and then applying the noncommutative result, Theorem 1.5.

In Section 1.2, the singularity theorems from Section 1.1 are applied to obtain contractive determinantal representation of an arbitrary polyball-stable commutative polynomial.

In Section 1.3, we present a difference-differential calculus for matrix-valued nc rational functions. The theory here is independent, but parallel to that of general nc functions which we discuss in Chapter 2.

In Section 1.4, we present a sample result on matrix-valued nc rational functions with symmetries. We prove the so-called lossless bounded real lemma for matrix-J-unitary nc rational functions.

In Section 1.5, a formula is established which relates the intersection of null spaces of the coefficients $\mathfrak{F}_w$ of a nc formal power series $\mathfrak{F} = \sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} x^w \mathfrak{F}_w$ of a matrix-valued nc rational funcion (here $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ is a free monoid on d generators) with the intersection of null spaces of the values of $\mathfrak{F}$ on d-tuples of matrices of sufficiently large size. This formula implies a well known fact that a nc rational function which vanishes on matrices of all sizes is equal to zero.

In Section 1.6, another type of relationship between the coefficients of a nc formal power series and its values on matrices of all sizes is presented, in the framework of positive kernels. A nc formal power series $K(x,x') = \sum_{w,w'\in\mathcal{G}_d} x^w x'^{w'^\top} K_{w,w'}$ in two d-tuples of noncommuting indeterminates is called a formal positive kernel if its matrix of coefficients $K_{w,w'}$ is positive semidefinite. It is shown that the nc kernel $K(x,x')$ is formal positive if and only if the function $K(X,X')$ is a positive kernel in two settings: when X and X' are d-tuples of jointly nilpotent matrices of all sizes (and the sum defining $K(X,X')$ is then finite), and when X and X' belong to some nc ball where the series converges. Moreover, in the setting of nilpotent matrices, it suffices to have operators $K(X,X)$ positive semidefinite. As a corollary, a factorization of positive hereditary polynomials is established, which is an analog of the nc sum-of-square result of J. W. Helton and another type of nc polynomial factorization result of S. McCullough.

In Section 1.7, we present the results on conservative dilations of dissipative linear systems, both in the commutative and noncommutative settings. Similarly to the 1D case, these results can be used for study of functions from the commutative or noncommutative Schur–Agler class. It turns out that while such dilations always exist in the nc setting, the corresponding results in the commutative case are different for different classes of systems. We prove that for commutative Fornasini–Marchesini systems it is not always so, and we present a criterion for the existence of conservative Fornasini–Marchesini dilations. The techniques are developed for the use of the noncommutative results in the study of commutative multidimensional linear systems.

In Section 1.8, the nc analogs of the classical criteria of solvability of the Carathéodory and Carathéodory–Fejér problems are presented. An appropriate re-formulation of the classical theorems of Toeplitz and Schur gives the classical criteria in terms of the evaluations of the polynomial, whose coefficients are given problem data, on arbitrary nilpotent contractions. We found the nc analogs of these criteria in terms of the evaluations of the given nc polynomial on d-tuples of jointly nilpotent contractions.

Starting with Chapter 2, we develop the general theory of nc functions. In Chapter 2, we introduce nc functions and their difference-differential calculus. In Section 2.1, we define nc spaces, nc sets, and nc functions, and prove that the property of invariance under direct sums and similarities is equivalent to the invariance under intertwinings (Proposition 2.1). In Section 2.2, we introduce the right and left difference-differential operators Δ_R and Δ_L via evaluation of nc functions on block upper triangular matrices and then taking the upper right (lower left) corner block of the value, and show that $\Delta_R f(X,Y)(Z)$ and $\Delta_L f(X,Y)(Z)$ are linear in Z (Propositions 2.4 and 2.6). We proceed to formulate basic nc calculus rules in Section 2.3 and to establish the first-order finite difference formulae in Section 2.4. Then we prove in Section 2.5 that $\Delta_R f(X,Y)(Z)$ and $\Delta_L f(X,Y)(Z)$ are invariant under direct sums and similarities in X and in Y (in the terminology of Chapter 3, $\Delta_R f$ and $\Delta_L f$ are nc functions of order 1). We conclude Chapter 2 by discussing in Section 2.6 directional and (in the special case of nc functions on module $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$) partial nc difference-differential operators.

In Chapter 3, we first introduce higher order nc functions, and then extend the difference-differential operators to these functions, which leads to a higher order calculus for ordinary and higher order nc functions. In Section 3.1, we define nc functions of order k and introduce the classes $\mathcal{T}^k$ of those functions (so that the original nc functions belong to the class $\mathcal{T}^0$). The values of nc functions of order k are k-linear mappings of matrices over modules, which can also be interpreted as elements of tensor products of $k+1$ matrix modules (Remarks 3.4 and 3.5). This allows us to define a natural mapping $\mathcal{T}^k \otimes \mathcal{T}^\ell \to \mathcal{T}^{k+\ell+1}$, $k, \ell = 0, 1, \ldots$, and consequently — a mapping from the tensor product of $k+1$ classes $\mathcal{T}^0$ (perhaps over different operator spaces) to $\mathcal{T}^k$ (Remark 3.6) and interpret a higher order nc function in terms of nc functions of order 0. We then extend in Section 3.2 the right difference-differential operator Δ_R to a mapping of classes $\mathcal{T}^k \to \mathcal{T}^{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$. In this definition, the last argument of $f(X^0, \ldots, X^k)$, where f is a nc function of order k, is taken in the form of a block matrix $X^k = \left[\begin{smallmatrix} X^{k\prime} & Z \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{smallmatrix}\right]$, and then we take the upper right corner block of the matrix value. The extended operator Δ_R is also linear as a function of Z (Propositions 3.8 and 3.9). Starting from this point, we concentrate on the right version of calculus, since the left version can be developed analogously or simply obtained from the right one by symmetry.

The iterated operator $\Delta_R^\ell \colon \mathcal{T}^k \to \mathcal{T}^{k+\ell}$ can also be computed directly, by evaluating a nc function on block upper bidiagonal matrices and then taking the upper right corner block of its matrix value (Theorems 3.11 and 3.12). The definition of the extended operator Δ_R becomes more transparent when we interpret higher order nc functions using tensor products of nc functions of order 0 (Remark 3.17).

We can also take X^j in $f(X^0, \ldots, X^k)$ in the block upper triangular form, which leads to operators ${}_j\Delta_R \colon \mathcal{T}^k \to \mathcal{T}^{k+1}$, $j = 0, 1, \ldots$ (so that $\Delta_R = {}_k\Delta_R$), that also extend the original operator $\Delta_R \colon \mathcal{T}^0 \to \mathcal{T}^1$ (Remark 3.18). In Section 3.3, we establish the first order difference formulae for higher order nc functions (Theorem 3.19) and its generalized version for the case of matrices X and Y where we evaluate the higher order nc function in these formulae, of possibly different size (Theorem 3.20). Similar formulae are valid for operators ${}_j\Delta_R$ (Remark 3.22).

In Section 3.4, we show that for a nc function $f \in \mathcal{T}^k$ which is k times integrable, i.e., can be represented as $\Delta_R^k g$ with $g \in \mathcal{T}^0$, one has ${}_i\Delta_R\, {}_j\Delta_R f = {}_j\Delta_R\, {}_i\Delta_R f$, for all $i, j = 0, \ldots, k$. Finally, we discuss in Section 3.5 higher order directional nc difference-differential operators; in particular, when the underlying module is $\mathcal{R}^d$, we discuss higher order partial difference-differential operators Δ_R^w, $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$.

In Chapter 4, we establish the Taylor–Taylor formula (Theorem 4.1 or more general Theorem 4.2; in the case $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$ — Corollary 4.4 and, in tensor product interpretation of $\Delta_R^{w^\top} f$, Theorem 4.6). We show in Remark 4.3 that the coefficients in the TT formula, the multilinear mappings $f_\ell = \Delta_R f(Y, \ldots, Y)$, $\ell = 0, 1, \ldots$, satisfy certain compatibility conditions. The counterpart of these conditions for the sequence $f_w = \Delta_R^{w^\top} f(Y, \ldots, Y)$, $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$, in the case $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$ is established in Remark 4.5.

As a first application of the TT formula, we describe in Chapter 5 nc functions on the set $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M})$ (or, more generally, on $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}; Y)$) of nilpotent matrices (or

nilpotent matrices about Y) over a module $\mathcal{M}$ — see Section 0.2.1 for the definition. In Section 5.1 we show that every such a nc function is a sum of its TT series (Theorems 5.2, 5.4, 5.6, and 5.8). Then we show that the coefficients of a nc power series representing the nc function are uniquely determined. In fact, this series is unique and is equal to the corresponding TT series (Theorems 5.9 and 5.10). In Section 5.2 we show that, conversely, given a sequence of multilinear mappings $f_\ell\colon\ (\mathcal{M}^{s\times s})^\ell \to \mathcal{N}^{s\times s}$, $\ell = 0, 1, \ldots$, satisfying the compatibility conditions, the sum of the nc power series $\sum_{\ell=0}^\infty (X - \bigoplus_{\alpha=1}^m Y)^{\odot_s \ell} f_\ell$ is a nc function on $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}; Y)$ with values in $\mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ (Theorem 5.13), and a version of this result, Theorem 5.15, for the case $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$ and a sequence of multilinear mappings $f_w\colon\ (\mathcal{M}^{s\times s})^\ell \to \mathcal{N}^{s\times s}$, $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$, satisfying the corresponding compatibility conditions. These results are algebraic in their nature, since the sum of the corresponding series is finite at every point of $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}; Y)$.

In Chapter 6, we give some other algebraic applications of the TT formula. We prove that a nc function on $(\mathbb{K}^d)_{\mathrm{nc}}$, with $\mathbb{K}$ an infinite field, which is polynomial in matrix entries when evaluated on $n \times n$ matrices, $n = 1, 2, \ldots$, of bounded degree, is necessarily a nc polynomial (Theorem 6.1). The degree boundedness condition is essential and cannot be omitted (Example 6.3). However, if we do not require this condition, then the following is true: an arbitrary nc function on $(\mathbb{K}^d)_{\mathrm{nc}}$, which is polynomial of degree M_n in matrix entries when evaluated on $n \times n$ matrices, is a sum of a nc polynomial and an infinite series of homogeneous polynomials f_j vanishing on all d-tuples of $n \times n$ matrices for $j > M_n$ (Theorem 6.4). We also obtain a generalization of Theorem 6.1 to nc functions on (much more general) nc spaces, which are polynomial on slices (Theorem 6.8).

In Chapter 7, we study analytic nc functions and the convergence of their TT series. We consider three different topologies on a nc space $\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ (over a complex vector space $\mathcal{V}$), or three types of convergence of nc power series, and, correspondingly, three types of analyticity of nc functions: finitely open topology and analyticity on slices, norm topology and analyticity on $n \times n$ matrices over $\mathcal{V}$ for every $n = 1, 2, \ldots$, and uniformly-open topology and uniform (in n) analyticity. The main feature of analytic nc functions established in Chapter 7 is that local boundedness implies analyticity, in each of the three settings. In the first part of Section 7.1, we introduce the finitely open topology on $\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ and prove that a nc function which is locally bounded on slices is analytic on slices and discuss the convergence of the corresponding TT series (Theorem 7.2). In the second part of Section 7.1, we show that a nc function which is locally bounded (with respect to the norm topology on $\mathcal{V}^{n\times n}$, for every n) is analytic, with the TT series convergent uniformly and absolutely on certain open complete circular nc sets about the center $Y \in \Omega_s$ (Theorem 7.4) or on open balls centered at Y (Corollary 7.5). We also establish the uniqueness of the convergent nc power series expansions, in both of the above topologies (Theorem 7.9). In Section 7.2, we introduce and study the uniformly-open topology on a nc space $\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ over an operator space $\mathcal{V}$. In Section 7.3, we show that a uniformly locally bounded nc function is uniformly analytic, and its TT series converges uniformly and absolutely on certain uniformly-open complete circular nc sets about Y (Theorem 7.21) or on certain uniformly-open matrix circular

nc sets (Theorem 7.23) or on uniformly-open nc balls (Corollary 7.26). We also prove a version of this result for the case where $\mathcal{V} = \mathbb{C}^d$ and the TT series convergent along $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ (Theorem 7.29 and Corollary 7.31). In Section 7.4 we introduce and study analytic higher order nc functions, also in the three different settings. The main results are analogous to those in Sections 7.1 and 7.3.

In Chapter 8, we study the convergence of nc power series in the three different topologies, as in Chapter 7, to an (analytic in the corresponding sense) nc function. The results are the converse of the results of Sections 7.1 and 7.3. We discuss the convergence of nc power series in the finitely open topology (resp., in the norm topology and in the uniformly-open topology) in Section 8.1 (resp., 8.2 and 8.3). In each topology, we have Cauchy–Hadamard type estimates for radii of convergence and sharp estimates for the size of convergence domains of various shapes. We also characterize the maximal nc sets where the sum of the series is an analytic on slices (resp., analytic and uniformly analytic) nc function and give many examples illustrating the differences between various types of convergence domains.

In Chapter 9, we define and study so-called direct summands extensions of nc sets and nc functions. If a nc set Ω is invariant under similarities, then one can extend Ω to a larger nc set, $\Omega_{\text{d.s.e.}}$, which contains, together with a matrix which is decomposable into a direct sum of matrices, every direct summand of the decomposition. This extension preserves many properties of Ω (Proposition 9.1). We then can extend a nc function f on Ω to a nc function $f_{\text{d.s.e.}}$ on $\Omega_{\text{d.s.e.}}$, which inherits most important properties of f, in particular, analyticity (Proposition 9.2). Similarly, we define and establish the properties of the direct summands extensions of higher order nc functions (Proposition 9.3). We also define and study direct summands extensions of sequences f_ℓ, $\ell = 0, 1, \ldots$, (resp., f_w, $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$) of multilinear mappings satisfying the compatibility conditions (resp., their counterparts in the case $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$) in Proposition 9.4 (resp., in Proposition 9.6).

In order to define right (left) difference-differential operators via evaluations of nc functions f on Ω at block upper (lower) triangular matrices, we need a nc set Ω to be right (left) admissible, i.e., for a (say, upper) block triangular matrix $\left[\begin{smallmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{smallmatrix}\right]$ we can multiply Z with some invertible r in the ring $\mathcal{R}$, so that $\left[\begin{smallmatrix} X & rZ \\ 0 & Y \end{smallmatrix}\right] \in \Omega$. Then we can define $\Delta_R f(X, Y)(rZ)$ and extend this definition to arbitrary Z by linearity of $\Delta_R f(X, Y)(\cdot)$. Although the properties of Δ_R (Δ_L) can be established using these scalings, this creates cumbersome technicalities in the proofs. To bypass those technicalities, we define the so-called similarity invariant envelope $\widetilde{\Omega}$ of Ω, which is the smallest nc set containing Ω and invariant under similarities. Then it turns out that $\widetilde{\Omega}$ is also invariant under formation of block triangular matrices (Proposition 10.2). Our next step is to extend a nc function f on Ω to a nc function $\widetilde{f}$ on $\widetilde{\Omega}$. Such an extension is unique (Proposition 10.3). A similar extension is constructed for higher order nc functions (Proposition 10.5). It turns out that $(\Delta_R \widetilde{f})|_{\Omega \times \Omega} = \Delta_R f$ (Remark 2.5), which allows us to prove various statements about the difference-differential operators throughout the manuscript assuming, without loss of generality, that the underlying

nc set Ω is similarity invariant. The results on similarity invariant envelopes and the corresponding extensions of nc functions are presented in Chapter 10.

Keywords: Free noncommutative function, difference-differential calculus, Taylor–Taylor formula, jointly nilpotent matrices, direct summands extension, similarity invariant envelope.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Публікації, в яких опубліковано основні результати дисертації

Монографія:

D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi and V. Vinnikov, Foundations of Free Noncommutative Function Theory, 178 pp. Mathematical Surveys and Monographs, AMS, 2014.

Статті у періодичних виданнях:

1. D. Alpay, D. S. Kalyuzhnyĭ-Verbovetzkiĭ, Matrix-J-unitary non-commutative rational formal power series, *Operator Theory: Adv. Appl.*, 161 (2006), 49–114.

2. D. Alpay, D. S. Kalyuzhnyĭ-Verbovetzkiĭ, On the intersection of null spaces for matrix substitutions in a non-commutative rational formal power series, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 339 (2004), no. 8, pp. 533–538.

3. J. A. Ball and D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, Conservative dilations of dissipative multidimensional systems: The commutative and non-commutative settings. *Multidimens. Syst. Signal Process.* 19 (2008), 79–122.

4. J. A. Ball and D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, Schur–Agler and Herglotz–Agler classes of functions: positive-kernel decompositions and transfer-function realizations, *Adv. Math.* 280 (2015), 121–187.

5. J. A. Ball and D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, Rational Cayley inner Herglotz–Agler functions: Positive-kernel decompositions and transfer-function realizations. *Linear Algebra Appl.* 456 (2014), 138–156.

6. A. Grinshpan, D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, V. Vinnikov, and H. J. Woerdeman, Contractive determinantal representations of stable polynomials on a matrix polyball. *Mathematische Zeitschrift*, 283 (2016), no. 1–2, 25–37.

7. D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi and V. Vinnikov, Noncommutative rational functions, their difference-differential calculus and realizations. *Multidimens. Syst. Signal Process.* 23 (2012), no. 1-2, 49–77.

8. D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi and V. Vinnikov, Singularities of rational functions and minimal factorizations: The noncommutative and the commutative setting. *Linear Algebra Appl.* 430 (2009), no. 4, 869–889.

9. D. S. Kalyuzhnyĭ-Verbovetzkiĭ and V. Vinnikov. Non-commutative positive kernels and their matrix evaluaions. *Proc. Amer. Math. Soc.* 134 (2005), no. 3, 805–816.

10. D. S. Kalyuzhnyĭ-Verbovetzkiĭ, Carathéodory interpolation on the non-commutative polydisk, *J. Funct. Anal.*, 229 (2005), 241–276.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. J. W. Helton, D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, I. Klep, and V. Vinnikov, A mini-course on noncommutative rational functions and noncommutative convexity. In: *Proceedings of the 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems – MTNS 2010*, 5–9 July, 2010, Budapest, Hungary, pp.737–738.

2. D. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, Noncommutative power series and noncommutative functions. In: *IWOTA 2011 Book of Abstracts*, Universidad de Sevilla, July 3–9, 2011, Seville, Spain, p. 38.

3. D. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, Noncommutative analytic functions. In: *GPOTS 2012 talks*, University of Houston, Department of Mathematics, May 30 - June 3, 2012, Houston, TX, p. 6.

Зміст

Вступ 19
0.1. Н.к. функції: приклади та походження 26
0.2. Н.к. множини, н.к. функції і н.к. різніцево-диференціальне числення 28
0.3. Застосування формули Тейлора–Тейлора 33
0.4. Огляд 36

Розділ 1. Різні результати для спеціальних типів н.к. функцій 43
1.1. Матричнозначні н.к. раціональні функції і їх сингулярності 43
1.2. Застосування результатів про сингулярності до стійкості (комутативних) многочленів 52
1.3. Різницево-диференціальне числення для н.к. раціональних функцій 54
1.4. Н.к. обмежена дійсна лема без втрат 65
1.5. Перетин нульових підпросторів для матричних підстановок у н.к. раціональний степеневий ряд 68
1.6. Н.к. додатні ядра і їх матричні обчислення 71
1.7. Консервативні ділатації дисипативних багатовимірних систем: комутативне і н.к. налаштування 79
1.8. Інтерполяція Каратеодорі на н.к. полікрузі 91

Розділ 2. Н.к. функції і їх різницево-диференціальне числення 111
2.1. Н.к. функції 111
2.2. Н.к. різницево-диференціальні оператори 113
2.3. Основні правила н.к. різницево-диференціального числення 120
2.4. Різницеві формули першого порядку 124
2.5. Властивості $\Delta_R f(X,Y)$ і $\Delta_L f(X,Y)$ як функцій від X і Y 126
2.6. Напрямкові н.к. різницево-диференціальні оператори 130

Розділ 3. Н.к. функції вищого порядку і їх різницево-диференціальне числення 133
3.1. Н.к. функції вищого порядку 133
3.2. Н.к. різницево-диференціальні оператори вищого порядку 143
3.3. Різницеві формули першого порядку для н.к. функцій вищого порядку 156
3.4. Н.к. інтегровність 159
3.5. Напрямкові н.к. різницево-диференціальні оператори вищого порядку 160

Розділ 4. Формула Тейлора–Тейлора 163

Розділ 5. Н.к. функції на нільпотентних матрицях 169
5.1. Від н.к. функцій до н.к. степеневих рядів 169

5.2. Від н.к. степеневих рядів до н.к. функцій 173

Розділ 6. Н.к. многочлени і многочлени від матричних елементів 181

Розділ 7. Н.к. аналітичність і збіжність ТТ рядів 187
7.1. Аналітичні н.к. функції 187
7.2. Рівномірно-відкрита топологія над операторним простором 199
7.3. Рівномірно аналітичні н.к. функції 204
7.4. Аналітичні і рівномірно аналітичні н.к. функції вищого порядку 217

Розділ 8. Збіжність н.к. степеневих рядів 235
8.1. Скінченно-відкрита топологія 235
8.2. Топологія норми 240
8.3. Рівномірно-відкрита топологія 244

Розділ 9. Розширення н.к. множин і н.к. функцій на доданки прямих сум 271

Розділ 10. Подібностно інваріантні конверти і розширення н.к. функцій 285

Висновки 289

Бібліоґрафія 293

Покажчик 301

Додаток 305

Вступ

Актуальність теми. Ця робота присвячена розвитку основ теорії функцій вільних[1] некомутуючих змінних. Ця теорія пропонує єдиний підхід до багатьох вільних некомутативних (н.к.) об'єктів, що виникають у різних галузях математики.

Аналітичні функції від d некомутуючих змінних з'являются у новаторській праці Дж. Л. Тейлора у некомутативній (н.к.) спектральній теорії на початку 70-х років 20 століття [**145, 146**]. Основна ідея полягає в тому, що функція від d некомутуючих змінних - це функція на наборах d квадратних матриць всіх розмірів, що є інваріантною при одночасному переплетенні (або еквівалентно - інваріантною щодо прямих сум і одночасній подібності). Тейлор показав, що такі функції дозволяють добре диференціальне (точніше, різницево-диференціальне) числення, аж до некомутативного аналогу класичної формули (Брука) Тейлора. Звісно, набір d матриць (скажімо, над $\mathbb{C}$) - це теж саме, що і матриця над $\mathbb{C}^d$, так що ми можемо розглядати н.к. функцію як визначену на квадратних матрицях будь-яких розмірів над даним векторним простором. Це вкладає теорію н.к. функцій у налаштування операторних просторів [**55, 117, 118**]. Також, н.к. функції, забеспечені різницево-диференціальним оператором, утворюють інфінітезимальну біалгебру [**92, 5**]. [2] Теорія була просунута далі у працях Войкулеску [**152, 153, 154**] на початку 21 століття з орієнтацією на застосування у теорії вільної ймовірності [**149, 150, 151, 155**]. Ми згадуємо також роботи Хадвіна [**70**], Хадвіна–Каонга–Матеса [**71**], Попеску [**124, 125, 127, 128**], Хелтона–Клепа–Маккалоу [**80, 76, 77, 78**], та Мьюлі–Солеля [**107, 109**]. Вже нетривіальний випадок функцій однієї н.к. змінної був розглянутий Шануелем [**135**] (дивись також статті Шануеля–Зейма [**136**] і Німця [**115**]).

У чисто алгебраїчній ситуації многочлени та раціональні функції від d некомутуючих змінних та їх значення на наборах d матриць довільного фіксованого розміру (над комутативним кільцем $\mathcal{R}$) є центральними об'єктами в теорії поліноміальних і раціональних тотожностей [**130, 62**]. Глибоке і детальне вивчення кільця н.к. многочленів та косого поля н.к. раціональних функцій було проведено у роботах П. М. Кона [**46, 48**].

[1] Ми розглядаємо тільки випадок вільних некомутуючих змінних, а саме, вільну алгебру, або загальніше, тензорну алгебру модуля; таким чином, ми будемо казати просто "некомутативна"замість "вільна некомутативна".

[2] Точніше, використовуючи нашу термінологію, ми маємо розглядати н.к. функції із значеннями у н.к. просторі над алгеброю з напрямковим н.к. різницево-диференціальним оператором як комноження, і це є топологічною версією поняття біалгебри, де образ комноження - поповнений тензорний добуток. Дивись підрозділ 2.3.4 щодо правила Лейбніця і підрозділ 3.4 щодо коасоціативності і комноження. Ми не будемо впроваджувати точку зору інфінітезимальної біалгебри явно.

Н.к. різницево-диференціальний оператор у налаштуванні н.к. многочленів добре відомий як універсальна деривація на вільній алгебрі [**104, 38, 50**].

У теорії систем і теорії керування н.к. раціональні функції і формальні степеневі ряди виникають природно як впізнавані формальні степеневі ряди теорії автоматів та формальних мов [**103, 138, 139, 59, 60, 61, 39**] і як передавальні функції багатовимірних систем з еволюцією уздовж вільного моноїду [**33, 24, 26, 25**]. Зокрема, передавальні функції консервативних н.к. багатовимірних систем характеризуються як формальні степеневі ряди, значення яких на певному класі наборів d операторів є стискаючими. З'являються такі класи формальних степеневих рядів як некомутативне узагальнення класичного класу Шура стискаючих аналітичних функцій на одиничному крузі [**4, 72, 22**] в теорії операторних моделей для рядкових стисків та більш загальних некомутуючих наборів операторів [**120, 121, 122, 123, 126**], в теорії зображень алгебри Кунця [**40, 49**] і в узагальненій алгебрі Харді, пов'язаній з W^* - відповідністю [**106, 108, 20**].

Виходячи з іншого напрямку, виявляється, що більшість проблем оптимізації, що з'являються в теорії систем та теорії керування, є безрозмірними і проблема містить раціональні вирази від цих матричних змінних, які, таким чином, мають однаковий вигляд, незалежний від матричних розмірів [**74**]. Це призводить до вивчення таких методів, як лінійні матричні нерівності (LMI) – дивись, наприлад, [**112, 111, 141**] – у контексті н.к. опуклості і н.к. дійсна напівалгебраїчна геометрія, де розглядаються многочлени та раціональні функції від d некомутуючих змінних обчислені на наборах d матриць над $\mathbb{R}$ [**73, 81, 85, 84, 79, 82**].

Квазидетермінанти [**65, 66, 63**] та н.к. симетричні функції [**64**] є важливими прикладами н.к. раціональних функцій, тоді як формальний ряд Бейкера - Кемпбела - Хаусдорфа [**54**] є важливим прикладом формального н.к. степеневого ряду. Згадаємо тут також н.к. неперервні дроби [**157**].

Наша робота забезпечує уніфіковану основу для вивчення всіх цих об'єктів. Як заради потенційних застосувань, так і заради розвитку теорії в її природній загальності, виявляється, що правильне налаштування для теорії н.к. функцій - це матриці всіх розмірів над заданим векторним простором або заданим модулем. В особливому випадку, коли модуль є $\mathcal{R}^d$, $n \times n$ матриці над $\mathcal{R}^d$ можна ідентифікувати з наборами d матриць розміру $n \times n$ над $\mathcal{R}$, і ми маємо функції d змінних, ключові приклади яких наводилися вище. Н.к. функції – це у нашому означенні відображення матриць усіх розмірів над модулем у матриці того ж розміру, що є інваріантними щодо прямих сум і подібностей матриць, або, еквивалентно, інваріантними щодо переплетень матриць. Ми спочатку вивчаємо деякі спеціальні класи н.к. функцій. Потім ми будуємо різницево–диференціальне числення для н.к. функцій і доводимо н.к. аналог формули Тейлора, яку ми називаємо формулою Тейлора–Тейлора, у честь Брука Тейлора і Джозефа Л. Тейлора. Далі ми описуємо деякі застосування цієї формули в алгебрі і аналізі, вивчаємо збіжність рядів Тейлора–Тейлора, характерізуємо три типу аналітичності для н.к. функцій, відповідаючих трьом природним топологіям на н.к. просторі, а також будуємо теорію збіжності н.к. степеневих рядів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Ця робота була частково підтримана грантом Двонаціональної Наукової Фундації США та Ізраїля (BSF) 2010432, грантом Національної Наукової Фундації США (NSF) DMS 0901628 та Центром Передових Досліджень з Математики університету імені Бен-Гуріона (Ізраїль). Частина цієї роботи була проведена під час візиту на Міжнародній Дослідницькій Станції Банфа (BIRS) за програмою "Дослідження в командах"(Банф, штат Альберта, Канада) 21-28 лютого 2010 р., та під час візиту в Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (MFO) за програмою "Дослідження в парах"(Обервольфах, Німеччина) з 2 по 15 травня 2010 року.

Мета та задачі дослідження. Метою цієї роботи є систематичний розвиток, у повній природній загальності, основ теорії функцій вільних некомутуючих змінних. Ця теорія пропонує єдиний спосіб розглядання багатьох вільних н.к. об'єктів, що з'являються в різних галузях математики.

Об'єктом дослідження є вільні н.к. функції, тобто відображення матриць усіх розмірів над модулем у матриці того ж розміру, що є інваріантними щодо прямих сум і подібностей матриць, або, еквивалентно, інваріантними щодо переплетень матриць.

Предметом дослідження є властивості н.к. функцій, зокрема різницево-диференціальне числення і аналітичність, а також збіжність н.к. степеневих рядів та узагальнення класичних теорем аналізу на н.к. випадок.

Методи дослідження. У роботі використовуються як класичні методи аналізу (наприклад, оцінки суми ряду, методи теорії зображень C^*-алгебр, теорії лінійних систем, теорії поліноміальних тотожностей), так і розроблені в роботі нові методи, специфічні для н.к. теорії – дивись у наступному розділі.

Наукова новизна одержаних результатів. Робота здобувача, описана в цій дисертації, будує основи теорії вільних н.к. функцій в повній природній загальності, розробляє н.к. різницево-диференціальне числення аж до н.к. аналогу ряду Тейлора, що відкриває шлях для дослідників у цій галузі, яким потрібен надійний ґрунт для подальшої роботи у цьому напрямку. Вона заснована на першій дослідницькій монографії [**97**] , коли-небудь написаній на цю тему. Хоча ця робота й використовує деякі геніальні ідеї Джозефа Тейлора і враховує різні інші дослідницькі роботи, які ми згадували вище, ідеї для найбільш загальних налаштувань є новими, і у доведенні більшості результатів у загальному випадку було потрібно розробити нові методи та оригінальні підходи. Необхідні та достатні умови того, щоб коефіцієнти н.к. степеневого ряду були коефіцієнтами Тейлора–Тейлора н.к. функції, є новими. Алгебраїчні та аналітичні застосування формули Тейлора–Тейлора показують всю силу цієї теорії: так, ми показуємо, що н.к. функція на н.к. просторі над $\mathbb{K}^d$, де $\mathbb{K}$ – нескінченне поле, яка є многочленом обмеженого ступеня від матричних елементів при обчисленні на $n \times n$ матрицях, $n = 1, 2, \ldots$, обов'язково є н.к. многочленом; ми визначаємо та вивчаємо аналітичні н.к. функції в налаштуваннях трьох різних топологій, і в кожному з цих налаштувань ми показуємо, що локально обмежена н.к. функція є аналітичною. Деякі наші

результати про збіжність н.к. степеневих рядів є передбачуваними, наприклад, формули Коші–Адамара для радіусів збіжності. Однак є багато вирішених у цій роботі нових тонких питань, особливо пов'язаних із збіжністю рядів уздовж вільної напівгрупи та збіжністю на зрізах.

У розділі 2 представлено ряд результатів здобувача щодо спеціальних класів н.к. функцій. Ці роботи можна розглядати як мотивацію до роботи з основ загальної теорії н.к. функцій. Можна поділити ці роботи на три категорії (хоча окрема стаття може включати частини, що належать до різних категорій). Перша категорія включає розробку теорії матричнозначних н.к. раціональних функцій, яка багато в чому паралельна побудові загальної теорії н.к. функцій, здійсненій пізніше в цій дисертації, починаючи з розділу 3. Друга категорія включає результати, які є специфічними для н.к. випадку, а відповідні факти у багатовимірному комутативному випадку є невірними або невідомими. Третя категорія включає роботи, де н.к. результат легше отримати, а потім він використовується для отримання його комутативного аналога шляхом н.к. ліфтінгу.

У дисертації розроблено ряд нових методів: н.к. ліфтінг, обчислення н.к. функцій та н.к. формальних степеневих рядів на ретельно підібраних нільпотентних матрицях, використання переплетень для доведення н.к. тотожностей, визначення та використання правих і лівих н.к. зсувів назад для матрично-значних н.к. раціональних функцій, визначення та використання класу спільно унітарних наборів d операторів та його дуальність із класом наборів d унітарних операторів, розширення н.к. областей та н.к. функцій на доданки прямих сум, подібностно інваріантні конверти та відповідні розширення н.к. функцій, та ін.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати є внеском в теорію вільних н.к. функцій і можуть бути використані у н.к. алгебрі, теорії вільної ймовірності, спектральній теорії кількох некомутуючих операторів, теорії н.к. лінійних систем, у задачах оптимізації із матричними змінними. Робота може також бути використана при підготовці спеціалізованих курсів для студентів та аспірантів.

Деякі недавні праці інших авторів у теорії н.к. функцій Недавні статті [**119, 34, 35**] використали результати цієї роботи у теорії н.к. функцій для дослідження н.к. нескінченної подільності і граничних теорем у теорії операторнозначної вільної ймовірності. Наприклад, у скалярнозначному випадку міра є вільною нескінченно подільною тоді і тільки тоді, коли її так зване R-перетворення має додатну уявлену частину у комплексній верхній півплощині ([**36**], дивись також [**114**] — це є вільний аналог класичної тореми Леві–Хінчина). Один з головних результатів у [**119**] – подібне твердження в операторнозначному випадку, крім того, що R-перетворення у операторнозначному випадку - це н.к. функція. Недавні статті [**7, 8, 9**] зробили подальший прогрес у теорії н.к. функцій. А саме, у [**7**] встановлено аналог реалізаційної теореми з [**14**] і [**21**] для н.к. функцій в області визначеній матричним н.к. многочленом (цей результат був спочатку встановлений у спеціальних випадках у [**26**] в налаштуванні н.к. степеневих рядів, дивись

підрозділ 0.3.5). У [**7**] використовано цей реалізаційний результат, щоб встановити н.к. аналоги апроксимаційної теореми Ока–Вейля і теореми Карлесона про корону. У [**8**] застосовано ці ідеї до н.к. версії інтерполяційної задачи Неванлінна–Піка, і у [**9**] - до симетричних функцій двох н.к. змінних. Ми також згадуємо кандидатську дисертацію Г. К. Абдувалієвої [**3**] (дивись також [**1, 2**]), де доведені н.к. версії класичних теорем про фіксовану точку і про неявну/обернену функцію.

Особистий внесок здобувача. В основній частині дисертації результати, отримані у співпраці з різними колегами, включені наступним чином. У спільній роботі з професором В. Вінніковим [**97, 98, 99, 101**], розподіл робіт був специфічним для кожного автора: постановка більшості задач та загальна стратегія були сформульовані професором В. Вінніковим, тоді як більшість методів доведення розробляв здобувач. Винятки є такі: ідея доведення теореми 1.5 (результат з [**99**]) належить проф. В. Віннікову, але деталі доведення були розроблені та подальші твердження з [**99**] запропоновані та доведені здобувачем; деякі результати з монографії [**97**], а саме, леми 8.10 і 8.16, були доведені проф. В. Вінніковим, а лема 5.12 і теореми 6.4, 7.2, 7.4, 8.2, 8.11 були доведені здобувачем у співпраці з проф. В. Вінніковим. Результати про конверти інваріантні щодо подібностей і відповідні поширення н.к. функцій, що представлені у розділі 10, що міститься у [**97**, додаток A], написані у співпраці з Шибанандою Бісвасом, який запропонував ідею таких конвертів. Проте, доведення у розділі 10 належать здобувачу. У спільній роботі з професорами А. Гріншпаном, В. Вінніковим та Х. Дж. Вордеманом [**68**], частина, включена в цю дисертацію та пов'язана із застосуванням теорії н.к. раціональних функцій, належить здобавачу. У статтях [**13, 12**] постановка задач належить професору Д. Алпаю, тоді як доведення результатів належать здобувачу. Так само, у [**27**], постановка задач належить професору Дж. А. Боллу, тоді як доведення результатів належать здобувачу. Деякі техніки у дисертації, що застосовані у підрозділі 1.8, що взяті з сумісних статей [**28, 29**] з професором Дж. А. Боллом, належать частині цих статей, що є внеском здобувача. У статті [**100**] здобувач є єдиним автором.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на наукових конференціях та засіданнях наукових семінаров провідних українських та міжнародних наукових установ, а саме:

Конференції:

Пленарні та напівпленарні доповіді:

2012 *Great Plains Operator Theory Symposium "GPOTS 2012"*, University of Houston, Houston, TX (USA)

2013 *South-Eastern Analysis Meeting "SEAM 2013"*, Virginia Tech, Blacksburg, VA (USA)

2014 *International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems "MTNS 2014"*, University of Groningen, Groningen (the Netherlands)

Мінікурси лекцій:

2010 *International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems "MTNS-2010"*, Budapest (Hungary)
2012 *International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems "MTNS-2012"*, Melbourne (Australia)

Запрошені доповіді:

2006 *South Eastern Analysis Meeting "SEAM XXII"*, Gainsville, FL (USA)
2006 *International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems "MTNS-2006"*, Kyoto (Japan)
2007 *International Conference "Characteristic Functions and Transfer Functions in Operator Theory and System Theory"*, dedicated to Paul Fuhrmann on his 70th anniversary and to the memory of Moshe Livšic on his 90th anniversary, Beer-Sheva (Israel)
2008 *International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems "MTNS-2008"*, Blacksburg, VA (USA)
2010 *International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems "MTNS-2010"*, Budapest (Hungary)
2010 *International Workshop on Operator Theory and Applications "IWOTA-2010"*, Berlin (Germany)
2010 *NSF Workshop "Control, Optimization, and Functional Analysis: Synergies and Perspectives"in honor of Bill Helton*, San Diego, CA (USA)
2011 *International Conference "Function theory and operator theory: Infinite dimensional and free setting"* Beer-Sheva (Israel)
2011 *International Workshop on Operator Theory and Applications "IWOTA-2011"*, Seville (Spain)
2011 *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference,* Orlando, FL (USA)
2012 *Joint Mathematics Meetings, AMS-MAA*, Boston, MA (USA)
2014 *AMS Sectional Meeting*, Albuquerque, NM (USA)
2014 *International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems "MTNS-2014"*, Groningen (the Netherlands)
2014 *International Workshop on Operator Theory and Applications "IWOTA-2014"*, Amsterdam (the Netherlands)
2015 *Joint Mathematical Meetings*, San Antonio, TX (USA)
2015 *International Workshop on Operator Theory and Applications "IWOTA-2015"*, Tbilisi (Georgia)
2016 *Workshop in Noncommutative Analysis*, The University of Iowa, Iowa City, IA (USA)
2016 *International Workshop on Operator Theory and Applications "IWOTA-2016"*, St. Louis, MO (USA)

2016 *International Workshop "Complex Analysis and Noncommutative Function Theory"*, Toulouse (France)

Доповіді на семінарах та колоквіумах:

2 червня 2005	The Mathematics Department Colloquium, Drexel University (Philadelphia, PA)
14 грудня, 2005	The Dean seminar, College of Art and Science, Drexel University (Philadelphia, PA)
2005–2015	The Analysis seminar, Drexel University (Philadelphia, PA)
24 серпня, 2007	The Mathematics Department Colloquium, Virginia Tech (Blacksburg, VA)
16 грудня, 2009	Operator algebras/operator theory seminar, Technion (Haifa, Israel)
12 листопада, 2012	Operator and system theory seminar, Ben Gurion University of the Negev (Beer Sheva, Israel)
17 квітня, 2014	Colloquium, Department of Mathematics, University of Iowa (Iowa City, IA)
19 квітня, 2014	Iowa–Nebraska Functional Analysis seminar, Iowa State University (Des Moines, IA)
15 грудня, 2014	Operator and System Theory seminar, Ben-Gurion University of the Negev (Beer-Sheva, Israel)
27 січня, 2021	Київський Семінар з функціонального аналізу (Київ, Україна)

Публікації. Результати дисертації опубліковані в одній монографії [**97**] та 10 статтях [**13, 12, 27, 28, 29, 68, 98, 99, 101, 100**] у міжнародних наукових періодичних виданнях. 7 з цих статей [**12, 28, 29, 68, 98, 100, 101**] опубліковані в журналах, що належать до 1 квартиля (Q1), 2 з цих статей [**27, 99**] належать до 2-го квартиля (Q2), а 1 з цих статей [**13**] належить до 4-го квартиля (Q4) згідно з класифікацією журналу SCImago Journal and Country Rank. Наказом Міністерства освіти і науки України №1220 від 23 вересня 2019 р. Публікації у журналах 1-го і 2-го квартилей (Q1, Q2), згідно з класифікацією звітів про цитування журналу SCImago та Country Rank of Journal, прирівнюються до 3 публікацій, і кожна з тих, що належать до 4-го квартиля (Q4), зараховується як одна публікація. Усі 10 статей [**13, 12, 27, 28, 29, 68, 98, 99, 101, 100**], опубліковані в наукових періодичних виданнях, включених до міжнародних наукових метричних баз даних Scopus та/або Web of Science. Матеріали дисертації також додатково відображені у 3 матеріалах конференцій [**75, 95, 96**].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із анотації, вступу, десяти розділів, розбитих на підрозділи, висновків, списку використаних джерел із 158 найменувань, списку найважливіших понять та позначень та додатку, що містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів. Повний обсяг дисертації становить 309 сторінок, основний текст займає 270 сторінок.

Автор висловлює щиру вдячність науковому консультанту професору Пивоварчику Вячеславу Миколайовичу за увагу до моєї роботи та підтримку.

Ми зараз наведемо деякі мотивуючі приклади н.к. функцій з необхідними означеннями. Після цього ми обговоримо різницево-диференціальне числення і представимо деякі з наших головних результатів, і потім дамо детальний огляд дисертації.

0.1. Н.к. функції: приклади та походження

Нехай $\mathcal{R}$ - унітальне комутативне кільце, і нехай $\mathcal{R}\langle x_1, \dots, x_d\rangle$ - кільце н.к. многочленів (вільна асоціативна алгебра) над $\mathcal{R}$. Тут $x_1, \dots, x_d$ - н.к. невизначені, і $f \in \mathcal{R}\langle x_1, \dots, x_d\rangle$ має вигляд

$$f = \sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} f_w x^w, \tag{0.1}$$

де $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ позначає вільний моноїд з d твірними (літерами) $g_1, \dots, g_d$, з одиницею $\emptyset$ (пусте слово), $f_w \in \mathcal{R}$, x^w - одночлени з $x_1, \dots, x_d$ ($x^w = x_{j_1} \cdots x_{j_m}$ для $w = g_{j_1} \cdots g_{j_m} \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ і $x^\emptyset = 1$), і сума скінченна. f може бути обчислена звичайним способом на наборах d квадратних матриць над $\mathcal{R}$ всіх розмірів: для $X = (X_1, \dots, X_d) \in (\mathcal{R}^{n\times n})^d$,

$$f(X) = \sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} f_w X^w = \sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} X^w f_w \in \mathcal{R}^{n\times n}. \tag{0.2}$$

Ми можемо також розглядати н.к. формальні степеневі ряди або раціональні н.к. функції. Кільце $\mathcal{R}\langle\langle x_1, \dots, x_d\rangle\rangle$ н.к. формальних степеневих рядів над $\mathcal{R}$ - це (формальне) поповнення кільця н.к. многочленів; $f \in \mathcal{R}\langle\langle x_1, \dots, x_d\rangle\rangle$ має такий самий вігляд, як в (0.1), за винятком того, що сума взагалі нескінченна. Є два налаштування, у яких ми можемо визначити обчислення f на наборах d квадратних матриць:

- Припустимо, що $X = (X_1, \dots, X_d) \in (\mathcal{R}^{n\times n})^d$ - спільно нільпотентний набір d матриць, тобто $X^w = 0$ для всіх $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ з $|w| \geq k$ для якогось k, де $|w|$ позначає довжину слова w; коли $\mathcal{R} = \mathbb{K}$ - поле, це просто означає, що X спільно подібне до набору d строго верхньо-трикутних матриць. Тоді ми можемо визначити $f(X)$ як у (0.2), тому що сума скінченна.

- Припустимо, що $\mathcal{R} = \mathbb{K}$ - поле дійсних або комплексних чисел і що f має додатний н.к. мультірадіус збіжності, тобто існує набір $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_d)$ строго додатних чисел таких, що

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\sum_{|w|=k} |f_w|\rho^w} \leq 1.$$

Тоді ми можемо визначити $f(X)$ як у (0.2), де нескінченний ряд збігається абсолютно і рівномірно на будь-якому *н.к. полікрузі*

$$\coprod_{n=1}^{\infty} \left\{ X \in \left(\mathbb{K}^{n\times n}\right)^d : \|X_j\| < r_j,\ j = 1, \ldots, d \right\}$$

мультірадіусу $r = (r_1, \ldots, r_d)$ з $r_j < \rho_j$, $j = 1, \ldots, d$.

Косе поле н.к. раціональних функцій над полем $\mathbb{K}$ -це універсальне косе поле дробів н.к. многочленів над $\mathbb{K}$. Це містить деякі нетривіальні деталі тому, що на відміну від комутативного випадку, н.к. раціональна функція не допускає канонічного взаємно простого дробового зображення; дивись [**15, 37, 45, 47**] щодо деяких оригінальних конструкцій, а також [**130**, Chapter 8] і [**46, 48**] щодо добрих експозицій і основ. Наступний швидкий опис слідує статтям [**98, 99**], до яких ми посилаємось як щодо деталей, так і щодо подальших посилань. Ми спочатку визначаємо (скалярні) н.к. раціональні вирази, починаючи з н.к. многочленів, а потім застосовуючи послідовні арифметичні операції – додавання, множення та обернення. Н.к. раціональний вираз r може бути обчислений на наборі X, що містить $n \times n$ матриці, у його *області регулярності*, $\operatorname{dom} r$, яка визначається як множина всіх наборів d квадратних матриць всіх розмірів таких, що всі обернені, що беруть участь в обчисленні $r(X)$, існують. (Ми припускаємо, що $\operatorname{dom} r \neq \emptyset$, інакше кажучи, під час формування н.к. раціональних виразів ми ніколи не обертаємо вираз, що є ніде не оборотний.) Два н.к. раціональних вирази, r_1 і r_2, називаються *еквівалентними*, якщо $\operatorname{dom} r_1 \cap \operatorname{dom} r_2 \neq \emptyset$ і $r_1(X) = r_2(X)$ для всіх наборів $X \in \operatorname{dom} r_1 \cap \operatorname{dom} r_2$. Ми визначаємо *н.к. раціональну функцію* $\mathfrak{r}$ як клас еквівалентності н.к. раціональних виразів; зауважимо, що він має добре визначене значення $\bigcup_{r\in\mathfrak{r}} \operatorname{dom} r$ (фактично, на деякій трохи більшій множині, що називається поширеною областю регулярності $\mathfrak{r}$).

Відмітимо, що в усіх цих випадках обчислення формального алгебраїчного об'єкту f (н.к. многочлена, формального степеневого ряду або раціональної функції) на наборах d матриць має дві ключові властивості.

- *f інваріантна щодо прямих сум*: $f(X \oplus Y) = f(X) \oplus f(Y)$, де

$$X \oplus Y = (X_1 \oplus Y_1, \ldots, X_d \oplus Y_d) = \left(\begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & Y_1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} X_d & 0 \\ 0 & Y_d \end{bmatrix} \right)$$

(ми припускаємо, що $X = (X_1, \ldots, X_d)$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_d)$ такі, що $f(X)$, $f(Y)$ обидві є визначені).

- *f інваріантна щодо спільних подібностей*: $f(TXT^{-1}) = Tf(X)T^{-1}$, де
$$TXT^{-1} = (TX_1T^{-1}, \dots, TX_dT^{-1})$$
(ми припускаємо тут, що $X = (X_1, \dots, X_d)$ і T є такі, що $f(X)$ і $f(TXT^{-1})$ обидві є визначені).

Загальніше, можливо розглядати $p \times q$ матричний н.к. многочлен f з коефіцієнтами $f_w \in \mathbb{K}^{p\times q}$ і з

$$f(X) = \sum_{w\in\mathcal{G}_d} X^w \otimes f_w \in \mathbb{K}^{n\times n} \otimes \mathbb{K}^{p\times q} \cong \mathbb{K}^{np\times nq} \tag{0.3}$$

для $X \in (\mathbb{K}^{n\times n})^d$, і подібно для н.к. формальних степеневих рядів з матричними крефіцієнтами і матричних раціональних функцій. Також вірне те, що обчислення f на матрицях є інваріантним щодо прямих сум і спільних подібностей (де для подібностей ми замінюємо $Tf(X)T^{-1}$ на $(T\otimes I_p)f(X)(T\otimes I_q)^{-1}$). У випадку $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ або $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, можливо розглядати також операторні н.к. многочлени і формальні степеневі ряди.

0.2. Н.к. множини, н.к. функції і н.к. різніцево-диференціальне числення

Як для потенціальних застосувань, так і для розвитку теорії у її природній загальності виявляється, що правильне налаштування для теорії н.к. функцій - матриці усіх розмірів над даним векторним простором або даним модулем. У спеціальному випадку, коли модуль - це $\mathcal{R}^d$, $n \times n$ матриці над $\mathcal{R}^d$ можуть бути ототожнені з наборами d матриць розміру $n\times n$ над $\mathcal{R}$, і ми отримаємо н.к. функції d змінних, ключові приклади яких з'являлися у підрозділі 0.1.

Означення і результати у цьому підрозділі взяті з [**97**]. Нехай $\mathcal{M}$ - модуль над унітальним комутативним кільцем $\mathcal{R}$; ми називаємо $\mathcal{M}_{\mathrm{nc}} = \coprod_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}^{n\times n}$ *н.к. простором над* $\mathcal{M}$. Підмножина $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ називається *н.к. множиною*, якщо вона замкнена відносно прямих сум, тобто ми маємо $X \oplus Y = \left[\begin{smallmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{smallmatrix}\right] \in \Omega_{n+m}$ для всіх $n, m \in \mathbb{N}$ і всіх $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$, де ми позначаємо $\Omega_n = \Omega \cap \mathcal{M}^{n\times n}$. Н.к. множини є єдиними природними областями для н.к. функцій, але деякі додаткові умови на область потрібні для розвитку н.к. різницево-диференціального числення. Натурально, нам потрібно, щоб область була замкнена відносно формування верхньо-трикутних блочних матриць з довільним верхнім кутовим блоком, але це є занадто суворою вимогою (наприклад, це не вірно для н.к. полікругів або н.к. куль – дивись підрозділ 0.2.3 нижче). Правильне поняття виявляється таким: н.к. множина $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ називається *допустимою справа*, [3] якщо для всіх $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і всіх $Z \in \mathcal{M}^{n\times m}$ існує оборотне $r \in \mathcal{R}$ таке, що $\left[\begin{smallmatrix} X & rZ \\ 0 & Y \end{smallmatrix}\right] \in \Omega_{n+m}$.

Наші основні приклади допустимих справа н.к. множин такі:

[3] "Допустима зверху" може бути більш доречною термінологією, проте ми дотримуватимося "допустимою справа", бо це пов'язано з правим різницево-диференціальним оператором, дивись нижче. Подібний коментар застосовується до аналогічного поняття "допустимої зліва" множини, що може бути також "допустимою знизу".

0.2.1. Множина $\Omega = \mathrm{Nilp}(\mathcal{M})$ нільпотентних матриць над модулем $\mathcal{M}$. Тут $X \in \mathcal{M}^{n\times n}$ називається нільпотентним, якщо $X^{\odot k} = 0$ для якогось k, де $X^{\odot k}$ позначає степень X як матриці над тензорною алгеброю $\mathbf{T}(\mathcal{M}) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathcal{M}^{\otimes j}$ модуля $\mathcal{M}$ (ця операція називається "помилковим" добутком в теорії операторних просторів, коли $\mathcal{M} = \mathcal{V}$ - операторний простір); у випадку, коли $\mathcal{R} = \mathbb{K}$ - поле, це значить, що існує оборотне $T \in \mathbb{K}^{n\times n}$ таке, що матриця TXT^{-1} - строго верхньотрикутна.

0.2.2. Припустимо, що $\mathcal{V}$ - банахів простір (тут $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ або $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), як і $\mathcal{V}^{n\times n}$, $n = 2, 3, \ldots$. Ми звичайно потребуємо, щоб топології на $\mathcal{V}^{n\times n}$ були сумісні в наступному сенсі: ми вимагаємо, щоб відповідна система матричних норм $\|\cdot\|_n$ була *допустимою*, тобто щоб для кожних $n, m \in \mathbb{N}$ існували $C_1(n,m)$, $C_1'(n,m) > 0$ такі, що для всіх $X \in \mathcal{V}^{n\times n}$ і $Y \in \mathcal{V}^{m\times m}$,

(0.4)
$$C_1(n,m)^{-1} \max\{\|X\|_n, \|Y\|_m\} \le \|X \oplus Y\|_{n+m} \le C_1'(n,m) \max\{\|X\|_n, \|Y\|_m\},$$

і щоб для кожного $n \in \mathbb{N}$ існувало $C_2(n) > 0$ таке, що для всіх $X \in \mathcal{V}^{n\times n}$ і $S, T \in \mathbb{K}^{n\times n}$,

$$\|SXT\|_n \le C_2(n)\|S\|\,\|X\|_n\|T\|, \tag{0.5}$$

де $\|\cdot\|$ позначає операторну норму на $\mathbb{K}^{n\times n}$ відносно стандартної евклідової норми простору $\mathbb{K}^n$. Якщо $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ - відрита множина у сенсі, що $\Omega_n \subseteq \mathcal{V}^{n\times n}$ - відкрита множина для всіх n, то Ω - допустима справа.

0.2.3. Припустимо, що $\mathcal{V}$ - *операторний простір*, дивись, наприклад, [**55, 117, 118, 132**]. Нагадаємо, що це означає (за теоремою Руана), що існує система норм $\|\cdot\|_n$ on $\mathcal{V}^{n\times n}$, $n = 1, 2, \ldots$, що задовольняють

$$\|X \oplus Y\|_{n+m} = \max\{\|X\|_n, \|Y\|_m\} \quad \text{для всіх } X \in \mathcal{V}^{n\times n},\ Y \in \mathcal{V}^{m\times m}, \tag{0.6}$$

і

$$\|TXS\|_n \le \|T\|\|X\|_n\|S\| \quad \text{для всіх } X \in \mathcal{V}^{n\times n},\ T, S \in \mathbb{C}^{n\times n}. \tag{0.7}$$

Ясно, що ця система норм допустима, з константами у (0.4) і (0.5), що задовольняють

$$C_1(n,m) = C_1'(n,m) = C_2(n) = 1, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Для $Y \in \mathcal{V}^{s\times s}$ і $r > 0$, визначимо *н.к. кулю з центром у Y радіусу r* як

$$B_{\mathrm{nc}}(Y, r) = \coprod_{m=1}^{\infty} B\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y, r\Big) = \coprod_{m=1}^{\infty} \Big\{X \in \mathcal{V}^{sm\times sm} \colon \Big\|X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big\|_{sm} < r\Big\}.$$

Н.к. кулі складають базис топології на $\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$, яку ми називаємо *рівномірно-відкритою топологією*, що є слабкішою ніж топологія діз'юнктних об'єднань з підрозділу 0.2.2. Зокрема, кожна рівномірно-відкрита н.к. множина - допустима справа.

Нехай $\mathcal{M}$ і $\mathcal{N}$ - модулі над унітальним комутативним кільцем $\mathcal{R}$, і нехай $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\rm nc}$ - н.к. множина. Відображення $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\rm nc}$ з $f(\Omega_n) \subseteq \mathcal{N}^{n\times n}$ називається *н.к. функцією*, якщо:

- *f інваріантна щодо прямих сум*: $f(X\oplus Y) = f(X)\oplus f(Y)$ для всіх $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$.
- *f інваріантна щодо подібностей*: $f(TXT^{-1}) = Tf(X)T^{-1}$ для всіх $X \in \Omega_n$ і оборотних $T \in \mathcal{R}^{n\times n}$ таких, що $TXT^{-1} \in \Omega_n$.

Виявляється, що ці дві умови еквівалентні одній: *f інваріантна щодо переплетень*, а саме, якщо $XS = SY$, то $f(X)S = Sf(Y)$, де $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $S \in \mathcal{R}^{n\times m}$. Ця умова вперше виникає у новаторській праці Дж. Л. Тейлора [**146**]. Ми позначаємо модуль н.к. функцій на Ω із значеннями у $\mathcal{N}_{\rm nc}$ як $\mathcal{T}(\Omega;\mathcal{N}_{\rm nc})$.

Головна ідея поза н.к. різницево-диференціальним численням - обчислення н.к. функцій на блочних верхньо-трикутних матрицях. Нехай f - н.к. функція на допустимій справа н.к. множині $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\rm nc}$ із значеннями у $\mathcal{N}_{\rm nc}$. Нехай $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{n\times m}$, і нехай $r \in \mathcal{R}$ - оборотне і таке, що $\begin{bmatrix} X & rZ \\ 0 & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n+m}$. Тоді виявляється, що

$$f\left(\begin{bmatrix} X & rZ \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(X) & \Delta_R f(X,Y)(rZ) \\ 0 & f(Y) \end{bmatrix},$$

де відображення $Z \mapsto \Delta_R f(X,Y)(Z)$ з $\mathcal{M}^{n\times m}$ у $\mathcal{N}^{n\times m}$ є $\mathcal{R}$-лінійним.

Ми будемо називати $\Delta = \Delta_R$ *правим н.к. різницево-диференціальним оператором.* (Лівий н.к. різницево-диференціальний оператор Δ_L може бути визначеним аналогічно через обчислення на блочних нижньо-трикутних матрицях.) Його головна властивість - це що для всіх $n, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $S \in \mathcal{R}^{m\times n}$ маємо

$$Sf(X) - f(Y)S = \Delta f(Y,X)(SX - YS). \tag{0.8}$$

Зокрема, коли $n = m$ і $S = I_n$, ми маємо наступну формулу скінченних різниць:

$$f(X) - f(Y) = \Delta f(Y,X)(X - Y) \quad (= \Delta f(X,Y)(X - Y)). \tag{0.9}$$

Таким чином, лінійне відображення $\Delta f(Y,Y)(\cdot)$ грає роль н.к. диференціалу.

Нехай $\mathcal{R} = \mathbb{K}$ - поле дійсних або комплексних чисел. Покладаючи $X = Y + tZ$ (з $t \in \mathbb{K}$), ми отримаємо з (0.9) що

$$f(Y + tZ) - f(Y) = t\Delta f(Y, Y + tZ)(Z).$$

За певних умов неперервності, випливає, що $\Delta f(Y,Y)(Z)$ - напрямкова похідна f в Y у напрямку Z.

У випадку $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$, (0.9) перетворюється у

$$f(X) - f(Y) = \sum_{i=1}^{d} \Delta_i f(Y,X)(X_i - Y_i), \quad X, Y \in \Omega_n, \tag{0.10}$$

де $\Delta_i f(Y,X)(C) = \Delta f(Y,X)(0,\dots,0,C,0,\dots,0)$, і $C \in \mathcal{R}^{n\times n}$ у i-й позиції. Лінійне відображення $\Delta_i f(Y,Y)(\cdot)$ грає роль i-го часткового н.к. диференціалу в точці Y.

Для модулів $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{N}_0$, $\mathcal{N}_1$ над унітальним комутативним кільцем $\mathcal{R}$, і н.к. множин $\Omega^{(0)} \subseteq \mathcal{M}_{0,\mathrm{nc}}$, $\Omega^{(1)} \subseteq \mathcal{M}_{1,\mathrm{nc}}$ ми визначаємо *н.к. функцію порядку 1* як відображення f множини $\Omega^{(0)} \times \Omega^{(1)}$ таке, що для $X^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}$ і $X^1 \in \Omega^{(1)}_{n_1}$, $f(X^0,X^1)\colon \mathcal{N}_1{}^{n_0\times n_1} \to \mathcal{N}_0{}^{n_0\times n_1}$ - лінійне відображення, і таке, що f інваріантне, природним чином, щодо прямих сум і подібностей у кожному аргументі. Типова н.к. функція порядку 1 - це $f(X,Y)(Z) = f_0(X)(Zf_1(Y))$, де $f_0 \in \mathcal{T}(\Omega^{(0)};\mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}})$ і $f_1 \in \mathcal{T}(\Omega^{(1)};\mathcal{N}^*_{1,\mathrm{nc}})$. Ми позначаємо клас н.к. функцій порядку 1 як $\mathcal{T}^1(\Omega^{(0)},\Omega^{(1)};\mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}},\mathcal{N}_{1,\mathrm{nc}})$.

Виявляється, що для $f \in \mathcal{T}(\Omega;\mathcal{N}_{\mathrm{nc}})$ маємо $\Delta f \in \mathcal{T}^1(\Omega,\Omega;\mathcal{N}_{\mathrm{nc}},\mathcal{M}_{\mathrm{nc}})$. Загальніше, можна визначити *н.к. функції порядку* k,

$$\mathcal{T}^k(\Omega^{(0)},\dots,\Omega^{(k)};\mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}}),$$

де $\Omega^{(0)} \subseteq \mathcal{M}_{0,\mathrm{nc}}$, …, $\Omega^{(k)} \subseteq \mathcal{M}_{k,\mathrm{nc}}$, як функції від $k+1$ аргументів у $\Omega^{(0)}_{n_0},\dots,\Omega^{(k)}_{n_k}$, чиї значення - k-лінійні відображення

$$\mathcal{N}_1{}^{n_0\times n_1} \times \cdots \times \mathcal{N}_k{}^{n_{k-1}\times n_k} \longrightarrow \mathcal{N}_0{}^{n_0\times n_k},$$

і які є інваріантними, природним чином, щодо прямих сум і подібностей у кожному аргументі. Є також різницево-диференціальний оператор $\Delta\colon \mathcal{T}^k \to \mathcal{T}^{k+1}$ такий, що ітераціями ми отримаємо для $f \in \mathcal{T}(\Omega;\mathcal{N}_{\mathrm{nc}})$, що

$$\Delta^\ell f \in \mathcal{T}^\ell(\Omega,\dots,\Omega;\mathcal{M}_{\mathrm{nc}},\mathcal{N}_{\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{N}_{\mathrm{nc}}).$$

(Ми розглядаємо звичайні н.к. функції як н.к. функції порядку 0: $\mathcal{T}(\Omega;\mathcal{N}_{\mathrm{nc}}) = \mathcal{T}^0(\Omega;\mathcal{N}_{\mathrm{nc}})$.) Замість використання ітерацій, ми можемо також обчислити

$$\Delta^\ell f(X^0,\dots,X^\ell)(Z^1,\dots,Z^\ell)$$

безпосередньо, обчислюючи f на блочній матриці, що має $X^0,\dots,X^\ell$ на її головній діагоналі, $Z^1,\dots,Z^\ell$ понад головною діагоналлю, і всі інші блочні елементи - нулі, і беручи $(1,\ell+1)$-й блочний елемент.

Різницево-диференціальні оператори Δ (і Δ_i) є, звісно, лінійними. Вони також задовольняють певну версію ланцюгового правила (для композиції н.к. функцій), і – у випадку, коли добуток визначений – версію правила Лейбниця.

Використання цих різницево-диференціальних операторів вищого порядку, ітерації скінченно-різницевої формули першого порядку (0.9) і використання інваріантності щодо прямих сум ведуть до наступного н.к. аналогу класичної формули Тейлора (дивись, наприклад, [**140**] для комутативної багатозмінної версії), яку ми називаємо *формулою Тейлора–Тейлора* (або просто *TT формулою*), на честь Брука Тейлора і Джозефа Л. Тейлора. Нехай $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. функція на допустимій справа н.к. множині $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$, нехай $s \in \mathbb{N}$, і нехай $Y \in \Omega_s$; тоді для всіх

$m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_{ms}$ і $N = 0, 1, \dots$ маємо

$$(0.11)\quad f(X) = \sum_{\ell=0}^{N} \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s \ell} \Delta^\ell f(\underbrace{Y, \dots, Y}_{\ell+1 \text{ разів}}) + \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s N+1} \Delta^{N+1} f(\underbrace{Y, \dots, Y}_{N+1 \text{ разів}}, X).$$

Тут $(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y)^{\odot_s \ell}$ позначає ℓ-ий степень $X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y$ розглянутий як $m \times m$ матриця над тензорною алгеброю $\mathbf{T}(\mathcal{M}^{s\times s})$; цей степень є $m \times m$ матрицею над $(\mathcal{M}^{s\times s})^{\otimes \ell}$, до якої $\Delta^\ell f(Y, \dots, Y)$, розглянуте як лінійне відображення на $(\mathcal{M}^{s\times s})^{\otimes \ell}$, застосовано поелементно, призводячи до $m \times m$ матриці над $\mathcal{N}^{s\times s}$, тобто до елементу $\mathcal{N}^{ms\times ms}$. Залишок має подібний сенс.

TT formula (0.11) робить це природним розглядати нескінченні TT ряди f навколо $Y \in \Omega_s$,

$$(0.12)\qquad \sum_{\ell=0}^{\infty} \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s \ell} \Delta^\ell f(Y, \dots, Y).$$

У випадку $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$ і коли $Y = \mu \in \mathbb{K}^d$ - скалярна точка (так, що $s = 1$), (0.12) може бути переписаний як звичайний н.к. степеневий ряд, використовуючи набір d часткових н.к. різницево-диференціальних операторів $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_d)$ (з очевидним зловживанням позначень),

$$(0.13)\qquad \sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} (X - \mu I_m)^w \Delta^{w^\top} f(\mu, \dots, \mu),$$

де $\Delta^{w^\top} = \Delta_{i_\ell} \cdots \Delta_{i_1}$ для слова $w = g_{i_1} \cdots g_{i_\ell} \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$. Є також версія (0.13) для загального матричного центру Y:

$$(0.14)\qquad \sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s w} \Delta^{w^\top} f(Y, \dots, Y).$$

Для $f \in \mathcal{T}(\Omega; \mathcal{N}_{\mathrm{nc}})$ і $Y \in \Omega_s$, послідовність ℓ-лінійних відображень

$$f_\ell := \Delta^\ell f(Y, \dots, Y) \colon \big(\mathcal{M}^{s\times s}\big)^\ell \to \mathcal{N}^{s\times s}, \quad \ell = 0, 1, \dots$$

задовольняє наступні умови:

$$(0.15)\qquad S f_0 - f_0 S = f_1(SY - YS),$$

і для $\ell = 1, \dots,$

$$(0.16)\qquad S f_\ell(Z^1, \dots, Z^\ell) - f_\ell(SZ^1, Z^2, \dots, Z^\ell) = f_{\ell+1}(SY - YS, Z^1, \dots, Z^\ell),$$

$$(0.17)\quad f_\ell(Z^1,\dots,Z^{j-1},Z^jS,Z^{j+1},\dots,Z^\ell)-f_\ell(Z^1,\dots,Z^j,SZ^{j+1},Z^{j+2},\dots,Z^\ell)$$
$$=f_{\ell+1}(Z^1,\dots,Z^j,SY-YS,Z^{j+1},\dots,Z^\ell),$$

$$(0.18)\qquad f_\ell(Z^1,\dots,Z^{\ell-1},Z^\ell S)-f_\ell(Z^1,\dots,Z^\ell)S=f_{\ell+1}(Z^1,\dots,Z^\ell,SY-YS),$$

для кожного $S\in\mathcal{R}^{s\times s}$. (Зауважимо, що у випадку $s=1$, умови (0.15)–(0.18) тривіальні.) Навпаки, якщо дана послідовність ℓ-лінійних відображень $f_\ell\colon\ (\mathcal{M}^{s\times s})^\ell\to\mathcal{N}^{s\times s}$, $\ell=0,1,\dots$, що задовольняють умови (0.15)–(0.18), сума ряду

$$(0.19)\qquad f(X)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\Big(X-\bigoplus_{\alpha=1}^{m}Y\Big)^{\odot_s\ell}f_\ell,$$

коли вона має сенс, визначає н.к. функцію. Подібні пряме і зворотнє твердження можуть також бути сформульовані у випадку, коли $\mathcal{M}=\mathcal{R}^d$ для ряду уздовж $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$.

0.3. Застосування формули Тейлора–Тейлора

Формула Тейлора–Тейлора - це головний інструмент для дослідження локальної поведінки н.к. функцій. Ось деякі зразки результатів (з [**97**]).

0.3.1. Будь-яка н.к. функція на $\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R}):=\mathrm{Nilp}(\mathcal{R}^d)$ (множині спільно нільпотентних наборів d матриць над унітальним комутативним кільцем $\mathcal{R}$) дається н.к. степеневим рядом $f(X)=\sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d}X^w\Delta^{w^\top}f(0,\dots,0)$, де сума скінченна. Загальніше, нехай $Y\in(\mathcal{R}^{s\times s})^d$. Позначимо як $\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R},Y)$ множину наборів d матриць над $\mathcal{R}$ розміру $sm\times sm$, $m=1,2,\dots$, таких, що $X-\bigoplus_{\alpha=1}^m Y\in\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R})$. Тоді будь-яка н.к. функція на $\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R},Y)$ може бути записана як у (0.14), де сума скінченна.

0.3.2. Нехай $\mathbb{K}$ - нескінченне поле, і нехай f - н.к. функція на $(\mathbb{K}^d)_{\mathrm{nc}}$ така, що для кожного n кожний матричний елемент $f(X_1,\dots,X_d)$ - многочлен від матричних елементів матриць $X_1,\dots,X_d$ рівномірно (по n) обмеженого степеню. Тоді f - н.к. многочлен.

Умова рівномірної обмеженості степенів необхідна. Проте, ми можемо отримати найкращий результат без цієї умови теж: а саме, f належить поповненню кільця н.к. многочленів відносно спадної послідовності ідеалів $\{\boldsymbol{\mathcal{I}}_n\}_{n=1}^\infty$, де $\boldsymbol{\mathcal{I}}_n$ позначає ідеал тотожностей [**130**] для $n\times n$ матриць (над $\mathbb{K}$ і в d змінних).

0.3.3. Нехай $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, нехай $\mathcal{V}$ і $\mathcal{W}$ - банахові простори, забезпечені допустимою системою матричних норм над $\mathcal{V}$ і над $\mathcal{W}$ – дивись підрозділ 0.2.2, і нехай $\Omega\subseteq\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ - відкрита множина. Якщо н.к. функція f на Ω локально обмежена, то вона аналітична, тобто $f|_{\Omega_n}$ - аналітична функція на $\Omega_n\subseteq\mathcal{V}^{n\times n}$ із значеннями у $\mathcal{W}^{n\times n}$ (дивись, наприклад, [**88, 110**] щодо загальної теорії аналітичних функцій між банаховими просторами), і ТТ ряд (0.12) збігається до f локально рівномірно. Точніше, якщо f обмежена на $B(\bigoplus_{\alpha=1}^m Y,\delta)$, то ряд (0.12) збігається абсолютно і рівномірно на

$B(\bigoplus_{\alpha=1}^m Y, r)$ для всіх $r < \delta$. У випадку $\mathcal{V} = \mathbb{C}^d$ і $\mathcal{W} = \mathbb{C}$, аналітичність просто означає, що для кожного n кожний матричний елемент у матриці $f(X_1, \ldots, X_d)$ - аналітична функція від матричних елементів матриць $X_1, \ldots, X_d$; у цьому випадку достатньо вимагати, щоб для кожного n, $f|_{\Omega_n}$ була локально обмеженою на зрізах, тобто для кожних фіксованих наборів d матриць $X = (X_1, \ldots, X_d) \in \Omega_s$ і $Z = (Z_1, \ldots, Z_d) \in (\mathbb{C}^{s\times s})^d$, $f(X + tZ)$ - обмежена для всіх $t\colon |t| < \epsilon$, з якимось $\epsilon > 0$. Фактично, якщо н.к. функція $f\colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ (з загальним векторним простором $\mathcal{V}$ і банаховим простором $\mathcal{W}$ як раніше) локально обмежена на зрізах, то f диференційована за Гато і її ТТ ряд збігається.

0.3.4. Нехай $\mathcal{V}$ і $\mathcal{W}$ - операторні простори, і нехай $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ - рівномірно-видкрита н.к. множина (дивись підрозділ 0.2.3). Якщо н.к. функція f на Ω локально обмежена в рівномірно-відкритій топології, то ТТ ряд (0.12) збігається до f локально рівномірно у цій топології. Точніше, якщо f обмежена на $B_{\mathrm{nc}}(Y, \delta)$, то ряд збігається абсолютно і рівномірно на $B_{\mathrm{nc}}(Y, r)$ для всіх $r < \delta$. f називається рівномірно аналітичною н.к. функцією.

У випадку, коли $\mathcal{V} = \mathbb{C}^d$ з деякою структурою операторного простору, визначеною послідовністю норм $\|\cdot\|_n$, є далі вірним, що ряд (0.13) – без групування разом членів однієї степені в однорідні многочлени – збігається абсолютно і рівномірно на трохи менших множинах, а саме, на кожному *відкритому н.к. діаманті навколо* Y,

$$\diamondsuit_{\mathrm{nc}}(Y, r) := \coprod_{m=1}^{\infty} \Big\{ X \in \Omega_{sm}\colon \sum_{j=1}^{d} \|e_j\|_1 \Big\| X_j - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y_j \Big\| < r \Big\}$$

з $r < \delta$; тут $e_1, \ldots, e_d$ позначає стандартний базис $\mathbb{C}^d$.

0.3.5. Розвинення у ТТ ряди дозволяють нам висловити деякі результати, що спочатку були встановлені для н.к. степеневих рядів, як результати для н.к. функцій. Це включає, зокрема, реалізації н.к. степеневих рядів як передавальних функцій н.к. багатовимірних систем (систем з еволюцією уздовж вільного моноїду $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$[4]). Ці системи спочатку вивчалися у [**33**] в консервативному нескінченновимірному налаштуванні, в контексті теорії операторних моделей для рядкових стисків, в основному, у роботах Попеску [**120, 121, 122, 123**], і в контексті теорії зображень алгебри Кунця [**40, 49**]. Детальне дослідження н.к. теорії реалізацій, як у скінченно-вимірному, так і в нескінченно-вимірному налаштуванні, виникає у [**24, 26, 25**]; ці статті дають єдине налаштування структурних н.к. багатовимірних лінійних систем для різних виглядів реалізаційних формул. Ми також згадаємо статтю [**27**], де навіть більш загальний клас н.к. систем (даний проте у частотній області) був описаний і відповідна теорія ділатацій розвинута.

Ми даємо тут (не зовсім точну) версію головної теореми про консервативну реалізацію з [**26**], переформульовану як теорема про н.к. функції. Нехай $Q_1, \ldots, Q_d$

[4] На яких часто посилаються як на системи з еволюцією уздовж вільної півгрупи.

- $p \times q$ комплексні матриці з певною додатковою структурою, що походить з двохчастинного графу. Нехай $\mathcal{U}$ і $\mathcal{Y}$ - гільбертові простори, і нехай $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ - простір обмежених лінійних операторів з $\mathcal{U}$ у $\mathcal{Y}$. Відповідний *н.к. клас Шура–Аглера* складається з стискозначних $f \in \mathcal{T}(B_{\mathrm{nc}}(0,1); \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})_{\mathrm{nc}})$, де $B_{\mathrm{nc}}(0,1) \subseteq (\mathbb{C}^d)_{\mathrm{nc}}$, і $\mathbb{C}^d$ забезпечене структурою операторного простору, визначеною системою матричних норм $\|X\|_n = \|Q(X)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^q, \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^p)}$, де $Q(X) := X_1 \otimes Q_1 + \cdots + X_d \otimes Q_d$. Тоді наступні твердження еквівалентні:

(1) f належить н.к. класу Шура–Аглера.

(2) Існує *розкладання Аглера*

$$I_{\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{Y}} - f(X)f(Y)^* = H(X)(I_{\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^p \otimes \mathcal{G}} - (Q(X) \otimes I_{\mathcal{G}})(Q(Y)^* \otimes I_{\mathcal{G}}))H(Y)^*$$

для допоміжного гільбертова простору $\mathcal{G}$ і деякого $H \in \mathcal{T}(B_{\mathrm{nc}}(0,1); \mathcal{L}(\mathbb{C}^p \otimes \mathcal{G}, \mathcal{Y})_{\mathrm{nc}})$, який є обмеженим на кожній н.к. кулі $B_{\mathrm{nc}}(0,r)$ радіусу $r < 1$.

(3) Існує консервативна реалізація:

$$f(X) = I_n \otimes D + (I_n \otimes C)(I_{\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^p \otimes \mathcal{G}} - Q(X)(I_n \otimes A))^{-1} Q(X)(I_n \otimes B).$$

Тут вузлова матриця

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathbb{C}^p \otimes \mathcal{G} \\ \mathcal{U} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbb{C}^q \otimes \mathcal{G} \\ \mathcal{Y} \end{bmatrix}$$

унітарна.

(Твердження у [**26**] - значно більш точне у ідентифікації просторів стану $\mathbb{C}^p \otimes \mathcal{G}$ і $\mathbb{C}^q \otimes \mathcal{G}$ унітарного вузла у термінах двохчастинного графу, генеруючого матриці $Q_1, \ldots, Q_d$.) Це є н.к. версія комутативної багатовимірної реалізаційної теореми з [**14**] і [**21**] для лінійної функції Q, що визначає область f, що в свою чергу узагальнює відомий результат Аглера для полікругу [**6**], дивись також [**31**]. Такі узагальнені реалізації передавальними функціями виникають також у контексті узагальнених алгебр Харді з робіт Мьюлі і Солеля (елементи яких розглядаються як функції на одиничній кулі зображень алгебри – дивись [**106, 108, 20**]) і класу Шура–Аглера, асоційованого з допустимим класом тестових функцій [**52, 53**].

Зауважимо, що формулювання реалізаційної теореми для н.к. класу Шура–Аглера, що дане вище, пропонує узагальнення до довільного скінченно- або нескінченно-вимірного операторного простору (замість $\mathbb{C}^d$, забезпеченого системою норм, асоційованих з лінійною н.к. функцією Q) і до більш загальних н.к. областей (н.к. аналогів комутативних областей з [**14**] і [**21**], де визначальна н.к. функція Q - н.к. многочлен). У скінченно-вимірному випадку така реалізація була побудована нещодавно у [**7**]; ми посилаємось як на цю статтю, так і на [**8, 9**] за застосуваннями.

0.4. Огляд

У розділі 1, ми представляємо наші результати щодо різних класів н.к. функцій. У підрозділі 1.1 представлені результати з [**98**] . Тут розвивається теорія матричнозначних раціональних н.к. функцій. Ми спочатку визначаємо матричнозначні н.к. раціональні вирази, а потім визначаємо матричнозначні раціональні н.к. функції як класи еквівалентності матричнозначних н.к. раціональних виразів. Після цього ми доводимо теорему про сингулярності таких функцій, теорему 1.5, де множина сингулярностей матричнозначної н.к. раціональної функції описана у термінах її мінімальної реалізації н.к. лінійною системою. Доведення використовує поняття левих і правих н.к. зсувів назад, також введених у [**98**]. Потім доводиться теорема 1.11, де комутативний аналог теореми про сингулярності встановлюється за допомогою так званого н.к. ліфтінгу даної матричнозначної комутативної раціональної функції і застосування н.к. результату, теореми 1.5.

У підрозділі 1.2 ми представляємо результати з [**68**], де теореми про сингулярності з підрозділу 1.1 спочатку модифікуються для налаштування комутативних або н.к. полікуль, а потім застосовуються, щоб отримати стискаюче детермінантне зображення довільного комутативного многочлена, що є стійким у полікулі.

У підрозділі 1.3 ми представляємо різницево-диференціальне числення для матричнозначних н.к. раціональних функцій, розвинуте у [**99**]. Теорія тут незалежна, але паралельна теорії для загальних н.к. функцій з [**97**], яку ми обговорюємо у розділі 2.

У [**13**] вивчаються матричнозначні н.к. раціональні функції з різними симетріями. У підрозділі 1.4 ми представляємо зразок результату з [**13**], так звану обмежену дійсну лему без втрат для матрично-J-унітарних н.к. раціональних функцій.

У підрозділі 1.5 представлені результати з [**12**]. Встановлена формула, яка пов'язує перетин нульових підпросторів кофіцієнтів $\mathfrak{F}_w$ матричнозначного н.к. формального степеневого ряду $\mathfrak{F}$ з перетином нульових підпросторів значень $\mathfrak{F}$ на наборах d матриць достатньо великого розміру. Спеціальний випадок цієї формули тягне за собою добре відомий факт про те, що н.к. раціональна функція, яка зникає на матрицях усіх розмірів, дорівнює нулю.

У підрозділі 1.6 представлений другий тип зв'язку між коефіцієнтами н.к. формального степеневого ряду і його значеннями на матрицях усіх розмірів, відповідно до [**101**], у налаштуванні додатних ядер. Н.к. формальний степеневий ряд $K(x, x')$ від двох наборів d н.к. невизначених називається формально додатним ядром [**32**], якщо його матриця коефіцієнтів $K_{w,w'}$ додатно напіввизначена. Показана, що н.к. ядро $K(x, x')$ формально додатне тоді і тільки тоді, коли функція $K(X, X')$ є додатним ядром, у двох налаштуваннях: коли X і X' - набори d спільно нільпотентних матриць всіх розмірів (і сума, що визначає $K(X, X')$ є тоді скінченною), і коли X і X' належать деякій н.к. кулі, де ряд збігається. Більше того, у налаштуванні нільпотентних матриць, достатньо мати оператори $K(X, X)$ додатними напіввизначеними. Як наслідок, встановлена факторизація додатних наслідкових многочленів, яка є аналогом головних результатів статей Хелтона [**73**] і Маккалоу [**105**].

У підрозділі 1.7 ми представляємо результати з [**27**] про консервативні ділатації дисипативних лінійних систем, як у комутативному, так і у н.к. налаштуваннях. Подібно до 1D випадку, ці результати можуть бути використані для вивчення функцій з комутативного або н.к. класу Шура–Аглера. Виявляється, що ці ділатації завжди існують у н.к. налаштуванні, але відповідні результати у комутативному випадку є різними для різних класів систем. Ми доводимо, що для комутативних дисипативних систем Форнасіні–Маркесіні консервативні ділатації не завжди існують, і ми представляємо критерій існування таких ділатацій. Розроблені техніки для використання н.к. результатів у вивченні комутативних багатовимірних лінійних систем.

У підрозділі 1.8 представлені н.к. аналоги з [**100**] класичних критеріїв розв'язності інтерполяційних задач Каратеодорі і Каратеодорі–Феєра. Зручне нове формулювання класичних теорем Теплиця і Шура висловлює класичні критерії у термінах обчислень многочлена, чиї коефіцієнти - це вхідні дані задачі, на будь-яких нільпотентних стисках. Ми знайшли н.к. аналоги цих критеріїв у термінах обчислень даного н.к. многочлена на наборах d спільно нільпотентних стисків.

Починаючи з розділу 2, ми розробляємо загальну теорію н.к. функцій [**97**]. У розділі 2, ми вводимо н.к. функції і їх різницево-диференціальне числення. У підрозділі 2.1 ми визначаємо н.к. простори, н.к. множини і н.к. функції, і доводимо, що інваріантність щодо прямих сум і подібностей еквівалентна інваріантності щодо переплетень (пропозиція 2.1). У підрозділі 2.2 ми вводимо праві і ліві різницево-диференціальні оператори Δ_R і Δ_L через обчислення н.к. функцій на блочних верхньо-трикутних (нижньо-трикутних) матрицях і потім беручи верхній правий (нижній лівий) кутовий блок їх значень, і показуємо, що $\Delta_R f(X,Y)(Z)$ і $\Delta_L f(X,Y)(Z)$ лінійні у Z (пропозиції 2.4 і 2.6). Ми формулюємо основні правила н.к. числення у підрозділі 2.3 і встановлюємо формули скінченних різниць першого порядку у підрозділі 2.4. Після цього ми доводимо у підрозділі 2.5, що $\Delta_R f(X,Y)(Z)$ і $\Delta_L f(X,Y)(Z)$ інваріантні щодо прямих сум і подібностей у X і Y (в термінології розділу 3, $\Delta_R f$ і $\Delta_L f$ - н.к. функції порядку 1). Ми закінчуємо розділ 2 обговоренням у підрозділі 2.6 напрямкових і (в спеціальному випадку $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$) часткових н.к. різницево-диференціальних операторів.

У розділі 3 ми спочатку вводимо н.к. функції вищого порядку, а потім поширюємо різницево-диференціальне числення на ці функції, що веде до числення вищого порядку для звичайних н.к. функцій і н.к. функцій вищого порядку. У підрозділі 3.1 ми визначаємо н.к. функції порядку k і вводимо класи $\mathcal{T}^k$ цих функцій (так, що оригінальні н.к. функції належать класу $\mathcal{T}^0$). Значення н.к. функцій порядку k - k-лінійні відображення матриць над модулями, які можуть також бути інтерпретовані як елементи тензорних добутків $k+1$ матричних модулів (зауваження 3.4 і 3.5). Це дозволяє нам визначити натуральне відображення $\mathcal{T}^k \otimes \mathcal{T}^\ell \to \mathcal{T}^{k+\ell+1}$, $k, \ell = 0, 1, \ldots$, і отже – відображення з тензорного добутку $k+1$ класів $\mathcal{T}^0$ (можливо, над різними операторними просторами) у $\mathcal{T}^k$ (зауваження 3.6) і інтерпретувати н.к. функцію вищого порядку у термінах н.к. функцій порядку 0. Ми далі поширюємо у підрозділі 3.2 правий різницево-диференціальний

оператор Δ_R до відображення класів $\mathcal{T}^k \to \mathcal{T}^{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$. У цьому означенні останній аргумент $f(X^0, \ldots, X^k)$, де f - н.к. функція порядку k, взятий у вигляді блочної матриці $X^k = \left[\begin{smallmatrix} X^{k\prime} & Z \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{smallmatrix}\right]$, і далі ми беремо правий верхній кутовий блок матричного значення. Поширений оператор Δ_R є також лінійним як функція Z (пропозиції 3.8 і 3.9). Починаючи з цього моменту, ми концентруємось на правій версії числення, тому що ліва версія може бути розвинута аналогічно або просто отримана з правої за симетрією.

Ітерований оператор $\Delta_R^\ell \colon \mathcal{T}^k \to \mathcal{T}^{k+\ell}$ може також бути обчислений безпосередньо, обчислюючи н.к. функцію на блочних верхньо-двохдіагональних матрицях і потім беручи верхній правий кутовий блок її матричного значення (теореми 3.11 і 3.12). Означення поширеного оператора Δ_R стає більш прозорим, коли ми інтерпретуємо н.к. функції вищого порядку використовуючи тензорні добутки н.к. функцій порядку 0 (зауваження 3.17).

Ми можемо також взяти X^j в $f(X^0, \ldots, X^k)$ у блочній верхньо-трикутній формі, що веде до операторів ${}_j\Delta_R \colon \mathcal{T}^k \to \mathcal{T}^{k+1}$, $j = 0, 1, \ldots$ (так що $\Delta_R = {}_k\Delta_R$), що також поширює оригінальний оператор $\Delta_R \colon \mathcal{T}^0 \to \mathcal{T}^1$ (зауваження 3.18). У підрозділі 3.3 ми встановлюємо різницеві формули першого порядку для н.к. функцій вищого порядку (теорема 3.19) і її узагальнену версію для випадку матриць X і Y, на яких ми обчислюємо н.к. функцію вищого порядку, можливо різних розмірів (теорема 3.20). Подібні формули вірні також для операторів ${}_j\Delta_R$ (зауваження 3.22).

У підрозділі 3.4 ми показуємо, що для н.к. функції $f \in \mathcal{T}^k$, яка k разів інтегровна, тобто може бути представлена як $\Delta_R^k g$, з $g \in \mathcal{T}^0$, маємо ${}_i\Delta_R\, {}_j\Delta_R f = {}_j\Delta_R\, {}_i\Delta_R f$ для всіх $i, j = 0, \ldots, k$. Нарешті, ми обговорюємо у підрозділі 3.5 н.к. напрямкові різницево-диференціальні оператори вищого порядку; зокрема, коли модуль, що розглядається, є $\mathcal{R}^d$, ми обговорюємо н.к. часткові різницево-диференціальні оператори вищого порядку Δ_R^w, $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$.

У розділі 4 ми встановлюємо формулу Тейлора–Тейлора (теорема 4.1 або більш загальна теорема 4.2; у випадку $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$ – наслідок 4.4 і, в інтерпретації тензорного добутку для $\Delta_R^{w^\top} f$, теорема 4.6). Ми показуємо у зауваженні 4.3, що коефіцієнти у ТТ формулі, мультілінійні відображення $f_\ell = \Delta_R f(Y, \ldots, Y)$, $\ell = 0, 1, \ldots$, задовольняють умови (0.15)–(0.18), які ми згадували у підрозділі 0.2. Відповідні до цих умов для послідовності $f_w = \Delta_R^{w^\top} f(Y, \ldots, Y)$, $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$, у випадку $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$ встановлені у зауваженні 4.5.

Як перше застосування ТТ формули, ми описуємо у розділі 5 н.к. функції на множині $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M})$ (або, загальніше, на $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}; Y)$) нільпотентних матриць (або нільпотентних матриць навколо Y) над модулем $\mathcal{M}$ – дивись підрозділ 0.2.1 щодо означення. У підрозділі 5.1 ми показуємо, що кожна така н.к. функція - це сума її ТТ ряду (теореми 5.2, 5.4, 5.6 і 5.8). Після цього ми показуємо, що коефіцієнти н.к. степеневого ряду, що представляє н.к. фунцію, однозначно визначені. Фактично, цей ряд єдиний і співпадає з відповідним ТТ рядом (теореми 5.9 і 5.10). У підрозділі 5.2 ми показуємо, що, навпаки, якщо дана послідовність мультілінійних відображень $f_\ell \colon \left(\mathcal{M}^{s\times s}\right)^\ell \to \mathcal{N}^{s\times s}$, $\ell = 0, 1, \ldots$, що задовольняють умови

(0.15)–(0.18), то сума н.к. степеневого ряду $\sum_{\ell=0}^{\infty}(X-\bigoplus_{\alpha=1}^{m}Y)^{\odot_s\ell}f_\ell$ є н.к. функцією на $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M};Y)$ із значеннями у $\mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ (теорема 5.13), і також вірна версія цього результату, теорема 5.15 для випадку $\mathcal{M}=\mathcal{R}^d$ і послідовності мультілінійних відображень $f_w\colon\ (\mathcal{M}^{s\times s})^\ell\to\mathcal{N}^{s\times s}$, $w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$, що задовольняють умови, аналогічні (0.15)–(0.18). Ці результати алгебраїчні за їх природою, бо сума відповідного ряду скінченна у кожній точці $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M};Y)$.

У розділі 6, ми даємо кілька інших алгебраїчних застосувань ТТ формули. Ми доводимо, що н.к. функція на $(\mathbb{K}^d)_{\mathrm{nc}}$, з нескінченним полем $\mathbb{K}$, яка є многочленом від матричних елементів, коли вона обчислюється на $n\times n$ матрицях, $n=1,2,\ldots$, обмеженого ступеню, є необхідно н.к. многочленом (теорема 6.1). Умова обмеженості степенів - істотна і не може бути опущена (приклад 6.3). Проте, якщо ми не вимагаємо цієї умови, то наступне вірно: довільна н.к. функція на $(\mathbb{K}^d)_{\mathrm{nc}}$, що є многочленом ступеню M_n від матричних елементів, коли вона обчислюється на $n\times n$ матрицях, - це сума н.к. многочлена і нескінченного ряду однорідних многочленів f_j, що зникають на всіх наборах $n\times n$ матриць для $j>M_n$ (теорема 6.4). Ми також отримаємо узагальнення теореми 6.1 до н.к. функцій на (набагато більш загальних) н.к. просторах, які є многочленами на зрізах (теорема 6.8).

У розділі 7 ми вивчаємо аналітичні н.к. функції і збіжність їх ТТ рядів. Ми розглядаємо три різних топології на н.к. просторі $\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ (над комплексним векторним простором $\mathcal{V}$), чи три типа збіжності н.к. степеневих рядів, і, відповідно, три типу аналітичності н.к. функцій: скінченно-відкриту топологію і аналітичність на зрізах, топологію норми і аналітичність на $n\times n$ матрицях над $\mathcal{V}$ для кожного $n=1,2,\ldots$, і рівномірно-відкриту топологію і рівномірну (за n) аналітичність. Головна особливість аналітичних н.к. функцій, встановлена у розділі 7, - це що локальна обмеженість тягне за собою аналітичність, у кожному з трьох налаштувань. В першій частині підрозділу 7.1 ми вводимо скінченно-відкриту топологію на $\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ і доводимо, що н.к. функція, яка є локально обмеженою на зрізах, - аналітична на зрізах і обговорюємо збіжність відповідного ТТ ряду (теорема 7.2). У другій частині підрозділу 7.1 ми показуємо, що н.к. функція, яка є локально обмеженою (відносно топології норми на $\mathcal{V}^{n\times n}$, для кожного n), - аналітична, з ТТ рядом, що збігається рівномірно і абсолютно на певних відкритих повних кругових н.к. множинах навколо центру $Y\in\Omega_s$ (теорема 7.4) або на відкритих кулях з центром у Y (наслідок 7.5). Ми також встановлюємо єдиність розвинень у н.к. степеневий ряд, у обох топологіях, описаних вище (теорема 7.9). У підрозділі 7.2 ми вводимо і вивчаємо рівномірно-відкриту топологію на н.к. просторі $\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ над операторним простором $\mathcal{V}$. У підрозділі 7.3 ми показуємо, що рівномірно локально обмежена н.к. функція є рівномірно аналітичною, і її ТТ ряд збігається рівномірно і абсолютно на певних рівномірно-відкритих повних кругових н.к. множинах навколо Y (теорема 7.21), або на певних рівномірно-відкритих матрично кругових н.к. множинах (теорема 7.23), або на рівномірно-відкритих н.к. кулях (наслідок 7.26). Ми також доводимо версію цього результату для випадку $\mathcal{V}=\mathbb{C}^d$ і ТТ ряду збіжного уздовж $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ (теорема 7.29 і наслідок 7.31). У підрозділі 7.4 ми

вводимо і вивчаємо аналітичні н.к. функції вищого порядку, також у трьох різних топологіях. Головні результати тут аналогічні результатам у підрозділах 7.1 і 7.3.

У розділі 8 ми вивчаємо збіжність н.к. степеневого ряду у трьох різних топологіях, як у розділі 7, до (аналітичної у відповідному сенсі) н.к. функції. Результати тут зворотні до результатів підрозділів 7.1 і 7.3. Ми обговорюємо збіжність н.к. степеневих рядів у скінченно-відкритій топології (відп., у топології норми і у рівномірно-відкритій топології) у підрозділі 8.1 (відп., 8.2 і 8.3). В кожній топології ми даємо оцінки для радіусів збіжності типу Коші–Адамара і точні оцінки для розміру областей збіжності різної форми. Ми також характеризуємо максимальні н.к. множини, де сума ряду - аналітична на зрізах (відп., аналітична і рівномірно аналітична) н.к. функція і даємо багато прикладів ілюструючих різниці між різними типами областей збіжності.

У розділі 9 ми визначаємо і вивчаємо так звані розширення на доданки прямих сум для н.к. множин і н.к. функцій [**97**]. Якщо н.к. множина Ω - інваріантна щодо подібностей, то можливо розширити Ω до більшої н.к. множини, $\Omega_{\text{d.s.e.}}$, яка містить, разом з матрицею, що розкладається у пряму суму матриць, кожний прямий доданок у цьому розкладанні. Це поширення зберігає багато властивостей Ω (пропозиція 9.1). Ми далі можемо розширити н.к. функцію f на Ω до н.к. функції $f_{\text{d.s.e.}}$ на $\Omega_{\text{d.s.e.}}$, що спадкує більшість важливих властивостей f, зокрема, аналітичність (пропозиція 9.2). Подібним чином, ми визначаємо і встановлюємо властивості розширень на доданки прямих сум для н.к. функцій вищого порядку (пропозиція 9.3). Ми також визначаємо і вивчаємо розширення на доданки прямих сум для послідовностей f_ℓ, $\ell = 0, 1, \ldots$ (відп., f_w, $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$) мільтілінійних відображень, що задовольняють умови (0.15)–(0.18) (відп., їх аналоги у випадку $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$) у пропозиції 9.4 (відп., у пропозиції 9.6).

Як ми згадували у підрозділі 0.2, нам потрібно, щоб н.к. множина Ω була допустимою справа (зліва) для того, щоб визначити праві (ліві) різницево-диференціальні оператори через обчислення н.к. функцій f на Ω в точках, що є блочними верхньо- (нижньо-) трикутними матрицями. Проте, для (скажімо, верхньо-) блочно-трикутної матриці $\left[\begin{smallmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{smallmatrix}\right]$ нам потрібно масштабувати Z, так, щоб $\left[\begin{smallmatrix} X & rZ \\ 0 & Y \end{smallmatrix}\right] \in \Omega$. Тоді ми можемо визначити $\Delta_R f(X, Y)(rZ)$ і поширити це означення на довільні Z за лінійністю $\Delta_R f(X, Y)(\cdot)$. Хоча властивості Δ_R (Δ_L) й можуть бути встановлені використанням цих масштабувань, це створює громіздкі технічні труднощі у доведеннях. Щоб обійти ці технічні труднощі, ми визначаємо так званий подібностно-інваріантний конверт $\widetilde{\Omega}$ н.к. множини Ω, що є найменшою н.к. множиною, що містить Ω і є інваріантною щодо подібностей. Тоді виявляється, що $\widetilde{\Omega}$ - також інваріантне щодо формування блочно-трикутних матриць (пропозиція 10.2). Наш наступний крок - розширити н.к. функцію f на Ω до н.к. функції $\widetilde{f}$ на $\widetilde{\Omega}$. Таке поширення - єдине (пропозиція 10.3). Подібне поширення будується для н.к. функцій вищого порядку (пропозиція 10.5). Виявляється, що $(\Delta_R \widetilde{f})|_{\Omega\times\Omega} = \Delta_R f$ (зауваження 2.5), що дозволяє нам довести різні твердження про різницево-диференціальні оператори скрізь рукопис, припускаючи, без втрати загальності, що дана н.к. множина Ω є подібностно інваріантна. Результати

про подібностно інваріантні конверти і відповідні розширення н.к. функцій представленні у розділі 10, який міститься у [**97**, Appendix A], написаному у співпраці з Шибанандою Бісвасом.

Розділ 1

Різні результати для спеціальних типів н.к. функцій

У цьому розділі ми розглядаємо різні результати здобувача, що стали джерелом методів і натхненням для побудови загальної теорії н.к. функцій, яку ми розробляємо в подальших розділах.

1.1. Матричнозначні н.к. раціональні функції і їх сингулярності

Ми поширюємо тут означення н.к. раціональних функцій з підрозділу 0.1 до матричнозначного випадку (дивись [**98**]). Наш підхід використовує раціональні вирази і обчислення на матрицях усіх розмірів. Ми також приділяємо увагу до областей регулярності і вбудовуємо їх у наші означення.

Нехай $T = (T_1, \dots, T_d)$ - набір $n \times n$ *загальних матриць*, тобто елементи $(T_i)_{jk}$, $i = 1, \dots, d$; $j, k = 1, \dots, n$, - це dn^2 комутуючих невизначених. Для $P = \sum_{w \in \mathcal{G}_d} x^w P_w \in \mathbb{K}^{p\times q}\langle x_1, \dots, x_d\rangle$ (де $P_w \in \mathbb{K}^{p\times q}$ і сума має тільки скінченну кількість ненульових членів), ми визначаємо

$$P_n = \sum_{w \in \mathcal{G}_d} T^w \otimes P_w \in \mathbb{K}^{np\times nq}[(T_i)_{jk} \colon i = 1, \dots, d;\ j, k = 1, \dots, n] \tag{1.1}$$

(тобто P_n - це $np \times nq$ матричнозначний многочлен від комутуючих невизначених $((T_i)_{jk})$). Ми також обчислюємо матричнозначні н.к. многочлени на наборах матриць над полем $\mathbb{K}$, як у (0.3). Ми зараз визначаємо рекурсивно $p \times q$ *матричнозначний н.к. раціональний вираз* R, його *область регулярності* $\operatorname{dom} R = \coprod_{n=1}^{\infty} \operatorname{dom}_n R$, де $\operatorname{dom}_n R$ - відкрита за Заріським підмножина у $(\mathbb{K}^{n\times n})^d$, і її *обчислення на загальних матрицях*

$$R_n \in \mathbb{K}^{np\times nq}((T_i)_{jk} \colon i = 1, \dots, d;\ j, k = 1, \dots, n)$$

для $n \in \mathcal{N}_R$, де $\mathcal{N}_R$ - непуста підпівгрупа у $\mathbb{N}$. Ми також визначаємо обчислення $R(X) \in \mathbb{K}^{np\times nq}$ для $X = (X_1, \dots, X_d) \in \operatorname{dom}_n R$.

Означення 1.1. (1) Н.к. многочлен $P \in \mathbb{K}^{p\times q}\langle x_1, \dots, x_d\rangle$ - це $p \times q$ матричнозначний н.к. раціональний вираз з $\operatorname{dom} P = \coprod_{n=1}^{\infty} (\mathbb{K}^{n\times n})^d$, $\mathcal{N}_P = \mathbb{N}$, і його обчислення визначені як (1.1) і (0.3).

(2) Якщо R_1 і R_2 - $p \times q$ матричнозначні н.к. раціональні вирази, то $R_1 + R_2$ - також $p \times q$ матричнозначний н.к. раціональний вираз, $\operatorname{dom}(R_1 + R_2) = \operatorname{dom} R_1 \cap \operatorname{dom} R_2$, $\mathcal{N}_R = \mathcal{N}_{R_1} \cap \mathcal{N}_{R_2}$, і його обчислення дані як

$$(R_1 + R_2)_n = (R_1)_n + (R_2)_n,$$

$$(R_1 + R_2)(X) = R_1(X) + R_2(X).$$

(3) Якщо R_1 - $p \times q$ матричнозначний н.к. раціональний вираз і R_2 - $q \times r$ матричнозначний н.к. раціональний вираз, то $R_1 R_2$ - $p \times r$ матричнозначний н.к. раціональний вираз, $\operatorname{dom}(R_1 R_2) = \operatorname{dom} R_1 \cap \operatorname{dom} R_2$, $\mathcal{N}_R = \mathcal{N}_{R_1} \cap \mathcal{N}_{R_2}$ і його обчислення дані як

$$(R_1 R_2)_n = (R_1)_n (R_2)_n,$$

$$(R_1 R_2)(X) = R_1(X) R_2(X).$$

(4) Якщо R - $p \times p$ матричнозначний н.к. раціональний вираз і $\det R_n \in \mathbb{K}((T_i)_{jk})$ ненульовий для деякого $n \in \mathcal{N}_R$, то R^{-1} - $p \times p$ матричнозначний н.к. раціональний вираз,

$$\operatorname{dom} R^{-1} = \{X \in \operatorname{dom} R \colon \det R(X) \neq 0\},$$
$$\mathcal{N}_{R^{-1}} = \{n \in \mathcal{N}_R \colon \det R_n \neq 0\},$$

і

$$(R^{-1})_n = (R_n)^{-1},$$
$$R^{-1}(X) = R(X)^{-1}.$$

(5) Якщо R_{ab}, $a = 1, \ldots, p_2$, $b = 1, \ldots, q_2$, - $p_1 \times q_1$ матричнозначні н.к. раціональні вирази, то $R = [R_{ab}]_{a=1,\ldots,p_2;\, b=1,\ldots,q_2}$ - $p_1 p_2 \times q_1 q_2$ матричнозначний н.к. раціональний вираз,

$$\operatorname{dom} R = \bigcap_{a=1,\ldots,p_2;\, b=1,\ldots,q_2} \operatorname{dom} R_{ab},$$
$$\mathcal{N}_R = \bigcap_{a,b} \mathcal{N}_{R_{ab}},$$

і

$$R_n = [(R_{ab})_n]_{a=1,\ldots,p_2;\, b=1,\ldots,q_2},$$
$$R(X) = [R_{ab}(X)]_{a=1,\ldots,p_2;\, b=1,\ldots,q_2}.$$

Ясно, що $\operatorname{dom}_n R = \emptyset$ для $n \notin \mathcal{N}_R$ і що якщо поле $\mathbb{K}$ - нескінченне (так що перетин непустих відкритих за Заріським множин - непустий), то $\operatorname{dom}_n R \neq \emptyset$ для $n \in \mathcal{N}_R$.

Також ясно, що область регулярності[1] раціональної матричнозначної функції R_n від комутуючих невизначених $((T_i)_{jk})$ містить $\operatorname{dom}_n R$ (і $R(X) = R_n(X) \in \mathbb{K}^{np \times nq}$ для $X \in \operatorname{dom}_n R$). Ми визначаємо *розширену область регулярності* R, $\operatorname{edom} R = \coprod_{n=1}^{\infty} \operatorname{edom}_n R$, де $\operatorname{edom}_n R \subseteq (\mathbb{K}^{n \times n})^d$ - область регулярності раціональної матричнозначної функції R_n (ми покладаємо $\operatorname{edom}_n R = \emptyset$ для $n \notin \mathcal{N}_R$).

[1]Область регулярності раціональної матричнозначної функції комутуючих невизначених визначається як перетин областей регулярності її матричних елементів. Область регулярності скалярної раціональної функції - це доповнення множини нулів її знаменника у взаємно-простому дробовому зображенні.

Зауваження 1.2. З означення 1.1 безпосередньо випливає, що н.к. раціональні вирази є інваріантними щодо прямих сум і спільних подібностей. А саме, якщо R - $p \times q$ матричнозначний раціональний вираз, $X' = (X'_1, \dots, X'_d) \in \operatorname{dom}_{n'}(R)$ і $X'' = (X''_1, \dots, X''_d) \in \operatorname{dom}_{n''}(R)$, то $X' \oplus X'' \in \operatorname{dom}_{n'+n''}(R)$ і

$$R(X' \oplus X'') = R(X') \oplus R(X''), \tag{1.2}$$

де $X' \oplus X'' = (X'_1 \oplus X''_1, \dots, X'_d \oplus X''_d)$; якщо $X = (X_1, \dots, X_d) \in \operatorname{dom}_n(R)$ і матриця $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ - неособлива, то $SXS^{-1} = (SX_1S^{-1}, \dots, SX_dS^{-1}) \in \operatorname{dom}_n(R)$ і

$$R(SXS^{-1}) = (S \otimes I_p)R(X)(S^{-1} \otimes I_q). \tag{1.3}$$

Як показав Ю. Волчич у [**156**], розширена область регулярності матричнозначної н.к. раціональної функції - інваріантна щодо спільних подібностей, але взагалі не є інваріантною щодо прямих сум. Він запропонував розглядати так звану *стабільну розширену область регулярності*, $\operatorname{edom}^{\mathrm{st}} R = \coprod_{n=1}^{\infty} \operatorname{edom}_n^{\mathrm{st}} R$, яка вже інваріантна як щодо спільних подібностей, так і щодо прямих сум, таким чином:

$$\operatorname{edom}_n^{\mathrm{st}} R := \{X \in \operatorname{edom}_n R \colon I_\ell \otimes X \in \operatorname{edom}_n R \ \text{ для всіх } \ell \in \mathbb{N}\}.$$

Легко побачити, що $\operatorname{dom} R \subseteq \operatorname{edom}^{\mathrm{st}} R \subseteq \operatorname{edom} R$.

Ми зараз визначаємо матричнозначну н.к. раціональну функцію шляхом введення відношення еквівалентності на основі обчислень матричнозначних н.к. раціональних виразів.

Означення 1.3. Два $p \times q$ матричнозначні н.к. раціональні вирази R_1 і R_2 називаються еквівалентними, якщо $(R_1)_n = (R_2)_n$ для всіх $n \in \mathcal{N}_{R_1} \cap \mathcal{N}_{R_2}$. $p \times q$ матричнозначна н.к. раціональна функція $\mathfrak{R}$ - це клас еквівалентності $p \times q$ матричнозначних н.к. раціональних виразів.

Також ясно, що якщо R_1 і R_2 еквівалентні, то $R_1(X) = R_2(X)$ для всіх $X \in \operatorname{dom} R_1 \cap \operatorname{dom} R_2$.

Приклад 1.4. (1) 1×1 раціональні вирази $r_1 = 0$ і $r_2 = 0 \cdot (x_1x_2 - x_2x_1)^{-1}$ еквівалентні, $\mathcal{N}_{r_1} = \mathbb{N}$, $\mathcal{N}_{r_2} = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ і $\operatorname{dom} r_1 = \coprod_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{K}^{n \times n})^2$, $\operatorname{dom} r_2 = \{X = (X_1, X_2) : \ \det(X_1X_2 - X_2X_1) \neq 0\}$.

(2) 1×1 раціональні вирази $r_1 = x_1x_2(x_1x_2 - x_2x_1)^{-1}$ і $r_2 = 1 + x_2x_1(x_1x_2 - x_2x_1)^{-1}$ еквівалентні, $\mathcal{N}_{r_1} = \mathcal{N}_{r_2} = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ і $\operatorname{dom} r_1 = \operatorname{dom} r_2 = \{X = (X_1, X_2) : \ \det(X_1X_2 - X_2X_1) \neq 0\}$.

(3) Користуючись стандартним розрахунком з доповненням Шура, ми можемо виявити, що 1×1 раціональні вирази

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - x_1 & -x_2 \\ -x_2 & 1 - x_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$r_2 = (1 - x_1 - x_2(1 - x_1)^{-1}x_2)^{-1}$$

і

$$r_3 = -x_2^{-1}(1 - x_1)(x_2 - (1 - x_1)x_2^{-1}(1 - x_1))^{-1}$$

еквівалентні, і ми маємо $\mathcal{N}_{r_1} = \mathcal{N}_{r_2} = \mathcal{N}_{r_3} = \mathbb{N}$, проте

$$\operatorname{dom} r_1 = \left\{ X = (X_1, X_2) : \det \begin{bmatrix} 1 - X_1 & -X_2 \\ -X_2 & 1 - X_1 \end{bmatrix} \neq 0 \right\},$$

$$\operatorname{dom} r_2 = \{X = (X_1, X_2) : \det(1 - X_1) \neq 0,\ \det(1 - X_1 - X_2(1 - X_1)^{-1}X_2) \neq 0\},$$
$$\operatorname{dom} r_3 = \{X = (X_1, X_2) :\ \det(X_2) \neq 0,\ \det(X_2 - (1 - X_1)X_2^{-1}(1 - X_1)) \neq 0\}.$$

Ми будемо позначати матричнозначні н.к. раціональні вирази римськими літерами, а матричнозначні н.к. раціональні функції готичними літерами.

Для $p \times q$ матричнозначної н.к. раціональної функції $\mathfrak{R}$, ми визначаємо $\mathcal{N}_{\mathfrak{R}} = \bigcup_{R \in \mathfrak{R}} \mathcal{N}_R$ і *розширену область регулярності* $\mathfrak{R}$, $\operatorname{edom} \mathfrak{R} = \coprod_{n=1}^{\infty} \operatorname{edom}_n \mathfrak{R}$, де $\operatorname{edom}_n \mathfrak{R} = \emptyset$ для $n \notin \mathcal{N}_{\mathfrak{R}}$ і $\operatorname{edom}_n \mathfrak{R} = \operatorname{edom}_n R$ для $n \in \mathcal{N}_{\mathfrak{R}}$ і для будь-якого $R \in \mathfrak{R}$ таких, що $n \in \mathcal{N}_R$; зауважимо, що за означенням 1.3, $\operatorname{edom}_n R$ не залежить від вибору R. Таким самим чином [**156**] можна визначити *стабільну розширену область регулярності* $\mathfrak{R}$, $\operatorname{edom}^{\mathrm{st}} \mathfrak{R} := \coprod_{n=1}^{\infty} \operatorname{edom}_n^{\mathrm{st}} \mathfrak{R}$. Ми також визначаємо *обчислення* $\mathfrak{R}$ *на загальних матрицях*

$$\mathfrak{R}_n \in \mathbb{K}^{np \times nq}((T_i)_{jk} \colon i = 1, \ldots, d;\ j, k = 1, \ldots, n)$$

як $\mathfrak{R}_n = R_n$. Ми визначаємо *область регулярності* $\mathfrak{R}$, $\operatorname{dom} \mathfrak{R} = \coprod_{n=1}^{\infty} \operatorname{dom}_n \mathfrak{R}$, де $\operatorname{dom}_n \mathfrak{R} = \bigcup_{R \in \mathfrak{R}} \operatorname{dom}_n R$; ми також визначаємо $\mathfrak{R}(X) = R(X) \in \mathbb{K}^{np \times nq}$ для $X \in \operatorname{dom}_n \mathfrak{R}$ і будь-якого $R \in \mathfrak{R}$ з $X \in \operatorname{dom}_n R$.

Добре відомо, що сингулярності функцій однієї змінної можуть бути вивчені за допомогою їх реалізацій лінійними системами. Зокрема, фундаментальним фактом є те, що сингулярності матричнозначної раціональної функції однієї змінної співпадають з сингулярностями резольвенти у її мінімальній реалізації. Дивись, наприклад, [**23**]. Точніше, будь-яка $p \times q$ матриця R раціональних функцій змінної x над полем $\mathbb{K}$ (іншими словами, матричнозначна раціональна функція R), що регулярна в точці 0, допускає зображення

$$R = D + C(I_m - xA)^{-1}xB \tag{1.4}$$

для якогось m, з $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{K}^{m \times q}, C \in \mathbb{K}^{p \times m}, D \in \mathbb{K}^{p \times q}$. Таке зображення називається *реалізацією з простором станів*, тому що воно виражає R як *передавальну функцію* лінійної стаціонарної системи вхід-стан-вихід з *простором станів* $\mathbb{K}^m$, *простором входів* $\mathbb{K}^q$ і *простором виходів* $\mathbb{K}^p$. Реалізація (1.4) називається *мінімальною*, якщо вимірність m простору станів - мінімальна можлива, або еквівалентно, якщо реалізація *керована*:

$$\operatorname*{span}_{n \geq 0} \operatorname{ran} A^n B = \mathbb{K}^m, \tag{1.5}$$

і *спостережувана*:

$$\bigcap_{n\geq 0} \ker CA^n = \{0\}. \tag{1.6}$$

Мінімальна реалізація єдина з точністю до ізоморфізму простору станів. Твердження про сингулярності, на яке було натякнуте вище, каже, що *область регулярності R (визначене як перетин областей регулярності матричних елементів R),* $\operatorname{dom} R$*, співпадає з множиною*

$$\{\mathrm{X} \in \mathbb{K}\colon \det(I_m - \mathrm{X}\, A) \neq 0\}. \tag{1.7}$$

Ми зараз узагальнюємо цей результат до налаштування н.к. раціональних функцій. Більш того, як застосування н.к. результату, ми одержимо його комутативний аналог у налаштуванні матричнозначних раіональних функцій кількох комутуючих невизначених. Зокрема, як в н.к., так і в комутативному випадку многовид сингулярностей матричнозначної раціональної функції допускає лінійне детермінантне зображення, порівняй з [**85**, Section 14] і посиланнями там.

Сформулюємо зараз наш головний результат про сингулярності [**98**].

Теорема 1.5. *Нехай $\mathfrak{R}$ - $p \times q$ матричнозначна н.к. раціональна функція, зображена виразом*

$$R = D(x) + C(x)(I_m - x_1A_1 - \cdots - x_dA_d)^{-1}B(x) \tag{1.8}$$

для якогось m, де $A_k \in \mathbb{K}^{m\times m}$, $k = 1, \ldots, d$, $B(x) = \sum_{|w|=l_B} x^w B_w$ і$C(x) = \sum_{|w|=l_C} x^w C_w$ - однорідні н.к. многочлени з коефіцієнтами $B_w \in \mathbb{K}^{m\times q}$, $C_w \in \mathbb{K}^{p\times m}$, і $D(x)$ - н.к. многочлен з коефіцієнтами у $\mathbb{K}^{p\times q}$. Припустимо, що

$$\operatorname*{span}_{v,w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d,\ |w|=l_B} \operatorname{ran} A^v B_w = \mathbb{K}^m, \tag{1.9}$$

$$\bigcap_{v,w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d,\ |w|=l_C} C_w A^v = \{0\}. \tag{1.10}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \operatorname{edom}^{\mathrm{st}} \mathfrak{R} &= \operatorname{dom} \mathfrak{R} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ X \in \left(\mathbb{K}^{n\times n}\right)^d : \det(I_n \otimes I_m - X_1 \otimes A_1 - \cdots - X_d \otimes A_d) \neq 0 \right\}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Зауваження 1.6. Зауважимо тут, що в оригінальному формулюванні цієї теореми у [**98**] ліва частина (1.11) містила $\operatorname{edom} \mathfrak{R}$ замість $\operatorname{edom}^{\mathrm{st}} \mathfrak{R}$. Але у такій формі перше з рівнянь (1.11) не є завжди вірним. Розрив у доведенні був у тому, що використовувалась інваріантність $\operatorname{edom} \mathfrak{R}$ щодо прямих сум, що не є вірним [**156**]. Але заміна $\operatorname{edom} \mathfrak{R}$ на $\operatorname{edom}^{\mathrm{st}} \mathfrak{R}$, як показано у [**156**], дозволяє виправити цю теорему, використовуючи такий самий аргумент у доведенні.

Зауваження 1.7. Зображення (1.8) має дуже загальний вигляд реалізаційної формули. Степень н.к. многочлена $D(x)$ звичайно не перевищує $l_B + l_C$; проте, це не є важливим для теореми 1.5. Перелічимо найважливіші спеціальні випадки, де теорема 1.5 може бути застосована:

- $l_B = l_C = 0,\ D(x) = 0$ – реалізація впізнаваними рядами [**103, 138, 139, 60, 61, 39**];
- $l_B = 1,\ l_C = 0$, $D(x)$ - стала матриця – н.к. реалізація Форнасіні–Маркесіні [**24**] (дивись у [**57, 58**] оригінальну комутативну версію);
- $l_B = l_C = 1,\ D(x) = x_1 D_1 + \cdots + x_d D_d$ – н.к. реалізація Калюжного-Вербовецького [**27**] (дивись у [**93**] оригінальну комутативну версію);
- $l_B = l_C = 1,\ D(x)$ - н.к. многочлен другого степеню – чиста реалізація "метелика"[**85**].

Зображення (1.8) називається *керованим* (відп., *спостережуваним*), якщо (1.9) (відп., (1.10)) має місце, і *мінімальним*, якщо воно є керованим і спостережуваним. Зауважимо, що у всіх спеціальних випадках, згаданих вище, ці означення співпадають з оригінальними. З другого боку, хоча структурні н.к. реалізації з [**24, 26, 25**] мають також вигляд (1.8), означення керованості і спостережуваності для цих реалізацій відрізняється від даного вище, і аналог теореми 1.5 може бути невірним.

Ключову роль у доведенні грають операції лівих і правих н.к. зсувів назад, які ми вводимо наступним чином. Ми спочатку визначаємо рекурсивно ліві зсуви назад $\mathcal{L}_j(R)$, $j = 1, \ldots, d$, для матричнозначного н.к. раціонального виразу R, регулярного у точці 0.

Означення 1.8. (1) Для матричнозначного н.к. многочлена

$$P \in \mathbb{K}^{p\times q}\langle x_1, \ldots, x_d\rangle, \qquad P(x) = \sum_{w\in\mathcal{G}_d} x^w P_w,$$

покладемо

$$\mathcal{L}_j(P) = \sum_{w\in\mathcal{G}_d} x^w P_{g_j w} \in \mathbb{K}^{p\times q}\langle x_1, \ldots, x_d\rangle. \tag{1.12}$$

(2) Якщо R_1 і R_2 - $p \times q$ матричнозначні н.к. раціональні вирази, які обидва регулярні у 0, то

$$\mathcal{L}_j(R_1 + R_2) = \mathcal{L}_j(R_1) + \mathcal{L}_j(R_2). \tag{1.13}$$

(3) Якщо R_1 - $p \times q$ матричнозначний н.к. раціональний вираз і R_2 - $q \times r$ матричнозначний н.к. раціональний вираз, і обидва R_1 і R_2 регулярні у 0, то

$$\mathcal{L}_j(R_1 R_2) = \mathcal{L}_j(R_1) R_2 + R_1(0)\mathcal{L}_j(R_2). \tag{1.14}$$

(4) Якщо R - $p \times p$ матричнозначний н.к. раціональний вираз, регулярний у 0 і $\det R(0) \neq 0$, то

$$\mathcal{L}_j(R^{-1}) = -R(0)^{-1}\mathcal{L}_j(R)R^{-1}. \tag{1.15}$$

(5) Якщо R_{ab}, $a = 1, \dots, p_2$, $b = 1, \dots, q_2$ - $p_1 \times q_1$ матричнозначні н.к. раціональні вирази, які всі є регулярними у 0, і $R = [R_{ab}]_{a=1,\dots,p_2;\, b=1,\dots,q_2}$, то $\mathcal{L}_j(R) = [(\mathcal{L}_j(R))_{ab}]_{a=1,\dots,p_2;\, b=1,\dots,q_2}$,

$$(\mathcal{L}_j(R))_{ab} = \mathcal{L}_j(R_{ab}). \tag{1.16}$$

Ясно, що $\mathcal{L}_j(R)$ - це матричнозначний н.к. раціональний вираз із $\operatorname{dom}\mathcal{L}_j(R) = \operatorname{dom} R$. Виявляється, що $\operatorname{edom}^{\mathrm{st}}\mathcal{L}_j(R) \supseteq \operatorname{edom}^{\mathrm{st}} R$, як наслідок наступного ключового факту про ліві зсуви назад (доведення - не важке, і ми його опускаємо).

Теорема 1.9. *Нехай R - $p \times q$ матричнозначний н.к. раціональний вираз, регулярний у 0. Нехай $X \in \operatorname{dom}_n R$, і нехай $W = (W_1, \dots, W_d) \in (\mathbb{K}^{1\times n})^d$. Тоді*

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ W & 0 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ W_1 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} X_d & 0 \\ W_d & 0 \end{bmatrix} \right) \in \operatorname{dom}_{n+1} R$$

і

$$R\left(\begin{bmatrix} X & 0 \\ W & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} R(X) & 0 \\ \sum_{j=1}^{d} (W_j \otimes I_p)\mathcal{L}_j(R)(X) & R(0) \end{bmatrix}. \tag{1.17}$$

Наслідок 1.10. *Якщо R_1 і R_2 - два еквівалентних матричнозначних раціональних вирази, які обидва регулярні у 0, то $\mathcal{L}_j(R_1)$ і $\mathcal{L}_j(R_2)$ - також еквівалентні.*

Наслідок 1.10 дозволяє нам визначити ліві зсуви назад $\mathcal{L}_j\mathfrak{R}$ для матричнозначної н.к. раціональної функції $\mathfrak{R}$, регулярної у 0: $\mathcal{L}_j\mathfrak{R}$ - це клас еквівалентності $\mathcal{L}_j(R)$ для будь-якого $R \in \mathfrak{R}$, що є регулярним у 0. Ми маємо

$$\operatorname{dom}\mathcal{L}_j\mathfrak{R} \supseteq \operatorname{dom}\mathfrak{R}, \qquad \operatorname{edom}^{\mathrm{st}}\mathcal{L}_j\mathfrak{R} \supseteq \operatorname{edom}^{\mathrm{st}}\mathfrak{R}.$$

Поняття правих н.к. зсувів назад $\mathcal{R}_j$ вводиться аналогічним чином.

Доведення теореми 1.5. Без втрати загальності, ми можемо припустити, що $D(x) = 0$. Ясно, що

$$\begin{aligned} \operatorname{edom}^{\mathrm{st}}\mathfrak{R} &\supseteq \operatorname{dom}\mathfrak{R} \\ &\supseteq \coprod_{n=1}^{\infty} \left\{ X \in \left(\mathbb{K}^{n\times n}\right)^d : \det(I_n \otimes I_m - X_1 \otimes A_1 - \dots - X_d \otimes A_d) \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Навпаки, припустимо, що $X \in \operatorname{edom}_n^{\mathrm{st}} \mathfrak{R}$. Ми покажемо, що

$$\det(I_n \otimes I_m - X_1 \otimes A_1 - \cdots - X_d \otimes A_d) \neq 0.$$

Нехай $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_d)$, $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_d)$, і нехай $w = g_{j_1} \cdots g_{j_l} \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$. Покладемо $\mathcal{L}^w = \mathcal{L}_{j_1} \cdots \mathcal{L}_{j_l}$, $\mathcal{R}^w = \mathcal{R}_{j_1} \cdots \mathcal{R}_{j_l}$. Тоді для $|w| \geq l_B$, $w = v'v$ з $|v| = l_B$, ми отримаємо (с точністю до тривіальної еквівалентності)

$$\mathcal{R}^w(R) = C(x)(I_m - x_1 A_1 - \cdots - x_d A_d)^{-1} A^{v'} B_v + P,$$

де P - матричнозначний н.к. многочлен (тут ми користаємось однорідністю н.к. многочлена $B(z)$). Оскільки $X \in \operatorname{edom}_n^{\mathrm{st}} \mathfrak{R}$, $X \in \operatorname{edom}_n^{\mathrm{st}} \mathcal{R}^w \mathfrak{R} = \operatorname{edom}_n^{\mathrm{st}} \mathcal{R}^w(R)$. Отже, $X \in \operatorname{edom}_n^{\mathrm{st}}(C(x)(I_m - x_1 A_1 - \cdots - x_d A_d)^{-1} A^{v'} B_v)$, тобто $np \times nq$ матричнозначна раціональна функція

$$C(T)(I_n \otimes I_m - T_1 \otimes A_1 - \cdots - T_d \otimes A_d)^{-1}(I_n \otimes A^{v'} B_v)$$

регулярна в X. Тепер (1.9) тягне за собою, що $np \times nq$ матричнозначна раціональна функція $C(T)(I_n \otimes I_m - T_1 \otimes A_1 - \cdots - T_d \otimes A_d)^{-1}$ регулярна в X. Іншими словами, $X \in \operatorname{edom}_n^{\mathrm{st}} S$, де $S = C(x)(I_m - x_1 A_1 - \cdots - x_d A_d)^{-1}$ - $p \times m$ матричнозначний н.к. раціональний вираз.

Далі, для $|w| \geq l_C$, $w = v'^{\top} v^{\top}$ з $|v| = l_C$, ми отримаємо (с точністю до тривіальної еквівалентності)

$$\mathcal{L}^w(S) = C_v A^{v'}(I_m - x_1 A_1 - \cdots - x_d A_d)^{-1}$$

(тут ми користаємось однорідністю н.к. многочлена $C(x)$). Оскільки $X \in \operatorname{edom}_n^{\mathrm{st}} S$, $X \in \operatorname{edom}_n^{\mathrm{st}} \mathcal{L}^w(S)$. Отже, $np \times nq$ матричнозначна раціональна функція

$$(C_v A^{v'} \otimes I_n)(I_n \otimes I_m - T_1 \otimes A_1 - \cdots - T_d \otimes A_d)^{-1}$$

- регулярна у X. Альтернативно, $nm \times np$ матричнозначна раціональна функція

$$(I_n \otimes I_m - T_1^{\top} \otimes A_1^{\top} - \cdots - T_d^{\top} \otimes A_d^{\top})^{-1}(A^{\top v'^{\top}} C_v^{\top} \otimes I_n)$$

регулярна у X. Тепер, (1.10) еквівалентне до

$$\operatorname*{span}_{v', v \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d,\ |v| = l_C} \operatorname{ran} A^{\top v'^{\top}} C_v^{\top} = \mathbb{K}^m,$$

що тягне за собою, що $nm \times nm$ матричнозначна раціональна функція

$$(I_n \otimes I_m - T_1^{\top} \otimes A_1^{\top} - \cdots - T_d^{\top} \otimes A_d^{\top})^{-1}$$

регулярна у X. Альтернативно,

$$(I_n \otimes I_m - T_1 \otimes A_1 - \cdots - T_d \otimes A_d)^{-1}$$

регулярна у X.

Розглянемо $m\times m$ матричнозначний н.к. раціональний вираз $Q=(I_m-x_1A_1-\cdots-x_dA_d)^{-1}$. Оскільки

$$Q_n\cdot(I_n\otimes I_m-T_1\otimes A_1-\cdots-T_d\otimes A_d)=I_n\otimes I_m,$$

ми маємо

$$\det Q_n\cdot\det(I_n\otimes I_m-T_1\otimes A_1-\cdots-T_d\otimes A_d)=1.$$

Оскільки Q_n регулярний у X, таким же є $\det Q_n$, і ми можемо спеціалізувати останній вираз до X:

$$\det Q_n(X)\cdot\det(I_n\otimes I_m-X_1\otimes A_1-\cdots-X_d\otimes A_d)=1.$$

Отже,

$$\det(I_n\otimes I_m-X_1\otimes A_1-\cdots-X_d\otimes A_d)\neq 0,$$

що і треба було довести. □

Як застосування нашого н.к. разультату про сингулярності, ми отримаємо його комутативний аналог.

Теорема 1.11. *Нехай* R *-* $p\times q$ *матричнозначна раціональна функція від* d *комутуючих невизначених* $\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_d$ *(над полем* $\mathbb{K}$*), регулярна у* 0*. Тоді для будь-якої реалізації Форнасіні–Маркесіні*

$$\mathrm{R}=D+C(I_m-\mathrm{x}_1A_1-\cdots-\mathrm{x}_dA_d)^{-1}(\mathrm{x}_1B_1+\cdots+\mathrm{x}_dB_d), \tag{1.18}$$

з мінімально можливим m *(такі реалізації завжди існують), де* $A_k\in\mathbb{K}^{m\times m}$*,* $B_k\in\mathbb{K}^{m\times q}$*,* $k=1,\dots,d$*,* $C\in\mathbb{K}^{p\times m}$*,* $D\in\mathbb{K}^{p\times q}$*, область регулярності* R*,* $\operatorname{dom}\mathrm{R}$*, співпадає з*

$$\{\mathrm{X}=(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_d)\in\mathbb{K}^d\colon\ \det(I_m-\mathrm{X}_1A_1-\cdots-\mathrm{X}_dA_d)\neq 0\}.$$

Доведення. Перш за все, зауважимо, що реалізації Форнасіні–Маркесіні $p\times q$ матричнозначної раціональної функції R від d комутуючих невизначених $\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_d$ (над полем $\mathbb{K}$), регулярної у 0, завжди існують (дивись [**58**]). Розглянемо будь-яку таку реалізацію (1.18) з мінімально можливою вимірністю простору станів m. Нехай $\mathfrak{R}$ - $p\times q$ матричнозначна н.к. раціональна функція, що є н.к. ліфтінгом R, тобто $\mathfrak{R}_1=\mathrm{R}$, отримана наступним чином: ми піднімаємо (1.18) до н.к. раціонального виразу R вигляду

$$R=D+C(I_m-x_1A_1-\cdots-x_dA_d)^{-1}(x_1B_1+\cdots+x_dB_d), \tag{1.19}$$

з тими самими даними $A_1,\dots,A_d$, $B_1,\dots,B_d$, C,D, заміною комутуючих невизначених x_k у (1.18) на некомутуючі невизначені x_k, $k=1,\dots,d$. Тоді R визначає $p\times q$ матричнозначну н.к. раціональну функцію $\mathfrak{R}$ і служить як її н.к. реалізація Форнасіні–Маркесіні.

Остання реалізація R є мінімальною. Справді, якщо це не так, можна стиснути її до мінімальної, $R^{\mathcal{X}}$, з даними $A_k^{\mathcal{X}} = P_{\mathcal{X}} A_k|\mathcal{X}$, $B_k^{\mathcal{X}} = P_{\mathcal{X}} B_k$, $k = 1, \dots, d$, $C^{\mathcal{X}} = C|\mathcal{X}$, $D^{\mathcal{X}} = D$, де

$$\mathcal{X} = P_{\mathcal{X}^o}\mathcal{X}^c, \quad \mathcal{X}^c = \operatorname*{span}_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d,\, k=1,\dots,d} A^w B_k \mathbb{K}^q, \quad \mathcal{X}^o = \operatorname*{span}_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d} A^{\top w} C^\top \mathbb{K}^p$$

(дивись [**24**] за деталями). Замінив тепер н.к. невизначені x_k на комутуючі невизначені x_k, $k = 1, \dots, d$, у виразі $R^{\mathcal{X}}$, ми отримаємо іншу реалізацію Форнасіні–Маркесіні R:

$$\mathrm{R} = D^{\mathcal{X}} + C^{\mathcal{X}}(I_m - \mathrm{x}_1 A_1^{\mathcal{X}} - \dots - \mathrm{x}_d A_d^{\mathcal{X}})^{-1}(\mathrm{x}_1 B_1^{\mathcal{X}} + \dots + \mathrm{x}_d B_d^{\mathcal{X}}),$$

з $\dim \mathcal{X} < m$, що протиречіть нашому вибору m.

Твердження теореми тепер випливає з теореми 1.5, де ми спеціалізуємо висновки до $\operatorname{edom}_1^{\mathrm{st}} \mathfrak{R}$, що співпадає з $\operatorname{dom} \mathrm{R}$. □

1.2. Застосування результатів про сингулярності до стійкості (комутативних) многочленів

Многочлен $p \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$ називається *стійким* відносно області $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}^d$, чи просто $\mathcal{D}$-*стійким*, якщо він не має нулів у $\mathcal{D}$, і *строго* $\mathcal{D}$-*стійким*, якщо він не має нулів у замиканні області $\overline{\mathcal{D}}$. У випадку, коли $d = 1$ і $\mathcal{D}$ - одиничний круг $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{C} \colon |x| < 1\}$, і $p(0) = 1$, можна написати

$$p = (1 - xa_1)\cdots(1 - xa_n) = \det(I - xK),$$

де $a_i = 1/x_i$, $i = 1, \dots, n$, нулі x_i многочлена p рахуються відповідно їх кратностям, $K = \operatorname{diag}[a_1, \dots, a_n]$ і $n = \deg p$. Ясно, що матриця K стискаюча (відп., строго стискаюча), тобто $\|K\| \le 1$ (відп., $\|K\| < 1$); тут і далі у рукопису $\|\cdot\|$ - операторна $(2,2)$ норма.

У [**68**], встановлюється існування строго стискаючих детермінантних зображень для строго стійких многочленів на декартовому добутку областей Картана типу I, тобто на *матричній одиничній полікулі*,

$$\begin{aligned}(1.20)\quad \mathcal{B} &:= \mathbb{B}^{\ell_1\times m_1} \times \dots \times \mathbb{B}^{\ell_k\times m_k} \\ &= \Big\{X = (X^{(1)}, \dots, X^{(k)}) \in \mathbb{C}^{\ell_1\times m_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{\ell_k\times m_k} \colon \|X^{(r)}\| < 1,\ r = 1, \dots, k\Big\}.\end{aligned}$$

Теорема 1.12. *Нехай p - многочлен від комутуючих невизначених $z_{ij}^{(r)}$, $r = 1, \dots, k$, $i = 1, \dots, \ell_r$, $j = 1, \dots, m_r$, з $p(0) = 1$, який є строго $\mathcal{B}$-стійким, де матрична одинична полікуля $\mathcal{B}$ визначена у* (1.20). *Тоді існують $n = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ і строгий стиск $K \in \mathbb{C}^{\sum_{r=1}^k m_r n_r \times \sum_{r=1}^k \ell_r n_r}$ такі, що*

$$(1.21)\qquad p = \det(I - X_n K), \quad X_n = \bigoplus_{r=1}^{k} (X^{(r)} \otimes I_{n_r}).$$

Доведення. Ми спочатку застосовуємо результат про стискаючу реалізацію багатовимірною лінійною системою з [**69**] у випадку полікулі для раціональної функції $1/p$, відповідно масштабованої. Точніше, для деякого $c > 0$, ми знаходимо зображення

$$c/p = D + C(I - X_n A)^{-1} X_n B, \tag{1.22}$$

де X_n - як у (1.21), і матриця $\left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ розміру $(\sum_{r=1}^{k} m_r n_r + 1) \times (\sum_{s=1}^{k} \ell_s n_s + 1)$ є стискаючою, з $\|A\| < 1$ і $\|B\| < 1$. Тоді, як і у доведенні теореми 1.11, ця реалізація піднімається до н.к. раціонального виразу R заміною комутуючих невизначених (матричних елементів $x_{ij}^{(r)}$) на некомутуючі. Користаючись теорією н.к. структурних лінійних систем з [**24**], реалізація тоді стискається до мінімальної, де поняття мінімальності визначається шляхом аналогічним тому, що у підрозділі 1.1:

$$R = D_{\min} + C_{\min}\Big(I - x_{n_{\min}} A_{\min}\Big)^{-1} x_{n_{\min}} B_{\min},$$

чия вузлова матриця $\left[\begin{smallmatrix} A_{\min} & B_{\min} \\ C_{\min} & D_{\min} \end{smallmatrix}\right]$ - все ще стискаюча і така, що $\|A_{\min}\| < 1$ і $\|B_{\min}\| < 1$. Ми також отримаємо мінімальну реалізацію н.к. структурною системою для R^{-1} (дивись [**24**]),

$$R^{-1} = D_{\min}^{\times} + C_{\min}^{\times}\Big(I - x_{n_{\min}} A_{\min}^{\times}\Big)^{-1} x_{n_{\min}} B_{\min}^{\times},$$

з вузловою матрицею

$$\begin{bmatrix} A_{\min}^{\times} & B_{\min}^{\times} \\ C_{\min}^{\times} & D_{\min}^{\times} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\min} - B_{\min} D_{\min}^{-1} C_{\min} & B_{\min} D_{\min}^{-1} \\ -D_{\min}^{-1} C_{\min} & D_{\min}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Користаючись аналогом теорем 1.5 і 1.11 для налаштування полікулі, ми отримаємо, що множина сингулярностей многочлена p/c (тобто пуста множина), співпадає з

$$\Big\{X = (X^{(1)}, \dots, X^{(k)}) \in \mathbb{C}^{\ell_1 \times m_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{\ell_k \times m_k} \colon \det(I - X_{n_{\min}} A_{\min}^{\times}) = 0\Big\},$$

що можливо тільки якщо $\det(I - X_{n_{\min}} A_{\min}^{\times}) \equiv 1$.

Далі, з наступних двох факторізацій,

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} I - X_{n_{\min}} A_{\min} & X_{n_{\min}} B_{\min} \\ -C_{\min} & D_{\min} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -C_{\min}(I - X_{n_{\min}} A_{\min})^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - X_{n_{\min}} A_{\min} & 0 \\ 0 & c/p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & (I - X_{n_{\min}} A_{\min})^{-1} X_{n_{\min}} B \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &\qquad = \begin{bmatrix} I & X_{n_{\min}} B_{\min}^{\times} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - X_{n_{\min}} A_{\min}^{\times} & 0 \\ 0 & D_{\min} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ C_{\min}^{\times} & I \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ми отримаємо, що

$$\det\begin{bmatrix} I - X_{n_{\min}}A_{\min} & X_{n_{\min}}B_{\min} \\ -C_{\min} & D_{\min} \end{bmatrix} = \frac{c}{p}\det(I - X_{n_{\min}}A_{\min}) = D_{\min}\det(I - X_{n_{\min}}A^{\times}_{\min})$$
$$= D_{\min} = \frac{c}{p(0)} = c.$$

Отже, $p = \det(I - X_{n_{\min}}A_{\min})$. Оскільки $A_{\min}$ є строгим стиском, ми отримаємо, що (1.21) вірне з $K = A_{\min}$ і $n_{\min}$ замість n. □

1.3. Різницево-диференціальне числення для н.к. раціональних функцій

У [**99**], розвивається різницево-диференціальне числення для н.к. раціональних функцій. Нехай $\mathbf{K} = \mathbb{K}\langle\!\langle x_1, \ldots, x_d\rangle\!\rangle$ позначає косе поле н.к. раціональних функцій. Ми спочатку визначаємо різницево-диференціальні оператори

$$\Delta_j \colon \mathbf{K} \to \mathbf{K} \otimes \mathbf{K}, \quad j = 1, \ldots, d,$$

які є н.к. аналогом як часткових скінченних різницевих, так і часткових диференціальних операторів. Ми поширюємо Δ_j на матричнозначні н.к. раціональні функції застосуванням цих операторів поелементно; нагадаємо, що матричнозначна н.к. раціональна функція - це те же саме, що і матриця (скалярних) н.к. раціональних функцій. Ми таким чином маємо

$$\Delta_j \colon \mathbf{K}^{p\times q} \to (\mathbf{K} \otimes \mathbf{K})^{p\times q}, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Наша стратегія буде визначити Δ_j на матричнозначних н.к. раціональних виразах рекурсивно, починаючи з матричнозначних н.к. многочленів, і постулюючи лінійність і відповідну версію правила Лейбниця. Ми тоді перевіряємо, що еквівалентність зберігається, таким чином ми можемо визначити Δ_j на матричнозначних н.к. раціональних функціях.

Щоб визначити Δ_j на матричнозначних н.к. раціональних виразах, нам буде потрібно ввести матричнозначні н.к. раціональні вирази від двох наборів н.к. невизначених, $x_1, \ldots, x_d$ і $x'_1, \ldots, x'_d$. Вони отримаються застосуванням послідовних матричних арифметичних операцій до тензорних добутків матричнозначних н.к. раціональних виразів від $x_1, \ldots, x_d$ і $x'_1, \ldots, x'_d$ і формуванням блочних матриць. Точніше,

Означення 1.13. (1) Якщо R і R' - $p \times q$ і $p' \times q'$ матричнозначні н.к. раціональні вирази від $x_1, \ldots, x_d$ і від $x'_1, \ldots, x'_d$, відповідно, то $R \otimes R'$ - $pp' \times qq'$ матричнозначний н.к. раціональний вираз від $x_1, \ldots, x_d$ і $x'_1, \ldots, x'_d$, з $\operatorname{dom}(R \otimes R') = \operatorname{dom} R \times \operatorname{dom} R'$, і обчислення визначається як

$$(R \otimes R')(X, X') = R(X) \otimes R'(X').$$

Тут для $X \in (\mathbb{K}^{n\times n})^d$ і $X' \in \left(\mathbb{K}^{n'\times n'}\right)^d$ ми маємо $R(X) \in \mathbb{K}^{n\times n} \otimes \mathbb{K}^{p\times q}$, $R'(X') \in \mathbb{K}^{n'\times n'} \otimes \mathbb{K}^{p'\times q'}$ і $R(X) \otimes R'(X') \in \mathbb{K}^{n\times n} \otimes \mathbb{K}^{n'\times n'} \otimes \mathbb{K}^{pp'\times qq'}$ через канонічне ототожнення $\mathbb{K}^{p\times q} \otimes \mathbb{K}^{p'\times q'}$ з $\mathbb{K}^{pp'\times qq'}$.

(2) Якщо R_1 і R_2 - $p \times q$ матричнозначні н.к. раціональні вирази від двох наборів невизначених, то таким є і $R_1 + R_2$, $\operatorname{dom}(R_1 + R_2) = \operatorname{dom} R_1 \cap \operatorname{dom} R_2$, і обчислення дається як

$$(R_1 + R_2)(X, X') = R_1(X, X') + R_2(X, X').$$

(3) Якщо R_1 і R_2 - $p \times q$ і $q \times r$ матричнозначні н.к. раціональні вирази від двох наборів невизначених, то $R_1 R_2$ - $p \times r$ матричнозначний н.к. раціональний вираз, $\operatorname{dom}(R_1 R_2) = \operatorname{dom} R_1 \cap \operatorname{dom} R_2$, і обчислення дається як

$$(R_1 R_2)(X, X') = R_1(X, X') R_2(X, X').$$

(4) Якщо R - $p \times p$ матричнозначний н.к. раціональний вираз від двох наборів невизначених і $\det R(X, X')$ не зникає тотожньо на $\operatorname{dom} R$, то таким є і R^{-1},

$$\operatorname{dom} R^{-1} = \{(X, X') \in \operatorname{dom} R \colon \det R(X, X') \neq 0\}$$

і

$$R^{-1}(X, X') = R(X, X')^{-1}.$$

(5) Якщо R_{ab}, $a = 1, \ldots, p_2$, $b = 1, \ldots, q_2$, - $p_1 \times q_1$ матричнозначні н.к. раціональні вирази від двох наборів невизначених, то $R = [R_{ab}]_{a=1,\ldots,p_2;\, b=1,\ldots,q_2}$ - $p_1 p_2 \times q_1 q_2$ матричнозначний н.к. раціональний вираз,

$$\operatorname{dom} R = \bigcap_{a=1,\ldots,p_2;\, b=1,\ldots,q_2} \operatorname{dom} R_{ab}$$

і

$$R(X, X') = [R_{ab}(X, X')]_{a=1,\ldots,p_2;\, b=1,\ldots,q_2}.$$

Ми зауважимо, що для $p \times q$ матричнозначного н.к. раціонального виразу R від двох наборів невизначених і для $X \in (\mathbb{K}^{n \times n})^d$ і $X' \in \left(\mathbb{K}^{n' \times n'}\right)^d$ з $(X, X') \in \operatorname{dom} R$, обчислення $R(X, X') \in \mathbb{K}^{n \times n} \otimes \mathbb{K}^{n' \times n'} \otimes \mathbb{K}^{p \times q}$. Ми часто будемо користуватись канонічним ототожненням $\mathbb{K}^{n \times n} \otimes \mathbb{K}^{n' \times n'} \otimes \mathbb{K}^{p \times q} = \left(\mathbb{K}^{n \times n} \otimes \mathbb{K}^{n' \times n'}\right) \otimes \mathbb{K}^{p \times q}$ з $\mathbb{K}^{nn'p \times nn'q}$. Таким чином ми будемо часто розглядати $R(X, X')$ як $nn'p \times nn'q$ матрицю.

Класи еквівалентності $p \times q$ матричнозначних н.к. раціональних виразів від двох наборів невизначених, які формуються використанням тільки правил (1), (2), (3) і (5) у означенні 1.13 є у природній взаємно-однозначній відповідності з $p \times q$ матрицею над $\mathbf{K} \otimes \mathbf{K}$. Ми визначаємо *область регулярності,* $\operatorname{dom} \mathfrak{R}$*, матриці* $\mathfrak{R}$ *над* $\mathbf{K} \otimes \mathbf{K}$ як об'єднання областей регулярності всіх матричнозначних н.к. раціональних виразів від двох наборів невизначених, що представляють $\mathfrak{R}$.

Ми можемо обчислити матричнозначний н.к. раціональний вираз R від двох наборів невизначених на загальних матрицях $T_1, \ldots, T_d$ і $T'_1, \ldots, T'_d$, і ввести підмножину $\mathcal{N}_R \subseteq \mathbb{N}$, де обчислення визначене, і розширену область, $\operatorname{edom} R$. Ми тоді визначаємо $\mathcal{N}_{\mathfrak{R}}$ і $\operatorname{edom} \mathfrak{R}$, *розширену область регулярності матриці* $\mathfrak{R}$

над $\mathbf{K} \otimes \mathbf{K}$, беручи об'єднання над усіма матричнозначними н.к. раціональними виразами від двох наборів невизначених, що представляють $\mathfrak{R}$.

Ми зараз даємо означення різницево-диференціальних операторів Δ_j. Для $p \times q$ матричнозначного н.к. раціонального виразу R, $\Delta_j(R)$ - це $p \times q$ матричнозначний н.к. раціональний вираз від двох наборів невизначених.

Означення 1.14. (1) Для матричнозначного н.к. многочлена $P \in \mathbb{K}^{p\times q}\langle x_1, \dots, x_d\rangle$, $P(x) = \sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d} x^w P_w$, покладемо

$$\Delta_j(P) = \sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d} \sum_{u,v\colon\, w=ug_jv} (x^u \otimes x'^v)P_w \in (\mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_d\rangle \otimes \mathbb{K}\langle x'_1, \dots, x'_d\rangle) \otimes \mathbb{K}^{p\times q}.$$

(2) Якщо R_1 і R_2 - $p \times q$ матричнозначні н.к. раціональні вирази, то

$$\Delta_j(R_1 + R_2) = \Delta_j(R_1) + \Delta_j(R_2).$$

(3) Якщо R_1 - $p \times q$ матричнозначний н.к. раціональний вираз і R_2 - $q \times s$ матричнозначний н.к. раціональний вираз, то

$$\Delta_j(R_1R_2) = \Delta_j(R_1)(1 \otimes R_2) + (R_1 \otimes 1)\Delta_j(R_2).$$

(4) Якщо R - $p \times p$ матричнозначний н.к. раціональний вираз, не тотожньо особливий, то

$$\Delta_j(R^{-1}) = -(R^{-1} \otimes 1)\Delta_j(R)(1 \otimes R^{-1}).$$

(5) Якщо R_{ab}, $a = 1, \dots, p_2$, $b = 1, \dots, q_2$, - $p_1 \times q_1$ - матричнозначні н.к. раціональні вирази і $R = [R_{ab}]_{a=1,\dots,p_2;\, b=1,\dots,q_2}$, то

$$\Delta_j(R) = [(\Delta_j(R))_{ab}]_{a=1,\dots,p_2;\, b=1,\dots,q_2}\,, \qquad (\Delta_j(R))_{ab} = \Delta_j(R_{ab}).$$

Ясно, що $\operatorname{dom}\Delta_j(R) = \operatorname{dom} R \times \operatorname{dom} R$.

Приклад 1.15. Для скалярного н.к. многочлена тотального степеня два від двох невизначених,

$$p = \alpha + x_1\beta + x_2\gamma + x_1^2\delta + x_1x_2\epsilon + x_2x_1\zeta + x_2^2\eta,$$

ми маємо

$$\Delta_1(p) = (1 \otimes 1)\beta + (1 \otimes x'_1)\delta + (x_1 \otimes 1)\delta + (1 \otimes x'_2)\epsilon + (x_2 \otimes 1)\zeta$$

і

$$\Delta_2(p) = (1 \otimes 1)\gamma + (x_1 \otimes 1)\epsilon + (1 \otimes x'_1)\zeta + (1 \otimes x'_2)\eta + (x_2 \otimes 1)\eta.$$

Приклад 1.16. Розглянемо $p \times q$ матричнозначний н.к. раціональний вираз

$$R = C(I_m - x_1A_1 - \cdots - x_dA_d)^{-1}B, \tag{1.23}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $A_j \in \mathbb{K}^{m\times m}$ $(j = 1, \ldots, d)$, $B \in \mathbb{K}^{m\times q}$, $C \in \mathbb{K}^{p\times m}$. (Це впізнавана реалізація $p \times q$ матричнозначним н.к. раціональним виразом матричнозначної н.к. раціональної функції; дивись [**103, 138, 60**].) Ми маємо

$$\begin{aligned}\Delta_j(R) = (C \otimes 1) \cdot \big((I_m - x_1A_1 - \cdots - x_dA_d)^{-1} \otimes 1\big) \cdot (1 \otimes 1)A_j \\ \cdot \big(1 \otimes (I_m - x_1'A_1 - \cdots - x_d'A_d)^{-1}\big) \cdot (1 \otimes B),\end{aligned}$$

або с точністю до тривіальної еквівалентності,

$$\begin{aligned}\Delta_j(R) &\sim \big(C(I_m - x_1A_1 - \cdots - x_dA_d)^{-1}A_j \otimes 1\big) \\ &\qquad \cdot \big(1 \otimes (I_m - x_1'A_1 - \cdots - x_d'A_d)^{-1}B\big) \\ &\sim \big(C(I_m - x_1A_1 - \cdots - x_dA_d)^{-1} \otimes 1\big) \cdot \big(1 \otimes A_j(I_m - x_1'A_1 - \cdots - x_d'A_d)^{-1}B\big).\end{aligned} \tag{1.24}$$

A priori не ясно з означення 1.14, що Δ_j зберігає еквівалентність матричнозначних н.к. раціональних виразів і може бути таким чином визначене на матричнозначних н.к. раціональних функціях. Це є наслідком наступної ключової теореми, що співвідносить обчислення $\Delta_j(R)(Z, Z')$ до обчислення R на наборах 2×2 блочних верхньо-трикутних матриць з Z_j і Z_j' на блочних діагоналях. Ми будемо ототожнювати $\mathbb{K}^{n\times n} \otimes \mathbb{K}^{n'\times n'}$ з $\hom(\mathbb{K}^{n\times n'}, \mathbb{K}^{n\times n'})$, так що $\sum_i A_i \otimes B_i$ відповідає лінійному відображенню $H \mapsto \sum_i A_iHB_i$. Ця відповідність поширюється природно на $p \times q$ матриці: ми ототожнюємо $\mathbb{K}^{n\times n} \otimes \mathbb{K}^{n'\times n'} \otimes \mathbb{K}^{p\times q} = \mathbb{K}^{n\times n} \otimes (\mathbb{K}^{n'\times n'} \otimes \mathbb{K}^{p\times q})$ з $\hom\big(\mathbb{K}^{n\times n'}, \mathbb{K}^{n\times n'} \otimes \mathbb{K}^{p\times q}\big)$. Ми також користаємось позначенням $\operatorname{dom}_n R := \operatorname{dom} R \cap (\mathbb{K}^{n\times n})^d$.

Теорема 1.17. *Нехай R - $p \times q$ матричнозначний н.к. раціональний вираз. Нехай $X \in \operatorname{dom}_n R$ і $X' \in \operatorname{dom}_{n'} R$, і нехай $Z = (Z_1, \ldots, Z_d) \in \big(\mathbb{K}^{n\times n'}\big)^d$. Тоді*

$$\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & X' \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} X_1 & Z_1 \\ 0 & X_1' \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} X_d & Z_d \\ 0 & X_d' \end{bmatrix}\right) \in \operatorname{dom}_{n+n'} R$$

і

$$R\left(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & X' \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} R(X) & \sum_{j=1}^{d} \Delta_j(R)(X, X')(Z_j) \\ 0 & R(X') \end{bmatrix}. \tag{1.25}$$

Доведення. Ми встановлюємо (1.25) рекурсивно; міркування також дає, що $\left[\begin{smallmatrix} X & Z \\ 0 & X' \end{smallmatrix}\right] \in \operatorname{dom}_{n+n'} R$. Ми спочатку перевіряємо, що (1.25) є вірним, коли R - матричнозначний н.к. многочлен $P = \sum_{w \in \mathcal{G}_d} x^w P_w$.

$$
\begin{aligned}
P\left(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & X' \end{bmatrix}\right) &= \sum_{w \in \mathcal{G}_d} \begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & X' \end{bmatrix}^w \otimes P_w \\
&= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_+,\, i_1,\dots,i_\ell \in \{1,\dots,d\}} \begin{bmatrix} X_{i_1} & Z_{i_1} \\ 0 & X'_{i_1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} X_{i_\ell} & Z_{i_\ell} \\ 0 & X'_{i_\ell} \end{bmatrix} \otimes P_{g_{i_1}\cdots g_{i_\ell}} \\
&= \sum_{\ell,\, i_1,\dots,i_\ell} \begin{bmatrix} X_{i_1}\cdots X_{i_\ell} & \sum\limits_{k=1}^{\ell} X_{i_1}\cdots X_{i_{k-1}} Z_{i_k} X'_{i_{k+1}} \cdots X'_{i_\ell} \\ 0 & X'_{i_1}\cdots X'_{i_\ell} \end{bmatrix} \otimes P_{g_{i_1}\cdots g_{i_\ell}} \\
&= \begin{bmatrix} \sum\limits_{\ell,\, i_1,\dots,i_\ell} X_{i_1}\cdots X_{i_\ell} \otimes P_{g_{i_1}\cdots g_{i_\ell}} & \sum\limits_{\ell,\, i_1,\dots,i_\ell} \sum\limits_{k=1}^{\ell} X_{i_1}\cdots X_{i_{k-1}} Z_{i_k} X'_{i_{k+1}} \cdots X'_{i_\ell} \otimes P_{g_{i_1}\cdots g_{i_\ell}} \\ 0 & \sum\limits_{\ell,\, i_1,\dots,i_\ell} X'_{i_1}\cdots X'_{i_\ell} \otimes P_{g_{i_1}\cdots g_{i_\ell}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum\limits_{w} X^w \otimes P_w & \sum\limits_{w} \sum\limits_{j=1}^{d} \sum\limits_{u,v\colon\, w = u g_j v} X^u Z_j X'^v \otimes P_w \\ 0 & \sum\limits_{w} X'^w \otimes P_w \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P(X) & \sum\limits_{j=1}^{d} \Delta_j(P)(X,X')(Z_j) \\ 0 & P(X') \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Якщо (1.25) вірне для R_1 і для R_2, то воно, звісно, є вірним для $R = R_1 + R_2$.

Зараз припустимо, що (1.25) є вірним для $p \times q$ матричнозначного н.к. раціонального виразу R_1 і для $q \times r$ матричнозначного н.к. раціонального виразу R_2. Тоді

$$
\begin{aligned}
(R_1 R_2)\left(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & X' \end{bmatrix}\right) &= R_1\left(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & X' \end{bmatrix}\right) R_2\left(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & X' \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} R_1(X) & \sum\limits_{j=1}^{d} \Delta_j(R_1)(X,X')(Z_j) \\ 0 & R_1(X') \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_2(X) & \sum\limits_{j=1}^{d} \Delta_j(R_2)(X,X')(Z_j) \\ 0 & R_2(X') \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R_1(X)R_2(X) & \sum\limits_{j=1}^{d} (R_1(X)\Delta_j(R_2)(X,X')(Z_j) + \Delta_j(R_1)(X,X')(Z_j)R_2(X')) \\ 0 & R_1(X')R_2(X') \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (R_1R_2)(X) & \sum\limits_{j=1}^{d} \Delta_j(R_1R_2)(X,X')(Z_j) \\ 0 & (R_1R_2)(X') \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Отже, (1.25) є вірним для $p \times r$ матричнозначного н.к. раціонального виразу $R_1 R_2$.

Далі, припустимо, що (1.25) є вірним для $p \times p$ матричнозначного н.к. раціонального виразу R, який не є тотожньо особливим. Тоді

$$R^{-1}\left(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & X' \end{bmatrix}\right) = R\left(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & X' \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} R(X) & \sum\limits_{j=1}^{d} \Delta_j(R)(X, X')(Z_j) \\ 0 & R(X') \end{bmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} R(X)^{-1} & -R(X)^{-1}\left(\sum\limits_{j=1}^{d} \Delta_j(R)(X, X')(Z_j)\right) R(X')^{-1} \\ 0 & R(X')^{-1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} R^{-1}(X) & \sum\limits_{j=1}^{d} \Delta_j(R^{-1})(X, X')(Z_j) \\ 0 & R^{-1}(X') \end{bmatrix}.$$

Отже, (1.25) є вірним для матричнозначного н.к. раціонального виразу R^{-1}.

Нарешті, ми покажемо, що якщо (1.25) є вірним для $R_{ab},\ a = 1, \ldots, p_2,\ b = 1, \ldots, q_2$, то воно є також вірним для $R = [R_{ab}]$. Ясно, що є достатнім довести (1.25) для випадку, коли тільки один блок R_{ab} ненульовий, тобто $R = E_{ab} \otimes R_{ab}$, з деякими a, b і E_{ab} - $p_2 \times q_2$ матрицею з 1 у позиції (a, b) і 0 - у решті матриці. Оскільки $(E_{ab} \otimes R_{ab})(X) = (E_{ab} \otimes I_{p_1}) \cdot (I_{q_2} \otimes R_{ab})(X)$, це зводиться до доведення (1.25) для $I_{q_2} \otimes R_{ab}$. Спрощуючи позначення, ми можемо сформулювати задачу таким чином: показати, що якщо $p \times q$ матричнозначний н.к. раціональний вираз R задовольняє (1.25), то також і $sp \times sq$ матричнозначний н.к. раціональний вираз $I_s \otimes R$ для кожного $s \in \mathbb{N}$. Ми спочатку зауважимо, що для всіх $m, s \in \mathbb{N}$ і будь-якого $X \in \operatorname{dom}_m R$ ми маємо $X \otimes I_s \in \operatorname{dom}_{ms} R$ і $(I_s \otimes R)(X) = R(X \otimes I_s)$ – це випливає прямо з означення матричнозначних н.к. раціональних виразів. Тоді ми маємо

$$(I_s \otimes R)\left(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & X' \end{bmatrix}\right) = R\left(\begin{bmatrix} X \otimes I_s & Z \otimes I_s \\ 0 & X' \otimes I_s \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} R(X \otimes I_s) & \sum_{j=1}^{d} \Delta_j(R)(X \otimes I_s, X' \otimes I_s)(Z_j \otimes I_s) \\ 0 & R(X' \otimes I_s) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (I_s \otimes R)(X) & \sum_{j=1}^{d} \Delta_j(I_s \otimes R)(X, X')(Z_j) \\ 0 & (I_s \otimes R)(X') \end{bmatrix},$$

тобто $I_s \otimes R$ задовольняє (1.25).

Доведення є повним. □

Наслідок 1.18. *Якщо R_1 і R_2 - два еквівалентних матричнозначних н.к. раціональних вирази, то $\Delta_j(R_1)$ і $\Delta_j(R_2)$ є також еквівалентними.*

Доведення випливає безпосередньо з (1.25).

Наслідок 1.18 дозволяє нам визначити $\Delta_j\mathfrak{R}$ для матричнозначної н.к. раціональної функції $\mathfrak{R}$: $\Delta_j\mathfrak{R}$ - це матриця над $\mathbf{K} \otimes \mathbf{K}$, відповідна до класу еквівалентності $\Delta_j(R)$ для будь якого $R \in \mathfrak{R}$. Ми маємо $\operatorname{dom} \Delta_j\mathfrak{R} \supseteq \operatorname{dom} \mathfrak{R} \times \operatorname{dom} \mathfrak{R}$. Ми

зараз опишемо деякі з багатьох граней н.к. різницево-диференціальних операторів.

1.3.1. Напрямкові похідні. Обчислюючи $\Delta_j(R)$, $j = 1, \dots, d$, у $X' = X$ дає диференціал або напрямкові похідні матричнозначного н.к. раціонального виразу R у X:

$$\sum_{j=1}^{d} \Delta_j(R)(X, X)(Z_j) = \frac{d}{dt} R(X + tZ)\big|_{t=0}. \tag{1.26}$$

Тут $X \in \operatorname{dom} R$ і ми розглядаємо $R(X + tZ)$ як матричнозначну н.к. раціональну функцію від невизначеної t. Формула (1.26) випливає легко з рекурсивного означення Δ_j і відповідних властивостей похідної матричнозначної н.к. раціональної функції однієї невизначеної. Звісно, можна також написати аналог (1.26) для матричнозначних н.к. раціональних функцій.

1.3.2. Зсуви назад. Нехай R - матричнозначний н.к. раціональний вираз, регулярний в нулі, тобто $0 \in \operatorname{dom}_1 R$. Тоді

$$\Delta_j(R)(X, 0) = \mathcal{R}_j R(X), \quad \Delta_j(R)(0, X) = \mathcal{L}_j R(X), \tag{1.27}$$

де $\mathcal{R}_j$ і $\mathcal{L}_j$ - оператори правого і лівого зсувів назад, введених у [**98**] (дивись підрозділ 1.1). Формула (1.27) випливає легко з рекурсивних означень Δ_j і зсувів назад. Звісно, можна також написати аналог (1.27) для матричнозначних н.к. раціональних функцій. Як ілюстрація дії зсувів назад, для многочлена p з приклада 1.15 ми маємо

$$\mathcal{R}_1 p = \beta + x_1\delta + x_2\zeta, \quad \mathcal{L}_1 p = \beta + x_1\delta + x_2\epsilon,$$

$$\mathcal{R}_2 p = \gamma + x_1\epsilon + x_2\eta, \quad \mathcal{L}_2 p = \gamma + x_1\zeta + x_2\eta,$$

і для впізнаваної реалізації (1.23) з приклада 1.16, ми маємо

$$\mathcal{R}_j R = C(I_m - x_1A_1 - \cdots - x_dA_d)^{-1}A_jB, \quad \mathcal{L}_j R = CA_j(I_m - x_1A_1 - \cdots - x_dA_d)^{-1}B.$$

1.3.3. Формули скінченних різниць. Для $p \times q$ матричнозначного н.к. раціонального виразу R і $X^{(0)}, X \in \operatorname{dom}_n R$ ми маємо н.к. формулу скінченних різниць

$$R(X) - R\left(X^{(0)}\right) = \sum_{j=1}^{d} \Delta_j(R)\left(X^{(0)}, X\right)\left(X_j - X_j^{(0)}\right),$$

яка може бути доведена рекурсивно, і поширити її природним чином до матричнозначної н.к. раціональної функції.

1.3.4. Різницево-диференціальні оператори вищого порядку. Ми можемо ітерувати різницево-диференціальні оператори Δ_j: ми визначаємо лінійне відображення

$$\Delta_j \colon \mathbf{K}^{\otimes \ell} \to \mathbf{K}^{\otimes(\ell+1)}$$

його дією на чистих тензорах як

$$\Delta_j(\mathfrak{r}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{r}_\ell) = \mathfrak{r}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{r}_{\ell-1} \otimes \Delta_j \mathfrak{r}_\ell.$$

Легко перевірити, що Δ_j задовольняє наступну версію правила Лейбниця:

$$\Delta_j(\mathfrak{r}\mathfrak{r}') = \Delta_j \mathfrak{r} \cdot \iota_\ell \mathfrak{r}' + (\mathfrak{r} \otimes 1) \cdot \Delta_j \mathfrak{r}', \tag{1.28}$$

для всіх $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}' \in \mathbf{K}^{\otimes \ell}$, де лінійне відображення $\iota_\ell \colon \mathbf{K}^{\otimes \ell} \to \mathbf{K}^{\otimes \ell+1}$ (насправді, гомоморфізм $\mathbb{K}$-алгебр) - визначений на чистих тензорах як

$$\iota_\ell(\mathfrak{r}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{r}_{\ell-1} \otimes \mathfrak{r}_\ell) = \mathfrak{r}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{r}_{\ell-1} \otimes 1 \otimes \mathfrak{r}_\ell.$$

Застосовуючи (1.28) до обох сторін тотожності $\mathfrak{r}\mathfrak{r}^{-1} = 1$, ми отримаємо, що

$$\Delta_j(\mathfrak{r}^{-1}) = -(\mathfrak{r}^{-1} \otimes 1) \cdot \Delta_j \mathfrak{r} \cdot \iota_\ell(\mathfrak{r}^{-1}). \tag{1.29}$$

Ми поширюємо Δ_j і ι_ℓ поелементно на матриці.

Ми можемо зараз визначити для слова $w = g_{i_\ell} \cdots g_{i_1}$ довжини ℓ відповідні різницево-диференціальні оператори вищого порядку

$$\Delta^w := \Delta_{i_\ell} \cdots \Delta_{i_1} \colon \mathbf{K}^{p \times q} \to \left(\mathbf{K}^{\otimes(\ell+1)}\right)^{p \times q}.$$

Приклад 1.19. Для матричнозначної н.к. раціональної функції $\mathfrak{R}$, визначеної матричнозначним н.к. раціональним многочленом $P = \sum_{v \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} x^v P_v$, і для слова $w = g_{i_\ell} \cdots g_{i_1}$ довжини ℓ, що не перевищує тотального степеня P, ми маємо

$$\Delta^w \mathfrak{R} = \sum_{v \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} \sum_{v = u_1 g_{i_1} u_2 g_{i_2} \cdots g_{i_\ell} u_{\ell+1}} \left((x^{(1)})^{u_1} \otimes (x^{(2)})^{u_2} \otimes \cdots \otimes (x^{(\ell+1)})^{u_{\ell+1}} \right) P_v.$$

Точніше, кожний член у другій сумі з правого боку - це тензорний добуток $\ell + 1$ н.к. раціональної функції визначеної відповідними н.к. одночленами; альтернативно, права сторона (з деякими вкладеними дужками) - це матричнозначний н.к. раціональний вираз від ℓ наборів невизначених, що визначає $\Delta^w \mathfrak{R}$.

Приклад 1.20. Для матричнозначної н.к. раціональної функції $\mathfrak{R}$, визначеної впізнаваною реалізацією вигляду (1.23), ми маємо, ітеруючи першу рівність у

(1.24), що для кожного $w = g_{i_\ell} \cdots g_{i_1}$,

$$\Delta^w \mathfrak{R} = \left(C(I_m - x_1^{(1)} A_1 - \cdots - x_d^{(1)} A_d)^{-1} A_{i_1} \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{\ell \text{ times}} \right)$$
$$\cdot \prod_{j=2}^{\ell} \left(\underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{j-1 \text{ разів}} \otimes (I_m - x_1^{(j)} A_1 - \cdots - x_d^{(j)} A_d)^{-1} A_{i_j} \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{\ell-j+1 \text{ разів}} \right)$$
$$\cdot \left(\underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{\ell \text{ разів}} \otimes (I_m - x_1^{(\ell+1)} A_1 - \cdots - x_d^{(\ell+1)} A_d)^{-1} B \right).$$

Ми ототожнюємо $\mathbb{K}^{n_1 \times n_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{K}^{n_{\ell+1} \times n_{\ell+1}}$ з ℓ-лінійними відображеннями

$$\mathbb{K}^{n_1 \times n_2} \times \cdots \times \mathbb{K}^{n_\ell \times n_{\ell+1}} \longrightarrow \mathbb{K}^{n_1 \times n_{\ell+1}},$$

так що $\sum_i \left(A_i^{(1)} \otimes \cdots \otimes A_i^{(\ell+1)} \right)$ відповідає ℓ-лінійному відображенню

$$(H_1, \ldots, H_\ell) \longmapsto \sum_i A_i^{(1)} H_1 A_i^{(2)} \cdots A_i^{(\ell)} H_\ell A_i^{(\ell+1)}.$$

Ця відповідність поширюється природно на матриці. Тоді для $p \times q$ матричнозначної н.к. раціональної функції $\mathfrak{R}$ і для $X^{(1)} \in \mathbb{K}^{n_1 \times n_1}, \ldots, X^{(\ell+1)} \in \mathbb{K}^{n_{\ell+1} \times n_{\ell+1}}$ у відповідних областях, ми маємо, що

$$\Delta^w \mathfrak{R} \left(X^{(1)}, \ldots, X^{(\ell+1)} \right) \in \mathbb{K}^{n_1 \times n_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{K}^{n_{\ell+1} \times n_{\ell+1}} \otimes \mathbb{K}^{p \times q},$$

і для $(H_1, \ldots, H_\ell) \in \mathbb{K}^{n_1 \times n_2} \times \cdots \times \mathbb{K}^{n_\ell \times n_{\ell+1}}$, ми маємо, що

$$\Delta^w \mathfrak{R} \left(X^{(1)}, \ldots, X^{(\ell+1)} \right) (H_1, \ldots, H_\ell) \in \mathbb{K}^{n_1 \times n_{\ell+1}} \otimes \mathbb{K}^{p \times q}.$$

Зокрема, ми маємо

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \Delta_i \Delta_j \mathfrak{R}(X, X, X)(Z_i, Z_j) = \frac{d^2}{dt^2} \mathfrak{R}(X + tZ) \Big|_{t=0}.$$

Це в точності гессіан $\mathfrak{R}$, який грає центральну роль у вивчанні н.к. опуклості; дивись, наприклад, [**74, 85, 84**]. Гессіани і напрямкові похідні матричнозначних н.к. раціональних виразів були застосовані у пакеті NCAlgebra, щоб виробити алгоритм перевірки опуклості [**41**].

Зауваження 1.21. Ми можемо також визначити різницево-диференціальні оператори на матрицях над тензорними степенями $\mathbf{K}$ на рівні матричнозначних н.к. раціональних виразів від кількох наборів невизначених. Для $p \times q$ матричнозначного н.к. раціонального виразу R від ℓ наборів невизначених, ми визначаємо

$\Delta_j(R)$, $p\times q$ матричнозначний н.к. раціональний вираз від $\ell+1$ наборів невизначених аналогічно означенню 1.14, за винятком того, що в правилі (1) ми розглядаємо “чисті тензори"замість многочленів, і ми модифікуємо правила (3) і (4), дивись (1.28) і (1.29). А саме,

(1) Якщо R і R' - матричнозначні н.к. раціональні вирази від t наборів і від s наборів невизначених відповідно, з $t+s=\ell$, ми покладаємо

$$\Delta_j(R\otimes R')=R\otimes\Delta_j(R').$$

(3) Якщо R_1 і R_2 - матричнозначні н.к. раціональні вирази сумісних розмірів від ℓ наборів невизначених, то

$$\Delta_j(R_1R_2)=\Delta_j(R_1)\iota_\ell(R_2)+(R_1\otimes 1)\Delta_j(R_2).$$

(4) Якщо R - квадратний матричнозначний н.к. раціональний вираз від ℓ наборів невизначених, який не є тотожньо особливим, то

$$\Delta_j(R^{-1})=-(R^{-1}\otimes 1)\Delta_j(R)\iota_\ell(R^{-1}).$$

Тут для матричнозначного н.к. раціонального виразу R від ℓ наборів невизначених, $\iota_\ell(R)$ - матричнозначний н.к. раціональний вираз того ж розміру від $\ell+1$ наборів невизначених, визначений за допомогою $\iota_1(R)=1\otimes R$ і рекурсивних співвідношень

(1) $\iota_{t+s}(R\otimes R')=R\otimes\iota_s(R')$;

(2) $\iota_\ell(R_1+R_2)=\iota_\ell(R_1)+\iota_\ell(R_2)$;

(3) $\iota_\ell(R_1R_2)=\iota_\ell(R_1)\iota_\ell(R_2)$;

(4) $\iota_\ell(R^{-1})=(\iota_\ell(R))^{-1}$;

(5) $\iota_\ell([R_{ab}])=[\iota_\ell(R_{ab})]$

для $\ell>1$. Зауважимо, що для наборів матриць $X^j\in(\mathbb{K}^{n_j\times n_j})^d$, $j=1,\ldots,\ell+1$, значення $\iota_\ell(R)(X^{(1)},\ldots,X^{(\ell+1)})$ - це образ значення $R(X^{(1)},\ldots,X^{(\ell-1)},X^{(\ell+1)})$ лінійного відображення

$$\begin{aligned}\mathbb{K}^{n_1\times n_1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{K}^{n_{\ell-1}\times n_{\ell-1}}\otimes\mathbb{K}^{n_{\ell+1}\times n_{\ell+1}}&\\ \longrightarrow\mathbb{K}^{n_1\times n_1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{K}^{n_{\ell-1}\times n_{\ell-1}}\otimes\mathbb{K}^{n_\ell\times n_\ell}\otimes\mathbb{K}^{n_{\ell+1}\times n_{\ell+1}},&\\ A^{(1)}\otimes\cdots\otimes A^{(\ell)}\longmapsto A^{(1)}\otimes\cdots\otimes A^{(\ell-1)}\otimes I_{n_\ell}\otimes A^{(\ell)},&\end{aligned}$$

розширений природно до відображення

$$\begin{aligned}\mathbb{K}^{n_1\times n_1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{K}^{n_{\ell-1}\times n_{\ell-1}}\otimes\mathbb{K}^{n_{\ell+1}\times n_{\ell+1}}\otimes\mathbb{K}^{p\times q}&\\ \longrightarrow\mathbb{K}^{n_1\times n_1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{K}^{n_{\ell-1}\times n_{\ell-1}}\otimes\mathbb{K}^{n_\ell\times n_\ell}\otimes\mathbb{K}^{n_{\ell+1}\times n_{\ell+1}}\otimes\mathbb{K}^{p\times q}.&\end{aligned}$$

Ми тоді маємо аналог теореми 1.17 такий. Нехай R - $p \times q$ матричнозначний н.к. раціональний вираз від ℓ наборів невизначених, нехай $X^{(j)} \in (\mathbb{K}^{n_j \times n_j})^d$, $j = 1, \ldots, \ell - 1$, $X \in (\mathbb{K}^{n \times n})^d$, $X' \in \left(\mathbb{K}^{n' \times n'}\right)^d$, так що

$$(X^{(1)}, \ldots, X^{(\ell-1)}, X),\ (X^{(1)}, \ldots, X^{(\ell-1)}, X') \in \operatorname{dom} R,$$

і нехай $Z \in \left(\mathbb{K}^{n \times n'}\right)^d$. Тоді

$$\left(X^{(1)}, \ldots, X^{(\ell-1)}, \begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & X' \end{bmatrix}\right) \in \operatorname{dom} R$$

і

$$\begin{aligned} (1.30)\quad & R\left(X^{(1)}, \ldots, X^{(\ell-1)}, \begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & X' \end{bmatrix}\right) \\ & = \begin{bmatrix} R(X^{(1)}, \ldots, X^{(\ell-1)}, X) & \sum\limits_{j=1}^{d} \Delta_j(R)(X^{(1)}, \ldots, X^{(\ell-1)}, X, X')(Z_j) \\ 0 & R(X^{(1)}, \ldots, X^{(\ell-1)}, X') \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тут

$$\Delta_j(R)(X^{(1)}, \ldots, X^{(\ell-1)}, X, X') \in \mathbb{K}^{n_1 \times n_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{K}^{n_{\ell-1} \times n_{\ell-1}} \otimes \mathbb{K}^{n \times n} \otimes \mathbb{K}^{n' \times n'} \otimes \mathbb{K}^{p \times q}$$

і

$$\Delta_j(R)(X^{(1)}, \ldots, X^{(\ell-1)}, X, X')(Z_j) \in \mathbb{K}^{n_1 \times n_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{K}^{n_{\ell-1} \times n_{\ell-1}} \otimes \mathbb{K}^{n \times n'} \otimes \mathbb{K}^{p \times q},$$

дивись обговорення перед теоремою 1.17 і після прикладу 1.20. Доведення є аналогічним доведенню теореми 1.17, за винятком того, що замість встановлення (1.25) для многочленів, ми встановлюємо (1.30) для чистих тензорів. А саме, ми повинні показати, що якщо R і R' задовольняють (1.30), то також і $R \otimes R'$. Це може бути досягнуте використанням тотожності

$$\begin{aligned} & R(X^{(1)}, \ldots, X^{(\ell-1)}) \otimes R'\left(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & X' \end{bmatrix}\right) \\ & \qquad = \left(R(X^{(1)}, \ldots, X^{(\ell-1)}) \otimes I\right)\left(I \otimes R'\left(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & X' \end{bmatrix}\right)\right). \end{aligned}$$

З (1.30) випливає, що Δ_j зберігає еквівалентність матричнозначних н.к. раціональних виразів від ℓ наборів невизначених і може бути таким чином визначеним на матрицях над $\mathbf{K}^{\otimes \ell}$.

Зауваження 1.22. Як спеціальний випадок попереднього зауваження, ми бачимо, що для матричнозначної н.к. раціональної функції $\mathfrak{R}$ і для слова w довжини ℓ, $\Delta^w \mathfrak{R}$ - матриця над $\mathbf{K}^{\otimes \ell}$, яка відповідає класу еквівалентності $\Delta^w(R)$ для

будь-якого $R \in \mathfrak{R}$. Ми далі робимо висновок, що $\operatorname{dom} \Delta^w \mathfrak{R} \supseteq (\operatorname{dom} \mathfrak{R})^{\ell+1}$. Це включення випливає з рівності $\operatorname{dom} \Delta^w R = (\operatorname{dom} R)^{\ell+1}$ для матричнозначного н.к. раціонального виразу R, який може бути доведений рекурсивно. Зауважимо, що для добутку ми маємо правило Лейбниця вищого порядку:

$$\Delta^w(R_1 R_2) = \sum_{u,v \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \colon w=uv} (\Delta^v(R_1) \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{\ell-|v| \text{ разів}}) \cdot (\underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{\ell-|u| \text{ разів}} \otimes \Delta^u(R_2)). \tag{1.31}$$

1.3.5. Формальні степеневі ряди. Матричнозначний н.к. раціональний вираз, регулярний в нулі, визначає н.к. формальний степеневий ряд з матричними коефіцієнтами. Ця відповідність визначається рекурсивно оберненням формального степеневого ряду з оборотним сталим членом (коефіцієнтом для $x^{\emptyset}$); дивись, наприклад, [**39**]. Більше того, R_1 і R_2 еквівалентні тоді і тільки тоді, коли відповідні формальні степеневі ряди співпадають, так що н.к. формальний степеневий ряд матричнозначної н.к. раціональної функції, регулярної у нулі, є добре визначеним; дивись, наприклад, [**98**, Remark 2.14]. Якщо $\sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} x^w \mathfrak{R}_w$ - розвинення у формальний степеневий ряд для $\mathfrak{R}$, то розвинення у формальний степеневий ряд для $\Delta_j \mathfrak{R}$ дається як

$$\sum_{u,v \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} (x^u \otimes x'^v) \mathfrak{R}_{u g_j v}.$$

Для доведення ми користаємось впізнаваною реалізацією і представляємо $\mathfrak{R}$ матричнозначним н.к. раціональним виразом вигляду (1.23). Отже, $\mathfrak{R}_w = C A^w B$. З другого боку, з прикладу 1.16 випливає, що розвинення у формальний степеневий ряд для $\Delta_j \mathfrak{R}$ дається як

$$\sum_{u,v \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} (x^u \otimes x'^v) C A^u A_j A^v B.$$

Таким чином, ми бачимо, що коефіцієнт для $x^u \otimes x'^v$ є в точності $\mathfrak{R}_{u g_j v}$.

Подібний аргумент, що використовує приклад 1.20, показує, що розвинення у формальний степеневий ряд для $\Delta^w \mathfrak{R}$, з $w = g_{i_\ell} \cdots g_{i_1}$, дається як

$$\sum_{u_1, \ldots, u_{\ell+1} \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} ((x^{(1)})^{u_1} \otimes (x^{(2)})^{u_2} \otimes \cdots \otimes (x^{(\ell+1)})^{u_{\ell+1}}) \mathfrak{R}_{u_1 g_{i_1} u_2 g_{i_2} \cdots g_{i_\ell} u_{\ell+1}}.$$

Зокрема, дивлячись на сталий член цього розвинення (тобто для $u_1 = \ldots = u_{\ell+1} = \emptyset$), ми бачимо, що

$$\Delta^w \mathfrak{R}(0, \ldots, 0) = \mathfrak{R}_{w^\top}.$$

1.4. Н.к. обмежена дійсна лема без втрат

У [**13**], класи матричнозначних н.к. раціональних функцій з різними симетріями вивчались в термінах їх реалізацій Джівона–Росера (GR). *Н.к. система*

Джівона–Росера (оригінальну комутативну версію цих систем можна знайти у [**67**]) дається як

$$(1.32)\quad \Sigma^{\mathrm{GR}}\colon \begin{cases} h_1(g_1w) &= A_{11}h_1(w)+\cdots+A_{1d}h_d(w)+B_1u(w),\\ &\vdots\\ h_d(g_dw) &= A_{d1}h_1(w)+\cdots+A_{dd}h_d+B_du(w),\\ y(w) &= C_1h_1(w)+\cdots+C_dh_d(w)+Du(w),\end{cases}\qquad (w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d).$$

Тут $h_j\in\mathbb{K}^{m_j}$, тобто простір станів має d компонент: $\mathbb{K}^m=\mathbb{K}^{m_1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{K}^{m_d}$. Передавальна функція н.к. системи Джівона–Росера дається як

$$(1.33)\qquad F=D+C(I_m-\Delta(x)A)^{-1}\Delta(x)B,$$

де A - $d\times d$ блочна матриця з блоками $A_{ij}\in\mathbb{K}^{m_i\times m_j}$, $\Delta(x)=x_1P_1+\cdots+x_dP_d$, і P_j - ортогональна проєкція простору станів $\mathbb{K}^m$ на його j-у компоненту $\mathbb{K}^{m_j}$. Система (1.32), що позначається також як $\Sigma^{\mathrm{GR}}=(d;A,B,C,D;\mathbb{K}^m=\bigoplus_{k=1}^d\mathbb{K}^{m_k},\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^q)$, називається *керованою* (відп., *спостережуваною*), якщо

$$\operatorname*{span}_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d}\operatorname{ran}\{P_jA^wB\}=\mathbb{K}^{m_j},\qquad\left(\text{відп.},\ \bigcap_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d}\ker\{CA^w|_{\mathbb{K}^{m_j}}\}\right)=\{0\},\quad j=1,\dots,d.$$

Керована і спостережувана система називається *мінімальною*.

Зразок результату з [**13**] -це версія так званої обмеженої дійсної леми без втрат (дивись [**25**] щодо загальної обмеженої дійсної леми у н.к. налаштуванні). Нехай $\mathfrak{F}$ - $q\times q$ матричнозначна н.к. раціональна функція над полем $\mathbb{C}$, регулярна в нулі. Нехай $J=J^{-1}=J^*\in\mathbb{C}^{q\times q}$. Тоді $\mathfrak{F}$ називається *матрично-J-унітарною* на множині $\mathcal{J}_d$ наборів d косоермітових $n\times n$ матриць, $n=1,2,\dots$ (що є н.к. аналогом уявленої осі комплексної площини), якщо

$$(1.34)\qquad F(X)(I_n\otimes J)F(X)^*=I_n\otimes J\qquad (X\in\mathcal{J}_d)$$

в усіх точках $X\in\mathcal{J}_d\cap\operatorname{dom}F$ для будь-якого матричнозначного н.к. раціонального виразу F, що представляє $\mathfrak{F}$.

Теорема 1.23. *Нехай $\mathfrak{F}$ - $\mathbb{C}^{q\times q}$-значна н.к. раціональна функція з мінімальною GR-реалізацією F як у* (1.32)–(1.33). *Тоді $\mathfrak{F}$ - матрично-J-унітарна на $\mathcal{J}_d$ тоді і тільки тоді, коли наступні умови задовольняються:*

a) D - J-унітарне, тобто $DJD^*=J$;

b) існує оборотний ермітовий розв'язок $H=\operatorname{diag}(H_1,\dots,H_d)$, з $H_k\in\mathbb{C}^{m_k\times m_k}$, $k=1,\dots,d$, рівняння Ляпунова

$$(1.35)\qquad A^*H+HA=-C^*JC,$$

і

$$(1.36)\qquad B=-H^{-1}C^*JD.$$

Властивість b) еквівалентна

b') існує оборотна ермітова матриця $H = \mathrm{diag}(H_1, \dots, H_d)$, *з* $H_k \in \mathbb{C}^{m_k \times m_k}$, $k = 1,\dots,d$, *така, що*

$$H^{-1}A^* + AH^{-1} = -BJB^*, \tag{1.37}$$

і

$$C = -DJB^*H. \tag{1.38}$$

Доведення. Нехай $\mathfrak{F}$ - матрично-J-унітарна, і F - її GR-реалізація, як у (1.33), отже $D = F(0)$ є J-унітарним (зокрема, оборотним). Рівність (1.34) може бути переписана як

$$F(X)^{-1} = (I_n \otimes J)F(-X^*)^*(I_n \otimes J), \tag{1.39}$$

для всіх X в щільній за Заріським множині у $(\mathbb{C}^{n\times n})^d$, бо множина наборів d косоермітових матриць є множиною єдиності для голоморфних функцій від змінних $x_{k,ij}$, $k = 1,\dots,d$, $i, j = 1,\dots,n$ [**140**]. Оскільки (1.39) виконується для всіх $n \in \mathbb{N}$, з цього випливає (дивись, наприклад, [**130, 62**]), що н.к. формальні степеневі ряди, відповідні до лівої та правої частин рівності (1.39), співпадають. Тоді (дивись [**24**]) $\Sigma^{\mathrm{GR},\times} = (d; A^\times, B^\times, C^\times, D^\times; \mathbb{C}^m = \bigoplus_{k=1}^d \mathbb{C}^{m_k}, \mathbb{C}^q)$ з $A^\times, B^\times, C^\times, D^\times$ дана як

$$\begin{bmatrix} A^\times & B^\times \\ C^\times & D^\times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & BD^{-1} \\ -D^{-1}C & D^{-1} \end{bmatrix},$$

(дивись підрозділ 1.2) є мінімальною GR-реалізацією F^{-1}. За (1.39), інша мінімальна GR-реалізація F^{-1} - це $\tilde{\Sigma}^{\mathrm{GR}} = (d; \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}; \mathbb{C}^m = \bigoplus_{k=1}^d \mathbb{C}^{m_k}, \mathbb{C}^q)$, де

$$\tilde{A} = -A^*, \quad \tilde{B} = C^*J, \quad \tilde{C} = -JB^*, \quad \tilde{D} = JD^*J.$$

Тоді (дивись [**24**]) існує єдине перетворення подібності $T = \mathrm{diag}(T_1, \dots, T_d)$, що співвідносить $\Sigma^{\mathrm{GR},\times}$ і $\tilde{\Sigma}^{\mathrm{GR}}$, де $T_k \in \mathbb{C}^{m_k \times m_k}$ є оборотними для $k = 1, \dots, d$, і

$$T(A - BD^{-1}C) = -A^*T, \quad TBD^{-1} = C^*J, \quad D^{-1}C = JB^*T. \tag{1.40}$$

Зауважимо, що співвідношення $D^{-1} = JD^*J$, що означає J-унітарність D, було вже встановлено вище. Легко перевірити, що співвідношення (1.40) є також вірними для T^* на місці T. Отже, за єдиністю матриці подібності, $T = T^*$. Покладаючи $H = -T$, ми отримаємо з (1.40) рівності (1.35) і (1.36), як і (1.37) і (1.38), прямим обчисленням.

Доведемо зараз трохи загальніше твердження ніж зворотне. Нехай Σ^{GR} - (не обов'язково мінімальна) GR-реалізація $\mathfrak{F}$ вигляду (1.32) з передавальною функцією F як у (1.33), де D є J-унітарним, і нехай $H = \mathrm{diag}(H_1, \dots, H_d)$, з $H_k \in \mathbb{C}^{r_k \times r_k}$, $k = 1, \dots, d$, - ермітова оборотна матриця, що задовольняює (1.35) і (1.36). Тоді

таким же чином, як і у [**11**, теорема 2.1] для випадку однієї змінної, ми отримаємо для $X, X' \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

$$\begin{aligned} F(X)(I_n \otimes J)F(X')^* &= I_n \otimes J - (I_n \otimes C)\left(I_n \otimes I_r - \Delta(X)(I_n \otimes A)\right)^{-1} \\ \times\Delta(X + X'^*)(I_n \otimes H^{-1})&\left(I_n \otimes I_r - (I_n \otimes A^*)\Delta(X'^*)\right)^{-1}(I_n \otimes C^*) \end{aligned} \tag{1.41}$$

(зауважимо, що $\Delta(X)$ комутує з $I_n \otimes H^{-1}$). Отримаємо з (1.41), що $F(X)$ - $(I_n \otimes J)$-унітарне на $(\mathcal{D}^{n\times n})^d$ в усіх точках X, де воно визначене. Оскільки $n \in \mathbb{N}$ - довільне, $\mathfrak{F}$ - матрично-J-унітарна на $\mathcal{J}_d$. Ясно, що умови a) і b') також тягнуть за собою матрично-J-унітарність $\mathfrak{F}$ на $\mathcal{J}_d$. □

З доведення теореми 1.23 випливає, що розв'язок $H = \operatorname{diag}(H_1, \ldots, H_d)$ рівняння Ляпунова (1.35) визначений однозначно даною мінімальною GR-реалізацією $\mathfrak{F}$. Матриця $H = \operatorname{diag}(H_1, \ldots, H_d)$ називається *асоційованою структурною ермітовою матрицею* (асоційованою з цією мінімальною GR-реалізацією $\mathfrak{F}$).

1.5. Перетин нульових підпросторів для матричних підстановок у н.к. раціональний степеневий ряд

В цьому підрозділі ми обговорюємо результати з [**12**].

Теорема 1.24. *Нехай* $P = \sum_{|w|\le m} x^w P_w \in \mathbb{C}^{p\times q}\langle x_1, \ldots, x_d\rangle$. *Тоді для кожного* $n \in \mathbb{N}:\ n \ge m^m$ *(у випадку* $m = 0$*, для кожного* $n \in \mathbb{N}$*),*

$$\bigcap_{X\in(\mathbb{C}^{n\times n})^d} \ker P(X) = \mathbb{C}^n \otimes \Big(\bigcap_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d:\ |w|\le m} \ker P_w\Big), \tag{1.42}$$

і більше того, існують $l \in \mathbb{N}:\ l \le qn$*, і набори* d *матриць* $X^{(1)}, \ldots, X^{(l)} \in (\mathbb{C}^{n\times n})^d$ *такі, що*

$$\bigcap_{j=1}^{l} \ker P(X^{(j)}) = \mathbb{C}^n \otimes \Big(\bigcap_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d:\ |w|\le m} \ker P_w\Big).$$

Доведення. Для $m = 0$, рівність (1.42) є очевидною для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Для $m > 0$, включення "$\supset$" у (1.42) є також очевидним для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Покажемо, що для $m > 0$ і $n = m^m$ включення "$\subset$" у (1.42) є вірним.

Для $m = n = 1$, ми маємо $P = P_\emptyset + \sum_{k=1}^d x_k P_{g_k}$. Якщо $h \in \bigcap_{X\in\mathbb{C}^d} \ker P(X)$, то, звісно, $P_\emptyset h = P_{g_1} h = \ldots = P_{g_d} h = 0$, що означає включення "$\subset$" у (1.42) для цього випадку.

Для $m > 1$ і $n = m^m$, нехай матриця $S \in \mathbb{C}^{n\times n} \cong (\mathbb{C}^{m\times m})^{\otimes m}$ визначена її дією на базисних векторах $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_m} \in (\mathbb{C}^m)^{\otimes m}$ (тут $e_j,\ j = 1, \ldots, m$, - стандартний базис $\mathbb{C}^m$) як $S(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_m}) = e_{i_m} \otimes e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{m-1}}$. Отже, S - матриця перестановки. Визначимо $X' = (X'_1, \ldots, X'_d) \in (\mathbb{C}^{n\times n})^d \cong ((\mathbb{C}^{m\times m})^{\otimes m})^d$

як $X'_j = (M_j \otimes I_m^{\otimes m-1})S$, $j = 1,\dots,d$, де $M_j \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $j = 1,\dots,d$, довільні. Нехай $h \in \bigcap_{X\in(\mathbb{C}^{n\times n})^d} \ker P(X)$. Тоді

$$\begin{aligned} 0 = P(X')h &= \Big(\sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d\colon |w|\le m} X'^w \otimes P_w\Big)\Big(\sum_{1\le i_1,\dots,i_m\le m} e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_m}\otimes h_{i_1,\dots,i_m}\Big) \\ &= \sum_{w=g_{j_1}\cdots g_{j_{|w|}}\colon |w|\le m}\ \sum_{1\le i_1,\dots,i_m\le m} M_{j_1}e_{i_{m-|w|+1}}\otimes\cdots\otimes M_{j_{|w|}}e_{i_m} \\ &\quad \otimes e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{m-|w|}}\otimes P_w h_{i_1,\dots,i_m}. \end{aligned}$$

Права частина цієї рівності - многочлен від скалярних змінних $(M_j)_{\alpha,\beta}$, $j = 1,\dots,d$; $\alpha,\beta = 1,\dots,m$, який зникає тотожньо. Таким чином, всі його коефіцієнти - нулі. Зокрема, $\sum_{1\le i_1,\dots,i_m\le m} e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_m}\otimes P_\emptyset h_{i_1,\dots,i_m} = 0$. Оскільки множина векторів $e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_m}$, $i_1,\dots,i_m \in \{1,\dots,m\}$, лінійно незалежна, $P_\emptyset h_{i_1,\dots,i_m} = 0$ для всіх $i_1,\dots,i_m \in \{1,\dots,m\}$. Коефіцієнт для $(M_{j_1})_{1,\beta_1}\cdots(M_{j_{|w|}})_{|w|,\beta_{|w|}}$ є

$$\sum_\sigma \sum_{1\le i_1,\dots,i_{m-|w|}\le m} e_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes e_{\sigma(|w|)} \\ \otimes e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{m-|w|}}\otimes P_{g_{j_{\sigma(1)}}\cdots g_{j_{\sigma(|w|)}}} h_{i_1,\dots,i_{m-|w|},\beta_{\sigma(1)},\dots,\beta_{\sigma(|w|)}} = 0,$$

де σ пробігає множину всіх перестановок чисел $1,\dots,|w|$. Оскільки множина векторів $e_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes e_{\sigma(|w|)}\otimes e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{m-|w|}}$ лінійно незалежна, ми маємо, що $P_{g_{j_{\sigma(1)}}\cdots g_{j_{\sigma(|w|)}}} h_{i_1,\dots,i_{m-|w|},\beta_{\sigma(1)},\dots,\beta_{\sigma(|w|)}} = 0$ для всіх σ і $i_1,\dots,i_{m-|w|} \in \{1,\dots,m\}$. Оскільки $\beta_1,\dots,\beta_{|w|} \in \{1,\dots,m\}$ - довільні, $P_w h_{i_1,\dots,i_m} = 0$ для всіх $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d\colon |w| \le m$ і $i_1,\dots,i_m \in \{1,\dots,m\}$. Таким чином, $h \in \mathbb{C}^n \otimes \Big(\bigcap_{|w|\le m} \ker P_w\Big)$, як треба.

Нехай тепер $m > 0$ і $n > m^m$. Розглянемо будь-який підпростір V у $\mathbb{C}^n$ вигляду $V = \operatorname{span}\{e_{j_1},\dots,e_{j_{m^m}}\}$, де e_{j_k} - різні вектори із стандартного базису $\mathbb{C}^n$. Визначимо множину $\mathcal{M}_V \subset (\mathbb{C}^{n\times n})^d$, що складається з наборів $n\times n$ матриць $X = (X_1,\dots,X_d)$ таких, що $(X_j)_{\alpha,\beta} = 0$ якщо $(\alpha,\beta) \notin \{j_1,\dots,j_{m^m}\}\times\{j_1,\dots,j_{m^m}\}$. Звісно, $\mathcal{M}_V$ ізоморфне $(\mathbb{C}^{m^m\times m^m})^d$. Отже,

$$\begin{aligned} &\bigcap_{X\in(\mathbb{C}^{n\times n})^d} \ker P(X) \subset \bigcap_{X\in\mathcal{M}_V} \ker P(X) \\ &\quad = \big(V\otimes\big(\bigcap_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d\colon |w|\le m} \ker P_w\big)\big) \oplus \big((\mathbb{C}^n\ominus V)\otimes\mathbb{C}^q\big) \\ &\quad = \big(\mathbb{C}^n\otimes\big(\bigcap_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d\colon |w|\le m} \ker P_w\big)\big) \oplus \big((\mathbb{C}^n\ominus V)\otimes\big(\mathbb{C}^q\ominus\big(\bigcap_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d\colon |w|\le m} \ker P_w\big)\big)\big). \end{aligned}$$

Позначимо останню ортогональну суму як $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_V$. Оскільки $\bigcap_V \mathcal{H}_V = \{0\}$, де V пробігає множину підпросторів даного вигляду, ми маємо $\bigcap_V(\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_V) = \mathcal{H}_0$. Отже, $\bigcap_{X\in(\mathbb{C}^{n\times n})^d} \ker P(X) \subset \mathbb{C}^n \otimes \Big(\bigcap_{|w|\le m} \ker P_w\Big)$.

Друга частина теореми випливає з аргументу вимірності, а саме,

$$\dim \bigcap_{X\in(\mathbb{C}^{n\times n})^d} \ker P(X) \le qn.$$

Теорема 1.24 доведена. □

Наслідок 1.25. *Нехай* $P = \sum_{|w|\le m} x^w P_w \in \mathbb{C}^{p\times q}\langle x_1,\dots,x_d\rangle$. *Якщо для деякого* $n\in\mathbb{N}$: $n \ge m^m$ *(у випадку* $m=0$, *для деякого* $n\in\mathbb{N}$*) ми маємо* $P(X)=0$ *для всіх* $X\in(\mathbb{C}^{n\times n})^d$, *то* $P=0$.

Зауважимо, що наша оцінка m^m для нижньої межи n у наслідку 1.25 є, звісно, набагато слабкіша, ніж оцінка $[m/2]+1$, добре відома у теорії поліноміальних тотожностей кілець (дивись, наприклад, сс. 22–23 у [**130**]). Тим не менше, вона також тягне за собою те, що не існує поліноміальних співвідношень, вірних для нескінченно багатьох матричних кілець $\mathbb{C}^{n_j\times n_j}$, $n_j\in\mathbb{N}, j=1,2,\dots$.

Ми зауважимо також, що для будь-якого $\varepsilon>0$ ми можемо замінити множину $(\mathbb{C}^{n\times n})^d$ в теоремі 1.24 множиною

$$\Gamma_n(\varepsilon) := \{X=(X_1,\dots,X_d)\in\left(\mathbb{C}^{n\times n}\right)^d : \|X_k\|<\varepsilon,\ k=1,\dots,d\}.$$

Справді, за теоремою єдиності, якщо $P(X)h=0$ для деякого $h\in\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^q$ і усіх $X\in\Gamma_n(\varepsilon)$, то $P(X)h=0$ для всіх $X\in(\mathbb{C}^{n\times n})^d$.

Теорема 1.26. *Нехай* $\mathfrak{F}=\sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d} x^w\mathfrak{F}_w \in \mathbb{C}^{p\times q}\langle\langle x_1,\dots,x_d\rangle\rangle$ *- н.к. формальний н.к. степеневий ряд раціональної матричнозначної н.к. функції, регулярної у* 0, *і* $m\in\mathbb{Z}_+$ *- таке, що*

$$\bigcap_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d:\ |w|\le m} \ker\mathfrak{F}_w = \bigcap_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d} \ker\mathfrak{F}_w.$$

Тоді існує $\varepsilon>0$ *таке, що для кожного* $n\in\mathbb{N}$: $n\ge m^m$ *(у випадку* $m=0$, *для кожного* $n\in\mathbb{N}$*),*

$$\bigcap_{X\in\Gamma_n(\varepsilon)} \ker\mathfrak{F}(X) = \mathbb{C}^n\otimes\Big(\bigcap_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d:\ |w|\le m}\ker\mathfrak{F}_w\Big), \tag{1.43}$$

і більш того, існують $l\in\mathbb{N}$: $l\le qn$, *і набори* d *матриць* $X^{(1)},\dots,X^{(l)}\in\Gamma_n(\varepsilon)$ *такі, що*

$$\bigcap_{j=1}^{l}\ker\mathfrak{F}(X^{(j)}) = \mathbb{C}^n\otimes\Big(\bigcap_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d:\ |w|\le m}\ker\mathfrak{F}_w\Big).$$

Доведення. Ясно (наприклад, з однієї з реалізаційних формул з [**24**]), що існує $\varepsilon>0$ таке, що для кожного $n\in\mathbb{N}$ функція $\mathfrak{F}(X)$, яка розглядається як раціональна функція від скалярних змінних $(X_k)_{ij}$, $k=1,\dots,d$, $i,j=1,\dots,n$, є

голоморфною на $\Gamma_n(\varepsilon)$. Якщо $m = 0$, то рівність (1.43) очевидна для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Якщо $m > 0$, то включення "$\supset$" у (1.43) є також очевидним для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Навпаки, якщо $n \geq m^m$ і $h \in \ker \mathfrak{F}(X)$, для всіх $X \in \Gamma_n(\varepsilon)$, то $P_k(X)h \equiv 0$ для кожного однорідного многочлена P_k у розвиненні $\mathfrak{F}$ у однорідних многочленах. Отже, $h \in \ker P(X)$ для всіх $X \in \Gamma_n(\varepsilon)$, де $P = \sum_{|w|\leq m} x^w \mathfrak{F}_w$. За теоремою 1.24 і зауваженням перед цією теоремою, $h \in \mathbb{C}^n \otimes \left(\bigcap_{|w|\leq m} \ker \mathfrak{F}_w\right)$, і включення "$\subset$" у (1.43) виконується. Друга частина цієї теореми отримається таким же шляхом, як і у теоремі 1.24. Теорема 1.26 доведена. $\square$

Наслідок 1.27. *За умов теореми 1.26, якщо для деякого $n \in \mathbb{N}$: $n \geq m^m$ (у випадку $m = 0$, для деякого $n \in \mathbb{N}$) ми маємо $\mathfrak{F}(X) = 0$ для всіх $X \in \Gamma_n(\varepsilon)$, то $\mathfrak{F} = 0$.*

Таким чином, не існує раціональних тотожностей вірних для нескінченно багатьох матричних кілець $\mathbb{C}^{n_j \times n_j}$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \ldots$, що є добре відомим фактом у теорії раціональних тотожностей кілець з діленням (дивись підрозділ 8.2 у [**130**]), і наша теорема 1.26 може розглядатися як узагальнення цього факту.

1.6. Н.к. додатні ядра і їх матричні обчислення

Результати у підрозділі 1.5 показують співвідношення між властивостями формальних степеневих рядів з d н.к. невизначеними і властивостями матричнозначних функцій від d матриць всіх розмірів (або всіх достатньо великих розмірів) отриманих з цих формальних степеневих рядів матричними підстановками. У [**101**], результати цього типу були встановлені для додатних ядер [**16, 133**]. Ми нагадуємо, що якщо Ω - будь-яка множина і $\mathcal{E}$ - гільбертів простір, операторнозначна функція $K\colon \Omega \times \Omega \to \mathcal{L}(\mathcal{E})$[2] називається додатним $\mathcal{L}(\mathcal{E})$-значним ядром на Ω, якщо для будь-якого цілого l, будь-яких точок $\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(l)} \in \Omega$ і будь-яких векторів $h^{(1)}, \ldots, h^{(l)} \in \mathcal{E}$ маємо $\sum_{j,k=1}^{l} \left\langle K(\omega^{(j)}, \omega^{(k)})h^{(k)}, h^{(j)}\right\rangle_{\mathcal{E}} \geq 0$. Альтернативно, існує допоміжний гільбертів простір $\mathcal{H}$ і операторнозначна функція $H\colon \Omega \to \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{E})$[3] такі, що факторізація $K(\omega, \omega') = H(\omega)H(\omega')^*$ є вірною для всіх $\omega, \omega' \in \Omega$.

Формальний степеневий ряд з $2d$ н.к. невизначеними $x = (x_1, \ldots, x_d)$ і $x' = (x'_1, \ldots, x'_d)$,

$$K(x, x') = \sum_{w, w' \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} x^w x'^{w'^\top} K_{w,w'} \in \mathcal{L}(\mathcal{E})\langle\langle x, x'\rangle\rangle, \tag{1.44}$$

називається *додатним н.к. ядром*[4], якщо $(w, w') \mapsto K_{w,w'}$ - додатне $\mathcal{L}(\mathcal{E})$-значне ядро на $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$, тобто для будь-якого цілого l, будь-яких слів $w^{(1)}, \ldots, w^{(l)} \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ і будь-яких векторів $h^{(1)}, \ldots, h^{(l)} \in \mathcal{E}$, маємо $\sum_{j,k=1}^{l} \left\langle K_{w^{(j)},w^{(k)}} h^{(k)}, h^{(j)}\right\rangle_{\mathcal{E}} \geq 0$. Альтернативно, існує допоміжний гільбертів простір $\mathcal{H}$ і н.к. формальний степеневий

[2] $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ позначає C^*-алгебру обмежених лінійних операторів на $\mathcal{E}$.

[3] $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{E})$ позначає банахів простір обмежених лінійних операторів з $\mathcal{H}$ у $\mathcal{E}$.

[4] Ми нагадуємо, що для слова $w = g_{i_1} \cdots g_{i_\ell}$ ми користаємось позначенням $w^\top := g_{i_\ell} \cdots g_{i_1}$.

ряд

$$H(x) = \sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} x^w H_w \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{E})\langle\langle x \rangle\rangle, \tag{1.45}$$

такі, що $K(x, x') = H(x)H(x')^*$, де ми користаємось домовленням, що $(x'^w)^* = x'^{w^\top}$. Це поняття додатності було вивчено глибоко у [**32**].[5]

Нехай $X = (X_1, \ldots, X_d) \in (\mathbb{C}^{n \times n})^d$. Нехай $n, r \in \mathbb{N}$. Визначимо множину $\mathrm{Nilp}_d(n, r)$ наборів X всіх $n \times n$ матриць з комплексними елементами, які є *спільно нільпотентними рангу не більше* r, тобто $X^w = 0$ для всіх $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ таких, що $|w| \geq r$. Визначимо також множину $\mathrm{Nilp}_d(n) = \bigcup_{r=1}^{\infty} \mathrm{Nilp}_d(n, r)$ *спільно нільпотентних* наборів $n \times n$ матриць[6].

Теорема 1.28. *Н.к. формальний степеневий ряд $K(x, x') \in \mathcal{L}(\mathcal{E})\langle\langle x, x' \rangle\rangle$, як у* (1.44)*, - додатне н.к. ядро тоді і тільки тоді, коли*

$$K(X, X') := \sum_{w, w' \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} X^w X'^{*w'^\top} \otimes K_{w,w'} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E}) \tag{1.46}$$

де $X, X' \in \mathrm{Nilp}_d(n)$, $X'^* = (X'^*_1, \ldots, X'^*_d)$ (зауважимо, що сума скінченна!), є додатним $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E})$-значним ядром на $\mathrm{Nilp}_d(n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, тобто для будь-якого цілого l, будь-яких спільно нільпотентних наборів d матриць $X^{(1)}, \ldots, X^{(l)} \in \mathrm{Nilp}_d(n)$ і будь-яких векторів $h^{(1)}, \ldots, h^{(l)} \in \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E}$, ми маємо

$$\sum_{j,k=1}^{l} \left\langle K(X^{(j)}, X^{(k)}) h^{(k)}, h^{(j)} \right\rangle_{\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E}} \geq 0.$$

Один напрямок теореми є очевидним. Якщо $K(x, x')$ - додатне н.к. ядро, то ми маємо факторізацію $K(x, x') = H(x)H(x')^*$ для деякого н.к. формального степеневого ряду $H(x)$, як у(1.45), і деякого гільбертова простора $\mathcal{H}$. Отже, для будь-яких $X, X' \in \mathrm{Nilp}_d(n)$ ми маємо $K(X, X') = H(X)H(X')^*$, де

$$H(X) := \sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} X^w \otimes H_w \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H}, \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E}) \tag{1.47}$$

(зауважимо, що сума скінченна). Отже, для кожного $n \in \mathbb{N}$ ми маємо, що $K(X, X')$ - додатне $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E})$-значне ядро на $\mathrm{Nilp}_d(n)$. Для доведення другого напрямку нам знадобиться наступна лема.

---

[5] У[**32**] припускається, що x_i комутує з x'_j. Для нашої мети, зручніше мати справу з $2d$ н.к. невизначеними; зауважимо, що це не так важливо, тому що в усіх наших формулах кожний x'_j виникає справа від кожного x_i, у кожному одночлені.

[6] Зауважимо, що спільно нільпотентний набір матриць є спільно подібним до набору строго верхньотрикутних матриць.

Лема 1.29. *Нехай $\mathcal{U}$ - гільбертів простів і нехай $\mathcal{L}(\mathcal{U})$-значна поліноміальна функція*

$$P(\lambda,\lambda') = \sum_{t,t'\in\mathbb{Z}_+^d:\ 0\le|t|,|t'|\le m} \lambda^t(\overline{\lambda'})^{t'} P_{t,t'}$$

є додатним ядром на $\mathbb{C}^d$. Тут для $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_d) \in \mathbb{C}^d$ і $t = (t_1,\dots,t_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ ми покладаємо $\lambda^t = {\lambda_1}^{t_1}\cdots\lambda_N^{t_d}$ і $|t| = t_1+\dots+t_d$. Тоді матриця $M_P = (P_{t,t'})_{0\le|t|,|t'|\le m}$ (для певного порядку на $\mathbb{Z}_+^d$) визначає додатно напіввизначений оператор на $\mathcal{U}^{\frac{(m+d)!}{m!d!}}$.

Доведення. Для довільного $u = (u_t)_{0\le|t|\le m} \in \mathcal{U}^{\frac{(m+d)!}{m!d!}}$ ми маємо

$$\begin{aligned}\langle M_P u, u\rangle_{\mathcal{U}^{\frac{(m+d)!}{m!d!}}} &= \sum_{t,t'\in\mathbb{Z}_+^d:\ 0\le|t|,|t'|\le m} \langle P_{t,t'}u_{t'}, u_t\rangle_{\mathcal{U}} \\ &= \sum_{t,t'\in\mathbb{Z}_+^d:\ 0\le|t|,|t'|\le m} \int\limits_{\mathbb{T}^d\times\mathbb{T}^d} \langle P(\lambda,\lambda')u_{t'}, u_t\rangle_{\mathcal{U}}\, \overline{\lambda}^t {\lambda'}^{t'}\, dm_d(\lambda)dm_d(\lambda'),\end{aligned}$$

де $dm_d(\cdot)$ - нормалізована міра Лебега на $\mathbb{T}^d$. Для довільного $n\in\mathbb{N}$, нехай $\{\Delta_j\}_{j=1}^n$ - розбиття $\mathbb{T}^d$ таке, що $m_d(\Delta_j) = \frac{1}{n}$, і нехай $\lambda^{(j)} \in \Delta_j$, $j = 1,\dots,n$, - довільні точки. Тоді

$$\begin{aligned}&\langle M_P u, u\rangle_{\mathcal{U}^{\frac{(m+d)!}{m!d!}}} \\ &\quad= \sum_{0\le|t|,|t'|\le m} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{j,k=1}^n \left\langle P(\lambda^{(j)},\lambda^{(k)})u_{t'}, u_t\right\rangle_{\mathcal{U}} \left(\overline{\lambda^{(j)}}\right)^t \left(\lambda^{(k)}\right)^{t'} \\ &\quad= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{j,k=1}^n \left\langle P(\lambda^{(j)},\lambda^{(k)}) \sum_{0\le|t'|\le m} \left(\lambda^{(k)}\right)^{t'} u_{t'}, \sum_{0\le|t|\le m} \left(\lambda^{(j)}\right)^t u_t\right\rangle_{\mathcal{U}} \ge 0,\end{aligned}$$

як треба. □

Доведення теореми 1.28. Як ми вже сказали вище, один напрямок теореми є очевидним, отже тільки другий залишилося довести. Припустимо, що формальний степеневий ряд $K(x,x') \in \mathcal{L}(\mathcal{E})\langle\langle x,x'\rangle\rangle$, як у (1.44), - такий, що функція $K(X,X')$, як у (1.46), є додатним $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n\otimes\mathcal{E})$-значним ядром на $\mathrm{Nilp_d(n)}$ для кожного $n\in\mathbb{N}$. Нехай $m\in\mathbb{N}$, $m>1$. Покладемо $n = (d+1)^m$. Визначимо лінійний оператор S на просторі $\mathbb{C}^n \cong (\mathbb{C}^{d+1})^{\otimes m}$ його дією на базисних векторах $e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_m}$, де e_j, $j = 1,\dots,d+1$, - стандартні базисні вектори у $\mathbb{C}^{d+1}$: $S(e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_m}) = e_{i_m}\otimes e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_{m-1}}$. Оператор S зображується у базисі $e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_m}$, $i_1,\dots,i_m \in \{1,\dots,d+1\}$, $n\times n$ матрицею перестановки. Нехай $E_{i,j}\in\mathbb{C}^{(d+1)\times(d+1)}$, $i,j = 1,\dots,d+1$ - матриці вигляду

$$(E_{i,j})_{\mu,\nu} = \begin{cases} 1, & (\mu,\nu) = (i,j), \\ 0, & (\mu,\nu)\ne(i,j). \end{cases}$$

Визначимо $X_k = \left(E_{k+1,1} \otimes I_{d+1}^{\otimes m-1}\right) S \in \mathbb{C}^{n\times n} \cong \left(\mathbb{C}^{(d+1)\times(d+1)}\right)^{\otimes m}$, $k = 1,\dots,d$. Для $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{C}^d$, покладемо $X(\lambda) = (\lambda_1 X_1, \dots, \lambda_d X_d) \in \left(\mathbb{C}^{n\times n}\right)^d$. Для $w = g_{j_1} \cdots g_{j_{|w|}} \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$: $0 < |w| \le m$, маємо

$$X(\lambda)^w = \lambda_{j_1} Z_{j_1} \cdots \lambda_{j_{|w|}} Z_{j_{|w|}} = \lambda^w (E_{j_1+1,1} \otimes \cdots \otimes E_{j_{|w|}+1,1} \otimes I_{d+1}^{\otimes m-|w|}) S^{|w|}$$

(у випадку $|w| = m$, останній член у тензорному добутку зникає і $S^{|w|} = I_n$), або на базисних векторах,

$$X(\lambda)^w (e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_m}) = \lambda^w (E_{j_1+1,1} e_{i_{m-|w|+1}} \otimes \cdots \otimes E_{j_{|w|}+1,1} e_{i_m} \otimes e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{m-|w|}}).$$

Зауважимо, що оскільки λ_k, $k = 1, \dots, d$, - скаляри і, значить, комутують, ми можемо переписати λ^w як $\lambda^{t(w)}$, де $t\colon \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \to \mathbb{Z}_+^d$ - *відображення абеліанізації*: $t(w) = (t_1(w), \dots, t_d(w))$, з невід'ємним цілим числом $t_k(w)$ рівним кількості разів, що літера g_k з'являється у слові w. Таким чином, ми маємо $\lambda^w = \lambda^{t(w)} = \lambda_1^{t_1(w)} \cdots \lambda_d^{t_d(w)}$.

Для $w = g_{j_1} \cdots g_{j_{|w|}} \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$: $|w| = m+1$, ми маємо

$$\begin{aligned} X(\lambda)^w &= \lambda^{t(w)} (E_{j_1+1,1} \otimes I_{d+1}^{\otimes m-1}) S (E_{j_2+1,1} \otimes \cdots \otimes E_{j_{m+1},1}) \\ &= \lambda^{t(w)} (E_{j_1+1,1} E_{j_{m+1},1} \otimes E_{j_2+1,1} \otimes \cdots \otimes E_{j_m,1}) S = 0, \end{aligned}$$

оскільки $E_{j+1,1} E_{k+1,1} = 0$ для будь-яких $j, k \in \{1, \dots, d\}$. Отже, $X(\lambda) \in \mathrm{Nilp}_d(n, m+1)$, і за припущенням,

$$\begin{aligned} P(\lambda, \lambda') = K(X(\lambda), X(\lambda')) &= \sum_{w,w' \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d\colon 0 \le |w|,|w'| \le m} X(\lambda)^w X(\lambda')^{*w'^\top} \otimes K_{w,w'} \\ &= \sum_{t,t' \in \mathbb{Z}_+^d\colon 0 \le |t|,|t'| \le m} \Big(\sum_{w,w' \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d\colon t(w)=t, t(w')=t'} X^w X^{*w'^\top} \otimes K_{w,w'} \Big) \lambda^t (\overline{\lambda'})^{t'} - \end{aligned}$$

поліноміальна $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E})$-значна функція, яка є додатним ядром на $\mathbb{C}^d$. За лемою 1.29, коефіцієнти цього ядра слугують як операторні блоки $P_{t,t'} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E})$ матриці $M_P = (P_{t,t'})_{0 \le |t|,|t'| \le m}$ (для деякого порядку на $\mathbb{Z}_+^d$) що представляє додатний напіввизначений оператор на гільбертовому просторі $(\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E})^{\frac{(m+d)!}{m!d!}}$. Отже, для довільних векторів

$$u_t = \sum_{1 \le i_1, \dots, i_m \le d+1} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_m} \otimes u_{i_1,\dots,i_m}^{(t)} \in \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E} \cong (\mathbb{C}^{d+1})^{\otimes m} \otimes \mathcal{E},$$

де $t \in \mathbb{Z}_+^d$: $0 \le |t| \le m$, ми можемо написати

$$\begin{aligned} 0 &\le \sum_{t,t' \in \mathbb{Z}_+^d\colon 0 \le |t|,|t'| \le m} \langle P_{t,t'} u_{t'}, u_t \rangle_{\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E}} \\ &= \Big(\sum_{|t|=|t'|} + \sum_{|t|>|t'|} + \sum_{|t|<|t'|} \Big) \langle P_{t,t'} u_{t'}, u_t \rangle_{\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E}} = A + B + C. \end{aligned}$$

Обчислимо кожну з сум A, B і C окремо:

$$
\begin{aligned}
A &= \sum_{|t|=|t'|} \langle P_{t,t'} u_{t'}, u_t \rangle_{\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E}} \\
&= \sum_{|t|=|t'|} \Big\langle \Big(\sum_{w,w' \in \mathcal{G}_d \colon t(w)=t,\, t(w')=t'} X^w X^{*w'^\top} \otimes K_{w,w'} \Big) u_{t'}, u_t \Big\rangle_{\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E}} \\
&= \sum_{|t|=|t'|} \sum_{t(w)=t,\, t(w')=t'} \Big\langle \Big(\big(E_{j_1+1,1} \otimes \cdots \otimes E_{j_{|w|}+1,1} \otimes I_{d+1}^{\otimes m-|w|} \big) S^{|w|} \\
&\times S^{*|w'|} \big(E_{1,k_1+1} \otimes \cdots \otimes E_{1,k_{|w'|}+1} \otimes I_{d+1}^{\otimes m-|w'|} \big) \otimes K_{w,w'} \Big) u_{t'}, u_t \Big\rangle_{\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E}} \\
&= \sum_{|t|=|t'|} \sum_{t(w)=t,\, t(w')=t'} \Big\langle \big(E_{j_1+1,k_1+1} \otimes \cdots \otimes E_{j_{|w|}+1,k_{|w'|}+1} \otimes I_{d+1}^{\otimes m-|t|} \big) \\
&\times \sum_{1 \le i_1,\dots,i_m \le d+1} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_m} \otimes K_{w,w'} u^{(t')}_{i_1,\dots,i_m}, \\
&\quad \sum_{1 \le s_1,\dots,s_m \le d+1} e_{s_1} \otimes \cdots \otimes e_{s_m} \otimes u^{(t)}_{s_1,\dots,s_m} \Big\rangle_{\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E}} \\
&= \sum_{|t|=|t'|} \sum_{t(w)=t,\, t(w')=t'} \sum_{1 \le i_{|t'|+1},\dots,i_m \le d+1} \Big\langle K_{w,w'} u^{(t')}_{k_1+1,\dots,k_{|w'|}+1,i_{|t'|+1},\dots,i_m}, \\
&\quad u^{(t)}_{j_1+1,\dots,j_{|w|}+1,i_{|t'|+1},\dots,i_m} \Big\rangle_{\mathcal{E}};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= \sum_{|t|>|t'|} \langle P_{t,t'} u_{t'}, u_t \rangle_{\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E}} \\
&= \sum_{|t|>|t'|} \Big\langle \Big(\sum_{w,w' \in \mathcal{G}_d \colon t(w)=t,\, t(w')=t'} X^w X^{*w'^\top} \otimes K_{w,w'} \Big) u_{t'}, u_t \Big\rangle_{\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E}} \\
&= \sum_{|t|>|t'|} \sum_{t(w)=t,\, t(w')=t'} \Big\langle \Big(\big(E_{j_1+1,1} \otimes \cdots \otimes E_{j_{|w|}+1,1} \otimes I_{d+1}^{\otimes m-|w|} \big) S^{|w|} \\
&\times S^{*|w'|} \big(E_{1,k_1+1} \otimes \cdots \otimes E_{1,k_{|w'|}+1} \otimes I_{d+1}^{\otimes m-|w'|} \big) \otimes K_{w,w'} \Big) u_{t'}, u_t \Big\rangle_{\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E}} \\
&= \sum_{|t|>|t'|} \sum_{t(w)=t,\, t(w')=t'} \Big\langle \Big(E_{j_1+1,1} \otimes \cdots \otimes E_{j_{|w|-|w'|}+1,1} \\
&\otimes E_{j_{|w|-|w'|+1}+1,k_1+1} \otimes \cdots \otimes E_{j_{|w|}+1,k_{|w'|}+1} \otimes I_{d+1}^{\otimes m-|t|} \otimes K_{w,w'} \Big) \\
&\times \sum_{1 \le i_1,\dots,i_m \le d+1} e_{i_{m-|w|+|w'|+1}} \otimes \cdots \otimes e_{i_m} \otimes e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_{m-|w|+|w'|}} \otimes u^{(t')}_{i_1,\dots,i_m}, \\
&\quad \sum_{1 \le s_1,\dots,s_m \le d+1} e_{s_1} \otimes \cdots \otimes e_{s_m} \otimes u^{(t)}_{s_1,\dots,s_m} \Big\rangle_{\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E}} \\
&= \sum_{|t|>|t'|} \sum_{t(w)=t,\, t(w')=t'} \sum_{1 \le i_{|t'|+1},\dots,i_{m-|t|+|t'|} \le d+1} \Big\langle K_{w,w'} \\
&\times u^{(t')}_{k_1+1,\dots,k_{|w'|}+1,i_{|t'|+1},\dots,i_{m-|t|+|t'|},1,\dots,1}, u^{(t)}_{j_1+1,\dots,j_{|w|}+1,i_{|t'|+1},\dots,i_{m-|t|+|t'|}} \Big\rangle_{\mathcal{E}};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C &= \sum_{|t|<|t'|} \langle P_{t,t'} u_{t'}, u_t \rangle_{\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E}} \\
&= \sum_{|t|<|t'|} \Big\langle \Big(\sum_{w,w' \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \colon t(w)=t,\, t(w')=t'} X^w X^{*w'^\top} \otimes K_{w,w'} \Big) u_{t'}, u_t \Big\rangle_{\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E}} \\
&= \sum_{|t|<|t'|} \sum_{t(w)=t,\, t(w')=t'} \Big\langle \Big(\big(E_{j_1+1,1} \otimes \cdots \otimes E_{j_{|w|}+1,1} \otimes I_{d+1}^{\otimes m-|w|} \big) S^{|w|} \\
&\times S^{*|w'|} \big(E_{1,k_1+1} \otimes \cdots \otimes E_{1,k_{|w'|}+1} \otimes I_{d+1}^{\otimes m-|w'|} \big) \otimes K_{w,w'} \Big) u_{t'}, u_t \Big\rangle_{\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E}} \\
&= \sum_{|t|<|t'|} \sum_{t(w)=t,\, t(w')=t'} \Big\langle \Big(E_{j_1+1,k_{|w'|-|w|+1}+1} \otimes \cdots \otimes E_{j_{|w|}+1,k_{|w'|}+1} \\
&\otimes I_{d+1}^{\otimes m-|t'|} \otimes E_{1,k_1+1} \otimes \cdots \otimes E_{1,k_{|w'|-|w|}+1} \otimes K_{w,w'} \Big) \\
&\times \sum_{1 \le i_1,\dots,i_m \le d+1} e_{i_{|w'|-|w|+1}} \otimes \cdots \otimes e_{i_m} \otimes e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{|w'|-|w|}} \otimes u^{(t')}_{i_1,\dots,i_m}, \\
&\sum_{1 \le s_1,\dots,s_m \le d+1} e_{s_1} \otimes \cdots \otimes e_{s_m} \otimes u^{(t)}_{s_1,\dots,s_m} \Big\rangle_{\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E}} \\
&= \sum_{|t|<|t'|} \sum_{t(w)=t,\, t(w')=t'} \sum_{1 \le i_{|t'|+1},\dots,i_m \le d+1} \Big\langle K_{w,w'} \\
&\times u^{(t')}_{k_1+1,\dots,k_{|w'|}+1,i_{|t'|+1},\dots,i_m}, u^{(t)}_{j_1+1,\dots,j_{|w|}+1,i_{|t'|+1},\dots,i_m,1\dots,1} \Big\rangle_{\mathcal{E}}.
\end{aligned}
$$

Зараз, для $t \in \mathbb{Z}_+^d$: $0 \le |t| \le m$, і $w = g_{j_1} \cdots g_{j_{|w|}} \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$: $t(w) = t$, покладемо

$$
u^{(t)}_{j_1+1,\dots,j_{|w|}+1,i_{|t|+1},\dots,i_m} = 0 \quad \text{для } (i_{|t|+1}, \dots, i_m) \ne (1, \dots, 1),
$$

і

$$
u^{(t)}_{j_1+1,\dots,j_{|w|}+1,1,\dots,1} = u^{(t(w))}_{j_1+1,\dots,j_{|w|}+1,1,\dots,1} = h_w \in \mathcal{E}.
$$

Тоді нерівність $A + B + C \ge 0$ перетворюється у

$$
\sum_{w,w' \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \colon 0 \le |w|,|w'| \le m} \langle K_{w,w'} h_{w'}, h_w \rangle_{\mathcal{E}} \ge 0.
$$

Оскільки ціле $m > 1$ і вектори $h_w \in \mathcal{E}$ обрані довільно, це значить, що $K(x, x')$ є додатним ядром (для випадків $m = 0$ і $m = 1$ нерівність вище випливає зараз автоматично). $\square$

Зауважимо, що використовуючи нільпотентні матричні підстановки, можна уникнути припущення збіжності н.к. формальних степеневих рядів. Існує також "збіжна" версія теореми 1.28. Н.к. формальний ряд $K(x, x') \in \mathcal{L}(\mathcal{E})\langle\langle x, x' \rangle\rangle$, як у (1.44), називається *збіжним*, якщо для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує зв'язний відкритий окіл U_n точки 0 у $(\mathbb{C}^{n \times n})^d$ такий, що ряд $K(X, X')$, як у (1.46), збігається рівномірно на компактних підмножинах $U_n \times U_n$ в нормі $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E})$ (ми припускаємо, що $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ і $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d \times \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ упорядковані, скажімо, лексикографічно).

Теорема 1.30. *Н.к. формальний степеневий ряд $K(x,x') \in \mathcal{L}(\mathcal{E})\langle\langle x,x'\rangle\rangle$, що є збіжним відносно сукупності околів U_n точок 0 у $(\mathbb{C}^{n\times n})^d$, $n \in \mathbb{N}$, є додатним ядром тоді і тільки тоді, коли $K(X,X')$ - додатне $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E})$-значне ядро на U_n для кожного $n \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Припустимо, що збіжний формальний степеневий ряд $K(x,x') \in \mathcal{L}(\mathcal{E})\langle\langle x,x'\rangle\rangle$ (відносно сукупності околів U_n точок 0 у $(\mathbb{C}^{n\times n})^d$, $n \in \mathbb{N}$), є додатним ядром. Тоді [**32**] $K(x,x')$ допускає факторізацію $K(x,x') = H(x)H(x')^*$ для деякого збіжного формального степеневого ряду $H(x)$, як у (1.45), тобто для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує окіл V_n точки 0 у $(\mathbb{C}^{n\times n})^d$ такий, що ряд $H(X) = \sum_{w\in\mathcal{G}_d} X^w \otimes H_w$ збігається рівномірно на компактних підмножинах V_n (в нормі банахова простора $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H}, \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E})$). Оскільки ми можемо замінити V_n на $V_n \cap U_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, без втрати загальності ми можемо припустити, що $V_n \subset U_n$, $n \in \mathbb{N}$. У цьому випадку $K(X,X')$ - додатне $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E})$-значне ядро на U_n. (Ми спочатку бачимо, що $K(X,X') = H(X)H(X')^*$ - додатне ядро на V_n, потім спостерігаєм, що завдяки рівномірній збіжності ряду для $K(X,X')$ на компактних підмножинах U_n, функція $K(X,X')$ є півторааналітичною, і тоді користаємось фактом, що властивість додатності поширюється на довільно великий регіон, на якому ядро півторааналітичне; дивись [**10**, теорема 1.1.4] в одновимірному випадку – загальний випадок є повністю аналогічним.)

Навпаки, якщо $K(x,x') \in \mathcal{L}(\mathcal{E})\langle\langle x,x'\rangle\rangle$ - збіжний формальний степеневий ряд і якщо $K(X,X')$ - додатне $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E})$-значне ядро на U_n для кожного $n \in \mathbb{N}$, то $K(x,x')$ - додатне н.к. ядро. Доведення таке саме, як і для теореми 1.28, за винятком того, що многочлен $P(\lambda,\lambda')$ є гарантовано додатним ядром тільки на околі точки 0 у $\mathbb{C}^d$; з доведення леми 1.29 ясно, що це все ще стосується додатної напіввизначеності блочної операторної матриці M_P (альтернативно, ми можемо використати властивість поширення додатності для півторааналітичних ядер, згадану вище, щоб показати спочатку, що $P(\lambda,\lambda')$ - додатне ядро на всьому $\mathbb{C}^d$). $\square$

В "нільпотентному" випадку існує значне посилення теореми 1.28.

Теорема 1.31. *Н.к. формальний степеневий ряд $K(x,x') \in \mathcal{L}(\mathcal{E})\langle\langle x,x'\rangle\rangle$ вигляду* (1.44) *- додатне ядро тоді і тільки тоді, коли для кожних $n \in \mathbb{N}$ і $X \in \mathrm{Nilp}_d(n)$,*

$$K(X,X) := \sum_{w,w'\in\mathcal{G}_d} X^w X^{*w'^\top} \otimes K_{w,w'} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E}) - \tag{1.48}$$

додатно напіввизначений оператор, тобто для будь-якого $h \in \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E}$ ми маємо

$$\langle K(X,X)h,h\rangle_{\mathbb{C}^n\otimes\mathcal{E}} \geq 0.$$

Доведення цієї теореми використовує конструкцію, яка дуже відрізняється від тієї, яку ми використовували у доведенні теореми 1.28. Ясно, що теорема 1.31 тягне за собою теорему 1.28. Проте, нам потрібне оригінальне незалежне доведення

теореми 1.28 теж, оскільки аргумент у тому доведенні також виникає у доведенні теореми 1.30.

Доведення теореми 1.31. Один напрямок теореми є очевидним завдяки зауваженню після формулювання теореми 1.28 і факту, що оператор $H(X)H(X)^*$ є додатно напіввизначеним.

Для другого напрямку, припустимо, що $K(x,x') \in \mathcal{L}(\mathcal{E})\langle\langle x,x'\rangle\rangle$, як у (1.44), таке, що для кожних $n \in \mathbb{N}$ і $X \in \mathrm{Nilp}_d(n)$ оператор $K(X,X)$, як у (1.97), є додатно напіввизначеним. Зафіксуємо $m \in \mathbb{N}$, і для довільного $s > 0$ позначимо як $\mathcal{H}_s$ гільбертів простір з ортогональним базисом, рівним множині $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d^{(m)}$ слів $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ довжини не більше m, нормалізованих як $\langle w,w\rangle = s^{-|w|}$. Нехай S^* позначає набір d зворотних зсувів на $\mathcal{H}_s$, визначений як $S_j^* w = v$, якщо $w = g_j v$, і $S_j^* w = 0$ в інших випадках. Ясно, що $S \in \mathrm{Nilp}_d(\sum_{j=0}^m d^j, m+1)$. Для даних векторів $h_\alpha \in \mathcal{E}$ $(\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d^{(m)})$, обчислимо:

$$
\begin{aligned}
&\Big\langle K(S,S)\sum_{\alpha\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d^{(m)}} \alpha\otimes h_\alpha, \sum_{\beta\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d^{(m)}} \beta\otimes h_\beta\Big\rangle_{\mathcal{H}_s\otimes\mathcal{E}}\\
&= \Big\langle \sum_{w,w'\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d^{(m)}} S^w S^{*w'^T}\otimes K_{w,w'} \sum_{\alpha\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d^{(m)}} \alpha\otimes h_\alpha, \sum_{\beta\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d^{(m)}} \beta\otimes h_\beta\Big\rangle_{\mathcal{H}_s\otimes\mathcal{E}}\\
&= \sum_{w,w'\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d^{(m)}} \sum_{\alpha,\beta\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d^{(m)}} \Big\langle S^{*w'^T}\alpha, S^{*w^T}\beta\Big\rangle_{\mathcal{H}_s} \langle K_{w,w'}h_\alpha, h_\beta\rangle_{\mathcal{E}}\\
&= \sum_{\gamma\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d^{(m)}} \sum_{w,w'\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d^{(m-|\gamma|)}} \langle\gamma,\gamma\rangle_{\mathcal{H}_s} \langle K_{w,w'}h_{w'\gamma}, h_{w\gamma}\rangle_{\mathcal{E}}\\
&= \sum_{\gamma\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d^{(m)}} \sum_{w,w'\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d^{(m-|\gamma|)}} \langle K_{w,w'}h_{w'\gamma}, h_{w\gamma}\rangle_{\mathcal{E}}\, s^{-|\gamma|}.
\end{aligned}
$$

За гіпотезою, $K(S,S)$ - додатно напіввизначений оператор на $\mathcal{H}_s$ для кожного $s > 0$. Дозволяючи s прямувати до нескінченності, отримаємо

$$
\sum_{w,w'\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d^{(m)}} \langle K_{w,w'}h_{w'}, h_w\rangle_{\mathcal{E}} \geq 0,
$$

що, в силу довільності $m \in \mathbb{N}$ і векторів $h_w \in \mathcal{E}$ $(w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d^{(m)})$, означає, що $K(x,x')$ - додатне н.к. ядро. □

Зауважимо, що твердження, аналогічне теоремі 1.31, не вірне у "збіжному" випадку. Справді, покладемо $K(x,x') := 1 - xx' \in \mathbb{C}\langle x,x'\rangle$ (тут $d = 1$). Ясно, що $K(X,X) > 0$ для матриці X (будь-якого разміру), близької до нуля, проте $K(x,x')$ не є додатним н.к. ядром, оскільки його матриця коефіцієнтів $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ невизначена.

Теорема 1.31 тягне за собою результат про факторізацію певного класу н.к. многочленів. Операторнозначний многочлен від $2d$ н.к. невизначених $x = (x_1, \ldots,$- $x_d)$ і $x' = (x'_1, \ldots, x'_d)$ називається *спадковим*, якщо він має вигляд

$$K(x, x') = \sum_{w,w' \in \mathcal{G}_d \colon |w| \le m, |w'| \le m} z^w z'^{w'^T} K_{w,w'} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}) \langle x, x' \rangle , \tag{1.49}$$

де $\mathcal{E}$ - гільбертів простір, тобто кожний x'_j виникає справа від кожного x_i, у кожному одночлені.

Теорема 1.32. *Спадковий многочлен $K(x, x') \in \mathcal{L}(\mathcal{E}) \langle x, x' \rangle$, як у (1.49), задовольняє $K(X, X) \ge 0$ для всіх $X \in \mathrm{Nilp}_d(n)$ ($n = 1, 2, \ldots$) тоді і тільки тоді, коли існують гільбертів простір $\mathcal{H}$ (вимірності не більше $\dim(\mathcal{E}) \sum_{j=0}^m d^j$) і многочлен $H(x) = \sum_{w \in \mathcal{G}_d \colon |w| \le m} x^w H_w \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{E}) \langle x \rangle$ такі, що $K(x, x') = H(x) H(x')^*$. Більше того, для цієї факторізації достатньо припустити, що $K(X, X) \ge 0$ є вірним для всіх $X \in \mathrm{Nilp}_d(\sum_{j=0}^m d^j, m + 1)$.*

Доведення. Твердження випливає з теореми 1.31, оскільки у цьому випадку $K(x, x') \in \mathcal{L}(\mathcal{E}) \langle x, x' \rangle$ - додатне н.к. ядро. Оцінку для $\dim(\mathcal{H})$ легко отримати з факту, що матриця $(K_{w,w'})_{|w| \le m, |w'| \le m}$ із блоками з $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ має розмір $\left(\sum_{j=0}^m d^j\right) \times \left(\sum_{j=0}^m d^j\right)$ і є додатно напіввизначеною. Останнє твердження теореми (про розмір та ранг спільної нільпотентності тестових матриць) випливає з доведення теореми 1.31. □

Теорема 1.32 є аналогом головного результату статті [**73**] (пов'язані з ним результати і узагальнення дивись у [**105**] і [**83**]).

1.7. Консервативні ділатації дисипативних багатовимірних систем: комутативне і н.к. налаштування

Слідуючи [**27**], ми формулюємо у цьому підрозділі комутативний і н.к. аналоги класичних результатів про консервативні ділатації дисипативних 1D лінійних систем [**17, 143**], які грають важливу роль у теорії операторних моделей для операторів стиску [**144**].

Розглянемо *1D лінійну систему* вигляду

$$\Sigma : \begin{cases} h(x) &= xAh(x) + xBu(x), \\ y(x) &= Ch(x) + Du(x), \end{cases} \tag{1.50}$$

де $h \in \mathcal{H} \langle\langle x \rangle\rangle$, $u \in \mathcal{U} \langle\langle x \rangle\rangle$, $y \in \mathcal{Y} \langle\langle x \rangle\rangle$ - формальні степеневі ряди від одного невизначеного x з коефіцієнтами у гільбертових просторах $\mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}$, відповідно, і $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{H})$, $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{Y})$, $D \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$. Порівнюючи коефіцієнти формальних степеневих рядів у двох частинах рівнянь (1.50), ми отримаємо стандартний вигляд *1D лінійної системи у дискретній часовій області*:

$$\Sigma : \begin{cases} h_{j+1} &= Ah_j + Bu_j, \\ y_j &= Ch_j + Du_j, \end{cases} \qquad j = 0, 1, \ldots, \tag{1.51}$$

разом з нульовою початковою умовою $h_0 = 0$. Тут і далі ми віддаємо перевагу запису лінійної системи у вигляді рівнянь для формальних степеневих рядів від однієї чи кількох, комутуючих чи н.к., невизначених.

Ми отримаємо з (1.50) рівність $y(x) = T_\Sigma(x)u(x)$, де

$$T_\Sigma(x) := D + C(I_{\mathcal{H}} - xA)^{-1}xB = D + \sum_{j=1}^{\infty} CA^{j-1}Bx^j \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})\,\langle\langle x\rangle\rangle$$

- формальний степеневий ряд від x з коефіцієнтами у $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$, який називається *передавальною функцією* системи Σ. Ясно, що підстановка скалярів у ряд T_Σ добре визначена у деякому околі $0 \in \mathbb{C}$, де ряд збігається, так що T_Σ стає голоморфною функцією на цьому околі. Якщо система Σ вигляду (1.50) *дисипативна*, тобто оператор системи

$$G := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{H} \oplus \mathcal{Y}) \tag{1.52}$$

є стискаючим, то $T_\Sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ (*клас Шура*). Навпаки, кожний формальний степеневий ряд $\mathfrak{F}$ з класу $\mathcal{S}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ має дисипативну, більше того, консервативну реалізацію (тобто 1D систему Σ з унітарним оператором G з (1.52) таку, що $\mathfrak{F} = T_\Sigma$).

Позначимо колекцію даних для 1D системи (1.50) чи (1.51) як

$$\Sigma = (1; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}).$$

Ми будемо ототожнювати систему Σ вигляду (1.50) з цією колекцією даних. Нагадаємо, що 1D система $\widetilde{\Sigma} = (1; \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, D; \widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ називається *ділатацією* 1D системи $\Sigma = (1; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$, якщо існують підпростори $\mathcal{D}$ і $\mathcal{D}_*$ у $\widetilde{\mathcal{H}}$ такі, що

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{D} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{D}_*, \tag{1.53}$$

$$\widetilde{A}\mathcal{D} \subset \mathcal{D}, \quad \widetilde{C}\mathcal{D} = \{0\}, \quad \widetilde{A}^*\mathcal{D}_* \subset \mathcal{D}_*, \quad \widetilde{B}^*\mathcal{D}_* = \{0\}, \tag{1.54}$$

$$A = P_{\mathcal{H}}\widetilde{A}|\mathcal{H}, \quad B = P_{\mathcal{H}}\widetilde{B}, \quad C = \widetilde{C}|\mathcal{H} \tag{1.55}$$

(тут $P_{\mathcal{H}}$ позначає отогональний проєктор на $\mathcal{H}$ у $\widetilde{\mathcal{H}}$). Наступна лема, яка була доведена у [**93**], дає переформулювання цього геометричного визначення на алгебраїчній мові і узагальнює лему Сарасона [**134**, лема 0] на випадок ділатацій систем.

Лема 1.33. *Система $\widetilde{\Sigma} = (1; \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, D; \widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ є ділатацією системи $\Sigma = (1; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ тоді і тільки тоді, коли $\widetilde{\mathcal{H}} \supset \mathcal{H}$ і для всіх $j \in \mathbb{Z}_+$ мають місце наступні рівності:*

$$A^j = P_{\mathcal{H}}\widetilde{A}^j|H, \;\; A^jB = P_{\mathcal{H}}\widetilde{A}^j\widetilde{B}, \;\; CA^j = \widetilde{C}\widetilde{A}^j|\mathcal{H}, \;\; CA^jB = \widetilde{C}\widetilde{A}^j\widetilde{B}. \tag{1.56}$$

Спеціальним випадком леми 1.33, де $\mathcal{U} = \mathcal{Y} = \{0\}$, є лема Сарасона [**134**, лема 0]. З леми 1.33 ми отримаємо добре відомий факт (дивись, наприклад, [**17**]), що передавальні функції 1D системи і її ділатації співпадають (як формальні степеневі ряди і як функції, голоморфні в $0 \in \mathbb{C}$, на деякому околі точки 0). В [**17**] було доведено, що будь-яка дисипативна 1D система має консервативну ділатацію; більш того, існує мінімальна така консервативна ділатація, яка є єдиною с точністю до унітарної подібності. Цей результат є узагальненням теореми С.-Надя про існування унітарної ділатації стискаючого оператора [**143**].

Ми узагальнемо ці разультати на випадок dD систем, як у комутативному, так і в н.к. налаштуванні. Зауважимо, що існують різні типи dD систем. Відповідно, є різні формулювання теореми про консервативну ділатацію. Ми концентруємось тут на системах Форнасіні–Маркесіні (FM).

FM системи мають вигляд

$$\Sigma^{FM} : \begin{cases} h(x) &= xAh(x) + xBu(x), \\ y(x) &= Ch(x) + Du(x), \end{cases} \tag{1.57}$$

де h, u, y - (комутативні або н.к., залежно від налаштування) формальні степеневі ряди від невизначених $x_1, \ldots, x_d$, з коефіцієнтами у гільбертових просторах $\mathcal{H}, \mathcal{U}$ і $\mathcal{Y}$, відповідно, наборами операторів $A = (A_1, \ldots, A_d) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^d$, $B = (B_1, \ldots, B_d) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{H})^d$ і операторами $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{Y}),\ D \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$. Порівняння коефіцієнтів формальних степеневих рядів в обох частинах рівнянь (1.57) дає версію FM системи в часовій області, що з'явилась у [**57**] в комутативному налаштуванні, і в [**24, 26**] в н.к. налаштуванні.

Передавальна функція (комутативної або н.к.) FM системи $\Sigma^{FM} = (d; A, B,$- $C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ - це (комутативний або н.к.) формальний степеневий ряд

$$T_{\Sigma^{FM}}(x) = D + C(I_{\mathcal{H}} - xA)^{-1}xB = D + \sum_{j=0}^{\infty} C(xA)^j xB$$

з коефіцієнтами у $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ (дивись також підрозділ 1.1). Тут ми користаємось позначенням $xA := x_1A_1 + \cdots + x_dA_d$, тощо.

Комутативна FM система $\Sigma^{FM,c} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ називається *дисипативною* (відп., *консервативною*) *у полікруговій версії*, якщо для кожного $\zeta \in \mathbb{T}^d$, де

$$\mathbb{T}^d := \{x \in \mathbb{C}^d \colon |x_k| = 1,\ k = 1, \ldots, d\} -$$

одиничний тор,

$$G_\zeta := \begin{bmatrix} \zeta A & \zeta B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{H} \oplus \mathcal{Y})$$

є стискаючим (відп., унітарним) оператором. Передавальна функція $T_{\Sigma^{FM,c}}$ дисипативної комутативної FM системи $\Sigma^{FM,c} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ належить класу $\mathcal{B}_d(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ аналітичних стискаючих $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$-значних функцій на одиничному полікрузі $\mathbb{D}^d$. Як було показано неявно у [**30**], довільний комутативний формальний

степеневий ряд, асоційований з функцією F з класу Шура–Аглера $\mathcal{SA}_d(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ має *консервативну комутативну реалізацію FM системою* $\Sigma^{FM,c} = (d; A, B, C, D;$-$\mathcal{H},\mathcal{U},\mathcal{Y})$ вигляду (1.57), тобто $F = T_{\Sigma^{FM,c}}$.

Н.к. FM система $\Sigma^{FM,nc} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H},\mathcal{U},\mathcal{Y})$ називається *дисипативною* (відп., *консервативною*) *в н.к. полікруговій версії*, якщо для кожного $U \in \mathcal{U}^d \cap \mathcal{L}(\mathcal{E})^d$, з деяким гільбертовим простором $\mathcal{E}$, де $\mathcal{U}^d$ - множина наборів d унітарних операторів в гільбертовому просторі,

$$G_U := \begin{bmatrix} U \otimes A & U \otimes B \\ I_{\mathcal{E}} \otimes C & I_{\mathcal{E}} \otimes D \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes (\mathcal{H} \oplus \mathcal{U}), \mathcal{E} \otimes (\mathcal{H} \oplus \mathcal{Y}))$$

є стискаючим (відп., унітарним) оператором. Тут $U \otimes A = U_1 \otimes A_1 + \cdots + U_d \otimes A_d$, тощо. Н.к. FM система $\Sigma^{FM,nc} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H},\mathcal{U},\mathcal{Y})$ - консервативна тоді і тільки тоді, коли відповідна комутативна FM система $\Sigma^{FM,c} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H},\mathcal{U},\mathcal{Y})$ - консервативна. Справді, “тільки тоді"частина очевидна. Для доведення “тоді"частини, припустимо, що $\Sigma^{FM,c}$ консервативна. Тоді для кожного $\zeta \in \mathbb{T}^d$ оператор G_ζ - унітарний, тобто ізометричний і коізометричний. Відношення ізометрії для $\zeta \in \mathbb{T}^d$ разом еквівалентні наступним рівностям (дивись (2.16) у [**30**]):

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{d} A_k^* A_k + C^*C = I_{\mathcal{H}}, \quad \textstyle\sum_{k=1}^{d} A_k^* B_k + C^*D = 0, \quad \sum_{k=1}^{d} B_k^* B_k + D^*D = I_{\mathcal{U}}, \\ &A_k^* A_j = 0, \qquad A_k^* B_j = 0, \qquad B_k^* B_j = 0 \qquad \text{для } k \neq j. \end{aligned} \tag{1.58}$$

Для довільного набору $U = (U_1, \ldots, U_d)$ (не обов'язково комутуючих) унітарних операторів на спільному гільбертовому просторі $\mathcal{E}$, в силу (1.58) ми отримаємо

$$\begin{aligned} G_U^* G_U &= \begin{bmatrix} U \otimes A & U \otimes B \\ I_{\mathcal{E}} \otimes C & I_{\mathcal{E}} \otimes D \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} U \otimes A & U \otimes B \\ I_{\mathcal{E}} \otimes C & I_{\mathcal{E}} \otimes D \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{\mathcal{E}} \otimes \left(\sum_{k=1}^{d} A_k^* A_k + C^*C \right) & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{E}} \otimes \left(\sum_{k=1}^{d} B_k^* B_k + D^*D \right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{\mathcal{E}\otimes\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{E}\otimes\mathcal{U}} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

тобто G_U - ізометрія. Аналогічно, з відношень коізометрії для G_ζ, $\zeta \in \mathbb{T}^d$, ми отримаємо відношення коізометрії для G_U, $U \in \mathcal{U}^d$. Отже, G_U - унітарне для кожного $U \in \mathcal{U}^d$, тобто система $\Sigma^{FM,nc}$ - консервативна.

Ясно, що якщо $\Sigma^{FM,nc}$ дисипативна, то $\Sigma^{FM,c}$ - також дисипативна. Зворотне є вірним у випадках $d = 1$ і $d = 2$, і не є вірним у випадку $d \geq 3$. Справді, у випадку $d \geq 3$, за [**94**] існує набір $A = (A_1, \ldots, A_d)$ операторів на деякому гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ і набір $T = (T_1, \ldots, T_d)$ стисків на деякому іншому гільбертовому просторі $\mathcal{E}$ такі, що $\|T \otimes A\| > 1 = \max_{\zeta \in \mathbb{T}^d} \|\zeta A\|$. Тоді комутативна FM система $\Sigma^{FM,c} := (d; \mathbf{A}, 0, 0, 0; \mathcal{H}, \{0\}, \{0\})$ є дисипативною, і відповідна н.к. FM система

$\Sigma^{FM,nc} := (d; \mathbf{A}, 0, 0, 0; \mathcal{X}, \{0\}, \{0\})$ не є дисипативною, тому що стиски T_k можуть бути розширені до унітарних операторів U_k на деякому більшому гільбертовому просторі і $\|U \otimes A\| \geq \|T \otimes A\| > 1$.

Пропозиція 1.34. *Передавальна функція $T_{\Sigma^{FM,nc}}$ дисипативної н.к. FM системи $\Sigma^{FM,nc} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ належить н.к. класу Шура–Аглера $\mathcal{SA}_d^{nc}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$.*

Доведення. Нехай $\Sigma^{FM,nc} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ - дисипативна н.к. FM система. Нехай $n \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$ і $T = (T_1, \ldots, T_d) \in \mathcal{D}_{\mathrm{nc}}^d \cap (\mathbb{C}^{n\times n})^d$. Тоді за принціпом максимума

$$\|G_T\| = \left\| \begin{bmatrix} T \otimes A & T \otimes A \\ I_n \otimes C & I_n \otimes D \end{bmatrix} \right\| \leq 1$$

(ми нагадуємо, що $\mathcal{U}^d \cap (\mathbb{C}^{n\times n})^d$ - границя Шілова $\mathcal{D}_{\mathrm{nc}}^d \cap (\mathbb{C}^{n\times n})^d$ [**140**]). Отже, завдяки факту, що $T = (T_1, \ldots, T_d)$ - набір строгих стисків,

$$\|T \otimes A\| = \|(I_n \otimes P_{\mathcal{H}})G_T|\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H}\| < 1.$$

Це тягне за собою, що

$$\begin{aligned} T_{\Sigma^{FM,nc}}(T) &= I_n \otimes D + (I_n \otimes C)\sum_{j=0}^{\infty}(T \otimes A)^j(T \otimes B) \\ &= I_n \otimes D + (I_n \otimes C)(I_n \otimes I_{\mathcal{H}} - T \otimes A)^{-1}(T \otimes B) \end{aligned}$$

є добре визначеним. 1D система $\Sigma_T^{FM,nc} := (1; T \otimes A, T \otimes B, I_n \otimes C, I_n \otimes D; \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H}, \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{U}, \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{Y})$ - дисипативна, і значить, її передавальна функція

$$T_{\Sigma_T^{FM,nc}}(\lambda) = I_n \otimes D + (I_n \otimes C)(I_{\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H}} - \lambda(T \otimes A))^{-1}\lambda(T \otimes B)$$

є стискаючою голоморфною функцією в одиничному крузі $\mathbb{D}$. Функція $T_{\Sigma^{FM,nc}}(X)$, як функція матричних елементів $(X_k)_{ij},\ k = 1, \ldots, d,\ i, j = 1, \ldots, n$, є голоморфною, і значить, неперервною на $\mathcal{D}_{\mathrm{nc}}^d \cap (\mathbb{C}^{n\times n})^d$. Отже,

$$\|T_{\Sigma^{FM,nc}}(T)\| = \lim_{\lambda\in\mathbb{D},\, \lambda\to 1} \|T_{\Sigma^{FM,nc}}(\lambda T)\| = \lim_{\lambda\in\mathbb{D},\, \lambda\to 1} \|T_{\Sigma_T^{FM,nc}}(\lambda)\| \leq 1,$$

з чого отримаємо, що $T_{\Sigma^{FM,nc}} \in \mathcal{SA}_d^{nc}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$. □

З іншого боку, з [**26**, теорема 5.3] випливає, що довільний н.к. формальний степеневий ряд $\mathfrak{F}$ з класу $\mathcal{SA}_d^{nc}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ допускає *консервативну реалізацію н.к. FM системою*, тобто $\mathfrak{F} = T_{\Sigma^{FM,nc}}$. Оскільки будь-яка консервативна н.к. FM система є дисипативною, клас передавальних функцій дисипативних н.к. FM систем, також як і клас передавальних функцій консервативних н.к. FM систем, з простором входів $\mathcal{U}$ і простором виходів $\mathcal{Y}$, є $\mathcal{SA}_d^{nc}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$.

Будемо казати, що н.к. FM система $\widetilde{\Sigma}^{FM,nc} = (d; \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, D; \widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ є *ділатацією н.к. FM системи* $\Sigma^{FM,nc} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$, якщо для кожних $n \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$ і $X = (X_1, \ldots, X_d) \in (\mathbb{C}^{n\times n})^d$ 1D система $\widetilde{\Sigma}_X := (1; X \otimes \widetilde{A}, X \otimes \widetilde{B}, I_n \otimes \widetilde{C}, I_n \otimes D; \mathbb{C}^n \otimes \widetilde{\mathcal{H}}, \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{U}, \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{Y})$ є ділатацією 1D системи $\Sigma_X := (1; X \otimes A, X \otimes B, I_n \otimes C, I_n \otimes D; \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H}, \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{U}, \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{Y})$, тобто для кожних $n \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$ і $X \in (\mathbb{C}^{n\times n})^d$ існують підпростори $\mathcal{D}_X$ і $\mathcal{D}_{*,X}$ у $\mathbb{C}^n \otimes \widetilde{\mathcal{H}}$ такі, що

$$\mathbb{C}^n \otimes \widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{D}_X \oplus (\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H}) \oplus \mathcal{D}_{*,X}, \tag{1.59}$$

(1.60)
$$(X \otimes \widetilde{A})\mathcal{D}_X \subset \mathcal{D}_X,\ (I_n \otimes \widetilde{C})\mathcal{D}_X = \{0\},\ (X \otimes \widetilde{A})^*\mathcal{D}_{*,X} \subset \mathcal{D}_{*,X},\ (X \otimes \widetilde{B})^*\mathcal{D}_{*,X} = \{0\},$$

(1.61)
$$X \otimes A = (I_n \otimes P_{\mathcal{H}})(X \otimes \widetilde{A})|\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H},\ X \otimes B = (I_n \otimes P_{\mathcal{H}})(X \otimes \widetilde{B}),\ I_n \otimes C = (I_n \otimes \widetilde{C})|\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H}.$$

Пропозиція 1.35. *Система* $\widetilde{\Sigma}^{FM,nc} = (d; \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, D; \widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ *є ділатацією системи* $\Sigma^{FM,nc} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ *тоді і тільки тоді, коли* $\widetilde{\mathcal{H}} \supset \mathcal{H}$ *і для всіх* $j \in \mathbb{Z}_+$ *наступні рівності н.к. многочленів мають місце:*

$$\begin{aligned} (xA)^j &= P_{\mathcal{H}}(x\widetilde{A})^j|\mathcal{H}, \quad (xA)^j xB = P_{\mathcal{H}}(x\widetilde{A})^j x\widetilde{B}, \\ C(xA)^j &= \widetilde{C}(x\widetilde{A})^j|\mathcal{H}, \quad C(xA)^j xB = \widetilde{C}(x\widetilde{A})^j x\widetilde{B}. \end{aligned} \tag{1.62}$$

Доведення. З означення ділатації, даного вище, і леми 1.33 випливає, що система $\widetilde{\Sigma}^{FM,nc}$ є ділатацією системи $\Sigma^{FM,nc}$ тоді і тільки тоді, коли для кожних $n \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$, $X \in (\mathbb{C}^{n\times n})^d$ і $j \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{aligned} (X \otimes A)^j &= (I_n \otimes P_{\mathcal{H}})(X \otimes \widetilde{A})^j|\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H}, \\ (X \otimes A)^j(X \otimes B) &= (I_n \otimes P_{\mathcal{H}})(X \otimes \widetilde{A})^j(X \otimes \widetilde{B}), \\ (I_n \otimes C)(X \otimes A)^j &= (I_n \otimes \widetilde{C})(X \otimes \widetilde{A})^j|\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H}, \\ (I_n \otimes C)(X \otimes A)^j(X \otimes B) &= (I_n \otimes \widetilde{C})(X \otimes \widetilde{A})^j(X \otimes \widetilde{B}). \end{aligned}$$

Остання рівність еквівалентна рівностям (1.62) за відсутністю н.к. поліноміальних тотожностей для матриць всіх розмірів, дивись [**130**, сс. 22–23] і наслідок 1.25. □

Як наслідок останньої з рівностей (1.62) у пропозиції 1.35, ми отримаємо наступне твердження.

Пропозиція 1.36. *Передавальні фунції* $T_{\Sigma^{FM,nc}}$ *і* $T_{\widetilde{\Sigma}^{FM,nc}}$ *системи* $\Sigma^{FM,nc} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ *і її ділатації* $\widetilde{\Sigma}^{FM,nc} = (d; \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, D; \widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ *співпадають.*

Нехай н.к. FM система $\widetilde{\Sigma}^{FM,nc} = (d; \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, D; \widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ - ділатація н.к. FM системи $\Sigma^{FM,nc} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$. Ми будемо називати таку ділатацію *рівномірною*, якщо підпростори $\mathcal{D}_X$ і $\mathcal{D}_{*,X}$ у $\mathbb{C}^n \otimes \widetilde{\mathcal{H}}$ з рівностей (1.59) і (1.60)

незалежні від X і мають вигляд $\mathcal{D}_X = \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{D}$, $\mathcal{D}_{*,X} = \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{D}_*$. Таким чином, $\widetilde{\Sigma}^{FM,nc}$ називається *рівномірною ділатацією* $\Sigma^{FM,nc}$, якщо існують підпростори $\mathcal{D}$ і $\mathcal{D}_*$ у $\widetilde{\mathcal{H}}$ такі, що

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{D} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{D}_*, \tag{1.63}$$

$$\widetilde{A_k}\mathcal{D} \subset \mathcal{D}, \quad \widetilde{C}\mathcal{D} = \{0\}, \quad \widetilde{A_k}^*\mathcal{D}_* \subset \mathcal{D}_*, \quad \widetilde{B_k}^*\mathcal{D}_* = \{0\}, \quad k = 1, \dots, d, \tag{1.64}$$

$$A_k = P_{\mathcal{H}}\widetilde{A_k}|\mathcal{H}, \quad B_k = P_{\mathcal{H}}\widetilde{B_k}, \quad C = \widetilde{C}|\mathcal{H}, \quad k = 1, \dots, d. \tag{1.65}$$

Введемо позначення для наборів операторів $A = (A_1, \dots, A_d) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^d$, $B = (B_1, \dots, B_d) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{H})^d$:

$$(A\sharp B)^w = A_{i_1} \cdots A_{i_{m-1}} B_{i_m}, \quad w = g_{i_1} \cdots g_{i_m} \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \setminus \{\emptyset\}, \tag{1.66}$$

де, зокрема,

$$(A\sharp B)^{g_k} = B_k, \quad k = 1, \dots, d.$$

Наступна пропозиція є аналогом леми 1.33 для н.к. FM систем.

Пропозиція 1.37. *Для систем* $\Sigma^{FM,nc} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ *і* $\widetilde{\Sigma}^{FM,nc} = (d; \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, D; \widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ *наступні твердження еквівалентні:*

(i): $\widetilde{\Sigma}^{FM,nc}$ *- ділатація* $\Sigma^{FM,nc}$*;*

(ii): $\widetilde{\Sigma}^{FM,nc}$ *- рівномірна ділатація* $\Sigma^{FM,nc}$*;*

(iii): $\widetilde{\mathcal{H}} \supset \mathcal{H}$ *і наступні рівності є вірними:*

$$A^w = P_{\mathcal{H}}\widetilde{A}^w|\mathcal{H}, \quad w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d, \tag{1.67}$$

$$(A\sharp B)^w = P_{\mathcal{H}}(\widetilde{A}\sharp\mathbf{B})^w, \quad w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \setminus \{\emptyset\}, \tag{1.68}$$

$$CA^w = \widetilde{C}\widetilde{A}^w|\mathcal{H}, \quad w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d, \tag{1.69}$$

$$C(A\sharp B)^w = \widetilde{C}(\widetilde{A}\sharp\widetilde{B})^w, \quad w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \setminus \{\emptyset\}. \tag{1.70}$$

Доведення. Ясно, що дивлячись на коефіцієнти н.к. многочленів у (1.62), ми спостерігаємо, що (i)$\Leftrightarrow$(iii). Також ясно, що (ii)$\Rightarrow$(i). Щоб довести, що (i)$\Rightarrow$(ii), припустимо, що $\widetilde{\Sigma}^{FM,nc}$ - ділатація $\Sigma^{FM,nc}$. Тоді за пропозицією 1.35 $\widetilde{\mathcal{H}} \supset \mathcal{H}$ і відношення (1.67)–(1.70) є вірними. Покладемо

$$\mathcal{D} := \operatorname{clos} \operatorname*{span}_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d,\, k \in \{1,\dots,d\}} \widetilde{\mathbf{A}}^w \left((\widetilde{A_k} - A_k)\mathcal{H} + (\widetilde{B_k} - B_k)\mathcal{U} \right).$$

Тоді $\mathcal{D} \perp \mathcal{H}$. Покладемо $\mathcal{D}_* := \widetilde{\mathcal{H}} \ominus (\mathcal{D} \oplus \mathcal{H})$. Тоді (1.63) є вірним. З означення $\mathcal{D}$ отримаємо, що $\widetilde{A_j}\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$, $j = 1, \dots, d$. Далі, для довільних $h \in \mathcal{H}, u \in \mathcal{U}, w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ і $k, j \in \{1, \dots, d\}$ ми маємо, завдяки (1.69)–(1.70),

$$\begin{aligned}\widetilde{C}\widetilde{\mathbf{A}}^w \left((\widetilde{A_k} - A_k)h + (\widetilde{B_k} - B_k)u \right) &= \widetilde{C}\widetilde{\mathbf{A}}^{wg_k}h - \left(\widetilde{C}\widetilde{\mathbf{A}}^w|\mathcal{H} \right) \cdot A_k h \\ &\quad + \widetilde{C}(\widetilde{\mathbf{A}}\sharp\widetilde{\mathbf{B}})^{wg_k}u - \left(\widetilde{C}\widetilde{\mathbf{A}}^w|\mathcal{H} \right) \cdot B_k u = 0.\end{aligned}$$

Звідси ми отримаємо $\widetilde{C}\mathcal{D} = \{0\}$. Інші співвідношення у (1.64) отримаються подібним чином. Отже, н.к. FM система $\widetilde{\Sigma}^{FM,nc}$ є рівномірною ділатацією н.к. FM системи $\Sigma^{FM,nc}$. $\square$

Теорема 1.38. *Кожна дисипативна н.к. FM система $\Sigma^{FM,nc}$ має (рівномірну) консервативну ділатацію.*

Доведення. Нехай н.к. FM система $\Sigma^{FM,nc} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ - дисипативна. Тоді (дивись доведення пропозиції 1.34) $G_x \in \mathcal{SA}_d^{nc}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{H} \oplus \mathcal{Y})$, де

$$G_x = \begin{bmatrix} x\mathbf{A} & x\mathbf{B} \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{H} \oplus \mathcal{Y}) \langle x_1, \ldots, x_d \rangle .$$

Як показано у [**26**], існує консервативна реалізація Джівона–Росера, тобто така GR система $\Sigma^{GR,nc} = (d; T, F, H, S; \widehat{\mathcal{H}} = \bigoplus_{k=1}^d \widehat{\mathcal{H}}_k, \mathcal{H} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{H} \oplus \mathcal{Y})$, що

$$T_{\Sigma^{GR,nc}}(x) = S + H(I_{\widehat{\mathcal{H}}} - x\widehat{P}T)^{-1} x\widehat{\mathbf{P}}F = G_x,$$

де $\widehat{P} = (\widehat{P_1}, \ldots, \widehat{P_d}) \in \mathcal{L}(\widehat{\mathcal{H}})^d$, з $\widehat{P_k} := P_{\widehat{\mathcal{H}_k}}$, $k = 1,\ldots,d$. Тоді, в силу єдиності розвинення н.к. формального степеневого ряду у однорідних многочленах, ми отримаємо:

$$(1.71) \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & D \end{bmatrix}, \quad Hx\widehat{P}F = \begin{bmatrix} xA & xB \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H(x\widehat{P}T)^j x\widehat{P}F = 0 \ (j = 1, \ldots).$$

Останні два співвідношення можуть бути переписані як
(1.72)

$$H\underline{F}_k = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ (k = 1, \ldots, d), \quad H(\underline{T} \sharp \underline{F})^w = 0 \quad (w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \setminus \{\emptyset, g_1, \ldots, g_d\}),$$

де $\underline{T} = (\underline{T}_1, \ldots, \underline{T}_d) \in \mathcal{L}(\widehat{\mathcal{H}})^d$, з $\underline{T}_k := \widehat{P}_k T,\ k = 1, \ldots, d$, і $\underline{F} = (\underline{F}_1, \ldots, \underline{F}_d) \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{U}, \widehat{\mathcal{H}})^d$, з $\underline{F}_k := \widehat{P}_k F,\ k = 1, \ldots, d$. Унітарний оператор

$$G = \begin{bmatrix} T & F \\ H & S \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\widehat{\mathcal{H}} \oplus (\mathcal{H} \oplus \mathcal{U}), \widehat{\mathcal{H}} \oplus (\mathcal{H} \oplus \mathcal{Y}))$$

допускає інше блочне розбиття:

$$G = \begin{bmatrix} \dot{A} & \dot{B} \\ \dot{C} & \dot{D} \end{bmatrix} \in \mathcal{L}((\widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}) \oplus \mathcal{U}, (\widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}) \oplus \mathcal{Y}),$$

де

$$\dot{A} = \begin{bmatrix} T & F|\mathcal{H} \\ P_{\mathcal{H}}H & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}), \ \ \dot{B} = \begin{bmatrix} F|\mathcal{U} \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}),$$
$$\dot{C} = \begin{bmatrix} P_{\mathcal{Y}}H & C \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}, \mathcal{Y}), \qquad \dot{D} = D \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}).$$

Покладемо $\dot{P} = (\dot{P}_1, \dots, \dot{P}_d) \in \mathcal{L}(\widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H})^d$, з $\dot{P}_k := \widehat{P}_k \oplus P_k,\ k = 1, \dots, d$. Покажемо, що для $j = 0, 1, \dots$ наступні н.к. поліноміальні співвідношення є вірними:

$$(xA)^j = P_{\mathcal{H}}(\dot{A}x\dot{P}\dot{A})^j|\mathcal{H}, \tag{1.73}$$

$$(xA)^j xB = P_{\mathcal{H}}(\dot{A}x\dot{P}\dot{A})^j \dot{A}x\dot{P}\dot{B}, \tag{1.74}$$

$$C(xA)^j = \dot{C}(\dot{A}x\dot{P}\dot{A})^j|\mathcal{H}, \tag{1.75}$$

$$C(xA)^j xB = \dot{C}(\dot{A}x\dot{P}\dot{A})^j \dot{A}x\dot{P}\dot{B}. \tag{1.76}$$

Для $j = 0$ рівність (1.73) тривіальна. Для $j = 1$ ми маємо завдяки (1.71):

$$P_{\mathcal{H}}\dot{A}x\dot{P}\dot{A}|\mathcal{H} = P_{\mathcal{H}}Hx\widehat{P}F|\mathcal{H} = xA,$$

тобто (1.73) задовольняється. Застосуємо індукцію за j. Припустимо, що (1.73) виконується для $j = k \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$. Тоді, завдяки (1.71),

$$\begin{aligned}
(xA)^{k+1} &= xA(xA)^k = P_{\mathcal{H}}\dot{A}x\dot{P}\dot{A}P_{\mathcal{H}}(\dot{A}x\dot{P}\dot{A})^k|\mathcal{H} \\
&= P_{\mathcal{H}}\dot{A}x\dot{P}\dot{A}(I_{\widehat{\mathcal{H}}\oplus\mathcal{H}} - P_{\widehat{\mathcal{H}}})(\dot{A}x\dot{P}\dot{A})^k|\mathcal{H} \\
&= P_{\mathcal{H}}(\dot{A}x\dot{P}\dot{A})^{k+1}|\mathcal{H} - P_{\mathcal{H}}\dot{A}x\dot{P}\dot{A}P_{\widehat{\mathcal{H}}}(\dot{A}x\dot{P}\dot{A})^k|\mathcal{H} \\
&= P_{\mathcal{H}}(\dot{A}x\dot{P}\dot{A})^{k+1}|\mathcal{H} - P_{\mathcal{H}}Hx\dot{P}T(Tx\dot{P}T + FxPH)P_{\widehat{\mathcal{H}}}(\dot{A}x\dot{P}\dot{A})^{k-1}|\mathcal{H} \\
&= P_{\mathcal{H}}(\dot{A}x\dot{P}\dot{A})^{k+1}|\mathcal{H} - P_{\mathcal{H}}(Hx\dot{P}T)(Tx\dot{P}T)P_{\widehat{\mathcal{H}}}(\dot{A}x\dot{P}\dot{A})^{k-1}|\mathcal{H} = \dots \\
&= P_{\mathcal{H}}(\dot{A}x\dot{P}\dot{A})^{k+1}|\mathcal{H} - P_{\mathcal{H}}(Hx\dot{P}T)(Tx\dot{P}T)^{k-1}P_{\widehat{\mathcal{H}}}(\dot{A}x\dot{P}\dot{A})|\mathcal{H} \\
&= P_{\mathcal{H}}(\dot{A}x\dot{P}\dot{A})^{k+1}|\mathcal{H} - P_{\mathcal{H}}(Hx\dot{P}T)(Tx\dot{P}T)^{k-1}(Tx\dot{P}F)|\mathcal{H} \\
&= P_{\mathcal{H}}(\dot{A}x\dot{P}\dot{A})^{k+1}|\mathcal{H}.
\end{aligned}$$

Таким чином, (1.73) виконується для всіх $j \in \mathbb{Z}_+$. Співвідношення (1.74)–(1.76) доводяться аналогічно. Покладемо $\dot{\Sigma}^{FM,nc} := (d; \dot{A}, \dot{B}, \dot{C}, D; \dot{\mathcal{H}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$, де $\dot{\mathcal{H}} := \widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}$, $\dot{A} := (\dot{A}_1, \dots, \dot{A}_d) \in \mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}})^d$, $\dot{A}_k := \dot{A}P_k\dot{A}$ $(k = 1, \dots, d)$, $\dot{B} := (\dot{B}_1, \dots, \dot{B}_d) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \dot{\mathcal{X}})^d$, $\dot{B}_k := \dot{A}P_k\dot{B}$ $(k = 1, \dots, d)$. Тоді за пропозицією 1.35 система $\dot{\Sigma}^{FM,nc}$ є ділатацією системи $\Sigma^{FM,nc}$.

Нехай U - унітарна ділатація стискаючого оператора $\dot{A} = P_{\widehat{\mathcal{H}}\oplus\mathcal{H}}G|\widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}$, діюча на гільбертовому просторі $\widetilde{\mathcal{H}} \supset \dot{\mathcal{H}} = \widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}$, який існує відповідно теоремі про ділатацію С.-Надя [**143**]. За лемою Сарасона [**134**, Lemma 0], існують підпростори $\mathcal{D}$ і $\mathcal{D}_*$ у $\widetilde{\mathcal{H}}$ такі, що $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{D} \oplus \dot{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{D}_*$ і $U\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$, $U^*\mathcal{D}_* \subset \mathcal{D}_*$. Інакше кажучи, оператор U має наступний операторно-блочний матричний вигляд:

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & \dot{A} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{D} \oplus \dot{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{D}_*).$$

Визначимо також

$$x\ddot{P} = \begin{bmatrix} x_1 I_{\mathcal{D}} & 0 & 0 \\ 0 & x\dot{P} & 0 \\ 0 & 0 & x_1 I_{\mathcal{D}_*} \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{D} \oplus \dot{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{D}_*) \langle x_1, \dots, x_d \rangle,$$

тобто

$$\ddot{P}_1 = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{D}} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{P}_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathcal{D}_*} \end{bmatrix}, \quad \ddot{P}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{P}_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ (k = 2, \dots, d),$$

$$\ddot{A} := \begin{bmatrix} I_{\mathcal{D}} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{A} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathcal{D}_*} \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{D} \oplus \dot{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{D}_*), \ \ \ddot{B} := \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{B} \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{D} \oplus \dot{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{D}_*),$$
$$\ddot{C} := \begin{bmatrix} 0 & \dot{C} & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{D} \oplus \dot{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{D}_*, \mathcal{Y}).$$

Тоді

$$Ux\ddot{P}\ddot{A} = \begin{bmatrix} x_1U_{11} & U_{12}x\dot{P}\dot{A} & x_1U_{13} \\ 0 & x\dot{A} & x_1U_{23} \\ 0 & 0 & x_1U_{33} \end{bmatrix}, \quad Ux\ddot{P}\ddot{B} = \begin{bmatrix} U_{12}x\dot{P}\dot{B} \\ x\dot{B} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Покладемо $\widetilde{\Sigma}^{FM,nc} := (d; \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, D; \widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$, де $\widetilde{A} := (\widetilde{A_1}, \dots, \widetilde{A_d}) \in \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{H}})^d$, $\widetilde{A}_k := U\ddot{P}_k\ddot{A}$, $\widetilde{B} := (\widetilde{B_1}, \dots, \widetilde{B_d}) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \widetilde{\mathcal{H}})^d$, $\widetilde{B_k} := U\ddot{P}_k\ddot{B}$ $(k = 1, \dots, d)$, $\widetilde{C} := \ddot{C}$. Тоді легко перевірити, що з вибором підпросторів $\mathcal{D}$ і $\mathcal{D}_*$ у $\widetilde{\mathcal{H}}$, система $\widetilde{\Sigma}^{FM,nc}$ є консервативною ділатацією системи $\dot{\Sigma}^{FM,nc}$. Оскільки ділатація ділатації є знов ділатація, система $\widetilde{\Sigma}^{FM,nc}$ є консервативною длітацією системи $\Sigma^{FM,nc}$. За пропозицією 1.37, ця ділатація рівномірна. □

Ми будемо казати, що комутативна FM система $\widetilde{\Sigma}^{FM,c} = (d; \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, D; \widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ - *ділатація комутативної FM системи* $\Sigma^{FM,c} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$, якщо для кожного $x \in \mathbb{C}^d$ 1D система $\widetilde{\Sigma}_x := (1; x\widetilde{A}, x\widetilde{B}, \widetilde{C}, D; \widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ - ділатація відповідної 1D системи $\Sigma_x := (1; xA, x\mathbf{B}, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$, тобто для кожного $x \in \mathbb{C}^d$ існують підпростори $\mathcal{D}_x$ і $\mathcal{D}_{*,x}$ у $\widetilde{\mathcal{X}}$ такі, що

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{D}_x \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{D}_{*,x}, \tag{1.77}$$

$$x\widetilde{A}\mathcal{D}_x \subset \mathcal{D}_x, \ \widetilde{C}\mathcal{D}_x = \{0\}, \ (x\widetilde{A})^*\mathcal{D}_{*,x} \subset \mathcal{D}_{*,x}, \ (x\widetilde{B})^*\mathcal{D}_{*,x} = \{0\}, \tag{1.78}$$

$$xA = P_{\mathcal{H}}(x\widetilde{A})|\mathcal{H}, \ xB = P_{\mathcal{H}}(x\widetilde{B}), \ C = \widetilde{C}|\mathcal{H}. \tag{1.79}$$

З леми 1.33 ми отримаємо наступне еквівалентне переформулювання цього означення.

Пропозиція 1.39. *Система* $\widetilde{\Sigma}^{FM,c} = (d; \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, D; \widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ *є ділатацією системи* $\Sigma^{FM,c} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ *тоді і тільки тоді, коли* $\widetilde{\mathcal{H}} \supset \mathcal{H}$ *і для всіх* $x \in \mathbb{C}^d$ *і* $j \in \mathbb{Z}_+$ *виконаються наступні рівності:*

$$\begin{aligned} (xA)^j = P_{\mathcal{H}}(x\widetilde{A})^j|\mathcal{H}, \quad (xA)^j xB = P_{\mathcal{H}}(x\widetilde{A})^j x\widetilde{B}, \\ C(xA)^j = \widetilde{C}(x\widetilde{A})^j|\mathcal{H}, \ \ C(xA)^j x\mathbf{B} = \widetilde{C}(x\widetilde{A})^j x\widetilde{B}. \end{aligned} \tag{1.80}$$

Ми визначаємо зараз *перетворення абеліанізації* $\gamma : \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \to \mathbb{Z}_+^d$ як

$$w = g_{i_1} \cdots g_{i_m} \mapsto s = (s_1, \ldots, s_d),$$

де $s_k \in \mathbb{Z}_+$ - кількість разів, що літера g_k виникає у слові w, і $\emptyset \mapsto 0$. Для $s = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ позначимо як c_s кардинальність множини $\gamma^{-1}(s)$. Ясно, що

$$c_s := \frac{(s_1 + \cdots + s_d)!}{s_1! \cdots s_d!}.$$

Ми визначаємо зараз *симетрізовані мультістепені* наступним чином. Для наборів операторів $A = (A_1, \ldots, A_d) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^d$ і $B = (B_1, \ldots, B_d) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{H})^d$, ми покладаємо

$$A^0 := I_{\mathcal{X}}, \tag{1.81}$$

$$A^s := c_s^{-1} \sum_{w \in \gamma^{-1}(s)} A^w, \quad s \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \{0\}, \tag{1.82}$$

$$(A \sharp B)^s := c_s^{-1} \sum_{w \in \gamma^{-1}(s)} (A \sharp B)^w, \quad s \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \{0\}, \tag{1.83}$$

Переписуючи рівності для комутативних многочленів у (1.80) як рівності для їх коефіцієнтів, ми отримаємо наступну версію леми Сарасона для комутативної FM-системи.

Пропозиція 1.40. *Система* $\widetilde{\Sigma}^{FM,c} = (d; \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, D; \widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ *є ділатацією системи* $\Sigma^{FM,c} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ *тоді і тільки тоді, коли* $\widetilde{\mathcal{H}} \supset \mathcal{H}$ *і наступні рівності виконані:*

$$\begin{array}{cc} \forall s \in \mathbb{Z}_+^d & A^s = P_{\mathcal{H}} \widetilde{A}^s | \mathcal{H}, \\ \forall s \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \{0\} & (A \sharp B)^s = P_{\mathcal{H}} (\widetilde{A} \sharp \widetilde{B})^s, \\ \forall s \in \mathbb{Z}_+^d & C A^s = \widetilde{C} \widetilde{A}^s | \mathcal{H}, \\ \forall s \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \{0\} & C (A \sharp B)^s = \widetilde{C} (\widetilde{A} \sharp \widetilde{B})^s. \end{array} \tag{1.84}$$

Як наслідок останньої з рівностей (1.80) у пропозиції 1.39, ми отримаємо наступне твердження.

Пропозиція 1.41. *Передавальні функції* $T_{\Sigma^{FM,c}}$ *і* $T_{\widetilde{\Sigma}^{FM,c}}$ *системи* $\Sigma^{FM,c} = (d;$- $A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ *і її ділатації* $\widetilde{\Sigma}^{FM,c} = (d; \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, D; \widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ *співпадають.*

Теорема 1.42. *Дисипативна система* $\Sigma^{FM,c} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ *має консервативну ділатацію тоді і тільки тоді, коли лінійна функція*

$$G_x = \begin{bmatrix} xA & xB \\ C & D \end{bmatrix} \tag{1.85}$$

з коефіцієнтами у $\mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{H} \oplus \mathcal{Y})$ *належить класу* $\mathcal{SA}_d(\mathcal{H} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{H} \oplus \mathcal{Y})$.

Доведення. Нехай дисипативна система $\Sigma^{FM,c} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ має консервативну ділатацію $\widetilde{\Sigma}^{FM,c} = (d; \widetilde{A}, \mathbf{B}, \widetilde{C}, D; \widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$. Тоді для кожного $\zeta \in \mathbb{T}^d$ оператор

$$\widetilde{G}_\zeta = \begin{bmatrix} \zeta\widetilde{A} & \zeta\widetilde{B} \\ \widetilde{C} & D \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{U}, \widetilde{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{Y})$$

унітарний. Як спостерігалося вище, тоді н.к. FM система $\widetilde{\Sigma}^{FM,nc} = (d; \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, D;$-$\widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ - теж консервативна, тобто для кожного $U \in \mathcal{U}^d$ оператор

$$\widetilde{G}_U = \begin{bmatrix} U \otimes \widetilde{A} & U \otimes \widetilde{B} \\ I \otimes \widetilde{C} & I \otimes D \end{bmatrix}$$

унітарний. Оскільки довільний набір $T = (T_1, \ldots, T_d)$ (не обов'язково строгих і не обов'язково комутуючих) стисків на гільбертовому просторі, скажімо $\mathcal{E}$, має унітарну ділатацію $U = (U_1, \ldots, U_d)$ (дивись [**144**]), ми маємо $\|\widetilde{G}_T\| \leq \|\widetilde{G}_U\| = 1$, і таким чином $G_T^* G_T = (I_\mathcal{E} \otimes (P_\mathcal{H} \oplus I_\mathcal{U}))\widetilde{G}_T^* \widetilde{G}_T | \mathcal{E} \otimes (\mathcal{H} \oplus \mathcal{U}) \leq I_{\mathcal{E} \otimes (\mathcal{H} \oplus \mathcal{U})}$, ми робимо висновок, що $G_x \in \mathcal{SA}_d(\mathcal{H} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{H} \oplus \mathcal{Y})$.

Навпаки, припустимо, що $G_x \in \mathcal{SA}_d(\mathcal{H} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{H} \oplus \mathcal{Y})$. Ми покажемо, що розширення G_x до лінійного многочлена G_x^{nc} належить класу $\mathcal{SA}_d^{nc}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{H} \oplus \mathcal{Y})$. Справді, якщо $T = (T_1, \ldots, T_d) \in \mathcal{D}_{\mathrm{nc}}^d \cap (\mathbb{C}^{n \times n})^d$ для деякого $n \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$, то набір $\widetilde{T} = (\widetilde{T}_1, \ldots, \widetilde{T}_d) \in (\mathbb{C}^{2n \times 2n})^d$, де

$$\widetilde{T}_k := \begin{bmatrix} 0 & T_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad k = 1, \ldots, d,$$

складається з комутуючих строго стискаючих матриць (зауважимо, що $\widetilde{T}_k \widetilde{T}_j = 0,\ k, j = 1, \ldots, d$). Оскільки

$$\begin{aligned} \|G_T\| &= \left\| \left(P_{\mathbb{C}^n \oplus \{0\}} \otimes I_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{Y}}\right) G_{\widetilde{T}} | (\{0\} \oplus \mathbb{C}^n) \otimes (\mathcal{H} \oplus \mathcal{U}) \right\| \\ &\leq \|G_{\widetilde{T}}\| \leq 1, \end{aligned}$$

ми отримаємо $G_x^{nc} \in \mathcal{SA}_d^{nc}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{H} \oplus \mathcal{Y})$. Ясно, що для кожного набора (не обов'язково строгих) стисків T ми маємо $\|G_T\| \leq 1$, і також для кожного набора d унітарних операторів). Останнє означає, що асоційована н.к. FM система $\Sigma^{FM,nc} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ - дисипативна. Тоді за теоремою 1.38 існує н.к. FM система $\widetilde{\Sigma}^{FM,nc} = (d; \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, D; \widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$, яка є (рівномірною) консервативною ділатацією $\Sigma^{FM,nc}$. Легко побачити тепер, що відповідна комутативна FM система $\widetilde{\Sigma}^{FM,c} = (d; \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, D; \widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ є консервативною ділатацією $\Sigma^{FM,c}$. $\square$

Зауважимо, що для $d \geq 3$ не всі дисипативні комутативні FM системи мають консервативну ділатацію. Справді, за головним результатом статті [**94**], для кожного $d \geq 3$ можна знайти набір операторів $A = (A_1, \ldots, A_d)$ на гільбертовому просторі, скажімо $\mathcal{H}$, такий, що лінійна функція $G_x = xA$ - стискаюча на $\mathbb{D}^d$, проте не з класу Шура–Аглера. Іншими словами, комутативна FM система

$\Sigma^{FM,c} = (d; A, 0, 0, 0; \mathcal{H}, \{0\}, \{0\})$ - дисипативна, проте відповідна лінійна функція G_x не належить класу $\mathcal{SA}_d(\mathcal{H})$. За теоремою 1.42, система $\Sigma^{FM,c}$ не має консервативної ділатації.

Нехай система $\widetilde{\Sigma}^{FM,c} = (d; \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, D; \widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ є ділатацією системи $\Sigma^{FM,c} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$. Ми будемо казати, що така ділатація *рівномірна*, якщо підпростори $\mathcal{D}_x$ не залежать від $x \in \mathbb{C}^d$, тобто $\mathcal{D}_x = \mathcal{D}$, $x \in \mathbb{C}^d$, чи еквівалентно, підпростори $\mathcal{D}_{*,x}$ не залежать від $x \in \mathbb{C}^d$, тобто $\mathcal{D}_{*,x} = \mathcal{D}$, $x \in \mathbb{C}^d$. Легко побачити, що комутативна FM система $\widetilde{\Sigma}^{FM,c} = (d; \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, D; \widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ є рівномірною ділатацією комутативної FM системи $\Sigma^{FM,c} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ тоді і тільки тоді, коли відповідна н.к. FM система $\widetilde{\Sigma}^{FM,nc} = (d; \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, D; \widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ є рівномірною ділатацією відповідної н.к. FM системи $\Sigma^{FM,nc} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$.

Наступна теорема є посиленням теореми 1.42.

Теорема 1.43. *Дисипативна система* $\Sigma^{FM,c} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ *має рівномірну консервативну ділатацію тоді і тільки тоді, коли лінійний многочлен* (1.85) *належить класу* $\mathcal{SA}_d(\mathcal{H} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{H} \oplus \mathcal{Y})$.

Доведення. Необхідність випливає з теореми 1.42. Для доведення достатності, ми спостерігаємо, що консервативна ділатація $\widetilde{\Sigma}^{FM,nc}$ системи $\Sigma^{FM,nc}$ у теоремі 1.42 є рівномірною. Таким чином, з огляду на зауваження перед цією теоремою, відповідна консервативна ділатація $\widetilde{\Sigma}^{FM,c}$ системи $\Sigma^{FM,c}$ є також рівномірною. □

Зауважимо, що у комутативному випадку не кожна ділатація є рівномірною (на відміну від н.к. випадку, дивись пропозицію 1.37). Більш того, не кожна консервативна ділатація є рівномірною, тобто теорема 1.43 є насправді посиленням теореми 1.42. Щоб показати це, ми можемо використати приклад 1 у [**27**] і спостереження, що для випадку, де простори входів і виходів нульові (тобто $\mathcal{U} = \mathcal{Y} = \{0\}$) поняття KV системи і FM системи співпадають, як у комутативному, так і в н.к. налаштуванні.

1.8. Інтерполяція Каратеодорі на н.к. полікрузі

Класична інтерполяційна задача Каратеодорі - така: якщо дана послідовність комплексних чисел $c_0 > 0$, $c_1, \ldots, c_m$, знайти голоморфну функцію $f(x) = f_0 + xf_1 + x^2 f_2 + \cdots$ на відкритому одиничному крузі $\mathbb{D}$, чиї значення у $\mathbb{D}$ мають додатну дійсну частину (тобто f належить до *класу Герглотця*, або *Каратеодорі* $\mathcal{H}_1$, де нижній індекс 1 означає одновімірний випадок) таку, що

$$f_0 = \frac{c_0}{2}, \quad f_1 = c_1, \ldots, f_m = c_m.$$

Ця проблема була поставлена Костянтином Каратеодорі у [**42, 43**], де були представлені критерії розв'язності і єдиності її розв'язку. Теплиць помітив у [**147**], що оригінальний критерій розв'язності з [**42**], що був сформульований у термінах опуклих тіл, допускає наступне формулювання у термінах коефіцієнтів

$c_k,\ k = 0, \dots, m$: задача Каратеодорі для цих даних має розв'язок тоді і тільки тоді, коли $(m+1) \times (m+1)$ матриця

$$T_c = \begin{bmatrix} c_0 & c_1^* & \dots & c_{m-1}^* & c_m^* \\ c_1 & \ddots & \ddots & \dots & c_{m-1}^* \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{m-1} & \dots & \ddots & \ddots & c_1^* \\ c_m & c_{m-1} & \dots & c_1 & c_0 \end{bmatrix} \tag{1.86}$$

додатно напіввизначена (тут $c_k^* = \overline{c_k}$). З інтегрального зображення Ріса [**129**] та Герглотця [**86**]

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 + \bar{\lambda} x}{1 - \bar{\lambda} x}\, d\mu(\lambda) + i \operatorname{Im} f(0), \quad x \in \mathbb{D}, \tag{1.87}$$

яке характерізує функції з $\mathcal{H}_1$ (тут μ - додатна борелевська міра на одиничному колі $\mathbb{T}$; у випадку, коли $f(0) = \frac{1}{2}$, другий доданок у правій частині (1.87) зникає і μ має повну варіацію $|\mu| = 1$), можна отримати зображення для коефіцієнтів Тейлора $f \in \mathcal{H}_1$:

$$f_0 = \frac{|\mu|}{2} + i \operatorname{Im} f(0), \quad f_k = \int_{\mathbb{T}} \bar{\lambda}^k\, d\mu(\lambda), \quad k = 1, 2, \dots.$$

Таким чином, задача Каратеодорі має розв'язок тоді і тільки тоді, коли існує додатна борелевська міра μ на $\mathbb{T}$ така, що

$$c_k = \int_{\mathbb{T}} \bar{\lambda}^k\, d\mu(\lambda), \quad k = 0, \dots, m, \tag{1.88}$$

тобто μ розв'язує *тригонометричну проблему моментів* для c_k, $k = 0, \dots, m$.

В операторнозначному випадку дані задачі Каратеодорі - обмежені лінійні оператори $c_0 \geq 0$, $c_1, \dots, c_m$ на сепарабельному гільбертовому просторі[7] $\mathcal{Y}$, і клас $\mathcal{H}_1$ замінюється на клас $\mathcal{H}_1(\mathcal{Y})$ голоморфних функцій на $\mathbb{D}$, чиї значення - обмежені лінійні оператори на $\mathcal{Y}$ з додатно напіввизначеною дійсною частиною. Тоді критерій Каратеодорі–Теплиця, зображення (1.87) для $f \in \mathcal{H}_1(\mathcal{Y})$ і тригонометричне моментне зображення (1.88) залишаються вірними з операторною блочною матрицею T_c у (1.86), додатною борелевською $\mathcal{L}(\mathcal{Y})$-значною мірою μ і збіжністю інтегралів у (1.87) і (1.88) в сильній операторній топології. Зображення Ріса–Герглотця (1.87) для випадку, коли $f(0) = \frac{I_{\mathcal{Y}}}{2}$, а значить, і моментне зображення (1.88) для випадку, коли $c_0 = I_{\mathcal{Y}}$, допускають наступний операторний вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{2} V^* (I_{\mathcal{H}} + xG)(I_{\mathcal{H}} - xG)^{-1} V, \quad x \in \mathbb{D}, \tag{1.89}$$

$$c_k = V^* G^k V, \qquad k = 0, \dots, m, \tag{1.90}$$

[7]Ми будемо розглядати тільки сепарабельні гільбертові простори, і опускати слово "сепарабельний"для стислості.

де G - унітарний оператор на деякому допоміжному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, і $V \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{H})$ - ізометрія. Ці результати належать Наймарку [**113**].

Подібна задача була розглянута вперше Каратеодорі і Феєром у [**44**] для *класу Шура* $\mathcal{S}_1$ голоморфних стискаючих функцій на $\mathbb{D}$ на місці класу Герглотця $\mathcal{H}_1$: якщо дана послідовність комплексних чисел $s_0, \dots, s_m$, знайти голоморфну функцію $F(x) = F_0 + xF_1 + x^2F_2 + \cdots$ з класу $\mathcal{S}_1$ таку, що

$$F_0 = s_0, \dots, F_m = s_m.$$

Шур довів у [**137**], що задача Каратеодорі–Феєра має розв'язок тоді і тільки тоді, коли матриця

$$T_s = \begin{bmatrix} s_0 & 0 & \dots & 0 \\ s_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ s_m & \dots & s_1 & s_0 \end{bmatrix} \tag{1.91}$$

стискаюча [8], тобто $\|T_s\| \leq 1$. В операторнозначному випадку дані задачі Каратеодорі–Феєра - оператори $s_0, \dots, s_m \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$, з гільбертовими просторами $\mathcal{U}$ і $\mathcal{Y}$, клас $\mathcal{S}_1$ замінюється на клас $\mathcal{S}_1(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ голоморфних функцій на $\mathbb{D}$, чиї значення - стискаючі оператори з $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$, і критерій Шура формулюється таким самим чином, як у скалярному випадку, але з операторно-блочною матрицею T_s.

У [**100**] результати, розглянуті вище, узагальнюються до н.к. налаштування. На додачу до н.к. класу Шура–Аглера $\mathcal{SA}_d^{\mathrm{nc}}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$, що ми обговорювали у підрозділі 1.7, ми вводимо *н.к. клас Герглотця–Аглера* $\mathcal{HA}_d^{\mathrm{nc}}(\mathcal{Y})$, що складається з н.к. формальних степеневих рядів $\mathfrak{f}$ з d невизначеними і коефіцієнтами у $\mathcal{L}(\mathcal{Y})$, збіжних у н.к. одиничному полікрузі $\mathcal{D}_{\mathrm{nc}}^d$ і маючих там додатно напіввизначену дійсну частину:

$$\mathfrak{f}(X) + \mathfrak{f}(X)^* \geq 0, \quad X = (X_1, \dots, X_d) \in \mathcal{D}_{\mathrm{nc}}^d.$$

Зауважимо, що комутативні аналоги класів Герглотця–Аглера і Шура–Аглера були детально вивчені у [**28, 29**]. Більш того, далі деякі з наших н.к. аргументів стосовно реалізацій н.к. функцій взяті з [**28, 29**] і адаптовані до н.к. налаштування.

Ми називаємо множину $\Lambda \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ *допустимою*, якщо $g_k w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \setminus \Lambda$ і $w g_k \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \setminus \Lambda$ для кожних $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \setminus \Lambda$ і $k = 1, \dots, d$.

Задача Каратеодорі на н.к. полікрузі формулюється таким чином.

Задача 1.44. Нехай $\Lambda \subset \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ - допустима множина. Якщо дана колекція операторів $\{c_w\}_{w \in \Lambda} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$, з $c_\emptyset \geq 0$, знайти $\mathfrak{f} = \sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} x^w \mathfrak{f}_w \in \mathcal{HA}_d^{\mathrm{nc}}(\mathcal{Y})$ таке, що

$$\mathfrak{f}_\emptyset = \frac{c_\emptyset}{2}, \quad \mathfrak{f}_w = c_w \quad \text{для } w \in \Lambda \setminus \{\emptyset\}.$$

[8] Матрична норма розглянута ту є операторна $(2,2)$-норма, тобте максимальне сингулярне значення матриці.

Ми також розглядаємо спеціальний випадок цієї задачи, де $c_\emptyset = I_\mathcal{Y}$.

Задача 1.45. Нехай $\Lambda \subset \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ - допустима множина. Якщо дана колекція операторів $\{c_w\}_{w\in\Lambda} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$, з $c_\emptyset = I_\mathcal{Y}$, знайти $\mathfrak{f} = \sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d} x^w \mathfrak{f} \in \mathcal{HA}_d^{\mathrm{nc}}(\mathcal{Y})$ таке, що

$$\mathfrak{f}_\emptyset = \frac{c_\emptyset}{2} = \frac{I_\mathcal{Y}}{2}, \quad \mathfrak{f}_w = c_w \quad \text{для } w \in \Lambda \setminus \{\emptyset\}.$$

Задача Каратеодорі–Феєра на н.к. полікрузі формулюється таким чином.

Задача 1.46. Нехай $\Lambda \subset \mathcal{F}_d$ - допустима множина. Якщо дана колекція операторів $\{s_w\}_{w\in\Lambda} \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$, знайти $\mathfrak{F} = \sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d} x^w \mathfrak{F}_w \in \mathcal{SA}_d^{\mathrm{nc}}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ таке, що

$$\mathfrak{F}_w = s_w, \quad w \in \Lambda.$$

Щоб дати ідею наших результатів, критерії розв'язності цих задач, ми спочатку повернемось до одновимірного випадку. Нехай S позначає стандартну $(m+1)\times(m+1)$ матрицю зсуву:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.92}$$

тобто $S_{ij} = 1$ для $i - j = 1$, і $S_{ij} = 0$ інакше. Тоді $T_c = I_{m+1} \otimes c_0 + \sum_{k=1}^m S^k \otimes c_k + \sum_{k=1}^m S^{*k} \otimes c_k^*$. Якщо позначити $p = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^m x^k c_k$, то критерій Каратеодорі–Теплиця може бути сформульований як додатна напіввизначеність оператора

$$2\operatorname{Re} p(S) = p(S) + p(S)^*,$$

де $p(S) := \frac{I_{m+1}\otimes c_0}{2} + \sum_{k=1}^m S^k \otimes c_k$. За [**19**, розділ 2.5], будь-який стиск T на гільбертовому просторі $\mathcal{E}$, який є *нільпотентним рангу не більше* $m+1$, тобто такий, що $T^k = 0$, $k = m+1, m+2, \ldots$, допускає *ділатацію* вигляду $S \otimes I_\mathcal{H}$, з деяким гільбертовим простором $\mathcal{H}$, тобто існує ізометрія $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{C}^{m+1} \otimes \mathcal{H})$ така, що $T^k = V^*(S^k \otimes I_\mathcal{H})V$, $k = 1, 2, \ldots$. Оскільки S - нільпотентна матриця рангу нільпотентності $m+1$, ми отримаємо наступний критерій: *задача Каратеодорі з даними* $c_0 \geq 0, c_1, \ldots, c_m \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$ *має розв'язок тоді і тільки тоді, коли* $\operatorname{Re} p(T) \geq 0$ *для кожного нільпотентного стискаючого оператора* T *з рангом нільпотентності не більше* $m+1$. Аналогічно, $T_s = \sum_{k=0}^m S^k \otimes s_k$. Якщо визначити $q := \sum_{k=0}^m x^k s_k$, то критерій Шура може бути сформульований як стискаючість оператора $q(S) = \sum_{k=0}^m S^k \otimes s_k$. Таким чином, *задача Каратеодорі–Феєра з даними* $s_0, \ldots, s_m \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ *має розв'язок тоді і тільки тоді, коли* $\|q(T)\| \leq 1$ *для кожного нільпотентного стискаючого оператора* T *з рангом нільпотентності не більше* $m+1$. Більш того, аргумент вище, разом з апроксимацією S як rS, $0 < r < 1$, показує, що достатньо обчислювати p і q на нільпотентних строго стискаючих матрицях розміру не більше $m+1$.

Введемо клас $\mathcal{G}^d$ наборів $G = (G_1, \dots, G_d)$ операторів на спільному гільбертовому просторі таких, що $\zeta G = \sum_{k=1}^d \zeta_k G_k$ - унітарний оператор для кожного $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_d) \in \mathbb{T}^d$ (такі набори операторів виникали у підрозділі 1.7 в означенні консервативних FM систем).

Наступний результат дає н.к. аналог (1.89).

Теорема 1.47. *Формальний степеневий ряд* $\mathfrak{f} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}) \langle\langle x_1, \dots, x_d \rangle\rangle$ *з* $\mathfrak{f}_\emptyset = \frac{I_\mathcal{Y}}{2}$ *належить класу* $\mathcal{HA}_d^{nc}(\mathcal{Y})$ *тоді і тільки тоді, коли існують гільбертів простір* $\mathcal{E}$*, набір* $\mathbf{G} \in \mathcal{G}_d \cap \mathcal{L}(\mathcal{E})^d$ *і ізометрія* $V \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{E})$ *такі, що*

$$\mathfrak{f} = \frac{1}{2} V^*(I_\mathcal{E} + x\mathbf{G})(I_\mathcal{E} - x\mathbf{G})^{-1} V = -\frac{I_\mathcal{Y}}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (xG)^k = \frac{I_\mathcal{Y}}{2} + \sum_{w \in \mathcal{G}_d \setminus \{\emptyset\}} x^w V^* G^w V. \tag{1.93}$$

Доведення. Якщо (1.93) виконується, то $\mathfrak{f} \in \mathcal{HA}_d^{nc}(\mathcal{Y})$. Справді, для будь-якого $X \in \mathcal{D}_{\mathrm{nc}}^d \cap (\mathbb{C}^{n \times n})^d$ оператор $X \otimes G$ є строгим стиском. Тоді ряд у (1.93), обчислений в X, збігається в операторній нормі, значить, оператор

$$(I_{\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E}} + X \otimes G)(I_{\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{E}} - X \otimes G)^{-1}$$

добре визначений і, як перетворення Келі строгого стиску, має додатно напіввизначену дійсну частину, і таким же є $\mathfrak{f}(X)$. Ясно, що оскільки V - ізометрія, $f_\emptyset = \frac{I_\mathcal{Y}}{2}$.

Доведемо зараз зворотне твердження. Формальний степеневий ряд $\mathfrak{F} := (2\mathfrak{f} - I_\mathcal{Y})(2\mathfrak{f} + I_\mathcal{Y})^{-1}$ є добре визначенним, тому що $2\mathfrak{f}_\emptyset + I_\mathcal{Y} = 2I_\mathcal{Y}$ - оборотний, і таким же є $2\mathfrak{f} + I_\mathcal{Y}$. Більш того, $\mathfrak{F} \in \mathcal{SA}_d^{\mathrm{nc}}(\mathcal{Y})$. За результатом [**24**], існує гільбертів простір $\mathcal{H}$, розкладання одиниці $P = (P_1, \dots, P_d) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^d$ і унітарний оператор $U = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{Y})$ такі, що

$$\mathfrak{F} = D + C(I_\mathcal{Y} - (xP)A)^{-1}(xP)B \tag{1.94}$$

(порівняй з (1.33)). Більш того, оскільки $2f_\emptyset = I_\mathcal{Y}$, ми маємо $D = \mathfrak{F}_\emptyset = 0$. Щоб отримати зображення (1.93) для $\mathfrak{f}$, ми застосуємо прийом, добре відомий у одновимірній теорії систем (дивись, наприклад, [**17**]). Розглянемо *н.к. систему Джівона–Росера (GR)* (яка є спеціальним випадком н.к. FM системи) $\Sigma^{\mathrm{GR,nc}} = (d; A, B, C, 0; \mathcal{H} = \bigoplus_{k=1}^d \mathcal{H}_k; \mathcal{Y})$, де $\mathcal{H}_k = \operatorname{ran} P_k$, тобто систему рівнянь

$$\begin{cases} h(x) &= (xP)Ah(x) + (xP)Bu(x), \\ y(x) &= Ch(x), \end{cases} \tag{1.95}$$

де $h(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \langle\langle x_1, \dots, x_d \rangle\rangle$, $u(x), y(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}) \langle\langle x_1, \dots, x_d \rangle\rangle$ (відповідна система рівнянь для коефіцієнтів цих н.к. формальних степеневих рядів - це одна з систем з еволюцією уздовж вільного моноїду розглянутих в [**24, 26**]; дивись також (1.32) в підрозділі 1.4). Система (1.95) еквівалентна системі

$$\begin{cases} h(x) &= (I_\mathcal{H} - (xP)A)^{-1}(xP)Bu(x), \\ y(x) &= \mathfrak{F}(x)u(x). \end{cases} \tag{1.96}$$

Друге рівняння означає, що $\mathfrak{F}$ - передавальна функція системи $\Sigma^{\mathrm{GR,nc}}$, або що $\Sigma^{\mathrm{GR,nc}}$ - реалізація н.к. формального степеневого ряду $\mathfrak{F}$. Знайдемо реалізацію $\widetilde{\Sigma}^{\mathrm{GR,nc}} = (d; \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D}; \mathcal{H} = \bigoplus_{k=1}^{d} \mathcal{H}_k, \mathcal{Y})$ н.к. формального степеневого ряду $\mathfrak{f}$. Для цього ми застосовуємо так зване *діагональне перетворення*:

$$u(x) = 2\widetilde{y}(x) + \widetilde{u}(x), \qquad y(x) = 2\widetilde{y}(x) - \widetilde{u}(x). \tag{1.97}$$

Тоді ми отримаємо $\widetilde{y}(x) = \mathfrak{f}(x)\widetilde{u}(x)$, тобто аналог другого рівняння у (1.96). Легкий підрахунок дає потрібну системну реалізацію $\widetilde{\Sigma}^{\mathrm{GR,nc}}$:

$$\begin{cases} \widetilde{h}(x) &= (xP)\widetilde{A}\widetilde{h}(x) + (xP)\widetilde{B}\widetilde{u}(x), \\ \widetilde{y}(x) &= \widetilde{C}\widetilde{h}(x) + \widetilde{D}\widetilde{u}(x), \end{cases} \tag{1.98}$$

де $\widetilde{A} = A + BC$, $\widetilde{B} = 2B$, $\widetilde{C} = \frac{C}{2}$ і $\widetilde{D} = \frac{I_{\mathcal{Y}}}{2}$. Оскільки U - унітарний оператор, в цьому випадку B - ізометрія, C - коізометрія, $A^*B = 0$ і $AC^* = 0$. Отже, $A + BC$ - унітарний оператор. Таким чином, ми можемо написати

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}(x) &= \frac{I_{\mathcal{Y}}}{2} + C(I_{\mathcal{H}} - (xP)(A+BC))^{-1}(xP)B \\ &= \frac{1}{2}(I_{\mathcal{Y}} + 2C(I_{\mathcal{H}} - (xP)(A+BC))^{-1}(xP)(A+BC)(A+BC)^*B \\ &= \frac{1}{2}(CC^* + 2C(I_{\mathcal{H}} - (xP)(A+BC))^{-1}(xP)(A+BC)C^* \\ &= \frac{1}{2}C(I_{\mathcal{H}} - (xP)(A+BC))^{-1}((I_{\mathcal{H}} - (xP)(A+BC) + 2(xP)(A+BC))C^* \\ &= \frac{1}{2}C(I_{\mathcal{H}} - (xP)(A+BC))^{-1}((I_{\mathcal{H}} + (xP)(A+BC))C^* \\ &= \frac{1}{2}V^*(I_{\mathcal{H}} + xG)(I_{\mathcal{H}} - xG)^{-1}V, \end{aligned}$$

де $G_k = P_k(A+BC)$, $k = 1,\ldots,d$, і $V = C^*$. Легко перевірити, що $G \in \mathcal{G}^d$. Оскільки C - коізометрія, $V = C^*$ - ізометрія. Таким чином, ми отримали зображення (1.93) для $\mathfrak{f}$. □

Наслідок 1.48. *Формальний степеневий ряд $\mathfrak{f} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})\langle\langle x_1, \ldots, x_d\rangle\rangle$ належить класу $\mathcal{HA}_d^{nc}(\mathcal{Y})$ і задовольняє $\mathfrak{f}_\emptyset = \frac{I_{\mathcal{Y}}}{2}$ тоді і тільки тоді, коли існують гільбертів простір $\mathcal{E}$, набір операторів $G \in \mathcal{G}^d \cap \mathcal{L}(\mathcal{E})^d$ і ізометрія $V \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{E})$ такі, що послідовність $a_\emptyset := I_{\mathcal{Y}}$, $a_w := f_w$ для $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \setminus \{\emptyset\}$, задовольняє $a_w = V^*G^wV$, $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$.*

З наслідку 1.48 ми отримаємо наступний результат, який дає н.к. аналог розв'язку проблеми моментів (1.90).

Теорема 1.49. *Задача 1.45 має розв'язок тоді і тільки тоді, коли існують гільбертів простір $\mathcal{E}$, набір операторів $G \in \mathcal{G}^d \cap \mathcal{L}(\mathcal{E})^d$ і ізометрія $V \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{E})$ такі, що*

$$c_w = V^*G^wV, \qquad w \in \Lambda. \tag{1.99}$$

Нехай $\Lambda \subset \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ - допустима множина. Ми будемо казати, що $T = (T_1, \dots, T_d) \in (\mathbb{C}^{n\times n})^d$ - набір Λ-*спільно нільпотентних* матриць, якщо

$$T^w = 0 \quad \text{для всіх } w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \setminus \Lambda.$$

Позначимо клас наборів Λ-спільно нільпотентних матриць як $\mathrm{Nilp}_d(\Lambda)$.

Приклад 1.50. Нехай $\Lambda \subset \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ - допустима множина. Нехай $\mathcal{H}_\Lambda$ - скінченновимірний гільбертів простір, чий ортогональний базис ототожнений з множиною Λ. Для $k = 1, \dots, d$ визначимо ліві н.к. зсуви назад $S_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ за їх дією на базисних векторах:

$$S_k w = \begin{cases} w' & \text{якщо } w = g_k w' \text{ з деяким } w' \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d, \\ 0 & \text{інакше.} \end{cases}$$

Оскільки Λ - допустиме, ці оператори правильно визначені (якщо $w = g_k w'$ і $w \in \Lambda$, то $w' \in \Lambda$). Набір $S := (S_1, \dots, S_d)$ належить класу $\mathrm{Nilp}_d(\Lambda)$. Справді, якщо $v \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \setminus \Lambda$ і $w \in \Lambda$, то $\mathbf{S}^v w \neq 0$ тягне за собою $w = vw'$ з деяким $w' \in \Lambda$. Але у цьому випадку (множина Λ - допустима!) ми отримаємо $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \setminus \Lambda$, що неможливо. Таким чином, $S^v = 0$ для кожного $v \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \setminus \Lambda$. Оскільки для кожного $w \in \Lambda$ ми маємо $S^w w = \emptyset \neq 0$, ми отримаємо, що S не належить класу $\mathrm{Nilp}_d(\tilde{\Lambda})$ ні для якої допустимої власної підмножини $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$. Ми можемо побачити також, що $S \in \mathcal{C}^d$, тобто S - набір d стисків: для довільного $h = \sum_{w\in\Lambda} h_w w \in \mathcal{H}_\Lambda$, з $h_w \in \mathbb{C}$ $(w \in \Lambda)$ і $k \in \{1, \dots, d\}$ ми отримаємо

$$\begin{aligned} \|S_k h\|^2 &= \Big\| \sum_{w\in\Lambda} h_w S_k w \Big\|^2 = \Big\| \sum_{w'\in\Lambda:\, g_k w' \in \Lambda} h_{g_k w'} w' \Big\|^2 \\ &= \sum_{w'\in\Lambda:\, g_k w' \in \Lambda} |h_{g_k w'}|^2 \le \sum_{w\in\Lambda} |h_w|^2 = \|h\|^2, \end{aligned}$$

що означає, що S_k є стисками.

Наступний н.к. аналог критерія Теплиця для розв'язності задачи Каратеодорі є вірним.

Теорема 1.51. *Задача 1.44 має розв'язок тоді і тільки тоді, коли многочлен*

$$p := \frac{c_\emptyset}{2} + \sum_{w\in\Lambda\setminus\{\emptyset\}} x^w c_w \tag{1.100}$$

задовольняє умову

$$\mathrm{Re}\, p(X) \ge 0, \quad X \in \mathcal{D}^d_{\mathrm{nc}} \cap \mathrm{Nilp}_d(\Lambda).$$

Для доведення нам будуть потрібні певні означення і три леми.

Розглянемо $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ як підмоноїд у *вільному моноїді з інволюцією* $\hat{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_{2d}$. Останнє є вільний моноїд $\boldsymbol{\mathcal{G}}_{2d}$ з твірними $g_1, \dots, g_d, g_{d+1}, \dots, g_{2d}$ і нейтральним елементом $\emptyset$,

забезпечений інволюцією $*$, визначеною таким чином: $g_k^* := g_{k+d}$ для $k = 1, \dots, d$, $g_k^* := g_{k-d}$ для $k = d+1, \dots, 2d$, $\emptyset^* := \emptyset$ і $(g_{i_1} \cdots g_{i_l})^* := g_{i_l}^* \cdots g_{i_1}^*$ для кожних $l \in \mathbb{N}$ і $i_j \in \{1, \dots, 2d\}$, $j = 1, \dots, l$. Для множини $\Omega \subset \hat{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_{2d}$ ми визначаємо множину $\Omega^* := \{w \in \hat{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_{2d} \colon\ w^* \in \Omega\}$. Введемо також унітальну $*$-алгебру $\mathcal{A}_d(\mathcal{Y})$ як алгебру $\mathcal{L}(\mathcal{Y})\langle x_1, \dots, x_d, x_{d+1}, \dots x_{2d}\rangle$, забезпечену інволюцією $*$, визначеною таким чином: 1) $x_k^* := x_{k+d}$ для $k = 1, \dots, d$, $x_k^* := x_{k-d}$ для $k = d+1, \dots, 2d$, $(x_{i_1} \cdots x_{i_l})^* := x_{i_l}^* \cdots x_{i_1}^*$ для кожних $l \in \mathbb{N}$ і $i_j \in \{1, \dots, 2d\}$, $j = 1, \dots, l$, так що для $\hat{x} := (x_1, \dots, x_d, x_{d+1}, \dots x_{2d}) = (x_1, \dots, x_d, x_1^*, \dots, x_d^*)$ і $w \in \hat{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_{2d}$ ми маємо $(\hat{x}^w)^* = \hat{x}^{w^*}$; 2) для довільних скінченної множини $\Omega \subset \hat{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_{2d}$ і многочлена $p = \sum_{w \in \Omega} \hat{x}^w p_w$,

$$p^* = \Big(\sum_{w \in \Omega} \hat{x}^w p_w\Big)^* := \sum_{w \in \Omega} \hat{x}^{w^*} p_w^* = \sum_{w \in \Omega^*} \hat{x}^w p_{w^*}^*$$

(тут p_w^* - спряжений оператор до p_w у $\mathcal{L}(\mathcal{Y})$).

Нехай $\mathcal{E}$ - гільбертів простір, і $T = (T_1, \dots, T_d) \in \mathcal{L}(\mathcal{E})^d$. Тоді покладемо

$$\hat{T} := (T_1, \dots, T_d, T_1^*, \dots, T_d^*) \in \mathcal{L}(\mathcal{E})^{2d}.$$

Для скінченної множини $\Omega \subset \hat{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_{2d}$ і многочлена $p = \sum_{w \in \Omega} \hat{x}^w p_w \in \mathcal{A}_d(\mathcal{Y})$ визначимо

$$p(T) = p(\hat{T}) := \sum_{w \in \Omega} \hat{\mathbf{T}}^w \otimes p_w \in \mathcal{L}(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{E}).$$

Зокрема, якщо $\Omega = \Lambda \cup \Lambda^*$, де $\Lambda \subset \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ - скінченна множина і

$$p = \sum_{w \in \Lambda \cup \Lambda^*} \hat{x}^w p_w = p_\emptyset + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{\emptyset\}} x^w p_w + \sum_{w \in \Lambda^* \setminus \{\emptyset\}} x^{*w} p_w,$$

ми маємо

$$p(T) = \sum_{w \in \Lambda \cup \Lambda^*} \hat{T}^w \otimes p_w = I_{\mathcal{E}} \otimes p_\emptyset + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{\emptyset\}} T^w \otimes p_w + \sum_{w \in \Lambda^* \setminus \{\emptyset\}} T^{*w} \otimes p_w,$$

де $x^* := (x_1^*, \dots, x_d^*)$ і $T^* := (T_1^*, \dots, T_d^*)$, і ми ототожнюємо $x^w = \hat{x}^w$, $T^w = \hat{T}^w$ для $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \subset \hat{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_{2d}$, і $x^{*w} = \hat{x}^{*w}$, $T^{*w} = \hat{T}^{*w}$ для $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d^* \subset \hat{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_{2d}$. Таким чином, обчислення многочленів з $\mathcal{A}_d(\mathcal{Y})$ на наборах операторів є добре визначеним.

Лема 1.52. *Нехай $\emptyset \in \Lambda \subset \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ - скінченна множина.*

I: *Многочлен*

$$p = I_{\mathcal{Y}} + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{\emptyset\}} x^w p_w + \sum_{w \in \Lambda^* \setminus \{\emptyset\}} x^{*w} p_w \in \mathcal{A}_d(\mathcal{Y})$$

є додатно напіввизначеним на $\mathcal{U}^d$ *тоді і тільки тоді, коли існують гільбертів простір* $\mathcal{E}$*, набір операторів* $G \in \mathcal{G}^d \cap \mathcal{L}(\mathcal{E})^d$ *і ізометрія* $V \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{E})$ *такі, що*

$$p_w = p_{w^*}^* = V^* G^w V, \qquad w \in \Lambda, \tag{1.101}$$

$$0 = V^* G^w V, \qquad w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \setminus \Lambda. \tag{1.102}$$

II: *Многочлен*

$$p = I_{\mathcal{Y}} + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{\emptyset\}} x^w p_w + \sum_{w \in \Lambda^* \setminus \{\emptyset\}} x^{*w} p_w \in \mathcal{A}_d(\mathcal{Y})$$

є додатно напіввизначеним на $\mathcal{G}^d$ *тоді і тільки тоді, коли існують гільбертів простір* $\mathcal{K}$*, набір операторів* $U \in \mathcal{U}^d \cap \mathcal{L}(\mathcal{K})^d$ *і ізометрія* $W \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{K})$ *такі, що*

$$p_w = p_{w^*}^* = W^* U^w W, \qquad w \in \Lambda, \tag{1.103}$$

$$0 = W^* U^w W, \qquad w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \setminus \Lambda. \tag{1.104}$$

Доведення. I. Якщо многочлен p - додатно напіввизначений на $\mathcal{U}^d$, то $p_w = p_{w^*}^*$ для $w \in \Lambda$. Це можна побачити з факторізації Маккалоу [**105**] $p = h^* h$, де $h = \sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \colon |w| \le m} x^w h_w \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{V}) \langle x_1, \dots, x_d \rangle$, з допоміжним гільбертовим простором $\mathcal{V}$. Покладемо $f := \frac{I_{\mathcal{Y}}}{2} + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{\emptyset\}} x^w p_w$. Тоді $p(C) = 2 \operatorname{Re} f(C) \ge 0$ для кожного набора C строгих стисків на гільбертовому просторі $\mathcal{E}$. Справді, оскільки C має унітарну ділатацію (дивись [**144**]) $U \in \mathcal{U}^d \cap \mathcal{L}(\mathcal{K})^d$, тобто $\mathcal{K} \supset \mathcal{E}$ і $C^w = P_{\mathcal{E}} U^w \big|_{\mathcal{E}}$, $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$, і $p(U) = 2 \operatorname{Re} f(U) \ge 0$, ми отримаємо $p(C) = (P_{\mathcal{E}} \otimes I_{\mathcal{Y}}) p(U) \big|_{\mathcal{E} \otimes \mathcal{Y}} \ge 0$. Таким чином, $f \in \mathcal{HA}_d^{\mathrm{nc}}(\mathcal{Y})$ і $f_\emptyset = \frac{I_{\mathcal{Y}}}{2}$. За наслідком 1.48, існує зображення (1.101)–(1.102).

Навпаки, якщо p має зображення (1.101)–(1.102), то $p(\hat{x}) = f(x) + f(x)^*$, де

$$f(x) = \frac{I_{\mathcal{Y}}}{2} + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{\emptyset\}} x^w p_w = \frac{I_{\mathcal{Y}}}{2} + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{\emptyset\}} x^w V^* G^w V.$$

За наслідком 1.48, $f \in \mathcal{HA}_d^{\mathrm{nc}}(\mathcal{Y})$. Отже, $p(U) = 2 \operatorname{Re} f(U) = \lim_{r \uparrow 1} 2 \operatorname{Re} f(rU) \ge 0$, $U \in \mathcal{U}^d$.

II. Нехай p - додатно напіввизначений на $\mathcal{G}^d$. Нехай $\mathcal{A}_{\mathcal{U}^d}$ - C^*-алгебра, отримана як поповнення за нормою фактор-алгебри унітальної $*$-алгебри $\mathcal{A}_d = \mathcal{A}_d(\mathbb{C})$ з півнормою

$$\|q\| := \sup_{U \in \mathcal{U}^d} \|q(U)\| = \sup_{U \in \mathcal{U}^d} \|q(U_1, \dots, U_d, U_1^*, \dots, U_d^*)\|,$$

за двобічним ідеалом елементів нульової півнорми.

Покажемо, що обмеження наведеного вище фактор-відображення на підпростір $\mathcal{B}_d \subset \mathcal{A}_d$ многочленів вигляду

$$q(\hat{x}) = q_\emptyset + \sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d:\, 0<|w|\le m} x^w q_w + \sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d^*:\, 0<|w|\le m} x^{*w} q_w \tag{1.105}$$

є ін'єктивним, тобто що якщо $q \in \mathcal{B}_d$ ненульове, то відповідна фактор-множина $[q] \in \mathcal{A}_{\mathcal{U}^d}$ ненульова. Справді, якщо $[q] = [0]$, то $q(U) = 0$ для кожного $U \in \mathcal{U}^d$. Зокрема, q додатно напіввизначене на $\mathcal{U}^d$. За [**105**], існує многочлен

$$h = \sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d:\, |w|\le m} x^w h_w \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^r)\,\langle x_1, \ldots, x_d\rangle\,,$$

з деяким $r \in \mathbb{N}$ такий, що $q(\hat{x}) = h(x)^* h(x)$. Тоді h зникає на $\mathcal{U}^d$. Зокрема, для кожного $n \in \mathbb{N}$ многочлен h зникає на $\mathcal{U}^d \cap (\mathbb{C}^{n\times n})^d$. Остання множина є множиною єдиності для функцій від матричних елементів, які є голоморфними на області, що містить цю множину (дивись, наприклад, [**140**]). Тоді h зникає на всьому $(\mathbb{C}^{n\times n})^d$, для кожного $n \in \mathbb{N}$. За [**130**, сс. 22-23] такий многочлен повинен бути нулем, тобто $h_w = 0$ для всіх $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ таких, що $|w| \le m$. Тоді $q_w = 0$ для всіх $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \cup \boldsymbol{\mathcal{G}}_d^*$ з $|w| \le m$.

Позначимо як $\mathcal{B}_{\mathcal{U}^d}$ образ підпростора $\mathcal{B}_d$ при наведеному вище фактор-відображенні. Цей підпростір C^*-алгебри $\mathcal{A}_{\mathcal{U}^d}$ є *самоспряженим*, тобто

$$\mathcal{B}_{\mathcal{U}^d}^* := \{[q]^* = [q^*] :\ [q] \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}^d}\} = \mathcal{B}_{\mathcal{U}^d}.$$

Визначимо лінійне відображення $\varphi\colon \mathcal{B}_{\mathcal{U}^d} \to \mathcal{L}(\mathcal{Y})$ як $\varphi([x^w]) = p_w$ для $w \in \Lambda$, $\varphi([x^{*w}]) = p_w$ для $w \in \Lambda^*$, і $\varphi([z^w]) = \varphi([z^{*w^*}]) = 0$ для $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \setminus \Lambda$. За результатом попереднього абзацу разом з [**130**, сс. 22-23], це лінійне відображення коректно визначене. Покажемо, що φ є *цілком додатним*, тобто для кожного $n \in \mathbb{N}$ відображення

$$\varphi_n := \mathrm{id}_n \otimes \varphi :\ \mathbb{C}^{n\times n} \otimes \mathcal{B}_{\mathcal{U}^d} \to \mathbb{C}^{n\times n} \otimes \mathcal{L}(\mathcal{Y})$$

(тут id_n - тотожнє відображення з C^*-алгебри $\mathbb{C}^{n\times n}$ на себе) є *додатним*. Останнє означає, в свою чергу, що φ_n відображає додатні елементи (у сенсі C^*-алгебри $\mathbb{C}^{n\times n} \otimes \mathcal{A}_{\mathcal{U}^d}$) з $\mathbb{C}^{n\times n} \otimes \mathcal{B}_{\mathcal{U}^d}$ у додатні елементи C^*-алгебри $\mathbb{C}^{n\times n} \otimes \mathcal{L}(\mathcal{Y})$. Нехай $[q] \in \mathbb{C}^{n\times n} \otimes \mathcal{B}_{\mathcal{U}^d}$ - додатний елемент C^*-алгебри $\mathbb{C}^{n\times n} \otimes \mathcal{A}_{\mathcal{U}^d}$, тобто $[q] = [h]^*[h]$ з деяким $[h] \in \mathbb{C}^{n\times n} \otimes \mathcal{A}_{\mathcal{U}^d}$. Можна розглядати $[q]$ як $n \times n$ матрицю $([q]_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ чиї елементи $[q]_{ij} = [q_{ij}] \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}^d}$ і $q_{ij} \in \mathcal{B}_d$, і таким чином $q \in \mathbb{C}^{n\times n} \otimes \mathcal{B}_d$ - многочлен вигляду (1.105) з коефіцієнтами з $\mathbb{C}^{n\times n}$. Спостерігаємо, що в силу означення C^*-алгебри $\mathcal{A}_{\mathcal{U}^d}$, для довільного $[a] \in \mathcal{A}_{\mathcal{U}^d}$ його значення на $\mathcal{U}^d$ добре визначені. Зокрема, якщо $a \in \mathcal{B}_d$, то $[a](U) = a(U)$ для будь-якого $U \in \mathcal{U}^d$. Отже, для довільного $[a] = ([a]_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} = ([a_{ij}])_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{C}^{n\times n} \otimes \mathcal{A}_{\mathcal{U}^d}$ можна коректно визначити$[a](U) := ([a_{ij}](U))_{i,j=1,\ldots,n}$, $U \in \mathcal{U}^d$. Зокрема, якщо $a = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{C}^{n\times n} \otimes \mathcal{B}_d$, то $[a](U) = a(U) = (a_{ij}(U))_{i,j=1,\ldots,n}$ для будь-якого $U \in \mathcal{U}^d$. Оскільки $q(U) = [q](U) = [h](U)^*[h](U)$ - додатно напіввизначене для кожного $U \in \mathcal{U}^d$,

многочлен q (з коефіцієнтами з $\mathbb{C}^{n\times n}$) є додатно напіввизначеним на $\mathcal{U}^d$. З факторізаційної теореми Маккалоу [**105**] ми виводимо, що $q_\emptyset \geq 0$. Якщо $q_\emptyset = I_n$, то за частиною I цієї леми, існують гільбертів простір $\mathcal{E}$, набір операторів $G \in \mathcal{G}^d \cap \mathcal{L}(\mathcal{E})^d$ і ізометрія $V \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathcal{E})$ такі, що

$$\begin{aligned} q_w = q_{w^*}^* &= V^* G^w V, \qquad w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \colon |w| \leq m, \\ 0 &= V^* G^w V, \qquad w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \colon |w| > m. \end{aligned}$$

Тоді ми маємо

$$\begin{aligned} \varphi_n([q]) &= (\mathrm{id}_n \otimes \varphi)\big(I_n \otimes [1] + \sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \colon 0<|w|\leq m} q_w \otimes [z^w] + \sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d^* \colon 0<|w|\leq m} q_w \otimes [z^{*w}]\big) \\ &= I_{\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{Y}} + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{\emptyset\}} V^* G^w V \otimes p_w + \sum_{w \in \Lambda^* \setminus \{\emptyset\}} V^* G^{*w} V \otimes p_w \\ &= (V^* \otimes I_{\mathcal{Y}}) p(G) (V \otimes I_{\mathcal{Y}}) \geq 0. \end{aligned}$$

У випадку, коли $q_\emptyset > 0$ оборотне, ми визначаємо $\tilde{q}(\hat{z}) := q_\emptyset^{-1/2} q(\hat{z}) q_\emptyset^{-1/2}$. Оскільки $\varphi_n([\tilde{q}]) \geq 0$, ми отримаємо

$$\varphi_n([q]) = (q_\emptyset^{1/2} \otimes I_{\mathcal{Y}}) \varphi_n([\tilde{q}]) (q_\emptyset^{1/2} \otimes I_{\mathcal{Y}}) \geq 0.$$

У випадку, коли матриця $q_\emptyset$ особлива, ми покладаємо $q_\epsilon(\hat{x}) := \epsilon I_n + q(\hat{x})$ для $\epsilon > 0$. Тоді $q_{\epsilon,\emptyset} > 0$ оборотне і q_ϵ є додатним на $\mathcal{U}^d$. Оскільки $\varphi_n([q_\epsilon]) \geq 0$, ми отримаємо

$$\varphi_n([q]) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \varphi_n([q_\epsilon]) \geq 0.$$

Нарешті, ми отримали, що $\varphi \colon \mathcal{B}_{\mathcal{U}^d} \to \mathcal{L}(\mathcal{Y})$ є цілком додатним.

Оскільки ми маємо $\varphi([1]) = I_{\mathcal{Y}}$, за теоремою про розширення Арвесона [**18**] існує цілком додатне відображення $\widetilde{\varphi} \colon \mathcal{A}_{\mathcal{U}^d} \to \mathcal{L}(\mathcal{Y})$, яке поширює φ. За теоремою Стайнспрінга [**142**], існує $*$-зображення π алгебри $\mathcal{A}_{\mathcal{U}^d}$ у деякий гільбертів простір $\mathcal{K}$ і ізометрія $W \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{K})$ такі, що $\widetilde{\varphi}(a) = W^* \pi(a) W$, $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{U}^d}$. Зокрема, ми отримаємо

$$\begin{aligned} &(1.106) \quad p_w = \varphi([x^w]) = \widetilde{\varphi}([x^w]) = W^* \pi([x^w]) W = W^* U^w W, \quad w \in \Lambda, \\ &(1.107) \quad p_w = \varphi([x^{*w}]) = \widetilde{\varphi}([x^{*w}]) = W^* \pi([x^{*w}]) W = W^* U^{*w} W, \quad w \in \Lambda^*, \\ &(1.108) \quad 0 = \varphi([x^w]) = \widetilde{\varphi}([x^w]) = W^* \pi([x^w]) W = W^* U^w W, \quad w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \setminus \Lambda, \end{aligned}$$

де ми покладаємо $U := (\pi([x_1]), \ldots, \pi([x_d]))$. Ми маємо $U \in \mathcal{U}^d$. Справді, оскільки

$$\|[1 - x_k^* x_k]\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{U}^d}} = \|[1 - x_k x_k^*]\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{U}^d}} = 0,$$

ми отримаємо $[x_k^* x_k] = [x_k x_k^*] = [1]$. Отже,

$$U_k^* U_k = \pi([x_k])^* \pi([x_k]) = \pi([x_k^* x_k]) = \pi([1]) = I_{\mathcal{K}}, \quad k = 1, \ldots, d,$$

$$U_k U_k^* \;=\; \pi([x_k])\pi([x_k])^* = \pi([x_k x_k^*]) = \pi([1]) = I_{\mathcal{K}}, \quad k = 1, \dots, x.$$

Ясно, що (1.106) і (1.107) тягнуть за собою, що $p_w = p_{w^*}^*$ для $w \in \Lambda$. Таким чином, зображення (1.106)–(1.108) для коефіцієнтів p є потрібне зображення (1.103)–(1.104).

Навпаки, якщо коефіцієнти p мають зображення (1.103)–(1.104), то для будь-якого $G \in \mathcal{G}^d \cap \mathcal{L}(\mathcal{E})^d$ ми маємо

$$\begin{aligned} p(G) \;&=\; I_{\mathcal{E}\otimes\mathcal{Y}} + \sum_{w\in\Lambda\setminus\{\emptyset\}} G^w \otimes p_w + \sum_{w\in\Lambda^*\setminus\{\emptyset\}} G^{*w} \otimes p_w \\ &=\; I_{\mathcal{E}\otimes\mathcal{Y}} + \sum_{w\in\Lambda\setminus\{\emptyset\}} G^w \otimes W^* U^w W + \sum_{w\in\Lambda^*\setminus\{\emptyset\}} G^{*w} \otimes W^* U^{*w} W \\ &=\; I_{\mathcal{E}\otimes\mathcal{Y}} + \sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d\setminus\{\emptyset\}} G^w \otimes W^* U^w W + \sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d^*\setminus\{\emptyset\}} G^{*w} \otimes W^* U^{*w} W \end{aligned}$$

(зауважимо, що суми скінченні!). Формальний степеневий ряд

$$\mathfrak{f} := \frac{I_{\mathcal{E}}}{2} + \sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d\setminus\{\emptyset\}} x^w G^w$$

за наслідком 1.48 належить до класу $\mathcal{HA}_d^{\mathrm{nc}}(\mathcal{E})$. Отже, для $0 < r < 1$ ми маємо

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{E}\otimes\mathcal{Y}} + \sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d\setminus\{\emptyset\}} G^w \otimes W^*(rU)^w W + \sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d^*\setminus\{\emptyset\}} G^{*w} \otimes W^*(rU)^{*w} W \\ = (I_{\mathcal{E}} \otimes W^*) 2\,\mathrm{Re}\,\mathfrak{f}^{\mathrm{r}}(rU)(I_{\mathcal{E}} \otimes W) \geq 0. \end{aligned}$$

Тут $\mathfrak{f}^{\mathrm{r}}(rU) = \frac{I_{\mathcal{E}\otimes\mathcal{K}}}{2} + \sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d\setminus\{\emptyset\}} G^w \otimes (rU)^w$. Сума зліва - скінченна. Отже, покладаючи $r \uparrow 1$, ми отримаємо $p(G) \geq 0$. Ми зауважимо, що $2\,\mathrm{Re}\,\mathfrak{f}^{\mathrm{r}}(rU) \geq 0$ тоді і тільки тоді, коли $2\,\mathrm{Re}\,\mathfrak{f}(rU) \geq 0$. Таким чином, p є додатно напіввизначеним на $\mathcal{G}^d$. □

Лема 1.53. *Нехай $\Lambda \subset \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ - допустима множина. Якщо н.к. многочлен $p = \sum_{w\in\Lambda} x^w p_w \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{Y})\langle x_1, \dots, x_d\rangle$, з деякими гільбертовими просторами $\mathcal{U}$ і $\mathcal{Y}$, задовольняє $p(T) = 0$ для довільного набору Λ-спільно нільпотентних стискаючих $n \times n$ матриць $T = (T_1, \dots, T_d)$, $n \in \mathbb{N}$, то $p_w = 0$ для всіх $w \in \Lambda$. Більше того, достатньо взяти n рівним $\#\Lambda$, кількості слів у Λ.*

Доведення. Ми маємо $p(S) = 0$, де S - набір зворотних зсувів з прикладу 1.50. Оскільки $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)^d$ і $\dim \mathcal{H}_\Lambda = \#\Lambda$, ми можемо розглядати S як набір Λ-спільно нільпотентних стискаючих $n \times n$ матриць, з $n = \#\Lambda$, як і $\lambda S := (\lambda S_1, \dots, \lambda S_d)$ для будь-якого $\lambda \in \mathbb{D}$. Отже, многочлен з однією змінною

$$r_{\mathbf{S}}(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \lambda^k r_{S,k} := \sum_{k=0}^{m} \lambda^k \Big(\sum_{w\in\Lambda:\ |w|=k} S^w \otimes p_w \Big) = \sum_{w\in\Lambda} (\lambda S)^w \otimes p_w = p(\lambda S),$$

де $m = \max_{w\in\Lambda} |w|$, зникає на $\mathbb{D}$, і значить, зникає тотожньо. Таким чином,

$$r_{\mathbf{S},k} = \sum_{w\in\Lambda\colon\, |w|=k} S^w \otimes p_w = 0$$

для $k = 0, \dots, m$. Для фіксованого k і будь-якого $u \in \mathcal{U}$ і $v \in \Lambda$: $|v| = k$ (слово v ототожнюється з базисним вектором у $\mathcal{H}_\Lambda$, чи еквівалентно, із стандартним базисним вектором у $\mathbb{C}^n$), ми маємо:

$$0 = \sum_{w\in\Lambda\colon\, |w|=k} (S^w \otimes p_w)(v \otimes u) = \sum_{w\in\Lambda\colon\, |w|=k} S^w v \otimes p_w u = \emptyset \otimes p_v u.$$

Оскільки $\emptyset \neq 0$, ми отримаємо $p_v u = 0$. Оскільки $k \in \{0, \dots, m\}$, $v \in \Lambda$ і $u \in \mathcal{U}$ були обрані довільно, ми отримаємо результат леми. □

Лема 1.54. *Нехай $\Lambda \subset \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ - допустима множина, $U \in \mathcal{U}^d \cap \mathcal{L}(\mathcal{K})^d$, і нехай $W \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{K})$ - ізометрія , з гільбертовими просторами $\mathcal{Y}$ і $\mathcal{K}$ такими, що*

$$W^* U^w W = 0 \quad \text{для } w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \setminus \Lambda. \tag{1.109}$$

Тоді існують гільбертів простір $\mathcal{E}$ і набір $T \in \mathcal{C}^d \cap \mathcal{L}(\mathcal{E})^d$ із Λ-спільно нільпотентних операторів таких, що

$$\mathcal{K} \supset \mathcal{E} \supset W\mathcal{Y}$$

і U - унітарна ділатація T: $T^w = P_{\mathcal{E}} U^w\big|_{\mathcal{E}}$, $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$. Зокрема,

$$W^* U^w W = \tilde{W}^* T^w \tilde{W}, \quad w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d, \tag{1.110}$$

де $\tilde{W} = P_{\mathcal{E}} W \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{E})$ - ізометрія. Якщо простір $\mathcal{Y}$ - скінченновимірний, то ми можемо обрати $\mathcal{E}$ теж скінченновимірним.

Доведення. Визначимо наступні підпростори у $\mathcal{K}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &:= \operatorname{clos} \operatorname*{span}_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d\setminus\Lambda} U^w W\mathcal{Y}, \\ \mathcal{E} &:= \big(\operatorname{clos} \operatorname*{span}_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d} U^w W\mathcal{Y}\big) \ominus \big(\operatorname{clos} \operatorname*{span}_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d\setminus\Lambda} \mathbf{U}^w W\mathcal{Y}\big), \end{aligned}$$

і визначимо оператори $T_k := P_{\mathcal{E}} U_k\big|_{\mathcal{E}}$, $k = 1,\dots,d$. Ясно, що $T = (T_1, \dots, T_d) \in \mathcal{C}^d$. Оскільки $\mathcal{E}_0$ і $\mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E} = \operatorname{clos} \operatorname{span}_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d} U^w W\mathcal{Y}$ - інваріантні підпростори для кожного U_k, $k = 1,\dots,d$, простір $\mathcal{E}$ - це ортогональна різниця двох інваріантних підпросторів для цих унітарних операторів, тобто *півінваріантний підпростір*. Таким чином, за лемою Сарасона [**134**, лема 0] U - унітарна ділатація T. Оскільки для кожного $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \setminus \Lambda$ ми маємо $U^w \mathcal{E} \subset \mathcal{E}_0$, ми отримаємо $T^w = P_{\mathcal{E}} U^w\big|_{\mathcal{E}} = 0$, тобто $T \in \operatorname{Nilp}_d(\Lambda)$. Оскільки за (1.109) $W^* \mathcal{E}_0 = \{0\}$, і $W\mathcal{Y} \subset \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E} = \operatorname{clos} \operatorname{span}_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d} U^w W\mathcal{Y}$, ми отримаємо $W\mathcal{Y} \subset \mathcal{E}$, як потрібно. Таким чином, (1.110) є також вірним, з ізометрією $\tilde{W} = P_{\mathcal{E}} W \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{E})$.

У випадку, коли $\dim \mathcal{Y} < \infty$, ми можемо написати

$$\mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E} = \big(\operatorname{clos} \operatorname*{span}_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d\setminus\Lambda} U^w W\mathcal{Y}\big) \oplus P_{\mathcal{E}}\big(\operatorname{clos}\operatorname*{span}_{w\in\Lambda} U^w W\mathcal{Y}\big) = \mathcal{E}_0 \oplus P_{\mathcal{E}}\big(\operatorname{clos}\operatorname*{span}_{w\in\Lambda} U^w W\mathcal{Y}\big),$$

і оскільки множина Λ - скінченна, як підпростір $\operatorname{clos}\operatorname{span}_{w\in\Lambda} U^w W\mathcal{Y}$, так і підпростір $\mathcal{E} = P_{\mathcal{E}}\big(\operatorname{clos}\operatorname{span}_{w\in\Lambda} U^w W\mathcal{Y}\big)$ є скінченновимірними. $\square$

Доведення теореми 1.51. Якщо задача 1.44 має розв'язок $\mathfrak{f} \in \mathcal{HA}_d^{\mathrm{nc}}(\mathcal{Y})$, то для будь-якого набора $C \in \mathcal{L}(\mathcal{E})^d$ строгих стисків, з гільбертовим простором $\mathcal{E}$, ряд $\mathfrak{f}(C) := \sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d} C^w \otimes \mathfrak{f}_w$ збігається в операторній нормі, і $\operatorname{Re}\mathfrak{f}(C) \geq 0$. Якщо $T \in \mathcal{C}^d \cap \mathcal{L}(\mathcal{E})^d$ - набір Λ-спільно нільпотентних операторів, то також і $rT = (rT_1, \ldots, rT_d)$ для кожного $r:\ 0 < r < 1$. Отже,

$$\operatorname{Re} p(T) = \operatorname{Re}\mathfrak{f}(rT) = \operatorname{Re}\big(\frac{I_{\mathcal{E}} \otimes c_\emptyset}{2} + \sum_{w\in\Lambda\setminus\{\emptyset\}} (rT)^w \otimes c_w\big) \geq 0.$$

Покладаючи $r \uparrow 1$, ми отримаємо $\operatorname{Re} p(T) \geq 0$.

Для зворотного напрямку, розглянемо спочатку випадок, коли $c_\emptyset = I_{\mathcal{Y}}$. Нехай $\operatorname{Re} p(T) \geq 0$ для кожного набора T із Λ-спільно нільпотентних стискаючих $n \times n$ матриць, для всіх $n \in \mathbb{N}$. Нехай $\mathcal{A}_{\mathcal{G}^d}$ - C^*-алгебра, отримана як поповнення за нормою фактор-алгебри унітальної $*$-алгебри $\mathcal{A}_d$ (яка була введена у доведенні леми 1.52 вище) з півнормою

$$\|q\| := \sup_{G\in\mathcal{G}^d} \|q(G)\| = \sup_{G\in\mathcal{G}^d} \|q(G_1, \ldots, G_d, G_1^*, \ldots, G_d^*)\|,$$

за двохстороннім ідеалом елементів нульової півнорми.

Покажемо, що обмеження фактор-відображення вище на підпростір $\mathcal{B}_d \subset \mathcal{A}_d$ многочленів вигляду (1.105) є ін'єктивним, тобто що якщо $q \in \mathcal{B}_d$ ненульове, то відповідна фактор-множина $[q] \in \mathcal{A}_{\mathcal{G}^d}$ - ненульова. Справді, якщо $[q] = [0]$, то $q(G) = 0$ для кожного $G \in \mathcal{G}^d \cap \mathcal{L}(\mathcal{H})^d$, з гільбертовим простором $\mathcal{H}$. Позначимо $\tilde{q}(\hat{x}) := 1 + q(\hat{x})$. Тоді $\tilde{q}(G) = I_{\mathcal{H}} > 0$ для кожного $G \in \mathcal{G}^d \cap \mathcal{L}(\mathcal{H})^d$. Зокрема, $\tilde{q}(G_\zeta) = 1$ для $G_\zeta := (\zeta, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{G}^d \cap \mathbb{C}^d$, $\zeta \in \mathbb{T}$. Отже,

$$\tilde{q}_\emptyset = \int_{\mathbb{T}} \tilde{q}(G_\zeta)\, d\zeta = 1,$$

і $q_\emptyset = 0$. За частиною II леми 1.52, існують гільбертів простір $\mathcal{K}$, набір операторів $U \in \mathcal{U}^d \cap \mathcal{L}(\mathcal{K})^d$ і ізометрія $W \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathcal{K})$ такі, що

$$\begin{aligned} \tilde{q}_w = \tilde{q}_{w^*}^* &= W^* U^w W, \qquad w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d\colon |w| \leq m, \\ 0 &= W^* U^w W, \qquad w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d\colon |w| > m. \end{aligned}$$

Тоді

$$q_w = \tilde{q}_w = \tilde{q}_{w^*}^* = q_{w^*}^* = W^* U^w \tilde{W}, \qquad w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d\colon 0 < |w| \leq m.$$

Для довільного $G \in \mathcal{G}^d \cap \mathcal{L}(\mathcal{H})^d$ тригонометричний многочлен від однієї змінної

$$t_G(\zeta) := q(\zeta G) = \sum_{k=1}^{m} \zeta^k \sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \colon |w|=k} G^w q_w + \sum_{k=1}^{m} \bar{\zeta}^k \sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \colon |w|=k} G^{*w} q_w$$

є тотожньо нулем, що дає зокрема

$$\sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \colon |w|=k} G^w q_w = 0, \qquad k = 1, \dots, m.$$

Для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $\tilde{U} \in \mathcal{U}^d \cap (\mathbb{C}^{n\times n})^d$ ми маємо $\tilde{U} \overset{\circ}{\otimes} G := (\tilde{U}_1 \otimes G_1, \dots, \tilde{U}_d \otimes G_d) \in \mathcal{G}^d$, отже

$$\sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \colon |w|=k} (\tilde{U} \overset{\circ}{\otimes} G)^w q_w = \sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \colon |w|=k} \tilde{U}^w \otimes G^w q_w = 0, \qquad k = 1, \dots, m.$$

Оскільки $\mathcal{U}^d \cap (\mathbb{C}^{n\times n})^d$ - множина єдиності для голоморфних функцій від матричних елементів (дивись, наприклад, [**140**]), н.к. многочлен $\sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \colon |w|=k} x^w G^w q_w$ зникає на всьому $(\mathbb{C}^{n\times n})^d$, для кожних $k \in \{1, \dots, m\}$ і $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \colon |w|=k} X^w \otimes G^w q_w = 0$, $X \in (\mathbb{C}^{n\times n})^d$. Таким чином, за [**130**, сс. 22–23], $G^w q_w = 0$, $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \colon 0 < |w| \le m$. Для кожного $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \colon 0 < |w| \le m$ ми можемо знайти $G \in \mathcal{G}^d$ таке, що $G^w \neq 0$. Справді, н.к. многочлен $\psi(x) = 1 + x^w$ належить класу $\mathcal{HA}_d^{\mathrm{nc}} = \mathcal{HA}_d^{\mathrm{nc}}(\mathbb{C})$ і $\psi_\emptyset = 1$, отже за наслідком 1.48, існують гільбертів простір $\mathcal{E}$, набір операторів $G \in \mathcal{G}^d \cap \mathcal{L}(\mathcal{E})^d$ і ізометрія $V \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathcal{E})$ такі, що $\psi_w = 1 = 2V^* G^w V$, що тягне за собою $G^w \neq 0$. Отже, $q_w = 0$ для всіх $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \colon 0 < |w| \le m$. Оскільки ми показали вже, що $q_\emptyset = 0$ і $q_w = q_{w^*}^*$ для $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \colon 0 < |w| \le m$, ми отримаємо $q = 0$.

Позначимо як $\mathcal{B}_\Lambda \subset \mathcal{B}_d$ скінченновимірний підпростір многочленів вигляду

$$q(\hat{x}) = q_\emptyset + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{\emptyset\}} x^w q_w + \sum_{w \in \Lambda^* \setminus \{\emptyset\}} x^{*w} q_w, \tag{1.111}$$

і нехай $\mathcal{B}_{\Lambda,\mathcal{G}^d}$ - образ підпростора $\mathcal{B}_\Lambda$ при фактор-відображенні вище. Цей підпростір C^*-алгебри $\mathcal{A}_{\mathcal{G}^d}$ - самоспряжений, тобто $\mathcal{B}_{\Lambda,\mathcal{G}^d}^* = \mathcal{B}_{\Lambda,\mathcal{G}^d}$. Визначимо лінійне відображення $\varphi : \mathcal{B}_{\Lambda,\mathcal{G}^d} \to \mathcal{L}(\mathcal{Y})$ як $\varphi([1]) = I_{\mathcal{Y}}$, $\varphi([x^w]) = c_w$ для $w \in \Lambda \setminus \{\emptyset\}$, і $\varphi([x^{*w}]) = c_{w^*}^*$ для $w \in \Lambda^* \setminus \{\emptyset\}$. За попереднім абзацем разом з [**130**, сс. 22–23], це лінійне відображення коректно визначене. Покажемо, що φ - цілком додатне. Нехай $n \in \mathbb{N}$, і нехай $[q] \in \mathbb{C}^{n\times n} \otimes \mathcal{B}_{\Lambda,\mathcal{G}_d}$ - додатний елемент C^*-алгебри $\mathbb{C}^{n\times n} \otimes \mathcal{A}_{\mathcal{G}^d}$, тобто $[q] = [h]^*[h]$ з деяким $[h] \in \mathbb{C}^{n\times n} \otimes \mathcal{A}_{\mathcal{G}^d}$. Можна розглядати $[q]$ як $n \times n$ матрицю $([q]_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, чиї матричні елементи $[q]_{ij} = [q_{ij}] \in \mathcal{B}_{\Lambda,\mathcal{G}^d}$ і $q_{ij} \in \mathcal{B}_\Lambda$, і значить $q \in \mathbb{C}^{n\times n} \otimes \mathcal{B}_\Lambda$ - многочлен вигляду (1.111) з коефіцієнтами з $\mathbb{C}^{n\times n}$. Спостерігаємо, що в силу означення C^*-алгебри $\mathcal{A}_{\mathcal{G}^d}$, для довільного $[a] \in \mathcal{A}_{\mathcal{G}^d}$ його значення на $\mathcal{G}^d$ - добре визначені. Зокрема, якщо $a \in \mathcal{B}_\Lambda$, то $[a](G) = a(G)$ для будь-якого $G \in \mathcal{G}^d$. Отже, для довільного $[a] = ([a]_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = ([a_{ij}])_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{C}^{n\times n} \otimes \mathcal{A}_{\mathcal{G}^d}$

можна визначити коректно $[a](G) := ([a_{ij}](G))_{i,j=1,\dots,n}$, $G \in \mathcal{G}^d$. Зокрема, якщо $a = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{C}^{n\times n} \otimes \mathcal{B}_\Lambda$, то $[a](G) = a(G) = (a_{ij}(G))_{i,j=1,\dots,n}$ для будь-якого $G \in \mathcal{G}^d$. Оскільки $q(G) = [q](G) = [h](G)^*[h](G)$ - додатно напіввизначене для кожного $G \in \mathcal{G}^d$, многочлен q (з коефіцієнтами з $\mathbb{C}^{n\times n}$) є додатно напіввизначеним на $\mathcal{G}^d$. Зокрема, $q(G_\zeta) \geq 0$ для $G_\zeta := (\zeta, 0, \dots, 0) \in \mathcal{G}^d \cap \mathbb{C}^d,\ \zeta \in \mathbb{T}$. Отже,

$$q_\emptyset = \int_{\mathbb{T}} q(G_\zeta)\, d\zeta \geq 0.$$

Якщо $q_\emptyset = I_n$, то за частиною II леми 1.52 існують гільбертів простір $\mathcal{K}$, набір операторів $U \in \mathcal{U}^d \cap \mathcal{L}(\mathcal{K})^d$ і ізометрія $W \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathcal{K})$ такі, що

$$\begin{aligned} q_w = q_{w^*}^* &= W^*U^wW, \qquad w \in \Lambda, \\ 0 &= W^*U^wW, \qquad w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d \setminus \Lambda. \end{aligned}$$

Тоді ми маємо

$$\begin{aligned} \varphi_n([q]) &= (\mathrm{id}_n \otimes \varphi)\big(I_n \otimes [1] + \sum_{w\in\Lambda\setminus\{\emptyset\}} q_w \otimes [z^w] + \sum_{w\in\Lambda^*\setminus\{\emptyset\}} q_w \otimes [z^{*w}]\big) \\ &= I_{\mathbb{C}^n\otimes\mathcal{Y}} + \sum_{w\in\Lambda\setminus\{\emptyset\}} W^*U^wW \otimes c_w + \sum_{w\in\Lambda^*\setminus\{\emptyset\}} W^*U^{*w}W \otimes c_{w^*}^* \\ &= (W^* \otimes I_{\mathcal{Y}})2\operatorname{Re} p(U)(W \otimes I_{\mathcal{Y}}) \end{aligned}$$

За лемою 1.54, існують скінченновимірний гільбертів простір $\mathcal{E}$ і набір $T \in \mathcal{C}^d \cap \mathcal{L}(\mathcal{E})^d$ із Λ-спільно нільпотентних операторів такі, що (1.110) виконується з ізометрією $\tilde{W} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathcal{E})$. Таким чином, $\varphi_n([q]) = (\tilde{W}^* \otimes I_{\mathcal{Y}})2\operatorname{Re} p(T)(\tilde{W} \otimes I_{\mathcal{Y}})$ - додатно напіввизначений оператор за припущенням, що $\operatorname{Re} p(T) \geq 0$. У випадку, коли $q_\emptyset > 0$ - оборотне, ми можемо позначити $\tilde{q}(\hat{x}) := q_\emptyset^{-1/2} q(\hat{x}) q_\emptyset^{-1/2}$. Оскільки $\varphi_n([\tilde{q}]) \geq 0$, ми отримаємо $\varphi_n([q]) = (q_\emptyset^{1/2} \otimes I_{\mathcal{Y}})\varphi_n([\tilde{q}])(q_\emptyset^{1/2} \otimes I_{\mathcal{Y}}) \geq 0$. У випадку, коли матриця $q_\emptyset$ особлива, ми покладаємо $q_\epsilon(\hat{x}) := \epsilon I_n + q(\hat{x})$ для $\epsilon > 0$. Тоді q_ϵ є додатно визначеним на $\mathcal{G}_d$ і $(q_\epsilon)_\emptyset = \epsilon I_n + q_\emptyset > 0$. Оскільки $\varphi_n([q_\epsilon]) \geq 0$, ми отримаємо $\varphi_n([q]) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} \varphi_n([q_\epsilon]) \geq 0$. Нарешті, ми отримали, що $\varphi : \mathcal{B}_{\Lambda,\mathcal{G}_d} \to \mathcal{L}(\mathcal{Y})$ є цілком додатним.

Оскільки ми маємо $\varphi([1]) = I_{\mathcal{Y}}$, за теоремою Арвесона про розширення [**18**], існує цілком додатне відображення $\widetilde{\varphi} : \mathcal{A}_{\mathcal{G}^d} \to \mathcal{L}(\mathcal{Y})$, що поширює φ. За теоремою Стайнспрінга [**142**], існує $*$-зображення π алгебри $\mathcal{A}_{\mathcal{G}^d}$ у деякому гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ і ізометрія $V \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{H})$ такі, що $\widetilde{\varphi}(a) = V^*\pi(a)V, \qquad a \in \mathcal{A}_{\mathcal{G}^d}$. Зокрема, ми отримаємо

$$c_w = \varphi([x^w]) = \widetilde{\varphi}([x^w]) = V^*\pi([x^w])V = V^*G^wV, \quad w \in \Lambda, \tag{1.112}$$

де ми покладаємо $G := (\pi([x_1]), \dots, \pi([x_d]))$. Ми маємо $G \in \mathcal{G}^d$. Справді, оскільки ми маємо

$$\big\|\big[1 - \sum_{k=1}^d x_k^* x_k\big]\big\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{G}^d}} = \big\|\big[1 - \sum_{k=1}^d x_k x_k^*\big]\big\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{G}^d}} = 0,$$

і

$$\|[x_k^* x_j]\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{G}^d}} = \|[x_k x_j^*]\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{G}^d}} = 0, \quad k \neq j,$$

ми отримаємо $[\sum_{k=1}^d x_k^* x_k] = [\sum_{k=1}^x x_k x_k^*] = [1]$ і $[x_k^* x_j] = [x_k x_j^*] = [0]$ для $k \neq j$. Отже,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^d G_k^* G_k &= \sum_{k=1}^d \pi([x_k])^* \pi([x_k]) = \pi\big([\sum_{k=1}^d x_k^* x_k]\big) = \pi([1]) = I_{\mathcal{H}}, \\
G_k^* G_j &= \pi([x_k])^* \pi([x_j]) = \pi([x_k^* x_j]) = \pi([0]) = 0, \qquad k \neq j, \\
\sum_{k=1}^d G_k G_k^* &= \sum_{k=1}^d \pi([x_k]) \pi([x_k])^* = \pi\big([\sum_{k=1}^d x_k x_k^*]\big) = \pi([1]) = I_{\mathcal{H}}, \\
G_k G_j^* &= \pi([x_k]) \pi([x_j])^* = \pi([x_k x_j^*]) = \pi([0]) = 0, \qquad k \neq j,
\end{aligned}$$

що оначає, що $G \in \mathcal{G}^d$. Нарешті, оскільки (1.112) співпадає з (1.99), з теореми 1.49 ми отримаємо, що задача 1.45 має розв'язок.

Розглянемо зараз випадок, коли $c_\emptyset > 0$. Нехай S - набір операторів на скінченновимірному гільбертовому просторі $\mathcal{H}_\Lambda$ з прикладу 1.50. Оскільки S складається з Λ-спільно нільпотентних стисків, $\operatorname{Re} p(S) \geq 0$ за припущенням про н.к. многочлен p. Нехай $w \in \Lambda \setminus \{\emptyset\}$, $y_1 \in \mathcal{Y}$, $y_2 \in \mathcal{Y}$ - довільні. Тоді, ототожнюючи слова з Λ з відповідними векторами з ортогонального базису у $\mathcal{H}_\Lambda$, ми маємо

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle 2 \operatorname{Re} p(S)(\emptyset \otimes y_1 + w \otimes y_2), \emptyset \otimes y_1 + w \otimes y_2 \rangle \\
&= 2 \operatorname{Re} \langle p(S)(\emptyset \otimes y_1 + w \otimes y_2), \emptyset \otimes y_1 + w \otimes y_2 \rangle \\
&= 2 \operatorname{Re} \big\langle \big(\frac{I_{\mathcal{H}_\Lambda}}{2} \otimes c_\emptyset + \sum_{v \in \Lambda \setminus \emptyset} S^v \otimes c_v\big)(\emptyset \otimes y_1 + w \otimes y_2), \emptyset \otimes y_1 + w \otimes y_2 \big\rangle \\
&= \langle (I_{\mathcal{H}_\Lambda} \otimes c_\emptyset)(\emptyset \otimes y_1), \emptyset \otimes y_1 \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle (S^w \otimes c_w)(w \otimes y_2), \emptyset \otimes y_1 \rangle \\
&+ \langle (I_{\mathcal{H}_\Lambda} \otimes c_\emptyset)(w \otimes y_2), w \otimes y_2 \rangle \\
&= \langle c_\emptyset y_1, y_1 \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle c_w y_2, y_1 \rangle + \langle c_\emptyset y_2, y_2 \rangle.
\end{aligned}$$

Іншими словами, для кожного $w \in \Lambda \setminus \emptyset$ операторна блочна матриця $\begin{bmatrix} c_\emptyset & c_w \\ c_w^* & c_\emptyset \end{bmatrix}$ є додатно напіввизначеною. За класичним результатом Шура (дивись, наприклад, теорему XVI.1.1 у [**56**] або лему 1.2 у [**51**]), існують стиски $t_w \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$ такі, що $c_w = c_\emptyset^{1/2} t_w c_\emptyset^{1/2}$, $w \in \Lambda \setminus \emptyset$. Визначимо н.к. многочлен $q(z) := \frac{I_{\mathcal{Y}}}{2} + \sum_{v \in \Lambda \setminus \emptyset} x^w t_w$. Оскільки для кожного набора T із Λ-спільно нільпотентних стисків на гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ ми маємо

$$\operatorname{Re} p(T) = (I_{\mathcal{H}} \otimes c_\emptyset^{1/2}) \operatorname{Re} q(T) (I_{\mathcal{H}} \otimes c_\emptyset^{1/2}) \geq 0$$

і оператор $c_\emptyset^{1/2}$ має щільний образ у $\mathcal{Y}$, ми отримаємо, що $\operatorname{Re} q(T) \geq 0$. Як ми показали вище, задача 1.45 для даних t_w, $w \in \Lambda$, розв'язна, тобто існує $\mathfrak{g} \in \mathcal{HA}_d^{\mathrm{nc}}(\mathcal{Y})$

таке, що $\mathfrak{g}_\emptyset = \frac{I_\mathcal{Y}}{2}$ і $\mathfrak{g}_w = t_w$, $w \in \Lambda \setminus \{\emptyset\}$. Тоді $\mathfrak{f}(x) := c_\emptyset^{1/2}\mathfrak{g}(x)c_\emptyset^{1/2} \in \mathcal{HA}_d^{\mathrm{nc}}(\mathcal{Y})$ розв'язує задачу 1.44 для даних c_w, $w \in \Lambda$.

Розглянемо зараз загальний випадок $c_\emptyset \geq 0$. Припустимо, що $\operatorname{Re} p(T) \geq 0$ для кожного набору T стискаючих Λ-спільно нільпотентних $n \times n$ матриць, для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді для будь-якого такого T многочлен

$$f_T(\lambda) := p(\lambda T) = \frac{I_n \otimes c_\emptyset}{2} + \sum_{k=1}^{m} \lambda^k \sum_{w\in\Lambda\colon |w|=k} T^w \otimes c_w, \quad \lambda \in \mathbb{D},$$

де $m = \max_{w\in\Lambda} |w|$, належить класу Герглотця $\mathcal{H}_1(\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{Y})$. Оскільки його коефіцієнти є $\frac{c_0(T)}{2} := (f_T)_0 = \frac{I_n \otimes c_\emptyset}{2}$, $c_k(T) := (f_T)_k = \sum_{w\in\Lambda\colon |w|=k} T^w \otimes c_w$, $k = 1, \ldots, m$, з критерія Каратеодорі–Теплиця для розв'язності задачи Каратеодорі для однієї змінної з даними $c = \{c_k(T)\}_{k=0,\ldots,m}$, ми отримаємо $T_c \geq 0$, де операторна блочна матриця визначається у (1.86). Умова $T_c \geq 0$ тягне за собою для $k = 1, \ldots, m$ наступні нерівності:

$$|\langle c_k(T)u, v\rangle|^2 \leq \langle (I_n \otimes c_\emptyset)u, u\rangle \langle (I_n \otimes c_\emptyset)v, v\rangle, \quad u, v \in \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{Y}, \tag{1.113}$$

що дає $\ker I_n \otimes c_\emptyset \subset \ker c_k(T)$ і $\ker I_n \otimes c_\emptyset \subset \ker c_k(T)^*$. Нехай $u \in \ker c_\emptyset$ і $k \in \{1, \ldots, m\}$. Тоді н.к. многочлен $\sum_{w\in\Lambda\colon |w|=k} x^w(c_w u)$ з коефіцієнтами у $\mathcal{Y} \cong \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathcal{Y})$ зникає на наборах стискаючих Λ-спільно нільпотентних $n\times n$ матриць, для кожного $n \in \mathbb{N}$. За пропозицією 1.53, $c_w u = 0$ для всіх $w \in \Lambda$ $|w| = k$. Отже, для кожного $w \in \Lambda$ ми маємо $\ker c_\emptyset \subset \ker c_w$. Аналогічно, $\ker c_\emptyset \subset \ker c_w^*$ для кожного $w \in \Lambda$. Ми отримаємо, що наші дані задачи 1.44 мають наступний операторно-блочний матричний вигляд відносно розкладання $\mathcal{Y} = \ker c_\emptyset \oplus \overline{\operatorname{ran} c_\emptyset}$:

$$c_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_w^{(22)} \end{bmatrix}, \quad w \in \Lambda.$$

Оскільки $c_\emptyset^{(22)} > 0$, і многочлен

$$p^{(22)}(x) := \frac{c_\emptyset^{(22)}}{2} + \sum_{w\in\Lambda\setminus\{\emptyset\}} x^w c_w^{(22)}$$

задовольняє умову, що $\operatorname{Re} p^{(22)}(T) \geq 0$ для кожного набора стискаючих Λ-спільно нільпотентних квадратних матриць одного розміру, за результатом попереднього абзацу, задача 1.44 для даних $c_w^{(22)}$, $w \in \Lambda$, має розв'язок $\mathfrak{f}^{(22)} \in \mathcal{HA}_d^{\mathrm{nc}}(\overline{\operatorname{ran} c_\emptyset})$. Тоді задача 1.44 для даних c_w, $w \in \Lambda$, має розв'язок

$$\mathfrak{f} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{f}^{(22)} \end{bmatrix} \in \mathcal{HA}_d^{\mathrm{nc}}(\mathcal{Y}).$$

□

Наступний н.к. аналог критерія Шура для розв'язності задачи Каратеодорі–Феєра є вірним.

Теорема 1.55. *Задача 1.46 має розв'язок тоді і тільки тоді, коли многочлен*

$$q := \sum_{w\in\Lambda} x^w s_w \tag{1.114}$$

задовольняє $\|q(X)\| \le 1$ *для всіх* $X \in \mathcal{D}^d_{\mathrm{nc}} \cap \mathrm{Nilp}_d(\Lambda)$.

Доведення. Якщо задача 1.46 має розв'язок $\mathfrak{F} \in \mathcal{SA}^{\mathrm{nc}}_d(\mathcal{Y})$, то для будь-якого набора строгих стисків $C \in \mathcal{L}(\mathcal{E})^d$, з гільбертовим простором $\mathcal{E}$, ряд $F(C) := \sum_{w\in\mathcal{G}_d} C^w \otimes \mathfrak{F}_w$ збігається в операторній нормі, і $\|\mathfrak{F}(C)\| \le 1$. Якщо $T \in \mathcal{C}^d \cap \mathcal{L}(\mathcal{E})^d$ - набір Λ-спільно нільпотентних операторів, то також і $rT = (rT_1, \dots, rT_d)$ для кожного $r:\ 0 < r < 1$. Отже,

$$\|q(rT)\| = \|\mathfrak{F}(rT)\| = \Big\| \sum_{w\in\Lambda} (rT)^w \otimes s_w \Big\| \le 1.$$

Покладаючи $r \uparrow 1$, ми отримаємо $\|q(T)\| \le 1$.

Для зворотного напрямку, розглянемо спочатку випадок, коли $\mathcal{U} = \mathcal{Y}$ і $-I_{\mathcal{Y}} \le s_\emptyset = s_\emptyset^* \le 0$. Тоді оператор $I_{\mathcal{Y}} - s_\emptyset$ - обмежено оборотний, і $(I_{\mathcal{Y}} + s_\emptyset)(I_{\mathcal{Y}} - s_\emptyset)^{-1} \ge 0$. Більше того, формальний степеневий ряд $\mathfrak{h}(x) := (I_{\mathcal{Y}} + q(x))(I_{\mathcal{Y}} - q(x))^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})\big\langle\big\langle x_1, \dots, x_d \big\rangle\big\rangle$ є добре визначеним. Припустимо, що $\|q(T)\| \le 1$ виконується для кожного набора T із Λ-спільно нільпотентних стискаючих $n \times n$ матриць, для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді $\operatorname{Re}\mathfrak{h}(T) \ge 0$ для такого T (тут $\mathfrak{h}(T) = \sum_{w\in\Lambda} T^w \otimes \mathfrak{h}_w$ є добре визначеним). Позначимо $c_\emptyset := 2\mathfrak{h}_\emptyset = 2(I_{\mathcal{Y}} + s_\emptyset)(I_{\mathcal{Y}} - s_\emptyset)^{-1} \ge 0$, $c_w := \mathfrak{h}_w$ для $w \in \Lambda \setminus \{\emptyset\}$. Для многочлена p, визначеного у (1.100), умова, що $\operatorname{Re} p(T)$ $(= \operatorname{Re}\mathfrak{h}(T))$ - додатно напіввизначений оператор для кожного набора T із Λ-спільно нільпотентних стискаючих $n \times n$ матриць, для всіх $n \in \mathbb{N}$, виконується. За теоремою 1.51, існує $\mathfrak{f} \in \mathcal{HA}^{\mathrm{nc}}_d(\mathcal{Y})$ таке, що $\mathfrak{f}_\emptyset = \frac{c_\emptyset}{2} = \mathfrak{h}_\emptyset$, $\mathfrak{f}_w = c_w = \mathfrak{h}_w$ для $w \in \Lambda \setminus \{\emptyset\}$. Тоді формальний степеневий ряд $\mathfrak{F}(x) := (\mathfrak{f}(x) - I_{\mathcal{Y}})(\mathfrak{f}(x) + I_{\mathcal{Y}})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})\big\langle\big\langle x_1, \dots, x_d \big\rangle\big\rangle$ - добре визначений і належить класу $\mathcal{SA}^{\mathrm{nc}}_d(\mathcal{Y})$. Оскільки $\mathfrak{f}(T) = \mathfrak{h}(T) = p(T)$ для будь-якого набора T із Λ-спільно нільпотентних стискаючих $n \times n$ матриць, $n \in \mathbb{N}$, ми отримаємо $\mathfrak{F}(T) = q(T)$ для такого T. Таким чином, многочлен $\sum_{w\in\Lambda} x^w(\mathfrak{F}_w - s_w) \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})\,\langle x_1, \dots, x_d\rangle$ зникає на наборах Λ-спільно нільпотентних стискаючих $n \times n$ матриць, для кожного $n \in \mathbb{N}$. За пропозицією 1.53, $\mathfrak{F}_w = s_w$ для всіх $w \in \Lambda$, тобто $\mathfrak{F}$ розв'язує задачу 1.46 для даних $s_w,\ w \in \Lambda$.

Розглянемо зараз випадок, коли $\mathcal{U} = \mathcal{Y}$, проте $s_\emptyset$ - не обов'язково самоспряжений и від'ємно напіввизначений. Оператор $s_\emptyset$ має полярий розклад $s_\emptyset = UR$, де $U \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$ - унітарний і $R \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$ - додатно напіввизначений. Припустимо, що $\|q(T)\| \le 1$ для кожного набора T із Λ-спільно нільпотентних стискаючих $n \times n$ матриць, для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді $s_\emptyset$ є стиск, і $-I_{\mathcal{Y}} \le -R \le 0$. Визначимо оператори $\widetilde{s_w} := -U^* s_w,\ w \in \Lambda$ і многочлен $\widetilde{q}(x) := -U^* q(x)$. Ясно, що $\|\widetilde{q}(T)\| \le 1$ для кожного набора T із Λ-спільно нільпотентних стискаючих $n \times n$ матриць, для всіх

$n \in \mathbb{N}$, і $-I_{\mathcal{Y}} \leq \widetilde{s_\emptyset} = -R \leq 0$. За результатом попереднього абзацу, існує розв'язок $\widetilde{\mathfrak{F}}(x) \in \mathcal{SA}_d^{\mathrm{nc}}(\mathcal{Y})$ задачи 1.46 для даних $\widetilde{s_w},\ w \in \Lambda$. Тоді $\mathfrak{F}(x) := -U\widetilde{\mathfrak{F}}(x) \in \mathcal{SA}_d^{\mathrm{nc}}(\mathcal{Y})$ - розв'язок задачи 1.46 для даних $s_w,\ w \in \Lambda$.

Розглянемо зараз випадок, коли $\mathcal{U}$ не обов'язково співпадає з $\mathcal{Y}$. Припустимо, що $\|q(T)\| \leq 1$ для кожного набора T із Λ-спільно нільпотентних стискаючих $n \times n$ матриць, для всіх $n \in \mathbb{N}$. Позначимо

$$\begin{aligned} \widetilde{s_w} &:= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s_w & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{U} \oplus \mathcal{Y}), \quad w \in \Lambda, \\ \widetilde{q}(x) &:= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q(x) & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{U} \oplus \mathcal{Y}) \langle x_1, \ldots, x_d \rangle . \end{aligned}$$

Ясно, що $\|\widetilde{q}(T)\| \leq 1$ для кожного набора T із Λ-спільно нільпотентних стискаючих $n \times n$ матриць, для всіх $n \in \mathbb{N}$. За результатом попереднього абзацу, існує розв'язок $\widetilde{\mathfrak{F}}(x) \in \mathcal{SA}_d^{\mathrm{nc}}(\mathcal{U} \oplus \mathcal{Y})$ задачи 1.46 для даних $\widetilde{s_w},\ w \in \Lambda$. Тоді $\mathfrak{F}(x) := P_{\mathcal{Y}}\widetilde{\mathfrak{F}}(x)\big|_{\mathcal{U}} \in \mathcal{SA}_d^{\mathrm{nc}}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ є розв'язком задачи 1.46 для даних $s_w,\ w \in \Lambda$. $\square$

Розділ 2

Н.к. функції і їх різницево-диференціальне числення

2.1. Н.к. функції

Відтепер, ми викладаємо основи теорії н.к. функцій, відповідно до [**97**]. Нехай $\mathcal{R}$ - комутативне кільце з одиницею. Для $\mathcal{M}$, модуля над $\mathcal{R}$, ми визначаємо *н.к. простір над* $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M}_{\mathrm{nc}} = \coprod_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}^{n\times n}. \tag{2.1}$$

Для $X \in \mathcal{M}^{n\times n}$ і $Y \in \mathcal{M}^{m\times m}$ ми визначаємо їх *пряму суму*

$$X \oplus Y = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} \in \mathcal{M}^{(n+m)\times(n+m)}.$$

Зауважимо, що матриці над $\mathcal{R}$ діють справа і зліва на матриці над $\mathcal{M}$ за стандартними правилами матричного множення і дії $\mathcal{R}$ на $\mathcal{M}$: якщо $X \in \mathcal{M}^{p\times q}$ і $T \in \mathcal{R}^{r\times p}$, $S \in \mathcal{R}^{q\times s}$, то

$$TX \in \mathcal{M}^{r\times q}, \quad XS \in \mathcal{M}^{p\times s}.$$

Підмножина $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ називається *н.к. множиною*, якщо вона замкнена щодо прямих сум; явно, визначаючи $\Omega_n = \Omega \cap \mathcal{M}^{n\times n}$, ми маємо $X \oplus Y \in \Omega_{n+m}$ для всіх $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$. Ми будемо іноді користуватись домовленістю, що $\mathcal{M}^{n\times 0}$, $\mathcal{M}^{0\times n}$ і $\Omega_0 = \mathcal{M}^{0\times 0}$ складається кожний з одного (нульового) елемента, порожньої матриці "відповідного розміру", і що $X \oplus Y = Y \oplus X = X \in \Omega_n$ для $n \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$ і $Y \in \Omega_0$.

У випадку $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$, ми ототожнюємо матриці над $\mathcal{M}$ з наборами матриць над $\mathcal{R}$:

$$\left(\mathcal{R}^d\right)^{p\times q} \cong \left(\mathcal{R}^{p\times q}\right)^d.$$

При такому ототожненні, для наборів $X = (X_1, \ldots, X_d) \in \left(\mathcal{R}^{n\times n}\right)^d$ і $Y = (Y_1, \ldots, Y_d) \in \left(\mathcal{R}^{m\times m}\right)^d$,

$$X \oplus Y = \left(\begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & Y_1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} X_d & 0 \\ 0 & Y_d \end{bmatrix} \right) \in \left(\mathcal{R}^{(n+m)\times(n+m)}\right)^d;$$

і для набора $X = (X_1, \ldots, X_d) \in \left(\mathcal{R}^{p\times q}\right)^d$ і матриць $T \in \mathcal{R}^{r\times p}$, $S \in \mathcal{R}^{q\times s}$,

$$TX = (TX_1, \ldots, TX_d) \in \left(\mathcal{R}^{r\times q}\right)^d, \quad XS = (X_1S, \ldots, X_dS) \in \left(\mathcal{R}^{p\times s}\right)^d.$$

Нехай $\mathcal{M}$ і $\mathcal{N}$ - модулі над $\mathcal{R}$, і нехай $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. множина. Відображення $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$, з $f(\Omega_n) \subseteq \mathcal{N}^{n\times n}$, $n = 0, 1, \ldots$, називається *н.к. функцією*, якщо f задовольняє наступні дві умови:

- *f інваріантна щодо прямих сум*:

$$f(X \oplus Y) = f(X) \oplus f(Y) \tag{2.2}$$

  для всіх $X, Y \in \Omega$.

- *f інваріантна щодо подібностей*: якщо $X \in \Omega_n$ і $S \in \mathcal{R}^{n\times n}$ оборотне з $SXS^{-1} \in \Omega_n$, то

$$f(SXS^{-1}) = Sf(X)S^{-1}. \tag{2.3}$$

Дві умови у означенні н.к. функції можуть бути замінені одною.

Пропозиція 2.1. *Відображення $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$, з $f(\Omega_n) \subseteq \mathcal{N}^{n\times n}$, $n = 0, 1, \ldots$, є інваріантним щодо прямих сум і подібностей тоді і тільки тоді, коли воно* є інваріантним щодо переплетень*: для будь-яких $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $T \in \mathcal{R}^{n\times m}$, маємо*

$$XT = TY \Longrightarrow f(X)T = Tf(Y). \tag{2.4}$$

Умова (2.4) використовувалась Дж. Л. Тейлором у [**146**].

Доведення пропозиції 2.1. Припустимо, що f є інваріантним щодо прямих сум і подібностей. Якщо $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $T \in \mathcal{R}^{n\times m}$ такі, що $XT = TY$, то

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & -T \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & T \\ 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

Оскільки

$$\begin{bmatrix} I_n & -T \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & T \\ 0 & I_m \end{bmatrix}^{-1},$$

ми можемо застосувати спочатку (2.3), а потім (2.2), щоб отримати

$$\begin{bmatrix} f(X) & 0 \\ 0 & f(Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & -T \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(X) & 0 \\ 0 & f(Y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & T \\ 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

Порявнюючи $(1, 2)$ блочні елементи у двох частинах цієї рівності, ми отримаємо $0 = f(X)T - Tf(Y)$, тобто (2.4) виконується.

Навпаки, припустимо, що f є інваріантним щодо переплетень. Тоді ясно, що f є інваріантним щодо подібностей. Щоб довести, що f є інваріантним щодо прямих сум, нехай $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$. Звісно,

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} X.$$

Отже,

$$f\left(\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} f(X). \tag{2.5}$$

Позначимо

$$f\left(\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Тоді (2.5) стає

$$\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(X) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким самим чином тотожність

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} Y$$

тягне за собою

$$\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(Y) \end{bmatrix}.$$

Таким чином, $A = f(X)$, $B = 0$, $C = 0$, $D = f(Y)$, тобто (2.2) виконується. □

2.2. Н.к. різницево-диференціальні оператори

Наша наступна мета - ввести праві і ліві різницево-диференціальні оператори, Δ_R і Δ_L, на н.к.функціях. Це буде зроблено шляхом обчислення н.к. функції f на блочних верхньо- (відп., нижньо-) трикутних матрицях. Ідея в тому, щоб показати, що для $X \in \Omega_n$ і $Y \in \Omega_m$,

$$f\left(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(X) & \Delta_R f(X,Y)(Z) \\ 0 & f(Y) \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Тут $Z \mapsto \Delta_R f(X,Y)(Z)$ - $\mathcal{R}$-лінійна функція з $\mathcal{M}^{n\times m}$ у $\mathcal{N}^{n\times m}$. Відображення $f \mapsto \Delta_R f$ грає роль правого н.к. різницевого оператора, коли $Y \neq X$, і правого н.к. диференціального оператора, коли $Y = X$. Аналогічно,

$$f\left(\begin{bmatrix} X & 0 \\ Z & Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(X) & 0 \\ \Delta_L f(X,Y)(Z) & f(Y) \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

де $Z \mapsto \Delta_L f(X,Y)(Z)$ - $\mathcal{R}$-лінійна функція з $\mathcal{M}^{m\times n}$ у $\mathcal{N}^{m\times n}$. Відображення $f \mapsto \Delta_L f$ грає роль лівого різницевого оператора, коли $Y \neq X$, і лівого н.к. диференціального оператора, коли $Y = X$. Припущення, що $\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n+m}$ для всіх $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{n\times m}$ (відп., що $\begin{bmatrix} X & 0 \\ Z & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n+m}$ для всіх $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{m\times n}$) було б проте занадто строгим, і ми будемо користуватись слабкішим припущенням про н.к. множину Ω, яке природно підказано наступною пропозицією.

Пропозиція 2.2. *Нехай f - н.к. функція на н.к. множині Ω. Нехай $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{n\times m}$ такі, що $\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n+m}$. Тоді (2.6) виконується, де позадіагональний блочний елемент $\Delta_R f(X,Y)(Z)$ визначається однозначно у (2.6) і має наступну властивість. Якщо $r \in \mathcal{R}$ таке, що $\begin{bmatrix} X & rZ \\ 0 & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n+m}$, то*

$$\Delta_R f(X,Y)(rZ) = r\Delta_R f(X,Y)(Z). \tag{2.8}$$

Доведення. Позначимо

$$f\left(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} A & \Delta_R f(X,Y)(Z) \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Ми маємо

$$\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} X.$$

За пропозицією 2.1,

$$f\left(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} f(X).$$

Це тягне за собою, що $A = f(X)$ і $C = 0$. Ми маємо також

$$Y\begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix}.$$

За пропозицією 2.1,

$$f(Y)\begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix} f\left(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right),$$

що тягне за собою $D = f(Y)$ і що $C = 0$. Таким чином, (2.6) виконується.

Далі, ми маємо

$$\begin{bmatrix} rI_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & rZ \\ 0 & Y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} rI_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

За пропозицією 2.1,

$$\begin{bmatrix} rI_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} f\left(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} X & rZ \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} rI_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix},$$

що за (2.6) є еквівалентним до

$$\begin{bmatrix} rI_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(X) & \Delta f(X,Y)(Z) \\ 0 & f(Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(X) & \Delta f(X,Y)(rZ) \\ 0 & f(Y) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} rI_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

Записуючи $(1,2)$ блок у матриці добутку у двох частинах цієї рівності, ми отримаємо (2.8). $\square$

“Лівий"аналог пропозиції 2.2 (який має подібне доведення) - такий.

Пропозиція 2.3. *Нехай f - н.к. функція на н.к. множині Ω. Нехай $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{m\times n}$ - такі, що $\begin{bmatrix} X & 0 \\ Z & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n+m}$. Тоді (2.7) виконується, де позадіагональний блочний елемент $\Delta_L f(X,Y)(Z)$ визначається однозначно за (2.7) і має наступну властивість. Якщо $r \in \mathcal{R}$ таке, що $\begin{bmatrix} X & 0 \\ rZ & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n+m}$, то*

$$\Delta_L f(X,Y)(rZ) = r\Delta_L f(X,Y)(Z). \tag{2.9}$$

Ми будемо казати, що н.к. множина $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ *допустима справа*, якщо для кожних $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{n\times m}$ існує оборотне $r \in \mathcal{R}$ таке, що $\begin{bmatrix} X & rZ \\ 0 & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n+m}$. Ми будемо казати, що н.к. множина $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ *допустима зліва*, якщо для кожних $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{m\times n}$ існує оборотне $r \in \mathcal{R}$ таке, що $\begin{bmatrix} X & 0 \\ rZ & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n+m}$.

Нехай н.к. множина Ω - допустима справа, і нехай f - н.к. функція на Ω. Тоді для кожних $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{n\times m}$, і для оборотного $r \in \mathcal{R}$ такого, що $\begin{bmatrix} X & rZ \\ 0 & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n+m}$, ми визначаємо спочатку $\Delta_R f(X,Y)(rZ)$ як $(1,2)$ блок матриці $f\left(\begin{bmatrix} X & rZ \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right)$ (дивись (2.6)), а потім визначаємо

$$\Delta_R f(X,Y)(Z) = r^{-1}\Delta_R f(X,Y)(rZ). \tag{2.10}$$

Подібним чином, нехай н.к. множина Ω - допустима зліва, і нехай f - н.к. функція на Ω. Тоді для кожних $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{m\times n}$, і для оборотного $r \in \mathcal{R}$ такого, що $\begin{bmatrix} X & 0 \\ rZ & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n+m}$, ми визначаємо спочатку $\Delta_L f(X,Y)(rZ)$ як $(2,1)$ блок матриці $f\left(\begin{bmatrix} X & 0 \\ rZ & Y \end{bmatrix}\right)$ (дивись (2.7)), а потім визначаємо

$$\Delta_L f(X,Y)(Z) = r^{-1}\Delta_L f(X,Y)(rZ). \tag{2.11}$$

За пропозицією 2.2 (відп., за пропозицією 2.3), права частина (2.10) (відп., (2.11)) не залежить від r, отже ліва частина визначена однозначно. Більше того, ми отримаємо наступне.

Пропозиція 2.4. *Нехай f - н.к. функція на н.к. множині Ω. Відображення $Z \mapsto \Delta_R f(X,Y)(Z)$ і $Z \mapsto \Delta_L f(X,Y)(Z)$* - однорідні *як оператори, діючі з $\mathcal{M}^{n\times m}$ у $\mathcal{N}^{n\times m}$, і з $\mathcal{M}^{m\times n}$ у $\mathcal{N}^{m\times n}$, відповідно. Іншими словами, якщо Ω допустима справа, то для кожних $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{n\times m}$, і кожного $r \in \mathcal{R}$,* (2.8) *виконується; відповідно, якщо Ω допустима зліва, то для кожних $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{m\times n}$, і кожного $r \in \mathcal{R}$,* (2.9) *виконується.*

Доведення. Доведемо одну з цих властивостей однорідності – доведення другої аналогічне. Нехай Ω - допустима справа, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$, $Z \in \mathcal{M}^{n\times m}$ і $r \in \mathcal{R}$. Тоді існують оборотні $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$ такі, що $\begin{bmatrix} X & r_1 Z \\ 0 & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n+m}$ і $\begin{bmatrix} X & r_2 r Z \\ 0 & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n+m}$. Тоді

$$\Delta_R f(X,Y)(Z) = r_1^{-1} \Delta_R f(X,Y)(r_1 Z)$$

і

$$\Delta_R f(X,Y)(rZ) = r_2^{-1} \Delta_R f(X,Y)(r_2 r Z).$$

Більше того, за пропозицією 2.2,

$$\Delta_R f(X,Y)(r_2 r Z) = r_2 r r_1^{-1} \Delta_R f(X,Y)(r_1 Z).$$

Ці три рівності тягнуть за собою (2.8). □

Зауваження 2.5. Доведення пропозиції 2.4 може бути спрощене використанням подібностно інваріантного конверту $\widetilde{\Omega}$ допустимої справа (відп., зліва) н.к. множини Ω і канонічного розширення $\widetilde{f}\colon \widetilde{\Omega} \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ н.к. функції $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$; дивись розділ 10 щодо означень. Ми покажемо це для допустимої справа н.к. множини Ω. За пропозицією 10.2, $\begin{bmatrix} \widetilde{X} & Z \\ 0 & \widetilde{Y} \end{bmatrix} \in \widetilde{\Omega}_{n+m}$ для всіх $\widetilde{X} \in \widetilde{\Omega}_n$, $\widetilde{Y} \in \widetilde{\Omega}_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{n\times m}$, і за пропозицією 10.3, $\widetilde{f}$ - н.к. функція. Отже, формула, аналогічна до (2.6), визначає $\Delta_R \widetilde{f}(\widetilde{X},\widetilde{Y})(Z)$ для всіх $n, m \in \mathbb{N}$, $\widetilde{X} \in \widetilde{\Omega}_n$, $\widetilde{Y} \in \widetilde{\Omega}_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{n\times m}$, і за пропозицією 2.2, застосованою до $\widetilde{f}$, ми маємо

$$\Delta_R \widetilde{f}(\widetilde{X},\widetilde{Y})(rZ) = r \Delta_R \widetilde{f}(\widetilde{X},\widetilde{Y})(Z)$$

для кожного $r \in \mathcal{R}$. Зокрема, якщо $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$, $Z \in \mathcal{M}^{n\times m}$ і $r \in \mathcal{R}$ такі, що $\begin{bmatrix} X & rZ \\ 0 & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n+m}$, то

$$\Delta_R f(X,Y)(rZ) = \Delta_R \widetilde{f}(X,Y)(rZ) = r \Delta_R \widetilde{f}(X,Y)(Z).$$

Якщо, додатково, r - оборотне, то з (2.10) ми отримаємо

$$\Delta_R f(X,Y)(Z) = \Delta_R \widetilde{f}(X,Y)(Z). \tag{2.12}$$

Отже, відображення $Z \mapsto \Delta_R f(X,Y)(Z)$ - однорідне, і твердження пропозиції 2.4 для допустимої справа н.к. множини Ω випливає. Аналогічний аргумент працює для допустимої зліва н.к. множині Ω.

Ми бачимо, що однорідність відображення $Z \mapsto \Delta_R f(X,Y)(Z)$ випливає прямо з однорідності відображення $Z \mapsto \Delta_R \widetilde{f}(\widetilde{X},\widetilde{Y})(Z)$, і доведення останнього є менш складним, тому що воно не вимагає маніпулювання з відповідними оборотними елементами $r \in \mathcal{R}$ так, щоб відповідні блочно-трикутні матриці потрапляли у н.к. множину Ω. Далі ми будемо часто користуватись подібностно інваріантними конвертами н.к. множин і канонічними розширеннями н.к. функцій, щоб спростити доведення.

Пропозиція 2.6. *Нехай f - н.к. функція на н.к. множині Ω. Відображення $Z \mapsto \Delta_R f(X,Y)(Z)$ і $Z \mapsto \Delta_L f(X,Y)(Z)$* - адитивні *як оператори, діючі з $\mathcal{M}^{n\times m}$ у $\mathcal{N}^{n\times m}$ і з $\mathcal{M}^{m\times n}$ у $\mathcal{N}^{m\times n}$, відповідно. Іншими словами, якщо Ω - допустима справа, то для кожних $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $Z_I, Z_{II} \in \mathcal{M}^{n\times m}$,*

$$\Delta_R f(X,Y)(Z_I + Z_{II}) = \Delta_R f(X,Y)(Z_I) + \Delta_R f(X,Y)(Z_{II}); \tag{2.13}$$

відповідно, якщо Ω - допустима зліва, то для кожних $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $Z_I, Z_{II} \in \mathcal{M}^{m\times n}$,

$$\Delta_L f(X,Y)(Z_I + Z_{II}) = \Delta_L f(X,Y)(Z_I) + \Delta_L f(X,Y)(Z_{II}). \tag{2.14}$$

Доведення. Доведемо одну з цих властивостей адитивності – доведення другої аналогічне. Нехай Ω - допустима справа, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$, $Z_I, Z_{II} \in \mathcal{M}^{n\times m}$. За (2.12), ми можемо припустити, без втрати загальності, що Ω - подібностно інваріантна, тобто $\widetilde{\Omega} = \Omega$; дивись зауваження 2.5 і розділ 10. Тоді, за пропозицією 10.2,

$$\begin{bmatrix} X & Z_I \\ 0 & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n+m}, \quad \begin{bmatrix} X & Z_{II} \\ 0 & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n+m}, \quad \begin{bmatrix} X & Z_I + Z_{II} \\ 0 & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n+m}$$

і

$$\begin{bmatrix} X & 0 & Z_I \\ 0 & X & Z_{II} \\ 0 & 0 & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{2n+m}$$

(для останнього, ми користуємось фактом, що якщо $X \in \Omega_n$, то $\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} \in \Omega_{2n}$). Ми маємо

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 & Z_I \\ 0 & X & Z_{II} \\ 0 & 0 & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Z_I \\ 0 & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

За пропозицією 2.1,

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} f\left(\begin{bmatrix} X & 0 & Z_I \\ 0 & X & Z_{II} \\ 0 & 0 & Y \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} X & Z_I \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

Ясно, що ми маємо

$$f\left(\begin{bmatrix} X & 0 & Z_I \\ 0 & X & Z_{II} \\ 0 & 0 & Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(X) & 0 & A \\ 0 & f(X) & B \\ 0 & 0 & f(Y) \end{bmatrix},$$

з деякими матрицями A і B, а також ми маємо

$$f\left(\begin{bmatrix} X & Z_I \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(X) & \Delta_R f(X,Y)(Z_I) \\ 0 & f(Y) \end{bmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(X) & 0 & A \\ 0 & f(X) & B \\ 0 & 0 & f(Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(X) & \Delta_R f(X,Y)(Z_I) \\ 0 & f(Y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

Порівнюючи $(1,3)$ блочні елементи у добутку матриць у обох частинах, ми отримаємо

$$A = \Delta_R f(X,Y)(Z_I).$$

Подібним чином, ми користуємось переплетенням

$$\begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 & Z_I \\ 0 & X & Z_{II} \\ 0 & 0 & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Z_{II} \\ 0 & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

За пропозицією 2.1,

$$\begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} f\left(\begin{bmatrix} X & 0 & Z_I \\ 0 & X & Z_{II} \\ 0 & 0 & Y \end{bmatrix} \right) = f\left(\begin{bmatrix} X & Z_{II} \\ 0 & Y \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix},$$

або еквівалентно,

$$\begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(X) & 0 & A \\ 0 & f(X) & B \\ 0 & 0 & f(Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(X) & \Delta_R f(X,Y)(Z_{II}) \\ 0 & f(Y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

Порівнюючи $(1,3)$ блочні елементи у матриці добутку в обох частинах, ми отримаємо

$$B = \Delta_R f(X,Y)(Z_{II}).$$

Далі, ми користуємось співвідношенням переплетення

$$\begin{bmatrix} I_n & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 & Z_I \\ 0 & X & Z_{II} \\ 0 & 0 & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Z_I + Z_{II} \\ 0 & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

За пропозицією 2.1,

$$\begin{bmatrix} I_n & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} f\left(\begin{bmatrix} X & 0 & Z_I \\ 0 & X & Z_{II} \\ 0 & 0 & Y \end{bmatrix} \right) = f\left(\begin{bmatrix} X & Z_I + Z_{II} \\ 0 & Y \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} I_n & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix},$$

або еквівалентно,

$$\begin{bmatrix} I_n & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(X) & 0 & \Delta_R f(X,Y)(Z_I) \\ 0 & f(X) & \Delta_R f(X,Y)(Z_{II}) \\ 0 & 0 & f(Y) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} f(X) & \Delta_R f(X,Y)(Z_I + Z_{II}) \\ 0 & f(Y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

Порівнюючи $(1,3)$ блочні елементи у матриці добутку в обох частинах, ми отримаємо

$$\Delta_R f(X,Y)(Z_I) + \Delta_R f(X,Y)(Z_{II}) = \Delta_R f(X,Y)(Z_I + Z_{II}),$$

тобто (2.13) є вірним. $\square$

Транспозиція матриць індукує природно операцію транспозиції на н.к. функціях і дозволяє нам пов'язати між собою праві і ліві н.к. різницево-диференціальні оператори.

Пропозиція 2.7. (1) *Якщо $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. множина, тоді також є $\Omega^\top := \{X^\top : X \in \Omega\} \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$.*

(2) *Якщо $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. функція, то такою ж є $f^\top\colon \Omega^\top \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$, де $f^\top(X) := f\left(X^\top\right)^\top$.*

(3) *Якщо Ω - допустима справа (відп., зліва), то $\Omega^\top$ - допустима зліва (відп., справа). У цьому випадку,*

$$\Delta_L f^\top(X,Y)(Z) = \left(\Delta_R f\left(X^\top, Y^\top\right)\left(Z^\top\right)\right)^\top$$

(відп., $\Delta_R f^\top(X,Y)(Z) = \left(\Delta_L f\left(X^\top, Y^\top\right)\left(Z^\top\right)\right)^\top$).

Доведення - безпосереднє. Пропозиція 2.7 дозволяє нам вивести результати для Δ_L з відповідних результатів для Δ_R і навпаки, використовуючи аргумент з транспозицією.

У випадку, коли н.к. множина Ω є допустимою як справа, так і зліва, є також просте співвідношення симетрії між правим та лівим н.к. різницево-диференціальними операторами.

Пропозиція 2.8. *Нехай $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. функція на н.к. множині $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$, яка є допустимою як справа, так і зліва. Тоді*

$$\Delta_R f(X,Y)(Z) = \Delta_L f(Y,X)(Z)$$

для всіх $n, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{n\times m}$.

Доведення. За (2.12) і його лівим аналогом, ми можемо припустити, без втрати загальності, що Ω подібностно інваріантна, тобто $\widetilde{\Omega} = \Omega$; дивись зауваження 2.5 і розділ 10. Тоді, за пропозицією 10.2, для довільних $n, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{n\times m}$ ми маємо

$$\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y & 0 \\ Z & X \end{bmatrix} \in \Omega_{n+m}.$$

Ясно, що

$$\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_m & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_m & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y & 0 \\ Z & X \end{bmatrix}.$$

За пропозицією 2.1,

$$f\left(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_m & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_m & 0 \end{bmatrix} f\left(\begin{bmatrix} Y & 0 \\ Z & X \end{bmatrix}\right),$$

тобто

$$\begin{bmatrix} f(X) & \Delta_R f(X,Y)(Z) \\ 0 & f(Y) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_m & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_m & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(Y) & 0 \\ \Delta_L f(Y,X)(Z) & f(X) \end{bmatrix}.$$

Порівнюючи (1,1) блочні елементи у матричних добутках в лівій і правій частинах, ми отримаємо

$$\Delta_R f(X,Y)(Z) = \Delta_L f(Y,X)(Z).$$

□

2.3. Основні правила н.к. різницево-диференціального числення

Ми зараз опишемо основні будівельні блоки, які дозволяють обчислювати $\Delta_R f$ і $\Delta_L f$, як і у класичному комутативному численні; тут і нижче, коли це не викликає плутанини, ми часто будемо писати $\Delta_R f$ і $\Delta_L f$ без аргументів.

2.3.1. Якщо $f\colon \mathcal{M}_{\mathrm{nc}} \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ - *стала н.к. функція*, тобто існує $c \in \mathcal{N}$ таке, що $f(X) = cI_n$ $(= \mathrm{diag}[c,\dots,c])$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і всіх $X \in \mathcal{M}^{n\times n}$, то $\Delta_R f(X,Y)(Z) = 0$ і $\Delta_L f(X,Y)(Z) = 0$ для всіх X, Y, Z відповідних розмірів.

Доведення. Тривіальне. □

2.3.2. Якщо $f, g\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. функції на допустимій справа (відп., зліва) н.к. множині $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ і $a, b \in \mathcal{R}$, то $\Delta_R(af + bg) = a\Delta_R f + b\Delta_R g$ (відп., $\Delta_L(af + bg) = a\Delta_L f + b\Delta_L g$).

Доведення. Тривіальне. □

2.3.3. Нехай $l\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ - $\mathcal{R}$-лінійне відображення. Ми розширюємо l до лінійного відображення з $\mathcal{M}^{n\times m}$ у $\mathcal{N}^{n\times m}$, $n, m \in \mathbb{N}$ як $l([\mu_{ij}]) = [l(\mu_{ij})]$. Тоді l - н.к. функція з $\mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ у $\mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$, і $\Delta_R l(X,Y)(Z) = l(Z)$ і $\Delta_L l(X,Y)(Z) = l(Z)$ для всіх X, Y, Z відповідних розмірів. Зокрема, якщо $l_j\colon (\mathcal{R}^d)_{\mathrm{nc}} \to \mathcal{R}_{\mathrm{nc}}$ - *j-а координатна н.к. функція*, тобто

$$l_j(X) = l_j(X_1,\dots,X_d) = X_j,$$

то $\Delta_R l_j(X,Y)(Z) = Z_j$ і $\Delta_L l_j(X,Y)(Z) = Z_j$ для всіх наборів X, Y, Z матриць над $\mathcal{R}$ відповідних розмірів.

Доведення. Тривіальне. □

2.3.4. Нехай $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$, $g\colon \Omega \to \mathcal{O}_{\mathrm{nc}}$ - дві н.к. функції на допустимій справа (відп., зліва) н.к. множині $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$. Припустимо, що задана операція добутку $(x, y) \mapsto x \cdot y$ на $\mathcal{N} \times \mathcal{O}$ із значеннями у модулі $\mathcal{P}$ над $\mathcal{R}$, що є зліва і справа дистрибутивним і комутує з дією $\mathcal{R}$ (тобто задане $\mathcal{R}$-лінійне відображення з $\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{O}$ у $\mathcal{P}$). Ми розширюємо цю операцію добутку на матриці над $\mathcal{N}$ і над $\mathcal{O}$ відповідних розмірів. Легко перевірити, що $f \cdot g\colon \Omega \to \mathcal{P}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. функція.

Тоді

$$\Delta_R(f \cdot g)(X, Y)(Z) = f(X) \cdot \Delta_R g(X, Y)(Z) + \Delta_R f(X, Y)(Z) \cdot g(Y)$$

для всіх $n, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{n \times m}$ (відп.,

$$\Delta_L(f \cdot g)(X, Y)(Z) = \Delta_L f(X, Y)(Z) \cdot g(X) + f(Y) \cdot \Delta_L g(X, Y)(Z)$$

для всіх $n, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{m \times n}$).

Доведення. Ми дамо доведення першої рівності. За (2.12), ми можемо припустити, без втрати загальності, що н.к. множина Ω є подібностно інваріантною, тобто $\widetilde{\Omega} = \Omega$; дивись зауваження 2.5 і розділ 10. Тоді за пропозицією 10.2, для довільних $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{n \times m}$ ми маємо $\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n+m}$. З одного боку,

$$(f \cdot g)\left(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (f \cdot g)(X) & \Delta_R(f \cdot g)(X, Y)(Z) \\ 0 & (f \cdot g)(Y) \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

З другого боку,

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right) \cdot g\left(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} f(X) & \Delta_R f(X, Y)(Z) \\ 0 & f(Y) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g(X) & \Delta_R g(X, Y)(Z) \\ 0 & g(Y) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f(X) \cdot g(X) & f(X) \cdot \Delta_R g(X, Y)(Z) + \Delta_R f(X, Y)(Z) \cdot g(Y) \\ 0 & f(Y) \cdot g(Y) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Порівнючи $(1, 2)$ блоки у правих частинах (2.15) і (2.16), ми отримаємо потрібну формулу для $\Delta_R(f \cdot g)(X, Y)(Z)$.

Формула для $\Delta_L(f \cdot g)(X, Y)(Z)$ доводиться аналогічно. У випадку, коли Ω допустима як справа, так і зліва, ми можемо також використувати аргумент симетрії (пропозиція 2.8). $\square$

Зауваження 2.9. Ми можемо визначити також операцію протилежного добутку $(y, x) \mapsto y \cdot_{\mathrm{op}} x$ на $\mathcal{O} \times \mathcal{N}$ із значеннями у $\mathcal{P}$ як $y \cdot_{\mathrm{op}} x := x \cdot y$ (тобто ми використовуємо канонічний ізоморфізм $\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{O} \cong \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{N}$). Продовжуючи операцію добутку "$\cdot_{\mathrm{op}}$"на матриці над $\mathcal{O}$ і над $\mathcal{N}$ відповідних розмірів, ми маємо $(X \cdot Y)^\top = X^\top \cdot_{\mathrm{op}} Y^\top$, отже $(f \cdot g)^\top = f^\top \cdot_{\mathrm{op}} g^\top$. Зокрема, ми можемо застосувати пропозицію 2.7, щоб вивести формулу для $\Delta_L(f \cdot g)(X, Y)(Z)$ з формули для $\Delta_R\left(f^\top \cdot_{\mathrm{op}} g^\top\right)\left(X^\top, Y^\top\right)\left(Z^\top\right)$.

2.3.5. Нехай $f\colon \Omega \to \mathcal{A}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. функція на допустимій справа (відп., зліва) н.к. множині $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$, де $\mathcal{A}$ - унітальна алгебра над $\mathcal{R}$. Нехай

$$\Omega^{\mathrm{inv}} := \coprod_{n=1}^{\infty} \{X \in \Omega_n \colon f(X) \text{ оборотна у } \mathcal{A}^{n\times n}\}.$$

Тоді Ω^{inv} є допустимою справа (відп., зліва) н.к. множиною, $f^{-1}\colon \Omega^{\mathrm{inv}} \to \mathcal{A}_{\mathrm{nc}}$, визначена як $f^{-1}(X) := f(X)^{-1}$, - н.к. функція і

$$\Delta_R f^{-1}(X,Y)(Z) = -f(X)^{-1}\Delta_R f(X,Y)(Z) f(Y)^{-1}$$

для всіх $n, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n^{\mathrm{inv}}$, $Y \in \Omega_m^{\mathrm{inv}}$ і $Z \in \mathcal{A}^{n\times m}$ (відп.,

$$\Delta_L f^{-1}(X,Y)(Z) = -f(Y)^{-1}\Delta_L f(X,Y)(Z) f(X)^{-1}$$

для всіх $n, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n^{\mathrm{inv}}$, $Y \in \Omega_m^{\mathrm{inv}}$ і $Z \in \mathcal{A}^{m\times n}$).

Доведення. Ми спостерігаємо, що Ω^{inv} - н.к. множина, оскільки f є інваріантною щодо прямих сум.

Ми далі покажемо, що якщо Ω допустима справа, то такою ж є і Ω^{inv}. Згадаємо спочатку, що блочна верхньо-трикутна матриця $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$ - оборотна тоді і тільки тоді, коли A і B є обидві оборотними, і у цьому випадку

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

Зараз, нехай $X \in \Omega_n^{\mathrm{inv}} \subseteq \Omega_n$, $Y \in \Omega_m^{\mathrm{inv}} \subseteq \Omega_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{n\times m}$. Тоді існує оборотне $r \in \mathcal{R}$ таке, що $\begin{bmatrix} X & rZ \\ 0 & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n+m}$. Ми маємо

$$f\left(\begin{bmatrix} X & rZ \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(X) & \Delta_R f(X,Y)(rZ) \\ 0 & f(Y) \end{bmatrix}.$$

Оскільки $f(X)$ і $f(Y)$ - оборотні, такою ж є і права частина. Отже, $\begin{bmatrix} X & rZ \\ 0 & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n+m}^{\mathrm{inv}}$, і Ω^{inv} є допустимою справа.

За (2.17),

$$\Delta_R f^{-1}(X,Y)(rZ) = -f(X)^{-1}\Delta_R f(X,Y)(rZ) f(Y)^{-1},$$

що тягне за собою потрібну формулу для $\Delta_R f^{-1}(X,Y)(Z)$ за лінійністю.

“Ліві"твердження можуть бути доведені аналогічно, або можуть бути виведені з “правих"тверджень застосуванням аргументу транспозиції (дивись пропозицію 2.7), використовуючи факт, що $\left(f^{-1}\right)^{\top} = \left(f^{\top}\right)^{-1}$. У випадку, коли н.к. множина

Ω допустима як справа, так і зліва, ми можемо також використовувати аргумент симетрії (пропозиція 2.8).

Альтернативно, ми можемо також використовувати рівність (2.12) і її лівий аналог, і пропозицію 10.2, яка гарантує, що подібностно інваріантний конверт $\widetilde{\Omega}$ допустимої справа (відп., зліва) н.к. множини Ω - допустима справа (відп., зліва) н.к. множина; дивись зауваження 2.5 і розділ 10. Тоді, подібно до аргументу у доведенні вище, такою ж є і $\widetilde{\Omega}^{\mathrm{inv}} = \widetilde{\Omega^{\mathrm{inv}}}$, і тоді залишок доведення вище працює з $r = 1$. $\square$

2.3.6. Нехай $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ і $g\colon \Lambda \to \mathcal{O}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. функції на допустимих справа (відп., зліва) н.к. множинах $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ і $\Lambda \subseteq \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ такі, що $f(\Omega) \subseteq \Lambda$. Тоді композиція $g \circ f\colon \Omega \to \mathcal{O}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. функція і

$$\Delta_R(g \circ f)(X,Y)(Z) = \Delta_R g(f(X), f(Y))(\Delta_R f(X,Y)(Z))$$

для всіх $n, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{n\times m}$ (відп.,

$$\Delta_L(g \circ f)(X,Y)(Z) = \Delta_L g(f(X), f(Y))(\Delta_L f(X,Y)(Z))$$

для всіх $n, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{m\times n}$).

Доведення. Легко побачити, що $g \circ f$ - н.к. функція.

За (2.12), застосованого до f, g і $g \circ f$, ми можемо припустити, без втрати загальності, що н.к. множина Ω подібностно інваріантна, тобто $\widetilde{\Omega} = \Omega$; дивись зауваження 2.5 і розділ 10. Тоді, за пропозицією 10.2, для довільних $n, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{n\times m}$ ми маємо $\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n+m}$. З одного боку,

$$(g \circ f)\left(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (g \circ f)(X) & \Delta_R(g \circ f)(X,Y)(Z) \\ 0 & (g \circ f)(Y) \end{bmatrix}. \tag{2.18}$$

З другого боку,

$$\begin{aligned} g\left(f\left(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right)\right) &= g\left(\begin{bmatrix} f(X) & \Delta_R f(X,Y)(Z) \\ 0 & f(Y) \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} g(f(X)) & \Delta_R g(f(X), f(Y))(\Delta_R f(X,Y)(Z)) \\ 0 & g(f(Y)) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Порівнюючи $(1,2)$ блоки у правих частинах (2.18) і (2.19), ми отримаємо потрібну формулу для $\Delta_R(g \circ f)(X,Y)(Z)$.

Формула для $\Delta_L(g \circ f)(X,Y)(Z)$ може бути доведена аналогічно або за аргументом транспозиції, або (коли Ω допустима як справа, так і зліва) за аргументом симетрії. $\square$

2.4. Різницеві формули першого порядку

Ми встановлюємо зараз формули, які обгрунтовують твердження, зроблене у підрозділі 2.2, що Δ_R і Δ_L грають роль н.к. операторів скінченних різниць першого порядку. Ми побачимо пізніше, що ці формули є н.к. аналогами розвинень першого порядку Брука Тейлора.

Теорема 2.10. *Нехай $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. функція на допустимій справа н.к. множині Ω. Тоді для всіх $n \in \mathbb{N}$ і довільних $X, Y \in \Omega_n$,*

$$f(X) - f(Y) = \Delta_R f(Y, X)(X - Y) \tag{2.20}$$

і

$$f(X) - f(Y) = \Delta_R f(X, Y)(X - Y). \tag{2.21}$$

Аналогічно, нехай $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. функція на допустимій зліва н.к. множині Ω. Тоді для всіх $n \in \mathbb{N}$ і довільних $X, Y \in \Omega_n$,

$$f(X) - f(Y) = \Delta_L f(Y, X)(X - Y) \tag{2.22}$$

і

$$f(X) - f(Y) = \Delta_L f(X, Y)(X - Y). \tag{2.23}$$

Фактично, теорема 2.10 - це спеціальний випадок наступної більш загальної формули скінченних різниць.

Теорема 2.11. *Нехай $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. функція на допустимій справа н.к. множині Ω. Тоді для всіх $n, m \in \mathbb{N}$ і довільних $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $S \in \mathcal{R}^{m\times n}$,*

$$Sf(X) - f(Y)S = \Delta_R f(Y, X)(SX - YS). \tag{2.24}$$

Аналогічно, нехай $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. функція на допустимій зліва н.к. множині Ω. Тоді для всіх $n, m \in \mathbb{N}$ і довільних $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $S \in \mathcal{R}^{m\times n}$,

$$Sf(X) - f(Y)S = \Delta_L f(X, Y)(SX - YS). \tag{2.25}$$

Доведення. Ми доведемо спочатку “праве"твердження. За (2.12) і пропозицією 10.3, ми можемо припустити, без втрати загальності, що Ω є подібностно інваріантною н.к. множиною, тобто $\widetilde{\Omega} = \Omega$; дивись зауваження 2.5 і розділ 10. Тоді, за пропозицією 10.2, для довільних $n, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $S \in \mathcal{R}^{m\times n}$ ми маємо $\begin{bmatrix} Y & SX - YS \\ 0 & X \end{bmatrix} \in \Omega_{m+n}$. Ясно, що

$$\begin{bmatrix} Y & SX - YS \\ 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ I_n \end{bmatrix} X.$$

Отже,

$$f\left(\begin{bmatrix} Y & SX-YS \\ 0 & X \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} S \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ I_n \end{bmatrix} f(X),$$

тобто

$$\begin{bmatrix} f(Y) & \Delta_R f(Y,X)(SX-YS) \\ 0 & f(X) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ I_n \end{bmatrix} f(X).$$

Порівнюючи (1,1) блочні елементи у матричних добутках в правій і лівій частинах, ми отримаємо

$$f(Y)S + \Delta_R f(Y,X)(SX-YS)) = Sf(X),$$

що дає (2.24).

"Ліві"твердження можуть бути доведені аналогічно використанням переплетення

$$\begin{bmatrix} S & -I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & 0 \\ SX-YS & Y \end{bmatrix} = Y\begin{bmatrix} S & -I_m \end{bmatrix},$$

або за аргументом транспозиції, або (у випадку, коли Ω є допустимою як справа, так і зліва) за аргументом симетрії. □

Зауваження 2.12. (2.20) і (2.21) у теоремі 2.10 отримані з (2.24) написанням $X-Y = X\cdot I_n - I_n\cdot Y$ і $X-Y = I_n\cdot X - Y\cdot I_n$, відповідно. Ми зауважимо, що (2.20) і (2.21) отримаються одне з одного взаємною заміною X і Y. Зокрема, ми маємо

$$\Delta_R f(Y,X)(X-Y) = \Delta_R f(X,Y)(X-Y).$$

Це випливає також прямо з переплетення

$$\begin{bmatrix} Y & X-Y \\ 0 & X \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & X-Y \\ 0 & Y \end{bmatrix},$$

використовуючи, якщо необхідно, подібностно інваріантний конверт $\widetilde{\Omega}$ н.к. множини Ω і канонічне розширення $\widetilde{f}$ н.к. функції f, порівнюючи (1,1) блочні елементи в матричних добутках. Зауважимо, що порівняння (1,2) блочних елементів дає (2.20), а порівняння (2,1) блочних елементів дає (2.21).

Аналогічне зауваження стосується до (2.22) і (2.23), і рівності

$$\Delta_L f(Y,X)(X-Y) = \Delta_L f(X,Y)(X-Y).$$

Зауваження 2.13. Звісно, кожна з формул (2.24) і (2.25) узагальнює умову (2.4).

Зауваження 2.14. Нехай $\mathcal{R} = \mathbb{R}$ або $\mathcal{R} = \mathbb{C}$. Покладаючи $X = Y + tZ$ (з $t \in \mathbb{R}$ або $t \in \mathbb{C}$), ми отримаємо з теореми 2.10, що

$$f(Y+tZ) - f(Y) = t\Delta_R f(Y, Y+tZ)(Z).$$

За певних умов неперервності, це означає, що $\Delta_R f(Y,Y)(Z)$ - напрямкова похідна f у Y в напрямку Z, тобто $\Delta_R f(Y,Y)$ - диференціал f у Y.

2.5. Властивості $\Delta_R f(X,Y)$ і $\Delta_L f(X,Y)$ як функцій від X і Y

Н.к. функція f має певні ключові властивості: вона інваріантна щодо прямих сум, подібностей і переплетень. Ми зараз покажемо, що ці властивості спадкуються, у відповідному вигляді, $\Delta_R f(X,Y)(\cdot)$ і $\Delta_L f(X,Y)(\cdot)$ як функціями від X і Y.

Пропозиція 2.15. *Нехай $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. функція на допустимій справа н.к. множині $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$. Тоді:*

(1X) $\quad \Delta_R f\left(X' \oplus X'', Y\right)\left(\mathrm{col}\left[Z', Z''\right]\right) = \mathrm{col}\left[\Delta_R f\left(X', Y\right)\left(Z'\right), \Delta_R f\left(X'', Y\right)\left(Z''\right)\right]$

для $n', n'', m \in \mathbb{N}$, $X' \in \Omega_{n'}$, $X'' \in \Omega_{n''}$, $Y \in \Omega_m$, $Z' \in \mathcal{M}^{n' \times m}$, $Z'' \in \mathcal{M}^{n'' \times m}$;

(1Y) $\quad \Delta_R f\left(X, Y' \oplus Y''\right)\left(\mathrm{row}\left[Z', Z''\right]\right) = \mathrm{row}\left[\Delta_R f\left(X, Y'\right)\left(Z'\right), \Delta_R f\left(X, Y''\right)\left(Z''\right)\right]$

для $n, m', m'' \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y' \in \Omega_{m'}$, $Y'' \in \Omega_{m''}$, $Z' \in \mathcal{M}^{n \times m'}$, $Z'' \in \mathcal{M}^{n \times m''}$;

(2X)
$$\Delta_R f\left(TXT^{-1}, Y\right)(TZ) = T\,\Delta_R f(X,Y)(Z)$$

для $n, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$, $Z \in \mathcal{M}^{n \times m}$ і оборотного $T \in \mathcal{R}^{n \times n}$ таких, що $TXT^{-1} \in \Omega_n$;

(2Y)
$$\Delta_R f\left(X, SYS^{-1}\right)\left(ZS^{-1}\right) = \Delta_R f(X,Y)(Z)\,S^{-1}$$

для $n, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$, $Z \in \mathcal{M}^{n \times m}$ і оборотного $S \in \mathcal{R}^{m \times m}$ таких, що $SYS^{-1} \in \Omega_m$;

(3X) $\quad$ *Якщо* $\quad TX = \tilde{X}T, \quad$ *то* $\quad T\,\Delta_R f(X,Y)(Z) = \Delta_R f(\tilde{X}, Y)(TZ)$

для $n, \tilde{n}, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $\tilde{X} \in \Omega_{\tilde{n}}$, $Y \in \Omega_m$, $Z \in \mathcal{M}^{n \times m}$ і $T \in \mathcal{R}^{\tilde{n} \times n}$;

(3Y) $\quad$ *Якщо* $\quad YS = S\tilde{Y}, \quad$ *то* $\quad \Delta_R f(X,Y)(Z)\,S = \Delta_R f(X, \tilde{Y})(ZS)$

для $n, m, \tilde{m} \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$, $\tilde{Y} \in \Omega_{\tilde{m}}$, $Z \in \mathcal{M}^{n \times m}$ і $S \in \mathcal{R}^{m \times \tilde{m}}$.

Доведення. За (2.12), ми можемо припустити, без втрати загальності, що н.к. множина Ω є подібностно інваріантною, тобто $\widetilde{\Omega} = \Omega$; дивись зауваження 2.5 і розділ 10. Тоді, за пропозицією 10.2, для довільних $n', n'', m \in \mathbb{N}$, $X' \in \Omega_{n'}$, $X'' \in \Omega_{n''}$, $Y \in \Omega_m$, $Z' \in \mathcal{R}^{n' \times m}$ і $Z'' \in \mathcal{R}^{n'' \times m}$,

$$\begin{bmatrix} X' & Z' \\ 0 & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n'+m}, \quad \begin{bmatrix} X'' & Z'' \\ 0 & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n''+m}, \quad \begin{bmatrix} X' & 0 & Z' \\ 0 & X'' & Z'' \\ 0 & 0 & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n'+n''+m}.$$

Ми маємо

$$\begin{bmatrix} I_{n'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \\ 0 & I_{n''} & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' & 0 & Z' \\ 0 & X'' & Z'' \\ 0 & 0 & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X' & Z' & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X'' & Z'' \\ 0 & 0 & 0 & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \\ 0 & I_{n''} & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

За пропозицією 2.1,

$$\begin{bmatrix} I_{n'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \\ 0 & I_{n''} & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} f\left(\begin{bmatrix} X' & 0 & Z' \\ 0 & X'' & Z'' \\ 0 & 0 & Y \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} X' & Z' & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X'' & Z'' \\ 0 & 0 & 0 & Y \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} I_{n'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \\ 0 & I_{n''} & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix},$$

тобто

$$\begin{bmatrix} I_{n'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \\ 0 & I_{n''} & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(X') & 0 & \\ 0 & f(X'') & \Delta_R f(X' \oplus X'', Y)(\mathrm{col}[Z', Z'']) \\ 0 & 0 & f(Y) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} f(X') & \Delta_R f(X', Y)(Z') & 0 & 0 \\ 0 & f(Y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(X'') & \Delta_R f(X'', Y)(Z'') \\ 0 & 0 & 0 & f(Y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \\ 0 & I_{n''} & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

Порівнюючи стовпці сформовані (1,3) і (3,3) блочними елементами у матричних добутках в лівій і правій частинах, ми отримаємо (1X).

Твердження (1Y) доводиться аналогічно, використовуючи переплетення

$$\begin{bmatrix} X & Z' & Z'' \\ 0 & Y' & 0 \\ 0 & 0 & Y'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 & I_n & 0 \\ 0 & I_{m'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & I_n & 0 \\ 0 & I_{m'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m''} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Z' & 0 & 0 \\ 0 & Y' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & Z'' \\ 0 & 0 & 0 & Y'' \end{bmatrix}.$$

Далі, для довільних $n, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$, $Z \in \mathcal{M}^{n\times m}$ і оборотного $T \in \mathcal{R}^{n\times n}$ ми маємо $\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} TXT^{-1} & TZ \\ 0 & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n+m}$. Звісно,

$$\begin{bmatrix} TXT^{-1} & TZ \\ 0 & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}^{-1}.$$

Тоді

$$f\left(\begin{bmatrix} TXT^{-1} & TZ \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} f\left(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}^{-1},$$

тобто

$$\begin{bmatrix} f\left(TXT^{-1}\right) & \Delta_R f\left(TXT^{-1}, Y\right)(TZ) \\ 0 & f(Y) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(X) & \Delta_R f(X, Y)(Z) \\ 0 & f(Y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}^{-1}.$$

Порівнюючи (1,2) блочні елементи у матричних добутках в лівій і правій частинах, ми отримаємо (2X). Твердження (2Y) отримається аналогічно, використовуючи подібність

$$\begin{bmatrix} X & ZS^{-1} \\ 0 & SYS^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}^{-1}.$$

Твердження (3X) і (3Y) отримаються використанням переплетень

$$\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{X} & TZ \\ 0 & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

і

$$\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & ZS \\ 0 & \tilde{Y} \end{bmatrix}.$$

□

Зауваження 2.16. Як і у пропозиції 2.1, інваріантність щодо переплетень ((3X) & (3Y)) еквівалентна до інваріантності щодо прямих сум ((1X) & (1Y)) разом з інваріантностю щодо подібностей ((2X) & (2Y)). Ми покажемо цю еквівалентність пізніше у пропозиції 3.1.

Комбінуючи властивості щодо X і Y у пропозиції 2.15, ми отримаємо еквівалентне спільне формулювання.

Пропозиція 2.17. *Нехай $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. функція на допустимій справа н.к. множині $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$. Тоді:*

$$\Delta_R f\left(X' \oplus X'', Y' \oplus Y''\right)\left(\begin{bmatrix} Z'^{,\prime} & Z'^{,\prime\prime} \\ Z''^{,\prime} & Z''^{,\prime\prime} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \Delta_R f\left(X', Y'\right)\left(Z'^{,\prime}\right) & \Delta_R f\left(X', Y''\right)\left(Z'^{,\prime\prime}\right) \\ \Delta_R f\left(X'', Y'\right)\left(Z''^{,\prime}\right) & \Delta_R f\left(X'', Y''\right)\left(Z''^{,\prime\prime}\right) \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

для $n', m' \in \mathbb{N}$, $n'', m'' \in \mathbb{Z}_+$, $X' \in \Omega_{n'}$, $X'' \in \Omega_{n''}$, $Y' \in \Omega_{m'}$, $Y'' \in \Omega_{m''}$, $\begin{bmatrix} Z'^{,\prime} & Z'^{,\prime\prime} \\ Z''^{,\prime} & Z''^{,\prime\prime} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}^{(n'+n'')\times(m'+m'')}$, з блочними елементами відповідних розмірів, і якщо n'' або m'' є 0, то відповідні блочні елементи - порожні;

$$\Delta_R f\left(TXT^{-1}, SYS^{-1}\right)\left(TZS^{-1}\right) = T\,\Delta_R f(X,Y)(Z)\,S^{-1} \tag{2.27}$$

для $n, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$, $Z \in \mathcal{M}^{n\times m}$ і оборотних $T \in \mathcal{R}^{n\times n}$, $S \in \mathcal{R}^{m\times m}$ таких, що $TXT^{-1} \in \Omega_n$, $SYS^{-1} \in \Omega_m$;

$$TX = \tilde{X}T,\ YS = S\tilde{Y} \Longrightarrow T\,\Delta_R f(X,Y)(Z)\,S = \Delta_R f\left(\tilde{X}, \tilde{Y}\right)(TZS) \tag{2.28}$$

для $n, \tilde{n}, m, \tilde{m} \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $\tilde{X} \in \Omega_{\tilde{n}}$, $Y \in \Omega_m$, $\tilde{Y} \in \Omega_{\tilde{m}}$, $Z \in \mathcal{M}^{n\times m}$ і $T \in \mathcal{R}^{\tilde{n}\times n}$, $S \in \mathcal{R}^{m\times\tilde{m}}$.

Фактично, пропозиція 2.17 - спеціальний випадок пропозиції 3.2, яка буде доведена пізніше.

“Ліві"аналоги пропозицій 2.15 і 2.17 такі. Вони можуть бути доведені аналогічно або виведені з відповідних “правих"тверджень за допомогою аргументу транспозиції або (у випадку, коли н.к. множина Ω є допустимою як справа, так і зліва) аргументу симетрії.

Пропозиція 2.18. *Нехай $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. функція на допустимій зліва н.к. множині $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$. Тоді:*

(1X) $$\Delta_L f(X' \oplus X'', Y)(\mathrm{row}[Z', Z'']) = \mathrm{row}[\Delta_L f(X', Y)(Z'), \Delta_L f(X'', Y)(Z'')]$$

для $n', n'', m \in \mathbb{N}$, $X' \in \Omega_{n'}$, $X'' \in \Omega_{n''}$, $Y \in \Omega_m$, $Z' \in \mathcal{M}^{m\times n'}$, $Z'' \in \mathcal{M}^{m\times n''}$;

(1Y) $$\Delta_L f(X, Y' \oplus Y'')(\mathrm{col}[Z', Z'']) = \mathrm{col}[\Delta_L f(X, Y')(Z'), \Delta_L f(X, Y'')(Z'')]$$

для $n, m', m'' \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y' \in \Omega_{m'}$, $Y'' \in \Omega_{m''}$, $Z' \in \mathcal{M}^{m'\times n}$, $Z'' \in \mathcal{M}^{m''\times n}$;

(2X) $$\Delta_L f\left(TXT^{-1}, Y\right)\left(ZT^{-1}\right) = \Delta_L f(X, Y)(Z)\, T^{-1}$$

для $n, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$, $Z \in \mathcal{M}^{m\times n}$ і оборотного $T \in \mathcal{R}^{n\times n}$ таких, що $TXT^{-1} \in \Omega_n$;

(2Y) $$\Delta_L f\left(X, SYS^{-1}\right)(SZ) = S\,\Delta_L f(X, Y)(Z)$$

для $n, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$, $Z \in \mathcal{M}^{m\times n}$ і оборотного $S \in \mathcal{R}^{m\times m}$ таких, що $SYS^{-1} \in \Omega_m$;

(3X) $$\textit{Якщо}\quad XT = T\tilde{X}, \quad \textit{то}\quad \Delta_L f(X, Y)(Z)\, T = \Delta_L f(\tilde{X}, Y)(ZT)$$

для $n, \tilde{n}, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $\tilde{X} \in \Omega_{\tilde{n}}$, $Y \in \Omega_m$, $Z \in \mathcal{M}^{m\times n}$ і $T \in \mathcal{R}^{n\times \tilde{n}}$;

(3Y) $$\textit{Якщо}\quad SY = \tilde{Y}S, \quad \textit{то}\quad S\,\Delta_L f(X, Y)(Z) = \Delta_L f(X, \tilde{Y})(SZ)$$

для $n, m, \tilde{m} \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$, $\tilde{Y} \in \Omega_{\tilde{m}}$, $Z \in \mathcal{M}^{m\times n}$ і $S \in \mathcal{R}^{\tilde{m}\times m}$.

Пропозиція 2.19. *Нехай $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. функція на допустимій зліва н.к. множині $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$. Тоді:*

(2.29) $$\Delta_L f(X' \oplus X'', Y' \oplus Y'')\left(\begin{bmatrix} Z'^{,\prime} & Z'^{,\prime\prime} \\ Z''^{,\prime} & Z''^{,\prime\prime} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \Delta_L f(X', Y')(Z'^{,\prime}) & \Delta_L f(X'', Y')(Z'^{,\prime\prime}) \\ \Delta_L f(X', Y'')(Z''^{,\prime}) & \Delta_L f(X'', Y'')(Z''^{,\prime\prime}) \end{bmatrix}$$

для $n', m' \in \mathbb{N}$, $n'', m'' \in \mathbb{Z}_+$, $X' \in \Omega_{n'}$, $X'' \in \Omega_{n''}$, $Y' \in \Omega_{m'}$, $Y'' \in \Omega_{m''}$, $\begin{bmatrix} Z'^{,\prime} & Z'^{,\prime\prime} \\ Z''^{,\prime} & Z''^{,\prime\prime} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}^{(m'+m'')\times(n'+n'')}$, з блочними елементами відповідних розмірів, і якщо n'' або m'' є 0, то відповідний блочний елемент є порожнім;

(2.30) $$\Delta_L f\left(TXT^{-1}, SYS^{-1}\right)\left(SZT^{-1}\right) = S\,\Delta_L f(X, Y)(Z)\, T^{-1}$$

для $n, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$, $Z \in \mathcal{M}^{m\times n}$ *і оборотних* $T \in \mathcal{R}^{n\times n}$, $S \in \mathcal{R}^{m\times m}$ *таких, що* $TXT^{-1} \in \Omega_n$, $SYS^{-1} \in \Omega_m$;

$$XT = T\tilde{X},\ SY = \tilde{Y}S \Longrightarrow S\,\Delta_L f(X,Y)(Z)\,T = \Delta_L f(\tilde{X},\tilde{Y})(SZT) \tag{2.31}$$

для $n, \tilde{n}, m, \tilde{m} \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $\tilde{X} \in \Omega_{\tilde{n}}$, $Y \in \Omega_m$, $\tilde{Y} \in \Omega_{\tilde{m}}$, $Z \in \mathcal{M}^{m\times n}$ *і* $T \in \mathcal{R}^{n\times\tilde{n}}$, $S \in \mathcal{R}^{\tilde{m}\times m}$.

2.6. Напрямкові н.к. різницево-диференціальні оператори

Разом з повними різницево-диференціальними операторами, введеними вище, ми також розглянемо їх *напрямкові* версії. Нехай $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ - допустима справа (відп., зліва) н.к. множина, і нехай $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. функція. Якщо дане $\mu \in \mathcal{M}$, ми визначаємо для всіх $n, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ лінійне відображення $\Delta_{R,\mu} f(X,Y)\colon \mathcal{R}^{n\times m} \to \mathcal{N}^{n\times m}$ (відп., $\Delta_{L,\mu} f(X,Y)\colon \mathcal{R}^{m\times n} \to \mathcal{N}^{m\times n}$) як

$$\Delta_{R,\mu} f(X,Y)(A) = \Delta_R f(X,Y)(A\mu) \tag{2.32}$$

і, відповідно,

$$\Delta_{L,\mu} f(X,Y)(A) = \Delta_L f(X,Y)(A\mu). \tag{2.33}$$

Тут для матриці A над $\mathcal{R}$ і $\mu \in \mathcal{M}$, добуток $A\mu$ - це матриця над $\mathcal{M}$ того ж розміру і $(A\mu)_{ij} = A_{ij}\mu$ для всіх i і j.

У спеціальному випадку, коли $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$, ми визначаємо *$j$-й правий (відп., лівий) частковий н.к. різницево-диференціальний оператор* як $\Delta_{R,j} = \Delta_{R,e_j}$ (відп., $\Delta_{L,j} = \Delta_{L,e_j}$) де e_j - j-й стандартний базисний вектор у $\mathcal{R}^d$, $j = 1, \ldots, d$. За лінійністю, ми маємо

$$\Delta_R f(X,Y)(Z) = \sum_{j=1}^{d} \Delta_{R,j} f(X,Y)(Z_j) \tag{2.34}$$

і

$$\Delta_L f(X,Y)(Z) = \sum_{j=1}^{d} \Delta_{L,j} f(X,Y)(Z_j). \tag{2.35}$$

Основні правила н.к. числення, 2.3.1, 2.3.2, 2.3.4 і 2.3.5, мають в точності такий самий вигляд для напрямкових н.к. різницево-диференціальних операторів. В налаштуванні 2.3.3,

$$\Delta_{R,\mu} l(X,Y)(A) = Al(\mu) \quad \text{і} \quad \Delta_{L,\mu} l(X,Y)(A) = Al(\mu);$$

зокрема, у випадку, коли $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$, ми маємо

$$\Delta_{R,i} l_j(X,Y)(A) = \delta_{ij} A \quad \text{і} \quad \Delta_{L,i} l_j(X,Y)(A) = \delta_{ij} A.$$

Версія 2.3.6 для правих і лівих часткових н.к. різницево-диференціальних операторів у випадку, коли $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$ і $\mathcal{N} = \mathcal{R}^\ell$, є

$$\Delta_{R,i}(g \circ f)(X,Y)(A) = \sum_{j=1}^{\ell} \Delta_{R,j} g(f(X), f(Y))(\Delta_{R,i} f_j(X,Y)(A))$$

і

$$\Delta_{L,i}(g \circ f)(X,Y)(A) = \sum_{j=1}^{\ell} \Delta_{L,j} g(f(X), f(Y))(\Delta_{L,i} f_j(X,Y)(A))$$

для $i = 1, \ldots, d$, де $f(X) = f_1(X)e_1 + \cdots + f_\ell(X)e_\ell$, з компонентними н.к. функціями $f_j \colon \Omega \to \mathcal{R}_{\mathrm{nc}}$.

Різницеві формули першого порядку з теореми 2.10 у випадку, коли $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$, можуть бути записані у термінах часткових н.к. різницево-диференціальних операторів. З (2.20)–(2.21) і (2.34) випливає, що

$$f(X) - f(Y) = \sum_{j=1}^{d} \Delta_{R,j} f(X,Y)(X_j - Y_j) = \sum_{j=1}^{d} \Delta_{R,j} f(Y,X)(X_j - Y_j).$$

Подібним чином, з (2.22)–(2.23) і (2.35) випливає, що

$$f(X) - f(Y) = \sum_{j=1}^{d} \Delta_{L,j} f(X,Y)(X_j - Y_j) = \sum_{j=1}^{d} \Delta_{L,j} f(Y,X)(X_j - Y_j).$$

Щодо властивостей$\Delta_{R,\mu} f(X,Y)$ і $\Delta_{L,\mu} f(X,Y)$ як функцій від X і Y, всі твердження підрозділу 2.5 мають в точності такий самий вигляд.

Розділ 3

Н.к. функції вищого порядку і їх різницево-диференціальне числення

Наша наступна мета - дати означення диференціалів вищих порядків н.к. функції (точніше, н.к. різницево-диференціальні оператори вищих порядків). Як ми бачили у розділі 2, для н.к. функції f на н.к. множині $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ у н.к. простір $\mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$, $\Delta_R f(X,Y)(\cdot)$ - це функція двох аргументів $X \in \Omega_n$ і $Y \in \Omega_m$ (для всіх n і m) із значеннями - лінійними відображеннями $\mathcal{M}^{n\times m} \to \mathcal{N}^{n\times m}$. Ми також бачили, що $\Delta_R f(X,Y)(\cdot)$ є інваріантним (відповідним чином) щодо прямих сум, подібностей і переплетень. Це мотивує виникнення класів

$$\mathcal{T}^k = \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}})$$

н.к. функцій порядку k ($k = 0, 1, \ldots$), разом з правими н.к. різницево-диференціальними операторами

$$\begin{aligned}\Delta_R \colon \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}}) \\ \to \mathcal{T}^{k+1}(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}}, \mathcal{M}_{k,\mathrm{nc}}).\end{aligned}$$

Н.к. функція порядку k - це функція від $k+1$ аргументів, у н.к. множинах $\Omega^{(0)} \subseteq \mathcal{M}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \Omega^{(k)} \subseteq \mathcal{M}_{k,\mathrm{nc}}$, із значеннями - певними k-лінійними відображеннями, яка є інваріантною (відповідним чином) щодо прямих сум, подібностей і переплетень. Н.к. різницево-диференціальні оператори вищого порядку будуть отримані ітеруванням Δ_R.

(Відтепер ми будемо концентруватись на правих н.к. різницево-диференціальних операторах. Звісно, можливо побудувати й аналогічну “ліву"теорію.)

3.1. Н.к. функції вищого порядку

Нехай $\mathcal{M}_0, \ldots, \mathcal{M}_k, \mathcal{N}_0, \ldots, \mathcal{N}_k$ - модулі над кільцем $\mathcal{R}$. Нехай $\Omega^{(j)} \subseteq \mathcal{M}_{j,\mathrm{nc}}$ - н.к. множина, $j = 0, \ldots, k$. Розглянемо функції f на $\Omega^{(0)} \times \cdots \times \Omega^{(k)}$ з

$$f(\Omega^{(0)}_{n_0}, \ldots, \Omega^{(k)}_{n_k}) \subseteq \hom_{\mathcal{R}}\left(\mathcal{N}_1{}^{n_0\times n_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_k{}^{n_{k-1}\times n_k}, \mathcal{N}_0{}^{n_0\times n_k}\right).$$

Іншими словами, для $X^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}, \ldots, X^k \in \Omega^{(k)}_{n_k}$, $f\left(X^0, \ldots, X^k\right)$ - k-лінійне відображення над $\mathcal{R}$ з $\mathcal{N}_1{}^{n_0\times n_1} \times \cdots \times \mathcal{N}_k{}^{n_{k-1}\times n_k}$ у $\mathcal{N}_0{}^{n_0\times n_k}$. Ми будемо називати таку функцію f *н.к. фунцією порядку* k, якщо f задовольняє наступні дві умови:

- *f інваріантна щодо прямих сум*: якщо $n_0, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, $X^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}$, $\dots$, $X^k \in \Omega^{(k)}_{n_k}$, $Z^1 \in \mathcal{N}_1{}^{n_0 \times n_1}$, $\dots$, $Z^k \in \mathcal{N}_k{}^{n_{k-1} \times n_k}$, то

(1X^0) $$\begin{aligned} f(X^{0\prime} \oplus X^{0\prime\prime}, X^1, \dots, X^k)(\operatorname{col}[Z^{1\prime}, Z^{1\prime\prime}], Z^2, \dots, Z^k) \\ = \operatorname{col}[f(X^{0\prime}, X^1, \dots, X^k)(Z^{1\prime}, Z^2, \dots, Z^k), \\ f(X^{0\prime\prime}, X^1, \dots, X^k)(Z^{1\prime\prime}, Z^2, \dots, Z^k)] \end{aligned}$$

для $n_0', n_0'' \in \mathbb{N}$, $X^{0\prime} \in \Omega^{(0)}_{n_0'}$, $X^{0\prime\prime} \in \Omega^{(0)}_{n_0''}$, $Z^{1\prime} \in \mathcal{N}_1{}^{n_0' \times n_1}$, $Z^{1\prime\prime} \in \mathcal{N}_1{}^{n_0'' \times n_1}$, де $Z^2, \dots, Z^k$ не з'являються, коли $k = 1$;

(1X^j) $$\begin{aligned} f(X^0, \dots, X^{j-1}, X^{j\prime} \oplus X^{j\prime\prime}, X^{j+1}, \dots, X^k) \\ (Z^1, \dots, Z^{j-1}, \operatorname{row}[Z^{j\prime}, Z^{j\prime\prime}], \operatorname{col}[Z^{(j+1)\prime}, Z^{(j+1)\prime\prime}], Z^{j+2}, \dots, Z^k) \\ = f(X^0, \dots, X^{j-1}, X^{j\prime}, X^{j+1}, \dots, X^k) \\ (Z^1, \dots, Z^{j-1}, Z^{j\prime}, Z^{(j+1)\prime}, Z^{j+2}, \dots, Z^k \\ + f(X^0, \dots, X^{j-1}, X^{j\prime\prime}, X^{j+1}, \dots, X^k) \\ (Z^1, \dots, Z^{j-1}, Z^{j\prime\prime}, Z^{(j+1)\prime\prime}, Z^{j+2}, \dots, Z^k) \end{aligned}$$

для кожного $j \in \{1, \dots, k-1\}$ і для $n_j', n_j'' \in \mathbb{N}$, $X^{j\prime} \in \Omega^{(j)}_{n_j'}$, $X^{j\prime\prime} \in \Omega^{(j)}_{n_j''}$, $Z^{j\prime} \in \mathcal{N}_j{}^{n_{j-1} \times n_j'}$, $Z^{j\prime\prime} \in \mathcal{N}_j{}^{n_{j-1} \times n_j''}$, $Z^{(j+1)\prime} \in (\mathcal{N}_{j+1})^{n_j' \times n_{j+1}}$, $Z^{(j+1)\prime\prime} \in (\mathcal{N}_{j+1})^{n_j'' \times n_{j+1}}$, де Z^1, $\dots$, Z^{j-1} не з'являються для $j = 1$, і $Z^{j+2}, \dots, Z^k$ не з'являються для $j = k-1$;

(1X^k) $$\begin{aligned} f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime} \oplus X^{k\prime\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, \operatorname{row}[Z^{k\prime}, Z^{k\prime\prime}]) \\ = \operatorname{row}[f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k\prime}, \\ f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k\prime\prime})] \end{aligned}$$

для $n_k', n_k'' \in \mathbb{N}$, $X^{k\prime} \in \Omega^{(k)}_{n_k'}$, $X^{k\prime\prime} \in \Omega^{(k)}_{n_k''}$, $Z^{k\prime} \in \mathcal{N}_k{}^{n_{k-1} \times n_k'}$, $Z^{k\prime\prime} \in \mathcal{N}_k{}^{n_{k-1} \times n_k''}$, де $Z^1, \dots, Z^{k-1}$ не з'являться, коли $k = 1$.

- *f інваріантна щодо подібностей*: якщо $n_0, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, $X^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}$, $\dots$, $X^k \in \Omega^{(k)}_{n_k}$, $Z^1 \in \mathcal{N}_1{}^{n_0 \times n_1}$, $\dots$, $Z^k \in \mathcal{N}_k{}^{n_{k-1} \times n_k}$, то

(2X^0) $$f(S_0 X^0 S_0^{-1}, X^1, \dots, X^k)(S_0 Z^1, Z^2, \dots, Z^k) = S_0 f(X^0, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^k)$$

для оборотного $S_0 \in \mathcal{R}^{n_0 \times n_0}$ такого, що $S_0 X^0 S_0^{-1} \in \Omega^{(0)}_{n_0}$, де $Z^2, \dots, Z^k$ не з'являються, коли $k = 1$;

(2X^j) $$\begin{aligned} f(X^0, \dots, X^{j-1}, S_j X^j S_j^{-1}, X^{j+1}, \dots, X^k) \\ (Z^1, \dots, Z^{j-1}, Z^j S_j^{-1}, S_j Z^{j+1}, Z^{j+2}, \dots, Z^k) \\ = f(X^0, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^k) \end{aligned}$$

для кожного $j \in \{1, \dots, k-1\}$ і оборотного $S_j \in \mathcal{R}^{n_j \times n_j}$ такого, що $S_j X^j S_j^{-1} \in \Omega_{n_j}^{(j)}$, де $Z^1, \dots, Z^{j-1}$ не з'являються для $j = 1$, і $Z^{j+2}, \dots, Z^k$ не з'являються для $j = k-1$;

(2X^k) $$f(X^0, \dots, X^{k-1}, S_k X^k S_k^{-1})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^k S_k^{-1}) = f(X^0, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^k) S_k^{-1}$$

для оборотного $S_k \in \mathcal{R}^{n_k \times n_k}$ такого, що $S_k X^k S_k^{-1} \in \Omega_{n_k}^{(k)}$, де $Z^1, \dots, Z^{k-1}$ не з'являються, коли $k = 1$.

Ми визначаємо *н.к. функції порядку нуль* як просто н.к. функції, як у підрозділі 2.1. Ми позначаємо як $\mathcal{T}^k = \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \dots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}})$ клас н.к. функцій порядку k, $k = 0, 1, \dots$. У випадку, коли $\mathcal{M}_0 = \dots = \mathcal{M}_k =: \mathcal{M}$ і $\Omega^{(0)} = \dots = \Omega^{(k)} =: \Omega$, ми будемо писати $\mathcal{T}^k = \mathcal{T}^k(\Omega; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}})$. Ми дамо пізніше трохи іншу інтерпретацію н.к. функцій порядку k, використовуючи тензорні добутки замість мультілінійних відображень для їх значень, що показує, чому означення н.к. функцій вищого порядку є природним і узагальнює н.к. функції порядку нуль.

Подібно до класу $\mathcal{T}^0$ (дивись пропозицію 2.1), дві умови у означенні н.к. функції порядку k можуть бути замінені однією.

Пропозиція 3.1. *Нехай $\Omega^{(j)} \subseteq \mathcal{M}_{j,\mathrm{nc}}$, $j = 0, \dots, k$, - н.к. множини. Функція f на $\Omega^{(0)} \times \dots \times \Omega^{(k)}$ з*

$$f(\Omega_{n_0}^{(0)}, \dots, \Omega_{n_k}^{(k)}) \subseteq \hom_{\mathcal{R}}({\mathcal{N}_1}^{n_0 \times n_1} \otimes \dots \otimes {\mathcal{N}_k}^{n_{k-1} \times n_k}, {\mathcal{N}_0}^{n_0 \times n_k})$$

є інваріантною щодо прямих сум і подібностей, тобто

$$f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \dots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}}),$$

тоді і тільки тоді, коли f є інваріантною щодо переплетень*: якщо $n_0, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, $X^0 \in \Omega_{n_0}^{(0)}, \dots, X^k \in \Omega_{n_k}^{(k)}$, $Z^1 \in {\mathcal{N}_1}^{n_0 \times n_1}, \dots, Z^k \in {\mathcal{N}_k}^{n_{k-1} \times n_k}$, то:*

(3X^0) *якщо* $T_0 X^0 = \tilde{X}^0 T_0$, *то*
$$T_0 f(X^0, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^k) = f(\tilde{X}^0, X^1, \dots, X^k)(T_0 Z^1, Z^2, \dots, Z^k)$$

для $\tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$, $\tilde{X}^0 \in \Omega_{\tilde{n}_0}^{(0)}$ і $T_0 \in \mathcal{R}^{\tilde{n}_0 \times n_0}$, де $Z^2, \dots, Z^k$ не з'являються, коли $k = 1$;

(3X^j) *якщо* $T_j X^j = \tilde{X}^j T_j$, *то*
$$f(X^0, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^{j-1}, \tilde{Z}^j T_j, Z^{j+1}, Z^{j+2}, \dots, Z^k)$$
$$= f(X^0, \dots, X^{j-1}, \tilde{X}^j, X^{j+1}, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^{j-1}, \tilde{Z}^j, T_j Z^{j+1}, Z^{j+2}, \dots, Z^k)$$

для кожного $j \in \{1, \dots, k-1\}$ *і для* $\tilde{n}_j \in \mathbb{N}$, $\tilde{X}^j \in \Omega^{(j)}_{\tilde{n}_j}$, $\tilde{Z}^j \in \mathcal{N}_j^{n_{j-1}\times\tilde{n}_j}$, $T_j \in \mathcal{R}^{\tilde{n}_j\times n_j}$, *де* $Z^1, \dots, Z^{j-1}$ *не з'являються для* $j = 1$, *і* $Z^{j+2}, \dots, Z^k$ *не з'являються для* $j = k-1$;

(3X^k) *якщо* $X^k T_k = T_k \tilde{X}^k$, *то*

$$f(X^0, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^k)T_k = f(X^0, \dots, X^{k-1}, \tilde{X}^k)(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^k T_k)$$

для $\tilde{n}_k \in \mathbb{N}$, $\tilde{X}^k \in \Omega^{(k)}_{\tilde{n}_k}$ *і* $T_k \in \mathcal{R}^{n_k\times\tilde{n}_k}$, *де* $Z^1, \dots, Z^{k-1}$ *не з'являються, коли* $k = 1$.

Більше того, умови (1X^0) *і* (2X^0) *в означенні н.к. функції порядку* k *разом еквівалентні до умови* (3X^0), *і подібним чином,* (1X^j) & (2X^j) $\iff$ (3X^j) *(*$j = 1, \dots, k-1$*),* (1X^k) & (2X^k) $\iff$ (3X^k).

Доведення. Ми дамо детальне доведення (1X^0) & (2X^0) $\iff$ (3X^0). Інші еквівалентності у пропозиції можуть бути доведені аналогічно.

Припустимо спочатку, що умови (1X^0) і (2X^0) у означенні н.к. функції порядку k виконуються. Нехай $n_0, \tilde{n}_0, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, $X^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}$, $\tilde{X}^0 \in \Omega^{(0)}_{\tilde{n}_0}$, $X^1 \in \Omega^{(1)}_{n_1}$, …, $X^k \in \Omega^{(k)}_{n_k}$, $Z^1 \in \mathcal{N}_1^{n_0\times n_1}$, $\tilde{Z}^1 \in \mathcal{N}_1^{\tilde{n}_0\times n_1}$, $Z^2 \in \mathcal{N}_2^{n_1\times n_2}$, …, $Z^k \in \mathcal{N}_k^{n_{k-1}\times n_k}$, і нехай $T_0 \in \mathcal{R}^{\tilde{n}_0\times n_0}$ такі, що $T_0 X^0 = \tilde{X}^0 T_0$. За (1X^0), ми маємо

$$\begin{aligned} &f(X^0 \oplus \tilde{X}^0, X^1, \dots, X^k)(\operatorname{col}[Z^1, \tilde{Z}^1], Z^2, \dots, Z^k) \\ &\qquad = \operatorname{col}[f(X^0, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^k), f(\tilde{X}^0, X^1, \dots, X^k)(\tilde{Z}^1, Z^2, \dots, Z^k)]. \end{aligned}$$

З другого боку, використовуючи тотожність

$$\begin{bmatrix} X^0 & 0 \\ 0 & \tilde{X}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_0} & 0 \\ T_0 & I_{\tilde{n}_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^0 & 0 \\ 0 & \tilde{X}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_0} & 0 \\ -T_0 & I_{\tilde{n}_0} \end{bmatrix},$$

і умови (1X^0) і (2X^0), ми отримаємо

$$\begin{aligned} &f(X^0 \oplus \tilde{X}^0, X^1, \dots, X^k)(\operatorname{col}[Z^1, \tilde{Z}^1], Z^2, \dots, Z^k) \\ &\qquad = f\left(\begin{bmatrix} I_{n_0} & 0 \\ T_0 & I_{\tilde{n}_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^0 & 0 \\ 0 & \tilde{X}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_0} & 0 \\ -T_0 & I_{\tilde{n}_0} \end{bmatrix}, X^1, \dots, X^k\right) \\ &\qquad\qquad \left(\begin{bmatrix} I_{n_0} & 0 \\ T_0 & I_{\tilde{n}_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_0} & 0 \\ -T_0 & I_{\tilde{n}_0} \end{bmatrix} \operatorname{col}[Z^1, \tilde{Z}^1], Z^2, \dots, Z^k\right) \\ &\qquad = \begin{bmatrix} I_{n_0} & 0 \\ T_0 & I_{\tilde{n}_0} \end{bmatrix} f(X^0 \oplus \tilde{X}^0, X^1, \dots, X^k)(\operatorname{col}, [Z^1, -T_0 Z^1 + \tilde{Z}^1], Z^2, \dots, Z^k) \\ &= \begin{bmatrix} I_{n_0} & 0 \\ T_0 & I_{\tilde{n}_0} \end{bmatrix} \operatorname{col}[f(X^0, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^k), \\ &\qquad\qquad f(\tilde{X}^0, X^1, \dots, X^k)(-T_0 Z^1 + \tilde{Z}^1, Z^2, \dots, Z^k)] \\ &= \operatorname{col}[f(X^0, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^k), \\ &\qquad T_0 f(X^0, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^k) + f(\tilde{X}^0, \dots, X^k)(-T_0 Z^1 + \tilde{Z}^1, Z^2, \dots, Z^k)]. \end{aligned}$$

Порівняння (2,1) блоків у двох блочно-стовпчикових виразах для

$$f(X^0 \oplus \tilde{X}^0, X^1, \dots, X^k)(\operatorname{col}[Z^1, \tilde{Z}^1], Z^2, \dots, Z^k)$$

дає

$$\begin{aligned} &f(\tilde{X}^0, X^1, \dots, X^k)(\tilde{Z}^1, Z^2, \dots, Z^k) \\ &\quad = T_0 f(X^0, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^k) + f(\tilde{X}^0, X^1, \dots, X^k)(-T_0 Z^1 + \tilde{Z}^1, Z^2, \dots, Z^k). \end{aligned}$$

Використовуючи лінійність у Z^1 для $f(X^0, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^k)$, ми отримаємо

$$0 = T_0 f(X^0, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^k) - f(\tilde{X}^0, X^1, \dots, X^k)(T_0 Z^1, Z^2, \dots, Z^k),$$

і ($3\mathrm{X}^0$) виконується.

Навпаки, припустимо, що ($3\mathrm{X}^0$) виконується. Нехай $n_0', n_0'', n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, $X^{0\prime} \in \Omega^{(0)}_{n_0'}$, $X^{0\prime\prime} \in \Omega^{(0)}_{n_0''}$, $X^1 \in \Omega^{(1)}_{n_1}$, …, $X^k \in \Omega^{(k)}_{n_k}$, $Z^{1\prime} \in \mathcal{N}_1{}^{n_0' \times n_1}$, $Z^{1\prime\prime} \in \mathcal{N}_1{}^{n_0'' \times n_1}$, $Z^2 \in \mathcal{N}_2{}^{n_1 \times n_2}$, …, $Z^k \in \mathcal{N}_k{}^{n_{k-1} \times n_k}$. Переплетення

$$\operatorname{col}[I_{n_0'}, 0] X^{0\prime} = (X^{0\prime} \oplus X^{0\prime\prime}) \operatorname{col}[I_{n_0'}, 0]$$

і

$$\operatorname{col}[0, I_{n_0''}] X^{0\prime\prime} = (X^{0\prime} \oplus X^{0\prime\prime}) \operatorname{col}[0, I_{n_0''}]$$

тягнуть за собою, відповідно,

$$\begin{aligned} &\operatorname{col}[I_{n_0'}, 0] f(X^{0\prime}, X^1, \dots, X^k)(Z^{1\prime}, Z^2, \dots, Z^k) \\ &\qquad\qquad = f(X^{0\prime} \oplus X^{0\prime\prime}, X^1, \dots, X^k)(\operatorname{col}[I_{n_0'}, 0] Z^{1\prime}, Z^2, \dots, Z^k) \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} &\operatorname{col}[0, I_{n_0''}] f(X^{0\prime\prime}, X^1, \dots, X^k)(Z^{1\prime\prime}, Z^2, \dots, Z^k) \\ &\qquad\qquad = f(X^{0\prime} \oplus X^{0\prime\prime}, X^1, \dots, X^k)(\operatorname{col}[0, I_{n_0''}] Z^{1\prime\prime}, Z^2, \dots, Z^k). \end{aligned}$$

Додаючи ці рівності, ми отримаємо ($1\mathrm{X}^0$) за лінійністю.

Якщо $n_0 \in \mathbb{N}$, $X^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}$, $Z^1 \in \mathcal{N}_1{}^{n_0 \times n_1}$ і $S_0 \in \mathcal{R}^{n_0 \times n_0}$ є оборотним, то, в силу ($3\mathrm{X}^0$), переплетення $S_0 X^0 = \left(S_0 X^0 S_0^{-1}\right) S_0$ тягне за собою ($2\mathrm{X}^0$). □

Подібно до пропозиції 2.17, кожна з цих умов інваріантності щодо прямих сум, подібностей і переплетень допускає еквівалентне спільне формулювання.

Пропозиція 3.2. (1) *Умови* ($1\mathrm{X}^0$), ($1\mathrm{X}^j$) *для* $j = 1, \dots, k-1$, *і* ($1\mathrm{X}^k$) *є еквівалентними до*

$$\begin{aligned} (3.1)\quad & f(X^{0\prime} \oplus X^{0\prime\prime}, \dots, X^{k\prime} \oplus X^{k\prime\prime}) \left(\begin{bmatrix} Z^{1\prime,\prime} & Z^{1\prime,\prime\prime} \\ Z^{1\prime\prime,\prime} & Z^{1\prime\prime,\prime\prime} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} Z^{k\prime,\prime} & Z^{k\prime,\prime\prime} \\ Z^{k\prime\prime,\prime} & Z^{k\prime\prime,\prime\prime} \end{bmatrix} \right) \\ & \qquad\qquad = \begin{bmatrix} f^{\prime,\prime} & f^{\prime,\prime\prime} \\ f^{\prime\prime,\prime} & f^{\prime\prime,\prime\prime} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

де для $\alpha, \beta \in \{',''\}$,

$$f^{\alpha,\beta} = \sum_{\alpha_0,\dots,\alpha_k \in \{',''\}:\ \alpha_0=\alpha, \alpha_k=\beta} f(X^{0\alpha_0}, \dots, X^{k\alpha_k})(Z^{1\alpha_0,\alpha_1}, \dots, Z^{k\alpha_{k-1},\alpha_k}). \tag{3.2}$$

Тут $n'_j \in \mathbb{N}$, $n''_j \in \mathbb{Z}_+$, $X^{j\alpha} \in \Omega^{(j)}_{n^\alpha_j}$ *для* $j = 0, \dots, k$, $\alpha \in \{',''\}$, $Z^{j\alpha,\beta} \in \mathcal{N}_j^{n^\alpha_{j-1} \times n^\beta_j}$ *для* $j = 1, \dots, k$, $\alpha, \beta \in \{',''\}$, *блочний елемент* $f^{\alpha,\beta}$ *є порожнім, якщо* n^α_0 *або* n^β_k *є* 0, *і доданок у* (3.2) *є* 0, *якщо принаймні одне з* $n^{\alpha_j}_j$, $j = 1, \dots, k-1$, *є* 0.

(2) *Умови* (2X^0), (2X^j) *для* $j = 1, \dots, k-1$, *і* (2X^k) *є еквівалентними до*

$$\begin{aligned} f(S_0X^0S_0^{-1}, \dots, S_kX^kS_k^{-1})(S_0Z^1S_1^{-1}, \dots, S_{k-1}Z^kS_k^{-1}) \\ = S_0 f(X^0, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^k)S_k^{-1} \end{aligned} \tag{3.3}$$

для $n_j \in \mathbb{N}$, $X^j \in \Omega^{(j)}_{n_j}$, *і оборотного* $S_j \in \mathcal{R}^{n_j \times n_j}$ *такого, що* $S_jX^jS_j^{-1} \in \Omega^{(j)}_{n_j}$, $j = 0, \dots, k$, *і для* $Z^j \in \mathcal{N}_j^{n_{j-1} \times n_j}$, $j = 1, \dots, k$.

(3) *Умови* (3X^0), (3X^j) *для* $j = 1, \dots, k-1$, *і* (3X^k) *є еквівалентними до*

(3.4) *Якщо* $T_jX^j = \tilde{X}^jT_j$, $j = 0, \dots, k$, *то*

$$\begin{aligned} T_0 f(X^0, \dots, X^k)(Z^1T_1, \dots, Z^kT_k) \\ = f(\tilde{X}^0, \dots, \tilde{X}^k)(T_0Z^1, \dots, T_{k-1}Z^k)T_k \end{aligned}$$

для $n_j, \tilde{n}_j \in \mathbb{N}$, $X^j \in \Omega^{(j)}_{n_j}$, $\tilde{X}^j \in \Omega^{(j)}_{\tilde{n}_j}$, $T_j \in \mathcal{R}^{\tilde{n}_j \times n_j}$, $j = 0, \dots, k$, *і для* $Z^j \in \mathcal{N}_j^{n_{j-1} \times \tilde{n}_j}$, $j = 1, \dots, k$.

Доведення. (1). Припустимо, що (1X^0)–(1X^k) виконуються. Тоді

$$\begin{aligned} & f(X^{0\prime} \oplus X^{0\prime\prime}, \dots, X^{k\prime} \oplus X^{k\prime\prime}) \left(\begin{bmatrix} Z^{1\prime,\prime} & Z^{1\prime,\prime\prime} \\ Z^{1\prime\prime,\prime} & Z^{1\prime\prime,\prime\prime} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} Z^{k\prime,\prime} & Z^{k\prime,\prime\prime} \\ Z^{k\prime\prime,\prime} & Z^{k\prime\prime,\prime\prime} \end{bmatrix} \right) \\ = & \operatorname*{col}_{\alpha_0 \in \{\prime,\prime\prime\}} \Big[f(X^{0\alpha_0}, X^{1\prime} \oplus X^{1\prime\prime}, \dots, X^{k\prime} \oplus X^{k\prime\prime}) \\ & \qquad \left(\operatorname{row}[Z^{1\alpha_0,\prime}, Z^{1\alpha_0,\prime\prime}], \begin{bmatrix} Z^{2\prime,\prime} & Z^{2\prime,\prime\prime} \\ Z^{2\prime\prime,\prime} & Z^{2\prime\prime,\prime\prime} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} Z^{k\prime,\prime} & Z^{k\prime,\prime\prime} \\ Z^{k\prime\prime,\prime} & Z^{k\prime\prime,\prime\prime} \end{bmatrix} \right) \Big] \\ = & \operatorname*{col}_{\alpha_0 \in \{\prime,\prime\prime\}} \Big[\sum_{\alpha_1 \in \{\prime,\prime\prime\}} f(X^{0\alpha_0}, X^{1\alpha_1}, X^{2\prime} \oplus X^{2\prime\prime}, \dots, X^{k\prime} \oplus X^{k\prime\prime}) \\ & \qquad \left(Z^{1\alpha_0,\alpha_1}, \operatorname{row}[Z^{2\alpha_1,\prime}, Z^{2\alpha_1,\prime\prime}], \begin{bmatrix} Z^{3\prime,\prime} & Z^{3\prime,\prime\prime} \\ Z^{3\prime\prime,\prime} & Z^{3\prime\prime,\prime\prime} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} Z^{k\prime,\prime} & Z^{k\prime,\prime\prime} \\ Z^{k\prime\prime,\prime} & Z^{k\prime\prime,\prime\prime} \end{bmatrix} \right) \Big] \end{aligned}$$

$$= \operatorname*{col}_{\alpha_0\in\{\prime,\prime\prime\}}\Big[\sum_{\alpha_1,\alpha_2\in\{\prime,\prime\prime\}} f(X^{0\alpha_0}, X^{1\alpha_1}, X^{2\alpha_2}, X^{3\prime}\oplus X^{3\prime\prime},\dots,X^{k\prime}\oplus X^{k\prime\prime})$$
$$\Big(Z^{1\alpha_0,\alpha_1}, Z^{2\alpha_1,\alpha_2}, \operatorname{row}[Z^{3\alpha_2,\prime}, Z^{3\alpha_2,\prime\prime}], \begin{bmatrix} Z^{4\prime,\prime} & Z^{4\prime,\prime\prime}\\ Z^{4\prime\prime,\prime} & Z^{4\prime\prime,\prime\prime}\end{bmatrix},\dots,\begin{bmatrix} Z^{k\prime,\prime} & Z^{k\prime,\prime\prime}\\ Z^{k\prime\prime,\prime} & Z^{k\prime\prime,\prime\prime}\end{bmatrix}\Big)\Big]$$
$$= \dots = \operatorname*{col}_{\alpha_0\in\{\prime,\prime\prime\}}\Big[\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1}\in\{\prime,\prime\prime\}} f(X^{0\alpha_0},\dots,X^{(k-1)\alpha_{k-1}}, X^{k\prime}\oplus X^{k\prime\prime})$$
$$(Z^{1\alpha_0,\alpha_1},\dots,Z^{(k-1)\alpha_{k-2},\alpha_{k-1}}, \operatorname{row}[Z^{k\alpha_{k-1},\prime}, Z^{k\alpha_{k-1},\prime\prime}])\Big]$$
$$= \operatorname*{col}_{\alpha_0\in\{\prime,\prime\prime\}}\Big[\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1}\in\{\prime,\prime\prime\}} \operatorname*{row}_{\alpha_k\in\{\prime,\prime\prime\}}[f(X^{0\alpha_0},\dots,X^{k\alpha_k})(Z^{1\alpha_0,\alpha_1},\dots,Z^{k\alpha_{k-1},\alpha_k})]\Big]$$
$$= \begin{bmatrix} f^{\prime,\prime} & f^{\prime,\prime\prime}\\ f^{\prime\prime,\prime} & f^{\prime\prime,\prime\prime}\end{bmatrix},$$

де $f^{\alpha\beta}$ є як у (3.2).

Навпаки, якщо (3.1) виконується, то кожне з (1X^0)–(1X^k) отримається як спеціальний випадок, коли всі n_j'''s, крім одного, дорівнюють 0.

(2). Припустимо, що (2X^0)–(2X^k) виконуються. Тоді

$$f(S_0X^0S_0^{-1},\dots,S_kX^kS_k^{-1})(S_0Z^1S_1^{-1},\dots,S_{k-1}Z^kS_k^{-1})$$
$$= S_0f(X^0, S_1X^1S_1^{-1},\dots,S_kX^kS_k^{-1})(Z^1S_1^{-1}, S_1Z^2S_2^{-1},\dots,S_{k-1}Z^kS_k^{-1})$$
$$= S_0f(X^0, X^1, S_2X^2S_2^{-1},\dots,S_kX^kS_k^{-1})(Z^1, Z^2S_2^{-1}, S_2Z^3S_3^{-1},\dots,S_{k-1}Z^kS_k^{-1})$$
$$= \dots = S_0f(X^0,\dots,X^{k-1}, S_kX^kS_k^{-1})(Z^1,\dots,Z^{k-1}, Z^kS_k^{-1})$$
$$= S_0f(X^0,\dots,X^k)(Z^1,\dots,Z^k)S_k^{-1}.$$

Навпаки, якщо (3.3) виконується, то кожне з (2X^0)–(2X^k) отримається як спеціальний випадок, коли $S_j = I_{n_j}$ для всіх j's, крім одного.

(3). Припустимо, що (3X^0)–(3X^k) виконуються і $T_jX^j = \tilde{X}^jT_j$, $j = 0,\dots,k$. Тоді

$$T_0f(X^0,\dots,X^k)(Z^1T_1,\dots,Z^kT_k)$$
$$= f(\tilde{X}^0, X^1,\dots,X^k)(T_0Z^1T_1, Z^2T_2,\dots,Z^kT_k)$$
$$= f(\tilde{X}^0, \tilde{X}^1, X^2,\dots,X^k)(T_0Z^1, T_1Z^2T_2, Z^3T_3,\dots,Z^kT_k)$$
$$= \dots = f(\tilde{X}^0,\dots,\tilde{X}^{k-1}, X^k)(T_0Z^1,\dots,T_{k-2}Z^{k-1}, T_{k-1}Z^kT_k)$$
$$= f(\tilde{X}^0,\dots,\tilde{X}^k)(T_0Z^1,\dots,T_{k-1}Z^k)T_k.$$

Навпаки, якщо (3.4) виконується, то кожне з (3X^0)–(3X^k) отримається як спеціальний випадок, коли $\tilde{n}_j = n_j$ і $T_j = I_{n_j}$ для всіх j's, крім одного. □

Формули (3.1)–(3.2) допускають узагальнення на випадок прямих сум більше ніж двох доданків таким чином. Нехай

$$X^j = \bigoplus_{\alpha=1}^{m_j} X^{j\alpha}, \quad Z^j = [Z^{j\alpha,\beta}]_{\alpha=1,\dots,m_{j-1},\,\beta=1,\dots,m_j},$$

де $n_j^\alpha \in \mathbb{Z}_+$, $X^{j\alpha} \in \Omega_{n_j^\alpha}^{(j)}$ для $j = 0,\dots,k$, $\alpha = 1,\dots,m_j$; $Z^{j\alpha,\beta} \in \mathcal{N}_j^{n_{j-1}^\alpha \times n_j^\beta}$ для $j = 1,\dots,k$, $\alpha = 1,\dots,m_{j-1}$, $\beta = 1,\dots,m_j$. Тоді

$$f(X^0,\dots,X^k)(Z^1,\dots,Z^k) = [f^{\alpha,\beta}]_{\alpha=1,\dots,m_0,\,\beta=1,\dots,m_k}, \tag{3.5}$$

де

$$f^{\alpha,\beta} = \sum_{\alpha_j=1,\dots,m_j\colon\, \alpha_0=\alpha,\alpha_k=\beta} f(X^{0\alpha_0},\dots,X^{k\alpha_k})(Z^{1\alpha_0,\alpha_1},\dots,Z^{k\alpha_{k-1},\alpha_k}). \tag{3.6}$$

Тут блочний елемент $f^{\alpha,\beta}$ - порожній, якщо n_0^α або n_k^β є 0, і доданок у (3.6) є 0, якщо принаймні один з $n_j^{\alpha_j}$, $j = 1,\dots,k-1$, є 0. Доведення є подібним до доведення пропозиції 3.2(1).

Випадок, коли для кожного j діагональні блоки $X^{j\alpha}$ всі рівні, буде мати спеціальне значення (дивись розділ 4). Ми зараз введемо деякі позначення. Для $Z^j \in \mathcal{N}_j^{n_{j-1}\times n_j}$, $n_j = m_j s_j$, $j = 1,\dots,k$, ми визначаємо

$$Z^1 {}_{s_0,s_2}\!\odot_{s_1} \cdots {}_{s_{k-2},s_k}\!\odot_{s_{k-1}} Z^k \in \left(\mathcal{N}_1^{s_0\times s_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_k^{s_{k-1}\times s_k}\right)^{m_0\times m_k},$$

розглядаючи Z^j як $m_{j-1}\times m_j$ матрицю над $\mathcal{N}_j^{s_{j-1}\times s_j}$ і застосовуючи стандартні правила матричного множення, тобто

$$(Z^1 {}_{s_0,s_2}\!\odot_{s_1} \cdots {}_{s_{k-2},s_k}\!\odot_{s_{k-1}} Z^k)^{\alpha,\beta} = \sum_{\alpha_j=1,\dots,m_j\colon\, \alpha_0=\alpha,\alpha_k=\beta} Z^{1\alpha_0,\alpha_1} \otimes \cdots \otimes Z^{k\alpha_{k-1},\alpha_k}, \tag{3.7}$$

де $Z^j = [Z^{j\alpha,\beta}]_{\alpha=1,\dots,m_{j-1},\,\beta=1,\dots,m_j}$. Це є ітерація добутку матриць над двома модулями, що забеспечена операцією добутку у третій модуль, як у 2.3.4. У випадку двох множників з квадратними блоками (обов'язково одного розміру), ми опускаємо ліві нижні індекси, тобто ми пишемо $Z^1 \odot_s Z^2$ замість $Z^1 {}_{s,s}\!\odot_s Z^2$. Для $s = 1$ ми опускаємо правий нижній індекс, тобто ми пишемо $Z^1 {}_{s_0,s_2}\!\odot Z^2$ замість $Z^1 {}_{s_0,s_2}\!\odot_1 Z^2$, і ми пишемо $Z^1 \odot \cdots \odot Z^k$ замість $Z^1 \odot_1 \cdots \odot_1 Z^k$; дивись, наприклад [**118**, с. 86] або [**117**, с. 240].

Пропозиція 3.3. *Нехай* $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)},\dots,\Omega^{(k)};\mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}})$ *і* $n_j = m_j s_j$, $j = 0,\dots,k$.

(1) *Для* $Y^j \in \Omega_{s_j}^{(j)}$, $X^j = \bigoplus_{\alpha=1}^{m_j} Y^j$, $j = 0,\dots,k$, *і для* $Z^j \in \mathcal{N}_j^{n_{j-1}\times n_j}$, $j = 1,\dots,k$,

$$f(X^0,\dots,X^k)(Z^1,\dots,Z^k) = Z^1 {}_{s_0,s_2}\!\odot_{s_1} \cdots {}_{s_{k-2},s_k}\!\odot_{s_{k-1}} Z^k f(Y^0,\dots,Y^k). \tag{3.8}$$

Тут лінійне відображення

$$f(Y^0,\dots,Y^k)\colon \mathcal{N}_1{}^{s_0\times s_1}\otimes\dots\otimes\mathcal{N}_k{}^{s_{k-1}\times s_k}\longrightarrow\mathcal{N}_0{}^{s_0\times s_k}$$

діє на матрицю $Z^1{}_{s_0,s_2}\!\odot_{s_1}\cdots{}_{s_{k-2},s_k}\!\odot_{s_{k-1}}Z^k$ *поелементно.*

(2) *Для* $Y^j\in\Omega^{(j)}_{s_j}$, $X^j=\bigoplus_{\alpha=1}^{m_j}Y^j$, $j=0,\dots,k-1$, $X^k\in\Omega^{(k)}_{n_k}$, *і для* $Z^j\in\mathcal{N}_j{}^{n_{j-1}\times n_j}$, $j=1,\dots,k$,

$$f(X^0,\dots,X^k)(Z^1,\dots,Z^k)=Z^1{}_{s_0,s_2}\!\odot_{s_1}\cdots{}_{s_{k-2},s_k}\!\odot_{s_{k-1}}Z^k f(Y^0,\dots,Y^{k-1},X^k). \tag{3.9}$$

Тут лінійне відображення

$$\begin{aligned}f(Y^0,\dots,Y^{k-1},X^k)\colon{}&\mathcal{N}_1{}^{s_0\times s_1}\otimes\dots\otimes(\mathcal{N}_{k-1})^{s_{k-2}\times s_{k-1}}\otimes\mathcal{N}_k{}^{s_{k-1}\times m_k s_k}\\ &\cong\left(\mathcal{N}_1{}^{s_0\times s_1}\otimes\dots\otimes\mathcal{N}_k{}^{s_{k-1}\times s_k}\right)^{1\times m_k}\longrightarrow\mathcal{N}_0{}^{s_0\times m_k s_k}\cong(\mathcal{N}_0{}^{s_0\times s_k})^{1\times m_k}\end{aligned}$$

діє на рядки матриці $Z^1{}_{s_0,s_2}\!\odot_{s_1}\cdots{}_{s_{k-2},s_k}\!\odot_{s_{k-1}}Z^k$*; тобто* $f(Y^0,\dots,Y^{k-1},X^k)$ *-* $m_k\times m_k$ *матриця лінійних відображень*

$$\mathcal{N}_1{}^{s_0\times s_1}\otimes\dots\otimes\mathcal{N}_k{}^{s_{k-1}\times s_k}\longrightarrow\mathcal{N}_0{}^{s_0\times s_k}$$

що множить матрицю $Z^1{}_{s_0,s_2}\!\odot_{s_1}\cdots{}_{s_{k-2},s_k}\!\odot_{s_{k-1}}Z^k$ *справа.*

Доведення. Випливає безпосередньо з (3.5)–(3.6). □

Зауваження 3.4. Ми зауважимо, що існує природне відображення

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_0{}^{n_0\times n_0}\otimes\mathcal{N}_1^{*n_1\times n_1}\otimes\dots\otimes\mathcal{N}_k^{*n_k\times n_k}&\\ \longrightarrow\hom_{\mathcal{R}}\left(\mathcal{N}_1{}^{n_0\times n_1}\otimes\dots\otimes\mathcal{N}_k{}^{n_{k-1}\times n_k},\mathcal{N}_0{}^{n_0\times n_k}\right)&\end{aligned} \tag{3.10}$$

для додатного цілого k, визначене на елементарних тензорах $Y^0\otimes Y^1\otimes\dots\otimes Y^k$ як

$$(Z^1,\dots,Z^k)\longmapsto Y^0(Z^1Y^1)\cdots(Z^kY^k), \tag{3.11}$$

з $Z^jY^j\in\mathcal{R}^{n_{j-1}\times n_j}$ для $Z^j\in\mathcal{N}_j{}^{n_{j-1}\times n_j}$, $j=1,\dots,k$. Якщо модулі $\mathcal{N}_1,\dots,\mathcal{N}_k$ вільні і скінченного рангу над $\mathcal{R}$, і модуль $\mathcal{N}_0$ вільний (зокрема, коли $\mathcal{R}$ - поле і $\mathcal{N}_1,\dots,\mathcal{N}_k$ - скінченновимірні векторні простори), природне відображення (3.10)–(3.11) є, як легко бачити, ізоморфізмом.

Зауваження 3.5. У випадку, коли природне відображення (3.10)–(3.11) - ізоморфізм, ми можемо розглядати н.к. функцію порядку k як функцію f на $\Omega^{(0)}\times\dots\times\Omega^{(k)}$ з

$$f(\Omega^{(0)}_{n_0},\dots,\Omega^{(k)}_{n_k})\subseteq\mathcal{N}_0{}^{n_0\times n_0}\otimes\mathcal{N}_1^{*n_1\times n_1}\otimes\dots\otimes\mathcal{N}_k^{*n_k\times n_k}. \tag{3.12}$$

Прямі суми і подібності на ${\mathcal{N}_0}^{n_0\times n_0}, {\mathcal{N}_1}^{*n_1\times n_1}, \dots, {\mathcal{N}_k}^{*n_k\times n_k}$ індукують i-і прямі суми і подібності на ${\mathcal{N}_0}^{n_0\times n_0}\otimes {\mathcal{N}_1}^{*n_1\times n_1}\otimes\dots\otimes {\mathcal{N}_k}^{*n_k\times n_k}$ для відповідних $i=0,\dots,k$. З цією інтерпретацією, умови (1X^0)–(1X^k) і (2X^0)–(2X^k) означають, що прямі суми і подібності за кожним аргументом f відбиваються на прямих сумах і подібностях у відповідному множнику у значенні f. Це пояснює вигляд умов відповідних прямих сум і подібностей у означенні н.к. функцій порядку k, а також поєднує випадки $k=0$ і $k>0$.

Зауваження 3.6. Існує також природне відображення

$$\begin{aligned}(3.13)\quad &\mathcal{T}^k(\Omega^{(0)},\dots,\Omega^{(k)};\mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}})\\ &\qquad\otimes\mathcal{T}^\ell(\Omega^{(k+1)},\dots,\Omega^{(k+\ell+1)};\mathcal{L}^*_{0,\mathrm{nc}},\mathcal{L}_{1,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{L}_{\ell,\mathrm{nc}})\\ &\qquad\longrightarrow\mathcal{T}^{k+\ell+1}(\Omega^{(0)},\dots,\Omega^{(k+\ell+1)};\mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}},\mathcal{L}_{0,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{L}_{\ell,\mathrm{nc}})\end{aligned}$$

визначене на елементарних тензорах як $f\otimes g\longmapsto h$, де

$$(3.14)\qquad h(X^0,\dots,X^k,U^0,\dots,U^\ell)=f(X^0,\dots,X^k)\otimes g(U^0,\dots,U^\ell),$$

інтерпретуючи значення н.к. функцій вищого порядку як елементи тензорних добутків (дивись зауваження 3.5), або

$$\begin{aligned}(3.15)\quad &h(X^0,\dots,X^k,U^0,\dots,U^\ell)(Z^1,\dots,Z^k,W^0,W^1,\dots,W^\ell)\\ &\qquad=f(X^0,\dots,X^k)(Z^1,\dots,Z^k)\Big(W^0g(U^0,\dots,U^\ell)(W^1,\dots,W^\ell)\Big),\end{aligned}$$

інтерпретуючи значення н.к. функцій вищого порядку як мультілінійні відображення. Тут $X^0\in\Omega^{(0)}_{n_0},\dots,X^k\in\Omega^{(k)}_{n_k}$, $U^0\in\Omega^{(k+1)}_{m_0},\dots,U^\ell\in\Omega^{(k+\ell+1)}_{m_\ell}$, $Z^1\in{\mathcal{N}_1}^{n_0\times n_1}$, $\dots$, $Z^k\in{\mathcal{N}_k}^{n_{k-1}\times n_k}$, $W^0\in{\mathcal{L}_0}^{n_k\times m_0}$, $W^1\in{\mathcal{L}_1}^{m_0\times m_1}$, $\dots$, $W^\ell\in{\mathcal{L}_\ell}^{m_{\ell-1}\times m_\ell}$.

Ітеруючи цю конструкцію, ми отримаємо природне відображення

$$\begin{aligned}(3.16)\quad &\mathcal{T}^0(\Omega^{(0)};\mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}})\otimes\mathcal{T}^0(\Omega^{(1)};\mathcal{N}^*_{1,\mathrm{nc}})\otimes\dots\otimes\mathcal{T}^0(\Omega^{(k)};\mathcal{N}^*_{k,\mathrm{nc}})\\ &\qquad\longrightarrow\mathcal{T}^k(\Omega^{(0)},\dots,\Omega^{(k)};\mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}}),\end{aligned}$$

визначене на елементарних тензорах як $f^0\otimes\dots\otimes f^k\longmapsto h$, де

$$(3.17)\qquad h(X^0,X^1,\dots,X^k)=f^0(X^0)\otimes f^1(X^1)\otimes\dots\otimes f^k(X^k),$$

інтерпретуючи значення н.к. функцій вищого порядку як елементи тензорних добутків, або

$$(3.18)\qquad h(X^0,X^1,\dots,X^k)(Z^1,\dots,Z^k)=f^0(X^0)\Big(Z^1f^1(X^1)\Big)\cdots\Big(Z^kf^k(X^k)\Big),$$

інтерпретуючи значення н.к. функцій вищого порядку як мультілінійні відображення. Тут $X^0\in\Omega^{(0)}_{n_0},\dots,X^k\in\Omega^{(k)}_{n_k}$, $Z^1\in{\mathcal{N}_1}^{n_0\times n_1},\dots,Z^k\in{\mathcal{N}_k}^{n_{k-1}\times n_k}$.

Ясно, що природні відображення (3.13)&(3.14) (або (3.13)&(3.15)) і, зокрема, (3.16)&(3.17) (або (3.16)&(3.18)) - вкладення; ми будемо іноді зловживати позначеннями у написах $h=f\otimes g$ і $h=f^0\otimes\dots\otimes f^k$ для (3.14) (або (3.15)) і (3.17) (або (3.18)), відповідно.

3.2. Н.к. різницево-диференціальні оператори вищого порядку

Пропозиція 2.15 каже в точності, що для $f \in \mathcal{T}^0$ ми маємо $\Delta_R f \in \mathcal{T}^1$. Ми розширимо Δ_R до оператора з $\mathcal{T}^k$ у $\mathcal{T}^{k+1}$ для всіх k. Подібно до випадку $k = 0$, це буде зроблене обчисленням н.к. функції порядку k (> 0) на наборі $(k+1)$ квадратних матриць з одним з аргументів блочним верхньо-трикутним. Ми починаємо з наступного аналогу пропозиції 2.2. Буде показано пізніше, з використаннями інтерпретації значень н.к. функцій вищого порядку як тензорних добутків, що це є справді природний аналог.

Пропозиція 3.7. *Нехай $\mathcal{M}_j$, $\mathcal{N}_j$ - модулі, і нехай $\Omega^{(j)} \subseteq \mathcal{M}_{j,\mathrm{nc}}$ - н.к. множина, $j = 0, \dots, k$. Нехай $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \dots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}})$. Нехай $X^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}$, $\dots$, $X^{k-1} \in \Omega^{(k-1)}_{n_{k-1}}$, $X^{k\prime} \in \Omega^{(k)}_{n'_k}$, $X^{k\prime\prime} \in \Omega^{(k)}_{n''_k}$, $Z^1 \in \mathcal{N}_1{}^{n_0 \times n_1}$, $\dots$, $Z^{k-1} \in (\mathcal{N}_{k-1})^{n_{k-2} \times n_{k-1}}$, $Z^{k\prime} \in \mathcal{N}_k{}^{n_{k-1} \times n'_k}$, $Z^{k\prime\prime} \in \mathcal{N}_k{}^{n_{k-1} \times n''_k}$. Нехай $Z \in \mathcal{M}_k{}^{n'_k \times n''_k}$ - таке, що $\begin{bmatrix} X^{k\prime} & Z \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix} \in \Omega^{(k)}_{n'_k + n''_k}$. Тоді*

$$
\begin{aligned}
(3.19)\quad & f\left(X^0, \dots, X^{k-1}, \begin{bmatrix} X^{k\prime} & Z \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix}\right)(Z^1, \dots, Z^{k-1}, \mathrm{row}\,[Z^{k\prime}, Z^{k\prime\prime}]) \\
&= \mathrm{row}\,\Big[f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k\prime}), \\
&\qquad \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime}, X^{k\prime\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k\prime}, Z) \\
&\qquad + f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k\prime\prime})\Big].
\end{aligned}
$$

Тут $\Delta_R f = (X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime}, X^{k\prime\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k\prime}, Z)$ визначається однозначно за (3.19), не залежить від $Z^{k\prime\prime}$ і має наступну властивість. Якщо $r \in \mathcal{R}$ таке, що $\begin{bmatrix} X^{k\prime} & rZ \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix} \in \Omega^{(k)}_{n'_k + n''_k}$, то

$$
\begin{aligned}
(3.20)\quad & \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime}, X^{k\prime\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k\prime}, rZ) \\
&\qquad = r\Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime}, X^{k\prime\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k\prime}, Z).
\end{aligned}
$$

Для $k = 1$, матриці $Z^1, \dots, Z^{k-1}$ не з'являються у (3.19) і (3.20).

Доведення. Позначимо

$$
f\left(X^0, \dots, X^{k-1}, \begin{bmatrix} X^{k\prime} & Z \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix}\right)\left(Z^1, \dots, Z^{k-1}, \mathrm{row}\left[Z^{k\prime}, Z^{k\prime\prime}\right]\right) =: \mathrm{row}[A, B],
$$

де $A \in \mathcal{N}_0{}^{n_0 \times n'_k}$, $B \in \mathcal{N}_0{}^{n_0 \times n''_k}$. Ми маємо

$$
\begin{bmatrix} X^{k\prime} & Z \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n'_k} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n'_k} \\ 0 \end{bmatrix} X^{k\prime}.
$$

За (3X^k), $A = f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k\prime})$. Ми маємо також

$$X^{k\prime\prime} \begin{bmatrix} 0 & I_{n''_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n''_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{k\prime} & Z \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix}.$$

За (3X^k) і адитивністю $f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^k)$ як функції від Z^k,

$$\begin{aligned} &\operatorname{row}[0, f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k\prime\prime})] \\ &\qquad = f\left(X^0, \dots, X^{k-1}, \begin{bmatrix} X^{k\prime} & Z \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix}\right)(Z^1, \dots, Z^{k-1}, \operatorname{row}[0, Z^{k\prime\prime}]) \\ &\qquad = \operatorname{row}[A, B] - f\left(X^0, \dots, X^{k-1}, \begin{bmatrix} X^{k\prime} & Z \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix}\right)(Z^1, \dots, Z^{k-1}, \operatorname{row}[Z^{k\prime}, 0]), \end{aligned}$$

що тягне за собою

$$\begin{aligned} B = f\left(X^0, \dots, X^{k-1}, \begin{bmatrix} X^{k\prime} & Z \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix}\right)(Z^1, \dots, Z^{k-1}, \operatorname{row}[Z^{k\prime}, 0]) \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n''_k} \end{bmatrix} \\ + f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k\prime\prime}). \end{aligned}$$

Отже, ми отримаємо (3.19) з

$$\begin{aligned} (3.21)\quad &\Delta_R f\left(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime}, X^{k\prime\prime}\right)\left(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k\prime}, Z\right) \\ &\qquad = f\left(X^0, \dots, X^{k-1}, \begin{bmatrix} X^{k\prime} & Z \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix}\right)\left(Z^1, \dots, Z^{k-1}, \operatorname{row}\left[Z^{k\prime}, 0\right]\right) \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n''_k} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ми спостерігаємо, що (3.21) тягне за собою, що для будь-якого $r \in \mathcal{R}$ ми маємо

$$\begin{aligned} (3.22)\quad &\Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime}, X^{k\prime\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, rZ^{k\prime}, Z) \\ &\qquad = r\Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime}, X^{k\prime\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k\prime}, Z). \end{aligned}$$

Далі, для $r \in \mathcal{R}$ такого, що $\begin{bmatrix} X^{k\prime} & rZ \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix} \in \Omega^{(k)}_{n'_k + n''_k}$, ми маємо

$$\begin{bmatrix} X^{k\prime} & rZ \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} rI_{n'_k} & 0 \\ 0 & I_{n''_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rI_{n'_k} & 0 \\ 0 & I_{n''_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{k\prime} & Z \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix}.$$

За (3X^k),

$$\begin{aligned} &f\left(X^0, \dots, X^{k-1}, \begin{bmatrix} X^{k\prime} & rZ \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix}\right)(Z^1, \dots, Z^{k-1}, \operatorname{row}[Z^{k\prime}, Z^{k\prime\prime}]) \begin{bmatrix} rI_{n'_k} & 0 \\ 0 & I_{n''_k} \end{bmatrix} \\ &\qquad = f\left(X^0, \dots, X^{k-1}, \begin{bmatrix} X^{k\prime} & Z \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix}\right)(Z^1, \dots, Z^{k-1}, \operatorname{row}[rZ^{k\prime}, Z^{k\prime\prime}]). \end{aligned}$$

Множачи обидві частини праворуч на $\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n''_k} \end{bmatrix}$ і віднімаючи

$$f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k''})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k''}),$$

ми отримаємо в силу (3.19), що

$$\begin{aligned} &\Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k'}, X^{k''})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k'}, rZ) \\ &\qquad = \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k'}, X^{k''}) = (Z^1, \dots, Z^{k-1}, rZ^{k'}, Z). \end{aligned}$$

Тоді, застосовуючи (3.22), ми отримаємо (3.20). □

Припустимо зараз, що н.к. множина $\Omega^{(k)} \subseteq \mathcal{M}_{k,\mathrm{nc}}$ - допустима справа, і нехай

$$f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \dots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}}).$$

Тоді для кожних $X^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}$, …, $X^{k-1} \in \Omega^{(k-1)}_{n_{k-1}}$, $X^{k'} \in \Omega^{(k)}_{n'_k}$, $X^{k''} \in \Omega^{(k)}_{n''_k}$, $Z^1 \in \mathcal{N}_1{}^{n_0 \times n_1}$, …, $Z^{k-1} \in (\mathcal{N}_{k-1})^{n_{k-2} \times n_{k-1}}$, $Z^{k'} \in \mathcal{N}_k{}^{n_{k-1} \times n'_k}$, $Z \in \mathcal{M}_k{}^{n'_k \times n''_k}$, і для оборотного $r \in \mathcal{R}$ такого, що $\begin{bmatrix} X^{k'} & rZ \\ 0 & X^{k''} \end{bmatrix} \in \Omega^{(k)}_{n'_k + n''_k}$, ми визначаємо спочатку

$$\Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k'}, X^{k''})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k'}, rZ)$$

як (3.19), з Z заміненим на rZ (для довільного вибору $Z^{k''} \in \mathcal{N}_k{}^{n_{k-1} \times n''_k}$), і тоді визначаємо

$$\begin{aligned} (3.23)\quad &\Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k'}, X^{k''})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k'}, Z) \\ &\qquad = r^{-1} \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k'}, X^{k''})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k'}, rZ). \end{aligned}$$

За пропозицією 3.7, права сторона (3.23) не залежить від r, отже ліва сторона визначається однозначно. Використовуючи пропозицію 10.5, ми можемо встановити версію вищого порядку для (2.12),

$$\begin{aligned} (3.24)\quad &\Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k'}, X^{k''})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k'}, Z) \\ &\qquad = \Delta_R \widetilde{f}(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k'}, X^{k''})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k'}, Z). \end{aligned}$$

Ми маємо наступний аналог пропозиції 2.4, з таким самим доведенням.

Пропозиція 3.8. *Нехай* $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \dots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}})$, *з* $\Omega^{(k)} \subseteq \mathcal{M}_{k,\mathrm{nc}}$ *- допустимою справа н.к. множиною. Відображення*

$$Z \longmapsto \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k'}, X^{k''})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k'}, Z)$$

є однорідним, як оператор з $\mathcal{M}_k{}^{n'_k \times n''_k}$ *у* $\mathcal{N}_0{}^{n_0 \times n''_k}$, *тобто* (3.20) *виконується для кожних* $X^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}$, …, $X^{k-1} \in \Omega^{(k-1)}_{n_{k-1}}$, $X^{k'} \in \Omega^{(k)}_{n'_k}$, $X^{k''} \in \Omega^{(k)}_{n''_k}$, $Z^1 \in \mathcal{N}_1{}^{n_0 \times n_1}$, …, $Z^{k-1} \in (\mathcal{N}_{k-1})^{n_{k-2} \times n_{k-1}}$, $Z^{k'} \in \mathcal{N}_k{}^{n_{k-1} \times n'_k}$, $Z \in \mathcal{M}_k{}^{n'_k \times n''_k}$ *і кожного* $r \in \mathcal{R}$.

Ми зараз встановлюємо аналог пропозиції 2.6.

Пропозиція 3.9. *Нехай* $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \dots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}})$, *з* $\Omega^{(k)} \subseteq \mathcal{M}_{k,\mathrm{nc}}$ *- допустимою справа н.к. множиною. Відображення*

$$Z \longmapsto \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime}, X^{k\prime\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k\prime}, Z)$$

- адитивне як оператор з ${\mathcal{M}_k}^{n'_k \times n''_k}$ *у* ${\mathcal{N}_0}^{n_0 \times n''_k}$, *тобто*

$$\begin{aligned}(3.25)\quad \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime}, X^{k\prime\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k\prime}, Z_I + Z_{II}) \\ = \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime}, X^{k\prime\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k\prime}, Z_I) \\ + \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime}, X^{k\prime\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k\prime}, Z_{II})\end{aligned}$$

для кожних $X^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}$, $\dots$, $X^{k-1} \in \Omega^{(k-1)}_{n_{k-1}}$, $X^{k\prime} \in \Omega^{(k)}_{n'_k}$, $X^{k\prime\prime} \in \Omega^{(k)}_{n''_k}$, $Z^1 \in {\mathcal{N}_1}^{n_0 \times n_1}$, $\dots$, $Z^{k-1} \in (\mathcal{N}_{k-1})^{n_{k-2} \times n_{k-1}}$, $Z^{k\prime} \in {\mathcal{N}_k}^{n_{k-1} \times n'_k}$ *і* $Z_I, Z_{II} \in {\mathcal{M}_k}^{n'_k \times n''_k}$.

Доведення. Нехай $X^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}$, $\dots$, $X^{k-1} \in \Omega^{(k-1)}_{n_{k-1}}$, $X^{k\prime} \in \Omega^{(k)}_{n'_k}$, $X^{k\prime\prime} \in \Omega^{(k)}_{n''_k}$, $Z^1 \in {\mathcal{N}_1}^{n_0 \times n_1}$, $\dots$, $Z^{k-1} \in (\mathcal{N}_{k-1})^{n_{k-2} \times n_{k-1}}$, $Z^{k\prime} \in {\mathcal{N}_k}^{n_{k-1} \times n'_k}$ і $Z_I, Z_{II} \in {\mathcal{M}_k}^{n'_k \times n''_k}$ - довільні. За (3.24), ми можемо припустити, без втрати загальності, що н.к. множина $\Omega^{(k)}$ є подібностно інваріантною, тобто $\widetilde{\Omega}^{(k)} = \Omega^{(k)}$; дивись зауваження 2.5 і розділ 10. Тоді за пропозицією 10.2,

$$\begin{bmatrix} X^{k\prime} & Z_I \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix} \in \Omega^{(k)}_{n'_k + n''_k}, \quad \begin{bmatrix} X^{k\prime} & Z_{II} \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix} \in \Omega^{(k)}_{n'_k + n''_k}, \quad \begin{bmatrix} X^{k\prime} & (Z_I + Z_{II}) \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix} \in \Omega^{(k)}_{n'_k + n''_k}$$

і

$$\begin{bmatrix} X^{k\prime} & 0 & Z_I \\ 0 & X^{k\prime} & Z_{II} \\ 0 & 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix} \in \Omega^{(k)}_{2n'_k + n''_k}$$

(для останнього, ми використовуємо факт, що якщо $X^{k\prime} \in \Omega^{(k)}_{n'_k}$, то $\begin{bmatrix} X^{k\prime} & 0 \\ 0 & X^{k\prime} \end{bmatrix} \in \Omega^{(k)}_{2n'_k}$). Ми маємо

$$\begin{bmatrix} X^{k\prime} & Z_I \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n'_k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n''_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n'_k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n''_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{k\prime} & 0 & Z_I \\ 0 & X^{k\prime} & Z_{II} \\ 0 & 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix}.$$

За (3X^k),

$$\begin{aligned} f\left(X^0, \dots, X^{k-1}, \begin{bmatrix} X^{k\prime} & Z_I \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix}\right)(Z^1, \dots, Z^{k-1}, \mathrm{row}\,[Z^{k\prime}, 0]) \begin{bmatrix} I_{n'_k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n''_k} \end{bmatrix} \\ = f\left(X^0, \dots, X^{k-1}, \begin{bmatrix} X^{k\prime} & 0 & Z_I \\ 0 & X^{k\prime} & Z_{II} \\ 0 & 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix}\right)(Z^1, \dots, Z^{k-1}, \mathrm{row}\,[Z^{k\prime}, 0, 0]). \end{aligned}$$

Помноживши обидві частини на $\mathrm{col}[0, 0, I_{n''_k}]$ і маючи на увазі (3.21), ми отримаємо

$$\begin{aligned}(3.26)\quad & \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime}, X^{k\prime\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k\prime}, Z_I) \\ & = \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime} \oplus X^{k\prime}, X^{k\prime\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, \mathrm{row}\,[Z^{k\prime}, 0], \mathrm{col}\,[Z_I, Z_{II}]).\end{aligned}$$

Подібним чином, використовуючи співвідношення переплетення

$$\begin{bmatrix} X^{k\prime} & Z_{II} \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_{n'_k} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n''_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n'_k} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n''_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{k\prime} & 0 & Z_I \\ 0 & X^{k\prime} & Z_{II} \\ 0 & 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix},$$

ми отримаємо

$$\begin{aligned}(3.27)\quad & \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime}, X^{k\prime\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k\prime}, Z_{II}) \\ & = \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime} \oplus X^{k\prime}, X^{k\prime\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, \mathrm{row}\,[0, Z^{k\prime}], \mathrm{col}\,[Z_I, Z_{II}]).\end{aligned}$$

Далі, використовуючи співвідношення переплетення

$$\begin{bmatrix} X^{k\prime} & Z_I + Z_{II} \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n'_k} & I_{n'_k} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n''_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n'_k} & I_{n'_k} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n''_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{k\prime} & 0 & Z_I \\ 0 & X^{k\prime} & Z_{II} \\ 0 & 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix},$$

ми отримаємо

$$\begin{aligned}(3.28)\quad & \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime}, X^{k\prime\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k\prime}, Z_I + Z_{II}) \\ & = \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime} \oplus X^{k\prime}, X^{k\prime\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, \mathrm{row}\,[Z^{k\prime}, Z^{k\prime}], \mathrm{col}\,[Z_I, Z_{II}]).\end{aligned}$$

Ми спостерігаємо, що (3.21) тягне за собою адитивність

$$\Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime}, X^{k\prime\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k\prime}, Z)$$

як функції від $Z^{k\prime}$. Отже, сума у правих частинах (3.26) і (3.27) дорівнює правій частині у (3.28), і (3.25) випливає. □

Теорема 3.10. *Нехай $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \dots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}})$, де $\Omega^{(k)} \subseteq \mathcal{M}_{k,\mathrm{nc}}$ - допустима справа н.к. множина. Для кожних $X^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}$, …, $X^k \in \Omega^{(k)}_{n_k}$, $X^{k+1} \in \Omega^{(k)}_{n_{k+1}}$, відображення*

$$(Z^1, \dots, Z^{k+1}) \longmapsto \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k+1})(Z^1, \dots, Z^{k+1})$$

з ${\mathcal{N}_1}^{n_0 \times n_1} \times \dots \times {\mathcal{N}_k}^{n_{k-1} \times n_k} \times {\mathcal{M}_k}^{n_k \times n_{k+1}}$ у ${\mathcal{N}_0}^{n_0 \times n_{k+1}}$ є $(k+1)$-лінійним над $\mathcal{R}$. Більше того, $\Delta_R f \in \mathcal{T}^{k+1}(\Omega^{(0)}, \dots, \Omega^{(k)}, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}}, \mathcal{M}_{k,\mathrm{nc}})$.

Доведення. Факт, що $\Delta_R f\left(X^0, \dots, X^{k+1}\right)\left(Z^1, \dots, Z^{k+1}\right)$ - лінійне як функція від Z^j, для кожного $j = 1, \dots, k$, випливає з (3.21). Лінійність у Z^{k+1} випливає з пропозицій 3.8 і 3.9. Ми також спостерігаємо, що (3.21) тягне за собою,

що функція $\Delta_R f\left(X^0,\dots,X^{k+1}\right)\left(Z^1,\dots,Z^{k+1}\right)$ є інваріантною щодо прямих сум і подібностей у змінних $X^0,\dots,X^{k-1}$. Таким чином, залишається тільки показати, що функція $\Delta_R f\left(X^0,\dots,X^{k+1}\right)\left(Z^1,\dots,Z^{k+1}\right)$ є інваріантною щодо прямих сум і подібностей, або еквівалентно (за пропозицією 3.1), інваріантною щодо переплетень, у змінних X^k і X^{k+1}.

Нехай $X^0\in\Omega^{(0)}_{n_0}$, $\dots$, $X^k\in\Omega^{(k)}_{n_k}$, $X^{k+1}\in\Omega^{(k)}_{n_{k+1}}$, $\widetilde{X}^k\in\Omega^{(k)}_{\widetilde{n}_k}$, $\widetilde{X}^{k+1}\in\Omega^{(k)}_{\widetilde{n}_{k+1}}$, $Z^1\in\mathcal{N}_1{}^{n_0\times n_1}$, $\dots$, $Z^{k-1}\in(\mathcal{N}_{k-1})^{n_{k-2}\times n_{k-1}}$, $Z^k\in\mathcal{N}_k{}^{n_{k-1}\times\widetilde{n}_k}$ і $Z^{k+1}\in\mathcal{M}_k{}^{n_k\times\widetilde{n}_{k+1}}$ - довільні, і нехай $T_k\in\mathcal{R}^{\widetilde{n}_k\times n_k}$ і $T_{k+1}\in\mathcal{R}^{\widetilde{n}_{k+1}\times n_{k+1}}$ задовольняють тотожності $T_kX^k=\widetilde{X}^kT_k$ і $T_{k+1}X^{k+1}=\widetilde{X}^{k+1}T_{k+1}$. За (3.24), ми можемо припустити, без втрати загальності, що н.к. множина $\Omega^{(k)}$ є подібностно інваріантною, тобто $\widetilde{\Omega}^{(k)}=\Omega^{(k)}$; дивись зауваження 2.5 і розділ 10. Тоді за пропозицією 10.2,

$$\begin{bmatrix}X^k & Z^{k+1}T_{k+1}\\ 0 & X^{k+1}\end{bmatrix}\in\Omega^{(k)}_{n_k+n_{k+1}},\quad \begin{bmatrix}\widetilde{X}^{k+1} & T_kZ^{k+1}\\ 0 & \widetilde{X}^{k+1}\end{bmatrix}\in\Omega^{(k)}_{\widetilde{n}_k+\widetilde{n}_{k+1}}.$$

Ми маємо

$$\begin{bmatrix}T_k & 0\\ 0 & T_{k+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X^k & Z^{k+1}T_{k+1}\\ 0 & X^{k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\widetilde{X}^{k+1} & T_kZ^{k+1}\\ 0 & \widetilde{X}^{k+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_k & 0\\ 0 & T_{k+1}\end{bmatrix}.$$

Використовуючи (3.21) і застосовуючи (3X^k) до f, ми отримаємо

$$\begin{aligned}
&\Delta_R f(X^0,\dots,X^{k-1},\widetilde{X}^k,\widetilde{X}^{k+1})(Z^1,\dots,Z^k,T_kZ^{k+1})T_{k+1}\\
&\quad= f\left(X^0,\dots,X^{k-1},\begin{bmatrix}\widetilde{X}^k & T_kZ^{k+1}\\ 0 & \widetilde{X}^{k+1}\end{bmatrix}\right)(Z^1,\dots,Z^{k-1},\operatorname{row}[Z^k,0])\begin{bmatrix}0\\ I_{n_{k+1}}\end{bmatrix}T_{k+1}\\
&\quad= f\left(X^0,\dots,X^{k-1},\begin{bmatrix}\widetilde{X}^k & T_kZ^{k+1}\\ 0 & \widetilde{X}^{k+1}\end{bmatrix}\right)(Z^1,\dots,Z^{k-1},\operatorname{row}[Z^k,0])\begin{bmatrix}T_k & 0\\ 0 & T_{k+1}\end{bmatrix}\\
&\qquad\qquad\times\begin{bmatrix}0\\ I_{n_{k+1}}\end{bmatrix}\\
&\quad= f\left(X^0,\dots,X^{k-1},\begin{bmatrix}X^k & Z^{k+1}T_{k+1}\\ 0 & X^{k+1}\end{bmatrix}\right)\left(Z^1,\dots,Z^{k-1},\operatorname{row}[Z^k,0]\begin{bmatrix}T_k & 0\\ 0 & T_{k+1}\end{bmatrix}\right)\\
&\qquad\qquad\times\begin{bmatrix}0\\ I_{n_{k+1}}\end{bmatrix}\\
&\qquad\qquad= f(X^0,\dots,X^{k+1})(Z^1,\dots,Z^{k-1},Z^kT_k,Z^{k+1}T_{k+1}),
\end{aligned}$$

що є спеціальним випадком (3X^k) застостованим до $\Delta_R f$. □

Отже, ми маємо правий н.к. різницево-диференціальні оператор

$$\begin{aligned}
\Delta_R\colon\mathcal{T}^k(\Omega^{(0)},\dots,\Omega^{(k)};\mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}})&\\
\longrightarrow\mathcal{T}^{k+1}(\Omega^{(0)},\dots,\Omega^{(k)},\Omega^{(k)};\mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}},\mathcal{M}_{k,\mathrm{nc}}),&
\end{aligned}$$

для $k = 0, 1, \ldots$. Ітеруючи цей оператор ℓ разів, ми отримаємо правий н.к. різницево-диференціальний оператор *ℓ-го порядку*

$$\begin{aligned}\Delta_R^\ell \colon \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}}) \\ \longrightarrow \mathcal{T}^{k+\ell}(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}, \underbrace{\Omega^{(k)}, \ldots, \Omega^{(k)}}_{\ell \text{ разів}}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}}, \underbrace{\mathcal{M}_{k,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{M}_{k,\mathrm{nc}}}_{\ell \text{ разів}}),\end{aligned}$$

для $k = 0, 1, \ldots$. Відповідно до нашого означення, $\Delta_R^\ell f$ обчислюється ітеративно обчисленням н.к. функцій зростаючих порядків на 2×2 блочних верхньотрикутних матрицях на кожному кроці. Виявляється, що $\Delta_R^\ell f$ може також бути обчислена за один крок обчисленням f на $(\ell + 1) \times (\ell + 1)$ блочних верхньодвохдіагональних матрицях. Ми формулюємо результат окремо для випадку $k = 0$ і для випадку $k > 0$.

Теорема 3.11. *Нехай $f \in \mathcal{T}^0(\Omega; \mathcal{N}_{\mathrm{nc}})$, з $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ допустимою справа н.к. множиною. Для кожних $X^0 \in \Omega_{n_0}$, $\ldots$, $X^\ell \in \Omega_{n_\ell}$, $Z^1 \in \mathcal{M}^{n_0 \times n_1}$, $\ldots$, $Z^\ell \in \mathcal{M}^{n_{\ell-1} \times n_\ell}$ таких, що*

$$\begin{bmatrix} X^0 & Z^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X^1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & X^{\ell-1} & Z^\ell \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & X^\ell \end{bmatrix} \in \Omega_{n_0 + \cdots + n_\ell},$$

ми маємо

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} X^0 & Z^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X^1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & X^{\ell-1} & Z^\ell \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & X^\ell \end{bmatrix}\right) \\ = \begin{bmatrix} f(X^0) & \Delta_R f(X^0, X^1)(Z^1) & \cdots & \cdots & \Delta_R^\ell f(X^0, \ldots, X^\ell)(Z^1, \ldots, Z^\ell) \\ 0 & f(X^1) & \ddots & & \Delta_R^{\ell-1} f(X^1, \ldots, X^\ell)(Z^2, \ldots, Z^\ell) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & f(X^{\ell-1}) & \Delta_R f(X^{\ell-1}, X^\ell)(Z^\ell) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & f(X^\ell) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Теорема 3.12. *Нехай $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}})$, де $\Omega^{(k)} \subseteq \mathcal{M}_{k,\mathrm{nc}}$ - допустима справа н.к. множина, $k > 0$. Для кожних $X^0 \in \Omega_{n_0}^{(0)}$, $\ldots$, $X^{k-1} \in \Omega_{n_{k-1}}^{(k-1)}$, $X^{k,0} \in \Omega_{n_{k,0}}^{(k)}$, $\ldots$, $X^{k,\ell} \in \Omega_{n_{k,\ell}}^{(k)}$, $Z^{k+1,1} \in {\mathcal{M}_k}^{n_{k,0} \times n_{k,1}}$, $\ldots$, $Z^{k+1,\ell} \in {\mathcal{M}_k}^{n_{k,\ell-1} \times n_{k,\ell}}$*

таких, що

$$\begin{bmatrix} X^{k,0} & Z^{k+1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X^{k,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & X^{k,\ell-1} & Z^{k+1,\ell} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & X^{k,\ell} \end{bmatrix} \in \Omega^{(k)}_{n_{k,0}+\cdots+n_{k,\ell}},$$

ми маємо

$$\begin{aligned} (3.30)\quad & f\left(X^0, \dots, X^{k-1}, \begin{bmatrix} X^{k,0} & Z^{k+1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X^{k,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & X^{k,\ell-1} & Z^{k+1,\ell} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & X^{k,\ell} \end{bmatrix} \right) \\ & \qquad (Z^1, \dots, Z^{k-1}, \operatorname{row}[Z^{k,0}, \dots, Z^{k,\ell}]) \\ & = \operatorname*{row}_{0\le j\le \ell} \Big[\sum_{i=0}^{j} \Delta_R^{j-i} f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k,i}, \dots, X^{k,j}) \\ & \qquad\qquad (Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k,i}, Z^{k+1,i+1}, \dots, Z^{k+1,j}) \Big] \end{aligned}$$

для всіх $Z^1 \in \mathcal{N}_1^{n_0\times n_1}$, …, $Z^{k-1} \in (\mathcal{N}_{k-1})^{n_{k-2}\times n_{k-1}}$, $Z^{k,0} \in \mathcal{N}_k^{n_{k-1}\times n_{k,0}}$, …, $Z^{k,\ell} \in \mathcal{N}_k^{n_{k-1}\times n_{k,\ell}}$.

Зауваження 3.13. У спеціальному випадку, коли $Z^{k,1} = 0$, …, $Z^{k,\ell} = 0$, права частина (3.30) стає

$$\begin{aligned} \operatorname{row}[\, & f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k,0})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k,0}), \\ & \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k,0}, X^{k,1})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k,0}, Z^{k+1,1}), \dots, \\ & \Delta_R^\ell f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k,0}, \dots, X^{k,\ell})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k,0}, Z^{k+1,1}, \dots, Z^{k+1,\ell})] \,. \end{aligned}$$

Для доведення теорем 3.11 і 3.12 нам буде потрібна наступна лема.

Лема 3.14. *Нехай* $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ *- подібностно інваріантна н.к. множина, тобто* $\widetilde{\Omega} = \Omega$*; дивись розділ 10. Тоді для всіх* n_0, …, n_ℓ, $X^0 \in \Omega_{n_0}$, …, $X^\ell \in \Omega_{n_\ell}$, $Z^1 \in \mathcal{M}^{n_0\times n_1}$, …, $Z^\ell \in \mathcal{M}^{n_{\ell-1}\times n_\ell}$ *ми маємо*

$$\begin{bmatrix} X^j & Z^{j+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X^{j+1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & X^{\ell-1} & Z^\ell \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & X^\ell \end{bmatrix} \in \Omega_{n_j+\cdots+n_\ell}, \quad j = 0, \dots, \ell-1.$$

Доведення. Індукцією за ℓ, використовуючи пропозицію 10.2. □

Доведення теореми 3.11. За (3.24), ми можемо припустити, без втрати загальності, що н.к. множина Ω - подібностно інваріантна, тобто $\widetilde{\Omega} = \Omega$; дивись зауваження 2.5 і розділ 10. Ми доведемо твердження індукцією за ℓ. Для $\ell = 0$, дві сторони (3.29) є тотожніми. Для $\ell = 1$, (3.29) співпадає з (2.6), с точністю до позначень. Припустимо зараз, що твердження є вірним для $\ell = m$, з деяким $m \in \mathbb{N}$. Нехай $X^0 \in \Omega_{n_0}, \ldots, X^{m+1} \in \Omega_{n_{m+1}}$, $Z^1 \in \mathcal{M}^{n_0 \times n_1}, \ldots, Z^{m+1} \in \mathcal{M}^{n_m \times n_{m+1}}$. Використовуючи гіпотезу індукції, лему 3.14 і (3.19), ми отримаємо

$$
f\left(\begin{bmatrix} X^0 & Z^1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & X^1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & X^{m-1} & Z^m & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & X^m & Z^{m+1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & X^{m+1} \end{bmatrix}\right)
$$

$$
= \begin{bmatrix} f(X^0) & \cdots & \cdots & \Delta_R^m f\Big(X^0, \ldots, X^{m-1}, \begin{bmatrix} X^m & Z^{m+1} \\ 0 & X^{m+1} \end{bmatrix}\Big)(Z^1, \ldots, Z^{m-1}, \mathrm{row}[Z^m, 0]) \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & f(X^{m-1}) & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & f\Big(\begin{bmatrix} X^m & Z^{m+1} \\ 0 & X^{m+1} \end{bmatrix}\Big) \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} f(X^0) & \Delta_R f(X^0, X^1)(Z^1) & \cdots & \Delta_R^{m+1} f\Big(X^0, \ldots, X^{m+1}\Big)(Z^1, \ldots, Z^{m+1}) \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & f(X^m) & \Delta_R f(X^m, X^{m+1})(Z^{m+1}) \\ 0 & \cdots & 0 & f(X^{m+1}) \end{bmatrix}
$$

Отже, ми маємо (3.29) для $\ell = m + 1$. $\square$

Доведення теореми 3.12. За (3.24), ми можемо припустити, без втрати загальності, що н.к. множина $\Omega^{(k)}$ - подібностно інваріантна, тобто $\widetilde{\Omega}^{(k)} = \Omega^{(k)}$; дивись зауваження 2.5 і розділ 10. Ми доведемо твердження індукцією за ℓ. Для $\ell = 0$, дві сторони (3.30) є тотожніми. Для $\ell = 1$, (3.30) співпадає з (3.19), с точністю до позначень. Припустимо зараз, що твердження є вірним для всіх $k > 0$ і $\ell = m$, з деяким $m \in \mathbb{N}$. Нехай $k > 0$ - фіксоване. Нехай $X^0 \in \Omega_{n_0}^{(0)}$, $\ldots$, $X^{k-1} \in \Omega_{n_{k-1}}^{(k-1)}$, $X^{k,0} \in \Omega_{n_{k,0}}^{(k)}, \ldots, X^{k,m+1} \in \Omega_{n_{k,m+1}}^{(k)}$, $Z^{k+1,1} \in {\mathcal{M}_k}^{n_{k,0} \times n_{k,1}}$, $\ldots$, $Z^{k+1,m+1} \in {\mathcal{M}_k}^{n_{k,m} \times n_{k,m+1}}$, $Z^1 \in {\mathcal{N}_1}^{n_0 \times n_1}, \ldots, Z^{k-1} \in (\mathcal{N}_{k-1})^{n_{k-2} \times n_{k-1}}$, $Z^{k,0} \in {\mathcal{N}_k}^{n_{k-1} \times n_{k,0}}, \ldots, Z^{k,m+1} \in {\mathcal{N}_k}^{n_{k-1} \times n_{k,m+1}}$. За лемою 3.14,

$$
\begin{bmatrix} X^{k,j} & Z^{k+1,j+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X^{k,j+1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & X^{k,m} & Z^{k+1,m+1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & X^{k,m+1} \end{bmatrix} \in \Omega_{n_{k,j} + \cdots + n_{k,m+1}}^{(k)}
$$

для кожного $j = 0, \dots, m$. За (3.19), ми маємо

$$
\begin{aligned}
&f\left(X^0, \dots, X^{k-1}, \begin{bmatrix} X^{k,0} & Z^{k+1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X^{k,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & X^{k,m} & Z^{k+1,m+1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & X^{k,m+1} \end{bmatrix}\right) \\
&\qquad\qquad (Z^1, \dots, Z^{k-1}, \operatorname{row}[Z^{k,0}, \dots, Z^{k,m+1}]) \\
&= \operatorname{row}\Big[f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k,0})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k,0}), \\
&\qquad \Delta_R f\left(X^0, \dots, X^{k-1}, \begin{bmatrix} X^{k,1} & Z^{k+1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X^{k,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & X^{k,m} & Z^{k+1,m+1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & X^{k,m+1} \end{bmatrix}\right) \\
&\qquad\qquad (Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k,0}, \operatorname{row}[Z^{k+1,1}, 0, \dots, 0]) \\
&\qquad + f\left(X^0, \dots, X^{k-1}, \begin{bmatrix} X^{k,1} & Z^{k+1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X^{k,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & X^{k,m} & Z^{k+1,m+1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & X^{k,m+1} \end{bmatrix}\right) \\
&\qquad\qquad (Z^1, \dots, Z^{k-1}, \operatorname{row}[Z^{k,1}, \dots, Z^{k,m+1}])\Big].
\end{aligned}
$$

Застосовуючи припущення індукції до правої частини останньї рівності (дивись також зауваження 3.13), ми отримаємо

$$
\begin{aligned}
&f\left(X^0, \dots, X^{k-1}, \begin{bmatrix} X^{k,0} & Z^{k+1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X^{k,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & X^{k,m} & Z^{k+1,m+1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & X^{k,m+1} \end{bmatrix}\right) \\
&\qquad\qquad (Z^1, \dots, Z^{k-1}, \operatorname{row}[Z^{k,0}, \dots, Z^{k,m+1}]) \\
&= \operatorname{row}\Big[f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k,0})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k,0}), \\
&\qquad \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k,0}, X^{k,1})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k,0}, Z^{k+1,1}) \\
&\qquad\qquad + f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k,1})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k,1}), \\
&\qquad \Delta_R^2 f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k,0}, X^{k,1}, X^{k,2})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k,0}, Z^{k+1,1}, Z^{k+1,2}) \\
&\qquad + \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k,1}, X^{k,2})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k,1}, Z^{k+1,2}) \\
&\qquad\qquad + f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k,2})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k,2}),
\end{aligned}
$$

$$\ldots,$$
$$\Delta_R^{m+1}(X^0,\ldots,X^{k-1},X^{k,0},\ldots,X^{k,m+1})(Z^1,\ldots,Z^{k-1},Z^{k,0},Z^{k+1,1},\ldots,Z^{k+1,m+1})$$
$$+\sum_{i=0}^{m}\Delta_R^{m-i}f(X^0,\ldots,X^{k-1},X^{k,i+1},\ldots,X^{k,m+1})$$
$$(Z^1,\ldots,Z^{k-1},Z^{k,i+1},Z^{k+1,i+2},\ldots,Z^{k+1,m+1})\Big]$$
$$=\operatorname*{row}_{0\le j\le m+1}\Big[\sum_{i=0}^{j}\Delta_R^{j-i}f(X^0,\ldots,X^{k-1},X^{k,i},\ldots,X^{k,j})$$
$$(Z^1,\ldots,Z^{k-1},Z^{k,i},Z^{k+1,i+1},\ldots,Z^{k+1,j})\Big].$$

Таким чином, твердження є вірним також і для $\ell=m+1$. □

Зауваження 3.15. З теореми 3.11 (і леми 3.14) випливає, що якщо Ω' - допустима справа н.к. підмножина у Ω і $X^0,\ldots,X^\ell\in\Omega'$, то $\Delta_R^\ell f(X^0,\ldots,X^\ell)$ визначається як $f|_{\Omega'}$.

Зауваження 3.16. Використовуючи інтерпретацію значень н.к. функції f порядку k як тензорного добутку (дивись зауваження 3.5), ми можемо розглядати означення $\Delta_R f$ таким чином. Нехай $n_k=n_k'+n_k''$. Тоді ми маємо 2×2 блочні матричні розкладання для $n_k\times n_k$ матриць над $\mathcal{N}_k^*$:

$$\mathcal{N}_k^{*n_k\times n_k}=\mathcal{N}_k^{*n_k'\times n_k'}\oplus\mathcal{N}_k^{*n_k'\times n_k''}\oplus\mathcal{N}_k^{*n_k''\times n_k'}\oplus\mathcal{N}_k^{*n_k''\times n_k''}.$$

Ці розкладання індукують відповідне розкладання

$$\mathcal{N}_0^{n_0\times n_0}\otimes\mathcal{N}_1^{*n_1\times n_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{N}_k^{*n_k\times n_k},$$

і

$$f\left(X^0,\ldots,X^{k-1},\begin{bmatrix}X^{k\prime} & Z\\ 0 & X^{k\prime\prime}\end{bmatrix}\right)=f(X^0,\ldots,X^{k-1},X^{k\prime})$$
$$+\Delta_R f(X^0,\ldots,X^{k-1},X^{k\prime},X^{k\prime\prime})(\cdot,\ldots,\cdot,Z)+f(X^0,\ldots,X^{k-1},X^{k\prime\prime}),$$

де

$$f(X^0,\ldots,X^{k-1},X^{k\prime})\in\mathcal{N}_0^{n_0\times n_0}\otimes\mathcal{N}_1^{*n_1\times n_1}\otimes\cdots\otimes(\mathcal{N}_{k-1}^*)^{n_{k-1}\times n_{k-1}}\otimes\mathcal{N}_k^{*n_k'\times n_k'},$$
$$\Delta_R f(X^0,\ldots,X^{k-1},X^{k\prime},X^{k\prime\prime})(\cdot,\ldots,\cdot,Z)$$
$$\in\mathcal{N}_0^{n_0\times n_0}\otimes\mathcal{N}_1^{*n_1\times n_1}\otimes\cdots\otimes(\mathcal{N}_{k-1}^*)^{n_{k-1}\times n_{k-1}}\otimes\mathcal{N}_k^{*n_k'\times n_k''},$$
$$f(X^0,\ldots,X^{k-1},X^{k\prime\prime})\in\mathcal{N}_0^{n_0\times n_0}\otimes\mathcal{N}_1^{*n_1\times n_1}\otimes\cdots\otimes(\mathcal{N}_{k-1}^*)^{n_{k-1}\times n_{k-1}}\otimes\mathcal{N}_k^{*n_k''\times n_k''}$$

(це еквівалентне до (3.19), якщо використати інтерпретацію значень f як мультілінійних відображень). Більше того, відображення

$$\mathcal{M}_k^{n_k'\times n_k''}\longrightarrow\mathcal{N}_0^{n_0\times n_0}\otimes\mathcal{N}_1^{*n_1\times n_1}\otimes\cdots\otimes(\mathcal{N}_{k-1}^*)^{n_{k-1}\times n_{k-1}}\otimes\mathcal{N}_k^{*n_k'\times n_k''},\tag{3.31}$$
$$Z\longmapsto\Delta_R f(X^0,\ldots,X^{k-1},X^{k\prime},X^{k\prime\prime})(\cdot,\ldots,\cdot,Z)\tag{3.32}$$

є лінійним (це еквівалентне до пропозицій 3.8 і 3.9). Ми маємо спеціальний випадок природного ізоморфізма (3.10)–(3.11),

$$\mathcal{N}_k^{*n_k'\times n_k'}\otimes\mathcal{M}_k^{*n_k''\times n_k''}\xrightarrow{\sim}\hom_{\mathcal{R}}\left(\mathcal{M}_k{}^{n_k'\times n_k''},\mathcal{N}_k^{*n_k'\times n_k''}\right)$$

(ми припускаємо тут, що модуль $\mathcal{M}_k$ - вільний і скінченного рангу, на додачу до наших попередніх припущень, що модулі $\mathcal{N}_1$, ..., $\mathcal{N}_k$ вільні і скінченного рангу і що модуль $\mathcal{N}_0$ є вільним). Взявши тензорний добуток з $\mathcal{N}_0{}^{n_0\times n_0}\otimes\mathcal{N}_1^{*n_1\times n_1}\otimes\cdots\otimes(\mathcal{N}_{k-1}^*)^{n_{k-1}\times n_{k-1}}$, отримаємо природний ізоморфізм

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}_0{}^{n_0\times n_0}\otimes\mathcal{N}_1^{*n_1\times n_1}\cdots\otimes(\mathcal{N}_{k-1}^*)^{n_{k-1}\times n_{k-1}}\otimes\mathcal{N}_k^{*n_k'\times n_k'}\otimes\mathcal{M}_k^{*n_k''\times n_k''}\\&\qquad\xrightarrow{\sim}\hom_{\mathcal{R}}\Big(\mathcal{M}_k{}^{n_k'\times n_k''},\mathcal{N}_0{}^{n_0\times n_0}\otimes\mathcal{N}_1^{*n_1\times n_1}\otimes\cdots\otimes(\mathcal{N}_{k-1}^*)^{n_{k-1}\times n_{k-1}}\otimes\mathcal{N}_k^{*n_k'\times n_k''}\Big).\end{aligned}$$

З (3.31)–(3.32) випливає, що

$$\begin{aligned}&\Delta_R f(X^0,\dots,X^{k-1},X^{k\prime},X^{k\prime\prime})\\&\qquad\in\mathcal{N}_0{}^{n_0\times n_0}\otimes\mathcal{N}_1^{*n_1\times n_1}\otimes\cdots\otimes(\mathcal{N}_{k-1}^*)^{n_{k-1}\times n_{k-1}}\otimes\mathcal{N}_k^{*n_k'\times n_k'}\otimes\mathcal{M}_k^{*n_k''\times n_k''},\end{aligned}$$

що є еквівалентним до першої частини теореми 3.10.

Зауваження 3.17. З означення Δ_R випливає, що його дія на тензорний добуток н.к. функцій (можливо, вищого порядку; дивись зауваження 3.6) зводиться до його дії на останній множник:

$$\Delta_R(f\otimes g)=f\otimes\Delta_R g, \tag{3.33}$$

де

$$\begin{gathered}f\in\mathcal{T}^k(\Omega^{(0)},\dots,\Omega^{(k)};\mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}}),\\ g\in\mathcal{T}^\ell(\Omega^{(k+1)},\dots,\Omega^{(k+\ell)};\mathcal{L}_{0,\mathrm{nc}}^*,\mathcal{L}_{1,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{L}_{\ell,\mathrm{nc}}),\end{gathered}$$

і

$$\Delta_R(f^0\otimes\cdots\otimes f^{k-1}\otimes f^k)=f^0\otimes\cdots\otimes f^{k-1}\otimes\Delta_R f^k, \tag{3.34}$$

де $f^0\in\mathcal{T}^0(\Omega^{(0)};\mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}})$, $f^1\in\mathcal{T}^0(\Omega^{(1)};\mathcal{N}_{1,\mathrm{nc}}^*)$, ..., $f^k\in\mathcal{T}^0(\Omega^{(k)};\mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}}^*)$.

Зауваження 3.18. Загальніше, ми можемо визначити різницево-диференціальний оператор ${}_j\Delta_R$ обчисленням н.к. функції порядку k на наборі $k+1$ квадратних матриць з верхньо-трикутним $(j+1)$-м аргументом, $j=0,\dots,k$. Отже, $\Delta_R={}_k\Delta_R$. Щоб визначити ${}_0\Delta_R f$ для $f\in\mathcal{T}^k(\Omega^{(0)},\dots,\Omega^{(k)};\mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}})$, де $\Omega^{(0)}\subseteq\mathcal{M}_{0,\mathrm{nc}}$ - допустима справа н.к. множина, нехай $X^{0\prime}\in\Omega^{(0)}_{n_0'}$, $X^{0\prime\prime}\in\Omega^{(0)}_{n_0''}$, $X^1\in\Omega^{(1)}_{n_1}$, ..., $X^k\in\Omega^{(k)}_{n_k}$, $Z^{1\prime}\in\mathcal{N}_1{}^{n_0'\times n_1}$, $Z^{1\prime\prime}\in\mathcal{N}_1{}^{n_0''\times n_1}$, $Z^2\in\mathcal{N}_2{}^{n_1\times n_2}$ ...,

$Z^k \in \mathcal{N}_k{}^{n_{k-1}\times n_k}$. Нехай $Z \in \mathcal{M}_0{}^{n_0'\times n_0''}$ - таке, що $\begin{bmatrix} X^{0\prime} & Z \\ 0 & X^{0\prime\prime} \end{bmatrix} \in \Omega^{(0)}_{n_0'+n_0''}$. Тоді, подібно до пропозиції 3.7,

$$
\begin{aligned}
(3.35)\quad & f\left(\begin{bmatrix} X^{0\prime} & Z \\ 0 & X^{0\prime\prime} \end{bmatrix}, X^1, \dots, X^k\right)(\operatorname{col}[Z^{1\prime}, Z^{1\prime\prime}], Z^2, \dots, Z^k) \\
&= \operatorname{col}\Big[f(X^{0\prime}, X^1, \dots, X^k)(Z^{1\prime}, Z^2, \dots, Z^k) \\
&\qquad + {}_0\Delta_R f(X^{0\prime}, X^{0\prime\prime}, X^1, \dots, X^k)(Z, Z^{1\prime\prime}, Z^2, \dots, Z^k), \\
&\qquad\qquad f(X^{0\prime\prime}, X^1, \dots, X^k)(Z^{1\prime\prime}, Z^2, \dots, Z^k)\Big].
\end{aligned}
$$

Тут ${}_0\Delta_R f(X^{0\prime}, X^{0\prime\prime}, X^1, \dots, X^k)(Z, Z^{1\prime\prime}, Z^2, \dots, Z^k)$ визначається однозначно, не залежить від $Z^{1\prime}$ і є однорідним за Z, коли $\begin{bmatrix} X^{0\prime} & Z \\ 0 & X^{0\prime\prime} \end{bmatrix} \in \Omega^{(0)}_{n_0'+n_0''}$. Ми можемо визначити ${}_0\Delta_R f(X^{0\prime}, X^{0\prime\prime}, X^1, \dots, X^k)(Z, Z^{1\prime\prime}, Z^2, \dots, Z^k)$ для всіх $Z \in \mathcal{M}_0{}^{n_0'\times n_0''}$ за однорідністю аналогічно до (3.23). Подібно до пропозиції 3.9, воно є лінійним у Z; подібно до теореми 3.10,

$$
{}_0\Delta_R f \in \mathcal{T}^{k+1}(\Omega^{(0)}, \Omega^{(0)}, \Omega^{(1)}, \dots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \mathcal{M}_{0,\mathrm{nc}}, \mathcal{N}_{1,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}}).
$$

Щоб визначити ${}_j\Delta_R f$, $1 \le j \le k-1$, ми припустимо зараз, що $\Omega^{(j)}$ - допустима справа н.к. множина. Нехай $X^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}$, $\dots$, $X^{j-1} \in \Omega^{(j-1)}_{n_{j-1}}$, $X^{j\prime} \in \Omega^{(j)}_{n_j'}$, $X^{j\prime\prime} \in \Omega^{(j)}_{n_j''}$, $X^{j+1} \in \Omega^{(j+1)}_{n_{j+1}}$, $\dots$, $X^k \in \Omega^{(k)}_{n_k}$, $Z^1 \in \mathcal{N}_1{}^{n_0\times n_1}$, $\dots$, $Z^{j-1} \in (\mathcal{N}_{j-1})^{n_{j-2}\times n_{j-1}}$, $Z^{j\prime} \in \mathcal{N}_j{}^{n_{j-1}\times n_j'}$, $Z^{j\prime\prime} \in \mathcal{N}_j{}^{n_{j-1}\times n_j''}$, $Z^{j+1\prime} \in (\mathcal{N}_{j+1})^{n_j'\times n_{j+1}}$, $Z^{j+1\prime\prime} \in (\mathcal{N}_{j+1})^{n_j''\times n_{j+1}}$, $Z^{j+2} \in (\mathcal{N}_{j+2})^{n_{j+1}\times n_{j+2}}$, $\dots$, $Z^k \in \mathcal{N}_k{}^{n_{k-1}\times n_k}$. Нехай $Z \in \mathcal{M}_j{}^{n_j'\times n_j''}$ - таке, що $\begin{bmatrix} X^{j\prime} & Z \\ 0 & X^{j\prime\prime} \end{bmatrix} \in \Omega^{(j)}_{n_j'+n_j''}$. Тоді, подібно до пропозиції 3.7,

$$
\begin{aligned}
(3.36)\quad & f\left(X^0, \dots, X^{j-1}, \begin{bmatrix} X^{j\prime} & Z \\ 0 & X^{j\prime\prime} \end{bmatrix}, X^{j+1}, \dots, X^k\right) \\
&\qquad (Z^1, \dots, Z^{j-1}, \operatorname{row}[Z^{j\prime}, Z^{j\prime\prime}], \operatorname{col}[Z^{j+1\prime}, Z^{j+1\prime\prime}], Z^{j+2}, \dots, Z^k) \\
&= f(X^0, \dots, X^{j-1}, X^{j\prime}, X^{j+1}, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^{j-1}, Z^{j\prime}, Z^{j+1\prime}, Z^{j+2}, \dots, Z^k) \\
&\qquad + {}_j\Delta_R f(X^0, \dots, X^{j-1}, X^{j\prime}, X^{j\prime\prime}, X^{j+1}, \dots, X^k) \\
&\qquad\qquad (Z^1, \dots, Z^{j-1}, Z^{j\prime}, Z, Z^{j+1\prime\prime}, Z^{j+2}, \dots, Z^k) \\
&\quad + f(X^0, \dots, X^{j-1}, X^{j\prime\prime}, X^{j+1}, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^{j-1}, Z^{j\prime\prime}, Z^{j+1\prime\prime}, Z^{j+2}, \dots, Z^k).
\end{aligned}
$$

Тут

$$
\begin{aligned}
& {}_j\Delta_R f(X^0, \dots, X^{j-1}, X^{j\prime}, X^{j\prime\prime}, X^{j+1}, \dots, X^k) \\
&\qquad\qquad (Z^1, \dots, Z^{j-1}, Z^{j\prime}, Z, Z^{j+1\prime\prime}, Z^{j+2}, \dots, Z^k)
\end{aligned}
$$

визначається однозначно за (3.36), не залежить від $Z^{j''}$ і $Z^{j+1\prime}$, і є однорідним у Z, коли $\begin{bmatrix} X^{j\prime} & Z \\ 0 & X^{j''} \end{bmatrix} \in \Omega^{(j)}_{n'_j+n''_j}$. Ми можемо визначити

$$
{}_j\Delta_R f(X^0,\dots,X^{j-1},X^{j\prime},X^{j''},X^{j+1},\dots,X^k)
\qquad\qquad
(Z^1,\dots,Z^{j-1},Z^{j\prime},Z,Z^{j+1''},Z^{j+2},\dots,Z^k)
$$

для всіх $Z \in \mathcal{M}_j^{n'_j\times n''_j}$ за однорідністю, аналогічно до (3.23). Подібно до пропозиції 3.9, цей вираз є лінійним за Z; подібно до теореми 3.10,

$$
{}_j\Delta_R f \in \mathcal{T}^{k+1}(\Omega^{(0)},\dots,\Omega^{(j-1)},\Omega^{(j)},\Omega^{(j)},\Omega^{(j+1)},\dots,\Omega^{(k)};
\qquad\qquad
\mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{N}_{j,\mathrm{nc}},\mathcal{M}_{j,\mathrm{nc}},\mathcal{N}_{j+1,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}}).
$$

Використовуючи пропозицію 10.5, ми можемо встановити j-й аналог (3.24),

$$
\begin{aligned}
(3.37)\quad {}_j\Delta_R f(X^0,\dots,X^{j-1},X^{j\prime},X^{j''},X^{j+1},\dots,X^k)
&\qquad\qquad (Z^1,\dots,Z^{j-1},Z^{j\prime},Z,Z^{j+1''},Z^{j+2},\dots,Z^k)\\
= {}_j\Delta_R \widetilde{f}(X^0,\dots,X^{j-1},X^{j\prime},X^{j''},X^{j+1},\dots,X^k)
&\qquad\qquad (Z^1,\dots,Z^{j-1},Z^{j\prime},Z,Z^{j+1''},Z^{j+2},\dots,Z^k)
\end{aligned}
$$

Можливо також сформулювати означення ${}_j\Delta_R f$, $0 \le j \le k$, еквівалентним чином, використовуючи інтерпретацію значень н.к. функції f порядку k як тензорного добутку, подібно до зауваження 3.16.

Аналогічно зауваженню 3.17, з означення ${}_j\Delta_R$ випливає, що його дія на тензорному добутку н.к. функцій (можливо, вищого порядку) зводиться до його дії на одному з множників:

$$
(3.38)\qquad {}_j\Delta_R(f\otimes g) = \begin{cases} {}_j\Delta_R(f)\otimes g, & 0\le j\le k,\\ f\otimes {}_{j-k-1}\Delta_R(g), & k+1\le j\le k+\ell+1,\end{cases}
$$

де

$$
\begin{aligned}
f &\in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)},\dots,\Omega^{(k)};\mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}}),\\
g &\in \mathcal{T}^\ell(\Omega^{(k+1)},\dots,\Omega^{(k+\ell)};\mathcal{L}^*_{0,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{L}_{\ell,\mathrm{nc}}),
\end{aligned}
$$

і

(3.39)

$$
{}_j\Delta_R(f^0\otimes\cdots\otimes f^{j-1}\otimes f^j\otimes f^{j+1}\otimes\cdots\otimes f^k) = (f^0\otimes\cdots\otimes f^{j-1}\otimes\Delta_R f^j\otimes f^{j+1}\otimes\cdots\otimes f^k).
$$

3.3. Різницеві формули першого порядку для н.к. функцій вищого порядку

Ми зараз встановимо аналог теореми 2.10 для н.к. функцій вищого порядку. Ітеративне використання цього результату приведе нас у розділі 4 до аналогу розвинення Брука Тейлора.

Теорема 3.19. *Нехай* $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \dots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}})$, *де* $\Omega^{(k)} \subseteq \mathcal{M}_{k,\mathrm{nc}}$ *допустима справа н.к. множина. Тоді для всіх* $n_0, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, *і довільних* $X^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}$, $\dots$, $X^{k-1} \in \Omega^{(k-1)}_{n_{k-1}}$, $X, Y \in \Omega^{(k)}_{n_k}$, $Z^1 \in \mathcal{N}_1^{n_0 \times n_1}$, $\dots$, $Z^k \in \mathcal{N}_k^{n_{k-1} \times n_k}$,

$$\begin{aligned} f(X^0, \dots, X^{k-1}, X)(Z^1, \dots, Z^k) - f(X^0, \dots, X^{k-1}, Y)(Z^1, \dots, Z^k) \\ = \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, Y, X)(Z^1, \dots, Z^k, X - Y) \end{aligned} \tag{3.40}$$

і

$$\begin{aligned} f(X^0, \dots, X^{k-1}, X)(Z^1, \dots, Z^k) - f(X^0, \dots, X^{k-1}, Y)(Z^1, \dots, Z^k) \\ = \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X, Y)(Z^1, \dots, Z^k, X - Y). \end{aligned} \tag{3.41}$$

Як і теорема 2.10, вона є наслідком наступного більш загального результату.

Теорема 3.20. *Нехай* $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \dots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}})$, *де* $\Omega^{(k)} \subseteq \mathcal{M}_{k,\mathrm{nc}}$ *- допустима справа н.к. множина. Тоді для всіх* $n_0, \dots, n_{k-1} \in \mathbb{N}$ *і довільних* $X^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}$, $\dots$, $X^{k-1} \in \Omega^{(k-1)}_{n_{k-1}}$, $X \in \Omega^{(k)}_n$, $Y \in \Omega^{(k)}_m$, $Z^1 \in \mathcal{N}_1^{n_0 \times n_1}$, $\dots$, $Z^{k-1} \in (\mathcal{N}_{k-1})^{n_{k-2} \times n_{k-1}}$, $Z^k \in \mathcal{N}_k^{n_{k-1} \times m}$, $S \in \mathcal{R}^{m \times n}$,

$$\begin{aligned} f(X^0, \dots, X^{k-1}, X)(Z^1, \dots, Z^k S) - f(X^0, \dots, X^{k-1}, Y)(Z^1, \dots, Z^k) S \\ = \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, Y, X)(Z^1, \dots, Z^k, SX - YS). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Доведення. За (3.24), ми можемо припустити, без втрати загальності, що $\Omega^{(k)}$ є подібностно інваріантним, тобто $\widetilde{\Omega}^{(k)} = \Omega^{(k)}$; дивись зауваження 2.5 і розділ 10. За пропозицією 10.2,

$$\begin{bmatrix} Y & SX - YS \\ 0 & X \end{bmatrix} \in \Omega^{(k)}_{m+n}.$$

Ми маємо

$$\begin{bmatrix} Y & SX - YS \\ 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ I_n \end{bmatrix} X.$$

За (3X^k),

$$\begin{aligned} f\left(X^0, \dots, X^{k-1}, \begin{bmatrix} Y & SX - YS \\ 0 & X \end{bmatrix}\right)(Z^1, \dots, Z^{k-1}, \operatorname{row}[Z^k, 0]) \begin{bmatrix} S \\ I_n \end{bmatrix} \\ = f(X^0, \dots, X^{k-1}, X)(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^k S). \end{aligned}$$

За пропозицією 3.7, ліва частина дорівнює

$$\begin{aligned} &\operatorname{row}[f(X^0, \dots, X^{k-1}, Y)(Z^1, \dots, Z^k), \\ &\qquad \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, Y, X)(Z^1, \dots, Z^k, SX - YS)] \operatorname{col}[S, I_n] \\ &= f(X^0, \dots, X^{k-1}, Y)(Z^1, \dots, Z^k) S \\ &\qquad + \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, Y, X)(Z^1, \dots, Z^k, SX - YS), \end{aligned}$$

отже, (3.42) виконується. □

Зауваження 3.21. Нехай $\mathcal{R} = \mathbb{R}$ або $\mathcal{R} = \mathbb{C}$. Покладаючи $X = Y + tZ$ (з $t \in \mathbb{R}$ або $t \in \mathbb{C}$) у теоремі 3.19, ми отримаємо

$$f(X^0, \dots, X^{k-1}, Y + tZ)(Z^1, \dots, Z^k) - f(X^0, \dots, X^{k-1}, Y)(Z^1, \dots, Z^k) \\ = t\Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, Y, Y + tZ)(Z^1, \dots, Z^k, Z).$$

За певних умов неперервності, $\Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, Y, Y)(Z^1, \dots, Z^k, Z)$ є напрямковою похідною від $f(X^0, \dots, X^{k-1}, \cdot)(Z^1, \dots, Z^k)$ у Y в напрямку Z, тобто

$$\Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, Y, Y)(Z^1, \dots, Z^k, \cdot)$$

є диференціалом від $f(X^0, \dots, X^{k-1}, \cdot)(Z^1, \dots, Z^k)$ у Y.

Зауваження 3.22. Використовуючи різницево-диференціальні оператори ${}_j\Delta_R$ (дивись зауваження 3.18), ми можемо встановити різницеві формули першого порядку для н.к. функцій вищого порядку (порівняй з теоремою 3.19) відносно j-й змінної: для $j = 0, \dots, k$,

$$\begin{aligned} (3.43)\quad & f(X^0, \dots, X^{j-1}, X, X^{j+1}, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^k) \\ & \qquad - f(X^0, \dots, X^{j-1}, Y, X^{j+1}, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^k) \\ & = {}_j\Delta_R f(X^0, \dots, X^{j-1}, Y, X, X^{j+1}, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^j, X - Y, Z^{j+1}, \dots, Z^k) \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} (3.44)\quad & f(X^0, \dots, X^{j-1}, X, X^{j+1}, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^k) \\ & \qquad - f(X^0, \dots, X^{j-1}, Y, X^{j+1}, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^k) \\ & = {}_j\Delta_R f(X^0, \dots, X^{j-1}, X, Y, X^{j+1}, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^j, X - Y, Z^{j+1}, \dots, Z^k). \end{aligned}$$

Загальніше (порівняй з теоремою 3.20), ми маємо

$$\begin{aligned} (3.45)\quad & Sf(X, X^1, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^k) - f(Y, X^1, \dots, X^k)(SZ^1, Z^2, \dots, Z^k) \\ & \qquad = {}_0\Delta_R f(Y, X, X^1, \dots, X^k)(SX - YS, Z^1, \dots, Z^k) \end{aligned}$$

і для $0 < j < k$,

$$\begin{aligned} (3.46)\quad & f(X^0, \dots, X^{j-1}, X, X^{j+1}, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^{j-1}, Z^j S, Z^{j+1}, \dots, Z^k) \\ & \quad - f(X^0, \dots, X^{j-1}, Y, X^{j+1}, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^j, SZ^{j+1}, Z^{j+2}, \dots, Z^k) \\ & = {}_j\Delta_R f(X^0, \dots, X^{j-1}, Y, X, X^{j+1}, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^j, SX - YS, Z^{j+1}, \dots, Z^k). \end{aligned}$$

Доведення подібне до доведення теореми 3.20, за винятком того, що ми використовуємо ($3X^0$) разом з (3.35) (у випадку (3.45)) або ($3X^j$) разом з (3.36) (у випадку (3.46)) замість використання ($3X^k$) разом з (3.19). Ми можемо також використовувати подібностно-інваріантний конверт $\widetilde{\Omega}^{(j)}$ відповідної допустимої справа н.к. множини $\Omega^{(j)}$ і рівність (3.37).

Зауваження 3.23. Звісно, формули (3.45), (3.46) і (3.42) узагальнюють ($3X^0$), ($3X^j$) і ($3X^k$), відповідно.

3.4. Н.к. інтегровність

Ми виведемо зараз необхідні умови для інтегровності н.к. функцій вищого порядку, тобто для того, щоб ці н.к. функції вищого порядку були результатом застосування різницево-диференціального оператору до н.к. функції (або до н.к. функції вищого порядку).

Теорема 3.24. *Нехай $f \in \mathcal{T}^k(\Omega; \mathcal{N}_{\rm nc}, \mathcal{M}_{\rm nc}, \dots, \mathcal{M}_{\rm nc})$, з $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\rm nc}$ - допустимою справа н.к. множиною. Якщо існує н.к. функція $g \in \mathcal{T}^0(\Omega; \mathcal{N}_{\rm nc})$ така, що $f = \Delta_R^k g$, то*

$$ {}_i\Delta_R f = {}_j\Delta_R f, \qquad i, j = 0, \dots, k. \tag{3.47}$$

Наслідок 3.25. *Для кожного $g \in \mathcal{T}^0(\Omega; \mathcal{N}_{\rm nc})$, $\ell \in \mathbb{N}$ і $j_s \in \mathbb{N}$ з $0 \le j_s \le s$, $s = 1, \dots, \ell$, ми маємо*

$$ {}_{j_\ell}\Delta_R \cdots {}_{j_1}\Delta_R g = \Delta_R^\ell g. \tag{3.48}$$

Доведення теореми 3.24. Звісно, достатньо показати, що ${}_j\Delta_R \Delta_R^k g = \Delta_R^{k+1} g$ для $0 \le j < k$. Ми доведемо це для $0 < j < k$ (доведення для випадку, коли $j = 0$ є аналогічним, з використанням (3.35) замість (3.36)). За (3.37), ми можемо припустити, без втрати загальності, що Ω є подібностно інваріантною н.к. множиною, тобто $\widetilde{\Omega} = \Omega$; дивись зауваження 2.5 і розділ 10. Нехай $X^0 \in \Omega_{n_0}$, $\dots$, $X^{j-1} \in \Omega_{n_{j-1}}$, $X^{j\prime} \in \Omega_{n_j'}$, $X^{j\prime\prime} \in \Omega_{n_j''}$, $X^{j+1} \in \Omega_{n_{j+1}}$, $\dots$, $X^k \in \Omega_{n_k}$, $Z^1 \in \mathcal{M}^{n_0 \times n_1}$, $\dots$, $Z^{j-1} \in \mathcal{M}^{n_{j-2} \times n_{j-1}}$, $Z^{j\prime} \in \mathcal{M}^{n_{j-1} \times n_j'}$, $Z \in \mathcal{M}^{n_j' \times n_j''}$, $Z^{j+1\prime\prime} \in \mathcal{M}^{n_j'' \times n_{j+1}}$, $Z^{j+2} \in \mathcal{M}^{n_{j+1} \times n_{j+2}}$, $\dots$, $Z^k \in \mathcal{M}^{n_{k-1} \times n_k}$. За пропозицією 10.2, $\begin{bmatrix} X^{j\prime} & Z \\ 0 & X^{j\prime\prime} \end{bmatrix} \in \Omega_{n_j' + n_j''}$. Відповідно до (3.36),

$$\begin{aligned} {}_j\Delta_R \Delta_R^k g(X^0, \dots, X^{j-1}, X^{j\prime}, X^{j\prime\prime}, X^{j+1}, \dots, X^k) \\ (Z^1, \dots, Z^{j-1}, Z^{j\prime}, Z, Z^{j+1\prime\prime}, Z^{j+2}, \dots, Z^k) \\ = \Delta_R^k g(X^0, \dots, X^{j-1}, \begin{bmatrix} X^{j\prime} & Z \\ 0 & X^{j\prime\prime} \end{bmatrix}, X^{j+1}, \dots, X^k) \\ (Z^1, \dots, Z^{j-1}, \mathrm{row}[Z^{j\prime}, 0], \mathrm{col}[0, Z^{j+1\prime\prime}], Z^{j+2}, \dots, Z^k). \end{aligned} \tag{3.49}$$

За (3.29), це дорівнює $(1, k+1)$ блочному елементу $(k+1) \times (k+1)$ блочної матриці

$$f\left(\begin{bmatrix} X^0 & Z^1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & X^1 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & Z^{j-1} & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & X^{j-1} & \begin{bmatrix} Z^{j\prime} & 0 \end{bmatrix} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \begin{bmatrix} X^{j\prime} & Z \\ 0 & X^{j\prime\prime} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ Z^{j+1\prime\prime} \end{bmatrix} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & X^{j+1} & Z^{j+2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & & \ddots & X^{k-1} & Z^k \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & X^k \end{bmatrix}\right),$$

де обчислення f на блочно-двохдіагональній матриці вище є добре визначеним, оскільки за лемою 3.14 ця матриця належить до $\Omega_{n_0+\cdots+n_{j-1}+n'_j+n''_j+n_{j+1}+\cdots+n_k}$. Ми розглядаємо $\begin{bmatrix} Z^{j\prime} & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} X^{j\prime} & Z \\ 0 & X^{j\prime\prime} \end{bmatrix}$ і $\begin{bmatrix} 0 \\ Z^{j+1\prime\prime} \end{bmatrix}$ як блоки. Якщо ми вважаємо цю блочну матрицю як $(k+2)\times(k+2)$ блочну матрицю, видаляючи квадратні дужки з цих блоків, то вираз у (3.49) стає $(1,k+2)$ блочним елементом, який за (3.29) є рівним

$$\Delta_R^{k+1} g(X^0,\dots,X^{j-1},X^{j\prime},X^{j\prime\prime},X^{j+1},\dots,X^k)$$
$$(Z^1,\dots,Z^{j-1},Z^{j\prime},Z,Z^{j+1\prime\prime},Z^{j+2},\dots,Z^k).$$

□

3.5. Напрямкові н.к. різницево-диференціальні оператори вищого порядку

Подібно до підрозділу 2.6, ми будемо також розглядати напрямкову версію різницево-диференціальних операторів вищого порядку. Вона вводиться ітеруванням напрямкових н.к. різницево-диференціальних операторів на н.к. функціях вищого порядку.

Нехай $\Omega^{(j)} \subseteq \mathcal{M}_{j,\mathrm{nc}}$, $j=0,\dots,k$, - н.к. множини, і нехай н.к. множина $\Omega^{(k)} \subseteq \mathcal{M}_{k,\mathrm{nc}}$ - допустима справа. Нехай $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)},\dots,\Omega^{(k)};\mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}})$. Якщо дане $\mu \in \mathcal{M}_k$, ми визначаємо для всіх n_0, …, $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $X^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}$, …, $X^k \in \Omega^{(k)}$, $X^{k+1} \in \Omega^{(k)}_{n_{k+1}}$ $(k+1)$-лінійне відображення

$$\Delta_{R,\mu} f(X^0,\dots,X^{k+1})\colon \mathcal{N}_1^{n_0\times n_1}\times\cdots\times\mathcal{N}_k^{n_{k-1}\times n_k}\times\mathcal{R}^{n_k\times n_{k+1}} \longrightarrow \mathcal{N}_0^{n_0\times n_{k+1}}$$

як

(3.50)
$$\Delta_{R,\mu} f(X^0,\dots,X^{k+1})(Z^1,\dots,Z^k,A) = \Delta_R f(X^0,\dots,X^{k+1})(Z^1,\dots,Z^k,A\mu).$$

Більше того, $\Delta_{R,\mu} f \in \mathcal{T}^{k+1}(\Omega^{(0)},\dots,\Omega^{(k)},\Omega^{(k)};\mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}},\mathcal{R}_{\mathrm{nc}})$.

У спеціальному випадку $\mathcal{M}_k = \mathcal{R}^d$, ми визначаємо *$j$-й правий частковий н.к. різницево-диференціальний оператор* як $\Delta_{R,j} = \Delta_{R,e_j}$. За лінійністю, ми маємо

$$\Delta_R f(X^0,\dots,X^{k+1})(Z^1,\dots,Z^{k+1}) = \sum_{j=1}^{d} \Delta_{R,j} f(X^0,\dots,X^{k+1})(Z^1,\dots,Z^k,Z_j^{k+1}). \tag{3.51}$$

Тоді різницеві формули першого порядку з теореми 3.19 можуть бути написані у цьому випадку в термінах часткових н.к. різницево-диференціальних операторів:

$$f(X^0,\dots,X^{k-1},X)(Z^1,\dots,Z^k) - f(X^0,\dots,X^{k-1},Y)(Z^1,\dots,Z^k)$$

$$= \sum_{j=1}^{d} \Delta_{R,j} f(X^0, \dots, X^{k-1}, Y, X)(Z^1, \dots, Z^k, X_j - Y_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{d} \Delta_{R,j} f(X^0, \dots, X^{k-1}, X, Y)(Z^1, \dots, Z^k, X_j - Y_j).$$

Якщо дані $\mu^1, \dots, \mu^\ell \in \mathcal{M}_k$, ми визначаємо відповідні *напрямкові н.к. різницево-диференціальні оператори ℓ-го порядку*

$$\Delta^\ell_{R,\mu^1,\dots,\mu^\ell} = \Delta_{R,\mu^\ell} \cdots \Delta_{R,\mu^1} \colon \ \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \dots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}})$$
$$\longrightarrow \mathcal{T}^{k+\ell}(\Omega^{(0)}, \dots, \Omega^{(k)}, \underbrace{\Omega^{(k)}, \dots, \Omega^{(k)}}_{\ell \text{ times}}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}}, \underbrace{\mathcal{R}_{\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{R}_{\mathrm{nc}}}_{\ell \text{ times}}).$$

У явному вигляді, використовуючи (3.21) і індукцію за ℓ, ми отримаємо

$$\Delta^\ell_{R,\mu^1,\dots,\mu^\ell} f(X^0, \dots, X^{k+\ell})(Z^1, \dots, Z^k, A^1, \dots, A^\ell)$$
$$= \Delta^\ell_R f(X^0, \dots, X^{k+\ell})(Z^1, \dots, Z^k, A^1\mu^1, \dots, A^\ell\mu^\ell).$$

В інтерпретації тензорних добутків для значень н.к. функцій (дивись зауваження 3.5), ми маємо

$$\Delta^\ell_R f(X^0, \dots, X^{k+\ell})$$
$$\in \mathcal{N}_0^{n_0 \times n_0} \otimes \mathcal{N}_1^{*n_1 \times n_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_k^{*n_k \times n_k} \otimes \mathcal{M}_k^{*n_{k+1} \times n_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_k^{*n_{k+\ell} \times n_{k+\ell}},$$
$$\Delta^\ell_{R,\mu^1,\dots,\mu^\ell} f(X^0, \dots, X^{k+\ell})$$
$$\in \mathcal{N}_0^{n_0 \times n_0} \otimes \mathcal{N}_1^{*n_1 \times n_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_k^{*n_k \times n_k} \otimes \mathcal{R}^{n_{k+1} \times n_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{R}^{n_{k+\ell} \times n_{k+\ell}},$$
$$\Delta^\ell_{R,\mu^1,\dots,\mu^\ell} f(X^0, \dots, X^{k+\ell})$$
$$= (I_{n_0} \otimes \cdots \otimes I_{n_k} \otimes I_{n_{k+1}}\mu^1 \otimes \cdots \otimes I_{n_{k+\ell}}\mu^\ell) \Delta^\ell_R f(X^0, \dots, X^{k+\ell}).$$

Покладаючи $Z^1 = A^1\mu^1, \dots, Z^\ell = A^\ell\mu^\ell$ у теоремі 3.11, ми можемо переписати (3.29) як

$$f\left(\begin{bmatrix} X^0 & A^1\mu^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X^1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & X^{\ell-1} & A^\ell\mu^\ell \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & X^\ell \end{bmatrix}\right) \tag{3.52}$$
$$= \begin{bmatrix} f(X^0) & \Delta_{R,\mu^1} f(X^0, X^1)(A^1) & \cdots & \cdots & \Delta^\ell_{R,\mu^1,\dots,\mu^\ell} f(X^0, \dots, X^\ell)(A^1, \dots, A^\ell) \\ 0 & f(X^1) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \Delta_{R,\mu^\ell} f(X^{\ell-1}, X^\ell)(A^\ell) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & f(X^\ell) \end{bmatrix}.$$

Існує також подібна версія теореми 3.12 у термінах напрямкових н.к. різницево-диференціальних операторів вищого порядку.

У спеціальному випадку, коли $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$, ми визначаємо *частковий н.к. різницево-диференціальний оператор ℓ-го порядку*, відповідаючий слову $w = g_{i_1} \cdots g_{i_\ell} \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ як $\Delta_R^w = \Delta^\ell_{R,e_{i_1},\ldots,e_{i_\ell}} = \Delta_{R,i_\ell} \cdots \Delta_{R,i_1}$; дивись підрозділ 0.1 щодо означення вільного моноїду $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ і н.к. мультістепенів. (Зауважимо, що ми можемо інтерпретувати Δ_R^w як н.к. мультістепінь, якщо ми зловживаємо позначеннями, допускаючи Δ_R позначати набір $(\Delta_{R,1}, \ldots, \Delta_{R,d})$ часткових різницево-диференціальних операторів першого порядку, одночасно з повним різницево-диференціальним оператором.)

За мультілінійністю, ми маємо для $f \in \mathcal{T}^k$,

$$\begin{aligned}(3.53)\quad \Delta_R^\ell f(X^0, \ldots, X^{k+\ell})(Z^1, \ldots, Z^{k+\ell}) \\ = \sum_{w = g_{i_1} \cdots g_{i_\ell}} \Delta_R^{w^\top} f(X^0, \ldots, X^{k+\ell})(Z^1, \ldots, Z^k, Z^{k+1}_{i_1}, \ldots, Z^{k+\ell}_{i_\ell}),\end{aligned}$$

де додавання береться над всіма словами довжини ℓ (звертаємо увагу на транспозицію слів: для $w = g_{i_1} \cdots g_{i_\ell}$ ми користуємось позначенням $w^\top = g_{i_\ell} \cdots g_{i_1}$).

Покладаючи $Z^1 = A^1 e_{i_1}, \ldots, Z^\ell = A^\ell e_{i_\ell}$ у теоремі 3.11, тобто обираючи $\mu^1 = e_{i_1}, \ldots, \mu^\ell = e_{i_\ell}$ у (3.52), ми отримаємо

$$\begin{aligned}(3.54)\quad & f\left(\begin{bmatrix} X^0 & A^1 e_{i_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X^1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & X^{\ell-1} & A^\ell e_{i_\ell} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & X^\ell \end{bmatrix}\right) \\ & = \begin{bmatrix} f(X^0) & \Delta_R^{g_{i_1}} f(X^0, X^1)(A^1) & \cdots & \cdots & \Delta_R^{g_{i_\ell} \cdots g_{i_1}} f(X^0, \ldots, X^\ell)(A^1, \ldots, A^\ell) \\ 0 & f(X^1) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \Delta_R^{g_{i_\ell}} f(X^{\ell-1}, X^\ell)(A^\ell) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & f(X^\ell) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Розділ 4

Формула Тейлора–Тейлора

Ми використовуємо зараз числення н.к. різницево-диференціальних операторів вищого порядку, щоб вивести н.к. аналог розвинення Брука Тейлора, яке ми називаємо розвиненням Тейлора–Тейлора (або ТТ розвиненням), на честь Брука Тейлора і Джозефа Л. Тейлора.

Теорема 4.1. *Нехай $f \in \mathcal{T}^0(\Omega; \mathcal{N}_{\mathrm{nc}})$ з $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ - допустимою справа н.к. множиною, $n \in \mathbb{N}$, і $Y \in \Omega_n$. Тоді для кожного $N \in \mathbb{N}$ і довільного $X \in \Omega_n$,*

$$f(X) = \sum_{\ell=0}^{N} \Delta_R^{\ell} f(\underbrace{Y, \dots, Y}_{\ell+1 \text{ разів}})(\underbrace{X - Y, \dots, X - Y}_{\ell \text{ разів}}) + \Delta_R^{N+1} f(\underbrace{Y, \dots, Y}_{N+1 \text{ разів}}, X)(\underbrace{X - Y, \dots, X - Y}_{N+1 \text{ разів}}). \tag{4.1}$$

Доведення. Використовуючи теореми 2.10 і 3.19, ми отримаємо

$$\begin{aligned} f(X) &= f(Y) + \Delta_R f(Y, X)(X - Y) \\ &= f(Y) + \Delta_R f(Y, Y)(X - Y) + \Delta_R^2 f(Y, Y, X)(X - Y, X - Y) \\ &= \dots \\ &= f(Y) + \Delta_R f(Y, Y)(X - Y) + \dots + \Delta_R^N f(\underbrace{Y, \dots, Y}_{N+1 \text{ разів}})(\underbrace{X - Y, \dots, X - Y}_{N \text{ разів}}) \\ &\quad + \Delta_R^{N+1} f(\underbrace{Y, \dots, Y}_{N+1 \text{ разів}}, X)(\underbrace{X - Y, \dots, X - Y}_{N+1 \text{ разів}}). \end{aligned}$$

□

Можливо також отримати версію степеневого розвинення з центром у матриці $Y \in \Omega_s$ і дійсного у матричних розмірах, кратних s. Для $X \in \mathcal{M}^{n \times n}$ і $n = sm$ ми позначаємо

$$X^{\odot_s \ell} := \underbrace{X \odot_s \cdots \odot_s X}_{\ell \text{ разів}},$$

де ми вживаємо позначення, введене перед пропозицією 3.3. Зауважимо, що $X^{\odot_s \ell}$ - це ℓ-й степінь X розглянутий як $m \times m$ матриця над $\mathbf{T}(\mathcal{M}^{s \times s})$. Тут

$$\mathbf{T}(\mathcal{L}) := \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \mathcal{L}^{\otimes \ell}$$

позначає тензорну алгебру над модулем $\mathcal{L}$ над $\mathcal{R}$. Ми також пишемо $X^{\odot\ell}$ замість $X^{\odot_1\ell}$, опускаючи нижній індекс у випадку $s=1$.

Теорема 4.2. *Нехай $f \in \mathcal{T}^0(\Omega;\mathcal{N}_{\rm nc})$ з $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\rm nc}$ - допустимою справа н.к. множиною, і $Y \in \Omega_s$. Тоді для кожного $N \in \mathbb{N}$ і довільних $m \in \mathbb{N}$ і $X \in \Omega_{ms}$,*

$$f(X) = \sum_{\ell=0}^{N} \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s \ell} \Delta_R^{\ell} f(\underbrace{Y,\dots,Y}_{\ell+1 \text{ разів}}) + \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s N+1} \Delta_R^{N+1} f(\underbrace{Y,\dots,Y}_{N+1 \text{ разів}}, X). \tag{4.2}$$

Зокрема, якщо $\mu \in \Omega_1$, то для кожного $N \in \mathbb{N}$ і довільних $m \in \mathbb{N}$ і $X \in \Omega_m$,

$$f(X) = \sum_{\ell=0}^{N} (X - I_m\mu)^{\odot\ell} \Delta_R^{\ell} f(\underbrace{\mu,\dots,\mu}_{\ell+1 \text{ разів}}) + (X - I_m\mu)^{\odot N+1} \Delta_R^{N+1} f(\underbrace{\mu,\dots,\mu}_{N+1 \text{ разів}}, X). \tag{4.3}$$

Доведення. Перше твердження випливає безпосередньо з теореми 4.1 і пропозиції 3.3. Друге твердження - спеціальний випадок першого, коли $s=1$. □

Зауваження 4.3. З (3.45), (3.46), (3.42) і (3.48) випливає, що мультілінійні відображення $f_\ell := \Delta_R^{\ell} f(Y,\dots,Y)\colon (\mathcal{M}^{s\times s})^{\ell} \to \mathcal{N}^{s\times s}$ задовольняють

$$Sf_0 - f_0 S = f_1(SY - YS) \tag{4.4}$$

і для $\ell = 1,\dots,$

$$Sf_\ell(Z^1,\dots,Z^\ell) - f_\ell(SZ^1,Z^2,\dots,Z^\ell) = f_{\ell+1}(SY - YS, Z^1,\dots,Z^\ell), \tag{4.5}$$

$$f_\ell(Z^1,\dots,Z^{j-1},Z^jS,Z^{j+1},\dots,Z^\ell) - f_\ell(Z^1,\dots,Z^j,SZ^{j+1},Z^{j+2},\dots,Z^\ell) = f_{\ell+1}(Z^1,\dots,Z^j,SY-YS,Z^{j+1},\dots,Z^\ell), \tag{4.6}$$

$$f_\ell(Z^1,\dots,Z^{\ell-1},Z^\ell S) - f_\ell(Z^1,\dots,Z^\ell)S = f_{\ell+1}(Z^1,\dots,Z^\ell,SY-YS), \tag{4.7}$$

для кожного $S \in \mathcal{R}^{s\times s}$.

Ми далі спеціалізуємо теорему 4.2 на випадок, коли $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$, використовуючи н.к. різницево-диференціальні оператори вищого порядку. Для $X \in (\mathcal{R}^{n\times n})^d$, $n = sm$, і $w = g_{i_1}\cdots g_{i_\ell}$ ми позначаємо

$$X^{\odot_s w} := X_{i_1} \odot_s \cdots \odot_s X_{i_\ell}. \tag{4.8}$$

Зауважимо, що $X^{\odot_s w}$ - це w-й степінь X, розглянутий як набір $m \times m$ матриць над $\mathbf{T}(\mathcal{R}^{s\times s})$. Ми також пишемо $X^{\odot w}$ замість $X^{\odot_1 w}$, опускаючи нижній індекс у випадку $s = 1$. Зауважимо, що

$$Z^{\odot_s \ell} = \sum_{w=g_1\cdots g_{i_\ell}} (Z^{\odot_s w}) e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_\ell}, \tag{4.9}$$

для кожних $\ell, m \in \mathbb{N}$ і $Z \in (\mathcal{R}^{sm\times sm})^d$, де e_i, $i = 1, \ldots, d$, - стандартний базис для $\mathcal{R}^d$. Ми також маємо

$$\Delta_R^\ell f(Y, \ldots, Y)(Z^1, \ldots, Z^\ell) = \sum_{w=g_{i_1}\cdots g_{i_\ell}} \Delta_R^{w^\top} f(Y, \ldots, Y)(Z^1_{i_1}, \ldots, Z^\ell_{i_\ell}) \tag{4.10}$$

(дивись (3.53) з $k = 0$) і, подібним чином,

$$Z^{\odot_s \ell} \Delta_R^\ell f(Y, \ldots, Y) = \sum_{w=g_1\cdots g_{i_\ell}} Z^{\odot_s w} \Delta_R^{w^\top} f(Y, \ldots, Y) \tag{4.11}$$

для н.к. функції f на н.к. множині $\Omega \subseteq (\mathcal{R}^d)_{\mathrm{nc}}$ із значеннями у $\mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$, і кожних $Y \in \Omega_s$, $Z^1, \ldots, Z^\ell \in (\mathcal{R}^{s\times s})^d$ і $Z \in (\mathcal{R}^{sm\times sm})^d$. Теорема 4.2 тягне за собою наступне твердження.

Наслідок 4.4. *Нехай $f \in \mathcal{T}^0(\Omega; \mathcal{N}_{\mathrm{nc}})$ з $\Omega \subseteq (\mathcal{R}^d)_{\mathrm{nc}}$ - допустимою справа н.к. множиною, $m \in \mathbb{N}$ і $Y \in \Omega_s$. Тоді для кожного $N \in \mathbb{N}$ і довільного $X \in \Omega_{sm}$,*

$$\begin{aligned} f(X) = \sum_{\ell=0}^{N} \sum_{|w|=\ell} \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s w} \Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{Y, \ldots, Y}_{\ell+1 \text{ разів}}) \\ + \sum_{|w|=N+1} \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s w} \Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{Y, \ldots, Y}_{N+1 \text{ разів}}, X). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Зокрема, для $s = 1$ і $\mu \in \Omega_1$, ми отримаємо справжнє н.к. степеневе розвинення

$$\begin{aligned} f(X) = \sum_{\ell=0}^{N} \sum_{|w|=\ell} (X - I_m\mu)^w \Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{\mu, \ldots, \mu}_{\ell+1 \text{ разів}}) \\ + \sum_{|w|=N+1} (X - I_m\mu)^w \Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{\mu, \ldots, \mu}_{N+1 \text{ разів}}, X). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Тут ми ототожнюємо ℓ-лінійне відображення $\Delta_R^{w^\top} f(\mu, \ldots, \mu)\colon \mathcal{R}\times\cdots\times\mathcal{R} \to \mathcal{N}$ з вектором $\Delta_R^{w^\top} f(\mu, \ldots, \mu)(1, \ldots, 1) \in \mathcal{N}$, і $m \times m$ матрицю $\Delta_R^{w^\top} f(\mu, \ldots, \mu, X)$ $(N+1)$-лінійних відображень $\mathcal{R}\times\cdots\times\mathcal{R} \to \mathcal{N}$ (дивись формулу (3.9) у пропозиції 3.3) з $m \times m$ матрицею над $\mathcal{N}$, чий i-й рядок є $\Delta_R^{w^\top} f(\mu, \ldots, \mu, X)(1, \ldots, 1, e_i^\top)$, де e_i - це i-й стандартний базисний вектор у $\mathcal{R}^m$.

Зауваження 4.5. Спеціалізуючи зауваження 4.3 на випадок $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$ і використовуючи (4.10), ми отримаємо, що мультілінійні форми $f_w = \Delta_R^{w^\top} f(Y, \dots, Y)$, $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$, задовольняють умови

$$Sf_\emptyset - f_\emptyset S = \sum_{k=1}^{d} f_{g_k}(SY_k - Y_k S), \tag{4.14}$$

і для $w = g_{i_1} \cdots g_{i_\ell} \neq \emptyset$,

$$Sf_w(A^1, \dots, A^\ell) - f_w(SA^1, A^2, \dots, A^\ell) = \sum_{k=1}^{d} f_{g_k w}(SY_k - Y_k S, A^1, \dots, A^\ell), \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} f_w(A^1, \dots, A^{j-1}, A^j S, A^{j+1}, \dots, A^\ell) - f_w(A^1, \dots, A^j, SA^{j+1}, A^{j+2}, \dots, A^\ell) \\ = \sum_{k=1}^{d} f_{g_{i_1} \cdots g_{i_j} g_k g_{i_{j+1}} \cdots g_{i_\ell}}(A^1, \dots, A^j, SY_k - Y_k S, A^{j+1}, \dots, A^\ell), \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$f_w(A^1, \dots, A^{\ell-1}, A^\ell S) - f_w(A^1, \dots, A^\ell)S = \sum_{k=1}^{d} f_{wg_k}(A^1, \dots, A^\ell, SY_k - Y_k S), \tag{4.17}$$

для всіх $S, A^1, \dots, A^\ell \in \mathcal{R}^{s \times s}$.

Зараз ми перепишемо ТТ формулу (4.12) у більш конкретному вигляді. Використовуючи інтерпретацію тензорних добутків для значень н.к. функцій вищого порядку (дивись зауваження 3.5 – ми припускаємо, що модуль $\mathcal{N}$ - вільний),

$$\Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{Y, \dots, Y}_{\ell+1 \text{ разів}}) \in \mathcal{N}^{s \times s} \otimes \underbrace{\mathcal{R}^{s \times s} \otimes \cdots \otimes \mathcal{R}^{s \times s}}_{\ell \text{ разів}},$$

отже,

$$\Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{Y, \dots, Y}_{\ell+1 \text{ разів}}) = A_{w,(0)} \otimes A_{w,(1)} \otimes \cdots \otimes A_{w,(\ell)}. \tag{4.18}$$

Тут ми використовуємо аналог *позначення Свідлера без додавання*, відомого у теорії коалгебр [**87**],

$$A_{w,(0)} \otimes A_{w,(1)} \otimes \cdots \otimes A_{w,(\ell)} = \sum_j A_{w,(0)}^{(j)} \otimes A_{w,(1)}^{(j)} \otimes \cdots \otimes A_{w,(\ell)}^{(j)}, \tag{4.19}$$

із скінченною сумою (що містить не більше $(s^2)^\ell$ членів) і $A_{w,(0)}^{(j)} \in \mathcal{N}^{s \times s}$, $A_{w,(1)}^{(j)}$, $\dots$, $A_{w,(\ell)}^{(j)} \in \mathcal{R}^{s \times s}$. Відповідно до (3.11),

$$\begin{aligned} \Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{Y, \dots, Y}_{\ell+1 \text{ разів}})(X_{i_1} - Y_{i_1}, \dots, X_{i_\ell} - Y_{i_\ell}) \\ = (A_{w,(0)} \otimes A_{w,(1)} \otimes \cdots \otimes A_{w,(\ell)}) \star (X - Y)^{[w]}, \end{aligned} \tag{4.20}$$

де ми вводимо позначення

$$(4.21)\quad (C_{w,(0)} \otimes C_{w,(1)} \otimes \cdots \otimes C_{w,(\ell)}) \star Z^{[w]} = \sum_j C^{(j)}_{w,(0)} \left(Z_{i_1} C^{(j)}_{w,(1)}\right) \cdots \left(Z_{i_\ell} C^{(j)}_{w,(\ell)}\right),$$

де $C_{w,(0)} \otimes C_{w,(1)} \otimes \cdots \otimes C_{w,(\ell)} \in \mathcal{N}^{s\times s} \otimes \underbrace{\mathcal{R}^{s\times s} \otimes \cdots \otimes \mathcal{R}^{s\times s}}_{\ell \text{ разів}}$, у позначенні Свідлера без додавання, і $Z \in (\mathcal{R}^{n\times n})^d$. Згадаємо, що для $Z \in (\mathcal{R}^{sm\times sm})^d$, $w = g_{i_1} \cdots g_{i_\ell} \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ і $1 \le i, k \le m$ ми маємо

$$(Z^{\odot_s w})_{ik} = \sum_{1\le j_1,\dots,j_{\ell-1}\le m} (Z_{i_1})_{ii_1} \otimes (Z_{i_2})_{j_1 j_2} \otimes \cdots \otimes (Z_{i_{\ell-1}})_{j_{\ell-2} j_{\ell-1}} \otimes (Z_{i_\ell})_{j_{\ell-1} k}.$$

Отже,

$$\begin{aligned}
&\Big(Z^{\odot_s w} \Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{Y,\dots,Y}_{\ell+1 \text{ разів}})\Big)_{ik} \\
&= \sum_{1\le j_1,\dots,j_{\ell-1}\le m} \Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{Y,\dots,Y}_{\ell+1 \text{ разів}}) \Big((Z_{i_1})_{ii_1}, (Z_{i_2})_{j_1 j_2}, \dots, (Z_{i_{\ell-1}})_{j_{\ell-2} j_{\ell-1}}, (Z_{i_\ell})_{j_{\ell-1} k}\Big) \\
&\qquad = \sum_j \sum_{1\le j_1,\dots,j_{\ell-1}\le m} A^{(j)}_{w,(0)} \Big((Z_{i_1})_{ii_1} A^{(j)}_{w,(1)}\Big) \Big((Z_{i_2})_{j_1 j_2} A^{(j)}_{w,(2)}\Big) \\
&\qquad\qquad \cdots \Big((Z_{i_{\ell-1}})_{j_{\ell-2} j_{\ell-1}} A^{(j)}_{w,(\ell-1)}\Big) \Big((Z_{i_\ell})_{j_{\ell-1} k} A^{(j)}_{w,(\ell)}\Big) \\
&\qquad\qquad\qquad = \left(\left(\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^m A_{w,(0)}\Big) \otimes \cdots \otimes \Big(\bigoplus_{\alpha=1}^m A_{w,(\ell)}\Big)\right) \star Z^{[w]}\right)_{ik}
\end{aligned}$$

для кожного $Z \in (\mathcal{R}^{sm\times sm})^d$, так що

$$\begin{aligned}
(4.22)\quad &\Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^m Y\Big)^{\odot_s w} \Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{Y,\dots,Y}_{\ell+1 \text{ times}}) \\
&\qquad = \left(\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^m A_{w,(0)}\Big) \otimes \cdots \otimes \Big(\bigoplus_{\alpha=1}^m A_{w,(\ell)}\Big)\right) \star \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^m Y\Big)^{[w]}
\end{aligned}$$

для кожного $X \in (\mathcal{R}^{sm\times sm})^d$.

Аналогічно, для залишку ТТ формули (4.12) (з сумою над словами довжини $N+1$) ми маємо

$$\Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{Y,\dots,Y}_{N+1 \text{ разів}}, X) \in \mathcal{N}^{n\times n} \otimes \underbrace{\mathcal{R}^{n\times n} \otimes \cdots \otimes \mathcal{R}^{n\times n}}_{N+1 \text{ разів}}$$

і таким чином,

$$(4.23)\qquad \Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{Y,\dots,Y}_{N+1 \text{ разів}}, X) = B_{w,(0)} \otimes B_{w,(1)} \otimes \cdots \otimes B_{w,(N+1)}$$

і

$$(4.24)\quad \Big(X-\bigoplus_{\alpha=1}^{m}Y\Big)^{\odot_s w}\Delta_R^{w^\top}f(\underbrace{Y,\dots,Y}_{N+1\text{ разів}},X)$$
$$=\left(\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m}B_{w,(0)}\Big)\otimes\cdots\otimes\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m}B_{w,(N)}\Big)\otimes B_{w,(N+1)}\right)\star\Big(X-\bigoplus_{\alpha=1}^{m}Y\Big)^{[w]}$$

для кожного $X\in(\mathcal{R}^{sm\times sm})^d$. Зауважимо, що хоча "ТТ коефіцієнти" $A_{w,(0)}\otimes A_{w,(1)}\otimes\cdots\otimes A_{w,(\ell)}$ залежать тільки від центральної точки Y, "залишкові коефіцієнти"

$$B_{w,(0)}\otimes B_{w,(1)}\otimes\cdots\otimes B_{w,(N+1)}$$

залежать від Y і X.

Таким чином, ми отримаємо ТТ формулу у вигляді "н.к. псевдо-степеневого" розвинення, яке є узагальненням н.к. степеневого розвинення (4.13) для випадку $s=1$ на випадок загального s.

Теорема 4.6. *Нехай $f\in\mathcal{T}^0(\Omega;\mathcal{N}_{\rm nc})$ з $\Omega\subseteq(\mathcal{R}^d)_{\rm nc}$ - допустимою справа н.к. множиною, і $Y\in\Omega_s$. Тоді для кожного $N\in\mathbb{N}$, довільного $m\in\mathbb{N}$ і $X\in\Omega_{sm}$,*

$$(4.25)\quad f(X)=\sum_{\ell=0}^{N}\sum_{|w|=\ell}\left(\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m}A_{w,(0)}\Big)\otimes\cdots\otimes\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m}A_{w,(\ell)}\Big)\right)\star\Big(X-\bigoplus_{\alpha=1}^{m}Y\Big)^{[w]}$$
$$+\sum_{|w|=N+1}\left(\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m}B_{w,(0)}\Big)\otimes\cdots\otimes\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m}B_{w,(N)}\Big)\otimes B_{w,(N+1)}\right)\star\Big(X-\bigoplus_{\alpha=1}^{m}Y\Big)^{[w]}.$$

Тут $A_{w,(0)}\otimes\cdots\otimes A_{w,(\ell)}=\Delta_R^{w^\top}f(\underbrace{Y,\dots,Y}_{\ell+1\text{ разів}})$ і $B_{w,(0)}\otimes\cdots\otimes B_{w,(N)}\otimes B_{w,(N+1)}=\Delta_R^{w^\top}f(\underbrace{Y,\dots,Y}_{N+1\text{ разів}},X)$, з інтерпретацією тензорного добутку для значень $\Delta_R^{w^\top}f$ (зауваження 3.5), позначенням Свідлера без додавання (4.19)*, і псевдо-степеневим позначенням* (4.21)*.*

Розділ 5

Н.к. функції на нільпотентних матрицях

Як перше застосування ТТ формули, ми зараз опишемо н.к. функції на нільпотентних матрицях як суми їх ТТ рядів. Навпаки, ми побачимо, що сума н.к. степеневого ряду, обчислена на нільпотентних матрицях, визначає н.к. функцію, якщо коефіцієнти ряду задовольняють умови, перераховані в зауваженнях 4.3 і 4.5.

5.1. Від н.к. функцій до н.к. степеневих рядів

ТТ формула (4.3) дозволяє нам описати н.к. функції на нільпотентних матрицях над $\mathcal{M}$ як суми н.к. степеневих рядів. Нехай $n, \kappa \in \mathbb{N}$. Визначимо множину $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}; n, \kappa)$, що складається з $n \times n$ матриць X над $\mathcal{M}$, які є *нільпотентними рангу не більше* κ, тобто $X^{\odot \ell} = 0$ для всіх $\ell \geq \kappa$. Визначимо також множину $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}; n) = \bigcup_{\kappa=1}^{\infty} \mathrm{Nilp}(\mathcal{M}; n, \kappa)$ нільпотентних $n \times n$ матриць над $\mathcal{M}$ і множину $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}) = \coprod_{n=1}^{\infty} \mathrm{Nilp}(\mathcal{M}; n)$ нільпотентних матриць над $\mathcal{M}$. Зауважимо, що $\Omega = \mathrm{Nilp}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ - допустима справа (також, як і зліва) н.к. множина, і $\Omega_n = \mathrm{Nilp}(\mathcal{M}; n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

У спеціальному випадку $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$, множина $\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R}; n, \kappa) := \mathrm{Nilp}(\mathcal{R}^d; n, \kappa)$ складається з наборів X із $n \times n$ матриць над $\mathcal{R}$, які є *спільно нільпотентними рангу не більше* κ, тобто $X^w = 0$ для всіх $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ таких, що $|w| \geq \kappa$; дивись (4.9). Ми також маємо множину $\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R}; n) := \mathrm{Nilp}(\mathcal{R}^d; n)$ спільно нільпотентних $n \times n$ матриць над $\mathcal{R}$ і множину $\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R}) := \mathrm{Nilp}(\mathcal{R}^d)$ спільно нільпотентних наборів d матриць над $\mathcal{R}$.

Зауваження 5.1. У випадку, коли $\mathcal{R} = \mathbb{K}$ - поле, матриця $X \in \mathrm{Nilp}(\mathcal{M}; n)$ подібна до строго верхньо-трикутної матриці. Справді, розглянемо скінченновимірний підмодуль модуля $\mathcal{M}$, породжений елементами X, і оберемо його базис $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_d$; ми можемо тоді написати $X = A_1\upsilon_1 + \cdots + A_d\upsilon_d$, де $(A_1, \ldots, A_d) \in \mathrm{Nilp}_d(\mathbb{K}; n)$. Алгебра Лі у $\mathbb{K}^{n\times n}$, породжена $A_1, \ldots, A_d$, складається з нільпотентних матриць. За теоремою Енгеля (дивись, наприклад, [**90**, підрозділи 3.2, 3.3]), матриці $A_1, \ldots, A_d$ є спільно подібними до строго верхньо-трикутних матриць. Отже, X є подібною до строго верхньо-трикутної матриці.

Теорема 5.2. *Нехай* $f \in \mathcal{T}^0(\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}); \mathcal{N}_{\mathrm{nc}})$. *Тоді для всіх* $X \in \mathrm{Nilp}(\mathcal{M})$

$$f(X) = \sum_{\ell=0}^{\infty} X^{\odot \ell} \Delta_R^{\ell} f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{\ell+1 \text{ разів}}), \tag{5.1}$$

де сума має скінченну кількість ненульових членів.

Доведення. Нехай $X \in \mathrm{Nilp}(\mathcal{M}; n, \kappa)$ для деяких додатних цілих n і κ. Тоді ТТ формула (4.3) з центром у $\mu = 0$ для $N > \kappa$ стає

$$f(X) = \sum_{\ell=0}^{\kappa-1} X^{\odot\ell} \Delta_R^\ell f(\underbrace{0, \dots, 0}_{\ell+1 \text{ разів}}).$$

□

Зауваження 5.3. З (5.1) випливає, що $f(X) - I_n f(0) \in \mathrm{Nilp}(\mathcal{N}; n)$ для $X \in \mathrm{Nilp}(\mathcal{M}; n)$. Альтернативно (порівняй з зауваженням 5.1), якщо X - строго верхньо-трикутна, то $f(X)$ є верхньо-трикутною з усіма діагональними елементами рівними $f(0)$.

В спеціальному випадку $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$, ми можемо використати (4.13) замість (4.3), щоб отримати:

Теорема 5.4. *Нехай $f \in \mathcal{T}^0(\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R}); \mathcal{N}_{\mathrm{nc}})$. Тоді для всіх $X \in \mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R})$*

$$f(X) = \sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} X^w \Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{0, \dots, 0}_{|w|+1 \text{ разів}}), \tag{5.2}$$

де сума має скінченну кількість ненульових членів.

Ми узагальнюємо зараз теореми 5.2 і 5.4 на випадок довільного центру. Для $Y \in \mathcal{M}^{s\times s}$, ми визначаємо множину $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y; sm, \kappa)$, що складається з $sm \times sm$ матриць X над $\mathcal{M}$, які є *нільпотентними навколо Y рангу не більше κ*, тобто $(X - \bigoplus_{\alpha=1}^m Y)^{\odot_s \ell} = 0$ для всіх $\ell \geq \kappa$. Ми також визначаємо множину $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y; sm) = \bigcup_{\kappa=1}^\infty \mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y; sm, \kappa)$ і множину $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y) = \coprod_{m=1}^\infty \mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y; sm)$. Зауважимо, що $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y)$ є допустимою справа (також, як і зліва) н.к. множиною.

У спеціальному випадку $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$, множина $\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R}, Y; sm, \kappa) := \mathrm{Nilp}(\mathcal{R}^d; sm, \kappa)$ складається з наборів X із $sm \times sm$ матриць над $\mathcal{R}$, які є *спільно нільпотентними навколо Y рангу не більше κ*, тобто $(X - \bigoplus_{\alpha=1}^m Y)^{\odot_s w} = 0$ для всіх $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ таких, що $|w| \geq \kappa$. Ми також маємо множини $\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R}, Y; sm) := \mathrm{Nilp}(\mathcal{R}^d, Y; sm)$ і $\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R}, Y) := \mathrm{Nilp}(\mathcal{R}^d, Y)$.

Зауваження 5.5. Звісно, ми маємо $X \in \mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y; sm, \kappa)$ тоді і тільки тоді, коли $X - \bigoplus_{\alpha=1}^m Y \in \mathrm{Nilp}(\mathcal{M}^{s\times s}; m, \kappa)$. Як випливає з зауваження 5.1, коли $\mathcal{R} = \mathbb{K}$ - поле, $X \in \mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y; sm)$ подібне, з матрицею подібності вигляду $S \otimes I_s \in \mathbb{K}^{sm\times sm}$, до $s \times s$-блочної верхньо-трикутної матриці з усіма діагональними блоками рівними Y.

Ми маємо наступний аналог теореми 5.2, з точно таким же доведенням.

Теорема 5.6. *Нехай $Y \in \mathcal{M}^{s\times s}$ і $f \in \mathcal{T}^0(\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y); \mathcal{N}_{\mathrm{nc}})$. Тоді для всіх $X \in \mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y; sm)$*

$$f(X) = \sum_{\ell=0}^\infty \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^m Y\Big)^{\odot_s \ell} \Delta_R^\ell f(\underbrace{Y, \dots, Y}_{\ell+1 \text{ разів}}), \tag{5.3}$$

де сума має скінченну кількість ненульових членів.

Зауваження 5.7. З (5.3) випливає, що ми маємо $f(X) \in \mathrm{Nilp}(\mathcal{N}, f(Y))$ для $X \in \mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y)$. Альтернативно (порівняй з зауваженням 5.5), якщо X є $s \times s$ блочною верхньо-трикутною матрицею з усіма діагональними блоками рівними Y, то $f(X)$ є $s \times s$ блочною верхньо-трикутною матрицею з усіма діагональними блоками рівними $f(Y)$.

В спеціальному випадку $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$, ми маємо наступний аналог теореми 5.4.

Теорема 5.8. *Нехай $Y \in (\mathcal{R}^{s\times s})^d$ і $f \in \mathcal{T}^0(\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R}, Y); \mathcal{N}_{\mathrm{nc}})$. Тоді для всіх $X \in \mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R}, Y; sm)$*

$$f(X) = \sum_{w\in\mathcal{G}_d} \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s w} \Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{Y, \dots, Y}_{|w|+1 \text{ разів}}) \tag{5.4}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{N} \sum_{|w|=\ell} \left(\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} A_{w,(0)}\Big) \otimes \cdots \otimes \Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} A_{w,(\ell)}\Big) \right) \star \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{[w]},$$

де $A_{w,(0)} \otimes \cdots \otimes A_{w,(\ell)} = \Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{Y, \dots, Y}_{\ell+1 \text{ разів}})$ з інтерпретацією значень $\Delta_R^{w^\top} f$ як тензорних добутків (зауваження 3.5), позначенням Свідлера без додавання (4.19) *і псевдостепеневим позначенням* (4.21)*, і сума має скінченну кількість ненульових членів.*

Ми зараз встановлюємо єдиність н.к степеневих розвинень для н.к. функцій на нільпотентних матрицях.

Теорема 5.9. *Нехай $Y \in \mathcal{M}^{s\times s}$, $f \in \mathcal{T}^0(\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y); \mathcal{N}_{\mathrm{nc}})$, і припустимо, що*

$$f(X) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s \ell} f_\ell$$

для всіх $m \in \mathbb{N}$, $X \in \mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y; sm)$, і деяких ℓ-лінійних відображень

$$f_\ell \colon \big(\mathcal{M}^{s\times s}\big)^\ell \to \mathcal{N}^{s\times s}, \qquad \ell = 0, 1, \dots$$

(де сума має скінченну кількість ненульових членів). Тоді $f_\ell = \Delta_R^\ell f(Y, \dots, Y)$ для всіх ℓ.

Доведення. За теоремою 5.6, достатньо показати, що коефіцієнти f_ℓ однозначно визначені н.к. функцією f. Для будь-якого фіксованого ℓ і будь-яких Z^1,

$\dots,\ Z^\ell \in \mathcal{M}^{s\times s}$,

$$f\left(\begin{bmatrix} Y & Z^1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & Z^\ell \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f_0 & f_1(Z^1) & \cdots & \cdots & f_\ell(Z^1,\dots,Z^\ell) \\ 0 & f_0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & f_1(Z^\ell) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & f_0 \end{bmatrix}.$$

$(1,\ell+1)$-й елемент матриці справа, тобто значення f_ℓ на довільних ℓ матрицях у $\mathcal{M}^{s\times s}$, є однозначно визначеним за f. (Аргументуючи іншим шляхом, ми бачимо, що $f_\ell = \Delta_R^\ell f(Y,\dots,Y)$ завдяки (3.29).) $\square$

Існує також версія теореми 5.9 у спеціальному випадку $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$ для коефіцієнтів н.к. степеневого ряду уздовж $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$, як у (5.4).

Теорема 5.10. *Нехай $Y \in \mathcal{M}^{s\times s}$, $f \in \mathcal{T}^0(\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R},Y);\mathcal{N}_{\mathrm{nc}})$, і припустимо, що*

$$f(X) = \sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d} \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^m Y\Big)^{\odot_s w} f_w$$

для всіх $m\in\mathbb{N}$, $X \in \mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R},Y;sm)$ і деяких ℓ-лінійних відображень

$$f_w\colon\ \big(\mathcal{R}^{s\times s}\big)^{|w|} \to \mathcal{N}^{s\times s}, \qquad w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$$

(де сума має скінченну кількість ненульових членів). Тоді $f_w = \Delta_R^{w^\top} f(Y,\dots,Y)$ для всіх w.

Доведення. Визначимо ℓ-лінійні відображення $f_\ell\colon\ \Big(\big(\mathcal{R}^{s\times s}\big)^d\Big)^\ell \to \mathcal{N}^{s\times s}$ як

$$f_\ell(Z^1,\dots,Z^\ell) = \sum_{w=g_{i_1}\cdots g_{i_\ell}\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d} f_w(Z^1_{i_1},\dots,Z^\ell_{i_\ell}), \tag{5.5}$$

так що для кожних $m\in\mathbb{N}$ і $Z\in\big(\mathcal{R}^{sm\times sm}\big)^d$,

$$Z^{\odot_s\ell} f_\ell = \sum_{|w|=\ell} Z^{\odot_s w} f_w. \tag{5.6}$$

Звісно,

$$f_w(A^1,\dots,A^\ell) = f_\ell(A^1e_{i_1},\dots,A^\ell e_{i_\ell}) \quad \text{для кожного} \quad w = g_{i_1}\cdots g_{i_\ell}. \tag{5.7}$$

Результат зараз випливає з теореми 5.9 і означення $\Delta_R^{w^\top} f$. $\square$

Зауваження 5.11. Простий наслідок теореми 5.6 або 5.8 - це достатньо явний опис н.к. функцій з $\mathbb{K}_{\rm nc}$ у $\mathcal{W}_{\rm nc}$ для поля $\mathbb{K}$ і векторного простору $\mathcal{W}$ над $\mathbb{K}$. Точніше, нехай Λ_n - множина всіх $X \in \mathbb{K}^{n\times n}$ таких, що всі корені характеристичного многочлена X належать $\mathbb{K}$, нехай $\Lambda = \coprod_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ (звісно, $\Lambda \subseteq \mathbb{K}_{\rm nc}$ - н.к. множина), і нехай $f\colon \Lambda \to \mathcal{W}_{\rm nc}$ - н.к. функція. Для будь-якого $X \in \Lambda_n$, існує оборотна матриця $T \in \mathbb{K}^{n\times n}$ така, що

$$X = T^{-1}\left(\bigoplus_{\lambda} X_\lambda\right) T, \tag{5.8}$$

де додавання береться над всіма різними власними значеннями λ матриці X з алгебраїчними кратностями n_λ і $X_\lambda \in \mathrm{Nilp}_1(\mathbb{K}, \lambda; n_\lambda)$ (якщо ми хочемо, ми можемо взяти за X_λ пряму суму жорданових клітин з власним значенням λ). Звідси випливає, що

$$f(X) = T^{-1}\left(\bigoplus_{\lambda} \sum_{\ell=0}^{n_\lambda} (X_\lambda - I_{n_\lambda}\lambda)^\ell \Delta_R^\ell f(\lambda, \ldots, \lambda)\right) T. \tag{5.9}$$

Навпаки, якщо дані будь-які функції $f_\ell\colon \mathbb{K} \to \mathcal{W}$, $\ell = 0, 1, \ldots$, ми можемо визначити для будь-якої матриці $X \in \Lambda_n$ як вище,

$$f(X) = T^{-1}\left(\bigoplus_{\lambda} \sum_{\ell=0}^{n_\lambda} (X_\lambda - I_{n_\lambda}\lambda)^\ell f_\ell(\lambda)\right) T. \tag{5.10}$$

Можна безпосередньо побачити, що права частина добре визначена незалежно від зображення (5.8) матриці X, і що, якщо $XS = SY$, то $f(X)S = Sf(Y)$; отже, (5.10) визначає н.к. функцію $f\colon \Lambda \to \mathcal{W}_{\rm nc}$, і з теореми 5.9 або 5.10 випливає, що $\Delta_R^\ell f(\lambda, \ldots, \lambda) = f_\ell(\lambda)$.

5.2. Від н.к. степеневих рядів до н.к. функцій

У цьому підрозділі ми розглянемо суму степеневого ряду вигляду

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s \ell} f_\ell \tag{5.11}$$

на нільпотентних матрицях X навколо Y (так, що сума має скінченну кількість ненульових членів). Тут $Y \in \mathcal{M}^{s\times s}$ - даний центр; $X \in \mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y; sm)$, $m = 1, 2, \ldots$; $f_\ell\colon (\mathcal{M}^{s\times s})^\ell \to \mathcal{N}^{s\times s}$, $\ell = 0, 1, \ldots$, - дана послідовність ℓ-лінійних відображень, тобто лінійне відображення $f\colon \mathbf{T}(\mathcal{M}^{s\times s}) \to \mathcal{N}^{s\times s}$; і умови (4.4)–(4.7) є виконані. Зауважимо, що останні умови трівіально задовольняються для будь-якої послідовності f_ℓ у випадку $s = 1$.

Необхідність умов (4.4)–(4.7) на коефіцієнти f_ℓ, щоб сума ряду була н.к. функцією на $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y)$ випливає з теореми 5.6 і зауваження 4.3. Виявляється, що ці умови є також достатніми; це буде випливати з наступної леми.

Лема 5.12. *Нехай $\mathcal{M}$ і $\mathcal{N}$ -модулі над кільцем $\mathcal{R}$. Нехай $Y \in \mathcal{M}^{s\times s}$, і нехай $f_\ell\colon (\mathcal{M}^{s\times s})^\ell \to \mathcal{N}^{s\times s}$, $\ell = 0, 1, \ldots,$ - послідовність ℓ-лінійних відображень, що задовольняють* (4.4)–(4.7). *Нехай $X \in \mathcal{M}^{sm\times sm}$, $\widetilde{X} \in \mathcal{M}^{s\widetilde{m}\times s\widetilde{m}}$ і $S \in \mathcal{R}^{s\widetilde{m}\times sm}$ задовольняють $SX = \widetilde{X}S$. Тоді*

$$
\begin{aligned}
(5.12)\quad & S\left(\sum_{\ell=0}^{N}\Big(X-\bigoplus_{\nu=1}^{m}Y\Big)^{\odot_s\ell}f_\ell\right)-\left(\sum_{\ell=0}^{N}\Big(\widetilde{X}-\bigoplus_{\nu=1}^{\widetilde{m}}Y\Big)^{\odot_s\ell}f_\ell\right)S\\
&=\sum_{k=0}^{N}\left(\Big(\widetilde{X}-\bigoplus_{\nu=1}^{\widetilde{m}}Y\Big)^{\odot_s k}\odot_s\Big(S\bigoplus_{\nu=1}^{m}Y-\bigoplus_{\nu=1}^{\widetilde{m}}YS\Big)\odot_s\Big(X-\bigoplus_{\nu=1}^{m}Y\Big)^{\odot_s(N-k)}\right)f_{N+1}.
\end{aligned}
$$

Доведення. Ми будемо розглядати X, $\widetilde{X}$ і S як блочні матриці розмірів $m\times m$, $\widetilde{m}\times\widetilde{m}$ і $\widetilde{m}\times m$, відповідно, з $s\times s$ блоками. Оскільки $SX = \widetilde{X}S$, ми маємо

$$
\sum_{\beta=1}^{m}S_{\alpha\beta}X_{\beta\gamma}=\sum_{\widetilde{\beta}=1}^{\widetilde{m}}\widetilde{X}_{\alpha\widetilde{\beta}}S_{\widetilde{\beta}\gamma},\quad \alpha=1,\ldots,\widetilde{m},\ \gamma=1,\ldots,m.
$$

Позначимо

$$
L=S\left(\sum_{\ell=0}^{N}\Big(X-\bigoplus_{\nu=1}^{m}Y\Big)^{\odot_s\ell}f_\ell\right),\qquad \widetilde{L}=\left(\sum_{\ell=0}^{N}\Big(\widetilde{X}-\bigoplus_{\nu=1}^{\widetilde{m}}Y\Big)^{\odot_s\ell}f_\ell\right)S.
$$

Тоді

$$
\begin{aligned}
L_{\alpha\gamma}&=\sum_{\beta_0=1}^{m}S_{\alpha\beta_0}\sum_{\ell=0}^{N}\Big[\Big(X-\bigoplus_{\nu=1}^{m}Y\Big)^{\odot_s\ell}f_\ell\Big]_{\beta_0\gamma}\\
&=S_{\alpha\gamma}f_0+\sum_{\ell=1}^{N}\sum_{\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{\ell-1}=1}^{m}S_{\alpha\beta_0}f_\ell(X_{\beta_0\beta_1}-\delta_{\beta_0\beta_1}Y,\ldots,X_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}}-\delta_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}}Y,\\
&\qquad\qquad X_{\beta_{\ell-1}\gamma}-\delta_{\beta_{\ell-1}\gamma}Y),\\
\widetilde{L}_{\alpha\gamma}&=\sum_{\widetilde{\beta}_0=1}^{\widetilde{m}}\sum_{\ell=0}^{N}\Big[\Big(\widetilde{X}-\bigoplus_{\nu=1}^{\widetilde{m}}Y\Big)^{\odot_s\ell}f_\ell\Big]_{\alpha\widetilde{\beta}_0}S_{\widetilde{\beta}_0\gamma}\\
&=f_0S_{\alpha\gamma}+\sum_{\ell=1}^{N}\sum_{\widetilde{\beta}_0,\widetilde{\beta}_1,\ldots,\widetilde{\beta}_{\ell-1}=1}^{\widetilde{m}}f_\ell(\widetilde{X}_{\alpha\widetilde{\beta}_0}-\delta_{\alpha\widetilde{\beta}_0}Y,\widetilde{X}_{\widetilde{\beta}_0\widetilde{\beta}_1}-\delta_{\widetilde{\beta}_0\widetilde{\beta}_1}Y,\ldots,\\
&\qquad\qquad \widetilde{X}_{\widetilde{\beta}_{\ell-2}\widetilde{\beta}_{\ell-1}}-\delta_{\widetilde{\beta}_{\ell-2}\widetilde{\beta}_{\ell-1}}Y)S_{\widetilde{\beta}_{\ell-1}\gamma},
\end{aligned}
$$

де δ_{ij} - символ Кронекера і $f_0 \in \mathcal{W}^{s\times s}$. Застосовуючи (4.4) і (4.5), ми отримаємо, що

$$L_{\alpha\gamma} = f_0 S_{\alpha\gamma} + f_1(S_{\alpha\gamma}Y - YS_{\alpha\gamma}) + \sum_{\beta_0=1}^{m} f_1(S_{\alpha\beta_0}X_{\beta_0\gamma} - S_{\alpha\beta_0}\delta_{\beta_0\gamma}Y)$$
$$+ \sum_{\ell=2}^{N} \sum_{\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{\ell-1}=1}^{m} f_\ell(S_{\alpha\beta_0}X_{\beta_0\beta_1} - S_{\alpha\beta_0}\delta_{\beta_0\beta_1}Y, X_{\beta_1\beta_2} - \delta_{\beta_1\beta_2}Y, \ldots,$$
$$X_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}} - \delta_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}}Y, X_{\beta_{\ell-1}\gamma} - \delta_{\beta_{\ell-1}\gamma}Y)$$
$$+ \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{\ell-1}=1}^{m} f_{\ell+1}(S_{\alpha\beta_0}Y - YS_{\alpha\beta_0}, X_{\beta_0\beta_1} - \delta_{\beta_0\beta_1}Y, \ldots,$$
$$X_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}} - \delta_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}}Y, X_{\beta_{\ell-1}\gamma} - \delta_{\beta_{\ell-1}\gamma}Y).$$

Використовуючи припущення, що $SX = \widetilde{X}S$ і мультілінійність відображень f_ℓ, ми отримаємо, що

$$L_{\alpha\gamma} = f_0 S_{\alpha\gamma} + f_1(S_{\alpha\gamma}Y) - f_1(YS_{\alpha\gamma}) + \sum_{\widetilde{\beta}_0=1}^{\widetilde{m}} f_1(\widetilde{X}_{\alpha\widetilde{\beta}_0}S_{\widetilde{\beta}_0\gamma}) - f_1(S_{\alpha\gamma}Y)$$
$$+ \sum_{\ell=2}^{N} \sum_{\widetilde{\beta}_0=1}^{\widetilde{m}} \sum_{\beta_1,\ldots,\beta_{\ell-1}=1}^{m} f_\ell(\widetilde{X}_{\alpha\widetilde{\beta}_0}S_{\widetilde{\beta}_0\beta_1}, X_{\beta_1\beta_2} - \delta_{\beta_1\beta_2}Y, \ldots, X_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}} - \delta_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}}Y,$$
$$X_{\beta_{\ell-1}\gamma} - \delta_{\beta_{\ell-1}\gamma}Y)$$
$$- \sum_{\ell=2}^{N} \sum_{\beta_1,\ldots,\beta_{\ell-1}=1}^{m} f_\ell(S_{\alpha\beta_1}Y, X_{\beta_1\beta_2} - \delta_{\beta_1\beta_2}Y, \ldots, X_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}} - \delta_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}}Y,$$
$$X_{\beta_{\ell-1}\gamma} - \delta_{\beta_{\ell-1}\gamma}Y)$$
$$+ \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{\ell-1}=1}^{m} f_{\ell+1}(S_{\alpha\beta_0}Y, X_{\beta_0\beta_1} - \delta_{\beta_0\beta_1}Y, \ldots, X_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}} - \delta_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}}Y,$$
$$X_{\beta_{\ell-1}\gamma} - \delta_{\beta_{\ell-1}\gamma}Y)$$
$$- \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{\ell-1}=1}^{m} f_{\ell+1}(YS_{\alpha\beta_0}, X_{\beta_0\beta_1} - \delta_{\beta_0\beta_1}Y, \ldots, X_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}} - \delta_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}}Y,$$
$$X_{\beta_{\ell-1}\gamma} - \delta_{\beta_{\ell-1}\gamma}Y).$$

Після очевидних скорочень і використання мультілінійності f_ℓ, ми отримаємо

$$L_{\alpha\gamma} = f_0 S_{\alpha\gamma} + \sum_{\widetilde{\beta}_0=1}^{\widetilde{m}} f_1((\widetilde{X}_{\alpha\widetilde{\beta}_0} - \delta_{\alpha\widetilde{\beta}_0}Y)S_{\widetilde{\beta}_0\gamma})$$

$$+\sum_{\ell=2}^{N}\sum_{\widetilde{\beta}_0=1}^{\widetilde{m}}\sum_{\beta_1,\dots,\beta_{\ell-1}=1}^{m} f_\ell((\widetilde{X}_{\alpha\widetilde{\beta}_0}-\delta_{\alpha\widetilde{\beta}_0}Y)S_{\widetilde{\beta}_0\beta_1}, X_{\beta_1\beta_2}-\delta_{\beta_1\beta_2}Y,\dots,$$
$$X_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}}-\delta_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}}Y, X_{\beta_{\ell-1}\gamma}-\delta_{\beta_{\ell-1}\gamma}Y)$$
$$+\sum_{\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_{N-1}=1}^{m} f_{N+1}(S_{\alpha\beta_0}Y-YS_{\alpha\beta_0}, X_{\beta_0\beta_1}-\delta_{\beta_0\beta_1}Y,\dots,X_{\beta_{N-2}\beta_{N-1}}-\delta_{\beta_{N-2}\beta_{N-1}}Y,$$
$$X_{\beta_{N-1}\gamma}-\delta_{\beta_{N-1}\gamma}Y).$$

Використовуючи (4.7) і (4.6), ми отримаємо

$$L_{\alpha\gamma}=f_0S_{\alpha\gamma}+\sum_{\widetilde{\beta}_0=1}^{\widetilde{m}} f_1(\widetilde{X}_{\alpha\widetilde{\beta}_0}-\delta_{\alpha\widetilde{\beta}_0}Y)S_{\widetilde{\beta}_0\gamma}+\sum_{\widetilde{\beta}_0=1}^{\widetilde{m}} f_2(\widetilde{X}_{\alpha\widetilde{\beta}_0}-\delta_{\alpha\widetilde{\beta}_0}Y, S_{\widetilde{\beta}_0\gamma}Y-YS_{\widetilde{\beta}_0\gamma})$$
$$+\sum_{\widetilde{\beta}_0=1}^{\widetilde{m}}\sum_{\beta_1=1}^{m} f_2(\widetilde{X}_{\alpha\widetilde{\beta}_0}-\delta_{\alpha\widetilde{\beta}_0}Y, S_{\widetilde{\beta}_0\beta_1}(X_{\beta_1\gamma}-\delta_{\beta_1\gamma}Y))$$
$$+\sum_{\ell=3}^{N}\sum_{\widetilde{\beta}_0=1}^{\widetilde{m}}\sum_{\beta_1,\dots,\beta_{\ell-1}=1}^{m} f_\ell(\widetilde{X}_{\alpha\widetilde{\beta}_0}-\delta_{\alpha\widetilde{\beta}_0}Y, S_{\widetilde{\beta}_0\beta_1}(X_{\beta_1\beta_2}-\delta_{\beta_1\beta_2}Y),$$
$$X_{\beta_2\beta_3}-\delta_{\beta_2\beta_3}Y,\dots,X_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}}-\delta_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}}Y, X_{\beta_{\ell-1}\gamma}-\delta_{\beta_{\ell-1}\gamma}Y)$$
$$+\sum_{\ell=2}^{N}\sum_{\widetilde{\beta}_0=1}^{\widetilde{m}}\sum_{\beta_1,\dots,\beta_{\ell-1}=1}^{m} f_{\ell+1}(\widetilde{X}_{\alpha\widetilde{\beta}_0}-\delta_{\alpha\widetilde{\beta}_0}Y, S_{\widetilde{\beta}_0\beta_1}Y-YS_{\widetilde{\beta}_0\beta_1}, X_{\beta_1\beta_2}-\delta_{\beta_1\beta_2}Y,\dots,$$
$$X_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}}-\delta_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}}Y, X_{\beta_{\ell-1}\gamma}-\delta_{\beta_{\ell-1}\gamma}Y)$$
$$+\sum_{\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_{N-1}=1}^{m} f_{N+1}(S_{\alpha\beta_0}Y-YS_{\alpha\beta_0}, X_{\beta_0\beta_1}-\delta_{\beta_0\beta_1}Y,\dots,$$
$$X_{\beta_{N-2}\beta_{N-1}}-\delta_{\beta_{N-2}\beta_{N-1}}Y, X_{\beta_{N-1}\gamma}-\delta_{\beta_{N-1}\gamma}Y).$$

Використовуючи $SX=\widetilde{X}S$ і мультілінійність відображень f_ℓ, ми отримаємо, що

$$L_{\alpha\gamma}=f_0S_{\alpha\gamma}+\sum_{\widetilde{\beta}_0=1}^{\widetilde{m}} f_1(\widetilde{X}_{\alpha\widetilde{\beta}_0}-\delta_{\alpha\widetilde{\beta}_0}Y)S_{\widetilde{\beta}_0\gamma}$$
$$+\sum_{\widetilde{\beta}_0=1}^{\widetilde{m}} f_2(\widetilde{X}_{\alpha\widetilde{\beta}_0}-\delta_{\alpha\widetilde{\beta}_0}Y, S_{\widetilde{\beta}_0\gamma}Y)-\sum_{\widetilde{\beta}_0=1}^{\widetilde{m}} f_2(\widetilde{X}_{\alpha\widetilde{\beta}_0}-\delta_{\alpha\widetilde{\beta}_0}Y, YS_{\widetilde{\beta}_0\gamma})$$
$$+\sum_{\widetilde{\beta}_0,\widetilde{\beta}_1=1}^{\widetilde{m}} f_2(\widetilde{X}_{\alpha\widetilde{\beta}_0}-\delta_{\alpha\widetilde{\beta}_0}Y, \widetilde{X}_{\widetilde{\beta}_0\widetilde{\beta}_1}S_{\widetilde{\beta}_1\gamma})-\sum_{\widetilde{\beta}_0=1}^{\widetilde{m}} f_2(\widetilde{X}_{\alpha\widetilde{\beta}_0}-\delta_{\alpha\widetilde{\beta}_0}Y, S_{\widetilde{\beta}_0\gamma}Y)$$

$$+\sum_{\ell=3}^{N}\sum_{\widetilde{\beta}_0,\widetilde{\beta}_1=1}^{\widetilde{m}}\sum_{\beta_2,\dots,\beta_{\ell-1}=1}^{m} f_\ell(\widetilde{X}_{\alpha\widetilde{\beta}_0}-\delta_{\alpha\widetilde{\beta}_0}Y,\widetilde{X}_{\widetilde{\beta}_0\widetilde{\beta}_1}S_{\widetilde{\beta}_1\beta_2},X_{\beta_2\beta_3}-\delta_{\beta_2\beta_3}Y,\dots,$$
$$X_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}}-\delta_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}}Y,X_{\beta_{\ell-1}\gamma}-\delta_{\beta_{\ell-1}\gamma}Y)$$
$$-\sum_{\ell=3}^{N}\sum_{\widetilde{\beta}_0=1}^{\widetilde{m}}\sum_{\beta_2,\dots,\beta_{\ell-1}=1}^{m} f_\ell(\widetilde{X}_{\alpha\widetilde{\beta}_0}-\delta_{\alpha\widetilde{\beta}_0}Y,S_{\widetilde{\beta}_0\beta_2}Y,X_{\beta_2\beta_3}-\delta_{\beta_2\beta_3}Y,\dots,$$
$$X_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}}-\delta_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}}Y,X_{\beta_{\ell-1}\gamma}-\delta_{\beta_{\ell-1}\gamma}Y)$$
$$+\sum_{\ell=2}^{N}\sum_{\widetilde{\beta}_0=1}^{\widetilde{m}}\sum_{\beta_1,\dots,\beta_{\ell-1}=1}^{m} f_{\ell+1}(\widetilde{X}_{\alpha\widetilde{\beta}_0}-\delta_{\alpha\widetilde{\beta}_0}Y,S_{\widetilde{\beta}_0\beta_1}Y,X_{\beta_1\beta_2}-\delta_{\beta_1\beta_2}Y,\dots,$$
$$X_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}}-\delta_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}}Y,X_{\beta_{\ell-1}\gamma}-\delta_{\beta_{\ell-1}\gamma}Y)$$
$$-\sum_{\ell=2}^{N}\sum_{\widetilde{\beta}_0=1}^{\widetilde{m}}\sum_{\beta_1,\dots,\beta_{\ell-1}=1}^{m} f_{\ell+1}(\widetilde{X}_{\alpha\widetilde{\beta}_0}-\delta_{\alpha\widetilde{\beta}_0}Y,YS_{\widetilde{\beta}_0\beta_1},X_{\beta_1\beta_2}-\delta_{\beta_1\beta_2}Y,\dots,$$
$$X_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}}-\delta_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}}Y,X_{\beta_{\ell-1}\gamma}-\delta_{\beta_{\ell-1}\gamma}Y)$$
$$+\sum_{\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_{N-1}=1}^{m} f_{N+1}(S_{\alpha\beta_0}Y-YS_{\alpha\beta_0},X_{\beta_0\beta_1}-\delta_{\beta_0\beta_1}Y,\dots,$$
$$X_{\beta_{N-2}\beta_{N-1}}-\delta_{\beta_{N-2}\beta_{N-1}}Y,X_{\beta_{N-1}\gamma}-\delta_{\beta_{N-1}\gamma}Y).$$

Після очевидних скорочень і використання мультілінійності f_ℓ, ми отримаємо

$$L_{\alpha\gamma}=f_0S_{\alpha\gamma}+\sum_{\widetilde{\beta}_0=1}^{\widetilde{m}} f_1(\widetilde{X}_{\alpha\widetilde{\beta}_0}-\delta_{\alpha\widetilde{\beta}_0}Y)S_{\widetilde{\beta}_0\gamma}$$
$$+\sum_{\widetilde{\beta}_0,\widetilde{\beta}_1=1}^{\widetilde{m}} f_2(\widetilde{X}_{\alpha\widetilde{\beta}_0}-\delta_{\alpha\widetilde{\beta}_0}Y,(\widetilde{X}_{\widetilde{\beta}_0\widetilde{\beta}_1}-\delta_{\widetilde{\beta}_0\widetilde{\beta}_1}Y)S_{\widetilde{\beta}_1\gamma})$$
$$+\sum_{\ell=3}^{N}\sum_{\widetilde{\beta}_0,\widetilde{\beta}_1=1}^{\widetilde{m}}\sum_{\beta_2,\dots,\beta_{\ell-1}=1}^{m} f_\ell(\widetilde{X}_{\alpha\widetilde{\beta}_0}-\delta_{\alpha\widetilde{\beta}_0}Y,(\widetilde{X}_{\widetilde{\beta}_0\widetilde{\beta}_1}-\delta_{\widetilde{\beta}_0\widetilde{\beta}_1}Y)S_{\widetilde{\beta}_1\beta_2},X_{\beta_2\beta_3}-\delta_{\beta_2\beta_3}Y,$$
$$\dots,X_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}}-\delta_{\beta_{\ell-2}\beta_{\ell-1}}Y,X_{\beta_{\ell-1}\gamma}-\delta_{\beta_{\ell-1}\gamma}Y)$$
$$+\sum_{\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_{N-1}=1}^{m} f_{N+1}(S_{\alpha\beta_0}Y-YS_{\alpha\beta_0},X_{\beta_0\beta_1}-\delta_{\beta_0\beta_1}Y,\dots,X_{\beta_{N-2}\beta_{N-1}}-\delta_{\beta_{N-2}\beta_{N-1}}Y,$$
$$X_{\beta_{N-1}\gamma}-\delta_{\beta_{N-1}\gamma}Y)$$
$$+\sum_{\widetilde{\beta}_0=1}^{\widetilde{m}}\sum_{\beta_1,\dots,\beta_{N-1}=1}^{m} f_{N+1}(\widetilde{X}_{\alpha\widetilde{\beta}_0}-\delta_{\alpha\widetilde{\beta}_0}Y,S_{\widetilde{\beta}_0\beta_1}Y-YS_{\widetilde{\beta}_0\beta_1},X_{\beta_1\beta_2}-\delta_{\beta_1\beta_2}Y,\dots,$$
$$X_{\beta_{N-2}\beta_{N-1}}-\delta_{\beta_{N-2}\beta_{N-1}}Y,X_{\beta_{N-1}\gamma}-\delta_{\beta_{N-1}\gamma}Y).$$

Продовжуючи цей аргумент, ми отримаємо, що

$$
\begin{aligned}
L_{\alpha\gamma} = f_0 S_{\alpha\gamma} + \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{\widetilde\beta_0,\widetilde\beta_1,\dots,\widetilde\beta_{\ell-1}=1}^{\widetilde m} & f_\ell(\widetilde X_{\alpha\widetilde\beta_0} - \delta_{\alpha\widetilde\beta_0} Y, \widetilde X_{\widetilde\beta_0\widetilde\beta_1} - \delta_{\widetilde\beta_0\widetilde\beta_1} Y, \dots, \\
& \widetilde X_{\widetilde\beta_{\ell-2}\widetilde\beta_{\ell-1}} - \delta_{\widetilde\beta_{\ell-2}\widetilde\beta_{\ell-1}} Y) S_{\widetilde\beta_{\ell-1}\gamma} \\
+ \sum_{k=0}^{N} \sum_{\widetilde\beta_0,\dots,\widetilde\beta_{k-1}=1}^{\widetilde m} \sum_{\beta_k,\dots,\beta_{N-1}=1}^{m} & f_{N+1}(\widetilde X_{\alpha\widetilde\beta_0} - \delta_{\alpha\widetilde\beta_0} Y, \widetilde X_{\widetilde\beta_0\widetilde\beta_1} - \delta_{\widetilde\beta_0\widetilde\beta_1} Y, \dots, \\
& \widetilde X_{\widetilde\beta_{k-2}\widetilde\beta_{k-1}} - \delta_{\widetilde\beta_{k-2}\widetilde\beta_{k-1}} Y, S_{\widetilde\beta_{k-1}\beta_k} Y - Y S_{\widetilde\beta_{k-1}\beta_k}, X_{\beta_k\beta_{k+1}} - \delta_{\beta_k\beta_{k+1}} Y, \dots, \\
& X_{\beta_{N-2}\beta_{N-1}} - \delta_{\beta_{N-2}\beta_{N-1}} Y, X_{\beta_{N-1}\gamma} - \delta_{\beta_{N-1}\gamma} Y) \\
= \Big[\widetilde L + \sum_{k=0}^{N} \Big(\widetilde X - \bigoplus_{\nu=1}^{\widetilde m} Y\Big)^{\odot_s k} \odot_s \Big(S \bigoplus_{\nu=1}^{m} Y - \bigoplus_{\nu=1}^{\widetilde m} Y S\Big) \odot_s \Big(X - \bigoplus_{\nu=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s N-k} & f_{N+1}\Big]_{\alpha\gamma}.
\end{aligned}
$$

□

Теорема 5.13. *Сума f ряду* (5.11) *- н.к. функція на* $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y)$ *із значеннями у* $\mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$.

Зауваження 5.14. За теоремою 5.9, коефіцієнти f_ℓ (тобто лінійне відображення $f\colon \mathbf{T}(\mathcal{M}^{s\times s}) \to \mathcal{N}^{s\times s}$) однозначно визначені сумою відповідного ряду, чому ми й використовуємо таке саме позначення як для н.к. функції, так і для лінійного відображення.

Доведення теореми 5.13. Нехай

$$X \in \mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y; sm, \kappa), \quad \widetilde X \in \mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y; s\widetilde m, \widetilde\kappa)$$

і $S \in \mathcal{R}^{s\widetilde m \times sm}$. Нехай $N \geq \kappa + \widetilde\kappa$. Тоді

$$f(X) = \sum_{\ell=0}^{N} \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s \ell} f_\ell, \quad f(\widetilde X) = \sum_{\ell=0}^{N} \Big(\widetilde X - \bigoplus_{\alpha=1}^{\widetilde m} Y\Big)^{\odot_s \ell} f_\ell.$$

За лемою 5.12, $Sf(X) - f(X)S = 0$, оскільки для кожного $k\colon 0 \leq k \leq N$ маємо $k \geq \widetilde\kappa$ або $N - k \geq \kappa$, отже права частина (5.12) зникає. Таким чином, f є інваріантною щодо переплетень, тобто н.к. функцією. □

У спеціальному випадку $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$ ми можемо розглядати замість (5.11) н.к. степеневий ряд уздовж $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$, тобто ряд вигляду

$$\sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d} \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s w} f_w \tag{5.13}$$

на спільно нільпотентних наборах d матриць X навколо Y (так що сума має скінченну кількість ненульових членів). Тут $Y \in (\mathcal{R}^{s\times s})^d$ - даний центр; $X \in \mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R}, Y; sm)$, $m = 1, 2, \ldots$; $f_w\colon (\mathcal{R}^{s\times s})^{|w|} \to \mathcal{N}^{s\times s}$, $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$, є дана послідовність $|w|$-лінійних відображень; і умови (4.14)–(4.17) задовольняються. Ряд (5.13) може бути також записаний як

$$\sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d}\left(\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} A_{w,(0)}\Big)\otimes\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} A_{w,(1)}\Big)\otimes\cdots\otimes\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} A_{w,(|w|)}\Big)\right)\star\Big(X-\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{[w]}.$$

Тут

$$f_w = A_{w,(0)}\otimes A_{w,(1)}\otimes\cdots\otimes A_{w,(|w|)} \in \mathcal{N}^{s\times s}\otimes\underbrace{\mathcal{R}^{s\times s}\otimes\cdots\otimes\mathcal{R}^{s\times s}}_{|w|\ \text{times}},$$

з інтерпретацією мультілінійних відображень f_w як тензорних добутків (зауваження 3.4), позначенням Свідлера без додавання (4.19) і псевдостепеневим позначенням (4.21). Зауважимо, що умови (4.14)–(4.17) тривіально задовольняються для будь-якої послідовності f_w у випадку $s = 1$. У цьому випадку (5.13) є справжнім н.к. степеневим рядом

$$\sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}}(X - I_m\mu)^w f_w,$$

де $Y = \mu \in \mathcal{R}^d$ і $f_w \in \mathcal{N}$.

Ми визначаємо послідовність ℓ-лінійних відображень $f_\ell\colon \Big((\mathcal{R}^{s\times s})^d\Big)^\ell \to \mathcal{N}^{s\times s}$, $\ell = 0, 1, \ldots$, як (5.5), так що (5.6) і (5.7) виконуються. Отже, сума ряду вигляду (5.13) співпадає з сумою відповідного ряду вигляду (5.11). Подібно до зауваження 4.5, умови (4.14)–(4.17) на мультілінійні відображення f_w є еквівалентними до умов (4.4)–(4.7) на мультілінійні відображення f_ℓ. Отже, теорема 5.13 тягне за собою такий факт:

Теорема 5.15. *Сума f ряду* (5.13) *є н.к. функцією на* $\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R}, Y)$ *із значеннями у* $\mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$.

Розділ 6

Н.к. многочлени і многочлени від матричних елементів

Нехай

$$p = \sum_{w \in \mathcal{G}_d \colon |w| \le L} p_w x^w \in \mathcal{N}\langle x_1, \dots, x_d \rangle \tag{6.1}$$

- н.к. многочлен степеня L у $x_1, \dots, x_d$ з коефіцієнтами у модулі $\mathcal{N}$ над кільцем $\mathcal{R}$. Обчислення p на наборах $X = (X_1, \dots, X_d) \in (\mathcal{R}^{n \times n})^d$,

$$p(X) = \sum_{w \in \mathcal{G}_d \colon |w| \le L} X^w p_w \in \mathcal{N}^{n \times n}, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{6.2}$$

визначає н.к. функцію на $(\mathcal{R}^d)_{\mathrm{nc}}$ із значеннями у $\mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$. Зауважимо, що н.к. многочлен p визначається цією н.к. функцією однозначно: принаймні коли модуль $\mathcal{N}$ вільний, це випливає з відсутності тотожностей для $n \times n$ матриць над $\mathcal{R}$ (тобто н.к. многочленів, що зникають на $n \times n$ матрицях над $\mathcal{R}$) для всіх $n = 1, 2, \dots$ – дивись [**130**, приклад 1.4.4 і теорема 1.4.5, с. 22], а також випливає з теореми 5.10 обмеженням н.к. многочлена до $\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R})$. Ми будемо часто ототожнювати два н.к. об'єкти, (6.1) і (6.2), і використовувати одне і те ж позначення для обох. Ми спостерігаємо, що для кожного n, н.к. функція p є многочленом від dn^2 комутуючих змінних $(X_i)_{jk}$, $i = 1, \dots, d$; $j, k = 1, \dots, n$, степеня не більше L із значеннями у $\mathcal{N}^{n \times n}$.

Теорема 6.1. *Нехай f - н.к. функція на $(\mathbb{K}^d)_{\mathrm{nc}}$, де $\mathbb{K}$ - нескінченне поле, із значеннями у $\mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ (так що $\mathcal{N}$ є векторним простором над $\mathbb{K}$). Припустимо, що для кожного n, $f(X_1, \dots, X_d)$ - поліноміальна функція від dn^2 комутуючих змінних $(X_i)_{jk}$, $i = 1, \dots, d$; $j, k = 1, \dots, n$, із значеннями у $\mathcal{N}^{n \times n}$. Припустимо також, що степені цих поліноміальних функцій від комутуючих змінних $(X_i)_{jk}$ обмежені. Тоді f - н.к. многочлен з коефіцієнтами у $\mathcal{N}$.*

Доведення. Спочатку ми спостерігаємо, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ і $\ell \in \mathbb{N}$ функція $\Delta_R^\ell f(X^0, \dots, X^\ell)(Z^1, \dots, Z^\ell)$ поліноміальна за комутуючими змінними

$$(X_i^\alpha)_{jk}, (Z_i^\beta)_{jk} \colon \alpha = 0, \dots, \ell,\ \beta = 1, \dots, \ell;\ i = 1, \dots, d;\ j, k = 1, \dots, n,$$

з коефіцієнтами у $\mathcal{N}^{n \times n}$. Це випливає безпосередньо з (3.29).

Друге, ТТ формула (4.1) дає, що

$$\begin{aligned} f(Y + tZ) = \sum_{\ell=0}^{N} t^\ell \Delta_R^\ell f(Y, \dots, Y)(Z, \dots, Z) \\ + t^{N+1} \Delta_R^{N+1} f(Y, \dots, Y, Y + tZ)(Z, \dots, Z) \end{aligned} \tag{6.3}$$

для $n \in \mathbb{N}$, $Y, Z \in (\mathbb{K}^{n\times n})^d$, $t \in \mathbb{K}$ і для $N = 0, 1, \ldots$. Для фіксованих n, Y і Z, як $f_{Y,Z}(t) := f(Y + tZ)$, так і $\Delta_R^{N+1}(Y, \ldots, Y, Y + tZ)(Z, \ldots, Z)$ є многочленами від t з коефіцієнтами у $\mathcal{N}^{n\times n}$.

Нехай L - максимальна степінь $f(X_1, \ldots, X_d)$ як поліноміальної функції від dn^2 комутуючих змінних $(X_i)_{jk}$, $i = 1, \ldots, d$; $j, k = 1, \ldots, n$, коли n змінюється від 1 до ∞. Тоді для будь-яких фіксованих n, Y і Z степінь многочлена $f_{Y,Z}(t)$ є не більше L. Отже, для $N = L$ залишковий член у (6.3) зникає тотожньо як функція від t, і

$$f_{Y,Z}(t) = \sum_{\ell=0}^{L} t^\ell \Delta_R^\ell f(Y, \ldots, Y)(Z, \ldots, Z).$$

Покладаючи $t = 1$ і $X = Y + Z$ (так що $f(X) = f_{Y,Z}(1)$), ми отримаємо

$$f(X) = \sum_{\ell=0}^{L} \Delta_R^\ell f(\underbrace{Y, \ldots, Y}_{\ell+1 \text{ times}})(\underbrace{X - Y, \ldots, X - Y}_{\ell \text{ times}}). \tag{6.4}$$

Зауважимо, що це є (рівномірно за n) скінченна версія ТТ формули (4.1). Зокрема, покладаючи $Y = 0$ і використовуючи (4.10), ми отримаємо

$$f(X) = \sum_{|w|\le L} X^w \, \Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{|w|+1 \text{ разів}}) \tag{6.5}$$

(порівняй з (5.2)). Отже, f - н.к. многочлен з коефіцієнтами у $\mathcal{N}$. □

Зауваження 6.2. Зауважимо, що якщо $\mathbb{K}$ -поле характеристики нуль, то за (6.3) і класичною формулою Тейлора для однієї змінної, для всіх ℓ: $0 \le \ell \le ML$ ми маємо

$$\Delta_R^\ell f(Y, \ldots, Y)(Z, \ldots, Z) = \frac{1}{\ell!} \left. \frac{d^\ell f_{Y,Z}}{dt^\ell} \right|_{t=0}. \tag{6.6}$$

Наступний приклад показує, що припущення обмеженості степенів у теоремі 6.1 не може бути опущено.

Приклад 6.3. Припустимо, що ми маємо послідовність однорідних многочленів $p_n \in \mathbb{K}\langle x_1, x_2\rangle$ із строго зростаючими степенями α_n таких, що p_n зникає на $(\mathbb{K}^{n\times n})^2$. Наприклад, ми можемо взяти

$$p_n = \sum_{\pi\in S_{n+1}} \operatorname{sign}(\pi)\, x_1^{\pi(1)-1} x_2 \cdots x_1^{\pi(n+1)-1} x_2$$

як у [**130**] або [**62**], де S_{n+1} - симетрична група на $n + 1$ елементах і $\operatorname{sign}(\pi)$ - знак перестановки π; ясно, що $\alpha_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ у цьому випадку. Визначимо н.к. функцію $f\colon (\mathbb{K}^2)_{\mathrm{nc}} \to \mathbb{K}_{\mathrm{nc}}$ як

$$f(X_1, X_2) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(X_1, X_2),$$

де сума - добре визначена: для $n \in \mathbb{N}$ і $(X_1, X_2) \in (\mathbb{K}^{n\times n})^2$ члени $p_k(X_1, X_2)$, $k \geq n$, всі зникають. Звісно, для всіх n, $f(X_1, X_2)$ - поліноміальна функція від $2n^2$ комутуючих змінних $(X_1)_{jk}$, $(X_2)_{jk}$, $j, k = 1, \ldots, n$, з коефіцієнтами у $\mathbb{K}^{n\times n}$. Проте, f не є н.к. многочленом. Справді, припустимо, що $f = q$, де $q \in \mathbb{K}\langle x_1, x_2\rangle$. Нехай $\deg q = L$, і нехай $q = \sum_{j=0}^{L} q_j$, з $q_j \in \mathbb{K}\langle x_1, x_2\rangle$ однорідними степеня j. Визначимо послідовність однорідних многочленів

$$h_j = \begin{cases} p_k, & j = \alpha_k \text{ для деякого } k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases}$$

степеня j. Тоді ми можемо написати

$$f(X_1, X_2) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j(X_1, X_2) = \sum_{j=0}^{\alpha_{n-1}} h_j(X_1, X_2)$$

для $(X_1, X_2) \in (\mathbb{K}^{n\times n})^2$. Порівнюючи

$$f(tX_1, tX_2) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j(X_1, X_2)\, t^j$$

з

$$q(tX_1, tX_2) = \sum_{j=0}^{L} q_j(X_1, X_2)\, t^j$$

як многочлени від $t \in \mathbb{K}$ для фіксованого (X_1, X_2), ми робимо висновок, що $h_j(X_1, X_2) = 0$ для всіх $j > L$. За відсутністю поліноміальних тотожностей для матриць всіх розмірів, $h_j = 0$ для всіх $j > L$. Оскільки послідовність $\{\alpha_n\}$ - строго зростаюча, отримаємо протиріччя.

Ми зараз покажемо, що приклад 6.3 відображає загальну ситуацію: будь-яка н.к. функція на $(\mathbb{K}^d)_{\mathrm{nc}}$, яка для кожного матричного розміру є многочлен від матричних елементів, може бути записана як сума н.к. многочлена і нескінченного ряду н.к. многочленів, що зникають на матрицях зростаючих розмірів.

Теорема 6.4. *Нехай f - н.к. функція на $(\mathbb{K}^d)_{\mathrm{nc}}$, де $\mathbb{K}$ - нескінченне поле, із значеннями у $\mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ (так що $\mathcal{N}$ є векторним простором над $\mathbb{K}$). Припустимо, що для кожного n, $f(X_1, \ldots, X_d)$ - поліноміальна функція степеня L_n від dn^2 комутуючих змінних $(X_i)_{jk}$, $i = 1, \ldots, d$; $j, k = 1, \ldots, n$, із значеннями у $\mathcal{N}^{n\times n}$. Тоді існує єдина послідовність однорідних н.к. многочленів $f_j \in \mathcal{N}\langle x_1, \ldots, x_d\rangle$ степеня j, $j = 0, 1, \ldots,$ таких, що для всіх $n \in \mathbb{N}$,*

- *f_j зникає на $(\mathbb{K}^{n\times n})^d$ для всіх $j > L_n$,*
- *якщо $L_n > -\infty$ (де ми користуємось звичайною домовленістю, що $\deg 0 = -\infty$), то f_{L_n} не зникає тотожньо на $(\mathbb{K}^{n\times n})^d$,*

і для $X \in (\mathbb{K}^{n\times n})^d$,

$$f(X) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(X) = \sum_{j=0}^{L_n} f_j(X). \tag{6.7}$$

Зауваження 6.5. Оскільки $n \times n$ матриці можуть бути вкладені у $(n+1) \times (n+1)$ матриці додачею нульових рядку і стовпця, послідовність степенів $\{L_n\}$ є неспадною. Вона з часом стабілізується у деякому L тоді і тільки тоді, коли вона обмежена, у якому випадку ми бачимо, що f_j, $j > L$, зникає на $(\mathbb{K}^{n\times n})^d$ для всіх n; це означає, що f є н.к. многочленом, тобто теорема 6.1 випливає з теореми 6.4.

Зауваження 6.6. Розвинення (6.7) може бути записано у вигляді

$$f(X) = \sum_{j=0}^{L_1} f_j(X) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=L_k+1}^{L_{k+1}} f_j(X). \tag{6.8}$$

Тут k-й член у нескінченному ряді є н.к. многочленом степеня L_{k+1}, який зникає на $\left(\mathbb{K}^{k\times k}\right)^d$ і не зникає тотожньо на $\left(\mathbb{K}^{(k+1)\times(k+1)}\right)^d$.

Зауваження 6.7. Застосовуючи теорему 6.4 до н.к. функції f у прикладі 6.3, ми бачимо, що $f_j = h_j$, $j = 0, 1, \ldots$. Якщо многочлени p_n обрані так, що для кожного n, p_n не зникає тотожньо на $\left(\mathbb{K}^{(n+1)\times(n+1)}\right)^d$, то $L_n = \alpha_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$ (і $L_1 = -\infty$).

Доведення теореми 6.4. Доведення є подібним до того, що у теоремі 6.1. Ми спочатку отримаємо, точно як у доведенні теореми 6.1, що для будь-яких фіксованих n, Y і Z степінь многочлена $f_{Y,Z}(t)$ є не більше L_n. Отже, ми маємо

$$f_{Y,Z}(t) = \sum_{\ell=0}^{L_n} t^\ell \Delta_R^\ell f(Y, \ldots, Y)(Z, \ldots, Z).$$

Покладаючи $t = 1$ і $X = Y + Z$ (так що $f(X) = f_{Y,Z}(1)$), ми отримаємо

$$f(X) = \sum_{\ell=0}^{L_n} \Delta_R^\ell f(\underbrace{Y, \ldots, Y}_{\ell+1 \text{ разів}})(\underbrace{X - Y, \ldots, X - Y}_{\ell \text{ разів}}). \tag{6.9}$$

Зауважимо, що для кожного n, це є скінченною версією ТТ формули (4.1). Зокрема, покладаючи $Y = 0$ і використовуючи (4.10), ми отримаємо, що

$$f(X) = \sum_{\ell=0}^{L_n} \Delta_R^\ell f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{\ell+1 \text{ разів}})(\underbrace{X, \ldots, X}_{\ell \text{ разів}}) = \sum_{\ell=0}^{L_n} \sum_{|w|=\ell} X^w \, \Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{l+1 \text{ разів}}). \tag{6.10}$$

Це дає розвинення (6.7) з

$$f_j = \sum_{|w|=j} \Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{0,\dots,0}_{j+1 \text{ разів}})\, x^w. \tag{6.11}$$

Факт, що f_j зникає на $(\mathbb{K}^{n\times n})^d$ для всіх $j > L_n$, і факт, що f_{LM_n} не зникає тотожньо на $(\mathbb{K}^{n\times n})^d$, випливають з припущення на степінь $f(X_1,\dots,X_d)$ як поліноміальної функції від матричних елементів $(X_i)_{ab}$, $i=1,\dots,d$; $a,b=1,\dots,n$. Нарешті, н.к. многочлени f_j у розвиненні (6.7) визначені однозначно тому, що їх обчислення $f_j(X)$ є однорідними компонентами степеня j для $f(X)$ розглянутого як многочлен від елементів матриці X_i. □

Н.к. функція $f\colon (\mathbb{K}^d)_{\rm nc} \to \mathcal{N}_{\rm nc}$, де $\mathcal{N}$ - векторний простір над полем $\mathbb{K}$, буде називатися *локально поліноміальною*, якщо для кожного n, $f(X_1,\dots,X_d)$ - поліноміальна функція від dn^2 комутуючих змінних $(X_i)_{jk}$, $i=1,\dots,d$; $j,k=1,\dots,n$, із значеннями у $\mathcal{N}^{n\times n}$. Ми позначаємо $\mathbb{K}$-векторний простір локально поліноміальних н.к. функцій з $\mathbb{K}^d_{\rm nc}$ у $\mathcal{N}_{\rm nc}$ як $\mathcal{N}_{\rm loc}\langle x_1,\dots,x_d\rangle$; він є, очевидно, модулем над $\mathbb{K}$-алгеброю $\mathbb{K}_{\rm loc}\langle x_1,\dots,x_d\rangle$. Для кожного n, ми визначаємо підмодуль $\mathcal{J}^n_{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{N}_{\rm loc}\langle x_1,\dots,x_d\rangle$, що складається з локально поліноміальних н.к. функцій, що зникають на $(\mathbb{K}^{n\times n})^d$. Підмодулі $\mathcal{J}^n_{\mathcal{N}}$, $n=1,2,\dots$, становлять спадаючу послідовність з нульовим перетином. Зокрема, ми отримаємо спадаючу послідовність ідеалів $\mathcal{J}^n_{\mathbb{K}}$, $n=1,2,\dots$, у алгебрі $\mathbb{K}_{\rm loc}\langle x_1,\dots,x_d\rangle$ з нульовим перетином. Розглядання ідеалів $\mathcal{J}^n_{\mathbb{K}}$ як фундаментальної системи околів нуля перетворює $\mathbb{K}_{\rm loc}\langle x_1,\dots,x_d\rangle$ у топологічне кільце. Аналогічно, розглядання підмодулів $\mathcal{J}^n_{\mathcal{N}}$ як фундаментальної системи околів нуля перетворює $\mathcal{N}_{\rm loc}\langle x_1,\dots,x_d\rangle$ у топологічний модуль над топологічним кільцем $\mathbb{K}_{\rm loc}\langle x_1,\dots,x_d\rangle$. Формули (6.7) і (6.11) означають, що TT ряд $f \in \mathcal{N}_{\rm loc}\langle x_1,\dots,x_d\rangle$ збігається до f у цій топології як ряд однорідних многочленів; отже, простір $\mathcal{N}\langle x_1,\dots,x_d\rangle$ н.к. многочленів є щільним у просторі $\mathcal{N}_{\rm loc}\langle x_1,\dots,x_d\rangle$ локально поліноміальних н.к. функцій. Фактично, $\mathcal{N}_{\rm loc}\langle x_1,\dots,x_d\rangle$ є повним як топологічний модуль – він є поповненням модуля $\mathcal{N}\langle x_1,\dots,x_d\rangle$.

Ми можемо поширити теорему 6.1 до налаштування довільних (можливо, нескінченновимірних) векторних просторів над нескінченним полем $\mathbb{K}$. Нехай $\mathcal{M}$ і $\mathcal{N}$ - векторні простори над $\mathbb{K}$. Н.к. функція $f\colon \mathcal{M}_{\rm nc} \to \mathcal{N}_{\rm nc}$ буде називатися *поліноміальною на зрізах*, якщо $f|_{\mathcal{M}^{n\times n}}$ - многочлен на зрізах деякого степеня L_n для кожного $n=1,2,\dots$; тобто для кожних $Y,Z \in \mathcal{M}^{n\times n}$, $f_{Y,Z}(t) = f(Y+tZ)$ є многочленом від однієї змінної з коефіцієнтами у $\mathcal{N}^{n\times n}$ степеня не більше L_n, і $\deg f_{Y,Z} = L_n$ для деяких $Y,Z \in \mathcal{M}^{n\times n}$ (для випадку $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, дивись [**88**, підрозділ 26.2] або [**110**, розділ 1]).

Н.к. многочлен над $\mathcal{M}$ з коефіцієнтами у $\mathcal{N}$ - це формальна сума

$$p = \sum_{\ell=0}^{L} p_\ell, \tag{6.12}$$

де $p_\ell\colon \mathcal{M}\times\cdots\times\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ - ℓ-лінійні вдображення; ми кажемо, що p має степінь L, якщо $p_L\neq 0$. Ми можемо обчислити p на $X\in\mathcal{M}^{n\times n}$ як

$$p(X)=\sum_{\ell=0}^{L}X^{\odot\ell}p_\ell\in\mathcal{N}^{n\times n},\quad n=1,2,\ldots, \tag{6.13}$$

що дає н.к. функцію на $\mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ із значеннями у $\mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$. Обмежуючи цю н.к. функцію до $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M})$, ми виводимо з теореми 5.9, що коефіцієнти p_ℓ однозначно визначені н.к. функцією p, так що ми можемо ототожнювати н.к. многочлен (6.12) з н.к. функцією (6.13) і використовувати одне позначення для обох. Зауважимо, що н.к. многочлен над $\mathbb{K}^d$ може бути ототожненим з н.к. многочленом (6.1) від d н.к. невизначених, як у (4.9), (5.5)–(5.7) (з $s=1$).

Якщо p - н.к. многочлен над $\mathcal{M}$ степеня L, то н.к. функція p на $\mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ є многочленом на зрізах, з $\max_{n\in\mathbb{N}}L_n=L$. Як у спеціальному випадку $\mathcal{M}=\mathbb{K}^d$, зворотне є також вірним; доведення - таке саме, с точністю до позначень, як і у теоремі 6.1.

Теорема 6.8. *Нехай $f\colon\mathcal{M}_{\mathrm{nc}}\to\mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. функція, яка є поліноміальною на зрізах. Припустимо, що степені L_n многочленів $f|_{\mathcal{M}^{n\times n}}$, $n=1,2,\ldots$, обмежені. Тоді f є н.к. многочленом над $\mathcal{M}$ з коефіцієнтами у $\mathcal{N}$.*

Існує також аналогічне узагальнення теореми 6.4.

Розділ 7

Н.к. аналітичність і збіжність ТТ рядів

У цьому підрозділі ми обговорюємо аналітичність н.к. функцій і збіжність ТТ рядів. Виявляється, що дуже слабкі припущення обмеженності тягнуть за собою аналітичність. Існують два істотно різні налаштування: одне, де припущення обмежености виконуються у кожній матричній вимірності окремо, і друге, де припущення обмежености виконуються рівномірно для всіх матричних вимірностей. Ми припускаємо у цьому підрозділі, що основне кільце $\mathcal{R}$ є поле $\mathbb{C}$; багато результатів мають аналоги для поля $\mathbb{R}$, дивись зауваження 7.11, 7.35, і 7.56.

7.1. Аналітичні н.к. функції

У цьому підрозділі ми будемо використовувати теорію аналітичних функцій з векторів у вектори; наше основне посилання - це [**88**, розділ III, 3.16–3.19 і розділ XXVI], дивись також [**110**].

Нехай $\mathcal{V}$ - векторний простір над $\mathbb{C}$. Множина $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ називається *скінченно відкритою*, якщо для кожного $n \in \mathbb{N}$ множина $\Omega_n \subseteq \mathcal{V}^{n\times n}$ є скінченно відкритою, тобто перетин Ω_n з будь-яким скінченновимірним підпростором $\mathcal{U}$ у $\mathcal{V}^{n\times n}$ є відкритим у евклідовій топології $\mathcal{U}$. Ми зауважимо, що скінченно відкрита н.к. множина Ω є допустимою справа і зліва. Справді, якщо $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$, $Z \in \mathcal{V}^{n\times m}$ і $W \in \mathcal{V}^{m\times n}$, то множини

$$\Omega_{n+m} \cap \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & Z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

і

$$\Omega_{n+m} \cap \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ W & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

- відкриті у відповідних двохвимірних просторах і містять $\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}$, і таким чином $\begin{bmatrix} X & tZ \\ 0 & Y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} X & 0 \\ tW & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n+m}$ для достатньо малого $t \in \mathbb{C}$.

Нехай $\mathcal{W}$ - банахів простір над $\mathbb{C}$. *Допустима система матричних норм над* $\mathcal{W}$ - це послідовність норм $\|\cdot\|_n$ на $\mathcal{W}^{n\times n}$, $n = 1, 2, \ldots$, що задовольняють наступні дві умови:

- Для кожних $n, m \in \mathbb{N}$ існують $C_1(n,m)$, $C_1'(n,m) > 0$ такі, що для всіх $X \in \mathcal{W}^{n\times n}$ і $Y \in \mathcal{W}^{m\times m}$,

(7.1)
$$C_1(n,m)^{-1} \max\{\|X\|_n, \|Y\|_m\} \le \|X \oplus Y\|_{n+m} \le C_1'(n,m) \max\{\|X\|_n, \|Y\|_m\}.$$

- Для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує $C_2(n) > 0$ таке, що для всіх $X \in \mathcal{W}^{n\times n}$ і $S, T \in \mathbb{C}^{n\times n}$,

$$\|SXT\|_n \leq C_2(n)\|S\|\,\|X\|_n\|T\|, \tag{7.2}$$

де $\|\cdot\|$ позначає операторну норму у $\mathbb{C}^{n\times n}$ відносно стандартної евклідової норми у $\mathbb{C}^n$.

Пропозиція 7.1. *Умови* (7.1)–(7.2) *еквівалентні обмеженості* ін'єкцій

$$\iota_{ij}\colon \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}^{n\times n}, \quad w \longmapsto E_{ij}w, \tag{7.3}$$

і проєкцій

$$\pi_{ij}\colon \mathcal{W}^{n\times n} \longrightarrow \mathcal{W}, \quad W = [w_{i'j'}]_{i',j'=1,\dots,n} \longmapsto w_{ij}, \tag{7.4}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$ *і всіх* $i, j = 1, \dots, n$*; тут* $E_{ij} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *має* (i, j)*-й елемент рівний* 1 *і всі інші елементи рівними* 0*. Більше того, умови* (7.1)–(7.2) *тягнуть за собою, що для будь-якого* $s \in \mathbb{N}$*,* блочні ін'єкції

$$\iota^s_{ij}\colon \mathcal{W}^{s\times s} \longrightarrow \mathcal{W}^{ns\times ns} \cong \left(\mathcal{W}^{s\times s}\right)^{n\times n}, \quad W \longmapsto E_{ij} \otimes W, \tag{7.5}$$

і блочні проєкції

$$\begin{gathered}\pi^s_{ij}\colon \mathcal{W}^{ns\times ns} \cong \left(\mathcal{W}^{s\times s}\right)^{n\times n} \longrightarrow \mathcal{W}^{s\times s},\\ W = [([w_{ab}]_{a,b=1,\dots,s})_{i'j'}]_{i',j'=1,\dots,n} \longmapsto ([w_{ab}]_{a,b=1,\dots,s})_{ij} = W_{ij},\end{gathered} \tag{7.6}$$

є обмеженими.

Доведення. Нехай $s, n \in \mathbb{N}$ і $W \in \mathcal{W}^{s\times s}$. Використовуючи (7.1) і (7.2), ми отримаємо

$$\begin{aligned}\|\iota^s_{ij}(W)\|_{ns} &= \|E_{ij} \otimes W\|_{ns} = \|(P_{i1} \otimes I_s)(E_{11} \otimes W)(P_{1j} \otimes I_s\|_{ns}\\ &\leq C_2(ns)\|E_{11} \otimes W\|_{ns} = C_2(ns)\|W \oplus 0_{(ns-s)\times(ns-s)}\|_{ns}\\ &\leq C_2(ns)C_1'(s, ns-s)\|W\|_s.\end{aligned}$$

Тут $P_{ij} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ - матриця перестановки ($i \neq j$). Отже, блочні ін'єкції ι^s_{ij} (зокрема, ін'єкції ι_{ij}) є обмеженими.

Далі, нехай $s, n \in \mathbb{N}$ і $W \in \mathcal{W}^{ns\times ns} \cong (\mathcal{W}^{s\times s})^{n\times n}$. Використовуючи (7.1) і (7.2), ми отримаємо

$$\begin{aligned}\|(\pi^s_{ij}(W)\|_s &= \|W_{ij}\|_s \leq C_1(s, ns-s)\|W_{ij} \oplus 0_{(ns-s)\times(ns-s)}\|_{ns}\\ &= C_1(s, ns-s)\|(E_{1i} \otimes I_{\mathcal{W}^{s\times s}})W(E_{j1} \otimes I_{\mathcal{W}^{s\times s}})\|_{ns}\\ &\leq C_1(s, ns-s)C_2(ns)\|W\|_{ns}.\end{aligned}$$

Отже, блочні проєкції π_{ij}^s (зокрема, проєкції π_{ij}) є обмеженими.

Припустимо зараз, що ін'єкції (7.3) і проєкції (7.4) є всі обмежені. Нехай $n, m \in \mathbb{N}$ і $X \in \mathcal{W}^{n\times n}$, $Y \in \mathcal{W}^{m\times m}$. Тоді ми отримаємо

$$\begin{aligned}
\|X \oplus Y\|_{n+m} &= \Big\| \sum_{i,j=1}^{n} \iota_{ij}(x_{ij}) + \sum_{i,j=1}^{m} \iota_{n+i,n+j}(y_{ij}) \Big\|_{n+m} \\
&\le \sum_{i,j=1}^{n} \|\iota_{ij}(x_{ij})\|_{n+m} + \sum_{i,j=1}^{m} \|\iota_{n+i,n+j}(y_{ij})\|_{n+m} \\
&\le \sum_{i,j=1}^{n} \|\iota_{ij}\| \cdot \|x_{ij}\|_1 + \sum_{i,j=1}^{m} \|\iota_{n+i,n+j}\| \cdot \|y_{ij}\|_1 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \|\iota_{ij}\| \cdot \|\pi_{ij}(X)\|_1 + \sum_{i,j=1}^{m} \|\iota_{n+i,n+j}\| \cdot \|\pi_{ij}(Y)\|_1 \\
&\le \Big(\sum_{i,j=1}^{n} \|\iota_{ij}\| \cdot \|\pi_{ij}\| + \sum_{i,j=1}^{m} \|\iota_{n+i,n+j}\| \cdot \|\pi_{ij}\| \Big) \max\{\|X\|_n, \|Y\|_m\}
\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}
\max\{\|X\|_n, \|Y\|_m\} &\le \max\Big\{ \Big\| \sum_{i,j=1}^{n} \iota_{ij}(x_{ij}) \Big\|_n, \Big\| \sum_{i,j=1}^{m} \iota_{ij}(y_{ij}) \Big\|_m \Big\} \\
&\le \max\Big\{ \sum_{i,j=1}^{n} \|\iota_{ij}\| \cdot \|x_{ij}\|_1, \sum_{i,j=1}^{m} \|\iota_{ij}\| \cdot \|y_{ij}\|_1 \Big\} \\
&= \max\Big\{ \sum_{i,j=1}^{n} \|\iota_{ij}\| \cdot \|\pi_{ij}(X \oplus Y)\|_1, \sum_{i,j=1}^{m} \|\iota_{ij}\| \cdot \|\pi_{n+i,n+j}(X \oplus Y)\|_1 \Big\} \\
&\le \max\Big\{ \sum_{i,j=1}^{n} \|\iota_{ij}\| \cdot \|\pi_{ij}\|, \sum_{i,j=1}^{m} \|\iota_{ij}\| \cdot \|\pi_{n+i,n+j}\| \Big\} \|X \oplus Y\|_{n+m}.
\end{aligned}$$

Отже, (7.1) виконується.

Припустимо, що ін'єкції (7.3) і проєкції (7.4) є всі обмежені. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $X \in \mathcal{W}^{n\times n}$ і $S, T \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Тоді

$$\begin{aligned}
\|SXT\|_n &= \Big\| \sum_{i,j=1}^{n} \iota_{ij}((SXT)_{ij}) \Big\|_n = \Big\| \sum_{i,j=1}^{n} \iota_{ij} \Big(\sum_{k,\ell=1}^{n} s_{ik} x_{k\ell} t_{\ell j} \Big) \Big\|_n \\
&\le \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \|\iota_{ij}\| \cdot |s_{ik}| \cdot \|x_{k\ell}\|_1 \cdot |t_{\ell j}| = \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \|\iota_{ij}\| \cdot |s_{ik}| \cdot \|\pi_{k\ell}(X)\|_1 \cdot |t_{\ell j}|
\end{aligned}$$

$$\leq \Big(\sum_{i,j=1}^{n} \|\iota_{ij}\|\Big)\Big(\sum_{k,\ell=1}^{n} \|\pi_{k\ell}\|\Big)\Big(\max_{i,k=1,\dots,n} |s_{ik}|\Big)\|X\|_n\Big(\max_{\ell,j=1,\dots,n} |t_{\ell j}|\Big)$$

$$\leq \Big(\sum_{i,j=1}^{n} \|\iota_{ij}\|\Big)\Big(\sum_{k,\ell=1}^{n} \|\pi_{k\ell}\|\Big)\|S\|\|X\|_n\|T\|,$$

тобто (7.2) виконується. □

Пропозиція 7.1 означає, що послідовність норм $\|\cdot\|_n$ на $\mathcal{W}^{n\times n}$ є допустимою системою матричних норм над $\mathcal{W}$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{W}^{n\times n}$ є гомеоморфним до прямого добутку n^2 копій $\mathcal{W}$ для кожного n. Зокрема, будь-які дві допустимих системи матричних норм над $\mathcal{W}$ призводять до еквівалентних норм на $\mathcal{W}^{n\times n}$ для кожного n, і для будь-якої допустимої системи матричних норм над $\mathcal{W}$ простори $\mathcal{W}^{n\times n}$ є всі повні.

Нехай $\mathcal{V}$ - векторний простір, нехай $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ - скінченно відкрита н.к. множина, і нехай $\mathcal{W}$ - банахів простір з допустимою системою матричних норм над $\mathcal{W}$. Н.к. функція $f\colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ називається *локально обмеженою на зрізах*, якщо для кожного $n \in \mathbb{N}$ функція $f|_{\Omega_n}$ є локально обмеженою на зрізах, тобто для кожного $X \in \Omega_n$ і $Z \in \mathcal{V}^{n\times n}$ існує $\epsilon > 0$ таке, що $f(X + tZ)$ обмежене для $|t| < \epsilon$. Н.к. функція $f\colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ називається *диференційованою за Гато, або G-диференційованою*, якщо для кожного $n \in \mathbb{N}$ функція $f|_{\Omega_n}$ є G-диференційованою, тобто для кожного $X \in \Omega_n$ і $Z \in \mathcal{V}^{n\times n}$ G-похідна f в X у напрямку Z,

$$\delta f(X)(Z) = \lim_{t\to 0} \frac{f(X+tZ) - f(X)}{t} = \frac{d}{dt} f(X+tZ)\Big|_{t=0},$$

існує. У цьому разі f є *аналітичною на зрізах*, тобто для кожного $X \in \Omega_n$ і $Z \in \mathcal{V}^{n\times n}$, $f(X + tZ)$ - аналітична функція від t в околі 0. За теоремою Хартогса [**140**, с. 28], f є аналітичною на $\mathcal{U} \cap \Omega_n$ як функція кількох комплексних змінних для кожного n і кожного скінченновимірного підпростору $\mathcal{U}$ у $\mathcal{V}^{n\times n}$. Ми також зауважимо, що $\delta f(X)\colon \mathcal{V}^{n\times n} \to \mathcal{W}^{n\times n}$ - лінійний оператор [**88**, теорема 26.3.2].

Нехай $\mathcal{X}$ - векторний простір, і нехай $Y \in \mathcal{X}$. Множина $\Upsilon \subseteq \mathcal{X}$ називається *повною круговою* (або *c-зіркою навколо* Y у термінології [**88**, означення 3.16.1]), якщо для кожного $X \in \Upsilon$ ми маємо, що $Y + t(X - Y) \in \Upsilon$ для кожного $t \in \mathbb{C}$ з $|t| \leq 1$.

Теорема 7.2. *Нехай н.к. функція $f\colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ - локально обмежена на зрізах. Тоді*

(1) *f G-диференційована.*

(2) *Для кожних $n \in \mathbb{N}$, $Y \in \Omega_n$, $Z \in \mathcal{V}^{n\times n}$ і кожного $N \in \mathbb{N}$,*

$$\frac{1}{N!}\frac{d^N}{dt^N} f(Y+tZ)\Big|_{t=0} = \Delta_R^N f(\underbrace{Y,\dots,Y}_{N+1\ \text{разів}})(\underbrace{Z,\dots,Z}_{N\ \text{разів}}).$$

(3) *Для кожних* $n \in \mathbb{N}$ *і* $Y \in \Omega_n$, *нехай*

$$\Upsilon(Y) = \{X \in \Omega_n \colon Y + t(X - Y) \in \Omega_n \text{ для всіх } t \in \mathbb{C} \text{ з } |t| \leq 1\}.$$

Тоді $\Upsilon(Y)$ *є максимальною повною круговою множиною навколо* Y, *що міститься у* Ω_n *і є скінченно відкритою. Для кожного* $X \in \Upsilon(Y)$,

$$f(X) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \Delta_R^\ell f(\underbrace{Y, \ldots, Y}_{\ell+1 \text{ разів}})(\underbrace{X - Y, \ldots, X - Y}_{\ell \text{ разів}}), \tag{7.7}$$

де ряд збігається абсолютно.

(4) *Ряд у* (7.7) *збігається рівномірно на компактних підмножинах* $\mathcal{U} \cap \Upsilon(Y)$ *для кожного скінченновимірного підпростору* $\mathcal{U}$ *у* $\mathcal{V}^{n\times n}$. *Більше того, для кожної такої компактної множини* K *існує скінченно відкрита повна кругова множина* Υ_K *навколо* Y, $K \subseteq \Upsilon_K \subseteq \Upsilon(Y)$, *така, що*

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sup_{X \in \Upsilon_K} \|\Delta_R^\ell f(\underbrace{Y, \ldots, Y}_{\ell+1 \text{ разів}})(\underbrace{X - Y, \ldots, X - Y}_{\ell \text{ разів}})\|_n < \infty. \tag{7.8}$$

Доведення. (1),(2). Нехай $n, N \in \mathbb{N}$, $Y \in \Omega_n$ і $Z \in \mathcal{V}^{n\times n}$ - зафіксовані. Оскільки н.к. множина Ω - скінченно відкрита, $\underbrace{Y \oplus \ldots \oplus Y}_{N+2 \text{ разів}} \in \Omega_{n(N+2)}$ і існує $r > 0$ таке, що $(N+2) \times (N+2)$ матриця над $\mathcal{V}^{n\times n}$,

$$\begin{bmatrix} Y & rZ & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & rZ \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & Y \end{bmatrix},$$

належить $\Omega_{n(N+2)}$. Оскільки множина $\Omega_{n(N+2)}$ є скінченно відкритою і f є локально обмеженою на зрізах, існує $\epsilon_1 > 0$ таке, що

$$\begin{bmatrix} Y & rZ & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & Y & rZ \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & Y + trZ \end{bmatrix} \in \Omega_{n(N+2)},$$

і

$$f\left(\begin{bmatrix} Y & rZ & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & Y & rZ \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & Y + trZ \end{bmatrix}\right)$$

є обмеженим для $t \in \mathbb{C}\colon |t| < \epsilon_1$. Оскільки банахів простір $\mathcal{W}$ є забезпеченим допустимою системою матричних норм над $\mathcal{W}$, за теоремою 3.11, $\Delta_R^{N+1} f(Y, \dots, Y, Y + trZ)(rZ, \dots, rZ)$ є обмеженим для $t \in \mathbb{C}\colon |t| < \epsilon_1$. Далі, оскільки множина Ω_n є скінченно відкритою, існує $\epsilon_2 > 0$ таке, що $Y + trZ \in \Omega_n$ для всіх $t \in \mathbb{C}\colon |t| < \epsilon_2$. Відповідно до ТТ формули (4.1), ми маємо, що для $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ і $|t| < \epsilon$,

$$f(Y + trZ) = \sum_{\ell=0}^{N} \Delta_R^{\ell} f(Y, \dots, Y)(trZ, \dots, trZ) \\ + \Delta_R^{N+1} f(Y, \dots, Y, Y + trZ)(trZ, \dots, trZ),$$

або для $|t| < \epsilon r$, що

$$f(Y + tZ) = \sum_{\ell=0}^{N} t^{\ell} \Delta_R^{\ell} f(Y, \dots, Y)(Z, \dots, Z) \\ + t^{N+1} \Delta_R^{N+1} f(Y, \dots, Y, Y + tZ)(Z, \dots, Z). \tag{7.9}$$

Оскільки $\Delta_R^{N+1} f(Y, \dots, Y, Y + tZ)(Z, \dots, Z)$ є обмеженим для $|t| < \epsilon r$, $f(Y + tZ)$ є N разів диференційованою як функція від t в $t = 0$, і рівність в частині (2) виконується. Звісно, частина (1) є вірною як спеціальний випадок (2), де $N = 1$.

(3). Факт, що $\Upsilon(Y)$ є максимальною повною круговою множиною навколо Y, що міститься у Ω_n, випливає безпосередньо з означення $\Upsilon(Y)$.

Факт, що множина $\Upsilon(Y)$ є скінченно відкритою, можна отримати наступним чином. Нехай $\mathcal{U}$ - скінченновимірний підпростір у $\mathcal{V}^{n \times n}$. Тоді

$$\mathcal{U} \cap \Upsilon(Y) = \{X \in \mathcal{U} \cap \Omega_n \colon Y + t(X - Y) \in \Omega_n \text{ для всіх } t \in \mathbb{C} \text{ з } |t| \le 1\}.$$

Припустимо, що нам дана норма $\|\cdot\|$ на просторі $\operatorname{span}\{Y\} + \mathcal{U}$. (Оскільки цей простір скінченновимірний, всі норми на ньому є еквівалентними.) Нехай $X \in \mathcal{U} \cap \Upsilon(Y)$. Тоді для кожного $t \in \overline{\mathbb{D}}$ існує відкрита куля B_t з центром в $Y + t(X - Y)$ у просторі $\operatorname{span}\{Y\} + \mathcal{U}$, що міститься у відкритій множині $(\operatorname{span}\{Y\} + \mathcal{U}) \cap \Omega_n$. Оскільки множина $S := \{Y + t(X - Y) \colon |t| \le 1\}$ є компактною у $\operatorname{span}\{Y\} + \mathcal{U}$, існує скінченна кількість куль B_{t_k}, $k = 1, \dots, m$, що покриває S. Нехай R_k - радіуси B_{t_k}. Оскільки для кожного $t \in \overline{\mathbb{D}}$ існує $k\colon 1 \le k \le m$ таке, що $Y + t(X - Y) \in B_{t_k}$, ми маємо, що

$$\phi(t) := \max_{1 \le k \le m} \{R_k - |t - t_k| \|X - Y\|\} > 0.$$

Звісно, функція ϕ є неперервною на $\overline{\mathbb{D}}$, отже

$$R := \min_{t \in \overline{\mathbb{D}}} \phi(t) > 0.$$

Тоді для кожного $t \in \overline{\mathbb{D}}$ існує $k_0\colon 1 \le k_0 \le m$ таке, що

$$R_{k_0} - |t - t_{k_0}| \|X - Y\| = \phi(t).$$

Отже, ми маємо

$$Y+t(X+Z-Y)=Y+t_{k_0}(X-Y)+(t-t_{k_0})(X-Y)+tZ\in(\operatorname{span}\{Y\}+\mathcal{U})\cap\Omega_n$$

для кожного $Z\in\operatorname{span}\{Y\}+\mathcal{U}$ з $\|Z\|<R$, оскільки

$$\|(t-t_{k_0})(X-Y)+tZ\|\le|t-t_{k_0}|\|X-Y\|+|t|\|Z\|<R_{k_0}$$

і $Y+t(X+Z-Y)\in B_{t_{k_0}}$. Зокрема, $Y+t(X+Z-Y)\in(\operatorname{span}\{Y\}+\mathcal{U})\cap\Omega_n$ є вірним для кожних $t\in\overline{\mathbb{D}}$ і $Z\in\mathcal{U}$ з $\|Z\|<R$. (Звісно, індукована норма на $\mathcal{U}$ еквівалентна будь-якій іншій нормі на $\mathcal{U}$.) Отже, $X+Z\in\mathcal{U}\cap\Upsilon(Y)$. Ми робимо висновок, що множина $\mathcal{U}\cap\Upsilon(Y)$ відкрита у $\mathcal{U}$, і таким чином множина $\Upsilon(Y)$ є скінченно відкритою.

З частин (1) і (2) випливає, що для кожного $X\in\Upsilon(Y)$ функція $f(Y+t(X-Y))$ аналітична за t на замкненому крузі $\{t\in\mathbb{C}\colon|t|\le1\}$ (дивись зауваження про аналітичність на зрізах перед цією теоремою), і

$$f(Y+t(X-Y))=\sum_{\ell=0}^{\infty}t^{\ell}\Delta_R^{\ell}f(Y,\dots,Y)(X-Y,\dots,X-Y),\quad|t|\le1,$$

де ряд збігається абсолютно. Зокрема, це є вірним для $t=1$, що дає останнє твердження у частині (3).

(4). Нехай $\mathcal{U}$ - скінченновимірний підпростір у $\mathcal{V}^{n\times n}$. Тоді, звісно, $(\operatorname{span}\{Y\}+\mathcal{U})\cap\Upsilon(Y)$ є повною круговою множиною навколо Y, яка є відкритою у $\operatorname{span}\{Y\}+\mathcal{U}$. За частиною (1), f є G-диференційованою у Ω, і зокрема у $(\operatorname{span}\{Y\}+\mathcal{U})\cap\Upsilon(Y)$. За зауваженням перед цією теоремою, f є аналітичною у $(\operatorname{span}\{Y\}+\mathcal{U})\cap\Upsilon(Y)$ як функція кількох комплексних змінних. Точніше, якщо ми оберемо деякий базис $\{E_j\}_{j=1,\dots,d}$ у $\operatorname{span}\{Y\}+\mathcal{U}$ і напишемо $X-Y=\sum_{j=1}^{d}z_jE_j$, то $g(z):=f(X)$ є аналітичною функцією кількох комплексних змінних, $z=(z_1,\dots,z_d)$, у повній круговій області з центром $z=0$. Оскільки $\Delta_R^{\ell}f(Y,\dots,Y)$ є ℓ-лінійною формою, ряд у (7.7) за z-координатами співпадає з рядом однорідних многочленів у тейлоровському розвиненні $g(z)$. За [**140**, теорема I.3.3], цей ряд збігається рівномірно на будь-якій компактній підмножині K_Y у $(\operatorname{span}\{Y\}+\mathcal{U})\cap\Upsilon(Y)$. Зокрема, він збігається рівномірно на компактній множині $K:=K_Y\cap\mathcal{U}$ (хіба що остання множина є порожньою). З другого боку, якщо дана будь-яка компактна множина K у $\mathcal{U}\cap\Upsilon(Y)$, існує $\delta>0$ таке, що множина

$$K_Y:=\{X+sY\colon X\in K,\ s\in\mathbb{C},|s|\le\delta\}$$

міститься у $(\operatorname{span}\{Y\}+\mathcal{U})\cap\Upsilon(Y)$. Звісно, K_Y є компактною множиною і $K=K_Y\cap\mathcal{U}$. Отже, ми можемо зробити висновок, що ряд у (7.7) збігається рівномірно на компактних підмножинах $\mathcal{U}\cap\Upsilon(Y)$.

Друге твердження у частині (4) випливає з [**88**, теорема 26.3.8]. $\square$

Зауваження 7.3. Факт, що *G-диференціал* $\delta f(X)\colon \mathcal{V}^{n\times n} \to \mathcal{W}^{n\times n}$ - лінійний оператор, випливає також з теореми 7.2(2) для $N = 1$, оскільки $\delta f(X) = \Delta_R f(X, X)$. Загальніше, ми визначаємо *N-й G-диференціал* $\delta^N f(X)\colon \mathcal{V}^{n\times n} \to \mathcal{W}^{n\times n}$ як

$$\delta^N f(X)(Z) = \frac{d^N}{dt^N} f(X + tZ)\Big|_{t=0}.$$

Відомо [**88**, теорема 26.3.5], що $\delta^N f(X)(Z)$ - однорідний многочлен степеня N від Z, тобто $\delta^N f(X)(\alpha Z + \beta W)$ - однорідний мноочлен степеня N від двох комплексних змінних α і β для будь-яких Z і W. Ми спостерігаємо, що це також випливає з теореми 7.2(2), оскільки

$$\frac{1}{N!}\delta^N f(X) = \Delta_R^N f(\underbrace{X, \dots, X}_{N+1 \text{ разів}}). \tag{7.10}$$

Нехай $\mathcal{V}$ - банахів простір, забезпечений допустимою системою матричних норм над $\mathcal{V}$. Ми будемо казати, що множина $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ - *відкрита*, якщо для кожних $n \in \mathbb{N}$ і $Y \in \Omega_n$ існує $\delta_n > 0$ таке, що відкрита куля

$$B(Y, \delta_n) := \{X \in \mathcal{V}^{n\times n}\colon \|X - Y\|_n < \delta_n\}$$

міститься у Ω_n. Звісно, відкрита множина є скінченно відкритою.

Нехай $\mathcal{V}$ і $\mathcal{W}$ - банахові простори, забезпечені допустимими системами матричних норм над $\mathcal{V}$ і над $\mathcal{W}$, і нехай $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ - відкрита н.к. множина. Н.к. функція $f\colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ називається *локально обмеженою*, якщо для кожного $n \in \mathbb{N}$ функція $f|_{\Omega_n}$ є локально обмеженою, тобто для кожного $Y \in \Omega_n$ існує $\delta_n > 0$ таке, що f - обмежена на $B(Y, \delta_n)$. Звісно, локально обмежена н.к. функція є локально обмеженою на зрізах.

Нехай $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ - відкрита н.к. множина. Н.к. функція $f\colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ називається *диференційованою за Фреше, або F-диференційованою*, якщо для кожного $n \in \mathbb{N}$ функція $f|_{\Omega_n}$ - F-диференційована, тобто $f|_{\Omega_n}$ - G-диференційована і для будь-якого $X \in \Omega_n$ лінійний оператор $\delta f(X)\colon \mathcal{V}^{n\times n} \to \mathcal{W}^{n\times n}$ є обмеженим. Як було показано Цорном у [**158**], у цьому випадку

$$\lim_{\|Z\|_n \to 0} \frac{\|f(X + Z) - f(X) - \delta f(X)(Z)\|_n}{\|Z\|_n} = 0$$

для всіх $X \in \Omega_n$. Н.к. функція $f\colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ називається *аналітичною*, якщо для кожного $n \in \mathbb{N}$ функція $f|_{\Omega_n}$ є аналітичною, тобто $f|_{\Omega_n}$ - локально обмежена і G-диференційована. За [**88**, теорема 3.17.1], у цьому випадку $f|_{\Omega_n}$ є також неперервною і F-диференційованою. Отримаємо тоді, що аналітична н.к. функція $f\colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ є неперервною (тобто всі її обмеження $f|_{\Omega_n}$ - неперервні) і F-диференційованою.

Теорема 7.4. *Нехай н.к. функція $f\colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ - локально обмежена. Тоді, на додачу до висновків з теореми 7.2, f є аналітичною. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $Y \in \Omega_n$,*

і нехай Υ - відкрита повна кругова множина навколо Y така, що $\Upsilon \subseteq \Omega_n$ і f - обмежена на Υ. Для кожного $\epsilon > 0$, TT ряд у (7.7) збігається рівномірно на множині

$$\Upsilon_\epsilon := \{X \in \Upsilon \colon Y + (1+\epsilon)(X - Y) \in \Upsilon\}.$$

Більше того,

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sup_{X \in \Upsilon_\epsilon} \|\Delta_R^\ell f(\underbrace{Y, \dots, Y}_{\ell+1 \text{ разів}})(\underbrace{X - Y, \dots, X - Y}_{\ell \text{ разів}})\|_n < \infty. \tag{7.11}$$

Доведення. Оскільки f - локально обмежена, f є також локально обмеженою на зрізах. За теоремою 7.2, f є G-диференційованою. Отже, f є аналітичною.

Припустимо, що $\|f(X)\|_n \leq M$ для деякого $M > 0$ і всіх $X \in \Upsilon$. Тоді для будь-якого $Z \in \mathcal{V}^{n\times n}$ з $Y + Z \in \Upsilon$ функція $f(Y + tZ)$ аналітична за t на замкненому крузі $\{t \in \mathbb{C} \colon |t| \leq 1\}$, і нерівності Коші

$$\frac{1}{N!} \left\| \frac{d^N}{dt^N} f(Y + tZ)\Big|_{t=0} \right\|_n \leq M$$

виконуються для кожного $N \in \mathbb{N}$. За теоремою 7.2(2) і однорідністю степеня N у Z для $\Delta_R^N f(Y, \dots, Y)(Z, \dots, Z)$, ми отримаємо наступну оцінку для всіх $X \in \Upsilon_\epsilon$:

$$\|\Delta_R^N f(Y, \dots, Y)(X - Y, \dots, X - Y)\|_n \leq \frac{M}{(1+\epsilon)^N}.$$

Це тягне за собою збіжність ряду у (7.11), і таким чином рівномірну збіжність TT ряду у (7.7). □

Відмітимо важливий спеціальний випадок теореми 7.4.

Наслідок 7.5. *Нехай н.к. функція $f \colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ - локально обмежена. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ і $Y \in \Omega_n$, нехай $\delta_n = \sup\{r > 0 \colon f \text{ обмежена на } B(Y, r)\}$. Тоді TT ряд у (7.7) збігається абсолютно і рівномірно на кожній відкритій кулі $B(Y, r) \subsetneq B(Y, \delta_n)$. Більше того,*

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sup_{X \in B(Y,r)} \|\Delta_R^\ell f(\underbrace{Y, \dots, Y}_{\ell+1 \text{ разів}})(\underbrace{X - Y, \dots, X - Y}_{\ell \text{ разів}})\|_n < \infty. \tag{7.12}$$

Наслідок 7.6. *Нехай $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ - відкрита н.к. множина. Тоді н.к. функція $f \colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ є локально обмеженою тоді і тільки тоді, коли f є неперервною, тоді і тільки тоді, коли f є F-диференційованою, тоді і тільки тоді, коли f є аналітичною.*

Зауваження 7.7. Факт, що $\delta f(X) \colon \mathcal{V}^{n\times n} \to \mathcal{W}^{n\times n}$ - обмежений лінійний оператор для будь-якого $X \in \Omega_n$ (і, значить, f є F-диференційованою), випливає також з рівності $\delta f(X) = \Delta_R f(X, X)$. Справді, $\Delta_R f(X, X)(Z)$ - це $(1, 2)$ блочний

елемент матриці $f\left(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & X \end{bmatrix}\right)$. Оскільки f є локально обмеженою, існує $\delta > 0$ таке, що $f\left(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & X \end{bmatrix}\right)$ обмежене, коли $\|Z\|_n < \delta$. Але тоді такою ж є $\Delta_R f(X,X)(Z)$, оскільки система матричних норм над $\mathcal{W}$ є допустимою. Загальніше, є відомим [**88**, теореми 26.3.5 і 26.3.6], що N-й G-диференціал $\delta^N f(X)\colon \mathcal{V}^{n\times n} \to \mathcal{W}^{n\times n}$ є обмеженим однорідним многочленом степеня N, тобто

$$\|\delta^N f(X)(Z)\|_n \le C\|Z\|_n^N$$

для деякого $C > 0$. Це також випливає з (7.10), оскільки $\Delta_R^N f(X,\dots,X)(Z,\dots,Z)$ є $(1, N+1)$ блочним елементом $(N+1)\times(N+1)$ матриці

$$f\left(\begin{bmatrix} X & Z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & Z \\ 0 & \dots & \dots & 0 & X \end{bmatrix}\right),$$

дивись теорему 3.11. З доведення теореми 7.4 випливає, що, більше того, існують додатні константи K і ρ такі, що

$$\|\Delta_R^N f(X,\dots,X)(Z,\dots,Z)\|_n \le K\rho^N\|Z\|_n^N. \tag{7.13}$$

Результати про збіжність, теореми 7.2 і 7.4, дозволяють нам написати нескінченні н.к. степеневі розвинення з центром у матриці $Y \in \Omega_s$ у матричних розмірах кратних s, як у теоремі 4.2.

Теорема 7.8. *Припустимо, що $\mathcal{V}$ - векторний простір над $\mathbb{C}$, $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ - скінченно-відкрита н.к. множина, і $\mathcal{W}$ - банахів простір з допустимою системою матричних норм над $\mathcal{W}$. Нехай $f\colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. функція, яка є локально обмеженою на зрізах, і нехай $Y \in \Omega_s$. Тоді для довільного $m \in \mathbb{N}$,*

$$f(X) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\right)^{\odot_s \ell} \Delta_R^\ell f(\underbrace{Y,\dots,Y}_{\ell+1 \text{ разів}}), \tag{7.14}$$

де ряд збігається абсолютно і рівномірно на компактних підмножинах $\mathcal{U} \cap \Upsilon(\bigoplus_{\alpha=1}^m Y)$ для будь-якого скінченновимірного підпростору $\mathcal{U}$ у $\mathcal{V}^{sm\times sm}$. Тут $\Upsilon(\bigoplus_{\alpha=1}^m Y)$ є максимальною повною круговою множиною навколо $\bigoplus_{\alpha=1}^m Y$, яка міститься у Ω_{sm}, як у теоремі 4.2(3). (Зауважимо, що $\coprod_{m=1}^\infty \Upsilon\left(\bigoplus_{\alpha=1}^m Y\right)$ є н.к. множиною.)

Якщо, більше того, $\mathcal{V}$ - банахів простір з допустимою системою матричних норм над $\mathcal{V}$, Ω - відкрита н.к. множина і f - локально обмежена, то TT ряд

у (7.14) *збігається рівномірно на* Υ_ϵ *для кожного* $\epsilon > 0$ *і кожного* Υ *- відкритої повної кругової множини навколо* $\bigoplus_{\alpha=1}^m Y$, *що міститься у* Ω_{sm} *і такої, що* f *обмежена на* Υ, *де* Υ_ϵ *визначене як у теоремі 7.4. Як спеціальний випадок, TT ряд збігається рівномірно на кожній відкритій кулі* $B(\bigoplus_{\alpha=1}^m Y, r) \subsetneq B(\bigoplus_{\alpha=1}^m Y, \delta_{sm})$, *де* $B(\bigoplus_{\alpha=1}^m Y, \delta_{sm})$ *визначене як у наслідку 7.5.*

Зокрема, якщо $\mu \in \Omega_1$, *то* (7.14) *стає*

$$f(X) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (X - I_m\mu)^{\odot\ell}\, \Delta_R^\ell f(\underbrace{\mu, \ldots, \mu}_{\ell+1 \text{ разів}}). \tag{7.15}$$

Ми маємо наступну теорему єдиності для збіжних степеневих розвинень н.к. функції.

Теорема 7.9. *Припустимо, що* $\mathcal{V}$ *- векторний простір над* $\mathbb{C}$, $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\rm nc}$ *- скінченно-відкрита множина і* $\mathcal{W}$ *- банахів простір з допустимою системою матричних норм над* $\mathcal{W}$. *Нехай* $f\colon \Omega \to \mathcal{W}_{\rm nc}$ *- G-диференційована н.к. функція і* $Y \in \Omega_s$. *Припустимо, що*

$$f(X) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^m Y\Big)^{\odot_s \ell} f_\ell,$$

для $X \in \Gamma_{sm}$, $m = 1, 2, \ldots$, *де* Γ *- скінченно-відкрита підмножина у* Ω, *що містить* $\bigoplus_{\alpha=1}^m Y$ *для кожного* $m = 1, 2, \ldots$, *і* $f_\ell\colon (\mathcal{V}^{s\times s})^\ell \to \mathcal{W}^{s\times s}$ *- ℓ-лінійні відображення,* $\ell = 0, 1, \ldots$. *Тоді*

$$f_\ell = \Delta_R^\ell f(\underbrace{Y, \ldots, Y}_{\ell+1 \text{ разів}}).$$

Доведення. Оскільки Γ - скінченно-відкрита, для кожних $Z^1, \ldots, Z^\ell \in \mathcal{V}^{s\times s}$ існує дійсне $r > 0$ таке, що

$$X = \begin{bmatrix} Y & rZ^1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & rZ^\ell \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & Y \end{bmatrix} \in \Gamma_{\ell+1}.$$

Як у доведенні теореми 5.9, ми бачимо, що $f_\ell(rZ^1, \ldots, rZ^\ell)$, і значить,

$$f_\ell(Z^1, \ldots, Z^\ell) = r^{-\ell} f_\ell(rZ^1, \ldots, rZ^\ell),$$

однозначно визначене значенням $f(X)$. З другого боку, якщо $r > 0$ достатньо мале, ми маємо $X \in \Upsilon(\bigoplus_{\alpha=1}^{\ell+1} Y)$ і ряд (7.14) збігається – дивись теорему 7.2 і теорему 7.8. Тоді ми маємо за (3.29), що

$$f_\ell(Z^1, \ldots, Z^\ell) = \Delta_R^\ell f(Y, \ldots, Y)(Z^1, \ldots, Z^\ell).$$

□

У випадку, коли простір $\mathcal{V}$ скінченновимірний, так що ми можемо припустити без втрати загальності, що $\mathcal{V} = \mathbb{C}^d$ (забезпечене допустимою системою матричних норм), ми можемо розкласти кожний член збіжного TT ряду, використовуючи часткові різницево-диференціальні оператори вищого порядку, як у наслідку 4.4 і теоремі 4.6. Ми зауважимо, що у цьому випадку скінченно-відкрита н.к. множина - це те ж саме, що й відкрита н.к. множина, і G-диференційована н.к. функція - те ж саме, що й F-диференційована н.к. функція.

Теорема 7.10. *Припустимо, що $\Omega \subseteq (\mathbb{C}^d)_{\mathrm{nc}}$ - відкрита н.к. множина і $\mathcal{W}$ - банахів простір з допустимою системою матричних норм над $\mathcal{W}$. Нехай $f\colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. функція, яка є локально обмеженою на зрізах. Тоді f - аналітична і для будь-яких $s \in \mathbb{N}$, $Y \in \Omega_s$ і довільного $m \in \mathbb{N}$,*

$$(7.16)\quad f(X) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s \ell} \Delta_R^{\ell} f(\underbrace{Y, \dots, Y}_{\ell+1 \text{ разів}})$$
$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\sum_{|w|=\ell} \left(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} A_{w,(0)} \otimes \cdots \otimes \bigoplus_{\alpha=1}^{m} A_{w,(\ell)} \right) \star \left(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y \right)^{[w]} \right),$$

де ряд збігається абсолютно і рівномірно на компактних підмножинах множини $\Upsilon\left(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\right)$. Тут $\Upsilon\left(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\right)$ - максимальна повна кругова множина навколо $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y$, що міститься у Ω_{sm}, як у теоремі 4.2(3),

$$A_{w,(0)} \otimes \cdots \otimes A_{w,(\ell)} = \Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{Y, \dots, Y}_{\ell+1 \text{ разів}}),$$

з інтерпретацією тензорних добутків для значень $\Delta_R^{w^\top} f$ (зауваження 3.5), позначенням Свідлера без додавання (4.19) *і псевдостепеневим позначенням* (4.21).

Зокрема, якщо $\mu \in \Omega_1$ і $Y = \mu$, то (7.16) *стає*

$$(7.17)\qquad f(X) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \Big(\sum_{|w|=\ell} (X - I_m \mu)^w \, \Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{\mu, \dots, \mu}_{\ell+1 \text{ разів}}) \Big).$$

Зауваження 7.11. Результати цього підрозділу є мішаної природи: некомутативної і комплексно-аналітичної. Отже, вони допускають тільки часткові аналоги у дійсному випадку. Нехай $\mathcal{V}$ - векторний простір над $\mathbb{R}$, нехай $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ - скінченно відкрита н.к. множина, і нехай $\mathcal{W}$ - банахів простір над $\mathbb{R}$ з допустимою системою матричних норм над $\mathcal{W}$. (Всі позначення вище вводяться точно так, як і у комплексному випадку.) Якщо н.к. функція $f\colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ - локально обмежена на зрізах, то подібно до теореми 7.2(1), f є G-диференційованою. Більше того, подібно до теореми 7.2(2), $f(Y + tZ)$ є нескінченно багато разів диференційована у 0 як функція від $t \in \mathbb{R}$ для кожних $n \in \mathbb{N}$, $Y \in \Omega_n$ і $Z \in \mathcal{V}^{n \times n}$, і

$$\frac{1}{N!} \frac{d^N}{dt^N} f(Y + tZ)\Big|_{t=0} = \Delta_R^N f(Y, \dots, Y)(Z, \dots, Z), \qquad N = 1, 2, \dots$$

виконується.

Це не означає, що $f(Y+tZ)$ є аналітичною у 0 як функція від $t \in \mathbb{R}$, тобто ми не можемо гарантувати збіжність ТТ ряду для f, як у (7.7). Це також не означає, що f є нескінченно багато разів диференційованою на $\mathcal{U} \cap \Omega_n$ як функція кількох дійсних змінних, для скінченновимірного підпростору $\mathcal{U}$ і $\mathcal{V}^{n\times n}$.

Якщо, на додачу, f є *локально обмеженою у* Ω *на афінних скінченновимірних підпросторах*, тобто якщо для кожних $n, M \in \mathbb{N}$, $Y \in \Omega_n$ і $Z_1, \ldots, Z_M \in \mathcal{V}^{n\times n}$ існує $\epsilon > 0$ таке, що $f(Y + t_1Z_1 + \cdots + t_MZ_M)$ є обмеженим на множині $\{t \in \mathbb{R}\colon \max_{1\le j\le M} |t_j| < \epsilon\}$, то $f(Y + t_1Z_1 + \cdots + t_MZ_M)$ є нескінченно багато разів диференційованою у 0 як функція від $t_1, \ldots, t_M \in \mathbb{R}$, і тотожність

$$\frac{1}{k!}\frac{\partial^{|k|}}{\partial t_1^{k_1}\cdots\partial t_M^{k_M}} f(Y + t_1Z_1 + \cdots + t_MZ_M)\Big|_{t_1=\cdots=t_M=0} = \sum_{\pi} \Delta_R^{|k|} f(Y,\ldots,Y)(Z_{\pi(1)},\ldots,Z_{\pi(N)}) \tag{7.18}$$

має місце. Тут $k = (k_1, \ldots, k_M)$ - довільний набір M невід'ємних цілих,

$$|k| := k_1 + \cdots + k_M, \quad k! := k_1!\cdots k_M!$$

і π пробігає множину всіх перестановок з півторами множини $\{1, \ldots, M\}$, де елемент j з'являється точно k_j разів. Тотожність (7.18) є, звісно, також вірною у комплексному випадку, і в обох випадках, дійсному і комплексному, її доведення є очевидною модифікацією доведення частини (2) теореми 7.2.

Якщо f є *дійсно аналітичною на зрізах*, тобто якщо $f(Y + tZ)$ є аналітичною у 0 як функція від $t \in \mathbb{R}$ для кожних $n \in \mathbb{N}$, $Y \in \Omega_n$ і $Z \in \mathcal{V}^{n\times n}$, то ТТ ряд для f, як у (7.7) або як у (7.14) (зокрема, (7.15)), збігається абсолютно у деякому околі точки 0 в кожному зрізі. У випадку, коли $\mathcal{V} = \mathbb{R}^d$, якщо f є *дійсно аналітичною*, тобто $f|_{\Omega_n}$ є дійсно аналітичною для кожного $n \in \mathbb{N}$, можливо написати ТТ розвинення f навколо $Y \in \Omega_n$, як у (7.16) (зокрема, (7.17)), з рядом, що збігається абсолютно і рівномірно на компактних підмножинах $\Upsilon(Y) = \{X \in \Omega_n\colon Y + t(X - Y) \in \Omega_n \text{ для всіх } t \in [-1, 1]\}$.

7.2. Рівномірно-відкрита топологія над операторним простором

Нагадаємо, що бінахів простір $\mathcal{W}$ над $\mathbb{C}$, забезпечений допустимою системою матричних норм таких, що (7.1) і (7.2) виконані з $C_1 = C_1' = C_2 = 1$ для всіх n і m, є *операторним простором*; дивись [**55, 118, 117**]. Нехай $\mathcal{W}$ - операторний простір. Для $Y \in \mathcal{W}^{s\times s}$ і $r > 0$, визначимо *н.к. кулю з центром у* Y *радіусу* r як

$$B_{\mathrm{nc}}(Y, r) = \coprod_{m=1}^{\infty} B\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y, r\Big) = \coprod_{m=1}^{\infty} \Big\{X \in \mathcal{W}^{sm\times sm}\colon \Big\|X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big\|_{sm} < r\Big\}.$$

Пропозиція 7.12. *Нехай* $Y \in \mathcal{W}^{s\times s}$ *і* $r > 0$. *Для будь-якого* $X \in B_{\mathrm{nc}}(Y, r)$ *існує* $\rho > 0$ *таке, що* $B_{\mathrm{nc}}(X, \rho) \subseteq B_{\mathrm{nc}}(Y, r)$. *Отже, н.к. кулі становлять базис для топології на* $\mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$. *Ця топологія буде називатися* рівномірно-відкритою топологією.

Доведення. Нехай $X \in B_{\mathrm{nc}}(Y,r)_{sm} = B(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y, r)$, тобто

$$\delta := \|X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\|_{sm} < r.$$

Покладемо $\rho := r - \delta$. Нехай $Z \in B_{\mathrm{nc}}(X,\rho)_{smn} = B(\bigoplus_{\beta=1}^{n} X, \rho)$. Тоді за (7.1) з $C_1' = 1$, ми маємо

$$\begin{aligned}\Big\|Z - \bigoplus_{\alpha=1}^{mn} Y\Big\|_{smn} &\le \Big\|Z - \bigoplus_{\beta=1}^{n} X\Big\|_{smn} + \Big\|\bigoplus_{\beta=1}^{n} X - \bigoplus_{\alpha=1}^{mn} Y\Big\|_{smn} \\ &= \Big\|Z - \bigoplus_{\beta=1}^{n} X\Big\|_{smn} + \Big\|\bigoplus_{\beta=1}^{n}\Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)\Big\|_{smn} \\ &\le \Big\|Z - \bigoplus_{\beta=1}^{n} X\Big\|_{smn} + \Big\|X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big\|_{sm} < \rho + \delta = r,\end{aligned}$$

тобто $Z \in B_{\mathrm{nc}}(Y,r)_{smn}$, що доводить перше твердження.

Нехай $Y^1 \in \mathcal{W}^{s_1\times s_1}$, $Y^2 \in \mathcal{W}^{s_2\times s_2}$ і $r_1, r_2 > 0$ такі, що $B_{\mathrm{nc}}(Y^1,r_1) \cap B_{\mathrm{nc}}(Y^2,r_2) \neq \emptyset$. Нехай m - найменше спільне кратне s_1 і s_2, для якого $B_{\mathrm{nc}}(Y^1,r_1)_m \cap B_{\mathrm{nc}}(Y^2,r_2)_m \neq \emptyset$. Якщо $X \in B_{\mathrm{nc}}(Y^1,r_1)_m \cap B_{\mathrm{nc}}(Y^2,r_2)_m$, то покладаючи

$$\rho := \min\Big\{r_1 - \Big\|X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m/s_1} Y^1\Big\|_m,\ r_2 - \Big\|X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m/s_2} Y^2\Big\|_m\Big\}$$

і використовуючи такий же аргумент, як у минулому абзаці, ми отримаємо, що

$$B_{\mathrm{nc}}(X,\rho) \subseteq B_{\mathrm{nc}}(Y^1,r_1) \cap B_{\mathrm{nc}}(Y^2,r_2).$$

Таким чином, н.к. кулі становлять базис топології на $\mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$. □

Зауваження 7.13. Зауважимо, що множення на скаляр як відображення $\mathbb{C}\times \mathcal{W}_{\mathrm{nc}} \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ є неперервним у рівномірно-відкритій топології.

Відкриті множини в рівномірно-відкритій топології на $\mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ будуть називатись *рівномірно-відкритими*. Рівномірно-відкрита топологія не є хаусдорфовою: точки $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y$ і $\bigoplus_{\beta=1}^{m'} Y$, $m \neq m'$, не можуть бути розділені н.к. кулями. Проте, наступна властивість типа Хаусдорфа має місце: якщо $X \in \mathcal{W}^{n\times n}$ і $X' \in \mathcal{W}^{n'\times n'}$ такі, що не існує $Y \in \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$, для якого $X = \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y$ і $X' = \bigoplus_{\beta=1}^{m'} Y$ для деяких m і m', то існують додатні δ і δ' такі, що $B_{\mathrm{nc}}(X,\delta) \cap B_{\mathrm{nc}}(X',\delta') = \emptyset$. Можна обрати δ і δ' такі, що $\delta + \delta' < \Big\|\bigoplus_{\alpha=1}^{M} X - \bigoplus_{\beta=1}^{M'} X'\Big\|_{Mn}$, де $Mn = M'n'$ - найменше спільне кратне n і n'. Ми тільки маємо показати, що норма вище ненульова у цьому випадку.

Пропозиція 7.14. *Для $X \in \mathcal{W}^{n\times n}$ і $X' \in \mathcal{W}^{n'\times n'}$, ми маємо*

$$\Big\| \bigoplus_{\alpha=1}^{M} X - \bigoplus_{\beta=1}^{M'} X' \Big\|_{Mn} = 0$$

тоді і тільки тоді, коли існує $Y \in \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ для якого $X = \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y$ і $X' = \bigoplus_{\beta=1}^{m'} Y$.

Доведення. Частина “тоді"очевидна. Припустимо, що

$$(\overline{X} :=) \bigoplus_{\alpha=1}^{M} X = \bigoplus_{\beta=1}^{M'} X'.$$

Для мети цього доведення, будемо використовувати домовлення, що рядки і стовпці $N \times N$ матриці Z над $\mathcal{W}$ занумеровані з 0 до $N-1$. Визначимо діагональний зсув S, який діє на таких матрицях наступним чином:

$$(SZ)_{ij} = Z_{(i-1) \bmod N, (j-1) \bmod N}, \quad i,j = 0,\dots,N-1.$$

Ясно, що зворотний зсув дається як

$$(S^{-1}Z)_{ij} = Z_{(i+1) \bmod N, (j+1) \bmod N}, \quad i,j = 0,\dots,N-1.$$

Звісно, ми маємо $S^{\pm n}\overline{X} = \overline{X}$ і $S^{\pm n'}\overline{X} = \overline{X}$, де $N = Mn$. Нехай $d = \gcd(n,n')$. Оскільки існують $k,k' \in \mathbb{Z}$ такц, що $d = kn + k'n'$ (дивись, наприклад, [**148**, задача 1.1]), ми отримаємо, що $S^d\overline{X} = \overline{X}$. Отже, всі $d\times d$ блоки на головній блочній діагоналі матриці $\overline{X}$ є рівними, скажімо Y. Оскільки всі інші $d\times d$-блочні діагоналі, що паралельні головній діагоналі $\overline{X}$, мають принаймні один нульовий блок, вони повинні мати всі нульові блоки. Ми робимо висновок, що $\overline{X} = \bigoplus_{\gamma=1}^{Mn/d} Y$, отже, $X = \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y$ і $X' = \bigoplus_{\beta=1}^{m'} Y$, with $m = n/d$ і $m' = n'/d$. Теорема доведена. □

Альтернативно, замикання $X \in \mathcal{W}^{n\times n}$, $\mathrm{clos}\{X\}$, складається з усіх $X' = \bigoplus_{\beta=1}^{m'} Y$, $m' = 1,2,\dots$, де $Y \in \mathcal{W}^{s\times s}$ таке, що $n = sm$ і $X = \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y$, з Y не зображуваним як пряма сума матриць над $\mathcal{W}$ – таке Y єдине за пропозицією 7.14; фактор-топологія на $\widehat{\mathcal{W}_{\mathrm{nc}}} := \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}/\!\sim$ де $X \sim X'$, якщо $X = \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y$ і $X' = \bigoplus_{\beta=1}^{m'} Y$ для деякого $Y \in \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$, є хаусдорфовою.

Нехай $\mathcal{M}$ - модуль. Для множини $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$, *радикал* Ω - це множина

$$\mathrm{rad}\,\Omega := \Big\{ Y \in \mathcal{M}_{\mathrm{nc}} \colon \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y \in \Omega \ \text{ для деякого } m \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Ми будемо казати, що $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ є *радикальною множиною*, якщо $\mathrm{rad}\,\Omega = \Omega$.

Пропозиція 7.15. *Для множини* $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ *ми маємо*

$$\widetilde{\operatorname{rad}\Omega} \subseteq \operatorname{rad}\widetilde{\Omega}, \tag{7.19}$$

де $\widetilde{\Omega}$ *і* $\widetilde{\operatorname{rad}\Omega}$ *визначені як у* (10.1). *Зокрема, якщо множина* Ω *інваріантна щодо подібностей, то такою ж є* $\operatorname{rad}\Omega$. *Якщо* Ω *є н.к. множиною, то такою ж є* $\operatorname{rad}\Omega$. *Якщо* Ω *є допустимою справа, то такою ж є* $\operatorname{rad}\Omega$.

Доведення. Якщо $Y \in \widetilde{\operatorname{rad}\Omega}$, то $SYS^{-1} \in \operatorname{rad}\Omega$ для кожної оборотної матриці над $\mathcal{R}$ того ж розміру, що і Y, тобто

$$\bigoplus_{\alpha=1}^{m} SYS^{-1} = \Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} S\Big)\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} S\Big)^{-1} \in \Omega$$

для деякого $m \in \mathbb{N}$. Отже, $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y \in \widetilde{\Omega}$ і, значить, $Y \in \operatorname{rad}\widetilde{\Omega}$. Включення (7.19) з цього випливає.

Зокрема, якщо $\widetilde{\Omega} = \Omega$, ми отримаємо $\widetilde{\operatorname{rad}\Omega} \subseteq \operatorname{rad}\Omega$. Разом з очевидним включенням $\widetilde{\operatorname{rad}\Omega} \supseteq \operatorname{rad}\Omega$, це тягне за собою рівність $\widetilde{\operatorname{rad}\Omega} = \operatorname{rad}\Omega$, тобто $\operatorname{rad}\Omega$ є інваріантним щодо подібностей.

Нехай $Y, Y' \in \operatorname{rad}\Omega$. Тоді $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y \in \Omega$ і $\bigoplus_{\alpha=1}^{m'} Y' \in \Omega$ для деяких m і m'. Якщо Ω - н.к. множина, то $\bigoplus_{\alpha=1}^{\operatorname{lcm}(m,m')} Y \oplus \bigoplus_{\beta=1}^{\operatorname{lcm}(mm')} Y' \in \Omega$. Оскільки множина Ω - інваріантна щодо подібностей, перестановка блоків дає, що $\bigoplus_{\alpha=1}^{\operatorname{lcm}(m,m')} (Y \oplus Y') \in \Omega$, отже $Y \oplus Y' \in \operatorname{rad}\Omega$. Ми робимо висновок, що $\operatorname{rad}\Omega$ є н.к. множиною у цьому випадку.

Припустимо, що Ω - допустима справа, інваріантна щодо подібностей н.к. множина. Нехай $Y \in (\operatorname{rad}\Omega)_n$, $Y' \in (\operatorname{rad}\Omega)_{n'}$, $Z \in \mathcal{R}^{n\times n'}$. Тоді $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y \in \Omega_{nm}$ і $\bigoplus_{\alpha=1}^{m'} Y' \in \Omega_{n'm'}$ для деяких m і m'. Більше того, $\bigoplus_{\alpha=1}^{\operatorname{lcm}(m,m')} Y \in \Omega_{\operatorname{lcm}(m,m')n}$ і $\bigoplus_{\alpha=1}^{\operatorname{lcm}(m,'m')'} Y' \in \Omega_{\operatorname{lcm}(m,m')n'}$. За пропозицією 10.2,

$$\begin{bmatrix} \bigoplus\limits_{\alpha=1}^{\operatorname{lcm}(m,m')} Y & \bigoplus\limits_{\alpha=1}^{\operatorname{lcm}(m,m')} Z \\ 0 & \bigoplus\limits_{\alpha=1}^{\operatorname{lcm}(m,m')} Y' \end{bmatrix} \in \Omega_{(n+n')\operatorname{lcm}(m,m')}.$$

Оскільки Ω інваріантна щодо подібностей, перестановка блоків дає, що

$$\bigoplus_{\alpha=1}^{\operatorname{lcm}(m,m')} \begin{bmatrix} Y & Z \\ 0 & Y' \end{bmatrix} \in \Omega_{(n+n')\operatorname{lcm}(m,m')}.$$

Отже, $\begin{bmatrix} Y & Z \\ 0 & Y' \end{bmatrix} \in \operatorname{rad}\Omega$. Це тягне за собою, що н.к. множина $\operatorname{rad}\Omega$ є допустимою справа. $\square$

Ми зауважимо, що включення (7.19) може бути строгим, навіть у випадку н.к. множин. Наступний приклад також показує, що $\widetilde{\Omega}$ не обов'язково є радикальним, навіть якщо Ω є таким.

Приклад 7.16. Нехай $\Omega \subseteq \mathbb{C}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. множина, що складається з матриць $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y$, $m = 1, 2, \ldots$, з $Y = \mathrm{diag}[0, 1, 1, 0] \in \mathbb{C}^{4\times 4}$. Ясно, що множина Ω - радикальна. Її подібностно інваріантний конверт, $\widetilde{\Omega}$, складається з діагоналізовних квадратних матриць над $\mathbb{C}$ з власними значеннями 0 і 1 однакової парної кратності. Зокрема, $\widetilde{\Omega}$ містить матрицю $\mathrm{diag}[0, 1, 0, 1] \in \mathbb{C}^{4\times 4}$, так що матриця $\mathrm{diag}[0, 1] \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ належить до $\mathrm{rad}\,\widetilde{\Omega}$. Таким чином, $\widetilde{\mathrm{rad}\,\Omega} = \widetilde{\Omega}$ є власна підмножина у $\mathrm{rad}\,\widetilde{\Omega}$.

Ми також зауважимо, що $\mathrm{rad}\,\Omega$ не обов'язково є н.к. множиною, навіть якщо Ω є такою.

Приклад 7.17. Нехай $\Omega \subseteq \mathbb{C}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. множина, що складається з матриць $0_{2\times 2}, I_2 \in \Omega_2$ і всіх їх прямих сум , в будь-якому можливому порядку. Тоді 1×1 матриці 0 і 1 належать до $\mathrm{rad}\,\Omega$, проте їх пряма сума, $0 \oplus 1 = \mathrm{diag}[0, 1]$ не належить до $\mathrm{rad}\,\Omega$.

Нехай $\mathcal{W}$ - операторний простір. Ми зараз визначимо іншу топологію на $\mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ за допомогою псевдометрики $\tau\colon \mathcal{W}_{\mathrm{nc}} \times \mathcal{W}_{\mathrm{nc}} \to \mathbb{R}_+$:

$$\tau(X, X') := \Big\| \bigoplus_{\alpha=1}^{\mathrm{lcm}(n,n')/n} X - \bigoplus_{\beta=1}^{\mathrm{lcm}(n,n')/n'} X' \Big\|_{\mathrm{lcm}(n,n')} \tag{7.20}$$

для кожних $n, n' \in \mathbb{N}$, $X \in \mathcal{W}^{n\times n}$ і $X' \in \mathcal{W}^{n'\times n'}$. Ми будему називати цю топологію *τ-топологією*, і відповідні відкриті множини *τ-відкритими*. *τ-кулі* з центром у $Y \in \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ і радіусом $\delta > 0$,

$$B_\tau(Y, \delta) := \{X \in \mathcal{W}_{\mathrm{nc}} \colon \tau(X, Y) < \delta\},$$

складають базу для τ-топології. Зауважимо, що τ-кулі, а значить, τ-відкриті множини, є радикальними.

Пропозиція 7.18. *Нехай $\mathcal{W}$ - операторний простір.*

(1) *Для кожних $s \in \mathbb{N}$, $Y \in \mathcal{W}^{s\times s}$ і $\delta > 0$ ми маємо*

$$B_{\mathrm{nc}}(Y, \delta) = B_\tau(Y, \delta) \cap \coprod_{m=1}^{\infty} \mathcal{W}^{sm\times sm}. \tag{7.21}$$

(2) *Якщо $\Omega \subseteq \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ - рівномірно-відкрита множина, то* $\mathrm{rad}\ \Omega$ *є найменшою τ-відкритою множиною, що містить Ω.*

(3) $\Omega \subseteq \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ *є τ-відкритою множиною тоді і тільки тоді, коли Ω є рівномірно-відкритою і радикальною.*

Доведення. (1) випливає з означення τ-куль.

(2) З (7.21) випливає, що $\operatorname{rad} B_{\mathrm{nc}}(Y,\delta) = B_\tau(Y,\delta)$. Тоді

$$\operatorname{rad}\Omega = \operatorname{rad}\bigcup_{Y\in\Omega} B_{\mathrm{nc}}(Y,\delta_Y) = \bigcup_{Y\in\Omega}\operatorname{rad} B_{\mathrm{nc}}(Y,\delta_Y) = \bigcup_{Y\in\Omega} B_\tau(Y,\delta_Y),$$

де δ_Y - будь-яке додатне дійсне число, для якого $B_{\mathrm{nc}}(Y,\delta_Y) \subseteq \Omega$. Отже, $\operatorname{rad}\Omega$ є τ-відкритим. Оскільки будь-яка τ-відкрита множина є радикальною, якщо така множина містить Ω, то вона повинна містити також $\operatorname{rad}\Omega$. Ми робимо висновок, що $\operatorname{rad}\Omega$ - найменша τ-відкрита множина, що містить Ω.

(3) Частина (2) тягне за собою, що якщо множина Ω - рівномірно-відкрита і радикальна, тобто $\operatorname{rad}\Omega = \Omega$, то Ω є τ-відкритою. Зворотне є очевидним. $\square$

З частини (1) пропозиції 7.18 випливає, що τ-топологія на $\mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ є слабкішою за рівномірно-відкриту топологію. Проте, дві точки у $\mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ не можуть бути відокремлені двома н.к. кулями тоді і тільки тоді, коли вони не можуть бути відокремленими двома τ-кулями. Справді, пропозиція 7.14 каже, що $X \sim X'$ тоді і тільки тоді, коли $\tau(X,X') = 0$. Отже, фактор-простори $\mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ відносно еквівалентності $\sim$ і τ-еквівалентності співпадають як множини. Оскільки прообраз будь-якої множини у фактор-просторі $\widehat{\mathcal{W}_{\mathrm{nc}}}$ відносно фактор-відображення є радикальним, відповідні фактор-топології на $\widehat{\mathcal{W}_{\mathrm{nc}}}$ співпадають. Фактично, $\widehat{\mathcal{W}_{\mathrm{nc}}}$ є метричним простором відносно фактор-метрики $\widehat{\tau}$, що визначається як $\widehat{\tau}(\widehat{X},\widehat{X'}) := \tau(X,X')$ для будь-яких представників X і X' класів $\widehat{X}$ і $\widehat{X'}$, відповідно (означення є коректним завдяки властивостям системи норм $\|\cdot\|_n$ на матрицях над операторним простором). Фактор-топологія на $\widehat{\mathcal{W}_{\mathrm{nc}}}$ - це метрична топологія відносно метрики $\widehat{\tau}$.

7.3. Рівномірно аналітичні н.к. функції

Нехай $\mathcal{V}$ і $\mathcal{W}$ - банахові простори, забезпечені допустимими системами матричних норм. Лінійне відображення $\phi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ називається *цілком обмеженим*, якщо

$$\|\phi\|_{\mathrm{cb}} := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\operatorname{id}_{\mathbb{C}^{n\times n}} \otimes \phi\|_{\mathcal{V}^{n\times n}\to\mathcal{W}^{n\times n}} < \infty,$$

цілком стискаючим, якщо $\|\phi\|_{\mathrm{cb}} \le 1$, і *цілком ізометричним*, якщо $\operatorname{id}_{\mathbb{C}^{n\times n}} \otimes \phi$ є ізометрією для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Пропозиція 7.19. *Якщо $\mathcal{W}$ - банахів простір, забезпечений допустимою системою матричних норм $\|\cdot\|_n$ таких, що (7.1) і (7.2) виконуються з C_1, C_1' і C_2 не залежними від n і m, то ін'єкції (7.3) і проєкції (7.4) є рівномірно цілком обмеженими, тобто для кожного $n \in \mathbb{N}$ та $i,j = 1,\dots,n$ відображення ι_{ij} і π_{ij} є цілком обмеженими. Більше того,*

$$\|\iota_{ij}\|_{\mathrm{cb}} \le C_1' C_2^2, \quad \|\pi_{ij}\|_{\mathrm{cb}} \le C_1 C_2^2.$$

Якщо $\mathcal{W}$ - операторний простір, то всі ι_{ij} є цілком ізометричними і всі π_{ij} є цілком коізометричними.

Доведення. З доведення пропозиції 7.1 випливає, що $\|\iota_{ij}^s\| \le C_1' C_2$ і $\|\pi_{ij}^s\| \le C_1 C_2$ для всіх n, i, j, s. Ми маємо для всіх n, i, j, s і $W \in \mathcal{W}^{s\times s}$, що

$$\begin{aligned}
\|(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{s\times s}} \otimes \iota_{ij})(W)\|_{sn} &= \Big\| \Big(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{s\times s}} \otimes \iota_{ij} \Big) \Big(\sum_{a,b=1}^{s} E_{ab} w_{ab} \Big) \Big\|_{sn} \\
&= \Big\| \sum_{a,b=1}^{s} E_{ab} \otimes \iota_{ij}(w_{ab}) \Big\|_{sn} = \Big\| \sum_{a,b=1}^{s} E_{ab} \otimes (E_{ij} w_{ab}) \Big\|_{sn} \\
&= \Big\| \sum_{a,b=1}^{s} (E_{ab} \otimes E_{ij}) w_{ab} \Big\|_{sn} = \Big\| \sum_{a,b=1}^{s} P(s,n)(E_{ij} \otimes E_{ab}) P(s,n)^\top w_{ab} \Big\|_{sn} \\
&= \Big\| \sum_{a,b=1}^{s} P(s,n)(E_{ij} \otimes E_{ab} w_{ab}) P(s,n)^\top \Big\|_{sn} = \|P(s,n)(E_{ij} \otimes W) P(s,n)^\top\|_{sn} \\
&\le C_2 \|E_{ij} \otimes W\|_{sn} = C_2 \|\iota_{ij}^s(W)\|_{sn} \le C_2 \|\iota_{ij}^s\| \|W\|_s.
\end{aligned}$$

Тут ми використовуємо $sn \times sn$ матриці перестановок $P(s,n) = [E_{ij}^T]_{i=1,\dots,s;\, j=1,\dots,n}$, які дозволяють нам змінити порядок множників у тензорних добутках:

$$A \otimes B = P(r,p)(B \otimes A) P(m,q)^\top \tag{7.22}$$

для будь-яких $A \in \mathbb{C}^{r\times m}$ і $B \in \mathbb{C}^{p\times q}$. Дивись [**89**, сс. 259–261]. Ми робимо висновок з обчислень вище, що

$$\|\iota_{ij}\|_{\mathrm{cb}} \le C_2 \sup_{s\in\mathbb{N}} \|\iota_{ij}^s\| \le C_1' C_2^2.$$

Припустимо тепер, що

$$W = [([w_{i'j'}]_{i',j'=1,\dots,n})_{ab}]_{a,b=1,\dots,s} \in \big(\mathcal{W}^{n\times n}\big)^{s\times s} \cong \mathbb{C}^{s\times s} \otimes \mathcal{W}^{n\times n}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\widetilde{W} := P(n,s) W P(n,s)^\top = [([\widetilde{w}_{ab}]_{a,b=1,\dots,s})_{i'j'}]_{i',j'=1,\dots,n} \\
\in \big(\mathcal{W}^{s\times s}\big)^{n\times n} \cong \mathbb{C}^{n\times n} \otimes \mathcal{W}^{s\times s},
\end{aligned}$$

де

$$(\widetilde{w}_{ab})_{i'j'} = (w_{i'j'})_{ab}, \quad a, b = 1 \dots, s;\ i', j' = 1, \dots, n.$$

Ми маємо

$$\|(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{s\times s}}\otimes\pi_{ij})(W)\|_s = \Big\|\Big(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{s\times s}}\otimes\pi_{ij}\Big)\Big(\sum_{a,b=1}^{s}\sum_{i',j'=1}^{n} E_{ab}\otimes E_{i'j'}(w_{i'j'})_{ab}\Big)\Big\|_s$$

$$= \Big\|\sum_{a,b=1}^{s} E_{ab}(w_{ij})_{ab}\Big\|_s = \Big\|\sum_{a,b=1}^{s} E_{ab}(\widetilde{w}_{ab})_{ij})\Big\|_s = \|\widetilde{W}_{ij}\|_s = \|\pi_{ij}^s(\widetilde{W})\|_s$$

$$\leq \|\pi_{ij}^s\|\,\|\widetilde{W}\|_{sn} \leq C_2\|\pi_{ij}^s\|\,\|W\|_{sn}.$$

Отже,

$$\|\pi_{ij}\|_{\mathrm{cb}} \leq C_2 \sup_{s\in\mathbb{N}} \|\pi_{ij}^s\| \leq C_1C_2^2.$$

У випадку операторних просторів, виявляється, що всі оператори ι_{ij} і π_{ij} є цілком стискаючими. Більше того, оскільки $\pi_{ij}\iota_{ij} = I_{\mathcal{W}}$, ми робимо висновок, що всі ι_{ij} є цілком ізометричними, а всі π_{ij} є цілком коізометричними. □

Нехай $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ - операторні простори, і нехай $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ - рівномірно відкрита н.к. множина. Н.к. функція $f\colon \Omega \to W_{\mathrm{nc}}$ називаєтсья *рівномірно локально обмеженою*, якщо для будь-яких $s \in \mathbb{N}$ і $Y \in \Omega_s$ існує $r > 0$ таке, що $B_{\mathrm{nc}}(Y, r) \subseteq \Omega$ і f - обмежена на $B_{\mathrm{nc}}(Y, r)$, тобто існує $M > 0$ таке, що $\|f(X)\|_{sm} \leq M$ для всіх $m \in \mathbb{N}$ і $X \in B_{\mathrm{nc}}(Y, r)_{sm}$. Н.к. функція $f\colon \Omega \to W_{\mathrm{nc}}$ називається *рівномірно аналітичною*, якщо f є рівномірно локально обмеженою і аналітичною, тобто f є рівномірно локально обмеженою і G-диференційованою. Пізніше (дивись приклад 8.14) ми дамо приклад аналітичної (фактично, цілої) н.к. функції, яка не є рівномірно аналітичною в будь-якому околі точки $0_{1\times 1}$.

Пропозиція 7.20. *Нехай $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ - рівномірно відкрита н.к. множина. Якщо н.к. функція $f\colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$неперервна у рівномірно-відкритих топологіях на $\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ і $\mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$, то f є рівномірно локально обмеженою.*

Доведення. Якщо дані $s \in \mathbb{N}$ і $Y \in \Omega_s$, існує н.к. куля $B_{\mathrm{nc}}(Y, r) \subseteq \Omega$ така, що $\|f(X) - f(\bigoplus_{\alpha=1}^m Y)\|_{sm} < 1$ для всіх $m \in \mathbb{N}$ і $X \in B_{\mathrm{nc}}(Y, r)_{sm}$. Тоді

$$\|f(X)\|_{sm} < \Big\|f\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)\Big\|_{sm} + 1 = \Big\|\bigoplus_{\alpha=1}^{m} f(Y)\Big\|_{sm} + 1 \leq \|f(Y)\|_s + 1.$$

□

Нехай $l\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ - лінійне відображення операторних просторів. Ми поширюємо l до н.к. функції $\widetilde{l}\colon \mathcal{V}_{\mathrm{nc}} \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ такої,що $l_n := \widetilde{l}|_{\mathcal{V}^{n\times n}}$ - лінійне відображення з $\mathcal{V}^{n\times n}$ у $\mathcal{W}^{n\times n}$, визначене як $l_n([v_{ij}]) = [l(v_{ij})]$, $n \in \mathbb{N}$, тобто $l_n = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n\times n}}\otimes l$. Тоді ясно, що $\widetilde{l}$ є рівномірно локально обмеженим тоді і тільки тоді, коли $\widetilde{l}$ є неперервним у рівномірно-відкритих топологіях тоді і тільки тоді, коли l є цілком обмеженим. Ми раптом побачимо (наслідок 7.28), що перша еквівалентність є вірною для довільних н.к. функцій.

Ми представимо дві версії головного результату про рівномірну збіжність ТТ рядів у рівномірно-відкритій топології на двох різних типах областей. Доведення першої теореми (як і теореми 7.4) є мішаної природи: некомутативної та комплексно-аналітичної. Друга теорема допускає чисто некомутативне доведення; зокрема, вона допускає аналог у дійсному випадку, дивись зауваження 7.35 нижче.

Нехай $\mathcal{X}$ - векторний простір над $\mathbb{C}$ і нехай $Y \in \mathcal{X}^{s\times s}$. Н.к. множина $\Upsilon_{\rm nc} \subseteq \mathcal{X}_{\rm nc}$ називається *повною круговою навколо* Y, якщо для кожного $m \in \mathbb{N}$ множина $(\Upsilon_{\rm nc})_{sm} = \Upsilon_{\rm nc} \cap \mathcal{X}^{sm\times sm}$ є повною круговою наколо $\bigoplus_{\alpha=1}^m Y$ (дивись абзац, попередній до теореми 7.2). Для будь-якого $\epsilon > 0$, ми визначимо

$$\Upsilon_{{\rm nc},\epsilon} := \coprod_{m=1}^{\infty} \Big\{ X \in (\Upsilon_{\rm nc})_{sm} \colon \bigoplus_{\alpha=1}^m Y + (1+\epsilon)\Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^m Y\Big) \in (\Upsilon_{\rm nc})_{sm} \Big\}. \tag{7.23}$$

Легко побачити, що якщо $\Upsilon_{\rm nc}$ - рівномірно-відкрита повна кругова множина навколо Y, то такою ж є і $\Upsilon_{{\rm nc},\epsilon}$, і $\bigcup_{\epsilon>0} \Upsilon_{{\rm nc},\epsilon} = \Upsilon_{\rm nc}$.

Теорема 7.21. *Нехай н.к. функція $f \colon \Omega \to \mathcal{W}_{\rm nc}$ - рівномірно локально обмежена. Нехай $s \in \mathbb{N}$, $Y \in \Omega_s$ і нехай $\Upsilon_{\rm nc}$ - рівномірно-відкрита повна кругова н.к. множина навколо Y така, що $\Upsilon_{\rm nc} \subseteq \Omega$ і f обмежена на $\Upsilon_{\rm nc}$. Тоді для кожних $\epsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ і $X \in (\Upsilon_{{\rm nc},\epsilon})_{sm}$,*

$$f(X) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^m Y\Big)^{\odot_s \ell} \Delta_R^\ell f\Big(\underbrace{Y,\dots,Y}_{\ell+1 \text{ разів}}\Big), \tag{7.24}$$

де ряд збігається абсолютно і рівномірно на $\Upsilon_{{\rm nc},\epsilon}$. Більше того,

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sup_{m\in\mathbb{N},\, X\in(\Upsilon_{{\rm nc},\epsilon})_{sm}} \Big\| \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^m Y\Big)^{\odot_s \ell} \Delta_R^\ell f\Big(\underbrace{Y,\dots,Y}_{\ell+1 \text{ разів}}\Big) \Big\|_{sm} < \infty. \tag{7.25}$$

Доведення. Нехай $s \in \mathbb{N}$ і $Y \in \Omega_s$ - зафіксовані. Нехай $\Upsilon_{\rm nc}$ - рівномірно-відкрита повна кругова множина навколо Y, на якій f обмежена, скажімо сталою M. Якщо дані $\epsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ і $X \in (\Upsilon_{{\rm nc},\epsilon})_{sm}$, як у доведенні теореми 7.4 ми маємо, що

$$\begin{aligned} &\Big\| \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^m Y\Big)^{\odot_s \ell} \Delta_R^\ell f\Big(\underbrace{Y,\dots,Y}_{\ell+1 \text{ разів}}\Big) \Big\|_{sm} \\ &\quad = \Big\| \Delta_R^\ell f\Big(\underbrace{\bigoplus_{\alpha=1}^m Y,\dots,\bigoplus_{\alpha=1}^m Y}_{\ell+1 \text{ разів}}\Big) \Big(\underbrace{X - \bigoplus_{\alpha=1}^m Y,\dots,X - \bigoplus_{\alpha=1}^m Y}_{\ell \text{ разів}}\Big) \Big\|_{sm} \le \frac{M}{(1+\epsilon)^\ell}, \end{aligned} \tag{7.26}$$

але у цьому випадку стала M є незалежною від m. Отже, (7.25) виконується і ТТ ряд у (7.24) збігається абсолютно і рівномірно на $\Upsilon_{{\rm nc},\epsilon}$. Факт, що сума ряду дорівнює $f(X)$, випливає з теореми 7.2. $\square$

Нехай $\mathcal{X}$ - векторний простір над $\mathbb{C}$ і нехай $Y \in \mathcal{X}^{s\times s}$. Н.к. множина $\Upsilon_{\rm nc} \subseteq \mathcal{X}_{\rm nc}$ називається *матрично-круговою навколо* Y, якщо для кожних $m \in \mathbb{N}$, $X \in (\Upsilon_{\rm nc})_{sm}$ і унітарних матриць $U, V \in \mathbb{C}^{m\times m}$ ми маємо

$$\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y + (U \otimes I_s)\Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)(V \otimes I_s) \in (\Upsilon_{\rm nc})_{sm}.$$

Для будь-якого $\epsilon > 0$, ми визначаємо $\Upsilon_{{\rm nc},\epsilon}$ як у (7.23). Легко побачити, що якщо $\Upsilon_{\rm nc}$ - рівномірно-відкрита матрично-кругова н.к. множина навколо Y, то такою є і $\Upsilon_{{\rm nc},\epsilon}$.

Лема 7.22. *Нехай $\Upsilon_{\rm nc} \subseteq \mathcal{X}_{\rm nc}$ - матрично-кругова н.к. множина навколо $Y \in \mathcal{X}^{s\times s}$. Тоді для кожних $m, N \in \mathbb{N}$, $X \in (\Upsilon_{\rm nc})_{sm}$ і $\zeta, \eta \in \mathbb{C}$, з $|\zeta|^2 + |\eta|^2 = 1$,*

$$A := \begin{bmatrix} \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y & X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y \end{bmatrix} \in (\Upsilon_{\rm nc})_{sm(N+1)} \tag{7.27}$$

і

$$B := \begin{bmatrix} \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y & X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y & 0 \\ \vdots & & \ddots & \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y & \zeta\Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big) \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y + \eta\Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big) \end{bmatrix} \in (\Upsilon_{\rm nc})_{sm(N+2)}. \tag{7.28}$$

Доведення. Ми спостерігаємо, що

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & I_m \\ I_m & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & I_m & 0 \end{bmatrix} \otimes I_s\right)\left(A - \bigoplus_{\alpha=1}^{m(N+1)} Y\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y \end{bmatrix}$$

і

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -\eta I_m & \zeta I_m \\ I_m & \ddots & & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & I_m & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \overline{\zeta} I_m & \overline{\eta} I_m \end{bmatrix} \otimes I_s\right)\left(B - \bigoplus_{\alpha=1}^{m(N+2)} Y\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y \end{bmatrix},$$

з квадратними матрицями розміру $sm(N+1)$ у першій рівності і $sm(N+2)$ у другій рівності. Отже, ми отримаємо потрібний результат. □

Теорема 7.23. *Нехай н.к. функція $f\colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ - рівномірно локально обмежена. Нехай $s \in \mathbb{N}$, $Y \in \Omega_s$ і Υ_{nc} - рівномірно-відкрита матрично-кругова навколо Y н.к. множина, яка міститься у Ω і на якій f обмежена. Тоді для кожного $\epsilon > 0$, (7.24) є вірним, з TT рядом збіжним абсолютно і рівномірно на $\Upsilon_{\mathrm{nc},\epsilon}$, і* (7.25) *виконується.*

Доведення. Нехай Υ_{nc} - рівномірно-відкрита матрично-кругова н.к. множина навколо Y, з нормою f обмеженою на Υ_{nc}, скажімо сталою $M > 0$. Для $\epsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ і $X \in (\Upsilon_{\mathrm{nc},\epsilon})_{sm}$, ми маємо

$$\left\|\Delta_R^\ell f\Big(\underbrace{\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y, \dots, \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y}_{\ell+1 \text{ разів}}\Big)\Big(\underbrace{X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y, \dots, X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y}_{\ell \text{ разів}}\Big)\right\|_{sm} \tag{7.29}$$

$$= (1+\epsilon)^{-\ell}\left\|\Delta_R^\ell f\Big(\underbrace{\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y, \dots, \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y}_{\ell+1 \text{ разів}}\Big)\Big(\underbrace{(1+\epsilon)\Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big), \dots, (1+\epsilon)\ \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)}_{\ell \text{ разів}}\Big)\right\|_{sm}$$

$$= (1+\epsilon)^{-\ell}\left\|\pi_{1,\ell+1} f\left(\begin{bmatrix} \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y & (1+\epsilon)(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & (1+\epsilon)(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y) \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y \end{bmatrix}\right)\right\|_{sm}$$

$$\leq \frac{M}{(1+\epsilon)^\ell},$$

що тягне за собою, що (7.25) виконується і ТТ ряд у (7.24) збігається абсолютно і рівномірно на $\Upsilon_{\mathrm{nc},\epsilon}$. Тут ми використали факт, що

$$\begin{bmatrix} \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y & (1+\epsilon)(X-\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & (1+\epsilon)(X-\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y) \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y \end{bmatrix} \in (\Upsilon_{\mathrm{nc}})_{sm(\ell+1)} \tag{7.30}$$

за (7.27), з X заміненим на $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y + (1+\epsilon)(X-\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y)$ і N заміненим на ℓ.

Залишається довести, що сума ряду дорівнює $f(X)$, тобто що залишковий член у ТТ формулі (дивись (4.1) і (4.2)),

$$\Delta_R^{N+1} f\Big(\underbrace{\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y,\dots,\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y}_{N+1 \text{ разів}}, X\Big)\Big(\underbrace{\Big(X-\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big),\dots,\Big(X-\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)}_{N+1 \text{ разів}}\Big)$$
$$= \Big(X-\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s(N+1)} \Delta_R^{N+1} f\Big(\underbrace{Y,\dots,Y}_{N+1 \text{ разів}}, X\Big),$$

прямує до 0, коли $N\to\infty$. Ми маємо

$$\Big\|\Delta_R^{N+1} f\Big(\underbrace{\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y,\dots,\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y}_{N+1 \text{ разів}}, X\Big)\Big(\underbrace{(X-\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y),\dots,(X-\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y)}_{N+1 \text{ разів}}\Big)\Big\|_{sm}$$
$$= \frac{1}{\delta(1+\epsilon)^N}\Big\|\Delta_R^{N+1} f\Big(\underbrace{\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y,\dots,\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y}_{N+1 \text{ разів}}, X\Big)$$
$$\Big(\underbrace{(1+\epsilon)\big(X-\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\big),\dots,(1+\epsilon)\big(X-\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\big)}_{N \text{ разів}}, \delta\big(X-\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\big)\Big)\Big\|_{sm}$$
$$= \frac{1}{\delta(1+\epsilon)^N}\cdot\left\|\pi_{1,N+2} f\left(\begin{bmatrix} \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y & (1+\epsilon)(X-\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (1+\epsilon)(X-\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y) & 0 \\ \vdots & & \ddots & \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y & \delta(X-\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y) \\ 0 & \dots & \dots & 0 & X \end{bmatrix}\right)\right\|_{sm}$$
$$\le \frac{M}{\delta(1+\epsilon)^N} \longrightarrow 0$$

коли $N \to \infty$. Остання нерівність виконується з $\delta = \sqrt{\epsilon^2 + 2\epsilon}$; справді, для цього вибору δ ми маємо

$$\begin{bmatrix} \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y & (1+\epsilon)(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (1+\epsilon)(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y) & 0 \\ \vdots & & \ddots & \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y & \delta(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y) \\ 0 & \dots & \dots & 0 & X \end{bmatrix} \in (\Upsilon_{\mathrm{nc}})_{sm(N+2)} \tag{7.31}$$

за (7.28) з X заміненим на $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y + (1+\epsilon)(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y)$, $\zeta = \frac{\delta}{1+\epsilon}$, $\eta = \frac{1}{1+\epsilon}$. □

Зауваження 7.24. Теорема 7.23 є вірною за слабкішим припущенням, що Υ_{nc} є рівномірно-відкритою н.к. множиною, що задовольняє (7.27) і (7.28).

Зауваження 7.25. У доведенні теореми 7.23 ми фактично встановили наступний результат. Нехай Υ_{nc} - рівномірно-відкрита н.к. множина, що містить Y, міститься у Ω, і на якій f обмежена. Тоді, для кожного $\epsilon > 0$, (7.24) виконується, з рядом збіжним абсолютно і рівномірно на множині всіх $X \in \Omega$ таких, що

- (7.30) виконується для всіх $\ell \in \mathbb{N}$;
- існує $\delta > 0$ таке, що (7.31) виконується для всіх $N \in \mathbb{N}$.

Це дає навіть слабкіші припущення на область, де TT ряд у (7.24) збігається абсолютно і рівномірно.

Відмітимо важливий спеціальний випадок двох попередніх теорем для рівномірної збіжності на відкритих н.к. кулях – звісно, н.к. кулі є як повними круговими, так і матрично-круговими.

Наслідок 7.26. *Нехай н.к. функція $f\colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ - рівномірно локально обмежена. Для кожних $s \in \mathbb{N}$, $Y \in \Omega_s$, нехай*

$$\delta := \sup\{r > 0\colon f \text{ є обмеженою на } B_{\mathrm{nc}}(Y, r)\}.$$

Тоді (7.24) *виконується, з TT рядом, який збігається абсолютно і рівномірно на кожній відкритій н.к. кулі $B_{\mathrm{nc}}(Y, r)$ з $r < \delta$. Більше того,*

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sup_{m\in\mathbb{N},\, X\in B_{\mathrm{nc}}(Y,r)_{sm}} \Big\| \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s \ell} \Delta_R^{\ell} f\Big(\underbrace{Y, \dots, Y}_{\ell+1 \text{ разів}}\Big) \Big\|_{sm} < \infty. \tag{7.32}$$

Зауваження 7.27. У випадку, коли $Y = \mu \in \Omega_1$, теореми 7.21 і 7.23, і наслідок 7.26 дають результати про абсолютну і рівномірну збіжність TT ряду (7.15) з центром у скалярній точці.

Наслідок 7.28. *Нехай $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\rm nc}$ - рівномірно-відкрита н.к. множина. Тоді н.к. функція $f\colon \Omega \to \mathcal{W}_{\rm nc}$ є рівномірно локально обмеженою тоді і тільки тоді, коли f є неперервною у рівномірно-відкритих топологіях на $\mathcal{V}_{\rm nc}$ і $\mathcal{W}_{\rm nc}$, тоді і тільки тоді, коли f є рівномірно аналітичною.*

Доведення. Якщо f рівномірно локально обмежена, то f є також локально обмеженою на зрізах, тоді за теоремою 7.2 f є G-диференційованою. Отже, f є рівномірно аналітичною. Взявши на увагу пропозицію 7.20, залишається показати, що якщо f - рівномірно локально обмежена, то f - неперервна у рівномірно-відкритих топологіях.

Нехай норма f - обмежена сталою $M > 0$ на н.к. кулі $B_{\rm nc}(Y, r_1)$ з центром у $Y \in \mathcal{V}^{s\times s}$. Тоді, використовуючи оцінку (7.26) або (7.29) з $\epsilon = \frac{r_1 - r}{r}$ для $r < r_1$, ми отримаємо для $X \in B_{\rm nc}(Y, r)_{sm}$, $m \in \mathbb{N}$, що

$$\Big\| f(X) - f\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)\Big\|_{sm} \le M \sum_{\ell=1}^{\infty} \Big(\frac{r}{r_1}\Big)^{\ell} = \frac{Mr}{r_1 - r}.$$

Отже, для будь-якого даного $\eta > 0$ існує $r < r_1$ таке, що для кожних $m \in \mathbb{N}$ і $X \in B_{\rm nc}(Y, r)_{sm}$ ми маємо

$$\Big\| f(X) - f\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)\Big\|_{sm} < \eta.$$

Іншими словами, f є неперервною в Y у рівномірно-відкритих топологіях. $\square$

Ми тепер розглянемо випадок, коли простір $\mathcal{V}$ - скінченновимірний, так що ми можемо припустити без втрати загальності, що $\mathcal{V} = \mathbb{C}^d$ з деякою структурою операторного простору. Зауважимо, що будь-які дві структури операторного простору на $\mathbb{C}^d$ є цілком ізоморфні, тобто тотожнє відображення $\mathbb{C}^d$ є цілком обмежене в обох напрямках (дивись, наприклад, [**118**, пропозиція 1.10(iii)]), так що рівномірно-відкрита топологія на $(\mathbb{C}^d)_{\rm nc}$ однозначно визначена. Ми можемо розширити кожний член збіжного TT ряду (з мультілінійних форм), використовуючи різницево-диференціальні оператори вищого порядку як у (4.12), (7.16) і (7.17), і розглянути питання про збіжність уздовж вільного моноїду $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$. Це є сильніше поняття збіжності, оскільки ми не групуємо разом всі члени відповідні до слів даної довжини. Щоб визначити цю збіжність, нам потрібно задати порядок на $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$; проте, ми будемо головним чином мати справу з абсолютною збіжністю уздовж $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$, так що вибір порядку не є важливим.

Нехай $\Upsilon_{\rm nc} \subseteq (\mathbb{C}^d)_{\rm nc}$ - матрично-кругова н.к. множина навколо $Y = (Y_1, \dots, Y_d) \in (\mathbb{C}^{s\times s})^d$ і нехай $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_d)$ - набір d додатних дійсних чисел з $\sum_{j=1}^{d} \rho_j < 1$.

Ми позначаємо

(7.33)
$$\Upsilon_{\mathrm{nc},\boldsymbol{\rho}} := \coprod_{m=1}^{\infty}\Big\{X \in (\Upsilon_{\mathrm{nc}})_{sm} \colon \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y + \frac{1}{\rho_j}\Big(0,\dots,0,\underbrace{X_j - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y_j}_{j-\text{е місце}},0,\dots,0\Big) \in (\Upsilon_{\mathrm{nc}})_{sm}$$

(7.34) $\qquad$ для всіх $j = 1,\dots,d\Big\}$.

Якщо Υ_{nc} - рівномірно-відкрита матрично-кругова н.к. множина навколо Y, то така є і $\Upsilon_{\mathrm{nc},\boldsymbol{\rho}}$; факт, що н.к. множина $\Upsilon_{\mathrm{nc},\boldsymbol{\rho}}$ є рівномірно-відкритою, випливає з факту, що лінійне відображення $Z \mapsto Z_j e_j$ на $(\mathbb{C}^{s\times s})^d$ є цілком обмеженим як відображення операторних просторів скінченного рангу, дивись [**118**, пропозиція 1.10(iii)].

Теорема 7.29. *Припустимо, що $\Omega \subseteq (\mathbb{C}^d)_{\mathrm{nc}}$ - рівномірно-відкрита н.к. множина, $\mathcal{W}$ - операторний простір, $f\colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. функція, яка є рівномірно локально обмеженою, $s \in \mathbb{N}$, $Y \in \Omega_s$. Нехай Υ_{nc} - рівномірно-відкрита матрично-кругова н.к. множина навколо Y, яка міститься у Ω і на якій f обмежена. Тоді для кожних $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1,\dots,\rho_d) \in (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\})^d$ з $\sum_{j=1}^d \rho_j < 1$, $m \in \mathbb{N}$ і $X \in (\Upsilon_{\mathrm{nc},\boldsymbol{\rho}})_{sm}$,*

(7.35)
$$f(X) = \sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d}\Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)\Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{Y,\dots,Y}_{|w|+1\ \text{разів}})$$
$$= \sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d}\Bigg(\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} A_{w,(0)}\Big)\otimes\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} A_{w,(1)}\Big)\otimes\cdots\otimes\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} A_{w,(|w|)}\Big)\Bigg)\star\Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{[w]},$$

де ряд збігається абсолютно і рівномірно на $\Upsilon_{\mathrm{nc},\boldsymbol{\rho}}$. Більше того,

(7.36)
$$\sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d}\sup_{m\in\mathbb{N},\,X\in(\Upsilon_{\mathrm{nc},\boldsymbol{\rho}})_{sm}}\Bigg\|\Bigg(\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} A_{w,(0)}\Big)\otimes\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} A_{w,(1)}\Big)\otimes\cdots\otimes\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} A_{w,(|w|)}\Big)\Bigg)\star\Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{[w]}\Bigg\|_{sm} < \infty.$$

Тут $A_{w,(0)}\otimes A_{w,(1)}\otimes\cdots\otimes A_{w,(|w|)} = \Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{Y,\dots,Y}_{|w|+1\ \text{разів}})$, з інтерпретацією тензорних добутків для значень $\Delta_R^{w^\top} f$ (зауваження 3.5), позначенням Свідлера без додавання (4.19) *і псевдостепеневим позначенням* (4.21).

Доведення. Нехай Υ_{nc} - рівномірно-відкрита матрично-кругова н.к. множина навколо Y така, що норма f обмежена, скажімо сталою $M > 0$, на Υ_{nc}. Для

$\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_d) \in (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\})^d$ з $\sum_{j=1}^d \rho_j < 1$, $m \in \mathbb{N}$ і $X \in (\Upsilon_{\mathrm{nc},\boldsymbol{\rho}})_{sm}$ ми отримаємо використовуючи (3.54), що

$$\sum_{|w|=\ell} \Big\| \Delta_R^{w^\top} f\Big(\underbrace{\bigoplus_{\alpha=1}^m Y, \dots, \bigoplus_{\alpha=1}^m Y}_{\ell+1 \text{ разів}}\Big)\Big(X_{i_1} - \bigoplus_{\alpha=1}^m Y_{i_1}, \dots, X_{i_\ell} - \bigoplus_{\alpha=1}^m Y_{i_\ell}\Big)\Big\|_{sm}$$

$$= \sum_{|w|=\ell} \boldsymbol{\rho}^w \Big\| \Delta_R^{w^\top} f\Big(\underbrace{\bigoplus_{\alpha=1}^m Y, \dots, \bigoplus_{\alpha=1}^m Y}_{\ell+1 \text{ разів}}\Big)\Big(\frac{1}{\rho_{i_1}}\Big(X_{i_1} - \bigoplus_{\alpha=1}^m Y_{i_1}\Big), \dots, \frac{1}{\rho_{i_\ell}}\Big(X_{i_\ell} - \bigoplus_{\alpha=1}^m Y_{i_\ell}\Big)\Big)\Big\|_{sm}$$

$$= \sum_{|w|=\ell} \boldsymbol{\rho}^w$$

$$\cdot \left\| \pi_{1,\ell+1} f\left(\begin{bmatrix} \bigoplus_{\alpha=1}^m Y & \frac{1}{\rho_{i_1}}(X_{i_1} - \bigoplus_{\alpha=1}^m Y_{i_1})e_{i_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{1}{\rho_{i_\ell}}(X_{i_\ell} - \bigoplus_{\alpha=1}^m Y_{i_\ell})e_{i_\ell} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \bigoplus_{\alpha=1}^m Y \end{bmatrix} \right) \right\|_{sm}$$

$$\leq M \sum_{|w|=\ell} \boldsymbol{\rho}^w = M\Big(\sum_{j=1}^d \rho_j\Big)^\ell,$$

що тягне за собою, що (7.36) виконується і ТТ ряд у (7.35) збігається абсолютно і рівномірно на $\Upsilon_{\mathrm{nc},\boldsymbol{\rho}}$. Тут ми використали факт, що

$$\begin{bmatrix} \bigoplus_{\alpha=1}^m Y & \frac{1}{\rho_{i_1}}(X_{i_1} - \bigoplus_{\alpha=1}^m Y_{i_1})e_{i_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{1}{\rho_{i_\ell}}(X_{i_\ell} - \bigoplus_{\alpha=1}^m Y_{i_\ell})e_{i_\ell} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \bigoplus_{\alpha=1}^m Y \end{bmatrix} \in (\Upsilon_{\mathrm{nc}})_{sm(\ell+1)}, \tag{7.37}$$

який отримається, використовуючи такий самий аргумент, як у доведенні (7.27) у лемі 7.22.

Щоб показати, що сума (абсолютно збіжного) ТТ ряду у (7.35) дорівнює $f(X)$, ми спостерігаємо, що його сума повинна співпадати з сумою ТТ ряду у (7.24), який отримається групуванням разом членів, що відповідають словам однакової довжини. Але зауваження, зроблене в абзаці перед лемою 7.22, разом з теоремою 7.23 означає, що ТТ ряд (7.24) збігається до $f(X)$ всюди у Υ_{nc}. □

Зауваження 7.30. У доведенні теореми 7.29 ми фактично встановили наступний результат. Нехай Υ_{nc} - рівномірно-відкрита н.к. множина, що містить Y,

міститься у Ω і на якій f обмежена. Тоді для кожного $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_d) \in (\mathbb{R}_+ \backslash \{0\})^d$ з $\sum_{j=1}^d \rho_j < 1$, (7.35) виконується, з рядом, що збігається абсолютно і рівномірно на множині всіх $X \in \Omega$ таких, що (7.37) виконується для всіх $\ell \in \mathbb{N}$ і таких, що TT ряд у (7.24), який отримається групуванням разом членів, що відповідають словам однакової довжини, збігається до $f(X)$. Це дає слабке припущення на область, де TT ряд у (7.35) збігається абсолютно і рівномірно.

На відміну від налаштування теореми 7.21 або теореми 7.23, може статися, що для рівномірно-відкритої матрично-кругової н.к. множини Υ_{nc} ми маємо $\bigcup_{\boldsymbol{\rho}} \Upsilon_{\mathrm{nc},\boldsymbol{\rho}} \subsetneq \Upsilon_{\mathrm{nc}}$, тобто ми не можемо гарантувати абсолютну збіжність уздовж $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ для TT ряду у (7.35) на всьому Υ_{nc}. Ми з'ясуємо ситуацію у спеціальному випадку відкритих н.к. куль.

Наслідок 7.31. *Нехай н.к. функція $f\colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ - рівномірно локально обмежена. Для кожних $s \in \mathbb{N}$, $Y \in \Omega_s$, нехай*

$$\delta := \sup\{r > 0\colon f \text{ є обмеженою на } B_{\mathrm{nc}}(Y, r)\}.$$

Тоді (7.35) *виконується з TT рядом, що збігається абсолютно і рівномірно на кожному* відкритому н.к. діаманті навколо Y,

$$\diamondsuit_{\mathrm{nc}}(Y, r) := \coprod_{m=1}^{\infty} \Big\{ X \in \Omega_{sm}\colon \sum_{j=1}^{d} \|e_j\|_1 \Big\| X_j - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y_j \Big\| < r \Big\} \tag{7.38}$$

з $r < \delta$. Більше того,

(7.39)
$$\sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} \sup_{m \in \mathbb{N},\, X \in \diamondsuit_{\mathrm{nc}}(Y,r)_{sm}} \Bigg\| \Bigg(\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} A_{w,(0)} \Big) \otimes \Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} A_{w,(1)} \Big) \otimes \cdots \otimes \Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} A_{w,(|w|)} \Big) \Bigg) \star \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y \Big)^{[w]} \Bigg\|_{sm} < \infty.$$

Доведення. Ми спочатку спостерігаємо, що для будь-яких $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ і $j = 1, \dots, d$ ми маємо $\|Ae_j\|_n = \|e_j\|_1 \|A\|$, оскільки $\operatorname{span}\{e_j\}$ є одновимірним підпростором у $\mathbb{C}^d$ і, отже, існує тільки одна структура операторного простору на $\operatorname{span} e_j$, с точністю до сталого множника $\|e_j\|_1$; дивись [**118**, пропозиція 1.10(ii)].

Нехай r таке, що $0 < r < \delta$. Нехай r' - дійсне число з $r < r' < \delta$, і нехай норма f - обмежена сталою $M > 0$ на $B_{\mathrm{nc}}(Y, r')$. Якщо $X \in \diamondsuit_{\mathrm{nc}}(Y, r)_{sm}$, ми можемо знайти $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_d)$ з

$$\rho_j > \frac{1}{r'} \|e_j\|_1 \Big\| X_j - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y \Big\|, \quad j = 1, \dots, d,$$

таке, що $\sum_{j=1}^{d} \rho_j < \frac{r}{r'}$. Оскільки відкриті н.к. кулі є рівномірно-відкритими і матрично-круговими н.к. множинами, таким є і $\Upsilon_{\mathrm{nc}} := B_{\mathrm{nc}}(Y, r')$. Для X і $\boldsymbol{\rho}$, як вище, ми спостерігаємо, що $X \in \Upsilon_{\mathrm{nc},\boldsymbol{\rho}}$. Отже, (7.35) виконується з рядом, що збігається абсолютно. Використовуючи оцінку у доведенні теореми 7.29, ми отримаємо, що

$$\sum_{|w|=\ell} \Big\| \Delta_R^{w^\top} f\Big(\underbrace{\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y, \ldots, \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y}_{\ell+1 \text{ разів}}\Big)\Big(X_{i_1} - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y_{i_1}, \ldots, X_{i_\ell} - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y_{i_\ell}\Big)\Big\|_{sm} \leq M\Big(\frac{r}{r'}\Big)^{\ell}.$$

Оскільки права частина не залежить від $\boldsymbol{\rho}$, m і X, (7.39) виконується. □

Зауваження 7.32. Оскільки $\bigcup_{0<r<\delta} \diamondsuit_{\mathrm{nc}}(Y, r) = \diamondsuit_{\mathrm{nc}}(Y, \delta)$, TT ряд у (7.35) збігається абсолютно уздовж $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ на н.к. діаманті $\diamondsuit_{\mathrm{nc}}(Y, \delta)$.

Зауваження 7.33. Ясно, що відкриті н.к. діаманти є рівномірно-відкритими і що для всіх Y і r, $\diamondsuit_{\mathrm{nc}}(Y, r) \subseteq B_{\mathrm{nc}}(Y, r)$. Це включення завжди власне. Рівність відбувається тоді і тільки тоді, коли для всіх $m \in \mathbb{N}$ і $X \in (\mathbb{C}^{sm\times sm})^d$ маємо $\|X\|_{sm} = \sum_{j=1}^{d} \|e_j\|_1 \|X_j\|$. Справді, ми маємо $X = \sum_{j=1}^{d} X_j e_j$ і $\|X\|_{sm} \leq \sum_{j=1}^{d} \|X_j e_j\|_{sm} = \sum_{j=1}^{d} \|e_j\|_1 \|X_j\|$ для всіх m і X, так що нерівність є завжди рівністю тоді і тільки тоді, коли $\diamondsuit_{\mathrm{nc}}(Y, r) = B_{\mathrm{nc}}(Y, r)$ для деякого, а значить, для всіх $Y \in (\mathbb{C}^{s\times s})^d$ і r. Проте $\sum_{j=1}^{d} \alpha_j \|X_j\|$ з деякими додатними коефіцієнтами α_j не є нормою операторного простору на $((\mathbb{C}^d)^{s\times s})_{\mathrm{nc}}$.

Зауваження 7.34. Замість розглядання операторних просторів, ми можемо розглядати банахові простори, забезпечені допустимими системами матричних норм таких, що (7.1) і (7.2) виконуються із сталими C_1, C_1' і C_2 для всіх n і m, як у пропозиції 7.19. Ми маємо вимагати $C_1' = 1$, щоб забезпечити, що пропозиція 7.12 виконується, тобто н.к. кулі складають базу топології на відповідному н.к. просторі. У цьому випадку, ми все ще можемо розглядати рівномірно локально обмежені н.к. функції і пропозиція 7.20, теорема 7.21, наслідок 7.26 і наслідок 7.28 залишаються вірними. Умова $C_1 = 1$ є природною для того, щоб забезпечити властивість типу Хаусдорфа для рівномірно-відкритої топології, дивись пропозицію 7.14 разом з абзацем, попереднім до неї. Умова $C_2 = 1$ є істотною для доведень теорем 7.23, 7.29 і наслідка 7.31 (зокрема, вона гарантує, що н.к. кулі є матрично-круговими н.к. множинами).

Зауваження 7.35. Результати цього підрозділу, на відміну від результатів у підрозділі 7.1 – дивись зауваження 7.11, є чисто некомутативної природи (за винятком теореми 7.21). Отже, вони допускають повні аналоги у дійсному випадку. Операторний простір над $\mathbb{R}$ - це банахів простір над $\mathbb{R}$, забезпечений допустимою системою матричних норм таких, що дійсні аналоги (7.1) і (7.2) виконуються з $C_1 = C_1' = C_2 = 1$ для всіх від n і m (дивись [**132**]). Теорема 7.23 і наслідки 7.26, 7.28 є вірними для випадку, коли $\mathcal{V}$ і $\mathcal{W}$ - операторні простори над $\mathbb{R}$, з усіма

поняттями, визначеними точно так, як і у комплексному випадку. Також, теорема 7.29 і наслідок 7.31 є вірними з $\mathbb{C}^d$ заміненим на $\mathbb{R}^d$ і $\mathcal{W}$ - операторним простором над $\mathbb{R}$.

7.4. Аналітичні і рівномірно аналітичні н.к. функції вищого порядку

Ми зараз будемо обговорювати аналітичність н.к. функцій вищого порядку в різних налаштуваннях. Наша головна мета тут є довести аналоги теореми 3.10 для відповідних класів н.к. функцій вищого порядку.

Нехай $\mathcal{W}$ - банахів простір над $\mathbb{C}$. *Допустима система норм прямокутних матриць над* $\mathcal{W}$ - це двох-індексова послідовність норм $\|\cdot\|_{n,m}$ на $\mathcal{W}^{n\times m}$, $n,m = 1,2,\ldots$, яка задовольняє наступну умову: для кожних $n,p,q,m \in \mathbb{N}$ існує стала $C(n,p,q,m) > 0$ така, що для всіх $X \in \mathcal{W}^{p\times q}$, $S \in \mathbb{C}^{n\times p}$ і $T \in \mathbb{C}^{q\times m}$,

$$\|SXT\|_{n,m} \le C(n,p,q,m)\|S\|\,\|X\|_{p,q}\|T\|, \tag{7.40}$$

де $\|\cdot\|$ позначає операторну норму прямокутних матриць над $\mathbb{C}$ відносно стандартних евклідових норм; порівняй з (7.2). Далі ми показуємо, що (7.40) тягне за собою аналог (7.1) для прямокутних матриць,

$$\begin{aligned} C_1(n,m,r,s)^{-1}\max\{\|X\|_{n,m},\|Y\|_{r,s}\} &\le \|X\oplus Y\|_{n+r,m+s} \\ &\le C_1'(n,m,r,s)\max\{\|X\|_{n,m},\|Y\|_{r,s}\}, \end{aligned} \tag{7.41}$$

для кожних $n,m,r,s \in \mathbb{N}$, $X \in \mathcal{W}^{n\times m}$, $Y \in \mathcal{W}^{r\times s}$ і деяких додатних сталих $C_1(n,m,r,s)$ і $C_1'(n,m,r,s)$.

Пропозиція 7.36. *Нехай $\mathcal{W}$ - банахів простір, забезпечений допустимою системою норм прямокутних матриць над $\mathcal{W}$, тобто* (7.40) *виконується. Тоді* (7.41) *виконується для кожних $n,m,r,s \in \mathbb{N}$, $X \in \mathcal{W}^{n\times m}$ і $Y \in \mathcal{W}^{r\times s}$ з*

$$C_1(n,m,r,s) = \max\{C(n,n+r,m+s,m), C(r,n+r,m+s,s)\},$$
$$C_1'(n,m,r,s) = C(n+r,n,m,m+s) + C(n+r,r,s,m+s).$$

Доведення. Нехай $X \in \mathcal{W}^{n\times m}$ і $Y \in \mathcal{W}^{r\times s}$. Тоді

$$\begin{aligned} \|X\oplus Y\|_{n+r,m+s} &= \|(X\oplus 0_{r\times s}) + (0_{n\times m}\oplus Y)\|_{n+r,m+s} \\ &\le \left\| \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{r\times n}\end{bmatrix} X \begin{bmatrix} I_m & 0_{m\times s}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n\times r} \\ I_r\end{bmatrix} Y \begin{bmatrix} 0_{s\times m} & I_s\end{bmatrix} \right\| \\ &\le \Big(C(n+r,n,m,m+s) + C(n+r,r,s,m+s)\Big)\max\{\|X\|_{n,m},\|Y\|_{r,s}\} \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}\max\{\|X\|_{n,m}, \|Y\|_{r,s}\} \\ &= \max\left\{\left\| \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times r}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0_{n\times s} \\ 0_{r\times m} & Y\end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m \\ 0_{s\times m}\end{bmatrix} \right\|_{n,m}, \right. \\ &\qquad \left. \left\| \begin{bmatrix} 0_{r\times n} & I_r\end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0_{n\times s} \\ 0_{r\times m} & Y\end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{m\times s} \\ I_s\end{bmatrix} \right\|_{r,s}\right\} \\ &\le \max\{C(n, n+r, m+s, m), C(r, n+r, m+s, s)\}\|X \oplus Y\|_{n+r,m+s}.\end{aligned}$$

□

Звісно, допустима система норм прямокутних матриць над $\mathcal{W}$ індукує допустиму систему норм квадратних матриць над $\mathcal{W}$. Зауважимо, що якщо $\mathcal{W}$ - операторний простір, то допустима система норм прямокутних матриць над $\mathcal{W}$ є єдиною, і ми можемо обрати

$$C(n, p, q, m) = C_1(n, p, q, m) = C_1'(n, p, q, m) = 1$$

для кожних $n, p, q, m \in \mathbb{N}$ [**117**, вправи 13.1 і 13.2].

Ми можемо також ввести прямокутні блочні ін'єкції і проєкції наступним чином. Нехай $\mathcal{R}$ - унітальне комутативне кільце, нехай $\mathcal{M}$ - модуль над $\mathcal{R}$, і нехай s, s_1, …, $s_m \in \mathbb{N}$ такі, що $s = s_1 + \cdots + s_m$. Покладемо

$$E_i := \operatorname{col}[0_{s_1\times s_i}, \dots, 0_{s_{i-1}\times s_i}, I_{s_i}, 0_{s_{i+1}\times s_{i+1}}, \cdots, 0_{s_m\times s_i}] \in \mathcal{R}^{s\times s_i}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Прямокутні блочні ін'єкції є визначеними як

$$\iota_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)} \colon \mathcal{M}^{s_i\times s_j} \to \mathcal{M}^{s\times s}, \quad \iota_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)} \colon Z \mapsto E_i Z E_j^\top, \quad i, j = 1, \dots, m, \tag{7.42}$$

і *прямокутні блочні проєкції* є визначеними як

$$\pi_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)} \colon \mathcal{M}^{s\times s} \to \mathcal{M}^{s_i\times s_j}, \quad \pi_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)} \colon Z \mapsto E_i^\top Z E_j, \quad i, j = 1, \dots, m. \tag{7.43}$$

Наступний аналог пропозиції 7.1, у відповідності до пропозиції 7.36, має місце.

Пропозиція 7.37. *Умова* (7.40) *(дійсна для всіх* n, p, q, $m \in \mathbb{N}$, $X \in \mathcal{W}^{p\times q}$, $S \in \mathbb{C}^{n\times p}$ *і* $T \in \mathbb{C}^{q\times m}$*) еквівалентна до обмеженості прямокутних блочних ін'єкцій* $\iota_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)}$ *і прямокутних блочних проєкцій* $\pi_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)}$, $m \in \mathbb{N}$, s_1, …, $s_m \in \mathbb{N}$, $i, j = 1, \dots, m$. *Зокрема,*

$$\|\iota_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)}\| \le C(s, s_i, s_j, s), \quad \|\pi_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)}\| \le C(s_i, s, s, s_j). \tag{7.44}$$

Доведення. Якщо (7.40) виконується для всіх n, p, q, $m \in \mathbb{N}$, $X \in \mathcal{W}^{p\times q}$, $S \in \mathbb{C}^{n\times p}$ і $T \in \mathbb{C}^{q\times m}$, то (7.44) випливає безпосередньо з (7.42) і (7.43), таким чином, $\iota_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)}$ і $\pi_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)}$ є обмеженими.

Зворотний напрямок може бути показаним аналогічно тому, як у пропозиції 7.1. □

Ми також маємо наступний аналог пропозиції 7.19.

Пропозиція 7.38. *Якщо $\mathcal{W}$ - банахів простір, забезпечений допустимою системою норм прямокутних матриць над $\mathcal{W}$ таких, що* (7.40) *виконується з C незалежним від n, p, q і m, то прямокутні блочні ін'єкції* (7.42) *і прямокутні блочні проєкції* (7.43) *- рівномірно цілком обмежені, тобто для кожних $m \in \mathbb{N}$ і $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{N}$, відображення $\iota_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)}$ і $\pi_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)}$ - цілком обмежені. Більше того,*

$$\|\iota_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)}\|_{\mathrm{cb}} \le C, \quad \|\pi_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)}\|_{\mathrm{cb}} \le C. \tag{7.45}$$

Якщо $\mathcal{W}$ - операторний простір, то всі $\iota_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)}$ є цілком ізометричними, і всі $\pi_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)}$ є цілком коізометричними.

Доведення. Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $1 \le i, j \le m$, $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{N}$, $W = (w_{ab})_{a,b=1,\dots,n} \in (\mathcal{W}^{s_i \times s_j})^{n\times n} \cong \mathcal{W}^{s_i n \times s_j n}$. Для $a, b = 1, \dots, n$, нехай $E_{ab} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ визначене як $(E_{ab})_{\alpha\beta} = \delta_{(a,b),(\alpha,\beta)}$, $\alpha, \beta = 1, \dots, n$. Тоді

$$\begin{aligned}
&\|(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n\times n}} \otimes \iota_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)})(W)\|_{(s_1+\dots+s_m)n} \\
&\qquad = \Big\|(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n\times n}} \otimes \iota_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)})\Big(\sum_{a,b=1}^{n} E_{ab} \otimes w_{ab}\Big)\Big\|_{(s_1+\dots+s_m)n} \\
&= \Big\|\sum_{a,b=1}^{n} E_{ab} \otimes \iota_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)}(w_{ab})\Big\|_{(s_1+\dots+s_m)n} = \Big\|\sum_{a,b=1}^{n} E_{ab} \otimes E_i w_{ab} E_j^\top\Big\|_{(s_1+\dots+s_m)n} \\
&\qquad = \|(I_n \otimes E_i) W (I_n \otimes E_j^\top)\|_{(s_1+\dots+s_m)n} \le C\|W\|_{s_i n, s_j n}.
\end{aligned}$$

Це доводить першу нерівність у (7.45).

Припустимо тепер, що

$$W = (w_{ab})_{a,b=1,\dots,n} \in \Big(\mathcal{W}^{(s_1+\dots+s_m)\times(s_1+\dots+s_m)}\Big)^{n\times n} \cong \mathcal{W}^{(s_1+\dots+s_m)n\times(s_1+\dots+s_m)n}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
&\|(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n\times n}} \otimes \pi_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)})(W)\|_{s_i n, s_j n} = \Big\|(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n\times n}} \otimes \pi_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)})\Big(\sum_{a,b=1}^{n} E_{ab} \otimes w_{ab}\Big)\Big\|_{s_i n, s_j n} \\
&= \Big\|\sum_{a,b=1}^{n} E_{ab} \otimes \pi_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)}(w_{ab})\Big\|_{s_i n, s_j n} = \Big\|\sum_{a,b=1}^{n} E_{ab} \otimes E_i^\top w_{ab} E_j\Big\|_{s_i n, s_j n} \\
&\qquad = \|(I_n \otimes E_i^\top) W (I_n \otimes E_j)\|_{s_i n, s_j n} \le C\|W\|_{(s_1+\dots+s_m)n}.
\end{aligned}$$

Це доводить другу нерівність у (7.45).

Якщо $\mathcal{W}$ - операторний простір, ми отримаємо, що оператори $\iota_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)}$ і $\pi_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)}$ є цілком стискаючими. Більше того, оскільки $\pi_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)} \iota_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)} = \mathrm{id}_{\mathcal{W}^{s_i\times s_j}}$, всі $\iota_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)}$ є цілком ізометричними, і всі $\pi_{ij}^{(s_1,\dots,s_m)}$ є цілком коізометричними. $\square$

Нехай $\mathcal{V}_0, \ldots, \mathcal{V}_k, \mathcal{W}_1, \ldots, \mathcal{W}_k$ - векторні простори над $\mathbb{C}$, нехай $\Omega^{(j)} \subseteq \mathcal{V}_{j,\mathrm{nc}}$, $j = 0, \ldots, k$, - скінченно-відкриті н.к. множини, і нехай $\mathcal{W}_0$ - банахів простір з допустимою системою норм прямокутних матриць над $\mathcal{W}_0$. Н.к. функція вищого порядку $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}; \mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$ називається *W-локально обмеженою на зрізах*, якщо для кожних $n_0, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $Y^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}, \ldots, Y^k \in \Omega^{(k)}_{n_k}$, $Z^0 \in {\mathcal{V}_0}^{n_0 \times n_0}, \ldots, Z^k \in {\mathcal{V}_k}^{n_k \times n_k}$, $W^1 \in {\mathcal{W}_1}^{n_0 \times n_1}, \ldots, W^k \in {\mathcal{W}_k}^{n_{k-1} \times n_k}$ існує $\epsilon > 0$ таке, що $f(Y^0 + tZ^0, \ldots, Y^k + tZ^k)(W^1, \ldots, W^k)$ обмежене у ${\mathcal{W}_0}^{n_0 \times n_k}$ для $|t| < \epsilon$, тобто функція $f|_{\Omega^{(0)}_{n_0} \times \cdots \times \Omega^{(k)}_{n_k}}$ - локально обмежена на зрізах для кожних фіксованих $W^1, \ldots, W^k$. Н.к. функція вищого порядку $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}; \mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$ називається *W-Гато (G_W-) диференційованою*, якщо для кожних $n_0, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $Y^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}, \ldots, Y^k \in \Omega^{(k)}_{n_k}$, $Z^0 \in {\mathcal{V}_0}^{n_0 \times n_0}, \ldots, Z^k \in {\mathcal{V}_k}^{n_k \times n_k}$, $W^1 \in {\mathcal{W}_1}^{n_0 \times n_1}, \ldots, W^k \in {\mathcal{W}_k}^{n_{k-1} \times n_k}$ G-похідна,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(Y^0 + tZ^0, \ldots, Y^k + tZ^k)(W^1, \ldots, W^k) - f(Y^0, \ldots, Y^k)(W^1, \ldots, W^k)}{t} = \frac{d}{dt} f(Y^0 + tZ^0, \ldots, Y^k + tZ^k)(W^1, \ldots, W^k)\Big|_{t=0}, \tag{7.46}$$

існує, тобто функція $f|_{\Omega^{(0)}_{n_0} \times \cdots \times \Omega^{(k)}_{n_k}}$ є G-диференційованою для кожних фіксованих $W^1, \ldots, W^k$. Тоді маємо, що f - *W-аналітична на зрізах*, тобто для кожних $Y^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}, \ldots, Y^k \in \Omega^{(k)}_{n_k}$, $Z^0 \in {\mathcal{V}_0}^{n_0 \times n_0}, \ldots, Z^k \in {\mathcal{V}_k}^{n_k \times n_k}$, $W^1 \in {\mathcal{W}_1}^{n_0 \times n_1}, \ldots, W^k \in {\mathcal{W}_k}^{n_{k-1} \times n_k}$, $f(Y^0 + tZ^0, \ldots, Y^k + tZ^k)(W^1, \ldots, W^k)$ - аналітична функція від t в околі точки 0. За теоремою Хартогса [**140**, с. 28], f є аналітичною на

$$(\mathcal{U}_0 \cap \Omega^{(0)}_{n_0}) \times \cdots \times (\mathcal{U}_k \cap \Omega^{(k)}_{n_k}) \times \mathcal{Y}_1 \times \cdots \times \mathcal{Y}_k$$

як функція кількох комплексних змінних для кожних $n_0, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ і для всіх скінченновимірних підпросторів $\mathcal{U}_0 \subseteq {\mathcal{V}_0}^{n_0 \times n_0}, \ldots, \mathcal{U}_k \subseteq {\mathcal{V}_k}^{n_k \times n_k}$, $\mathcal{Y}_1 \subseteq {\mathcal{W}_1}^{n_0 \times n_1}, \ldots, \mathcal{Y}_k \subseteq {\mathcal{W}_k}^{n_{k-1} \times n_k}$.

Теорема 7.39. *Припустимо, що $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}; \mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$ - W-локально обмежена на зрізах. Тоді такою є і*

$$\Delta_R f \in \mathcal{T}^{k+1}(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}, \Omega^{(k)}; \mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}}, \mathcal{V}_{k,\mathrm{nc}}).$$

Доведення. Нехай $n_0, \ldots, n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $Y^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}, \ldots, Y^k \in \Omega^{(k)}_{n_k}$, $Y^{k+1} \in \Omega^{(k)}_{n_{k+1}}$, $Z^0 \in {\mathcal{V}_0}^{n_0 \times n_0}, \ldots, Z^k \in {\mathcal{V}_k}^{n_k \times n_k}$, $Z^{k+1} \in {\mathcal{V}_k}^{n_{k+1} \times n_{k+1}}$, $W^1 \in {\mathcal{W}_1}^{n_0 \times n_1}, \ldots, W^{k+1} \in (\mathcal{W}_{k+1})^{n_k \times n_{k+1}}$. Оскільки $\Omega^{(k)} \subseteq \mathcal{V}_{k,\mathrm{nc}}$ - допустима справа н.к. множина, існує $r > 0$ таке, що $\begin{bmatrix} Y^k & rW^{k+1} \\ 0 & Y^{k+1} \end{bmatrix} \in \Omega^{(k)}_{n_k + n_{k+1}}$. Оскільки н.к. множина $\Omega^{(k)}$ - скінченно-відкрита, існує $\epsilon_1 > 0$ таке, що $\begin{bmatrix} Y^k + tZ^k & rW^{k+1} \\ 0 & Y^{k+1} + tZ^{k+1} \end{bmatrix} \in \Omega_{n_k + n_{k+1}}$ для всіх t з $|t| < \epsilon_1$. Оскільки f є W-локально обмеженим на зрізах, існує $\epsilon_2 > 0$

таке, що

$$f\left(Y^0+tZ^0,\dots,Y^{k-1}+tZ^{k-1},\begin{bmatrix}Y^k+tZ^k & rW^{k+1}\\ 0 & Y^{k+1}+tZ^{k+1}\end{bmatrix}\right)$$
$$(W^1,\dots,W^{k-1},\mathrm{row}[W^k,0])$$

обмежене для $|t|<\epsilon_2$. Отже, використовуючи (3.19), ми отримаємо, що

$$\begin{aligned}&\Delta_R f(Y^0+tZ^0,\dots,Y^{k+1}+tZ^{k+1})(W^1,\dots,W^{k+1})\\ &\quad= r^{-1}f\left(Y^0+tZ^0,\dots,Y^{k-1}+tZ^{k-1},\begin{bmatrix}Y^k+tZ^k & rW^{k+1}\\ 0 & Y^{k+1}+tZ^{k+1}\end{bmatrix}\right)\\ &\qquad\qquad (W^1,\dots,W^{k-1},\mathrm{row}[W^k,0])\begin{bmatrix}0\\ I_{n_{k+1}}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

є обмеженим для $|t|<\min\{\epsilon_1,\epsilon_2\}$. Ми робимо висновок, що $\Delta_R f$ є W-локально обмеженим на зрізах. Зауважимо, що ми використали тут факт, що $\mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}}$ забезпечене допустимою системою норм прямокутних матриць (точніше, факт, що блочна проєкція, застосована множенням на $\begin{bmatrix}0\\ I_{n_{k+1}}\end{bmatrix}$ справа, є обмеженою). □

Зауваження 7.40. Аналог теореми 7.39 також виконується, з аналогічним доведенням, для ${}_j\Delta_R f$, дивись зауваження 3.18.

Теорема 7.41. *Припустимо, що $f\in\mathcal{T}^k(\Omega^{(0)},\dots,\Omega^{(k)};\mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$ - W-локально обмежена на зрізах. Тоді f є G_W-диференційованою.*

Доведення. Ми спочатку покажемо, що f є *W-неперервною на зрізах*, тобто

$$\lim_{t\to 0} f(Y^0+tZ^0,\dots,Y^k+tZ^k)(W^1,\dots,W^k)=f(Y^0,\dots,Y^k)(W^1,\dots,W^k)$$

для всіх $n_0,\dots,n_k\in\mathbb{N}$, $Y^0\in\Omega^{(0)}_{n_0},\dots,Y^k\in\Omega^{(k)}_{n_k}$, $Z^0\in\mathcal{V}_0{}^{n_0\times n_0},\dots,Z^k\in\mathcal{V}_k{}^{n_k\times n_k}$, $W^1\in\mathcal{W}_1{}^{n_0\times n_1},\dots,W^k\in\mathcal{W}_k{}^{n_{k-1}\times n_k}$. Ми маємо за (3.44), що

$$\begin{aligned}(7.47)\quad &f(Y^0+tZ^0,\dots,Y^k+tZ^k)(W^1,\dots,W^k)-f(Y^0,\dots,Y^k)(W^1,\dots,W^k)\\ &\quad=\sum_{j=0}^{k}\big(f(Y^0+tZ^0,\dots,Y^j+tZ^j,Y^{j+1},\dots,Y^k)(W^1,\dots,W^k)\\ &\qquad -f(Y^0+tZ^0,\dots,Y^{j-1}+tZ^{j-1},Y^j,\dots,Y^k)(W^1,\dots,W^k)\big)\\ &\quad= t\sum_{j=0}^{k}{}_j\Delta_R f(Y^0+tZ^0,\dots,Y^{j-1}+tZ^{j-1},Y^j+tZ^j,Y^j,Y^{j+1},\dots,Y^k)\\ &\qquad\qquad (W^1,\dots,W^{j-1},Z^j,W^j,W^{j+1},\dots,W^k)\to 0\end{aligned}$$

коли $t\to 0$, тому що остання сума є обмеженою для малого t, дивись зауваження 7.40.

Оскільки ${}_j\Delta_R f$ є W-неперервним на зрізах за зауваженням 7.40 і попереднім абзацем, з (7.47) випливає, що f є G_W-диференційованою і

$$(7.48)\quad \frac{d}{dt} f(Y^0+tZ^0,\dots,Y^k+tZ^k)(W^1,\dots,W^k)\Big|_{t=0} = \sum_{j=0}^{k} {}_j\Delta_R f(Y^0,\dots,Y^{j-1},Y^j,Y^j,Y^{j+1},\dots,Y^k)(W^1,\dots,W^{j-1},W^j,Z^j,W^{j+1},\dots,W^k).$$

□

Зворотна теорема до теореми 7.41 є очевидною. Ми позначаємо як

$$\mathcal{T}^k_{G_W} = \mathcal{T}^k_{G_W}(\Omega^{(0)},\dots,\Omega^{(k)};\mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$$

підклас класу $\mathcal{T}^k(\Omega^{(0)},\dots,\Omega^{(k)};\mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$, що складається з н.к. функцій порядку k, які є G_W-диференційованими.

Наступне твердження - очевидний наслідок теорем 7.39 і 7.41.

Наслідок 7.42. *Нехай* $f \in \mathcal{T}^k_{G_W}(\Omega^{(0)},\dots,\Omega^{(k)};\mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$. *Тоді*

$$\Delta_R f \in \mathcal{T}^{k+1}_{G_W}(\Omega^{(0)},\dots,\Omega^{(k)},\Omega^{(k)};\mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}},\mathcal{V}_{k,\mathrm{nc}}).$$

Зауваження 7.43. Аналог наслідку 7.42 також виконується для ${}_j\Delta_R f$, дивись зауваження 3.18 і 7.40.

Нагадаємо, що k-лінійне відображення $\omega\colon \mathcal{W}_1\times\dots\times\mathcal{W}_k\to\mathcal{W}_0$, де $\mathcal{W}_0$, …, $\mathcal{W}_k$ - банахові простори, називається *обмеженим*, якщо

$$\|\omega\|_{\mathcal{L}^k} := \sup_{\|w^1\|=\dots=\|w^k\|=1} \|\omega(w^1,\dots,w^k)\| < \infty;$$

ми позначаємо як $\mathcal{L}^k(\mathcal{W}_1\times\dots\times\mathcal{W}_k,\mathcal{W}_0)$ банахів простір таких обмежених k-лінійних відображень. Нехай $\mathcal{V}_0$, …, $\mathcal{V}_k$, $\mathcal{W}_0$, …, $\mathcal{W}_k$ - банахові простори над $\mathbb{C}$, забезпечені допустимими системами норм прямокутних матриць, і нехай $\Omega^{(j)}\subseteq\mathcal{V}_{j,\mathrm{nc}}$, $j=0,\dots,k$, - відкриті н.к. множини. Н.к. функція вищого порядку $f\in\mathcal{T}^k(\Omega^{(0)},\dots,\Omega^{(k)};\mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$ називається *локально обмеженою*, якщо для кожних $n_0,\dots,n_k\in\mathbb{N}$ функція $f|_{\Omega^{(0)}_{n_0}\times\dots\times\Omega^{(k)}_{n_k}}$ має значення у $\mathcal{L}^k({\mathcal{W}_1}^{n_0\times n_1}\times\dots\times{\mathcal{W}_k}^{n_{k-1}\times n_k},{\mathcal{W}_0}^{n_0\times n_k})$ і є локально обмеженою, тобто для кожних $Y^0\in\Omega^{(0)}_{n_0}$, …, $Y^k\in\Omega^{(k)}_{n_k}$ існує $\delta>0$ таке, що $\|f(X^0,\dots,X^k)\|_{\mathcal{L}^k}$ обмежене для $X^0\in B(Y^0,\delta)$, …, $X^k\in B(Y^k,\delta)$. Звісно, локально обмежена н.к. функція вищого порядку є W-локально обмеженою на зрізах.

Н.к. функція вищого порядку $f\in\mathcal{T}^k(\Omega^{(0)},\dots,\Omega^{(k)};\mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$ називається *G-диференційованою*, якщо для кожних $n_0,\dots,n_k\in\mathbb{N}$ функція $f|_{\Omega^{(0)}_{n_0}\times\dots\times\Omega^{(k)}_{n_k}}$

має значення у $\mathcal{L}^k({\mathcal{W}_1}^{n_0\times n_1}\times\cdots\times{\mathcal{W}_k}^{n_{k-1}\times n_k},{\mathcal{W}_0}^{n_0\times n_k})$ і є G-диференційованою, тобто для кожних $Y^0\in\Omega^{(0)}_{n_0},\ \ldots,\ Y^k\in\Omega^{(k)}_{n_k},\ Z^0\in{\mathcal{V}_0}^{n_0\times n_0},\ \ldots,\ Z^k\in\mathcal{V})k^{n_k\times n_k}$, G-похідна

(7.49)
$$\delta f(Y^0,\ldots,Y^k)(Z^0,\ldots,Z^k)=\lim_{t\to 0}\frac{f(Y^0+tZ^0,\ldots,Y^k+tZ^k)-f(Y^0,\ldots,Y^k)}{t}$$
$$=\frac{d}{dt}f(Y^0+tZ^0,\ldots,Y^k+tZ^k)\Big|_{t=0}$$

існує у нормі $\mathcal{L}^k({\mathcal{W}_1}^{n_0\times n_1}\times\cdots\times{\mathcal{W}_k}^{n_{k-1}\times n_k},{\mathcal{W}_0}^{n_0\times n_k})$. Звісно, G-диференційована н.к. функція вищого порядку є G_W-диференційованою – порівняй з (7.49) і (7.46).

Н.к. функція вищого порядку $f\in\mathcal{T}^k(\Omega^{(0)},\ldots,\Omega^{(k)};\mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}},\ldots,\mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$ називається *диференційованою за Фреше (F-диференційованою)*, якщо для кожних $n_0,\ldots,n_k\in\mathbb{N}$ функція $f|_{\Omega^{(0)}_{n_0}\times\cdots\times\Omega^{(k)}_{n_k}}$ має значення у

$$\mathcal{L}^k({\mathcal{W}_1}^{n_0\times n_1}\times\cdots\times{\mathcal{W}_k}^{n_{k-1}\times n_k},{\mathcal{W}_0}^{n_0\times n_k})$$

і є F-диференційованою, тобто $f|_{\Omega^{(0)}_{n_0}\times\cdots\times\Omega^{(k)}_{n_k}}$ - G-диференційована і для будь-яких $Y^0\in\Omega^{(0)}_{n_0},\ \ldots,\ Y^k\in\Omega^{(k)}_{n_k}$ лінійний оператор

$$\delta f(Y^0,\ldots,Y^k)\colon {\mathcal{V}_0}^{n_0\times n_0}\oplus\cdots\oplus{\mathcal{V}_k}^{n_k\times n_k}\to\mathcal{L}^k({\mathcal{W}_1}^{n_0\times n_1}\times\cdots\times{\mathcal{W}_k}^{n_{k-1}\times n_k},{\mathcal{W}_0}^{n_0\times n_k})$$

є обмеженим.

Н.к. функція вищого порядку $f\in\mathcal{T}^k(\Omega^{(0)},\ldots,\Omega^{(k)};\mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}},\ldots,\mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$ називається *аналітичною*, якщо f є локально обмеженою і G-диференційованою. Звісно, аналітична н.к. функція вищого порядку є W-аналітичною. Якщо

$$f\in\mathcal{T}^k(\Omega^{(0)},\ldots,\Omega^{(k)};\mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}},\ldots,\mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$$

- аналітична, то за [**88**, теорема 3.17.1] $f|_{\Omega^{(0)}_{n_0}\times\cdots\times\Omega^{(k)}_{n_k}}$ - також аналітична і F-диференційована. Отже, аналітична н.к. фунція вищого порядку f є неперервною (тобто всі її обмеження $f|_{\Omega^{(0)}_{n_0}\times\cdots\times\Omega^{(k)}_{n_k}}$ є неперервними) і F-диференційованою.

Теорема 7.44. *Якщо $f\in\mathcal{T}^k(\Omega^{(0)},\ldots,\Omega^{(k)};\mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}},\ldots,\mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$ - локально обмежена, то таким є і $\Delta_R f\in\mathcal{T}^{k+1}(\Omega^{(0)},\ldots,\Omega^{(k)},\Omega^{(k)};\mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}},\ldots,\mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}},\mathcal{V}_{k,\mathrm{nc}})$.*

Доведення. Нехай $n_0,\ldots,n_{k+1}\in\mathbb{N}$, $Y^0\in\Omega^{(0)}_{n_0},\ \ldots,\ Y^k\in\Omega^{(k)}_{n_k},\ Y^{k+1}\in\Omega^{(k)}_{n_{k+1}}$. Оскільки f - локально обмежена, існує $\delta>0$ таке, що

$$\|f(X^0,\ldots,X^{k-1},X)\|_{\mathcal{L}^k}$$
$$=\sup_{\|W^1\|_{n_0,n_1}=\ldots=\|W^{k-1}\|_{n_{k-2},n_{k-1}}=\|W\|_{n_{k-1},n_k+n_{k+1}}=1}\|f(X^0,\ldots,X^{k-1},X)$$
$$(W^1,\ldots,W^{k-1},W)\|_{n_0,n_k+n_{k+1}}$$

обмежене для всіх $X^0 \in B(Y^0, \delta)$, …, $X^{k-1} \in B(Y^{k-1}, \delta)$, $X \in B(Y^k \oplus Y^{k+1}, \delta)$. Оскільки

$$\begin{bmatrix} X^k & \frac{\delta}{2}W^{k+1} \\ 0 & X^{k+1} \end{bmatrix} \in B(Y^k \oplus Y^{k+1}, \delta),$$

коли $X^k \in B(Y^k, \frac{\delta}{2})$, $X^{k+1} \in B(Y^{k+1}, \frac{\delta}{2})$, і $W^{k+1} \in \mathcal{V}_k{}^{n_k \times n_{k+1}}$ таке, що $\|W^{k+1}\|_{n_k, n_{k+1}} = 1$, ми отримаємо, що

$$\left\| f\left(X^0, \ldots, X^{k-1}, \begin{bmatrix} X^k & \frac{\delta}{2}W^{k+1} \\ 0 & X^{k+1} \end{bmatrix}\right)(W^1, \ldots, W^{k-1}, \mathrm{row}[W^k, 0]) \right\|_{n_0, n_k + n_{k+1}}$$

обмежене для $X^0 \in B(Y^0, \frac{\delta}{2})$, …, $X^{k+1} \in B(Y^{k+1}, \frac{\delta}{2})$, і

$$\|W^1\|_{n_0, n_1} = \ldots = \|W^{k+1}\|_{n_k, n_{k+1}} = 1.$$

Тут ми використали обмеженість блочної ін'єкції

$$W^k \in \mathcal{W}_k{}^{n_{k-1} \times n_k} \longmapsto \mathrm{row}[W^k, 0] \in \mathcal{W}_k{}^{n_{k-1} \times (n_k + n_{k+1})}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} &\|\Delta_R f(X^0, \ldots, X^{k+1})\|_{\mathcal{L}^{k+1}} \\ &\quad = \sup_{\|W^1\|_{n_0,n_1} = \ldots = \|W^{k+1}\|_{n_k, n_{k+1}} = 1} \|\Delta_R f(X^0, \ldots, X^{k+1})(W^1, \ldots, W^{k+1})\|_{n_0, n_{k+1}} \\ &\quad = \frac{2}{\delta} \sup_{\|W^1\|_{n_0,n_1} = \ldots = \|W^{k+1}\|_{n_k, n_{k+1}} = 1} \left\| f\left(X^0, \ldots, X^{k-1}, \begin{bmatrix} X^k & \frac{\delta}{2}W^{k+1} \\ 0 & X^{k+1} \end{bmatrix}\right) \right. \\ &\qquad\qquad \left. (W^1, \ldots, W^{k-1}, \mathrm{row}[W^k, 0]) \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_{k+1}} \end{bmatrix} \right\|_{n_0, n_{k+1}} \end{aligned}$$

обмежене для $X^0 \in B(Y^0, \frac{\delta}{2})$, …, $X^{k+1} \in B(Y^{k+1}, \frac{\delta}{2})$. Тут ми використали обмеженість блочної проєкції, застосованої множенням на $\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_{k+1}} \end{bmatrix}$ справа. □

Зауваження 7.45. Аналог теореми 7.44 також має місце, з аналогічним доведенням, для ${}_j\Delta_R f$, дивись зауваження 3.18.

Теорема 7.46. *Якщо* $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}; \mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$ *- локально обмежена, то* f *- аналітична.*

Доведення. Ми спочатку покажемо, що f *неперервна на зрізах*, тобто

$$\lim_{t \to 0} \|f(Y^0 + tZ^0, \ldots, Y^k + tZ^k) - f(Y^0, \ldots, Y^k)\|_{\mathcal{L}^k} = 0$$

для всіх $n_0, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $Y^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}$, …, $Y^k \in \Omega^{(k)}_{n_k}$, $Z^0 \in \mathcal{V}_0{}^{n_0 \times n_0}$, …, $Z^k \in \mathcal{V}_k{}^{n_k \times n_k}$. Справді, збіжність у (7.47) є рівномірною на множині тих $W^1 \in \mathcal{W}_1{}^{n_0 \times n_1}$, …,

$W^k \in \mathcal{W}_k{}^{n_{k-1}\times n_k}$, які задовольняють $\|W^1\|_{n_0,n_1} = \ldots = \|W^k\|_{n_{k-1},n_k} = 1$ тому, що остання сума у (7.47) є рівномірно обмеженою на цій множині для малих t, дивись зауваження 7.45.

Оскільки ${}_j\Delta_R f$ - неперервна на зрізах за зауваженням 7.45 і попереднім абзацем, (7.47) тягне за собою, що f є G-диференційованою і

$$\delta f(Y^0, \ldots, Y^k)(Z^0, \ldots, Z^k)$$

обчислюється як (7.48), де границя є рівномірною на множині тих $W^1 \in \mathcal{W}_1{}^{n_0\times n_1}$, $\ldots$, $W^k \in \mathcal{W}_k{}^{n_{k-1}\times n_k}$, що задовольняють $\|W^1\|_{n_0,n_1} = \ldots = \|W^k\|_{n_{k-1},n_k} = 1$. Ми робимо висновок, що f - аналітична. □

З теореми 7.46 випливає, що н.к. функція вищого порядку f - локально обмежена тоді і тільки тоді, коли f - неперервна, тоді і тільки тоді, коли f - F-диференційована, тоді і тільки тоді, коли f - аналітична. Ми позначаємо як $\mathcal{T}^k_{\mathrm{an}} = \mathcal{T}^k_{\mathrm{an}}(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}; \mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$ підклас $\mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}; \mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$, що складається з н.к. функцій порядку k, які є аналітичними.

Наступне твердження є очевидним наслідком теорем 7.44 і 7.46.

Наслідок 7.47. *Нехай* $f \in \mathcal{T}^k_{\mathrm{an}}(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}; \mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$. *Тоді*

$$\Delta_R f \in \mathcal{T}^{k+1}_{\mathrm{an}}(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}, \Omega^{(k)}; \mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}}, \mathcal{V}_{k,\mathrm{nc}}).$$

Зауваження 7.48. Аналог наслідку 7.47 також виконується для ${}_j\Delta_R f$, дивись зауваження 3.18 і 7.45.

Нехай $\mathcal{W}_0$, $\ldots$, $\mathcal{W}_k$ - банахові простори, забезпечені допустимими системами норм прямокутних матриць, і нехай $\omega\colon \mathcal{W}_1 \times \cdots \times \mathcal{W}_k \to \mathcal{W}_0$ - k-лінійне відображення. Для кожних n_0, n_1, $\ldots$, $n_k \in \mathbb{N}$ ми визначаємо k-лінійне відображення $\omega^{(n_0,\ldots,n_k)}\colon \mathcal{W}_1{}^{n_0\times n_1} \times \cdots \times \mathcal{W}_k{}^{n_{k-1}\times n_k} \to \mathcal{W}_0{}^{n_0\times n_k}$ як

$$\omega^{(n_0,\ldots,n_k)}(W^1, \ldots, W^k) = (W^1 \odot \cdots \odot W^k)\omega, \tag{7.50}$$

де ми використовуємо позначення (3.7), і ω діє на матрицю

$$W^1 \odot \cdots \odot W^k \in (\mathcal{W}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{W}_k)^{n_0\times n_k}$$

справа поелементно, порівняй з (3.8). k-лінійне відображення ω називається *цілком обмеженим* (у сенсі Кристенсена і Сінклера, дивись, наприклад, [**117**, розділ 17]), якщо

$$\|\omega\|_{\mathcal{L}^k_{\mathrm{cb}}} := \sup_{n_0,\ldots,n_k\in\mathbb{N}} \|\omega^{(n_0,\ldots,n_k)}\|_{\mathcal{L}^k} < \infty.$$

Ми позначаємо як $\mathcal{L}^k_{cb}(\mathcal{W}_1 \times \cdots \times \mathcal{W}_k, \mathcal{W}_0)$ банахів простір таких цілком обмежених k-лінійних відображень.

Нагадаємо [**117**, с. 185, вправа 13.2], що операторний простір $\mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ є забезпеченим єдиною допустимою системою норм прямокутних матриць такою, що аналоги

(7.1) і (7.2) (тобто (7.40)) для прямокутних матриць виконуються з константами рівними 1 незалежно від матричних розмірів. Ми зауважимо (дивись, наприклад, [**117**, розділ 17] або [**118**, розділ 5]), що якщо $\mathcal{W}_0, \dots, \mathcal{W}_k$ - операторні простори, то $\|\omega\|_{\mathcal{L}^k_{\mathrm{cb}}}$ співпадає з цілком обмеженою нормою ω, що розглядається як лінійне відображення $\mathcal{W}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{W}_k \to \mathcal{W}_0$, де векторні простори $(\mathcal{W}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{W}_k)^{n_0 \times n_k}$, n_0, $n_k \in \mathbb{N}$, забезпечені *нормою Хагерупа,* $\|\cdot\|_{H,n_0,n_k}$:

$$\begin{aligned}(7.51)\quad &\|W\|_{H,n_0,n_k} \\ &= \inf\{\|W^1\|_{n_0,n_1} \cdots \|W^k\|_{n_{k-1},n_k} \colon n_1, \dots, n_{k-1} \in \mathbb{N},\ W = W^1 \odot \cdots \odot W^k\}.\end{aligned}$$

Пропозиція 7.49. *Нехай $\mathcal{V}$ і $\mathcal{W}$ - операторні простори, і нехай $\omega \colon \mathcal{V}^k \to \mathcal{W}$ - k-лінійне відображення. Тоді*

$$(7.52)\qquad \|\omega\|_{\mathcal{L}^k_{\mathrm{cb}}} = \sup\{\|W^{\odot k}\omega\|_n \colon n \in \mathbb{N}, W \in \mathcal{V}^{n\times n},\ \|W\|_n = 1\}.$$

Доведення. Нерівніть "$\geq$"є очевидною. Для того, щоб показати, що "$\leq$"теж виконується, нехай $n_0, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, $W^1 \in \mathcal{V}^{n_0\times n_1}, \dots, W^k \in \mathcal{V}^{n_{k-1}\times n_k}$ - довільні. Покладемо

$$\widetilde{W} = \begin{bmatrix} 0_{n_0\times n_0} & W^1 & 0_{n_0\times n_2} & \dots & 0_{n_0\times n_k} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0_{n_{k-2}\times n_k} \\ \vdots & & & \ddots & W^k \\ 0_{n_k\times n_0} & \dots & \dots & \dots & 0_{n_k\times n_k} \end{bmatrix} \in \mathcal{V}^{(n_0+\dots+n_k)\times(n_0+\dots+n_k)}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}&\|(W^1 \odot \cdots \odot W^k)\omega\|_{n_0\times n_k} \\ &\qquad = \left\| \begin{bmatrix} 0_{n_0\times n_0} & \dots & 0_{n_0\times n_{k-1}} & (W^1 \odot \cdots \odot W^k)\omega \\ \vdots & \ddots & & 0_{n_1\times n_k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0_{n_k\times n_0} & \dots & \dots & 0_{n_k\times n_k} \end{bmatrix} \right\|_{n_0+\dots+n_k} \\ &\qquad\qquad = \|\widetilde{W}^{\odot k}\omega\|_{n_0+\dots+n_k}\end{aligned}$$

є не більшим ніж права частина (7.52). Взявши супремум $\|(W^1 \odot \cdots \odot W^k)\omega\|_{n_0\times n_k}$ над усіма $n_0, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ і усіма $W^1 \in \mathcal{V}^{n_0\times n_1}, \dots, W^k \in \mathcal{V}^{n_{k-1}\times n_k}$ норми 1, ми отримаємо потрібну нерівність "$\leq$"у (7.52). $\square$

Зауваження 7.50. Пропозиція 7.49 каже нам, що обчислення на діагоналі є ізометричним ізоморфізмом з простору $\mathcal{L}^k_{\mathrm{cb}}(\mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V}, \mathcal{W})$ у простір обмежених н.к. однорідних многочленів степеня k на $\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ із значеннями у $\mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ і супремум-нормою на $B_{\mathrm{nc}}(0,1)$, дивись коментар у кінці розділу 6. Це є н.к. аналогом добре

відомого співвідношення між обмеженими однорідними многочленами і обмеженими симетричними мультілінійними формами на банахових просторах, де ізоморфізм проте не є ізометричним, дивись [**88**, підрозділ 26.2] і [**110**, підрозділ 2].

Нехай $\mathcal{V}_0, \dots, \mathcal{V}_k, \mathcal{W}_0, \dots, \mathcal{W}_k$ - операторні простори, і нехай $\Omega^{(j)} \subseteq \mathcal{V}_{j,\mathrm{nc}}$, $j = 0, \dots, k$, - рівномірно-відкриті множини. Ми називаємо н.к. функцію вищого порядку $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \dots, \Omega^{(k)}; \mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$ *рівномірно локально цілком обмеженою*, якщо для кожних $n_0, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ функція $f|_{\Omega^{(0)}_{n_0} \times \dots \times \Omega^{(k)}_{n_k}}$ має значення у

$$\mathcal{L}^k_{\mathrm{cb}}({\mathcal{W}_1}^{n_0 \times n_1} \times \dots \times {\mathcal{W}_k}^{n_{k-1} \times n_k}, {\mathcal{W}_0}^{n_0 \times n_k})$$

і f є локально обмеженою у рівномірно-відкритій топології, тобто для кожних $Y^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}, \dots, Y^k \in \Omega^{(k)}_{n_k}$ існує $\delta > 0$ таке, що $\|f(X^0, \dots, X^k)\|_{\mathcal{L}^k_{\mathrm{cb}}}$ є обмеженим для $X^0 \in B_{\mathrm{nc}}(Y^0, \delta), \dots, X^k \in B_{\mathrm{nc}}(Y^k, \delta)$. (Зауважимо, що $p \times q$ матриці над операторним простором $\mathcal{W}$ складають операторний простір.)

Для $\phi \in \mathcal{L}^k_{\mathrm{cb}}({\mathcal{W}_1}^{s_0 \times s_1} \times \dots \times {\mathcal{W}_k}^{s_{k-1} \times s_k}, {\mathcal{W}_0}^{s_0 \times s_k})$ і $r > 0$, визначимо *н.к. кулю з центром у ϕ радіуса r* як

$$B_{\mathrm{nc}}(\phi, r) = \coprod_{m_0, \dots, m_k = 1}^{\infty} \Big\{ \psi \in \mathcal{L}^k_{\mathrm{cb}}({\mathcal{W}_1}^{s_0 m_0 \times s_1 m_1} \times \dots \times {\mathcal{W}_k}^{s_{k-1} m_{k-1} \times s_k m_k}, {\mathcal{W}_0}^{s_0 m_0 \times s_k m_k}) : \\ \|\psi - \phi^{(m_0, \dots, m_k)}\|_{\mathcal{L}^k_{\mathrm{cb}}} < r \Big\}.$$

Зауважимо, що тут, для $W^1 \in {\mathcal{W}_1}^{s_0 m_0 \times s_1 m_1}, \dots, W^k \in {\mathcal{W}_k}^{s_{k-1} m_{k-1} \times s_k m_k}$,

$$\phi^{(m_0, \dots, m_k)}(W^1, \dots, W^k) := (W^1_{s_0, s_2} \odot_{s_1} \dots_{s_{k-2}, s_k} \odot_{s_{k-1}} W^k)\phi,$$

дивись (3.7) і (7.50). Аналогічно до пропозиції 7.12, н.к. кулі складають базу для топології на

$$\coprod_{n_0, \dots, n_k = 1}^{\infty} \mathcal{L}^k_{\mathrm{cb}}({\mathcal{W}_1}^{n_0 \times n_1} \times \dots \times {\mathcal{W}_k}^{n_{k-1} \times n_k}, {\mathcal{W}_0}^{n_0 \times n_k}),$$

яка буде називатися *рівномірно-відкритою топологією*. Аналогічно до пропозиції 7.20, якщо н.к. функція вищого порядку $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \dots, \Omega^{(k)}; \mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$ - неперервна відносно топології добутку на

$$\underbrace{\mathcal{V}_{0,\mathrm{nc}} \times \dots \times \mathcal{V}_{k,\mathrm{nc}}}_{k+1 \text{ разів}}$$

(рівномірно-відкритих топологій на $\mathcal{V}_{j,\mathrm{nc}}$) і рівномірно-відкритої топології на

$$\coprod_{n_0, \dots, n_k = 1}^{\infty} \mathcal{L}^k_{\mathrm{cb}}({\mathcal{W}_1}^{n_0 \times n_1} \times \dots \times {\mathcal{W}_k}^{n_{k-1} \times n_k}, {\mathcal{W}_0}^{n_0 \times n_k}),$$

то f є рівномірно локально цілком обмеженою.

Н.к. функція вищого порядку $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \dots, \Omega^{(k)}; \mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$ називається *цілком обмежено диференційованою за Гато, або* G_{cb}*-диференційованою*, якщо для кожних $n_0, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ функція $f|_{\Omega^{(0)}_{n_0} \times \dots \times \Omega^{(k)}_{n_k}}$ має значення у $\mathcal{L}^k_{\mathrm{cb}}({\mathcal{W}_1}^{n_0 \times n_1} \times \dots \times {\mathcal{W}_k}^{n_{k-1} \times n_k}, {\mathcal{W}_0}^{n_0 \times n_k})$ і є G-диференційованою, тобто для кожних $Y^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}$, $\dots$, $Y^k \in \Omega^{(k)}_{n_k}$, $Z^0 \in {\mathcal{V}_0}^{n_0 \times n_0}$, $\dots$, $Z^k \in {\mathcal{V}_k}^{n_k \times n_k}$, G-похідна (7.49) існує в нормі

$$\mathcal{L}^k_{\mathrm{cb}}({\mathcal{W}_1}^{n_0 \times n_1} \times \dots \times {\mathcal{W}_k}^{n_{k-1} \times n_k}, {\mathcal{W}_0}^{n_0 \times n_k}).$$

Н.к. функція вищого порядку $f \in \mathcal{T}^k(\Omega; \mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$ називається *рівномірно цілком обмежено (ц.о.-) аналітичною*, якщо f є рівномірно локально цілком обмеженою і $\mathrm{G_{cb}}$-диференційованою.

Теорема 7.51. *Якщо* $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \dots, \Omega^{(k)}; \mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$ *- рівномірно локально цілком обмежена, то таким є і*

$$\Delta_R f \in \mathcal{T}^{k+1}(\Omega^{(0)}, \dots, \Omega^{(k)}, \Omega^{(k)}; \mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}}, \mathcal{V}_{k,\mathrm{nc}}).$$

Доведення. Нехай $s_0, \dots, s_{k+1} \in \mathbb{N}$, $Y^0 \in \Omega^{(0)}_{s_0}$, $\dots$, $Y^k \in \Omega^{(k)}_{s_k}$, $Y^{k+1} \in \Omega^{(k)}_{s_{k+1}}$. Оскільки f - рівномірно локально цілком обмежена, існує $\delta > 0$ таке, що

$$\|(f(X^0, \dots, X^{k-1}, X))^{(n_0, \dots, n_{k-1}, n)}(W^1, \dots, W^{k-1}, W)\|_{s_0 m_0 n_0, (s_k + s_{k+1}) mn} \tag{7.53}$$

є обмеженим для всіх m_0, $\dots$, m_{k-1}, m, n_0, $\dots$, n_{k-1}, $n \in \mathbb{N}$, $X^0 \in B_{\mathrm{nc}}(Y^0, \delta)_{s_0 m_0}$, $\dots$, $X^{k-1} \in B_{\mathrm{nc}}(Y^{k-1}, \delta)_{s_{k-1} m_{k-1}}$, $X \in B_{\mathrm{nc}}(Y^k \oplus Y^{k+1}, \delta)_{(s_k + s_{k+1}) m}$,
$W^1 \in {\mathcal{W}_1}^{s_0 m_0 n_0 \times s_1 m_1 n_1}$, $\dots$, $W^{k-1} \in (\mathcal{W}_{k-1})^{s_{k-2} m_{k-2} n_{k-2} \times s_{k-1} m_{k-1} n_{k-1}}$,
і $W \in {\mathcal{W}_k}^{s_{k-1} m_{k-1} n_{k-1} \times (s_k + s_{k+1}) mn}$, з

$$\|W^1\|_{s_0 m_0 n_0, s_1 m_1 n_1} = \dots = \|W^{k-1}\|_{s_{k-2} m_{k-2} n_{k-2}, s_{k-1} m_{k-1} n_{k-1}} = \|W\|_{s_{k-1} m_{k-1} n_{k-1}, (s_k + s_{k+1}) mn} = 1.$$

За означенням, (7.53) дорівнює

$$\|(W^1_{s_0 m_0, s_2 m_2} \odot_{s_1 m_1} \dots_{s_{k-3} m_{k-3}, s_{k-1} m_{k-1}} \odot_{s_{k-2} m_{k-2}} W^{k-1}_{s_{k-2} m_{k-2}, (s_k + s_{k+1}) m} \odot_{s_{k-1} m_{k-1}} W) f(X^0, \dots, X^{k-1}, X)\|_{s_0 m_0 n_0, (s_k + s_{k+1}) mn}.$$

Використовуючи (3.8), ми переписуєм це як

$$\Big\| f\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{n_0} X^0, \dots, \bigoplus_{\alpha=1}^{n_{k-1}} X^{k-1}, \bigoplus_{\alpha=1}^{n} X\Big)(W^1, \dots, W^{k-1}, W)\Big\|_{s_0 m_0 n_0, (s_k + s_{k+1}) mn}.$$

Оскільки

$$\begin{bmatrix} \bigoplus\limits_{\alpha=1}^{n_k} X^k & \frac{\delta}{2}W^{k+1} & 0 \\ 0 & \bigoplus\limits_{\alpha=1}^{n_{k+1}} X^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & \bigoplus\limits_{\alpha=1}^{|m_{k+1}n_{k+1}-m_kn_k|} Y \end{bmatrix} \in B_{\mathrm{nc}}(Y^k \oplus Y^{k+1}, \delta)_{(s_k+s_{k+1})\max\{m_kn_k, m_{k+1}n_{k+1}\}}$$

після перестановки блочних рядків і стовпців, коли $X^k \in B_{\mathrm{nc}}(Y^k, \frac{\delta}{2})_{s_km_k}$, $X^{k+1} \in B_{\mathrm{nc}}(Y^{k+1}, \frac{\delta}{2})_{s_{k+1}m_{k+1}}$ і $W^{k+1} \in \mathcal{V}^{s_km_kn_k \times s_{k+1}m_{k+1}n_{k+1}}$ з
$\|W^{k+1}\|_{s_km_kn_k, s_{k+1}m_{k+1}n_{k+1}} = 1$, де

$$Y = \begin{cases} Y^k & \text{if } \ m_kn_k < m_{k+1}n_{k+1}, \\ Y^{k+1} & \text{if } \ m_kn_k > m_{k+1}n_{k+1}, \end{cases} \tag{7.54}$$

ми отримаємо, що

$$\Bigg\| f\left(\bigoplus_{\alpha=1}^{n_0} X^0, \ldots, \bigoplus_{\alpha=1}^{n_{k-1}} X^{k-1}, \begin{bmatrix} \bigoplus\limits_{\alpha=1}^{n_k} X^k & \frac{\delta}{2}W^{k+1} & 0 \\ 0 & \bigoplus\limits_{\alpha=1}^{n_{k+1}} X^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & \bigoplus\limits_{\alpha=1}^{|m_{k+1}n_{k+1}-m_kn_k|} Y \end{bmatrix} \right) \\ (W^1, \ldots, W^{k-1}, \mathrm{row}[W^k, 0, 0]) \Bigg\|_{s_0m_0n_0, (s_k+s_{k+1})\max\{m_kn_k, m_{k+1}n_{k+1}\}}$$

є обмеженим для всіх $m_0, \ldots, m_{k+1}, n_0, \ldots, n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $X^0 \in B_{\mathrm{nc}}(Y^0, \frac{\delta}{2})_{s_0m_0}, \ldots,$
$X^{k+1} \in B_{\mathrm{nc}}(Y^{k+1}, \frac{\delta}{2})_{s_{k+1}m_{k+1}}$ і $W^1 \in \mathcal{W}_1{}^{s_0m_0n_0 \times s_1m_1n_1}, \ldots,$
$W^{k+1} \in (\mathcal{W}_{k+1})^{s_km_kn_k \times s_{k+1}m_{k+1}n_{k+1}}$, з

$$\|W^1\|_{s_0m_0n_0, s_1m_1n_1} = \ldots = \|W^{k+1}\|_{s_km_kn_k, s_{k+1}m_{k+1}n_{k+1}} = 1.$$

Тут ми використали ізометричність блочної ін'єкції

$$W^k \in \mathcal{W}_k{}^{s_{k-1}m_{k-1}n_{k-1} \times s_km_kn_k} \longmapsto \mathrm{row}[W^k, 0, 0] \\ \in \mathcal{W}_k{}^{s_{k-1}m_{k-1}n_{k-1} \times (s_k+s_{k+1})\max\{m_kn_k, m_{k+1}n_{k+1}\}}.$$

Отже,

$$\Big\|\Delta_R f\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{n_0} X^0,\dots,\bigoplus_{\alpha=1}^{n_{k+1}} X^{k+1}\Big)(W^1,\dots,W^{k+1})\Big\|_{s_0m_0n_0,s_{k+1}m_{k+1}n_{k+1}}$$
$$=\frac{2}{\delta}\Big\|f\left(\bigoplus_{\alpha=1}^{n_0} X^0,\dots,\bigoplus_{\alpha=1}^{n_{k-1}} X^{k-1},\begin{bmatrix}\bigoplus_{\alpha=1}^{n_k} X^k & \frac{\delta}{2}W^{k+1} & 0\\ 0 & \bigoplus_{\alpha=1}^{n_{k+1}} X^{k+1} & 0\\ 0 & 0 & \bigoplus_{\alpha=1}^{|m_{k+1}n_{k+1}-m_kn_k|} Y\end{bmatrix}\right)$$
$$(W^1,\dots,W^{k-1},\mathrm{row}[W^k,0,0])\begin{bmatrix}0\\ I_{s_{k+1}m_{k+1}n_{k+1}}\\ 0\end{bmatrix}\Big\|_{s_0m_0n_0,s_{k+1}m_{k+1}n_{k+1}}$$

є обмеженим для всіх $m_0,\ \dots,\ m_{k+1},\ n_0,\ \dots,\ n_{k+1}\in\mathbb{N}$, $X^0\in B_{\mathrm{nc}}(Y^0,\frac{\delta}{2})_{s_0m_0}$, $\dots$, $X^{k+1}\in B_{\mathrm{nc}}(Y^{k+1},\frac{\delta}{2})_{s_{k+1}m_{k+1}}$, і $W^1\in\mathcal{W}_1{}^{s_0m_0n_0\times s_1m_1n_1}$, $\dots$, $W^{k+1}\in(\mathcal{W}_{k+1})^{s_km_kn_k\times s_{k+1}m_{k+1}n_{k+1}}$, з

$$\|W^1\|_{s_0m_0n_0,s_1m_1n_1}=\ldots=\|W^{k+1}\|_{s_km_kn_k,s_{k+1}m_{k+1}n_{k+1}}=1.$$

Тут ми використали те, що блочна проєкція є стиском, для блочної проєкції, що застосовує множення на

$$\begin{bmatrix}0\\ I_{s_{k+1}m_{k+1}n_{k+1}}\\ 0\end{bmatrix}$$

справа.

Вживаючи такий самий аргумент, як на початку доведення, для $\Delta_R f$ на місці f, ми отримаємо

$$\|(\Delta_R f(X^0,\dots,X^{k+1}))^{(n_0,\dots,n_{k+1})}(W^1,\dots,W^{k+1})\|_{s_0m_0n_0,s_{k+1}m_{k+1}n_{k+1}}$$
$$=\Big\|\Delta_R f\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{n_0} X^0,\dots,\bigoplus_{\alpha=1}^{n_{k+1}} X^{k+1}\Big)(W^1,\dots,W^{k+1})\Big\|_{s_0m_0n_0,s_{k+1}m_{k+1}n_{k+1}},$$

що за результатом попереднього абзацу тягне за собою рівномірну локальну цілком обмеженість $\Delta_R f$. □

Зауваження 7.52. Аналог теореми 7.51 також виконується, з аналогічним доведенням, для ${}_j\Delta_R f$, дивись зауваження 3.18.

Теорема 7.53. *Якщо $f\in\mathcal{T}^k(\Omega^{(0)},\dots,\Omega^{(k)};\mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$ - рівномірно локально цілком обмежена, то f є неперервною у рівномірно-відкритих топологіях і рівномірно ц.о.-аналітичною.*

Доведення. Нехай $s_0, \ldots, s_{k+1} \in \mathbb{N}$, $Y^0 \in \Omega^{(0)}_{s_0}$, $\ldots$, $Y^k \in \Omega^{(k)}_{s_k}$, $Y^{k+1} \in \Omega^{(k)}_{s_{k+1}}$. Оскільки f є рівномірно локально цілком обмеженою, відповідно до зауваження 7.52 такими є і ${}_j\Delta_R f$, $j = 0, \ldots, k$. Отже, існують $\delta > 0$ і $C > 0$ такі, що

$$\begin{aligned}
&\|({}_j\Delta_R f(X^0, \ldots, X^{k+1}))^{(n_0,\ldots,n_{k+1})}(W^1, \ldots, W^{k+1})\|_{s_0m_0n_0, s_{k+1}m_{k+1}n_{k+1}} \\
&\qquad = \Big\| {}_j\Delta_R f\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{n_0} X^0, \ldots, \bigoplus_{\alpha=1}^{n_{k+1}} X^{k+1}\Big)(W^1, \ldots, W^{k+1})\Big\|_{s_0m_0n_0, s_{k+1}m_{k+1}n_{k+1}} \le C
\end{aligned}$$

для $j = 0, \ldots, k$, і для всіх $m_0, \ldots, m_{k+1}, n_0, \ldots, n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $X^0 \in B_{\mathrm{nc}}(Y^0, \delta)_{s_0m_0}$, $\ldots$, $X^{k+1} \in B_{\mathrm{nc}}(Y^{k+1}, \delta)_{s_{k+1}m_{k+1}}$, і

$$W^1 \in \mathcal{W}_1{}^{s_0m_0n_0 \times s_1m_1n_1}, \ldots, W^{k+1} \in (\mathcal{W}_{k+1})^{s_km_kn_k \times s_{k+1}m_{k+1}n_{k+1}},$$

з

$$\|W^1\|_{s_0m_0n_0, s_1m_1n_1} = \ldots = \|W^{k+1}\|_{s_km_kn_k, s_{k+1}m_{k+1}n_{k+1}} = 1.$$

Ми маємо за (3.43) (порівняй з (7.47)), що

$$\begin{aligned}
&\Big\| f\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{n_0} X^0, \ldots, \bigoplus_{\alpha=1}^{n_k} X^k\Big)(W^1, \ldots, W^k) \\
&\qquad\qquad - f\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m_0n_0} Y^0, \ldots, \bigoplus_{\alpha=1}^{m_kn_k} Y^k\Big)(W^1, \ldots, W^k)\Big\|_{s_0m_0n_0, s_km_kn_k} \\
&= \Big\| \sum_{j=0}^{k} \Bigg(f\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{n_0} X^0, \ldots, \bigoplus_{\alpha=1}^{n_j} X^j, \bigoplus_{\alpha=1}^{m_{j+1}n_{j+1}} Y^{j+1}, \ldots, \bigoplus_{\alpha=1}^{m_kn_k} Y^k\Big)(W^1, \ldots, W^k) \\
&\quad - f\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{n_0} X^0, \ldots, \bigoplus_{\alpha=1}^{n_{j-1}} X^{j-1}, \bigoplus_{\alpha=1}^{m_jn_j} Y^j, \ldots, \bigoplus_{\alpha=1}^{m_kn_k} Y^k\Big)(W^1, \ldots, W^k)\Bigg)\Big\|_{s_0m_0n_0, s_km_kn_k} \\
&= \Big\| \sum_{j=0}^{k} {}_j\Delta_R f\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{n_0} X^0, \ldots, \bigoplus_{\alpha=1}^{n_j} X^j, \bigoplus_{\alpha=1}^{m_jn_j} Y^j, \ldots, \bigoplus_{\alpha=1}^{m_kn_k} Y^k\Big) \\
&\qquad\qquad \Big(W^1, \ldots, W^{j-1}, \bigoplus_{\alpha=1}^{n_j} X^j - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_jn_j} Y^j, W^j, \ldots, W^k\Big)\Big\|_{s_0m_0n_0, s_km_kn_k} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \le C \sum_{j=0}^{k} \Big\| X^j - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_j} Y^j \|_{s_jm_j}
\end{aligned}$$

для всіх $m_0, \ldots, m_k, n_0, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $X^0 \in B_{\mathrm{nc}}(Y^0, \delta)_{s_0m_0}$, $\ldots$, $X^k \in B_{\mathrm{nc}}(Y^k, \delta)_{s_km_k}$, і $W^1 \in \mathcal{W}_1{}^{s_0m_0n_0 \times s_1m_1n_1}$, $\ldots$, $W^k \in (\mathcal{W}_k)^{s_{k-1}m_{k-1}n_{k-1} \times s_km_kn_k}$, з

$$\|W^1\|_{s_0m_0n_0, s_1m_1n_1} = \ldots = \|W^k\|_{s_{k-1}m_{k-1}n_{k-1}, s_km_kn_k} = 1.$$

Якщо дане $\epsilon > 0$, ми покладаємо $\eta = \min\{\delta, \frac{\epsilon}{C(k+1)}\}$ і отримаємо, що

$$\Big\| f\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{n_0} X^0, \ldots, \bigoplus_{\alpha=1}^{n_k} X^k\Big)(W^1, \ldots, W^k) \\ - f\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m_0 n_0} Y^0, \ldots, \bigoplus_{\alpha=1}^{m_k n_k} Y^k\Big)(W^1, \ldots, W^k)\Big\|_{s_0 m_0 n_0, s_k m_k n_k} < \epsilon$$

для всіх $m_0, \ldots, m_k, n_0, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $X^0 \in B_{\mathrm{nc}}(Y^0, \eta)_{s_0 m_0}, \ldots, X^k \in B_{\mathrm{nc}}(Y^k, \eta)_{s_k m_k}$, і $W^1 \in \mathcal{W}_1{}^{s_0 m_0 n_0 \times s_1 m_1 n_1}, \ldots, W^k \in \mathcal{W}_k{}^{s_{k-1} m_{k-1} n_{k-1} \times s_k m_k n_k}$, з

$$\|W^1\|_{s_0 m_0 n_0, s_1 m_1 n_1} = \ldots = \|W^k\|_{s_{k-1} m_{k-1} n_{k-1}, s_k m_k n_k} = 1.$$

Таким чином, f - неперервна у рівномірно-відкритих топологіях.

За зауваженням 7.52, ${}_j\Delta_R f$ є рівномірно локально цілком обмеженим для $j = 0, \ldots, k$. Застосовуючи першу частину цієї теореми до ${}_j\Delta_R f$, ми отримаємо, що ${}_j\Delta_R f$ є неперервним у рівномірно-відкритих топологіях. Нехай $s_0, \ldots, s_{k+1} \in \mathbb{N}$, $Y^0 \in \Omega_{s_0}^{(0)}, \ldots, Y^k \in \Omega_{s_k}^{(k)}$. За (7.47) ми маємо

$$\begin{aligned} (7.55)\quad & f\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{n_0} Y^0 + t\bigoplus_{\alpha=1}^{n_0} Z^0, \ldots, \bigoplus_{\alpha=1}^{n_k} Y^k + t\bigoplus_{\alpha=1}^{n_k} Z^k\Big)(W^1, \ldots, W^k) \\ & \qquad - f\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{n_0} Y^0, \ldots, \bigoplus_{\alpha=1}^{n_k} Y^k\Big)(W^1, \ldots, W^k) \\ & = t\sum_{j=0}^{k} {}_j\Delta_R f\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{n_0} Y^0 + t\bigoplus_{\alpha=1}^{n_0} Z^0, \ldots, \bigoplus_{\alpha=1}^{n_j} Y^j + t\bigoplus_{\alpha=1}^{n_j} Z^j, \bigoplus_{\alpha=1}^{n_j} Y^j, \ldots, \bigoplus_{\alpha=1}^{n_k} Y^k\Big) \\ & \qquad \Big(W^1, \ldots, W^j, \bigoplus_{\alpha=1}^{n_j} Z^j, W^{j+1}, \ldots, W^k\Big) \end{aligned}$$

для будь-яких $n_0, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $Z^0 \in \mathcal{V}_0{}^{s_0 \times s_0} \ldots, Z^k \in \mathcal{V}_k{}^{s_k \times s_k}$, і $W^1 \in \mathcal{W}_1{}^{s_0 n_0 \times s_1 n_1}, \ldots, W^k \in \mathcal{W}_k{}^{s_{k-1} n_{k-1} \times s_k n_k}$, з

$$\|W^1\|_{s_0 n_0, s_1 n_1} = \ldots = \|W^k\|_{s_{k-1} n_{k-1}, s_k n_k} = 1,$$

і t достатньо малого. Розділяючи обидві частини (7.55) на t і дозволяючи $t \to 0$, ми отримаємо (порівняй (7.48))

$$\frac{d}{dt} f\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{n_0} Y^0 + t\bigoplus_{\alpha=1}^{n_0} Z^0, \ldots, \bigoplus_{\alpha=1}^{n_k} Y^k + t\bigoplus_{\alpha=1}^{n_k} Z^k\Big)(W^1, \ldots, W^k)\Big|_{t=0}$$
$$= \sum_{j=0}^{k} {}_j\Delta_R f\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{n_0} Y^0, \ldots, \bigoplus_{\alpha=1}^{n_{j-1}} Y^{j-1}, \bigoplus_{\alpha=1}^{n_j} Y^j, \bigoplus_{\alpha=1}^{n_j} Y^j, \bigoplus_{\alpha=1}^{n_{j+1}} Y^{j+1}, \ldots, \bigoplus_{\alpha=1}^{n_k} Y^k\Big)$$
$$\Big(W^1, \ldots, W^{j-1}, \bigoplus_{\alpha=1}^{n_j} Z^j, W^{j+1}, \ldots, W^k\Big)$$

де границя є рівномірною за $n_0, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, і за $W^1 \in \mathcal{W}_1{}^{s_0 n_0 \times s_1 n_1}, \ldots, W^k \in \mathcal{W}_k{}^{s_{k-1} n_{k-1} \times s_k n_k}$, з

$$\|W^1\|_{s_0 n_0, s_1 n_1} = \ldots = \|W^k\|_{s_{k-1} n_{k-1}, s_k n_k} = 1.$$

Отже, G-похідна

$$\delta f(Y^0, \ldots, Y^k)(Z^0, \ldots, Z^k) = \frac{d}{dt} f\left(Y^0 + tZ^0, \ldots, Y^k + tZ^k\right)\Big|_{t=0}$$

(дивись (7.49)) існує у нормі

$$\mathcal{L}^k_{\mathrm{cb}}(\mathcal{W}_1{}^{s_0 \times s_1} \times \cdots \times \mathcal{W}_k{}^{s_{k-1} \times s_k}, \mathcal{W}_0{}^{s_0 \times s_k}),$$

тобто f - G_{cb}-диференційована. Оскільки f є також рівномірно локально цілком обмеженою, ми робимо висновок, що f є рівномірно ц.о.-аналітичною. □

З теореми 7.53 випливає, що н.к. функція вищого порядку f є рівномірно локально цілком обмеженою тоді і тільки тоді, коли f є неперервною у рівномірно-відкритих топологіях, тоді і тільки тоді, коли f є рівномірно ц.о. аналітичною. Ми позначаємо як

$$\mathcal{T}^k_{\mathrm{uan}} = \mathcal{T}^k_{\mathrm{uan}}(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}; \mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$$

підклас у $\mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}; \mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$, що складається з н.к. функцій порядку k, що є рівномірно ц.о. аналітичними.

Наступне твердження є очевидним наслідком теорем 7.51 і 7.53.

Наслідок 7.54. *Нехай* $f \in \mathcal{T}^k_{\mathrm{uan}}(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}; \mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$. *Тоді*

$$\Delta_R f \in \mathcal{T}^{k+1}_{\mathrm{uan}}(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}, \Omega^{(k)}; \mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}}, \mathcal{V}_{k,\mathrm{nc}}).$$

Зауваження 7.55. Аналог наслідку 7.54 також виконується для ${}_j\Delta_R f$, дивись зауваження 3.18 і 7.52.

Зауваження 7.56. Результати цього підрозділу допускають аналоги у дійсному випадку – порівняй з зауваженнями 7.11 і 7.35. Теорема 7.39, зауваження 7.40, теорема 7.41, наслідок 7.42 і зауваження 7.43 є вірними для випадку, де $\mathcal{V}_0$, $\ldots$, $\mathcal{V}_k$, $\mathcal{W}_1$, $\ldots$, $\mathcal{W}_k$ -векторні простори над $\mathbb{R}$ і $\mathcal{W}_0$ - банахів простір над $\mathbb{R}$, забезпечений допустимою системою норм прямокутних матриць (всі поняття визначені точно як у комплексному випадку). Якщо $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}; \mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$ - G_W-диференційована, не є обов'язково вірним, що f - W-аналітична на зрізах, ні те, що f нескінченно багато разів диференційована на

$$(\mathcal{U}_0 \cap \Omega^{(0)}_{n_0}) \times \cdots \times (\mathcal{U}_k \cap \Omega^{(k)}_{n_k}) \times \mathcal{Y}_1 \times \cdots \times \mathcal{Y}_k \tag{7.56}$$

як функція кількох дійсних змінних для кожних $n_0, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ і для всіх скінченновимірних підпросторів $\mathcal{U}_0 \subseteq {\mathcal{V}_0}^{n_0 \times n_0}$, $\ldots$, $\mathcal{U}_k \subseteq {\mathcal{V}_k}^{n_k \times n_k}$, $\mathcal{Y}_1 \subseteq \mathcal{W}^{n_0 \times n_1}$, $\ldots$, $\mathcal{Y}_k \subseteq \mathcal{W}^{n_{k-1} \times n_k}$. Припустимо на додачу, що f - *W-локально обмежена на афінних скінченновимірних підпросторах*, тобто що $f|_{\Omega^{(0)}_{n_0} \times \cdots \times \Omega^{(k)}_{n_k}}$ - локально обмежена на афінних скінченновимірних підпросторах, подібно до зауваження 7.11, для кожних фіксованих W_1, $\ldots$, W_k. Тоді

$$\Delta_R f \in \mathcal{T}^{k+1}(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}, \Omega^{(k)}; \mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}}, \mathcal{V}_{k,\mathrm{nc}})$$

є також W-локально обмеженим на афінних скінченновимірних підпросторах і f є нескінченно багато разів диференційована на множинах (7.56) – доведення подібне до доведення теорем 7.39 і 7.41.

Теорема 7.44 і зауваження 7.45 є вірними для випадку, коли $\mathcal{V}_0$, $\ldots$, $\mathcal{V}_k$, $\mathcal{W}_0$, $\ldots$, $\mathcal{W}_k$ - банахові простори над $\mathbb{R}$, забезпечені допустимою системою норм прямокутних матриць. Аналогом теореми 7.41 є наступне твердження: якщо

$$f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}; \mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$$

- локально обмежена, то f є G-диференційованою, і більше того, f є нескінченно багато разів диференційованою на $(\mathcal{U}_0 \cap \Omega^{(0)}_{n_0}) \times \cdots \times (\mathcal{U}_k \cap \Omega^{(k)}_{n_k})$ як функція кількох дійсних змінних для кожних $n_0, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ і для всіх скінченновимірних підпросторів $\mathcal{U}_0 \subseteq {\mathcal{V}_0}^{n_0 \times n_0}$, $\ldots$, $\mathcal{U}_k \subseteq {\mathcal{V}_k}^{n_k \times n_k}$, де похідна береться у нормі $\mathcal{L}^k({\mathcal{W}_1}^{n_0 \times n_1} \times \cdots \times {\mathcal{W}_k}^{n_{k-1} \times n_k}, {\mathcal{W}_0}^{n_0 \times n_k})$.

Теорема 7.51, зауваження 7.52, теорема 7.53, наслідок 7.54 і зауваження 7.55 є вірними для випадку, коли $\mathcal{V}_0$, $\ldots$, $\mathcal{V}_k$, $\mathcal{W}_0$, $\ldots$, $\mathcal{W}_k$ - операторні простори над $\mathbb{R}$.

Розділ 8

Збіжність н.к. степеневих рядів

У цьому розділі ми будемо вивчати збіжність степеневих рядів вигляду

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\Big(X-\bigoplus_{\alpha=1}^{m}Y\Big)^{\odot_s\ell}f_\ell \tag{8.1}$$

до н.к. функції. Тут $\mathcal{V}$ і $\mathcal{W}$ - векторні простори над $\mathbb{C}$; $Y\in\mathcal{V}^{s\times s}$ - даний центр; $X\in\mathcal{V}^{sm\times sm}$, $m=1,2,\ldots$; $f_\ell\colon(\mathcal{V}^{s\times s})^\ell\to\mathcal{W}^{s\times s}$, $\ell=0,1,\ldots$, - дана послідовність ℓ-лінійних відображень, тобто лінійне відображення $f\colon\mathbf{T}(\mathcal{V}^{s\times s})\to\mathcal{W}^{s\times s}$; і умови (4.4)–(4.7) задовольняються. Зауважимо, що для $s=1$ ці умови тривіально задовольняються для будь-якої послідовності f_ℓ лінійних відображень. Нас будуть цікавити умови зростання коефіцієнтів f_ℓ, за якими сума у (8.1) є аналітичною або рівномірно аналітичною н.к. функцією. Результати цього підрозділу є зворотні до результатів підрозділів 7.1 і 7.3, як і результати підрозділу 5.2 були зворотними до результатів підрозділу 5.1, де ми обчислюємо степеневі ряди на нільпотентних матрицях, де питання про збіжність не виникають.

8.1. Скінченно-відкрита топологія

Нехай $\mathcal{V}$ - векторний простір над $\mathbb{C}$, нехай $\mathcal{W}$ - банахів простір над $\mathbb{C}$, забезпечений допустимою системою матричних норм (дивись підрозділ 7.1), і нехай $f\colon\mathbf{T}(\mathcal{V}^{s\times s})\to\mathcal{W}^{s\times s}$ - лінійне відображення. Зауважимо, що для $Z\in\mathcal{V}^{sm\times sm}$,

$$Z^{\odot_s\ell}f_\ell=f_\ell^{(m,\ldots,m)}(Z,\ldots,Z)$$

(дивись (7.50)) - однорідний многочлен степеня ℓ на $\mathcal{V}^{sm\times sm}$ із значеннями у $\mathcal{W}^{sm\times sm}$ і ряд (8.1) - степеневий ряд на $\mathcal{V}^{sm\times sm}$ з центром у $\bigoplus_{\alpha=1}^{m}Y$ і значеннями у $\mathcal{W}^{sm\times sm}$, як у [**88**, розділ 26] і [**110**, розділ 1].

Якщо ряд (8.1) збігається на скінченно-відкритій н.к. множині, що містить Y, то за теоремою 7.9 і зауваженням 4.3, умови (4.4)–(4.7) є необхідними для того, щоб сума ряду (8.1) була н.к. функцією. Ми покажемо у теоремі 8.2 нижче, що ці умови є також достатніми, використовуючи наступну лему.

Лема 8.1. *Нехай $\mathcal{M}$ - модуль над кільцем $\mathcal{R}$, $A\in\mathcal{M}^{m\times m}$, $B\in\mathcal{M}^{m\times\widetilde{m}}$, $\widetilde{A}\in\mathcal{M}^{\widetilde{m}\times\widetilde{m}}$. Тоді для будь-якого $\ell\in\mathbb{N}$,*

$$\begin{bmatrix}A & B\\ 0 & \widetilde{A}\end{bmatrix}^{\odot\ell}=\begin{bmatrix}A^{\odot\ell} & \sum_{k=0}^{\ell-1}A^{\odot k}\odot B\odot C^{\odot(\ell-1-k)}\\ 0 & C^{\odot\ell}\end{bmatrix}. \tag{8.2}$$

Доведення. Тривіальна індукція. □

Для всіх $m = 1, 2, \dots$ і всіх $Z \in \mathcal{V}^{sm\times sm}$ ми вводимо кількості

$$\mu(Z) = \limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\|Z^{\odot_s \ell} f_\ell\|_{sm}}, \qquad \rho(Z) = \mu(Z)^{-1}, \tag{8.3}$$

і

$$\rho_{\mathrm{fin}}(Z) = \liminf_{W \overset{\mathrm{fin}}{\to} Z} \rho(W), \tag{8.4}$$

де $W \overset{\mathrm{fin}}{\to} Z$ означає, що нижня границя береться у скінченно-відкритій топології на $\mathcal{V}^{sm\times sm}$. Ясно, що функція $\rho(\cdot)$ - додатно-однорідна степеня -1, тобто задовольняє $\rho(\lambda Z) = \frac{1}{|\lambda|}\rho(Z)$ для кожного ненульового $\lambda \in \mathbb{C}$. Оскільки множення на λ є неперервним у скінченно-відкритій топології, $\rho_{\mathrm{fin}}(\cdot)$ також є додатно-однорідною степеня -1.

Теорема 8.2. *1. Множина збіжності, $\Upsilon_{\mathrm{nc}} \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$, для ряду* (8.1) *- це н.к. множина, яка є повною круговою навколо Y, так що сума ряду* (8.1), *$f\colon \Upsilon_{\mathrm{nc}} \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ є добре визначеним відображенням. Ми маємо*

$$\coprod_{m=1}^{\infty} \Big\{ X \in \mathcal{V}^{sm\times sm} \colon \rho\Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big) > 1 \Big\} \subseteq \Upsilon_{\mathrm{nc}} \subseteq \coprod_{m=1}^{\infty} \Big\{ X \in \mathcal{V}^{sm\times sm} \colon \rho\Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big) \geq 1 \Big\}. \tag{8.5}$$

Множина

$$\Upsilon_{\mathrm{nc,fin}} = \coprod_{m=1}^{\infty} \Big\{ X \in \mathcal{V}^{sm\times sm} \colon \rho_{\mathrm{fin}}\Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big) > 1 \Big\} \tag{8.6}$$

є внутрішність Υ_{nc} у скінченно-відкритій топології на $\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$.

2. Для кожного m, множина $(\Upsilon_{\mathrm{nc,fin}})_{sm}$ - непорожня тоді і тільки тоді, коли вона містить $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y$. У цьому випадку

- *$\rho_{\mathrm{fin}}(0_{sm\times sm}) = \infty$ і $\rho_{\mathrm{fin}}(Z) > 0$ для кожного $Z \in \mathcal{V}^{sm\times sm}$,*
- *$(\Upsilon_{\mathrm{nc,fin}})_{sm}$ - повна кругова множина навколо $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y$,*
- *ряд* (8.1) *збігається абсолютно на $(\Upsilon_{\mathrm{nc,fin}})_{sm}$, і функція $f|_{(\Upsilon_{\mathrm{nc,fin}})_{sm}}$ є G-диференційованою.*

3. Для кожних $m \in \mathbb{N}$ і $X \in (\Upsilon_{\mathrm{nc,fin}})_{sm}$ існує скінченно-відкрита повна кругова множина $\Upsilon_{\mathrm{fin},X}$ навколо $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y$, яка містить X і така, що

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sup_{W\in\Upsilon_{\mathrm{fin},X}} \Big\| \Big(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s \ell} f_\ell \Big\|_{sm} < \infty. \tag{8.7}$$

4. Для будь-якої скінченно-відкритої н.к. множини $\Gamma \subseteq \Upsilon_{\mathrm{nc,fin}}$, $f|_\Gamma$ *- G-диференційована н.к. функція. Нехай*

$$\Upsilon_{\mathrm{nc,fin-G}} := \{X \in \Upsilon_{\mathrm{nc,fin}} : \exists \Gamma, \text{ скінченно-відкрита н.к. множина така, що } X \in \Gamma \subseteq \Upsilon_{\mathrm{nc,fin}}\}. \tag{8.8}$$

Тоді н.к. множина $\Upsilon_{\mathrm{nc,fin-G}}$ *непорожня тоді і тільки тоді, коли існує скінченно-відкрита н.к. множина* $U \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ *така, що* $\inf_{Z\in U} \rho(Z) > 0$. *Ми маємо* $Y \in \Upsilon_{\mathrm{nc,fin-G}}$ *тоді і тільки тоді, коли існує скінченно-відкритий н.к. окіл* U *точки* Y *такий, що* $\inf_{X\in U} \rho(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_X} Y) > 0$*; тут* m_X *- розмір блочної матриці* X *з* $s\times s$ *блоками.*

Зауваження 8.3. Якщо $Y \in \Upsilon_{\mathrm{nc,fin-G}}$, то обмеження f на скінченно-відкритий н.к. окіл точки Y- це G-диференційована н.к. функція, і відповідно до теореми 7.9 ми маємо

$$f_\ell = \Delta_R^\ell f(\underbrace{Y, \dots, Y}_{\ell+1 \text{ разів}}), \quad \ell = 0, 1, \dots.$$

Зокрема, коефіцієнти f_ℓ (тобто оригінальне лінійне відображення f) однозначно визначені відповідною н.к. функцією, чому ми й використовували одне і теж позначення для н.к. функції і для лінійного відображення.

Доведення теореми 8.2. 1. Твердження про Υ_{nc} є безпосереднім. Включення у (8.5) випливають з класичної теореми Коші–Адамара, оскільки для фіксованого Z, $\rho(Z)$ - радіус збіжності ряду

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} Z^{\odot_s \ell} f_\ell \lambda^\ell \tag{8.9}$$

як ряду від $\lambda \in \mathbb{C}$. Далі ми спостерігаємо, що, за конструкцією, $\rho_{\mathrm{fin}}(Z)$ - це півнеперервна знизу функція від Z у скінченно-відкритій топології на $\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$. Це тягне за собою, що $\Upsilon_{\mathrm{nc,fin}}$ - скінченно-відкрита множина. Звісно, $\rho_{\mathrm{fin}}(Z) \le \rho(Z)$, отже, за класичною теоремою Коші–Адамара, ряд (8.1) збігається абсолютно на $\Upsilon_{\mathrm{nc,fin}}$. З другого боку, якщо $Z \notin \Upsilon_{\mathrm{nc,fin}}$, тобто якщо $\rho_{\mathrm{fin}}(Z) \le 1$, то за додатною однорідністю степеня -1 функції $\rho_{\mathrm{fin}}(\cdot)$ ми маємо, що $\rho_{\mathrm{fin}}((1+\epsilon)Z) \le \frac{1}{1+\epsilon}$ для довільного $\epsilon > 0$. Отже, у кожному скінченно-відкритому околі $(1+\epsilon)Z$ є точка W така, що $\rho(W) < 1$. Це означає, що $(1+\epsilon)Z$ не належить внутрішності у скінченно-відкритій топології на $\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ множини збіжності ряду (8.1), і тоді таке саме є вірним і для Z. Таким чином, ми отримаємо, що $\Upsilon_{\mathrm{nc,fin}}$ - внутрішність Υ_{nc} у скінченно-відкритій топології на $\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$.

2. Нехай $m \in \mathbb{N}$ - фіксоване. Якщо $\bigoplus_{\alpha=1}^m Y \in (\Upsilon_{\mathrm{nc,fin}})_{sm}$, то ясно, що $(\Upsilon_{\mathrm{nc,fin}})_{sm} \neq \emptyset$. Навпаки, якщо $(\Upsilon_{\mathrm{nc,fin}})_{sm}$, що є внутрішністю $(\Upsilon_{\mathrm{nc}})_{sm}$ у скінченно-відкритій топології на $\mathcal{V}^{sm\times sm}$, непорожнє, то за [**88**, теорема 26.5.9] (дивись також [**88**, теорема 26.5.2]) $\bigoplus_{\alpha=1}^m Y$ - внутрішня точка у $(\Upsilon_{\mathrm{nc}})_{sm}$ у цій топології, тобто $\rho_{\mathrm{fin}}(0_{sm\times sm}) > 1$. Більше того, за додатною однорідністю степеня -1 і півнеперервністю знизу $\rho_{\mathrm{fin}}(\cdot)$

ми маємо, що $\rho_{\mathrm{fin}}(Z) > 0$ для кожного $Z \in \mathcal{V}^{sm\times sm}$ і що $\rho_{\mathrm{fin}}(0_{sm\times sm}) = \infty$. Відтепер, припустимо що $(\Upsilon_{\mathrm{nc,fin}})_{sm} \neq \emptyset$. За додатною однорідністю $\rho_{\mathrm{fin}}(\cdot)$ множина $(\Upsilon_{\mathrm{nc,fin}})_{sm}$ - повна кругова множина навколо $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y$, для кожного $m \in \mathbb{N}$ (дивись також [**88**, теорема 26.5.9]). За [**88**, теорема 26.5.6] (дивись також [**88**, теорема 26.5.3 і теорема 26.5.4]) сума ряду (8.1) є G-диференційованою на $(\Upsilon_{\mathrm{nc,fin}})_{sm}$. Абсолютна збіжність ряду (8.1) на $(\Upsilon_{\mathrm{nc,fin}})_{sm}$ була доведена у попередньому абзаці. Ми також можемо довести це, використовуючи теорему Хартогса про збіжність у однорідних многочленах [**140**, теорема I.3.3].

3. Це твердження для будь-яких фіксованих m і X випливає з [**88**, теорема 26.3.8] (порівняй з теоремою 7.2(4)).

4. Ясно, що $f((\Upsilon_{\mathrm{nc}})_{sm}) \subseteq \mathcal{W}^{sm\times sm}$. Нехай $X \in (\Upsilon_{\mathrm{nc}})_{sm}$, $\widetilde{X} \in (\Upsilon_{\mathrm{nc}})_{s\widetilde{m}}$, і $S \in \mathbb{C}^{s\widetilde{m}\times sm}$ таке, що $SX = \widetilde{X}S$. Взявши границю, коли $N \to \infty$, у (5.12) (дивись лему 5.12) і використовуючи лему 8.1, ми бачимо, що $Sf(X) = f(\widetilde{X})S$ тоді і тільки тоді, коли загальний член ряду (8.1), обчислений у $\begin{bmatrix} \widetilde{X} & S\bigoplus_{\nu=1}^{m} Y - \bigoplus_{\widetilde{\nu}=1}^{\widetilde{m}} YS \\ 0 & X \end{bmatrix}$, збігається до 0. Для $X, \widetilde{X} \in \Gamma$, де $\Gamma \subseteq \Upsilon_{\mathrm{nc,fin}}$ - скінченно-відкрита н.к. множина, ми маємо, що $\begin{bmatrix} \widetilde{X} & \epsilon(S\bigoplus_{\nu=1}^{m} Y - \bigoplus_{\widetilde{\nu}=1}^{\widetilde{m}} YS) \\ 0 & X \end{bmatrix} \in \Gamma$ для $\epsilon > 0$ достатньо малого, так що ряд (8.1) збігається у цій точці, і тоді його загальний член збігається до 0; отже, $Sf(X) = f(\widetilde{X})S$. Ми робимо висновок, що $f|_{\Gamma}$ - н.к. функція. Вона є G-диференційованою н.к. функцією за частиною 2 цієї теореми.

Далі, якщо $\Upsilon_{\mathrm{nc,fin-G}} \neq \emptyset$, то існує непорожня скінченно-відкрита н.к. множина $\Gamma \subseteq \Upsilon_{\mathrm{nc,fin}}$, тобто $\rho_{\mathrm{fin}}(W) > 1$ для кожного $W \in \Gamma$. Ми маємо

$$\inf_{W\in\Gamma} \rho(W) \geq \inf_{W\in\Gamma} \rho_{\mathrm{fin}}(W) \geq 1 > 0.$$

Навпаки, якщо $U \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ - непорожня скінченно-відкрита н.к. множина така, що $\rho_0 := \inf_{W\in U} \rho(W) > 0$, то для будь-якого додатного $\epsilon < \rho_0$ множина $(\rho_0-\epsilon)U \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ є також непорожньою скінченно-відкритою н.к. множиною, і $\inf_{W\in(\rho_0-\epsilon)U} \rho(W) = \frac{\rho_0}{\rho_0-\epsilon}$. Отже, для будь-якого $Z \in (\rho_0 - \epsilon)U$ ми маємо

$$\rho_{\mathrm{fin}}(Z) = \liminf_{\substack{\mathrm{fin} \\ W\to Z}} \rho(W) \geq \frac{\rho_0}{\rho_0 - \epsilon} > 1,$$

і таким чином скінченно-відкрита н.к. множина $(\rho_0 - \epsilon)U$ міститься у $\Upsilon_{\mathrm{nc,fin}}$. Ми робимо висновок, що $\Upsilon_{\mathrm{nc,fin-G}} \neq \emptyset$.

Якщо $Y \in \Upsilon_{\mathrm{nc,fin-G}}$, то існує скінченно-відкритий н.к. окіл Γ точки Y такий, що $\Gamma \subseteq \Upsilon_{\mathrm{nc,fin}}$. Тоді, як ми показали в попередньому абзаці, $\inf_{X\in\Gamma} \rho(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_X} Y) > 0$. Навпаки, якщо існує скінченно-відкритий н.к. окіл U точки Y такий, що $\rho_0 := \inf_{X\in U} \rho(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_X} Y) > 0$, то міркуючи як у попередньому абзаці, ми отримаємо, що для $\epsilon > 0$ достатньо малого, множина Γ, що складається з $X \in \Upsilon_{\mathrm{nc}}$, для яких існує $\widetilde{X} \in U$, що задовольняє $X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_X} Y = (\rho_0-\epsilon)(\widetilde{X} - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_X} Y)$, є підмножиною

у $\Upsilon_{\mathrm{nc,fin}}$. Оскільки Γ - скінченно-відкритий н.к. окіл точки Y, ми робимо висновок, що $Y \in \Upsilon_{\mathrm{nc,fin-G}}$. $\square$

Зауваження 8.4. У випадку $s = 1$, f - н.к. функція на Υ_{nc}. Це ясно з вигляду ряду (8.1). Це також випливає з доведення частини 4 теореми 8.2, оскільки у цьому випадку $S \bigoplus_{\nu=1}^{m} Y - \bigoplus_{\tilde{\nu}=1}^{\tilde{m}} YS = 0$.

Наступний приклад демонструє можливість, що $Y = 0_{1\times 1} \in \Upsilon_{\mathrm{nc,fin-G}} \subsetneq \Upsilon_{\mathrm{nc,fin}}$.

Приклад 8.5. Розглянемо ряд

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} Z_1^{\ell}(Z_1Z_2 - Z_2Z_1).$$

Тут $\mathcal{V} = \mathbb{C}^2$, $\mathcal{W} = \mathbb{C}$, з евклідовими топологіями на $\mathcal{V}^{n\times n} = (\mathbb{C}^2)^{n\times n} \cong (\mathbb{C}^{n\times n})^2$ і $\mathcal{W}^{n\times n} = \mathbb{C}^{n\times n}$. Якщо $Z = (Z_1, Z_2) \in (\mathbb{C}^{n\times n})^2$ задовольняє $Z_1Z_2 = Z_2Z_1$ (зокрема, це завжди так, коли $n = 1$), то $\rho(Z) = \infty$. Якщо $z = (z_1, z_2) \in \mathcal{V}^{1\times 1} = \mathbb{C}^2$, то ми маємо $\rho_{\mathrm{fin}}(z) = \rho(z) = \infty$ і, отже, $(\Upsilon_{\mathrm{nc,fin}})_1 = \mathbb{C}^2$. Якщо $Z = z \oplus z \in \mathcal{V}^{2\times 2}$ і $z_1 \neq 0$, то, звісно, ми маємо $\rho(Z) = \infty$, проте $\rho_{\mathrm{fin}}(Z) = \frac{1}{|z_1|}$. Щоб показати останнє, ми спочатку обчислюємо, для будь-якого фіксованого $\epsilon > 0$,

$$\mu\left(\begin{bmatrix} z_1 & \epsilon \\ 0 & z_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_2 & 0 \\ \epsilon & z_2 \end{bmatrix}\right) = \limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell+2]{\left\| \begin{bmatrix} z_1 & \epsilon \\ 0 & z_1 \end{bmatrix}^{\ell} \begin{bmatrix} \epsilon^2 & 0 \\ 0 & -\epsilon^2 \end{bmatrix} \right\|}$$
$$= \limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell+2]{\left\| \begin{bmatrix} \epsilon^2 z_1^{\ell} & -\ell\epsilon^3 z_1^{\ell-1} \\ 0 & -\epsilon^2 z_1^{\ell} \end{bmatrix} \right\|} = \limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell+2]{\epsilon^2 |z_1|^{\ell-1} \left\| \begin{bmatrix} z_1 & -\ell\epsilon \\ 0 & -z_1 \end{bmatrix} \right\|} = |z_1|.$$

Отже,

$$\rho_{\mathrm{fin}}(Z) \leq \lim_{\epsilon\to 0} \rho\left(\begin{bmatrix} z_1 & \epsilon \\ 0 & z_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_2 & 0 \\ \epsilon & z_2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{|z_1|}.$$

З іншого боку, для будь-яких $M, N \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ ми маємо

$$\mu(z_1I_2 + M, z_2I_2 + N) = \limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell+2]{\|(z_1I_2 + M)^{\ell}(MN - NM)\|}$$
$$\leq \|z_1I_2 + M\| \lim_{\ell\to 0} \sqrt[\ell+2]{\|MN - NM\|} \leq \|z_1I_2 + M\|,$$

і для M достатньо малого ми маємо $\rho(z_1I_2 + M, z_2I_2 + N) \geq \frac{1}{\|z_1I_2+M\|}$. Отже,

$$\rho_{\mathrm{fin}}(Z) \geq \frac{1}{|z_1|}.$$

Ми робимо висновок, що $\rho_{\mathrm{fin}}(Z) = \frac{1}{|z_1|}$. Якщо $|z_1| > 1$, ми маємо, що $z = (z_1, z_2) \in \Upsilon_{\mathrm{nc,fin}}$, проте $Z = z \oplus z \notin \Upsilon_{\mathrm{nc,fin}}$. Таким чином, множина $\Upsilon_{\mathrm{nc,fin}}$ не є н.к. множиною.

З іншого боку, підмножина $\Gamma \subsetneq \Upsilon_{\mathrm{nc,fin}}$, що складається з пар матриць $Z = (Z_1, Z_2)$, що задовольняють $\|Z_1\| < 1$ (з операторною нормою $\|\cdot\|$) є рівномірно-відкритою (і, отже, скінченно-відкритою) н.к. множиною, ряд $\sum_{\ell=0}^{\infty} Z_1^{\ell}(Z_1Z_2 - Z_2Z_1)$ збігається абсолютно на Γ, і його сума $f\colon \Gamma \to \mathbb{C}_{\mathrm{nc}}$ є G-диференційованою н.к. функцією.

Наступний приклад показує, що є також можливим, що $(\Upsilon_{\mathrm{nc,fin}})_{1\cdot m} \neq \emptyset$, тобто $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y = 0_{1\cdot m\times 1\cdot m} \in \Upsilon_{\mathrm{nc,fin}}$ для всіх $m \in \mathbb{N}$, проте $Y = 0_{1\times 1} \notin \Upsilon_{\mathrm{nc,fin-G}}$ (фактично, ми маємо $0_{1\cdot m\times 1\cdot m} \notin \Upsilon_{\mathrm{nc,fin-G}}$ для всіх $m \in \mathbb{N}$).

Приклад 8.6. Нехай p_n - однорідний многочлен від двох н.к. змінних степеня $\alpha_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$, з прикладу 6.3. Ми нагадуємо, що p_n зникає на парах $n \times n$ матриць. Розглянемо ряд

$$\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{j-1}(kZ_1)^{\alpha_j-\alpha_k-j+k}p_k(Z_1, Z_2).$$

Ми зауважимо, що тотальні степені однорідних многочленів у цьому ряді строго зростають. Справді, для будь-якого фіксованого j ми маємо, що

$$\deg\left((kx_1)^{\alpha_j-\alpha_k-j+k}p_k\right) = \alpha_j - j + k$$

зростає, коли k змінюється від 1 до $j-1$. З другого боку, для будь-якого фіксованого j ми маємо

$$\alpha_j - j + (j-1) = \alpha_j - 1 < \alpha_{j+1} - j = \alpha_{j+1} - (j+1) + 1,$$

тобто степінь зростає, коли ми переходимо від останнього члена у j-й сумі до першого члена у $(j+1)$-й сумі. Подібно до прикладу 8.5, ми маємо $\mathcal{V} = \mathbb{C}^2$, $\mathcal{W} = \mathbb{C}$, з евклідовими топологіями на $\mathcal{V}^{n\times n} = (\mathbb{C}^2)^{n\times n} \cong (\mathbb{C}^{n\times n})^2$ і $\mathcal{W}^{n\times n} = \mathbb{C}^{n\times n}$, і $(\Upsilon_{\mathrm{nc,fin}})_1 = \mathbb{C}^2$. Нехай $z = (z_1, z_2) \in \mathcal{V}^{1\times 1} = \mathbb{C}^2$ таке, що $z_1 \neq 0$. Позначимо $Z(k) := \bigoplus_{j=1}^{k} z \in \mathcal{V}^{k\times k}$. Міркуючи як у прикладі 8.5 і використовуючи підпослідовність однорідних многочленів $(kx_1)^{\alpha_j-\alpha_k-j+k}p_k$, $j = 2, 3, \ldots$, ми можемо легко показати, що $\rho_{\mathrm{fin}}(Z(k)) = \frac{1}{k|z_1|}$. Отже, не існує скінченно-відкритого н.к. околу точки $0_{m\times m}$, для будь-якого m, де ряд збігається (інакше $|z_1| < \frac{1}{k}$ для всіх k, що неможливо).

8.2. Топологія норми

Нехай $\mathcal{V}$ і $\mathcal{W}$ - банахові простори над $\mathbb{C}$, забезпечені допустимою системою матричних норм, і нехай $f_\ell\colon (\mathcal{V}^{s\times s})^{\ell} \to \mathcal{W}^{s\times s}$, $\ell = 0, 1, \ldots$, - послідовність обмежених ℓ-лінійних відображень. Тоді для всіх $m_0, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$, $f_\ell^{(m_0,\ldots,m_k)}$ є також послідовність обмежених ℓ-лінійних відображень. Отже, для $Z \in \mathcal{V}^{sm\times sm}$,

$$Z^{\odot_s \ell} f_\ell = f_\ell^{(m,\ldots,m)}(Z, \ldots, Z)$$

- обмежений однорідний многочлен степеня ℓ на $\mathcal{V}^{sm\times sm}$ із значеннями у $\mathcal{W}^{sm\times sm}$, і ряд (8.1) - F-степеневий ряд (тобто степеневий ряд обмежених однорідних многочленів) на $\mathcal{V}^{sm\times sm}$ з центром у $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y$ і значеннями у $\mathcal{W}^{sm\times sm}$, як у [**88**, розділ 26] і [**110**, розділ 1].

Введемо кількості

$$\rho_{\mathrm{norm}}(Z) = \liminf_{W\to Z} \rho(W) \tag{8.10}$$

(порівняй з (8.4)),

$$\mu_m = \limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\sup_{\|Z\|_{sm}=1} \|Z^{\odot_s \ell} f_\ell\|_{sm}}, \qquad \rho_m = \mu_m^{-1}. \tag{8.11}$$

Аналогічно до $\rho_{\mathrm{fin}}(\cdot)$, функція $\rho_{\mathrm{norm}}(\cdot)$ є додатно-однорідною степеня -1. Ми зауважимо, що вираз під ℓ-м коренем є норма однорідного многочлена $Z^{\odot_s \ell} f_\ell$, дивись [**88**, означення 26.2.4] і [**110**, означення 2.1].

Пропозиція 8.7. *Наступні нерівності мають місце:*

$$\frac{1}{e} \limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\|f_\ell\|} \le \mu_1 \le K_1 \mu_m \le m K_1 K_2 \limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\|f_\ell\|}, \tag{8.12}$$

де

$$K_1 = \min_{1\le i\le m} \|\iota_{ii}^s\|, \quad K_2 = \max_{1\le i,j\le m} \|\pi_{ij}^s\|;$$

блочні ін'єкції, ι_{ij}^s, і блочні проєкції, π_{ij}^s, визначені у (7.5) *і* (7.6).

Зауважимо, що ми також маємо оцінки для K_1 і K_2 з доведення пропозиції 7.1 через константи у (7.1) і (7.2), які визначають допустиму систему норм на $\mathcal{V}^{n\times n}$ і $\mathcal{W}^{n\times n}$, $n = 1, 2, \ldots$:

$$K_1 \le C_2(sm) C_1'(s, sm-s), \quad K_2 \le C_1(s, sm-s) C_2(sm),$$

і що у випадку, коли $\mathcal{V}$ і $\mathcal{W}$ - операторні простори, ми маємо $K_1 = K_2 = 1$.

Доведення пропозиції 8.7. Крайня ліва нерівність у (8.12) випливає з оцінки

$$\|f_\ell\| = \sup_{\|Z_1\|_s=\cdots=\|Z_\ell\|_s=1} \|(Z_1 \otimes \cdots \otimes Z_\ell) f_\ell\|_s \le \frac{\ell^\ell}{\ell!} \sup_{\|Z\|_s=1} \|Z^{\otimes \ell} f_\ell\|_s$$

(дивись [**110**, теорема 2.2]), якщо взяти ℓ-й корень від обох частин, після цього $\limsup_{\ell\to\infty}$, і тоді застосувати формулу Стірлінга. Друга нерівність у (8.12) випливає з оцінки

$$\sup_{\|Z\|_s=1} \|Z^{\otimes \ell} f_\ell\|_s = \sup_{\|Z\|_s=1} \|\pi_{ii}^s \left((\iota_{ii}^s Z)^{\odot_s \ell} f_\ell\right)\|_s \le \|\pi_{ii}^s\| \|\iota_{ii}^s\|^\ell \sup_{\|W\|_{sm}=1} \|W^{\odot_s \ell} f_\ell\|_{sm},$$

якщо взяти ℓ-й корень від обох частин, потім $\limsup_{\ell\to\infty}$, і тоді $\min_{1\le i\le m}$. Остання нерівність у (8.12) випливає з оцінки

$$\sup_{\|Z\|_{sm}=1}\|Z^{\odot_s\ell}f_\ell\|_{sm}=\sup_{\|Z\|_{sm}=1}\Big\|\sum_{1\le i,j\le m}\iota_{ij}^s(Z^{\odot_s\ell}f_\ell)_{ij}\Big\|_{sm}$$
$$\le\sum_{1\le i,j\le m}\|\iota_{ij}^s\|\sup_{\|Z\|_{sm}=1}\|(Z^{\odot_s\ell}f_\ell)_{ij}\|_s$$
$$=\sum_{1\le i,k_1,\dots,k_{\ell-1},j\le m}\|\iota_{ij}^s\|\sup_{\|Z\|_{sm}=1}\|(\pi_{ik_1}^sZ\otimes\pi_{k_1k_2}^sZ\otimes\cdots\otimes\pi_{k_{\ell-2}k_{\ell-1}}^sZ\otimes\pi_{k_{\ell-1}j}^sZ)f_\ell\|_s$$
$$\le\sum_{1\le i,k_1,\dots,k_{\ell-1},j\le m}\|\iota_{ij}^s\|\|\pi_{ik_1}^s\|\|\pi_{k_1k_2}^s\|\cdots\|\pi_{k_{\ell-2}k_{\ell-1}}^s\|\|\pi_{k_{\ell-1}j}^s\|\|f_\ell\|_s$$
$$\le m^{\ell+1}K_2^\ell\sup_{1\le i,j\le m}\|\iota_{ij}^s\|\,\|f_\ell\|,$$

якщо взяти ℓ-й корень, потім $\limsup_{\ell\to\infty}$, і тоді домножити на K_1. □

Ми нагадаємо, що $\Upsilon_{\rm nc}\subseteq\mathcal{V}_{\rm nc}$ позначає множину збіжності для ряду (8.1), і f позначає суму ряду.

Теорема 8.8. *1. Множина*

$$\Upsilon_{\rm nc,norm}=\coprod_{m=1}^{\infty}\Big\{X\in\mathcal{V}^{sm\times sm}\colon\rho_{\rm norm}\Big(X-\bigoplus_{\alpha=1}^{m}Y\Big)>1\Big\}\tag{8.13}$$

міститься у $\Upsilon_{\rm nc,fin}$ і є внутрішністю $\Upsilon_{\rm nc}$ в топології норми на $\mathcal{V}_{\rm nc}$, тобто в топології на $\mathcal{V}_{\rm nc}$, визначеній у абзаці після зауваження 7.3.

2. Для кожного m, множина $(\Upsilon_{\rm nc,norm})_{sm}$ - непорожня тоді і тільки тоді, коли вона містить $\bigoplus_{\alpha=1}^m Y$. У цьому випадку,

- *$\rho_{\rm norm}(0_{sm\times sm})=\infty$ і $\rho_{\rm norm}(Z)>0$ для кожного $Z\in\mathcal{V}^{sm\times sm}$,*
- *$(\Upsilon_{\rm nc,norm})_{sm}$ є повною круговою множиною навколо $\bigoplus_{\alpha=1}^m Y$, і*
- *$f|_{(\Upsilon_{\rm nc,norm})_{sm}}$ - аналітична.*

3. Для кожних $m\in\mathbb{N}$ і $X\in(\Upsilon_{\rm nc,norm})_{sm}$ існує відкрита повна кругова множина $\Upsilon_{{\rm norm},X}$ навколо $\bigoplus_{\alpha=1}^m Y$, яка містить X і така, що

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sup_{W\in\Upsilon_{{\rm norm},X}}\Big\|\Big(W-\bigoplus_{\alpha=1}^{m}Y\Big)^{\odot_s\ell}f_\ell\Big\|_{sm}<\infty.\tag{8.14}$$

4. Для будь-якої відкритої н.к. множини $\Gamma\subseteq\Upsilon_{\rm nc,norm}$, $f|_\Gamma$ - аналітична н.к. функція. Нехай

$$\Upsilon_{\rm nc,norm-an}:=\{X\in\Upsilon_{\rm nc,norm}\colon\ \exists\Gamma,\ \text{відкрита н.к. множина така, що } X\in\Gamma\subseteq\Upsilon_{\rm nc,norm}\}.\tag{8.15}$$

Тоді множина $\Upsilon_{\mathrm{nc,norm-an}}$ *непорожня тоді і тільки тоді, коли існує непорожня відкрита н.к. множина* $U \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ *така, що* $\inf_{Z\in U} \rho(Z) > 0$. *Ми маємо* $Y \in \Upsilon_{\mathrm{nc,norm-an}}$ *тоді і тільки тоді, коли існує відкритий н.к. окіл точки* Y *такий, що* $\inf_{X\in U} \rho(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_X} Y) > 0$; *тут* m_X *- розмір блочної матриці* X *з* $s\times s$ *блоками.*

5. Ряд (8.1) *збігається рівномірно на кожній кулі* $B(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y, \delta)$ *з* $\delta < \rho_m$, *більше того,*

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sup_{X\in B(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y,\delta)} \Big\| \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s \ell} f_\ell \Big\|_{sm} < \infty. \tag{8.16}$$

Ряд (8.1) *не збігається рівномірно на жодній кулі* $B(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y, \delta)$ *з* $\delta > \rho_m$. *Множина* $(\Upsilon_{\mathrm{nc,norm}})_{sm}$ *- непорожня тоді і тільки тоді, коли* $\rho_m > 0$, *тоді і тільки тоді, коли* $\inf\{\rho(W)\colon W \in \mathcal{V}^{sm\times sm}, \|W\|_{sm} = 1\} > 0$.

Доведення. 1. Ми спочатку спостерігаємо, що скінченно-відкрита топологія на $\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ є сильнішою, ніж топологія норми, отже $\rho_{\mathrm{norm}}(Z) \le \rho_{\mathrm{fin}}(Z)$ для будь якого Z, і $\Upsilon_{\mathrm{nc,norm}} \subseteq \Upsilon_{\mathrm{nc,fin}}$. Далі ми спостерігаємо, що функція $\rho_{\mathrm{norm}}(\cdot)$ є півнеперервна знизу у топології норми, і нагадаємо, що функція $\rho_{\mathrm{norm}}(\cdot)$ є також додатно-однорідною степеня -1. Залишок доведення частини 1 - аналогічний до доведення частини 1 теореми 8.2.

2. Нехай $m \in \mathbb{N}$ - фіксоване. Якщо $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y \in (\Upsilon_{\mathrm{nc,norm}})_{sm}$, то $(\Upsilon_{\mathrm{nc,norm}})_{sm} \neq \emptyset$. Навпаки, якщо $(\Upsilon_{\mathrm{nc,norm}})_{sm}$, що є внутрішністю $(\Upsilon_{\mathrm{nc}})_{sm}$ в топології норми на $\mathcal{V}^{sm\times sm}$, - непорожнє, тоді за [**88**, теорема 26.6.1] $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y$ - внутрішня точка $(\Upsilon_{\mathrm{nc}})_{sm}$ у цій топології, і $(\Upsilon_{\mathrm{nc,norm}})_{sm}$ - повна кругова множина навколо $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y$. Тоді $\rho_{\mathrm{norm}}(0_{sm\times sm}) > 1$. Більше того, за додатною однорідністю степеня -1 і півнеперервністю знизу $\rho_{\mathrm{norm}}(\cdot)$ ми маємо, що $\rho_{\mathrm{norm}}(Z) > 0$ для кожного $Z \in \mathcal{V}^{sm\times sm}$, і що $\rho_{\mathrm{norm}}(0_{sm\times sm}) = \infty$. Аналітичність $f|(\Upsilon_{\mathrm{norm}})_{sm}$ випливає з [**88**, теорема 26.6.4].

3. Це твердження для будь-яких фіксованих m і X випливає з [**88**, теорема 26.6.5] (порівняй з теоремою 7.4).

4. Оскільки відкрита множина є скінченно-відкритою, $f|\Gamma$ - н.к. функція за теоремою 8.2, частина 4. Вона є аналітичною за частиною 2 цієї теореми. Твердження, що залишились, можуть бути доведені аналогічно доведенню частини 4 теореми 8.2.

5. Нехай $\delta < \rho_m$. Тоді для будь-якого $\epsilon > 0$ існує $L > 0$ таке, що

$$\sup_{\|W\|_{sm}=1} \|W^{\odot_s \ell} f_\ell\|_{sm} < (\mu_m + \epsilon)^\ell$$

для всіх $\ell > L$. Обираючи $\epsilon < \delta^{-1} - \mu_m$, ми отримаємо, що для всіх $\ell > L$,

$$\sup_{W\in B(0_{sm\times sm},\delta)} \|W^{\odot_s \ell} f_\ell\|_{sm} < \delta^\ell (\mu_m + \epsilon)^\ell.$$

Оскільки $\delta(\mu_m + \epsilon) < 1$, ряд (8.1) збігається абсолютно і рівномірно на кулі $B(0_{sm\times sm}, \delta)$, і

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sup_{W\in B(0_{sm\times sm},\delta)} \|W^{\odot_s \ell} f_\ell\|_{sm}$$
$$< \sum_{\ell=0}^{L} \sup_{W\in B(0_{sm\times sm},\delta)} \|W^{\odot_s \ell} f_\ell\|_{sm} + \sum_{\ell=L+1}^{\infty} \delta^\ell (\mu_m + \epsilon)^\ell < \infty,$$

тобто (8.16) виконується, якщо покласти $X = W + \bigoplus_{\alpha=1}^m Y$.

Зараз нехай $\delta > \rho_m$ - фіксоване. Оберемо будь-яке ϵ з $0 < \epsilon < \mu_m - \delta^{-1}$. Тоді для будь-якого $L > 0$ існує $\ell > L$ таке, що

$$\sup_{\|W\|_{sm}=1} \|W^{\odot_s \ell} f_\ell\|_{sm} > (\mu_m - \epsilon)^\ell.$$

Для будь-якого такого ℓ існує $Z \in \mathcal{V}^{sm\times sm}$ з $\|Z\|_{sm} = (\mu_m - \epsilon)^{-1} < \delta$ таке, що

$$\|Z^{\odot_s \ell} f_\ell\|_{sm} > (\mu_m - \epsilon)^\ell \|Z\|_{sm}^\ell = 1.$$

Отже, послідовність $Z^{\odot_s \ell} f_\ell$, $\ell = 1, 2, \ldots$, не збігається до $0_{sm\times sm}$ рівномірно на кулі $B(0_{sm\times sm}, \delta)$. Ми робимо висновок, що ряд (8.1) не збігається рівномірно на $B(\bigoplus_{\alpha=1}^m Y, \delta)$.

Якщо $(\Upsilon_{\mathrm{nc,norm}})_{sm} \neq \emptyset$, тобто внутрішність Υ_{nc} в топології норми непорожня, то за [**88**, теорема 26.6.2] ряд (8.1) збігається рівномірно на $B(\bigoplus_{\alpha=1}^m Y, \delta)$ для достатньо малого δ, отже $\rho_m > 0$. Оскільки $\rho_m \leq \rho(W)$ для кожного $W \in \mathcal{V}^{sm\times sm}$ з $\|W\|_{sm} = 1$, ми маємо, що $\rho_m > 0$ тягне за собою $\inf\{\rho(W)\colon W \in \mathcal{V}^{sm\times sm}, \|W\|_{sm} = 1\} > 0$. Нарешті, якщо $\alpha = \inf\{\rho(W)\colon W \in \mathcal{V}^{sm\times sm}, \|W\|_{sm} = 1\} > 0$, то за додатною однорідністю степеня -1 як $\rho(\cdot)$, так і $\rho_{\mathrm{norm}}(\cdot)$, ми маємо, що $\rho_{\mathrm{norm}}(Z) \geq \alpha$ для будь-якого $Z \in \mathcal{V}^{sm\times sm}$ з $\|Z\|_{sm} = 1$, і що $\rho_{\mathrm{norm}}(0_{sm\times sm}) = \infty$. Остнаннє тягне за собою за частиною 2, що $(\Upsilon_{\mathrm{nc,norm}})_{sm} \neq \emptyset$. Таким чином, останнє твердження теореми доведено. □

Зауваження 8.9. Оскільки скінченно-відкрита топологія і топологія норми співпадають для скінченновимірних просторів, приклади 8.5 і 8.6 також показують, що $\Upsilon_{\mathrm{nc,norm}}$ не є обов'язово н.к. множиною, і що (відкритий за нормою) н.к. окіл точки Y, який міститься у $\Upsilon_{\mathrm{nc,norm}}$, може існувати, а може і не існувати.

8.3. Рівномірно-відкрита топологія

Нехай $\mathcal{V}$ і $\mathcal{W}$ - операторні простори над $\mathbb{C}$, і нехай $f_\ell\colon (\mathcal{V}^{s\times s})^\ell \to \mathcal{W}^{s\times s}$, $\ell = 0, 1, \ldots$, - послідовність цілком обмежених ℓ-лінійних відображень. Ми вводимо

$$\rho_{\mathrm{unif}}(Z) = \liminf_{W \overset{\mathrm{unif}}{\to} Z} \rho(W) \tag{8.17}$$

(порівняй з (8.4) і (8.10)), де $W \overset{\text{unif}}{\to} Z$ означає, що нижня границя береться в рівномірно-відкритій топології на $\mathcal{V}_{\text{nc}}$,

$$\begin{aligned} \mu_{\text{unif}-\text{normal}}(Z) &= \lim_{\delta\to 0}\limsup_{\ell\to\infty}\sqrt[\ell]{\sup_{W\in B_{\text{nc}}(Z,\delta)}\|W^{\odot_s\ell}f_\ell\|}, \\ \rho_{\text{unif}-\text{normal}}(Z) &= \mu_{\text{unif}-\text{normal}}(Z)^{-1}, \end{aligned} \tag{8.18}$$

де $\|W^{\odot_s\ell}f_\ell\| = \|W^{\odot_s\ell}f_\ell\|_{sm}$ для $W \in \mathcal{V}^{sm\times sm}$, і

$$\mu_{\text{cb}} = \limsup_{\ell\to\infty}\sqrt[\ell]{\|f_\ell\|_{\mathcal{L}^\ell_{\text{cb}}}}, \qquad \rho_{\text{cb}} = \mu_{\text{cb}}^{-1}. \tag{8.19}$$

Ми зауважимо, що границя $\lim\limits_{\delta\to 0}$ у (8.18) існує як границя монотонної функції (спадаючої, коли $\delta \downarrow 0$), обмеженої знизу нулем. Аналогічно до $\rho_{\text{fin}}(\cdot)$ і $\rho_{\text{norm}}(\cdot)$, функції $\rho_{\text{unif}}(\cdot)$ і $\rho_{\text{unif}-\text{normal}}(\cdot)$ є додатно-однорідними степеня -1, порівняй з зауваженням 7.13.

Нам буде потрібна наступна лема [**88**, лема 26.5.1]; ми наводимо її доведення для повноти.

Лема 8.10. *Нехай $\mathcal{V}$ - векторний простір над $\mathbb{C}$, $\mathcal{W}$ - банахів простір над $\mathbb{C}$, і нехай $\Gamma \subseteq \mathcal{V}$ - повна кругова множина навколо 0. Припустимо, що $\omega\colon \mathcal{V}^k \to \mathcal{W}$ - k-лінійне відображення і що $X \in \mathcal{V}$. Тоді*

$$\sup_{W\in\bigcup\limits_{\zeta\in\overline{\mathbb{D}}}(\zeta X+\Gamma)}\|\omega(W,\dots,W)\| = \sup_{W\in X+\Gamma}\|\omega(W,\dots,W)\|,$$

де $\overline{\mathbb{D}} = \{\zeta \in \mathbb{C}\colon |\zeta| \le 1\}$ - замкнений одиничний круг; $X + \Gamma := \{X + Z\colon Z \in \Gamma\}$ - повна кругова множина навколо X і $\bigcup\limits_{\zeta\in\overline{\mathbb{D}}}(\zeta X + \Gamma)$ - повна кругова множина навколо 0.

Доведення. Зафіксуємо довільне $Z_0 \in \Gamma$. Розглянемо функцію

$$\phi\colon \overline{\mathbb{D}} \to \mathcal{W}, \quad \phi\colon \zeta \mapsto \omega(\zeta X + Z_0, \dots, \zeta X + Z_0).$$

Звісно, ϕ - многочлен і, отже, функція ϕ є аналітичною. За принціпом максимума, існує ζ_0 з $|\zeta_0| = 1$ таке, що $\|\phi(\zeta_0)\| = \max_{\zeta\in\overline{\mathbb{D}}}\|\phi(\zeta)\|$. За однорідністю (степеня k) функції ω,

$$\begin{aligned} \|\omega(\zeta_0 X + Z_0, \dots, \zeta_0 X + Z_0)\| &= \|\omega(X + \zeta_0^{-1}Z_0, \dots, X + \zeta_0^{-1}Z_0)\| \\ &\le \sup_{Z\in\Gamma}\|\omega(X + Z, \dots, X + Z)\| \end{aligned}$$

оскільки множина Γ - повна кругова навколо 0. Це доводить лему. $\square$

Теорема 8.11. *1. Множина*

$$\Upsilon_{\mathrm{nc,unif}} = \coprod_{m=1}^{\infty} \Big\{ X \in \mathcal{V}^{sm\times sm} \colon \rho_{\mathrm{unif}}\Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big) > 1 \Big\} \tag{8.20}$$

міститься у $\Upsilon_{\mathrm{nc,norm}} \subseteq \Upsilon_{\mathrm{nc,fin}}$ *і є внутрішністю* Υ_{nc} *у рівномірно-відкритій топології на* $\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$.

2. Множина

$$\Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}} = \coprod_{m=1}^{\infty} \Big\{ X \in \mathcal{V}^{sm\times sm} \colon \rho_{\mathrm{unif-normal}}\Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big) > 1 \Big\} \tag{8.21}$$

є рівномірно-відкритою підмножиною $\Upsilon_{\mathrm{nc,unif}} \subseteq \Upsilon_{\mathrm{nc,norm}} \subseteq \Upsilon_{\mathrm{nc,fin}}$ *і*

$$\Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}} \tag{8.22}$$

$$= \big\{ X \in \Upsilon_{\mathrm{nc,unif}} \colon \exists \delta > 0 \text{ таке, що } \sup_{\ell\in\mathbb{N}} \sup_{W\in B_{\mathrm{nc}}(X,\delta)} \Big\| \big(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_W} Y\big)^{\odot_s \ell} f_\ell \Big\|_{sm_W} < \infty \big\} \tag{8.23}$$

$$= \big\{ X \in \Upsilon_{\mathrm{nc,unif}} \colon \exists \delta > 0 \text{ таке, що } \sum_{\ell=0}^{\infty} \sup_{W\in B_{\mathrm{nc}}(X,\delta)} \Big\| \big(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_W} Y\big)^{\odot_s \ell} f_\ell \Big\|_{sm_W} < \infty \big\};$$

тут m_W *- розмір блочної матриці* W *з* $s \times s$ *блоками. Множина* $\Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}}$ *- непорожня тоді і тільки тоді, коли вона містить* Y. *У цьому випадку,*

- $\rho_{\mathrm{unif-normal}}(0_{s\times s}) = \infty$ *і* $\rho_{\mathrm{unif-normal}}(Z) > 0$ *для кожного* $Z \in (\mathcal{V}^{s\times s})_{\mathrm{nc}}$,
- *Множина* $\Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}}$ *- повна кругова навколо* Y *(тобто* $(\Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}})_{sm}$ *- повна кругова множина навколо* $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y$ *для кожного* $m \in \mathbb{N}$*).*

3. Для кожних $m \in \mathbb{N}$ *і* $X \in (\Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}})_{sm}$ *існує рівномірно-відкрита повна кругова множина* $\Upsilon_{\mathrm{nc},X}$ *навколо* $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y$, *яка містить* X *і така, що*

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sup_{W\in\Upsilon_{\mathrm{nc},X}} \Big\| \Big(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_W} Y\Big)^{\odot_s \ell} f_\ell \Big\|_{sm_W} < \infty. \tag{8.24}$$

4. Для будь-якої рівномірно-відкритої н.к. множини $\Gamma \subseteq \Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}}$, $f|_\Gamma$ *є рівномірно аналітичною н.к. функцією.*

5. Ряд (8.1) *збігається рівномірно на кожній н.к. кулі* $B_{\mathrm{nc}}(Y,\delta)$ *з* $\delta < \rho_{\mathrm{cb}}$, *більше того,*

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sup_{W\in B_{\mathrm{nc}}(Y,\delta)} \Big\| \Big(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_W} Y\Big)^{\odot_s \ell} f_\ell \Big\|_{sm_W} < \infty. \tag{8.25}$$

Ряд (8.1) *не збігається рівномірно на жодній н.к. кулі* $B_{\mathrm{nc}}(Y,\delta)$ *з* $\delta > \rho_{\mathrm{cb}}$. *Множина* $\Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}}$ *- непорожня тоді і тільки тоді, коли* $\rho_{\mathrm{cb}} > 0$.

Зауваження 8.12. Відкритим залишається питання, чи є $\Upsilon_{\mathrm{nc,unif}}$ непорожнім тоді і тільки тоді, коли $\rho_{\mathrm{unif}}(0_{s\times s}) > 0$. Якщо $\rho_{\mathrm{unif}}(0_{s\times s}) > 0$, то подібно до теорем 8.2 і 8.8, $\rho_{\mathrm{unif}}(0_{s\times s}) = \infty$ і $\Upsilon_{\mathrm{nc,unif}}$ - повна кругова множина навколо Y.

Доведення теореми 8.11. 1. Ми спочатку спостерігаємо, що топологія норми на $\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ - сильніша, ніж рівномірно-відкрита топологія, отже, $\rho_{\mathrm{unif}}(Z) \leq \rho_{\mathrm{norm}}(Z)$ для будь-якого Z, і $\Upsilon_{\mathrm{nc,unif}} \subseteq \Upsilon_{\mathrm{nc,norm}}$. Доведення частини 1 аналогічне доведенню частини 1 теорем 8.2 і 8.8.

2&3. Ми спочатку показуємо, що $\rho_{\mathrm{unif-normal}}(\cdot)$ є півнеперервним знизу у рівномірно-відритій топології на $\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$. Нехай

$$\kappa := \limsup_{W \overset{\mathrm{unif}}{\to} Z} \mu_{\mathrm{unif-normal}}(W) = \limsup_{W \overset{\mathrm{unif}}{\to} Z} \lim_{\delta\to 0} \limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\sup_{\widetilde{W}\in B_{\mathrm{nc}}(W,\delta)} \|\widetilde{W}^{\odot_s \ell} f_\ell\|}.$$

Тоді для довільного $\epsilon > 0$ існує послідовність $W_n \overset{\mathrm{unif}}{\to} Z$ така, що

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\sup_{\widetilde{W}\in B_{\mathrm{nc}}(W_n,\delta)} \|\widetilde{W}^{\odot_s \ell} f_\ell\|} > \kappa - \epsilon, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Звісно, існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що $W_n \in B_{\mathrm{nc}}(Z, \delta)$ для всіх $n \geq N$. Отже,

$$\mu_{\mathrm{unif-normal}}(Z) = \lim_{\delta\to 0} \limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\sup_{\widetilde{W}\in B_{\mathrm{nc}}(Z,2\delta)} \|\widetilde{W}^{\odot_s \ell} f_\ell\|}$$
$$\geq \lim_{\delta\to 0} \limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\sup_{\widetilde{W}\in B_{\mathrm{nc}}(W_n,\delta)} \|\widetilde{W}^{\odot_s \ell} f_\ell\|} > \kappa - \epsilon, \quad n \geq N.$$

Оскільки ϵ може бути обране довільно малим, ми отримаємо, що

$$\mu_{\mathrm{unif-normal}}(Z) \geq \kappa = \limsup_{W \overset{\mathrm{unif}}{\to} Z} \mu_{\mathrm{unif-normal}}(W),$$

тобто $\mu_{\mathrm{unif-normal}}(\cdot)$ є півнеперервним зверху, і таким чином, $\rho_{\mathrm{unif-normal}}(\cdot)$ є півнеперервним знизу у рівномірно-відкритій топології на $\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$. Це тягне за собою також, що множина $\Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}}$ є рівномірно-відкритою.

Оскільки, звісно, $\rho_{\mathrm{unif-normal}}(Z) \leq \rho(Z)$ для будь-якого Z, за півнеперервністю знизу фунції $\rho_{\mathrm{unif-normal}}(\cdot)$ ми отримаємо, що $\rho_{\mathrm{unif-normal}}(Z) \leq \rho_{\mathrm{unif}}(Z)$ для будь-якого Z и, отже,

$$\Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}} \subseteq \Upsilon_{\mathrm{nc,unif}}.$$

Нехай $X \in \Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}}$. Тоді

$$\mu_{\mathrm{unif-normal}}\Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_X} Y\Big) = \lim_{\delta\to 0} \limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\sup_{W\in B_{\mathrm{nc}}(X,\delta)} \Big\|\Big(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_W} Y\Big)^{\odot_s \ell} f_\ell\Big\|_{sm_W}} < 1.$$

Отже, існує $\delta > 0$ таке, що

$$\limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\sup_{W\in B_{\mathrm{nc}}(X,\delta)} \left\| \left(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_W} Y\right)^{\odot_s \ell} f_\ell \right\|_{sm_W}} < 1.$$

Це тягне за собою, що послідовність

$$\sup_{W\in B_{\mathrm{nc}}(X,\delta)} \left\| \left(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_W} Y\right)^{\odot_s \ell} f_\ell \right\|_{sm_W}, \quad \ell = 1, 2, \ldots,$$

- обмежена, більше того, існують $C > 0$ і $\eta\colon 0 < \eta < 1$ такі, що

$$\sup_{W\in B_{\mathrm{nc}}(X,\delta)} \left\| \left(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_W} Y\right)^{\odot_s \ell} f_\ell \right\|_{sm_W} \le C\eta^\ell, \quad \ell = 1, 2, \ldots.$$

Отже,

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sup_{W\in B_{\mathrm{nc}}(X,\delta)} \left\| \left(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_W} Y\right)^{\odot_s \ell} f_\ell \right\|_{sm_W} < \infty.$$

Навпаки, якщо $X \in \Upsilon_{\mathrm{nc,unif}}$ таке, що для деякого $\delta > 0$ ряд

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sup_{W\in B_{\mathrm{nc}}(X,\delta)} \left\| \left(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_W} Y\right)^{\odot_s \ell} f_\ell \right\|_{sm_W}$$

збігається, то ряд

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda^\ell \sup_{W\in B_{\mathrm{nc}}(X,\delta)} \left\| \left(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_W} Y\right)^{\odot_s \ell} f_\ell \right\|_{sm_W}$$

як ряд від λ збігається рівномірно і абсолютно на замкненому одиничному крузі $\overline{\mathbb{D}}$, і значить, його радіус збіжності

$$\left(\limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\sup_{W\in B_{\mathrm{nc}}(X,\delta)} \left\| \left(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_W} Y\right)^{\odot_s \ell} f_\ell \right\|_{sm_W}} \right)^{-1} > 1.$$

Оскільки ліва частина зростає, якщо $\delta \downarrow 0$, ми маємо, що

$$\rho_{\mathrm{unif-normal}}\left(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_X} Y\right) = \left(\lim_{\delta\to 0} \limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\sup_{W\in B_{\mathrm{nc}}(X,\delta)} \left\| \left(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_W} Y\right)^{\odot_s \ell} f_\ell \right\|_{sm_W}} \right)^{-1} > 1,$$

тобто $X \in \Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}}$. Це доводить рівності (8.22) і (8.23).

Далі, якщо $Y \in \Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}}$, то $\Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}} \neq \emptyset$. Навпаки, припустимо, що $X \in (\Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}})_{sm}$ для деякого $m \in \mathbb{N}$. Тоді за (8.23) існує н.к. куля $B_{\mathrm{nc}}(X,\delta)$ така, що

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sup_{W \in B_{\mathrm{nc}}(X,\delta)} \Big\| \Big(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_W} Y \Big)^{\odot_s \ell} f_\ell \Big\|_{sm_W} < \infty.$$

За лемою 8.10 ця нерівність виконується з супремумами над $B_{\mathrm{nc}}(X,\delta)$ заміненими на супремуми над

$$\Upsilon_{\mathrm{nc},X} := \bigcup_{\zeta \in \overline{\mathbb{D}}} B_{\mathrm{nc}} \left(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y + \zeta \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y \Big), \delta \right).$$

Це тягне за собою частину 3 теореми, з $\Upsilon_{\mathrm{nc},X}$ як вище. Зокрема, ми отримаємо, що $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y \in \Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}}$. Ми стверджуємо $\rho_{\mathrm{unif-normal}}(\bigoplus_{j=1}^{m} W) = \rho_{\mathrm{unif-normal}}(W)$ для кожних $k \in \mathbb{N}$ і $W \in \mathcal{V}^{sk \times sk}$, що дає $Y \in \Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}}$. Справді, це випливає з рівності

$$\Big\| \Big(\bigoplus_{j=1}^{m} W \Big)^{\odot_s \ell} f_\ell \Big\|_{skm} = \| W^{\odot_s \ell} f_\ell \|_{sk}$$

і означення $\rho_{\mathrm{unif-normal}}(\cdot)$.

Решта тверджень частини 2 випливає з додатної однорідності і півнеперервності знизу функції $\rho_{\mathrm{unif-normal}}(\cdot)$.

4. Оскільки рівномірно-відкрита н.к. множина є скінченно-відкритою, $f|_\Gamma$ є G-диференційованою н.к. функцією за теоремою 8.2, частина 4. З (8.23) випливає, що $f|_\Gamma$ є локально рівномірно обмеженою. Ми робимо висновок, що $f|_\Gamma$ - рівномірно аналітична н.к. функція.

5. Якщо $\rho_{\mathrm{cb}} > \delta > 0$, то ми маємо

$$\mu_{\mathrm{cb}} = \limsup_{\ell \to \infty} \sqrt[\ell]{\| f_\ell \|_{\mathcal{L}^\ell_{\mathrm{cb}}}} < \infty$$

і існує $C > 0$ таке, що

$$\| f_\ell \|_{\mathcal{L}^\ell_{\mathrm{cb}}} \leq C \mu_{\mathrm{cb}}^\ell, \quad \ell = 0, 1, \ldots.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sup_{W \in B_{\mathrm{nc}}(0_{s\times s},\delta)} \| W^{\odot_s \ell} f_\ell \| &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sup_{\|W\|=\delta} \| W^{\odot_s \ell} f_\ell \| \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta^\ell \sup_{\|W\|=1} \| W^{\odot_s \ell} f_\ell \| = \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta^\ell \| f_\ell \|_{\mathcal{L}^\ell_{\mathrm{cb}}} \leq C \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta^\ell \mu_{\mathrm{cb}}^\ell < \infty, \end{aligned}$$

що еківівалентне до (8.25); тут ми використали пропозицію 7.49 і нерівність $\delta \mu_{\mathrm{cb}} < 1$. Зокрема, ряд (8.1) збігається абсолютно і рівномірно на $B_{\mathrm{nc}}(Y,\delta)$, так що $Y \in \Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}}$ і, таким чином, $\Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}} \neq \emptyset$.

Зараз припустимо, що $\delta > \rho_{\rm cb}$. Тоді для будь-яких $\epsilon\colon 0 < \epsilon < \mu_{\rm cb} - \delta^{-1}$ і $L > 0$ існує $\ell > L$ таке, що $\|f_\ell\|_{\mathcal{L}^\ell_{\rm cb}} > (\mu_{\rm cb} - \epsilon)^\ell$. Для будь-якого такого ℓ існує $W \in (\mathcal{V}^{s\times s})_{\rm nc}$ з $\|W\| = (\mu_{\rm cb} - \epsilon)^{-1} < \delta$ таке, що

$$\|W^{\odot_s \ell} f_\ell\| > (\mu_{\rm cb} - \epsilon)^\ell \|W\| = 1.$$

Отже, послідовність $\|W^{\odot_s \ell} f_\ell\|$, $\ell = 0, 1, \ldots$, не збігається до 0 рівномірно на $B_{\rm nc}(0_{s\times s}, \delta)$, і ряд (8.1) не збігається рівномірно на $B_{\rm nc}(Y, \delta)$.

Нарешті, якщо $\Upsilon_{\rm nc,unif-normal} \neq \emptyset$, то за частиною 2, $Y \in \Upsilon_{\rm nc,unif-normal}$. Отже, за частиною 2, існує $\delta > 0$ таке, що ряд (8.1) збігається абсолютно і рівномірно на $B_{\rm nc}(Y, \delta)$. Це тягне за собою, що $\rho_{\rm cb} \geq \delta > 0$. Теорема доведена. □

Наступний приклад демонструє можливість, що $0 = \rho_{\rm unif}(Z) < \rho_{\rm norm}(Z)$ для деякого Z і значить, $\Upsilon_{\rm nc,unif} \subsetneq \Upsilon_{\rm nc,norm}$. Ми також маємо у цьому прикладі, що $0 = \rho_{\rm cb} < \rho_m$ для кожного фіксованого $m \in \mathbb{N}$.

Приклад 8.13. Як було показано у [**116**] (дивись також [**118**, розділ 3]), для кожного $p = 3, 4, \ldots$ існують $k_p \in \mathbb{N}$ (з k_p зростаючими, коли p зростає) і лінійне відображення $\phi_p\colon \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^{k_p\times k_p}$ таке, що $\max_{\zeta\in\overline{\mathbb{D}^p}} \|\phi_p(\zeta)\| = 1$ і

$$\sup_{n\in\mathbb{N}, Z_{p1},\ldots,Z_{pp}\in\mathbb{C}^{n\times n}\colon \|Z_{p1}\|=\ldots=\|Z_{pp}\|=1} \|(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n\times n}} \otimes \phi_p)(Z_{p1}, \ldots, Z_{pp})\| \tag{8.26}$$
$$= \|(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{k_p\times k_p}} \otimes \phi_p)(Z^0_{p1}, \ldots, Z^0_{pp})\| = \sqrt{\frac{p}{2}}$$

для деяких $Z^0_{p1}, \ldots, Z^0_{pp} \in \mathbb{C}^{k_p\times k_p}$ норми 1, де $\|\cdot\|$ позначає операторну норму відносно стандартних евклідових норм. Більше того,

$$\|(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{k_p\times k_p}} \otimes \phi_p)(Z^0_{p1}, \ldots, Z^0_{pp})^\ell\| = \left(\sqrt{\frac{p}{2}}\right)^\ell, \quad \ell = 1, 2, \ldots. \tag{8.27}$$

Нехай $\mathcal{V}$ - банахів простір, що містить обмежені двохіндексові послідовності комплексних чисел $z = (z_{pq})_{p=3,4,\ldots;\, q=1,\ldots,p}$ з нормою $\|z\|_\infty = \sup_{p,q} |z_{pq}|$. Ми можемо ототожнити $n \times n$ матриці над $\mathcal{V}$ з послідовностями $n \times n$ матриць над $\mathbb{C}$, $Z = (Z_{pq})_{p=3,4,\ldots;\, q=1,\ldots,p}$. Тоді множення такого Z справа (зліва) на $n \times n$ матрицю над $\mathbb{C}$ визначається як одночасне праве (ліве) множення на цю матрицю для всіх компонент Z_{pq}. Легко побачити, що норми на $\mathcal{V}^{n\times n}$, визначені як $\|Z\|_{\infty,n} = \sup_{p,q} \|Z_{pq}\|$ для $n = 1, 2, \ldots$, визначають структуру операторного простору на $\mathcal{V}$. Нехай $\mathcal{W}$ - банахів простір, що складається з блочно-діагональних нескінченних матриць (нескінченні прямі суми) $W = \bigoplus_{p=3}^\infty W_p$ з $W_p \in \mathbb{C}^{k_p\times k_p}$ і з нормою $\|W\|_\infty = \sup_p \|W_p\|$. Ми можемо ототожнити $n \times n$ матриці над $\mathcal{W}$ з прямими сумами $n \times n$ матриць над $\mathbb{C}^{k_p\times k_p}$, $W = \bigoplus_{p=3}^\infty W_p$. Множення такого W справа (зліва) на $n \times n$ матрицю S над $\mathbb{C}$ тоді зводиться до одночасного правого (лівого) множення на цю матрицю для всіх діагональних блоків W_p: $(WS)_p = W_p(S \otimes I_{k_p})$ (відп., $(SW)_p = (S \otimes I_{k_p})W_p$. Легко побачити, що норми на

$\mathcal{W}^{n\times n}$, визначені як $\|W\|_{\infty,n} = \sup_p \|W_p\|$ для $n = 1, 2, \ldots$ визначають структуру операторного простору на $\mathcal{W}$. Для кожного $\ell = 3, 4, \ldots$ ми визначаємо лінійне відображення $\phi^{(\ell)}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ як

$$\phi^{(\ell)}(z) = \phi_3(z_{31}, z_{32}, z_{33}) \oplus \cdots \oplus \phi_\ell(z_{\ell 1}, \ldots, z_{\ell\ell}) \oplus 0_{k_{\ell+1}\times k_{\ell+1}} \oplus 0_{k_{\ell+2}\times k_{\ell+2}} \oplus \cdots$$

і ℓ-лінійне відображення $f_\ell\colon \mathcal{V}^\ell \to \mathcal{W}$ як

$$f_\ell(z^1, \ldots, z^\ell) = \phi^{(\ell)}(z^1) \cdots \phi^{(\ell)}(z^\ell),$$

так що

$$f_\ell(z, \ldots, z) = \phi^{(\ell)}(z)^\ell.$$

Відображення $\phi^{(\ell)}$ і f_ℓ розширюються на $n\times n$ матриці над $\mathcal{V}$ стандартним шляхом. Тоді за пропозицією 7.49 і рівностями (8.26), (8.27) ми маємо

$$\begin{aligned}\|f_\ell\|_{\mathcal{L}^\ell_{\mathrm{cb}}} &= \sup_{n\in\mathbb{N}, Z\in\mathcal{V}^{n\times n}\colon \|Z\|_{\infty,n}=1} \|Z^{\odot\ell} f_\ell\|_{\infty,n} = \sup_{n\in\mathbb{N}, Z\in\mathcal{V}^{n\times n}\colon \|Z\|_{\infty,n}=1} \|f_\ell(Z, \ldots, Z)\|_{\infty,n} \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}, Z\in\mathcal{V}^{n\times n}\colon \|Z\|_{\infty,n}=1} \|\phi^{(\ell)}(Z)^\ell\|_{\infty,n} \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}, Z_{\ell 1},\ldots,Z_{\ell\ell}\in\mathbb{C}^{n\times n}\colon \|Z_{\ell 1}\|=\ldots=\|Z_{\ell\ell}\|=1} \|(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n\times n}} \otimes \phi_\ell)(Z_{\ell 1}, \ldots, Z_{\ell\ell})^\ell\| \\ &= \left(\sqrt{\frac{\ell}{2}}\right)^\ell,\end{aligned}$$

отже, ℓ-лінійні відображення f_ℓ, $\ell = 3, 4, \ldots$, є цілком обмеженими. Зараз розглянемо степеневий ряд

$$\sum_{\ell=3}^{\infty} Z^{\odot\ell} f_\ell.$$

Ми маємо для кожних фіксованих $m \in \mathbb{N}$ і $Z = (Z_{pq})_{p=3,4,\ldots;q=1,\ldots,p} \in \mathcal{V}^{m\times m}$ з $\|Z\|_{\infty,m} = 1$, що

$$\begin{aligned}\mu(Z) = \limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\|Z^{\odot\ell} f_\ell\|_{\infty,m}} &\le \limsup_{\ell\to\infty} \|\phi^{(\ell)}(Z)\| \\ &\le m^2 \limsup_{\ell\to\infty} \max_{p=3,\ldots,\ell} \max_{1\le i,j\le m} \|\phi_p(Z^{ij}_{p1}, \ldots, Z^{ij}_{pp})\| \le m^2,\end{aligned}$$

де Z^{ij}_{pq} - (i,j)-й елемент матриці Z_{pq}. Отже, $\rho(Z) \ge m^{-2}$ для кожного $Z \in \mathcal{V}^{m\times m}$ з $\|Z\|_{\infty,m} = 1$. Легко побачити, що за однорідністю степеня -1 ми також маємо $\rho_{\mathrm{norm}}(Z) \ge m^{-2}$ для кожного $Z \in \mathcal{V}^{m\times m}$ з $\|Z\|_{\infty,m} = 1$. Це тягне за собою, що $\rho_{\mathrm{norm}}(Z) > 0$ для кожного $Z \in \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ і, отже, $\rho_{\mathrm{norm}}(0_{m\times m}) = \infty$ для кожного $m \in \mathbb{N}$. Ми також отримаємо, що $\rho_m \ge m^{-2}$ для кожного $m \in \mathbb{N}$.

Введемо послідовність $Z^j = (Z^j_{pq})_{p=3,4,\ldots;q=1,\ldots,p} \in \mathcal{V}^{k_j\times k_j}$, $j = 3, 4, \ldots$, як

$$Z^j_{pq} = \begin{cases} 0_{k_j\times k_j} & \text{для} \quad p \ne j, \\ \frac{1}{\sqrt[4]{j}} Z^0_{jq} & \text{для} \quad p = j,\ 1 \le q \le j. \end{cases}$$

Тоді

$$\lim_{j\to\infty} \|Z^j\|_{\infty,k_j} = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{j}} = 0,$$

проте

$$\lim_{j\to\infty} \mu(Z^j) = \lim_{j\to\infty} \limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\|(Z^j)^{\odot\ell} f_\ell\|_{\infty,k_j}}$$
$$= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{j}} \limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\|(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{k_j\times k_j}} \otimes \phi_j)(Z^0_{j1}, \ldots, Z^0_{jj})^\ell\|_{\infty,k_j}} = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{j}} \sqrt{\frac{j}{2}} = \infty.$$

Таким чином,

$$\rho_{\mathrm{unif}}(0_{1\times 1}) = \lim_{j\to\infty} \rho(Z^j) = 0.$$

Зауважимо, що ми можемо показати аналогічно, що $\rho_{\mathrm{unif}}(Z) = 0$ з $Z \neq 0$. Наприклад, для $z = (z_{pq})_{p=3,4,\ldots;q=1,\ldots,p}$ з будь-якими $z_{3,q} \neq 0$, $q = 1, 2, 3$, і $z_{pq} = 0$ для всіх $p > 3$ і всіх q, ми можемо визначити послідовність $z \otimes I_{k_j} + Z^j$ з Z^j як вище і перевірити, що

$$\rho_{\mathrm{unif}}(z) = \lim_{j\to\infty} \rho(z \otimes I_{k_j} + Z^j) = 0.$$

Нарешті, ми спостерігаємо, що

$$\rho_{\mathrm{cb}} = \left(\limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\|f_\ell\|_{\mathcal{L}^\ell_{\mathrm{cb}}}} \right)^{-1} = \left(\limsup_{\ell\to\infty} \sqrt{\frac{\ell}{2}} \right)^{-1} = 0.$$

Таким чином, всі твердження, сформульовані в абзаці перед цім прикладом, є вірні.

У наступному прикладі ми демонструємо можливість, що

$$0 = \rho_{\mathrm{unif-normal}}(0_{1\times 1}) < \rho_{\mathrm{unif}}(0_{1\times 1})$$

і значить, $\emptyset = \Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}} \subsetneq \Upsilon_{\mathrm{nc,unif}}$. Сума н.к. степеневого ряду у цьому прикладі - ціла (тобто аналітична скрізь і обмежена на кожній кулі $n \times n$ матриць, $n = 1, 2, \ldots$) н.к. функція, яка не є рівномірно аналітичною в точці $0_{1\times 1}$, тобто не є рівномірно аналітичною у жодному рівномірно-відкритому околі точки $0_{1\times 1}$.

Приклад 8.14. Нехай $\mathcal{V} = \mathbb{C}^2$ з нормою $\|(z_1, z_2)\| = \max\{|z_1|, |z_2|\}$ і $\mathcal{W} = \mathbb{C}$. Ми ототожнюємо $n \times n$ матриці над $\mathcal{V} = \mathbb{C}^2$ з парами матриць над $\mathbb{C}$. Ясно, що норми на $\mathcal{V}^{n\times n}$, $n = 1, 2, \ldots$, визначені як $\|(Z_1, Z_2)\|_n = \max\{\|Z_1\|, \|Z_2\|\}$, і покомпонентне множення пар (Z_1, Z_2) матриць над $\mathbb{C}$ зліва (справа) з матрицею над $\mathbb{C}$ визначають структуру операторного простору на $\mathcal{V}$. Канонічна (тобто з $\|1\|_1 = 1$) структура операторного простору на $\mathcal{W} = \mathbb{C}$ визначена однозначно. Розглянемо степеневий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} Z^{\odot\alpha_k} f_{\alpha_k} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p_k(Z_1, Z_2) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sum_{\pi\in\mathcal{S}_{k+1}} \mathrm{sign}(\pi) Z_1^{\pi(1)-1} Z_2 \cdots Z_1^{\pi(k+1)-1} Z_2$$

з додатними константами c_k, які будуть визначені пізніше, і $\alpha_k = \deg p_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ (дивись приклад 6.3 за додатковими деталями щодо многочленів p_k). α_k-лінійні відображення f_{α_k} є цілком обмеженими. Справді, за пропозицією 7.49 ми маємо

$$\|f_{\alpha_k}\|_{\mathcal{L}_{\mathrm{cb}}^{\alpha_k}} = \sup_{n\in\mathbb{N},\ Z=(Z_1,Z_2)\in(\mathbb{C}^{n\times n})^2:\ \max\{\|Z_1\|,\|Z_2\|\}=1} c_k\|p_k(Z_1,Z_2)\|_n \leq c_k(k+1)! < \infty.$$

Оскільки многочлени p_k зникають тотожньо на парах $k\times k$ матриць для кожного фіксованого $n\in\mathbb{N}$ і будь-якого $Z=(Z_1,Z_2)\in(\mathbb{C}^{n\times n})^2$, ряд містить тільки степені менше, ніж α_n, і значить, збігається рівномірно на $(\mathbb{C}^{n\times n})^2$. Отже, $\rho(Z)=\infty$ для кожного $Z\in\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$. Ми також маємо $\rho_{\mathrm{unif}}(Z)=\infty$ для кожного $Z\in\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ і $\Upsilon_{\mathrm{nc,unif}}=\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$. З другого боку, будь-який ненульовий многочлен p у двох н.к. невизначених не є тотожньо нулем на парах квадратних матриць достатньо великого розміру, завдяки відсутності поліноміальних тотожностей для матриць всіх розмірів – дивись [**130**, приклад 1.4.4 і теорема 1.4.5, с. 22]. Отже,

$$\sup_{n\in\mathbb{N},\ Z=(Z_1,Z_2)\in(\mathbb{C}^{n\times n})^2:\ \max\{\|Z_1\|,\|Z_2\|\}=1} \|p_k(Z_1,Z_2)\|_n \neq 0.$$

Позначимо

$$c_k = k^{\alpha_k}\Big(\sup_{n\in\mathbb{N},\ Z=(Z_1,Z_2)\in(\mathbb{C}^{n\times n})^2:\ \max\{\|Z_1\|,\|Z_2\|\}=1} \|p_k(Z_1,Z_2)\|_n\Big)^{-1}.$$

Тоді

$$\|f_{\alpha_k}\|_{\mathcal{L}_{\mathrm{cb}}^{\alpha_k}} = k^{\alpha_k}.$$

Для будь-якого $\delta>0$ ми маємо

$$\begin{aligned}\sup_{\ell\in\mathbb{N}}\sup_{W\in B_{\mathrm{nc}}(0_{1\times1},\delta)}&\|W^{\odot\ell}f_\ell\| \\ &= \sup_{k\in\mathbb{N}} c_k\delta^{\alpha_k}k^{\alpha_k}\sup_{n\in\mathbb{N},\ Z=(Z_1,Z_2)\in(\mathbb{C}^{n\times n})^2:\ \max\{\|Z_1\|,\|Z_2\|\}=1}\|p_k(Z_1,Z_2)\|_n \\ &= \sup_{k\in\mathbb{N}}(\delta k)^{\alpha_k} = \infty.\end{aligned}$$

Тоді за частиною 2 теореми 8.11 ми маємо, що $0_{1\times1}\notin\Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}}$ і, значить,

$$\Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}} = \emptyset.$$

Альтернативно, ми можемо обчислити

$$\mu_{\mathrm{unif-normal}}(0_{1\times1}) = \lim_{\delta\to0}\limsup_{\ell\to0}\sqrt[\ell]{\sup_{W\in B_{\mathrm{nc}}(0_{1\times1},\delta)}\|W^{\odot\ell}f_\ell\|} = \lim_{\delta\to0}\lim_{k\to\infty}\delta k = \infty,$$

і тоді $\rho_{\mathrm{unif-normal}}(0_{1\times1})=0$. За зауваженням 8.3 і теоремою 7.21, сума ряду, $f(Z)=\sum_{k=1}^{\infty}Z^{\odot\alpha_k}f_{\alpha_k}$ не є рівномірно аналітичною у точці $0_{1\times1}$.

Зауваження 8.15. Не дуже важко модифікувати приклад 8.14 змінюючи коефіцієнти c_k так, щоб $\Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}} \subsetneq \Upsilon_{\mathrm{nc,unif}} = (\mathbb{C}^2)_{\mathrm{nc}}$ містило н.к. кулю з центром у точці $0_{1\times 1}$ і даного скінченного радіусу.

Ми розглянемо зараз випадок, коли $\mathcal{V} = \mathbb{C}^d$ з деякою структурою операторного простору, і ми розвинемо кожний член у степеневому ряді (8.1), отримаючи ряд уздовж вільного моноїду $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$. Наші результати будуть зворотними до теореми 7.29. Іншими словами, ми розглянемо збіжність степеневого ряду вигляду

$$\sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d} \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s w} f_w. \tag{8.28}$$

Тут $Y = (Y_1, \dots, Y_d) \in (\mathbb{C}^{s\times s})^d$ - даний центр; $X = (X_1, \dots, X_d) \in (\mathbb{C}^{sm\times sm})^d$, $m = 1, 2, \dots$; $Z^{\odot_s w}$ для $w = g_{i_1} \cdots g_{i_\ell}$, і $Z = (Z_1, \dots, Z_d) \in (\mathbb{C}^{sm\times sm})^d$ визначається у (4.8); $f_w \colon (\mathbb{C}^{s\times s})^\ell \to \mathcal{W}^{s\times s}$, $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$, $\ell = |w|$, - дана послідовність ℓ-лінійних відображень (тут $\mathbb{C}$ і, отже, $\mathbb{C}^{s\times s}$ забезпечені канонічною структурою операторного простору); і умови (4.14)–(4.17) задовольняються. Ряд (8.28) може бути записаний альтернативно як

$$\sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d} \left(\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} A_{w,(0)}\Big) \otimes \Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} A_{w,(1)}\Big) \otimes \cdots \otimes \Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} A_{w,(|w|)}\Big) \right) \star Z^{[w]}.$$

Тут

$$f_w = A_{w,(0)} \otimes A_{w,(1)} \otimes \cdots \otimes A_{w,(|w|)} \in \mathcal{W}^{s\times s} \otimes \underbrace{\mathbb{C}^{s\times s} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{s\times s}}_{|w| \text{ разів}},$$

з інтерпретацією тензорного добутку для мультілінійних відображень f_w (зауваження 3.4), позначенням Свідлера без додавання (4.19) і псевдо-степеневим позначенням (4.21). У випадку $s = 1$, ряд (8.28) стає

$$\sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d} Z^w f_w,$$

з $f_w \in \mathcal{W}$; точніше, ми ототожнюємо ℓ-лінійні відображення $f_w \colon \mathbb{C}^\ell \to \mathcal{W}$ з вектором $f_w(1, \dots, 1) \in \mathcal{W}$, і

$$\|Z^w f_w\|_m = \|Z^w\| \|f_w\|_1 \tag{8.29}$$

для кожних $m \in \mathbb{N}$ і $Z \in (\mathbb{C}^{m\times m})^d$ (дивись [**118**, пропозиція 1.10(ii)]), так що

$$\|f_w\|_{\mathcal{L}^\ell_{\mathrm{cb}}} = \|f_w\|_1. \tag{8.30}$$

Ми асоціюємо з рядом (8.28) ряд (8.1), де ℓ-лінійні відображення $f_\ell \colon ((\mathbb{C}^{s\times s})^d)^\ell \to \mathcal{W}^{s\times s}$ визначаються як (5.5), так що (5.6) і (5.7) виконані. Подібно до зауваження

4.5, умови (4.14)–(4.17) на лінійні відображення f_w, як легко побачити, еквівалентні до умов (4.4)–(4.7) на лінійні відображення f_ℓ. Зауважимо, що цілком обмежені норми f_ℓ і f_w для всіх w з $|w| = \ell$ пов'язані як

$$\|f_\ell\|_{\mathcal{L}^\ell_{\mathrm{cb}}} \le \sum_{|w|=\ell} \mathbf{C}_1^w \|f_w\|_{\mathcal{L}^\ell_{\mathrm{cb}}}, \tag{8.31}$$

де $\mathbf{C}_1 = (\|\pi_1\|_{\mathrm{cb}}, \dots, \|\pi_d\|_{\mathrm{cb}})$ для i-го координатного відображення $\pi_i \colon \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$, і

$$\|f_w\|_{\mathcal{L}^\ell_{\mathrm{cb}}} \le \mathbf{C}_2^w \|f_\ell\|_{\mathcal{L}^\ell_{\mathrm{cb}}}, \tag{8.32}$$

де $\mathbf{C}_2 = (\|e_1\|_1, \dots, \|e_d\|_1)$.

Нехай $\mathcal{X}$ - векторний простір над $\mathbb{C}$ з розкладанням в пряму суму $\mathcal{X} = \bigoplus_{j=1}^d \mathcal{X}_j$, і нехай $Y = (Y_1, \dots, Y_d) \in \mathcal{X}$. Множина $\Upsilon \subseteq \mathcal{X}$ називається *повною множиною типу Рейнхардта навколо* Y, якщо для кожного $X = (X_1, \dots, X_d) \in \Upsilon$ і кожного $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{C}^d$ з $|t_j| \le 1$ для всіх j, ми маємо $Y + t \circ (X - Y) \in \Upsilon$, де $t \circ (X - Y) := (t_1(X_1 - Y_1), \dots, t_d(X_d - Y_d))$. Ясно, що повна множина типу Рейнхардта є повною круговою. У випадку $d = 1$ ми отримаємо означення повної кругової множини. У випадку, коли $\mathcal{X} = \mathbb{C}^d$ і $\mathcal{X}_j = \mathbb{C}e_j$, $j = 1, \dots, d$, ми отримаємо звичайне означення повної множини Рейнхардта [**140**, с. 8].

Наступна лема є аналогом леми 8.10 для повних множин типу Рейнхардта.

Лема 8.16. *Нехай $\mathcal{X}$ - векторний простір над $\mathbb{C}$ з розкладанням в пряму суму $\mathcal{X} = \bigoplus_{j=1}^d \mathcal{X}_j$, нехай $\mathcal{W}$ - банахів простір над $\mathbb{C}$, і нехай $\Gamma \subseteq \mathcal{X}$ - повна множина типу Рейнхардта навколо* 0. *Припустимо, що $\omega \colon \mathcal{X}^k \to \mathcal{W}$ - k-лінійне відображення, чиє обмеження на множину*

$$\mathrm{diag}[\mathcal{X}^k] = \{(\underbrace{W, \dots, W}_{k \text{ разів}}) \colon W = (W_1, \dots, W_d) \in \mathcal{X}\}$$

є однорідним у W_j степеня k_j (так що $k_1 + \dots + k_d = k$), і припустимо, що $X = (X_1, \dots, X_d) \in \mathcal{X}$. Тоді

$$\sup_{W \in \bigcup\limits_{t \in \overline{\mathbb{D}^d}} (t \circ X + \Gamma)} \|\omega(W, \dots, W)\| = \sup_{W \in X + \Gamma} \|\omega(W, \dots, W)\|,$$

де $\overline{\mathbb{D}^d} = \overline{\mathbb{D}}^d = \{t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{C}^d \colon |t_j| \le 1\}$ - замкнений одиничний полікруг, $X + \Gamma := \{X + Z \colon Z \in \Gamma\}$ - повна множина типу Рейнхардта навколо X і $\bigcup\limits_{t \in \overline{\mathbb{D}^d}} (t \circ X + \Gamma)$ - повна множина типу Рейнхардта навколо 0.

Доведення. Зафіксуємо довільне $Z^0 \in \Gamma$. Розглянемо функцію

$$\phi \colon \overline{\mathbb{D}^d} \to \mathcal{W}, \quad \phi \colon t \mapsto \omega(t \circ X + Z^0, \dots, t \circ X + Z^0).$$

Звісно, ϕ - многочлен від $t_1, \ldots, t_d$ і, отже, функція ϕ - аналітична. За принціпом максимума, існує t^0 з $|t_j^0| = 1$, $j = 1, \ldots, d$, таке, що $\|\phi(t^0)\| = \max_{t \in \overline{\mathbb{D}^d}} \|\phi(t)\|$. За одночасною однорідністю ω,

$$\|\omega(t^0 \circ X + Z^0, \ldots, t^0 \circ X + Z^0)\| = \|\omega(X + (t^0)^{-1} \circ Z^0, \ldots, X + (t^0)^{-1} \circ Z^0)\| \\ \leq \sup_{Z \in \Gamma} \|\omega(X + Z, \ldots, X + Z)\|,$$

де $(t^0)^{-1} = ((t_1^0)^{-1}, \ldots, (t_d^0)^{-1})$, оскільки Γ є повною множиною типа Рейнхардта навколо 0. Лема доведена. $\square$

Нас буде цікавити головним чином випадок, де $\mathcal{X} = (\mathbb{C}^{n \times n})^d$ і $\mathcal{X}_j = \mathbb{C}^{n \times n} e_j$. Н.к. множина $\Upsilon_{\mathrm{nc}} \subseteq (\mathbb{C}^d)_{\mathrm{nc}}$ називається *повною н.к. множиною типу Рейнхардта навколо* $Y \in (\mathbb{C}^{s \times s})^d$, якщо $(\Upsilon_{\mathrm{nc}})_{sm} \subseteq (\mathbb{C}^{sm \times sm})^d$ - повна множина типу Рейнхардта навколо $\bigoplus_{\alpha=1}^m Y$ для кожного $m \in \mathbb{N}$.

Для $Y = (Y_1, \ldots, Y_d) \in (\mathbb{C}^{s \times s})^d$ і набора $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_d)$ додатних поширених дійсних чисел (тобто $0 < r_j \leq \infty$, $j = 1, \ldots, d$), визначимо *н.к. полікруг з центром у* Y *мультірадіусу* $\mathbf{r}$:

$$(\mathbb{D}^d)_{\mathrm{nc}}(Y, \mathbf{r}) \\ = \Big\{ Z = (Z_1, \ldots, Z_d) \in \coprod_{m=1}^{\infty} \big(\mathbb{C}^{sm \times sm}\big)^d : \Big\| Z_j - \bigoplus_{\alpha=1}^m Y_j \Big\|_{sm} < r_j,\ j = 1, \ldots, d \Big\}.$$

Звісно, $(\mathbb{D}^d)_{\mathrm{nc}}(Y, \mathbf{r})$ - повна н.к. множина типу Рейнхардта навколо Y.

Для набору $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_d)$ невід'ємних дійсних чисел, ми визначаємо

$$\mu(\mathbf{r}) = \limsup_{\ell \to \infty} \sqrt[\ell]{\sum_{w \in \mathcal{G}_d :\ |w| = \ell} \mathbf{r}^w \|f_w\|_{\mathcal{L}^\ell_{\mathrm{cb}}}}. \tag{8.33}$$

Лема 8.17. *Функція $\mu(\cdot)$ є неперервною на наборах строго додатних дійсних чисел.*

Доведення. Нехай $\mathbf{r}^0 = (r_1^0, \ldots, r_d^0) \in \mathbb{R}_+^d$ з $r_j^0 > 0$ для всіх $j = 1, \ldots, d$. Нехай $\epsilon > 0$. Тоді для всіх наборів $\mathbf{r}$ додатних дійсних чисел, задовольняючих умову $1 - \epsilon < \frac{r_j^0}{r_j} < 1 + \epsilon$ для всіх $j = 1, \ldots, d$, ми маємо

$$(1 - \epsilon)\mu(\mathbf{r}) = \mu((1 - \epsilon)\mathbf{r}) \leq \mu(\mathbf{r}^0) \leq \mu((1 + \epsilon)\mathbf{r}) = (1 + \epsilon)\mu(\mathbf{r}),$$

оскільки функція $\mu(\cdot)$ - неспадна за кожним аргументом і однорідна степеня один. Отже, $\lim_{\mathbf{r} \to \mathbf{r}^0} \mu(\mathbf{r}) = \mu(\mathbf{r}^0)$, тобто $\mu(\cdot)$ - неперервна у $\mathbf{r}^0$. $\square$

Ми називаємо невід'ємні розширені дійсні числа $\rho_1, \ldots, \rho_d$ *асоційованими радіусами нормальної збіжності ряду*, (8.28) якщо $\mu(\mathbf{r}) \leq 1$ для кожного $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_d)$ з $r_j \leq \rho_j$, $j = 1, \ldots, d$, і для кожного набору $\mathbf{r}' = (r_1', \ldots, r_d')$ невід'ємних розширених дійсних чисел з $r_j' \geq \rho_j$ такого, що строга нерівність виконується

для принаймні одного j, існує набір $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$ невід'ємних дійсних чисел $r_j \le r'_j$, $j = 1, \dots, d$, таких, що $\mu(\mathbf{r}) > 1$.

Теорема 8.18. *1. Множина абсолютної збіжності ряду* (8.28),

$$\Upsilon_{\text{free,abs}} = \coprod_{m=1}^{\infty} \Big\{ X \in \big(\mathbb{C}^{sm\times sm}\big)^d : \sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d} \Big\| \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y \Big)^{\odot_s w} f_w \Big\|_{sm} < \infty \Big\} \subseteq \Upsilon_{\text{nc}} \subseteq (\mathbb{C}^d)_{\text{nc}}, \tag{8.34}$$

є повною н.к. множиною типу Рейнхардта навколо Y. Тут Υ_{nc} - множина збіжності (дивись теорему 8.2) відповідного ряду (8.1)*; дивись* (5.5) *і* (5.6).

2. Множина

$$\Upsilon_{\text{free,unif-normal}} = \Big\{ X \in \Upsilon_{\text{free,abs}} : \exists \delta > 0 \ \text{ таке, що } \sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d} \sup_{W\in B_{\text{nc}}(X,\delta)} \Big\| \Big(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_W} Y \Big)^{\odot_s w} f_w \Big\|_{sm_W} < \infty \Big\} \subseteq \Upsilon_{\text{nc,unif-normal}} \tag{8.35}$$

(дивись теорему 8.11 для означення множини $\Upsilon_{\text{nc,unif-normal}}$; тут m_W - розмір блочної матриці W з $s\times s$ блоками) - рівномірно-відкрита підмножина у $\Upsilon_{\text{free,abs}}$, яка є непорожньою тоді і тільки тоді, коли вона містить Y. У цьому випадку, $\Upsilon_{\text{free,unif-normal}}$ - повна н.к. множина типу Рейнхардта навколо Y (тобто $(\Upsilon_{\text{free,unif-normal}})_{sm}$ - повна множина типу Рейнхардта навколо $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y$ для кожного $m \in \mathbb{N}$).

3. Для кожних $m \in \mathbb{N}$ і $X \in (\Upsilon_{\text{free,unif-normal}})_{sm}$ існує рівномірно-відкрита повна множина типу Рейнхардта $\Upsilon_{\text{free},X}$ навколо $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y$, яка містить X і така, що

$$\sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d} \sup_{W\in\Upsilon_{\text{free},X}} \Big\| \Big(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_W} Y \Big)^{\odot_s w} f_w \Big\|_{sm_W} < \infty. \tag{8.36}$$

4. Нехай $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_d)$ - набір асоційованих радіусів нормальної збіжності ряду (8.28)*. Тоді ряд збігається абсолютно на кожному н.к. полікрузі $(\mathbb{D}^d)_{\text{nc}}(Y, \mathbf{r})$ з $r_j < \rho_j$ для всіх $j = 1, \dots, d$, більше того,*

$$\sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d} \sup_{W\in(\mathbb{D}^d)_{\text{nc}}(Y,\mathbf{r})} \Big\| \Big(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_W} Y \Big)^{\odot_s w} f_w \Big\|_{sm_W} < \infty. \tag{8.37}$$

Для кожного $\mathbf{r}$ з $r_j \ge \rho_j$ для всіх $j = 1, \dots, d$, такого, що строга нерівність виконується для принаймні одного j, (8.37) *не виконується. У випадку $s = 1$, існує $Z \in (\mathbb{D}^d)_{\text{nc}}(Y, \mathbf{r})$ таке, що ряд* (8.28) *не збігається абсолютно у Z. Множина $\Upsilon_{\text{free,unif-normal}}$ є непорожньою тоді і тільки тоді, коли існує набір строго додатних асоційованих радіусів нормальної збіжності ряду* (8.28).

Доведення теореми 8.18. 1. Твердження у цієї частині є очевидними.

2 & 3. Включення у (8.35) і факт, що $\Upsilon_{\text{free,unif}-\text{normal}}$ - рівномірно-відкрита множина у $\Upsilon_{\text{free,abs}}$, є очевидними.

Звісно, якщо $Y \in \Upsilon_{\text{free,unif}-\text{normal}}$, то н.к. множина $\Upsilon_{\text{free,unif}-\text{normal}}$ - непорожня. Навпаки, припустимо, що існують $m \in \mathbb{N}$ і $X \in (\Upsilon_{\text{free,unif}-\text{normal}})_{sm}$. Тоді існує $\delta > 0$ таке, що

$$\sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} \sup_{W \in B_{\text{nc}}(X,\delta)} \left\| \left(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_W} Y \right)^{\odot_s w} f_w \right\|_{sm_W} < \infty. \tag{8.38}$$

Існує н.к. полікруг $(\mathbb{D}^d)_{\text{nc}}(X, \boldsymbol{\rho})$, що міститься у $B_{\text{nc}}(X, \delta)$, наприклад, ми можемо покласти $\rho_j = \frac{\delta}{d\|e_j\|_1}$, $j = 1, \ldots, d$, і тоді для $W \in (\mathbb{D}^d)_{\text{nc}}(X, \boldsymbol{\rho})_{smk}$ ми маємо

$$\left\| W - \bigoplus_{\alpha=1}^{k} X \right\|_{smk} \leq \sum_{j=1}^{d} \left\| W_j - \bigoplus_{\alpha=1}^{k} X_j \right\|_{smk} \|e_j\|_1 < \delta,$$

тобто $W \in B_{\text{nc}}(X, \delta)_{smk}$. Оскільки $\Gamma = (\mathbb{D}^d)_{\text{nc}} \left(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y, \boldsymbol{\rho} \right)$ - повна н.к. множина типу Рейнхардта навколо $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y$, з леми 8.16 випливає, що нерівність у (8.38) виконується з супремами над $B_{\text{nc}}(X, \delta)$ заміненими на супремуми над

$$\Upsilon_{\text{free,X}} := \bigcup_{t \in \overline{\mathbb{D}^d}} (\mathbb{D}^d)_{\text{nc}} \left(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y + t \circ \left(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y \right), \boldsymbol{\rho} \right).$$

Це тягне за собою частину 3 теореми з $\Upsilon_{\text{free,X}}$ як вище. Зокрема, $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y \in \Upsilon_{\text{free,unif}-\text{normal}}$ і

$$\sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} \sup_{W \in B_{\text{nc}}(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y, \delta)} \left\| \left(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_W} Y \right)^{\odot_s w} f_w \right\|_{sm_W} < \infty.$$

Обираючи тільки $W \in B_{\text{nc}} \left(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y, \delta \right)$ вигляду $W = \bigoplus_{\alpha=1}^{m} V$, де $V \in B_{\text{nc}}(Y, \delta)$, ми отримаємо, що

$$\sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} \sup_{V \in B_{\text{nc}}(Y,\delta)} \left\| \left(V - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_V} Y \right)^{\odot_s w} f_w \right\|_{sm_V} < \infty,$$

тобто $Y \in \Upsilon_{\text{free,unif}-\text{normal}}$.

Оскільки $Y \in \Upsilon_{\text{free,unif}-\text{normal}}$ і об'єднання повних множин типу Рейнхардта навколо $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y$ для всіх $m \in \mathbb{N}$ є повною множиною типу Рейнхардта навколо Y, множина

$$\Upsilon_{\text{free,unif}-\text{normal}} = \bigcup_{X \in \Upsilon_{\text{free,unif}-\text{normal}}} \Upsilon_{\text{free,X}}$$

є повною множиною типу Рейнхардта навколо Y. Частина 2 доведена.

4. Нехай $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_d)$ - набір асоційованих радіусів збіжності ряду (8.28), і нехай $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$ - набір додатних дійсних чисел таких, що $r_j < \rho_j$. Тоді існує $\epsilon > 0$ достатньо мале, так що $\widetilde{r}_j = r_j(1+\epsilon) < \rho_j$, $j = 1, \dots, d$. Тоді для $\widetilde{\mathbf{r}} = (\widetilde{r}_1, \dots, \widetilde{r}_d)$ ми маємо $\mu(\widetilde{\mathbf{r}}) \leq 1$. Оскільки функція $\mu(\cdot)$ є однорідною степеня 1, ми маємо

$$\mu(\mathbf{r}) = \frac{\mu(\widetilde{\mathbf{r}})}{1+\epsilon} \leq \frac{1}{1+\epsilon}.$$

Отже, існує $\ell_0 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\sqrt[\ell]{\sum_{|w|=\ell} \mathbf{r}^w \|f_w\|_{\mathcal{L}^\ell_{\mathrm{cb}}}} < \frac{1+0.5\epsilon}{1+\epsilon} < 1$$

для всіх $\ell > \ell_0$. Це тягне за собою, що ряд (8.28) збігається абсолютно на н.к. полікрузі $(\mathbb{D}^d)_{\mathrm{nc}}(Y, \mathbf{r})$, більше того,

$$\sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} \sup_{W \in (\mathbb{D}^d)_{\mathrm{nc}}(Y,\mathbf{r})} \left\| \left(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_W} Y \right)^{\odot_s w} f_w \right\|_{sm_W} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{|w|=\ell} \mathbf{r}^w \|f_w\|_{\mathcal{L}^\ell_{\mathrm{cb}}}$$
$$< \sum_{\ell=0}^{\ell_0} \sum_{|w|=\ell} \mathbf{r}^w \|f_w\|_{\mathcal{L}^\ell_{\mathrm{cb}}} + \sum_{\ell=\ell_0+1}^{\infty} \left(\frac{1+0.5\epsilon}{1+\epsilon} \right)^\ell < \infty.$$

Зараз припустимо, що $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$ - набір додатних розширених дійсних чисел з $r_j \geq \rho_j$ для всіх j, і $r_i > \rho_i$ для деякого i. Тоді існує набір $\widetilde{\mathbf{r}} = (\widetilde{r}_1, \dots, \widetilde{r}_d)$ додатних дійсних чисел з $\widetilde{r}_j < r_j$ таких, що $\mu(\widetilde{\mathbf{r}}) > 1$, і існує $\epsilon > 0$ таке, що $\mu(\widetilde{\mathbf{r}}) > 1 + \epsilon$. Отже,

$$\sum_{|w|=\ell} \widetilde{\mathbf{r}}^w \|f_w\|_{\mathcal{L}^\ell_{\mathrm{cb}}} > (1+0.5\epsilon)^\ell > 1 + 0.5\ell\epsilon \tag{8.39}$$

для нескінченно багатьох $\ell \in \mathbb{N}$. Нехай $S \subseteq \mathbb{N}$ - (нескінченна) множина всіх таких ℓ. Для будь-якого $\ell \in S$ і $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ з $|w| = \ell$, використовуючи аргумент подібний до того, що в пропозиції 7.49, ми отримаємо, що

$$\begin{aligned} \|f_w\|_{\mathcal{L}^\ell_{\mathrm{cb}}} = \sup\{ &\|W^{\odot_s w} f_w\|_{sm} : \\ &m \in \mathbb{N},\ W \in (\mathbb{C}^{sm \times sm})^d,\ \|W_j\|_{sm} \leq 1,\ j = 1, \dots, d\}. \end{aligned} \tag{8.40}$$

Отже, існують $m_w \in \mathbb{N}$ і $W_w \in (\mathbb{D}^d)_{\mathrm{nc}}(0_{s\times s}, \widetilde{\mathbf{r}})_{sm_w}$ такі, що

$$\|W_w^{\odot_s w} f_w\|_{sm_w} > \widetilde{\mathbf{r}}^w \|f_w\|_{\mathcal{L}^\ell_{\mathrm{cb}}} - \frac{0.5\ell\epsilon}{d^\ell}.$$

Покладемо $m(\ell) = \sum_{|w|=\ell} m_w$ і $W(\ell) = \bigoplus_{|w|=\ell} \left(W_w + \bigoplus_{\alpha=1}^{m_w} Y \right)$. Тоді

$$W(\ell) \in (\mathbb{D}^d)_{\mathrm{nc}}(Y, \widetilde{\mathbf{r}})_{sm(\ell)}$$

і

$$\sum_{|w|=\ell}\Big\|\Big(W(\ell)-\bigoplus_{\alpha=1}^{m(\ell)}Y\Big)^{\odot_s w}f_w\|_{sm(\ell)}>\sum_{|w|=\ell}\widetilde{\mathbf{r}}^w\|f_w\|_{\mathcal{L}^\ell_{\rm cb}}-0.5\ell\epsilon>1.$$

Таким чином, для $\widetilde{\mathbf{r}}$, і значить, для $\mathbf{r}$, (8.37) не виконується.

Зараз нехай $s=1$. Обираючи $\widetilde{\mathbf{r}}\in(\mathbb{D}^d)_{\rm nc}(0_{1\times 1},\mathbf{r})_1$ як у попередньому абзаці, ми отримаємо з (8.29), (8.30) і (8.39), що

$$\sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d}\|\widetilde{\mathbf{r}}^w f_w\|_1=\sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d}\widetilde{\mathbf{r}}^w\|f_w\|_{\mathcal{L}^{|w|}_{\rm cb}}=\infty,$$

тобто ряд (8.28) не збігається абсолютно у $Z=\widetilde{\mathbf{r}}+Y$.

Для доведення останнього твердження, припустимо, що $\boldsymbol{\rho}=(\rho_1,\dots,\rho_d)$ - набір строго додатних асоційованих радіусів нормальної збіжності ряду (8.28). Ми маємо $B_{\rm nc}(Y,\delta)\subseteq(\mathbb{D}^d)_{\rm nc}(Y,(\delta,\dots,\delta))\subseteq(\mathbb{D}^d)_{\rm nc}(Y,\boldsymbol{\rho})$ для будь-якого додатного дійсного $\delta<\min\limits_{1\le j\le d}\rho_j$, де для першого включення ми використали факт, що блочні проєкції π^s_{ij} є цілком стискаючими. За (вже доведеним) першим твердженням частини 4, (8.37) виконується з $\mathbf{r}=(\delta,\dots,\delta)$. Тоді

$$\sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d}\sup_{W\in B_{\rm nc}(Y,\delta)}\Big\|\Big(W-\bigoplus_{\alpha=1}^{m_W}Y\Big)^{\odot_s w}f_w\Big\|_{sm_W}<\infty, \tag{8.41}$$

тобто $Y\in\Upsilon_{\rm free,unif-normal}$. Навпаки, якщо $\Upsilon_{\rm free,unif-normal}$ непорожнє, то за частиною 2 теореми ми маємо, що $Y\in\Upsilon_{\rm free,unif-normal}$. Останнє значить, що (8.41) виконується для деякого $\delta>0$. Тоді існує полікруг $(\mathbb{D}^d)_{\rm nc}(Y,\mathbf{r}^0)$, що міститься у $B_{\rm nc}(Y,\delta)$, скажімо для $r^0_j=\frac{\delta}{d\|e_j\|_1}$, $j=1,\dots,d$, так, що (8.37) виконується з $\mathbf{r}^0$ замість $\mathbf{r}$. Звісно, у цьому випадку $\mu(\mathbf{r}^0)\le 1$. Нехай

$$\rho_1=\sup\{r_1\ge r^0_1\colon \mu(r_1,r^0_2,\dots,r^0_d)\le 1\}.$$

Тоді для будь-якого додатного дійсного числа $r_1\le\rho_1$ ми маємо $\mu(r_1,r^0_2,\dots,r^0_d)\le 1$ (у випадку $\rho_1<\infty$ це є наслідком леми 8.17). Нехай

$$\rho_2=\sup\{r_2\ge r^0_2\colon \mu(r_1,r_2,r^0_3,\dots,r^0_d)\le 1\ \text{ для кожного } r_1<\rho_1\}.$$

Тоді для будь-яких додатних дійсних чисел $r_1\le\rho_1$ і $r_2\le\rho_2$ ми маємо

$$\mu(r_1,r_2,r^0_3,\dots,r^0_d)\le 1$$

(тут ми використовуємо лему 8.17 у випадку $\rho_1<\infty$ і/або $\rho_2<\infty$). Продовжуючи цю конструкцію очевидним шляхом, ми визначаємо $\rho_3,\dots,\rho_{d-1}$, і нарешті,

$$\rho_d=\sup\{r_d\ge r^0_d\colon \mu(r_1,\dots,r_{d-1},r_d)\le 1\ \text{ для кожних } r_1<\rho_1,\dots,r_{d-1}<\rho_{d-1}\}.$$

Тоді для будь-якого набору $\mathbf{r}=(r_1,\dots,r_d)$ додатних дійсних чисел $r_j\le\rho_j$ ми маємо $\mu(\mathbf{r})\le 1$ (ми використовуємо лему 8.17, коли ρ_j є скінченними). Ясно, що $\boldsymbol{\rho}=(\rho_1,\dots,\rho_d)$ - це набір строго додатних асоційованих радіусів нормальної збіжності ряду (8.28). $\square$

Зауваження 8.19. З однорідності і монотонності $\mu(\cdot)$ випливає, що ми маємо наступну трихотомію:

(1) $\mu(\mathbf{r}) = \infty$ для деякого, і значить для всіх, наборів $\mathbf{r}$ строго додатних дійсних чисел; таким чином, не існує строго позитивних асоційованих радіусів нормальної збіжності ряду (8.28).

(2) $0 < \mu(\mathbf{r}) < \infty$ для деякого, і значить для всіх, наборів $\mathbf{r}$ строго додатних дійсних чисел; аргумент у останньому абзаці доведення теореми 8.18 показує, що існує набір строго додатних асоційованих радіусів нормальної збіжності (8.28), не всі з яких рівні ∞.

(3) $\mu(\mathbf{r}) = 0$ для деякого, і значить для всіх, наборів $\mathbf{r}$ строго додатних дійсних чисел; таким чином, тільки $(\infty, \dots, \infty)$ є набором асоційованих радіусів нормальної збіжності ряду (8.28).

Зауваження 8.20. Набір строго позитивних асоційованих радіусів нормальної збіжності ряду (8.28) існує тоді і тільки тоді, коли $\rho_{\mathrm{cb}} > 0$ – дивись (8.19). Один напрямок є очевидним, оскільки $\Upsilon_{\mathrm{free,unif-normal}} \subseteq \Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}}$. Другий напрямок можна отримати застосовуючи теорему 7.29 (або наслідок 7.31) до н.к. функції f, яка є рівномірно аналітичною на $\Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}}$. Твердження також можна отримати прямими оцінками. Ми отримаємо з (8.31), (8.32), (8.33) і (8.19), що

$$\mu(\mathbf{r}) \leq (\mathbf{r} \cdot \mathbf{C}_2)\mu_{\mathrm{cb}} = \Big(\sum_{j=1}^{d} r_j \|e_j\|_1\Big)\mu_{\mathrm{cb}}, \tag{8.42}$$

$$\mu_{\mathrm{cb}} \leq \mu(\mathbf{C}_1). \tag{8.43}$$

Ці нерівності тягнуть за собою, що $\mu_{\mathrm{cb}} < \infty$ тоді і тільки тоді, коли $\mu(\mathbf{r}) < \infty$ для деякого набору $\mathbf{r}$ строго додатних дійсних чисел. Звісно, $\mu_{\mathrm{cb}} < \infty$ еквівалентне до $\rho_{\mathrm{cb}} > 0$, і висновок випливає з зауваження 8.19.

Для степеневого ряду від кількох комплексних змінних класична лема Абеля стверджує, що якщо члени ряду у точці $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$ обмежені, то ряд збігається абсолютно і локально нормально в полікрузі мультірадіусу $(|\mu_1|, \dots, |\mu_d|)$ – дивись [**140**, с. 19]. Ми встановлюємо н.к. аналог цього твердження.

Для $Y = (Y_1, \dots, Y_d) \in (\mathbb{C}^{s\times s})^d$ і набору $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$ додатних дійсних чисел, визначимо *н.к. діамант з центром у Y і мультірадіусом* $\mathbf{r}$,

$$(\diamondsuit^d)_{\mathrm{nc}}(Y, \mathbf{r}) := \coprod_{m=1}^{\infty} \Big\{ Z = (Z_1, \dots, Z_d) \in \big(\mathbb{C}^{sm\times sm}\big)^d : \sum_{j=1}^{d} \frac{\|Z_j - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y_j\|}{r_j} < 1 \Big\}.$$

Зауважимо, що $\diamondsuit_{\mathrm{nc}}(Y, r) = (\diamondsuit^d)_{\mathrm{nc}}(Y, \mathbf{r})$ з $\mathbf{r} = \Big(\frac{r}{\|e_1\|_1}, \dots, \frac{r}{\|e_d\|_1}\Big)$ – дивись (7.38).

Теорема 8.21. *1. Припустимо, що існує $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{C}^d$ з усіма $\mu_j \neq 0$ і $C > 0$ такими, що $|\mu^w| \|f_w\|_{\mathcal{L}_{\rm cb}^{|w|}} \leq C$ для кожного $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ (у випадку $s = 1$ це означає, що члени ряду (8.28) у $Y + \mu$ обмежені). Тоді ряд (8.28) збігається абсолютно на кожному н.к. діаманті $(\diamondsuit^d)_{\rm nc}(Y, \mathbf{r})$ з $r_j < |\mu_j|$ для всіх $j = 1, \dots, d$. Більше того,*

$$\sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} \sup_{W \in (\diamondsuit^d)_{\rm nc}(Y, \mathbf{r})} \left\| \left(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_W} Y \right)^{\odot_s w} f_w \right\|_{sm_W} < \infty; \tag{8.44}$$

тут m_W - розмір блочної матриці W з $s \times s$ блоками.

2. Припустимо, що існують $m \in \mathbb{N}$ і $X = (X_1, \dots, X_d) \in (\mathbb{C}^{sm \times sm})^d$ такі, що члени ріду (8.28) обмежені на деякому рівномірно-відкритому околі X, тобто існують $\delta > 0$ і $C > 0$ такі, що $\|(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_W} Y)^{\odot_s w} f_w\|_{sm_W} \leq C$ для кожних $W \in B_{\rm nc}(X, \delta)$ і $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$. Тоді множина $\Upsilon_{\rm free, unif-normal}$ є непорожньою.

Доведення. 1. Ми можемо припустити, що $0 < r_j < (1 - \epsilon)|\mu_j|$ для деякого $\epsilon > 0$ і для всіх $j = 1, \dots, d$. Тоді

$$\begin{aligned}
\sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} \sup_{W \in (\diamondsuit^d)_{\rm nc}(0_{s \times s}, \mathbf{r})} \|W^{\odot_s w} f_w\| &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{|w|=\ell} \sup_{W \in (\diamondsuit^d)_{\rm nc}(0_{s \times s}, \mathbf{r})} \|W^{\odot_s w} f_w\| \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{|w|=\ell} \sup_{W \in (\diamondsuit^d)_{\rm nc}(0_{s \times s}, \mathbf{r})} \left(\frac{\|W_1\|}{r_1}, \dots, \frac{\|W_d\|}{r_d} \right)^w \mathbf{r}^w \|f_w\|_{\mathcal{L}_{\rm cb}^{\ell}} \\
&< \sum_{\ell=0}^{\infty} (1 - \epsilon)^{\ell} \sum_{|w|=\ell} \sup_{W \in (\diamondsuit^d)_{\rm nc}(0_{s \times s}, \mathbf{r})} \left(\frac{\|W_1\|}{r_1}, \dots, \frac{\|W_d\|}{r_d} \right)^w |\mu^w| \|f_w\|_{\mathcal{L}_{\rm cb}^{\ell}} \\
&\leq C \sum_{\ell=0}^{\infty} (1 - \epsilon)^{\ell} \sum_{|w|=\ell} \sup_{W \in (\diamondsuit^d)_{\rm nc}(0_{s \times s}, \mathbf{r})} \left(\frac{\|W_1\|}{r_1}, \dots, \frac{\|W_d\|}{r_d} \right)^w .
\end{aligned}$$

Для будь-якого фіксованого ℓ і будь-якого $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ зб $|w| = \ell$ існує $W_w \in (\diamondsuit^d)_{\rm nc}(0_{s \times s}, \mathbf{r})$ таке, що

$$\sup_{W \in (\diamondsuit^d)_{\rm nc}(0_{s \times s}, \mathbf{r})} \left(\frac{\|W_1\|}{r_1}, \dots, \frac{\|W_d\|}{r_d} \right)^w \leq (1 + \epsilon)^{\ell} \left(\frac{\|(W_w)_1\|}{r_1}, \dots, \frac{\|(W_w)_d\|}{r_d} \right)^w .$$

Позначимо $W(\ell) = \bigoplus_{|w|=\ell} W_w \in (\diamondsuit^d)_{\rm nc}(0_{s \times s}, \mathbf{r})$. Звісно,

$$\left(\frac{\|(W_w)_1\|}{r_1}, \dots, \frac{\|(W_w)_d\|}{r_d} \right)^w \leq \left(\frac{\|W(\ell)_1\|}{r_1}, \dots, \frac{\|W(\ell)_d\|}{r_d} \right)^w .$$

Отже,

$$\sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} \sup_{W \in (\diamondsuit^d)_{\rm nc}(0_{s \times s}, \mathbf{r})} \|W^{\odot_s w} f_w\| \leq C \sum_{\ell=0}^{\infty} (1 - \epsilon^2)^{\ell} \sum_{|w|=\ell} \left(\frac{\|W(\ell)_1\|}{r_1}, \dots, \frac{\|W(\ell)_d\|}{r_d} \right)^w$$

$$= \quad C\sum_{\ell=0}^{\infty}(1 \ - \ \epsilon^2)^{\ell}\Big(\sum_{j=1}^{d}\frac{\|W(\ell)_j\|}{r_j}\Big)^{\ell} \quad < \quad C\sum_{\ell=0}^{\infty}(1 \ - \ \epsilon^2)^{\ell} \quad = \quad \frac{C}{\epsilon^2} \quad < \quad \infty,$$

тобто (8.44) виконується. У випадку $s = 1$ ми маємо за (8.29) і (8.30), що

$$\|f_w(\mu_1, \ldots, \mu_d)\|_1 = |\mu^w|\|f_w\|_{\mathcal{L}_{\rm cb}^{|w|}} \leq C, \quad w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d.$$

2. За лемою 8.10, нерівність

$$\sup_{W\in B_{\rm nc}(X,\delta)}\Big\|\Big(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_W} Y\Big)^{\odot_s w} f_w\Big\|_{sm_W} \leq C, \quad w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d,$$

виконується з супремумами над $B_{\rm nc}(X, \delta)$ заміненими на супремуми над

$$\bigcup_{\zeta\in\overline{\mathbb{D}}} B_{\rm nc}\left(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y + \zeta\Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big), \delta\right).$$

Зокрема, взявши $\zeta = 0$, ми отримаємо, що

$$\sup_{W\in B_{\rm nc}(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y,\delta)}\Big\|\Big(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_W} Y\Big)^{\odot_s w} f_w\Big\|_{sm_W} \leq C, \quad w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d.$$

Беручи тільки $W \in B_{\rm nc}\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y, \delta\Big)$ вигляду $W = \bigoplus_{\alpha=1}^{m} V$, де $V \in B_{\rm nc}(Y, \delta)$, ми отримаємо, що

$$\sup_{V\in B_{\rm nc}(Y,\delta)}\Big\|\Big(V - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_V}\Big)^{\odot_s w} f_w\Big\|_{sm_V} \leq C, \quad w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d.$$

Як у доведенні теореми 8.18, ми можемо знайти н.к. полікруг $(\mathbb{D}^d)_{\rm nc}(Y, \boldsymbol{\rho})$, що міститься у $B_{\rm nc}(Y, \delta)$, з $\rho_j = \frac{\delta}{d\|e_j\|_1}$, $j = 1, \ldots, d$. Тоді

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}^w\|f_w\|_{\mathcal{L}_{\rm cb}^{|w|}} &= \sup_{W\in(\mathbb{D}^d)_{\rm nc}(Y,\boldsymbol{\rho})}\Big(\Big\|V_1 - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_V} Y_1\Big\|_{sm_V}, \ldots, \Big\|V_d - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_V} Y_d\Big\|_{sm_V}\Big)^w\|f_w\|_{\mathcal{L}_{\rm cb}^{|w|}} \\ &= \sup_{V\in(\mathbb{D}^d)_{\rm nc}(Y,\boldsymbol{\rho})}\Big\|\Big(V - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_V} Y\Big)^{\odot_s w} f_w\|_{sm_V} \leq C, \quad w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d.\end{aligned}$$

За частиною 1 теореми для $\mu = \boldsymbol{\rho}$ і кожного $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_d)$ з $0 < r_j < \mu_j$, $j = 1, \ldots, d$, (8.44) виконується. Звісно, н.к. діамант $(\diamondsuit^d)_{\rm nc}(Y, \mathbf{r})$ є відкритим у рівномірно-відкритій топології на $(\mathbb{C}^d)_{\rm nc}$. Зокрема, Y - внутрішня точка. Справді, $B_{\rm nc}(Y, \frac{1}{d}\min_{1\leq j\leq d} r_j) \subseteq (\diamondsuit^d)_{\rm nc}(Y, \mathbf{r})$. Отже, ми отримаємо, що

$$\sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d}\sup_{W\in B_{\rm nc}(Y,\frac{1}{d}\min_{1\leq j\leq d} r_j)}\Big\|\Big(W - \bigoplus_{\alpha=1}^{m_W} Y\Big)^{\odot_s w} f_w\Big\|_{sm_W} < \infty,$$

тобто $Y \in \Upsilon_{\rm free,unif-normal}$. $\square$

Зауваження 8.22. З теореми 8.21, частина 1, випливає, що ми можемо сформулювати аналог теореми 8.18, частина 4, для н.к. діамантів замість полікругів, замінюючи (8.33) на

$$\mu_\diamondsuit(\mathbf{r}) = \limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\max_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d\colon |w|=\ell} \mathbf{r}^w \|f_w\|_{\mathcal{L}^\ell_{\mathrm{cb}}}} \tag{8.45}$$

і визначаючи відповідні асоційовані радіуси нормальної збіжності.

Для степеневих рядів у кількох комплексних змінних, об'єднання полікругів (абсолютної) збіжності дорівнює внутрішності множини збіжності. З іншого боку, внутрішність множини збіжності степеневого ряду у кількох комплексних змінних може бути строго включеною у множину збіжності відповідного ряду однорідних многочленів – розглянемо, наприклад, степеневий ряд $\sum_{n=0}^\infty (z_1+z_2)^n$.

У н.к. налаштуванні ми маємо, для ряду (8.28), наступну послідовність включень:

$$\bigcup_{\boldsymbol{\rho}} (\mathbb{D}^d)_{\mathrm{nc}}(0_{s\times s}, \boldsymbol{\rho}) \subseteq \Upsilon_{\mathrm{free,unif-normal}} \subseteq \operatorname{Int}\Upsilon_{\mathrm{free,abs}} \subseteq \operatorname{Int}\Upsilon_{\mathrm{free},\prec} \subseteq \Upsilon_{\mathrm{nc,unif}}. \tag{8.46}$$

Тут об'єднання взято над усіма наборами $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_d)$ строго додатних асоційованих радіусів нормальної збіжності, Int позначає внутрішність у рівномірно-відкритій топології, $\Upsilon_{\mathrm{free},\prec}$ - множина збіжності ряду (8.28) відносно деякого порядку $\prec$ на вільному моноїді $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$, який є сумісним з довжиною слова (тобто $w \prec w' \Longrightarrow |w| < |w'|$), і $\Upsilon_{\mathrm{nc,unif}} = \operatorname{Int}\Upsilon_{\mathrm{nc}}$ (дивись теорему 8.11).

Ми будемо обчислювати різні множини, що виникають у (8.46) для кількох прикладів. Нам потрібна наступна лема (де $r_{\mathrm{spec}}(Z)$ позначає спектральний радіус матриці Z).

Лема 8.23.

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\sup_{W\in B_{\mathrm{nc}}(Z,\delta)} \|W^\ell\|} = \lim_{\delta\to 0}\liminf_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\sup_{W\in B_{\mathrm{nc}}(Z,\delta)} \|W^\ell\|} = r_{\mathrm{spec}}(Z).$$

Доведення. Припустимо, що $Z \in \mathbb{C}^{s\times s}$, і нехай $\epsilon > 0$. Використовуючи нижню півнеперервність спектрального радіусу для елементів $\mathcal{L}(\ell^2)$ [**88**, с. 167], ми отримаємо, що існує $\delta > 0$ таке, що

$$r_{\mathrm{spec}}(X) < r_{\mathrm{spec}}\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^\infty Z\Big) + \epsilon = r_{\mathrm{spec}}(Z) + \epsilon$$

для кожного $X \in \mathcal{L}(\ell^2)$ з $\|X - \bigoplus_{\alpha=1}^\infty Z\| < \delta$. Тоді $r_{\mathrm{spec}}(W) < r_{\mathrm{spec}}(Z) + \epsilon$ для кожного $W \in B_{\mathrm{nc}}(Z,\delta)$ (беручи $X = \bigoplus_{\beta=1}^\infty W$). Покладемо

$$M_\ell := \sup_{W\in B_{\mathrm{nc}}(Z,\delta)} \|W^\ell\|, \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

Тоді для будь-якого фіксованого ℓ ми маємо $M_\ell \leq (\|Z\| + \delta)^\ell < \infty$. Далі, для кожного фіксованого ℓ ми можемо знайти $W_\ell \in B_{\mathrm{nc}}(Z, \delta)$ таке, що $\|W_\ell^\ell\| \geq \frac{M_\ell}{2}$. Покладемо $X := \bigoplus_{\ell=1}^\infty W_\ell \in \mathcal{L}(\ell^2)$. Оскільки $r_{\mathrm{spec}}(X) = \sup_\ell r_{\mathrm{spec}}(W_\ell)$ і $r_{\mathrm{spec}}(W_\ell) < r_{\mathrm{spec}}(Z) + \epsilon$, ми маємо

$$\begin{aligned} r_{\mathrm{spec}}(Z) + \epsilon \geq r_{\mathrm{spec}}(X) &= \lim_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\|X^\ell\|} \geq \limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\|W_\ell^\ell\|} \geq \limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\frac{M_\ell}{2}} \\ &= \limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{M_\ell} = \limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\sup_{W\in B_{\mathrm{nc}}(Z,\delta)} \|W^\ell\|} \geq \lim_{\delta\to 0} \liminf_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\sup_{W\in B_{\mathrm{nc}}(Z,\delta)} \|W^\ell\|} \\ &\geq \lim_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\|Z^\ell\|} = r_{\mathrm{spec}}(Z). \end{aligned}$$

Ми робимо висновок, що

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\sup_{W\in B_{\mathrm{nc}}(Z,\delta)} \|W^\ell\|} = \lim_{\delta\to 0} \liminf_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\sup_{W\in B_{\mathrm{nc}}(Z,\delta)} \|W^\ell\|} = r_{\mathrm{spec}}(Z),$$

як потрібно. □

Наступні два приклади показують, що перше включення у (8.46) може бути строгим.

Приклад 8.24. Нехай $d = 1$ і $s = 1$, тобто (8.1) і (8.28) обидва зводяться до

$$\sum_{\ell=0}^\infty Z^\ell f_\ell, \tag{8.47}$$

де $Z \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $m = 1, 2, \ldots$, для даної послідовності векторів $f_\ell \in \mathcal{W}$. Нехай $\boldsymbol{\rho} = \left(\limsup_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\|f_\ell\|}\right)^{-1}$ - (єдиний асоційований) радіус нормальної збіжності; звісно, $\boldsymbol{\rho} = \rho_{\mathrm{cb}} = \rho_m$ для всіх m. Тоді

$$\rho(Z) = \frac{\boldsymbol{\rho}}{r_{\mathrm{spec}}(Z)},$$

з домовленістю, що цей дріб дорівнює ∞, коли знаменник є нулем, незалежно від чисельнику. З леми 8.23 випливає, що якщо $\boldsymbol{\rho}$ і $r_{\mathrm{spec}}(Z)$ не є обидва нулем, то ми маємо також

$$\rho_{\mathrm{unif-normal}}(Z) = \frac{\boldsymbol{\rho}}{r_{\mathrm{spec}}(Z)}.$$

Справді,

$$\rho(Z) \geq \rho_{\mathrm{unif-normal}}(Z) = \frac{1}{\lim\limits_{\delta\to 0}\limsup\limits_{\ell\to\infty}\sqrt[\ell]{\sup\limits_{W\in B_{\mathrm{nc}}(Z,\delta)}\|W^\ell f_\ell\|}}$$
$$= \frac{1}{\lim\limits_{\delta\to 0}\limsup\limits_{\ell\to\infty}\sqrt[\ell]{\sup\limits_{W\in B_{\mathrm{nc}}(Z,\delta)}\|W^\ell\|\|f_\ell\|}}$$
$$\geq \frac{1}{\lim\limits_{\delta\to 0}\limsup\limits_{\ell\to\infty}\sqrt[\ell]{\sup\limits_{W\in B_{\mathrm{nc}}(Z,\delta)}\|W^\ell\|}\limsup\limits_{\ell\to\infty}\sqrt[\ell]{\|f_\ell\|}} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{r_{\mathrm{spec}}(Z)} = \rho(Z),$$

що тягне за собою потрібну нерівність. Тоді

$$\Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}} = \Upsilon_{\mathrm{nc,unif}} = \Upsilon_{\mathrm{nc,norm}} = \{Z \in \mathbb{C}_{\mathrm{nc}} \colon r_{\mathrm{spec}}(Z) < \boldsymbol{\rho}\}.$$

Звісно, $\Upsilon_{\mathrm{free,unif-normal}} = \Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}}$; за винятком випадків $\boldsymbol{\rho} = 0$ і $\boldsymbol{\rho} = \infty$ це є набагато більшою множиною, ніж

$$(\mathbb{D}^1)_{\mathrm{nc}}(0_{1\times 1}, \boldsymbol{\rho}) = \{Z \in \mathbb{C}_{\mathrm{nc}} \colon \|Z\| < \boldsymbol{\rho}\}.$$

Приклад 8.25. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(Z_1Z_2)^n.$$

Ми маємо

$$\mu(\mathbf{r}) = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[2n]{r_1^n r_2^n} = \sqrt{r_1 r_2}.$$

Тоді пара $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2)$ строго додатних розширених дійсних чисел є парою асоційованих радіусів нормальної збіжності ряду тоді і тільки тоді, коли $\rho_1\rho_2 = 1$, і

$$\bigcup_{\boldsymbol{\rho}}(\mathbb{D}^2)_{\mathrm{nc}}(0_{1\times 1}, \boldsymbol{\rho}) = \left\{(Z_1, Z_2) \in (\mathbb{C}^2)_{\mathrm{nc}} \colon \|Z_1Z_2\| < 1\right\}.$$

Ясно, що множина збіжності цього ряду є

$$\Upsilon_{\mathrm{nc}} = \{(Z_1, Z_2) \in (\mathbb{C}^2)_{\mathrm{nc}} \colon r_{\mathrm{spec}}(Z_1Z_2) < 1\},$$

і $\rho(Z) = (r_{\mathrm{spec}}(Z_1Z_2))^{-1}$. З леми 8.23 випливає, що

$$\rho(Z) \geq \rho_{\mathrm{unif-normal}}(Z) = \left(\lim_{\delta\to 0}\limsup_{\ell\to\infty}\sqrt[\ell]{\sup_{(W_1,W_2)\in B_{\mathrm{nc}}(Z,\delta)}\|(W_1W_2)^\ell\|}\right)^{-1}$$
$$\geq \left(\lim_{\delta\to 0}\limsup_{\ell\to\infty}\sqrt[\ell]{\sup_{(W)\in B_{\mathrm{nc}}(Z_1Z_2,\delta)}\|W^\ell\|}\right)^{-1} = (r_{\mathrm{spec}}(Z_1Z_2))^{-1} = \rho(Z),$$

і, отже,

$$\Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}} = \Upsilon_{\mathrm{nc,unif}} = \Upsilon_{\mathrm{nc,norm}} = \{(Z_1, Z_2) \in (\mathbb{C}^2)_{\mathrm{nc}} \colon r_{\mathrm{spec}}(Z_1 Z_2) < 1\}.$$

Оскільки кожний однорідний многочлен у ряді має тільки один член, збіжність цього ряду уздовж вільного моноїду є такою самою, як і його збіжність як ряду однорідних многочленів, так що $\Upsilon_{\mathrm{free,unif-normal}} = \Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}}$. Подібно до попереднього прикладу, друга множина у (8.46) є набагато більшою, ніж перша.

Наступних два приклади показують, що останнє включення у (8.46) може бути строгим. Перший приклад також показує, що на відміну від класичної леми Абеля, збіжність ряду (8.28) у точці $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{C}^d$ не тягне за собою збіжність на н.к. полікрузі мультірадіусу $(|\mu_1|, \dots, |\mu_d|)$. Другий приклад також показує, що ТТ ряд рівномірно аналітичної н.к. функції уздовж $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ не обов'язково збігається на н.к. полікрузі, коли н.к. функція є там обмеженою – порівняй з теоремою 7.29 і наслідком 7.31.

Приклад 8.26. Нехай $d > 1$; розглянемо "н.к. геометричний ряд"

$$\sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} Z^w, \tag{8.48}$$

де $Z \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $m = 1, 2, \dots$ (тобто $s = 1$, $\mathcal{W} = \mathbb{C}$ і $f_w = 1$ для всіх $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$). Зауважимо, що

$$\sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d,\, |w| = \ell} Z^w = (Z_1 + \cdots + Z_d)^\ell,$$

отже

$$\Upsilon_{\mathrm{nc}} = \left\{(Z_1, \dots, Z_d) \in (\mathbb{C}^d)_{\mathrm{nc}} \colon r_{\mathrm{spec}}(Z_1 + \cdots + Z_d) < 1\right\}$$

і $\rho(Z) = (r_{\mathrm{spec}}(Z_1 + \cdots + Z_d))^{-1}$. Подібно до прикладу 8.25, з леми 8.23 випливає, що

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}} = \Upsilon_{\mathrm{nc,unif}} &= \Upsilon_{\mathrm{nc,norm}} \\ &= \left\{(Z_1, \dots, Z_d) \in (\mathbb{C}^d)_{\mathrm{nc}} \colon r_{\mathrm{spec}}(Z_1 + \cdots + Z_d) < 1\right\}. \end{aligned} \tag{8.49}$$

Зауважимо, що множина $\Upsilon_{\mathrm{free,prec}}$ строго міститься у (8.49) для будь-якого порядку $\prec$ на $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$, який є сумісним з довжиною слова – тому, що $r_{\mathrm{spec}}(Z^w) < 1$ для кожного $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ є необхідною умовою для збіжності ряду (8.48), і є багато наборів матриць в (8.49), що не задовольняють цю умову.

Далі, для набору $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$ невід'ємних дійсних чисел, $\mu(\mathbf{r}) = r_1 + \cdots + r_d$. Отже, набір $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_d)$ строго додатних розширених дійсних чисел є набором асоційованих радіусів нормальної збіжності тоді і тільки тоді, коли $\rho_1 + \cdots + \rho_d = 1$, так що

$$\begin{aligned} \bigcup_{\boldsymbol{\rho}} (\mathbb{D}^d)_{\mathrm{nc}}(0_{1\times 1}, \boldsymbol{\rho}) &= \left\{Z \in (\mathbb{C}^d)_{\mathrm{nc}} \colon \|Z_1\| + \cdots + \|Z_d\| < 1\right\} \\ &= (\diamondsuit^d)_{\mathrm{nc}}(0_{1\times 1}, (1, \dots, 1)). \end{aligned} \tag{8.50}$$

З другого боку, для набору $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$ невід'ємних дійсних чисел, $\mu_\diamondsuit(\mathbf{r}) = \max_j r_j$. Отже, набір $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_d)$ строго додатних розширених дійсних чисел є набором асоційованих радіусів нормальної збіжності у сенсі діамантів – дивись зауваження 8.22 – тоді і тільки тоді, коли $\rho_1 = \dots = \rho_d = 1$, так що множина (8.50) співпадає з $\bigcup_{\boldsymbol{\rho}} (\diamondsuit^d)_{\mathrm{nc}}(0_{1\times 1}, \boldsymbol{\rho})$, де об'єднання береться над усіма наборами $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_d)$ строго додатних асоційованих радіусів нормальної збіжності у сенсі діамантів.

Звісно, $Z \in \Upsilon_{\mathrm{free},\prec}$ тоді і тільки тоді, коли $Z \in \Upsilon_{\mathrm{nc}}$, тобто $r_{\mathrm{spec}}(Z_1 + \dots + Z_d) < 1$, і

$$\lim_{w_1 \preceq w_2, |w_1| = |w_2| \to \infty} \sum_{w_1 \preceq w \preceq w_2} Z^w = 0.$$

Нехай $d = 2$ і $\zeta \in \mathbb{C}$, $\dfrac{1}{2} < |\zeta| < 1$. Тоді $(\zeta, -\zeta) \in \Upsilon_{\mathrm{free},\prec}$ тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{w_1 \preceq w_2, |w_1| = |w_2| \to \infty} \zeta^{|w_1|} \sum_{w_1 \preceq w \preceq w_2} (-1)^{|w|_2} = 0, \tag{8.51}$$

де $|w|_2$ позначає число разів, що літера g_2 з'являється у слові w. Зауважимо, що число слів довжини ℓ з $|w|_2$ парним є таким самим, як число слів довжини ℓ з $|w|_2$ непарним, і дорівнює $2^{\ell-1}$. Таким чином, якщо ми оберемо порядок $\prec$ так, що всі слова даної довжини з $|w|_2$ парним передують усім словам даної довжини з $|w|_2$ непарним, то (8.51) не виконується. З іншого боку, якщо ми оберемо порядок $\prec$ так, щоб слова з $|w|_2$ парним і слова з $|w|_2$ непарним переплеталися, то (8.51) виконується. Отже, $(\zeta, -\zeta) \notin \Upsilon_{\mathrm{free},\prec}$ або $(\zeta, -\zeta) \in \Upsilon_{\mathrm{free},\prec}$, залежно від вибору $\prec$. Більше того, у випадку, коли $(\zeta, -\zeta) \in \Upsilon_{\mathrm{free},\prec}$ ряд не збігається на $(\mathbb{D}^2)_{\mathrm{nc}}(0_{1\times 1}, (|\zeta|, |\zeta|))$, наприклад, він не збігається у точці $(\epsilon\zeta, \epsilon\zeta)$ для $\frac{1}{2|\zeta|} < \epsilon < 1$.

Приклад 8.27. Розглянемо

$$f(Z) = (I - \mathcal{Z}(Z) \otimes A)^{-1} = (I - Z_1(P_1 A) - Z_2(P_2 A))^{-1},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 2×2 матриці над $\mathbb{C}$, і $\mathcal{Z}(Z) = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{bmatrix} = Z_1 \otimes P_1 + Z_2 \otimes P_2$ - $2n \times 2n$ матриця над $\mathbb{C}$ для кожних $n \in \mathbb{N}$ і $Z \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Легко побачити, що f - рівномірно аналітична н.к. функція на рівномірно-відкритій н.к. множині

$$\left\{ Z \in (\mathbb{C}^2)_{\mathrm{nc}} \colon \det(I - \mathcal{Z}(Z) \otimes A) \neq 0 \right\}.$$

Відтепер, припустимо, що $\|A\| < 1$, так що f обмежена сталою $(1 - \|A\|)^{-1}$ на $(\mathbb{D}^2)_{\mathrm{nc}}(0_{1\times 1}, (1, \dots, 1))$. ТТ ряд f у точці $0_{1\times 1}$ є

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} (\mathcal{Z}(Z) \otimes A)^\ell.$$

Для цього ряду ясно, що

$$\Upsilon_{\mathrm{nc}} = \left\{ Z \in (\mathbb{C}^2)_{\mathrm{nc}} \colon r_{\mathrm{spec}}(\mathcal{Z}(Z) \otimes A) < 1 \right\}$$

і $\rho(Z) = (r_{\mathrm{spec}}(\mathcal{Z}(Z) \otimes A))^{-1}$. Використовуючи лему 8.23, ми отримаємо, що

$$\Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}} = \Upsilon_{\mathrm{nc,unif}} = \Upsilon_{\mathrm{nc,norm}} = \left\{ Z \in (\mathbb{C}^2)_{\mathrm{nc}} \colon r_{\mathrm{spec}}(\mathcal{Z}(Z) \otimes A) < 1 \right\}.$$

Розглянемо тепер відповідний ряд уздовж $\boldsymbol{\mathcal{G}}_2$. (i,j)-й елемент суми є

$$\delta_{ij} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_{\ell-1} \le 2} a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{\ell-1} j} Z_i Z_{i_1} \cdots Z_{i_{\ell-1}},$$

для всіх $i, j = 1, 2$. Для $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, ряд збігається абсолютно тоді і тільки тоді, коли ряд

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\begin{bmatrix} |z_1| & 0 \\ 0 & |z_2| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |a_{11}| & |a_{12}| \\ |a_{21}| & |a_{22}| \end{bmatrix} \right)^{\ell} \tag{8.52}$$

збігається. Ми обираємо A з $\|A\| < 1$ і $r_{\mathrm{spec}} \begin{bmatrix} |a_{11}| & |a_{12}| \\ |a_{21}| & |a_{22}| \end{bmatrix} > 1$, наприклад,

$$A = \frac{1-\epsilon}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

з $\epsilon > 0$ достатньо малим. Тоді для $|z_1|, |z_2| < 1$ достатньо близькими до 1, ряд (8.52) розбігається.

Розділ 9

Розширення н.к. множин і н.к. функцій на доданки прямих сум

У цьому розділі ми розглядаємо природне розширення інваріантної щодо подібностей н.к. множини Ω до більшої н.к. множини, $\Omega_{\text{d.s.e.}}$, яка містить всі доданки у прямих сумах матриць з Ω, і відповідне розширення н.к. функцій на Ω до н.к. функцій на $\Omega_{\text{d.s.e.}}$. Звісно, $\Omega_{\text{d.s.e.}}$ містить не тільки Ω, але також множину $\operatorname{rad}\Omega$, яка була введена у підрозділі 7.2 – дивись абзац попередній до пропозиції 7.15.

Нехай $\mathcal{M}$ - модуль над комутативним унітальним кільцем $\mathcal{R}$, і нехай $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\text{nc}}$ - інваріантна щодо подібностей н.к. множина. Ми визначаємо *розширення на доданки прямих сум* Ω як

$$\Omega_{\text{d.s.e.}} := \{X \in \mathcal{M}_{\text{nc}} \colon X \oplus Y \in \Omega \ \text{ для деякого } Y \in \mathcal{M}_{\text{nc}}\}. \tag{9.1}$$

Оскільки Ω - інваріантна щодо подібностей, зокрема, коли матриця подібності є перестановка рядків (стовпців), $X \in \Omega_{\text{d.s.e.}}$ тоді і тільки тоді, коли якщо $Y^1 \oplus X \oplus Y^2 \in \Omega$ для деякого Y^1, то $Y^2 \in \mathcal{M}_{\text{nc}}$.

Пропозиція 9.1. *Нехай $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\text{nc}}$ - інваріантна щодо подібностей н.к. множина. Тоді*

(1) $\Omega_{\text{d.s.e.}}$ *- радикальна н.к. множина, інваріантна щодо подібностей;*

(2) *Якщо Ω - допустима справа (відп., зліва) н.к. множина, то такою ж є і $\Omega_{\text{d.s.e.}}$;*

(3) *Якщо Ω - скінченно-відкрита (відп., відкрита, рівномірно-відкрита) н.к. множина, то такою ж є і $\Omega_{\text{d.s.e.}}$; більше того, якщо Ω - рівномірно-відкрита, то $\Omega_{\text{d.s.e.}}$ є τ-відкритою (дивись підрозділ 7.2 для означення псевдометрики τ).*

Доведення. (1) Якщо X^1, $X^2 \in \Omega_{\text{d.s.e.}}$, то $X^1 \oplus Y^1 \in \Omega$ і $X^2 \oplus Y^2 \in \Omega$ для деяких $Y^1, Y^2 \in \mathcal{M}_{\text{nc}}$. Оскільки Ω - н.к. множина, $X^1 \oplus Y^1 \oplus X^2 \oplus Y^2 \in \Omega$. Оскільки н.к. множина Ω - інваріантна щодо подібностей, і матриця $X^1 \oplus Y^1 \oplus X^2 \oplus Y^2$ є подібною до $X^1 \oplus X^2 \oplus Y^1 \oplus Y^2$, з матрицею перестановки як матрицею подібності, $X^1 \oplus X^2 \oplus Y^1 \oplus Y^2 \in \Omega$. Отже, $X^1 \oplus X^2 \in \Omega_{\text{d.s.e.}}$, і ми робимо висновок, що $\Omega_{\text{d.s.e.}}$ - н.к. множина.

Нехай $X \in (\Omega_{\text{d.s.e.}})_n$, і нехай матриця $S \in \mathcal{R}^{n\times n}$ - оборотна. Тоді $X \oplus Y \in \Omega_{n+m}$ для деяких $m \in \mathbb{N}$ і $Y \in \mathcal{M}^{m\times m}$, і оскільки Ω є інваріантною щодо подібностей,

$$SXS^{-1} \oplus Y = (S \oplus I_m)(X \oplus Y)(S \oplus I_m)^{-1} \in \Omega_{n+m}.$$

Отже, $SXS^{-1} \in (\Omega_{\text{d.s.e.}})_n$, і ми робимо висновок, що н.к. множина $\Omega_{\text{d.s.e.}}$ - інваріантна щодо подібностей.

Припустимо, що $Y \in \operatorname{rad} \Omega_{\text{d.s.e.}}$. Тоді $X = \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y \in \Omega_{\text{d.s.e.}}$ для деякого $m \in \mathbb{N}$. Отже, $X \oplus Z \in \Omega$ для деякого $Z \in \mathcal{M}_{\text{nc}}$, тобто

$$Y \oplus \Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m-1} Y \Big) \oplus Z \in \Omega.$$

Отже, $Y \in \Omega_{\text{d.s.e.}}$. Це доводить включення $\operatorname{rad} \Omega_{\text{d.s.e.}} \subseteq \Omega_{\text{d.s.e.}}$. Разом з очевидним включенням $\operatorname{rad} \Omega_{\text{d.s.e.}} \supseteq \Omega_{\text{d.s.e.}}$, це тягне за собою, що $\operatorname{rad} \Omega_{\text{d.s.e.}} = \Omega_{\text{d.s.e.}}$, тобто множина $\Omega_{\text{d.s.e.}}$ є радикальною.

(2) Припустимо, що н.к. множина Ω - допустима справа. Нехай $X^1 \in (\Omega_{\text{d.s.e.}})_{n_1}$, $X^2 \in (\Omega_{\text{d.s.e.}})_{n_2}$ і $Z \in \mathcal{M}^{n_1 \times n_2}$. Тоді існують $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ і $Y^1 \in \mathcal{M}^{m_1 \times m_1}$, $Y^2 \in \mathcal{M}^{m_2 \times m_2}$ такі, що $X^1 \oplus Y^1 \in \Omega_{n_1+m_1}$ і $X^2 \oplus Y^2 \in \Omega_{n_2+m_2}$. Оскільки Ω - допустима справа н.к. множина, яка є інваріантною щодо подібностей, за пропозицією 10.2,

$$\begin{bmatrix} X^1 & 0 & Z & 0 \\ 0 & Y^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y^2 \end{bmatrix} \in \Omega_{n_1+m_1+n_2+m_2}.$$

Остання матриця подібна, з матрицею перестановки як матрицею подібності, до

$$\begin{bmatrix} X^1 & Z & 0 & 0 \\ 0 & X^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y^2 \end{bmatrix},$$

яка, значить, також належить до $\Omega_{n_1+m_1+n_2+m_2} = \Omega_{n_1+n_2+m_1+m_2}$. Отже,

$$\begin{bmatrix} X^1 & Z \\ 0 & X^2 \end{bmatrix} \in (\Omega_{\text{d.s.e.}})_{n_1+n_2},$$

і ми робимо висновок, що н.к. множина $\Omega_{\text{d.s.e.}}$ є допустимою справа.

Твердження для допустимої зліва н.к. множини Ω доводиться аналогічно.

(3) Нехай $\mathcal{M} = \mathcal{V}$ - векторний простір над $\mathbb{C}$, і нехай н.к. множина $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\text{nc}}$ - скінченно-відкрита. Нехай $X \in (\Omega_{\text{d.s.e.}})_n$. Тоді існують $m \in \mathbb{N}$ і $Y \in \mathcal{V}^{m \times m}$ такі, що $X \oplus Y \in \Omega_{n+m}$. Нехай $\mathcal{U}$ - скінченновимірний підпростір у $\mathcal{V}^{n \times n}$, який містить X. Тоді простір $\mathcal{U} \oplus \operatorname{span}\{Y\} := \{U \oplus \alpha Y \colon U \in \mathcal{U}, \alpha \in \mathbb{C}\}$ є скінченновимірним і містить Y. Оскільки Ω_{n+m} є скінченно-відкритим, існує відкритий окіл Γ точки $X \oplus Y$ у $\mathcal{U} \oplus \operatorname{span}\{Y\}$, що міститься у Ω_{n+m}. Більше того, ми можемо обрати такий окіл у вигляді $\Gamma = \Phi \oplus \Psi$, де Φ - відкритий окіл точки X у $\mathcal{U}$ і Ψ - відкритий окіл точки Y у $\operatorname{span}\{Y\}$. Оскільки для кожного $U \in \Phi$ і $W \in \Psi$ ми маємо $U \oplus W \in \Gamma \subseteq \Omega_{n+m}$, ми маємо також, що $\Phi \subseteq (\Omega_{\text{d.s.e.}})_n$. Ми робимо висновок, що н.к. множина $\Omega_{\text{d.s.e.}}$ є скінченно-відкритою.

Нехай $\mathcal{M} = \mathcal{V}$ - банахів простір, забезпечений допустимою системою матричних норм над $\mathcal{V}$, і нехай н.к. множина $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ - відкрита. Нехай $X \in (\Omega_{\mathrm{d.s.e.}})_n$. Тоді існують $m \in \mathbb{N}$ і $Y \in \mathcal{V}^{m\times m}$ такі, що $X \oplus Y \in \Omega_{n+m}$. Нехай $\epsilon > 0$ - таке, що $B(X \oplus Y, \epsilon) \subseteq \Omega_{n+m}$. Покладемо $\delta := C_1'(n,m)^{-1}\epsilon$ (дивись (7.1), де $C_1'(n,m)$ є даним). Тоді для кожного $U \in B(X,\delta)$ ми маємо $U \oplus Y \in B(X \oplus Y, \epsilon) \subseteq \Omega_{n+m}$, отже $U \in (\Omega_{\mathrm{d.s.e.}})_n$. Ми робимо висновок, що н.к. множина $\Omega_{\mathrm{d.s.e.}}$ є відкритою.

Нехай $\mathcal{M} = \mathcal{V}$ - операторний простір, і нехай н.к. множина $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ - рівномірно-відкрита. Нехай $X \in (\Omega_{\mathrm{d.s.e.}})_n$. Тоді існують $m \in \mathbb{N}$ і $Y \in \mathcal{V}^{m\times m}$ такі, що $X \oplus Y \in \Omega_{n+m}$. Нехай $\epsilon > 0$ - таке, що $B_{\mathrm{nc}}(X \oplus Y, \epsilon) \subseteq \Omega$. Нехай $Z \in B_{\mathrm{nc}}(X,\epsilon)_{nk}$, і нехай $U \in \mathcal{R}^{(n+m)k\times(n+m)k}$ - матриця перестановки така, що

$$U\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{k}(X \oplus Y)\Big)U^{-1} = \Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{k} X\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\beta=1}^{k} Y\Big). \tag{9.2}$$

Оскільки Ω - н.к. множина, що є інваріантною щодо подібностей, остання матриця належить до $\Omega_{(n+m)k}$. Оскільки матриця U - унітарна,

$$U^{-1}\Big(Z \oplus \bigoplus_{\beta=1}^{k} Y\Big)U \in B_{\mathrm{nc}}(X \oplus Y, \epsilon) \subseteq \Omega_{(n+m)k}, \tag{9.3}$$

і оскільки н.к. множина Ω - інваріантна щодо подібностей, $Z \oplus \bigoplus_{\beta=1}^{k} Y \in \Omega_{(n+m)k}$. Отже, $Z \in (\Omega_{\mathrm{d.s.e.}})_{nk}$. Це доводить, що $B_{\mathrm{nc}}(X,\epsilon) \subseteq \Omega_{\mathrm{d.s.e.}}$, і ми робимо висновок, що н.к. множина $\Omega_{\mathrm{d.s.e.}}$ є рівномірно-відкритою. $\square$

Ми далі визначаємо розширення $f_{\mathrm{d.s.e.}}$ н.к. функції f на доданки прямих сум.

Пропозиція 9.2. *Нехай $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ - модулі над унітальним комутативним кільцем $\mathcal{R}$, нехай $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ - інваріантна щодо подібностей н.к. множина, і нехай $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. функція. Тоді*

(1) *Існує однозначно визначене* розширення на доданки прямих сум *н.к. функції f, тобто н.к. функція $f_{\mathrm{d.s.e.}}\colon \Omega_{\mathrm{d.s.e.}} \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ така, що $f_{\mathrm{d.s.e.}}|_{\Omega} = f$;*

(2) *Якщо $\mathcal{R} = \mathbb{K}$ - нескінченне поле, $\Omega = \coprod_{m=1}^{\infty} \mathcal{M}^{sm\times sm}$ і $f|_{\mathcal{M}^{sm\times sm}}$ - многочлен на зрізах для кожного $m \in \mathbb{N}$, то $\Omega_{\mathrm{d.s.e.}} = \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$, і $f_{\mathrm{d.s.e.}}$ - многочлен на зрізах; якщо, більше того, степені $f|_{\mathcal{M}^{sm\times sm}}$, $m = 1, 2, \ldots$, обмежені, то такими є і степені $f_{\mathrm{d.s.e.}}|_{\mathcal{M}^{n\times n}}$, $n = 1, 2, \ldots$, так що $f_{\mathrm{d.s.e.}}$ - н.к. многочлен над $\mathcal{M}$;*

(3) *Якщо $\mathcal{M} = \mathcal{V}$ - векторний простір над $\mathbb{C}$, $\mathcal{N} = \mathcal{W}$ - банахів простір, забезпечений допустимою системою матричних норм над $\mathcal{W}$, $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ - скінченно-відкрита н.к. множина, і f - G-диференційована н.к. функція на Ω, то $f_{\mathrm{d.s.e.}}$ - G-диференційована на $\Omega_{\mathrm{d.s.e.}}$; більше того, якщо $X \in (\Omega_{\mathrm{d.s.e.}})_n$, $Z \in \mathcal{V}^{n\times n}$ і $X \oplus Y \in \Omega_{n+m}$, то*

$$\delta f(X \oplus Y)(Z \oplus 0_{m\times m}) = \delta f_{\mathrm{d.s.e.}}(X)(Z) \oplus f_{\mathrm{d.s.e.}}(Y);$$

(4) *Якщо* $\mathcal{M} = \mathcal{V}$ *і* $\mathcal{N} = \mathcal{W}$ *- банахові простори, забезпечені допустимими системами матричних норм над* $\mathcal{V}$ *і над* $\mathcal{W}$, $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ *- відкрита н.к. множина, і* f *- аналітична н.к. функція на* Ω, *то* $f_{\mathrm{d.s.e.}}$ *- аналітична н.к. функція на* $\Omega_{\mathrm{d.s.e.}}$*;*

(5) *Якщо* $\mathcal{M} = \mathcal{V}$ *і* $\mathcal{N} = \mathcal{W}$ *- операторні простори,* $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ *- рівномірно-відкрита н.к. множина, і н.к. функція* f *- рівномірно аналітична на* Ω, *то* $f_{\mathrm{d.s.e.}}$ *- рівномірно аналітична н.к. функція на* $\Omega_{\mathrm{d.s.e.}}$.

Доведення. (1) Нехай $X \in (\Omega_{\mathrm{d.s.e.}})_n$. Тоді існують $m \in \mathbb{N}$ і $Y \in \mathcal{M}^{m\times m}$ такі, що $X \oplus Y \in \Omega_{n+m}$. Матриця $\mu I_n \oplus \nu I_m \in \mathcal{R}^{(n+m)\times(n+m)}$, з довільними відмінними $\mu, \nu \in \mathcal{R}$, комутує з $X \oplus Y$. Отже, $\mu I_n \oplus \nu I_m$ комутує з $f(X \oplus Y)$. Це можливо тільки якщо $f(X \oplus Y) = A \oplus B$, з деякими $A \in \mathcal{N}^{n\times n}$ і $B \in \mathcal{N}^{m\times m}$. Ми покажемо зараз, що A не залежить від Y, тобто є визначеним тільки за f і X. Припустимо, що $X \oplus Y' \in \Omega_{n+m'}$ для деяких $m' \in \mathbb{N}$ і $Y' \in \mathcal{M}^{m'\times m'}$. Тоді, використовуючи такий же аргумент, як вище, ми робимо висновок, що $f(X \oplus Y') = A' \oplus B'$, для деяких $A' \in \mathcal{N}^{n\times n}$ і $B' \in \mathcal{N}^{m'\times m'}$. Оскільки

$$(X \oplus Y)(I_n \oplus 0_{m\times m'}) = (I_n \oplus 0_{m\times m'})(X \oplus Y'),$$

ми повинні мати

$$(A \oplus B)(I_n \oplus 0_{m\times m'}) = (I_n \oplus 0_{m\times m'})(A' \oplus B'),$$

так що $A = A'$. Ми позначаємо $f_{\mathrm{d.s.e.}}(X) := A$. З другого боку, оскільки н.к. множина Ω є інваріантною щодо подібностей, ми маємо, що $Y \in (\Omega_{\mathrm{d.s.e.}})_m$. Аналогічний аргумент тоді показує, що B є однозначно визначеним за f і Y, і ми позначаємо $f_{\mathrm{d.s.e.}}(Y) := B$.

Відображення $f_{\mathrm{d.s.e.}} \colon \Omega_{\mathrm{d.s.e.}} \to N_{\mathrm{nc}}$ є коректно визначеним. Справді, за інваріантностю н.к. множини Ω щодо подібностей, якщо $X \oplus Y \in \Omega$ і $f(X \oplus Y) = A \oplus B$, то $Y \oplus X \in \Omega$ і $f(Y \oplus X) = B \oplus A$.

Звісно, $f_{\mathrm{d.s.e.}}((\Omega_{\mathrm{d.s.e.}})_n) \subseteq \mathcal{N}^{n\times n}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Оскільки, за пропозицією 9.1, $\Omega_{\mathrm{d.s.e.}}$ - н.к. множина, ми маємо для довільних $X \in (\Omega_{\mathrm{d.s.e.}})_n$ і $X' \in (\Omega_{\mathrm{d.s.e.}})_{n'}$, що $X \oplus X' \in (\Omega_{\mathrm{d.s.e.}})_{n+n'}$ і $X \oplus X' \oplus Y \in \Omega_{n+n'+m}$, з деякими $m \in \mathbb{N}$ і $Y \in \mathcal{M}^{m\times m}$. Використовуючи інваріантність щодо подібностей н.к. множини Ω, ми спостерігаємо, що

$$f(X \oplus X' \oplus Y) = f_{\mathrm{d.s.e.}}(X) \oplus f_{\mathrm{d.s.e.}}(X') \oplus f_{\mathrm{d.s.e.}}(Y) = f_{\mathrm{d.s.e.}}(X \oplus X') \oplus f_{\mathrm{d.s.e.}}(Y),$$

таким чином, $f_{\mathrm{d.s.e.}}(X \oplus X') = f_{\mathrm{d.s.e.}}(X) \oplus f_{\mathrm{d.s.e.}}(X')$, тобто функція $f_{\mathrm{d.s.e.}}$ є інваріантною щодо прямих сум.

Якщо $X \in (\Omega_{\mathrm{d.s.e.}})_n$ і матриця $S \in \mathcal{R}^{n\times n}$ - оборотна, то, за пропозицією 9.1, $SXS^{-1} \in (\Omega_{\mathrm{d.s.e.}})_n$. Ми маємо $X \oplus Y \in \Omega_{n+m}$ для деяких $m \in \mathbb{N}$ і $Y \in \mathcal{M}^{m\times m}$. Оскільки н.к. множина Ω є інваріантною щодо подібностей, ми також маємо, що

$$SXS^{-1} \oplus Y = (S \oplus I_m)(X \oplus Y)(S \oplus I_m)^{-1} \in \Omega_{n+m}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} f_{\text{d.s.e.}}(SXS^{-1}) \oplus f_{\text{d.s.e.}}(Y) &= f(SXS^{-1} \oplus Y) \\ &= f\Big((S \oplus I_m)(X \oplus Y)(S \oplus I_m)^{-1}\Big) = (S \oplus I_m) f(X \oplus Y)(S \oplus I_m)^{-1} \\ &= (S \oplus I_m)(f_{\text{d.s.e.}}(X) \oplus f_{\text{d.s.e.}}(Y))(S \oplus I_m)^{-1} = S f_{\text{d.s.e.}}(X) S^{-1} \oplus f_{\text{d.s.e.}}(Y), \end{aligned}$$

таким чином, $f_{\text{d.s.e.}}(SXS^{-1}) = S f_{\text{d.s.e.}}(X) S^{-1}$, тобто функція $f_{\text{d.s.e.}}$ є інваріантною щодо подібностей.

Ми робимо висновок, що $f_{\text{d.s.e.}}$ - н.к. функція. За конструкцією, $f_{\text{d.s.e.}}$ розширює f до $\Omega_{\text{d.s.e.}}$ і така розширена н.к. функція є єдиною.

(2) Очевидно, що $\Omega_{\text{d.s.e.}} = \mathcal{M}_{\text{nc}}$. Нехай $X \in \mathcal{M}^{n\times n}$. Тоді $X \oplus Y \in \mathcal{M}^{sm\times sm}$ для деяких $m \in \mathbb{N}$ і $Y \in \mathcal{M}^{(sm-n)\times(sm-n)}$. Оскільки $f|_{\mathcal{M}^{sm\times sm}}$ є многочленом на зрізах деякого скінченного степеня M_{sm}, ми маємо, що для довільного $Z \in \mathcal{M}^{n\times n}$,

$$f_{X\oplus Y, Z\oplus 0_{(sm-n)\times(sm-n)}}(t) = f((X + tZ) \oplus Y) = f_{\text{d.s.e.}}(X + tZ) \oplus f_{\text{d.s.e.}}(Y)$$

є многочленом від t степеня не більше M_{sm}. Тоді таким же є і $(f_{\text{d.s.e.}})_{X,Z}(t) = f_{\text{d.s.e.}}(X + tZ)$, і отже, $f_{\text{d.s.e.}}$ - многочлен на зрізах. Якщо, на додачу, степені M_{sm} многочленів $f|_{\mathcal{M}^{sm\times sm}}$, $m = 1, 2, \ldots$, обмежені, то степені $f_{\text{d.s.e.}}|_{\mathcal{M}^{n\times n}}$, $n = 1, 2, \ldots$, є обмеженими такою самою сталою. За теоремою 6.8, $f|_{\text{d.s.e.}}$ є многочленом над $\mathcal{M}$ з коефіцієнтами у $\mathcal{N}$.

(3) Нехай $X \in (\Omega_{\text{d.s.e.}})_n$ і $Z \in \mathcal{V}^{n\times n}$. Тоді $X \oplus Y \in \Omega_{n+m}$ для деяких $m \in \mathbb{N}$ і $Y \in \mathcal{V}^{m\times m}$. Оскільки н.к. множина Ω - скінченно-відкрита, такою ж є і $\Omega_{\text{d.s.e.}}$ за пропозицією 9.1. Тоді як $X + tZ \in (\Omega_{\text{d.s.e.}})_n$, так і $(X + tZ) \oplus Y \in \Omega_{n+m}$ для достатньо малого скаляру t. Оскільки f є G-диференційованою у $X \oplus Y$, ми маємо

$$\begin{aligned} \delta f(X \oplus Y)(Z \oplus 0_{m\times m}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((X \oplus Y) + t(Z \oplus 0_{m\times m})) - f(X \oplus Y)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f((X + tZ) \oplus Y) - f(X \oplus Y)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(f_{\text{d.s.e.}}(X + tZ) \oplus f_{\text{d.s.e.}}(Y)) - (f_{\text{d.s.e.}}(X) \oplus f_{\text{d.s.e.}}(Y))}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(f_{\text{d.s.e.}}(X + tZ) - f_{\text{d.s.e.}}(X)) \oplus f_{\text{d.s.e.}}(Y)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f_{\text{d.s.e.}}(X + tZ) - f_{\text{d.s.e.}}(X)}{t} \oplus f_{\text{d.s.e.}}(Y) \\ &= \delta f_{\text{d.s.e.}}(X)(Z) \oplus f_{\text{d.s.e.}}(Y), \end{aligned}$$

тобто $\delta f_{\text{d.s.e.}}(X)(Z)$ існує і визначається за $\delta f(X \oplus Y)(Z \oplus 0_{m\times m})$. Є очевидним, що $\delta f_{\text{d.s.e.}}(X)(Z)$ не залежить від вибору Y, оскільки воно є єдиним як границя. Ми робимо висновок, що $f_{\text{d.s.e.}}$ є G-диференційованою на $\Omega_{\text{d.s.e.}}$.

(4) Достатньо показати, за результатом частини (4) і означенням аналітичної н.к. функції або за теоремою 7.4, що н.к. функція $f_{\text{d.s.e.}}$ - локально обмежена

на $\Omega_{\text{d.s.e.}}$. Нехай $X \in (\Omega_{\text{d.s.e.}})_n$. Тоді $X \oplus Y \in \Omega_{n+m}$ для деяких $m \in \mathbb{N}$ і $Y \in \mathcal{V}^{m\times m}$. Оскільки множина Ω_{n+m} - відкрита і f локально обмежена на Ω_{n+m}, існує стала $K > 0$ така, що $\|f(W)\|_{n+m} \leq K$ для кожного W у деякій відкритій кулі $B(X \oplus Y, \epsilon) \subseteq \Omega_{n+m}$. За пропозицією 9.1, н.к. множина $(\Omega_{\text{d.s.e.}})_n$ - відкрита. Нехай $\delta < C_1'(n,m)^{-1}\epsilon$ - таке, що $B(X,\delta) \subseteq (\Omega_{\text{d.s.e.}})_n$, де $C_1'(n,m) = C_1'(\mathcal{V}; n, m)$ - стала у правій частині (7.1) для $\mathcal{V}$. Нехай $Z \in B(X,\delta)$ - довільне. Тоді $Z \oplus Y \in B(X \oplus Y, \epsilon)$ і

$$\begin{aligned}\|f_{\text{d.s.e.}}(Z)\|_n &\leq \max\{\|f_{\text{d.s.e.}}(Z)\|_n, \|f_{\text{d.s.e.}}(Y)\|_m\} \\ &\leq C_1(n,m)\|f_{\text{d.s.e.}}(Z) \oplus f_{\text{d.s.e.}}(Y)\|_{n+m} \\ &= C_1(n,m)\|f(Z \oplus Y)\|_{n+m} \leq C_1(n,m)K,\end{aligned}$$

де $C_1(n,m) = C_1(\mathcal{W}; n, m)$ - стала у лівій частині (7.1) для $\mathcal{W}$. Таким чином, н.к. функція $f_{\text{d.s.e.}}$ - локально обмежена на $\Omega_{\text{d.s.e.}}$.

(5) Достатньо показати, за результатом частини (4) і означенням рівномірно аналітичної н.к. функції або за наслідком 7.28, що н.к. функція $f_{\text{d.s.e.}}$ є рівномірно локально обмеженою на $\Omega_{\text{d.s.e.}}$. Нехай $X \in (\Omega_{\text{d.s.e.}})_n$. Тоді $X \oplus Y \in \Omega_{n+m}$ для деяких $m \in \mathbb{N}$ і $Y \in \mathcal{V}^{m\times m}$. Оскільки н.к. множина Ω - рівномірно-відкрита і f - рівномірно локально обмежена на Ω, існує стала $K > 0$ така, що $\|f(W)\|_{n_W} \leq K$ для кожного W в деякій відкритій н.к. кулі $B_{\text{nc}}(X \oplus Y, \epsilon) \subseteq \Omega$ (тут n_W - розмір матриці W). За пропозицією 9.1, н.к. множина $\Omega_{\text{d.s.e.}}$ є рівномірно-відкритою. Більше того, аргумент у доведенні пропозиції 9.1 тягне за собою, що $B_{\text{nc}}(X,\epsilon) \subseteq \Omega_{\text{d.s.e.}}$: для довільного $Z \in B_{\text{nc}}(X,\epsilon)_{nk}$ ми маємо (9.3) з матрицею перестановки U, визначеною за (9.2). За властивостями норм операторних просторів,

$$\begin{aligned}\|f_{\text{d.s.e.}}(Z)\|_{nk} &\leq \Big\|f_{\text{d.s.e.}}(Z) \oplus \bigoplus_{\beta=1}^{k} f_{\text{d.s.e.}}(Y)\Big\|_{nk} = \Big\|f\Big(Z \oplus \bigoplus_{\beta=1}^{k} Y\Big)\Big\|_{nk} \\ &= \Big\|U^{-1} f\Big(Z \oplus \bigoplus_{\beta=1}^{k} Y\Big)U\Big\|_{nk} = \Big\|f\Big(U^{-1}\Big(Z \oplus \bigoplus_{\beta=1}^{k} Y\Big)U\Big)\Big\|_{nk} \leq K.\end{aligned}$$

Ми робимо висновок, що н.к. функція $f_{\text{d.s.e.}}$ - рівномірно локально обмежена на $\Omega_{\text{d.s.e.}}$. □

Пропозиція 9.2 може бути розширена на н.к. функції вищого порядку наступним чином.

Пропозиція 9.3. *Нехай $\mathcal{M}_0, \ldots, \mathcal{M}_k, \mathcal{N}_0, \ldots, \mathcal{N}_k$ - модулі над комутативним кільцем $\mathcal{R}$, нехай $\Omega^{(0)} \subseteq \mathcal{M}_{0,\text{nc}}, \ldots, \Omega^{(k)} \subseteq \mathcal{M}_{k,\text{nc}}$ - інваріантні щодо подібностей н.к. множини, і нехай $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\text{nc}}, \ldots, \mathcal{N}_{k,\text{nc}})$. Тоді*

(1) *Існує однозначно визначене* розширення на доданки прямих сум *н.к. функції вищого порядку f, тобто н.к. функція порядку k,*

$$f_{\text{d.s.e.}} \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}_{\text{d.s.e.}}, \ldots, \Omega^{(k)}_{\text{d.s.e.}}; \mathcal{N}_{0,\text{nc}}, \ldots, \mathcal{N}_{k,\text{nc}}),$$

така, що $f_{\text{d.s.e.}}|_{\Omega^{(0)}\times\cdots\times\Omega^{(k)}} = f$*;*

(2) *Якщо* $\mathcal{M}_0 = \mathcal{V}_0, \ldots, \mathcal{M}_k = \mathcal{V}_k$ *- векторні простори над* $\mathbb{C}$*,* $\mathcal{N}_0 = \mathcal{W}_0, \ldots, \mathcal{N}_k = \mathcal{W}_k$ *- банахові простори, забезпечені допустимими системами норм прямокутних матриць над* $\mathcal{W}_0, \ldots, \mathcal{W}_k$*,* $\Omega^{(0)} \subseteq \mathcal{V}_{0,\text{nc}}, \ldots, \Omega^{(k)} \subseteq \mathcal{V}_{k,\text{nc}}$ *- скінченно-відкриті н.к. множини, і* f *-* G_W*-диференційована на* $\Omega^{(0)} \times \cdots \times \Omega^{(k)}$*, то* $f_{\text{d.s.e.}}$ *є* G_W*-диференційованою на* $\Omega^{(0)}_{\text{d.s.e.}} \times \cdots \times \Omega^{(k)}_{\text{d.s.e.}}$*; більше того, якщо* $X^0 \in (\Omega^{(0)}_{\text{d.s.e.}})_{n_0}, \ldots, X^k \in (\Omega^{(k)}_{\text{d.s.e.}})_{n_k}$*,* $Z^0 \in \mathcal{V}_0{}^{n_0\times n_0}, \ldots, Z^k \in \mathcal{V}_k{}^{n_k\times n_k}$*,* $W^1 \in \mathcal{W}_1{}^{n_0\times n_1}, \ldots, W^k \in \mathcal{W}_k{}^{n_{k-1}\times n_k}$ *і* $X^0 \oplus Y^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0+m_0}, \ldots, X^k \oplus Y^k \in \Omega^{(k)}_{n_k+m_k}$*, то*

$$\frac{d}{dt} f\Big((X^0 \oplus Y^0) + t(Z^0 \oplus 0_{m_0\times m_0}), \ldots, (X^k \oplus Y^k) + t(Z^k \oplus 0_{m_k\times m_k})\Big) \\ (W^1 \oplus 0_{m_0\times m_1}, \ldots, W^k \oplus 0_{m_{k-1}\times m_k})\Big|_{t=0} \\ = \frac{d}{dt} f_{\text{d.s.e.}}(X^0 + tZ^0, \ldots, X^k + tZ^k)(W^1, \ldots, W^k)\Big|_{t=0} \oplus 0_{m_0\times m_k};$$

(3) *Якщо* $\mathcal{M}_0 = \mathcal{V}_0, \ldots, \mathcal{M}_k = \mathcal{V}_k$*,* $\mathcal{N}_0 = \mathcal{W}_0, \ldots, \mathcal{N}_k = \mathcal{W}_k$ *- банахові простори, забезпечені допустимими системами норм прямокутних матриць над* $\mathcal{V}_0, \ldots, \mathcal{V}_k$*,* $\mathcal{W}_0, \ldots, \mathcal{W}_k$*,* $\Omega^{(0)} \subseteq \mathcal{V}_{0,\text{nc}}, \ldots, \Omega^{(k)} \subseteq \mathcal{V}_{k,\text{nc}}$ *- відкриті н.к. множини, і* f *- аналітична на* $\Omega^{(0)} \times \cdots \times \Omega^{(k)}$*, то* $f_{\text{d.s.e.}}$ *є аналітичною на* $\Omega^{(0)}_{\text{d.s.e.}} \times \cdots \times \Omega^{(k)}_{\text{d.s.e.}}$*;*

(4) *Якщо* $\mathcal{M}_0 = \mathcal{V}_0, \ldots, \mathcal{M}_k = \mathcal{V}_k$*,* $\mathcal{N}_0 = \mathcal{W}_0, \ldots, \mathcal{N}_k = \mathcal{W}_k$ *- операторні простори,* $\Omega^{(0)} \subseteq \mathcal{V}_{0,\text{nc}}, \ldots, \Omega^{(k)} \subseteq \mathcal{V}_{k,\text{nc}}$ *- рівномірно-відкриті н.к. множини, і* f *- рівномірно аналітична на* $\Omega^{(0)} \times \cdots \times \Omega^{(k)}$*, то* $f_{\text{d.s.e.}}$ *є рівномірно аналітичною на* $\Omega^{(0)}_{\text{d.s.e.}} \times \cdots \times \Omega^{(k)}_{\text{d.s.e.}}$*.*

Ми опускаємо доведення, яке є істотно подібне до того, що наведено для пропозиції 9.2.

Наша наступна мета - дати означення розширення послідовності ℓ-лінійних відображень $f_\ell\colon (\mathcal{M}^{s\times s})^\ell \to \mathcal{N}^{s\times s}$, $\ell = 0, 1, \ldots$, що задовольняють умови(4.4)–(4.7), на доданки прямих сум.

Пропозиція 9.4. *Нехай* $\mathcal{M}$ *і* $\mathcal{N}$ *- модулі над комутативним унітальним кільцем* $\mathcal{R}$*, нехай* $s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{N}$ *- такі, що* $s = s_1 + \cdots + s_m$*, нехай* $Y = Y_{11} \oplus \cdots \oplus Y_{mm} \in \mathcal{M}^{s\times s}$*, з* $Y_{ii} \in \mathcal{M}^{s_i\times s_i}$*,* $i = 1, \ldots, m$*, і нехай послідовність* ℓ*-лінійних відображень* $f_\ell\colon (\mathcal{M}^{s\times s})^\ell \to \mathcal{N}^{s\times s}$*,* $\ell = 0, 1, \ldots$ *задовольняє* (4.4)–(4.7)*. Тоді*

(1) *Відносно відповідних блочних розкладань* $s \times s$ *матриць,*

$$f^{\text{d.s.e.}}_{0;\alpha,\beta} := (f_0)_{\alpha\beta} \in \mathcal{N}^{s_\alpha\times s_\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, m, \tag{9.4}$$

задовольняють $f^{\text{d.s.e.}}_{0;\alpha,\beta} = 0$ *якщо* $\alpha \neq \beta$,

$$f_\ell(Z^1,\dots,Z^\ell)_{\alpha\beta} = \sum_{1\le\alpha_1,\dots,\alpha_{\ell-1}\le m} f^{\text{d.s.e.}}_{\ell;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}(Z^1_{\alpha_0\alpha_1},\dots,Z^\ell_{\alpha_{\ell-1}\alpha_\ell}), \tag{9.5}$$

$$\text{де } \alpha_0=\alpha,\ \alpha_\ell=\beta,\ \alpha,\beta=1,\dots,m,\ \ell=1,2,\dots,$$

з однозначно визначеними ℓ*-лінійними відображеннями*

$$f^{\text{d.s.e.}}_{\ell;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}\colon \mathcal{M}^{s_{\alpha_0}\times s_{\alpha_1}}\times\dots\times\mathcal{M}^{s_{\alpha_{\ell-1}}\times s_{\alpha_\ell}}\to\mathcal{N}^{s_{\alpha_0}\times s_{\alpha_\ell}},$$

що задовольняють

$$Sf^{\text{d.s.e.}}_{0;\beta,\beta} - f^{\text{d.s.e.}}_{0;\alpha,\alpha}S = f^{\text{d.s.e.}}_{1;\alpha,\beta}(SY_{\beta\beta}-Y_{\alpha\alpha}S),\quad S\in\mathcal{R}^{s_\alpha\times s_\beta}, \tag{9.6}$$

і для $\ell=1,2,\dots,$

$$\begin{aligned} &Sf^{\text{d.s.e.}}_{\ell;\gamma,\alpha_1,\dots,\alpha_\ell}(W^1,\dots,W^\ell) - f^{\text{d.s.e.}}_{\ell;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}(SW^1,W^2,\dots,W^\ell)\\ &= f^{\text{d.s.e.}}_{\ell+1;\alpha_0,\gamma,\alpha_1,\dots,\alpha_\ell}(SY_{\gamma\gamma}-Y_{\alpha_0\alpha_0}S,W^1,\dots,W^\ell),\quad S\in\mathcal{R}^{s_{\alpha_0}\times\gamma}, \end{aligned} \tag{9.7}$$

$$\begin{aligned} &f^{\text{d.s.e.}}_{\ell;\alpha_0,\dots,\alpha_{j-1},\gamma,\alpha_{j+1},\dots,\alpha_\ell}(W^1,\dots,W^{j-1},W^jS,W^{j+1},\dots,W^\ell)\\ &\qquad - f^{\text{d.s.e.}}_{\ell;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}(W^1,\dots,W^j,SW^{j+1},W^{j+2},\dots,W^\ell)\\ &= f^{\text{d.s.e.}}_{\ell+1;\alpha_0,\dots,\alpha_j,\gamma,\alpha_{j+1},\dots,\alpha_\ell}(W^1,\dots,W^j,SY_{\gamma\gamma}-Y_{\alpha_j\alpha_j}S,W^{j+1},\dots,W^\ell),\\ &\qquad S\in\mathcal{R}^{s_{\alpha_j}\times\gamma}, \end{aligned} \tag{9.8}$$

$$\begin{aligned} &f^{\text{d.s.e.}}_{\ell;\alpha_0,\dots,\alpha_{\ell-1},\gamma}(W^1,\dots,W^{\ell-1},W^\ell S) - f^{\text{d.s.e.}}_{\ell;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}(W^1,\dots,W^\ell)S\\ &= f^{\text{d.s.e.}}_{\ell+1;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell,\gamma}(W^1,\dots,W^\ell,SY_{\gamma\gamma}-Y_{\alpha_\ell\alpha_\ell}S),\quad S\in\mathcal{R}^{\alpha_\ell\times\gamma}. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Зокрема, умови (9.6)–(9.9) *для* $f^{\text{d.s.e.}}_{\ell;\alpha,\dots,\alpha}$, $\ell=0,1,\dots$, *з фіксованим* α, *співпадають з* (4.4)–(4.7) *для* s *заміненого на* s_α *і* Y *заміненого на* $Y_{\alpha\alpha}$*;*

(2) *Якщо* $s_1=\dots=s_m$ *і* $Y_{11}=\dots=Y_{mm}$, *то відображення* $f^{\text{d.s.e.}}_{\ell;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}$, $1\le\alpha_0,\dots,\alpha_\ell\le m$, *співпадають для кожного фіксованого* ℓ*;*

(3) *Якщо* $\mathcal{R}=\mathbb{C}$, $\mathcal{M}=\mathcal{V}$ *і* $\mathcal{N}=\mathcal{W}$ *- банахові простори, забезпечені допустимими системами норм прямокутних матриць над* $\mathcal{V}$ *і* $\mathcal{W}$, *і* ℓ*-лінійні відображення* f_ℓ *- обмежені, то такими ж є і* $f^{\text{d.s.e.}}_{\ell;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}$*;*

(4) *Якщо* $\mathcal{R}=\mathbb{C}$, $\mathcal{M}=\mathcal{V}$ *і* $\mathcal{N}=\mathcal{W}$ *- банахові простори, забезпечені допустимими системами норм прямокутних матриць над* $\mathcal{V}$ *і* $\mathcal{W}$, (7.40) *виконується для* $\mathcal{V}$ *і* $\mathcal{W}$ *з константами* $C^{\mathcal{V}}$ *і* $C^{\mathcal{W}}$, *які не залежать від* n,p,q *і* m, *і* ℓ*-лінійні відображення* f_ℓ *- цілком обмежені, то такими ж є і* $f^{\text{d.s.e.}}_{\ell;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}$, *і*

$$\|f^{\text{d.s.e.}}_{\ell;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}\|_{\mathcal{L}^\ell_{\text{cb}}}\le C^{\mathcal{W}}(C^{\mathcal{V}})^\ell\|f_\ell\|_{\mathcal{L}^\ell_{\text{cb}}}; \tag{9.10}$$

зокрема, якщо $\mathcal{V}$ *і* $\mathcal{W}$ *- операторні простори, то*

$$\|f^{\text{d.s.e.}}_{\ell;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}\|_{\mathcal{L}^\ell_{\text{cb}}}\le\|f_\ell\|_{\mathcal{L}^\ell_{\text{cb}}}. \tag{9.11}$$

Доведення. (1) Нехай $S = E_\alpha E_\alpha^\top \in \mathcal{R}^{s\times s}$. Оскільки $SY = YS$, ми отримаємо з (4.4), що $(Sf_0)_{\alpha\beta} = (f_0S)_{\alpha\beta}$, тобто $(f_0)_{\alpha\beta} = (f_0)_{\alpha\alpha}\delta_{\alpha\beta}$, отже, $(f_0)_{\alpha\beta} = 0$, якщо $\alpha \neq \beta$.

Для будь-яких $\alpha, \beta = 1, \dots, m$, і для довільного $S \in \mathcal{R}^{s_\alpha\times s_\beta}$, ми покладаємо $T = E_\alpha S E_\beta^\top$. Визначимо лінійне відображення $f^{\text{d.s.e.}}_{1;\alpha,\beta}\colon \mathcal{M}^{s_\alpha\times s_\beta} \to \mathcal{N}^{s_\alpha\times s_\beta}$ як $f^{\text{d.s.e.}}_{1;\alpha,\beta}(W) := f_1(E_\alpha W E_\beta^\top)_{\alpha\beta}$. Тоді (4.4) з T замість S тягне за собою

$$\begin{aligned} Sf^{\text{d.s.e.}}_{0;\beta,\beta} - f^{\text{d.s.e.}}_{0;\alpha,\alpha}S &= S(f_0)_{\beta\beta} - (f_0)_{\alpha\alpha}S = (Tf_0 - f_0T)_{\alpha\beta} = f_1(TY - YT)_{\alpha\beta} \\ &= f_1(E_\alpha(SY_{\beta\beta} - Y_{\alpha\alpha}S)E_\beta^\top)_{\alpha\beta} = f^{\text{d.s.e.}}_{1;\alpha,\beta}(SY_{\beta\beta} - Y_{\alpha\alpha}S), \end{aligned}$$

тобто (9.6) виконується. Подібним чином, для кожних $\ell = 2, 3, \dots,$ $\alpha_0, \dots, \alpha_\ell = 1, \dots, m$, ми вводимо ℓ-лінійне відображення

$$f^{\text{d.s.e.}}_{\ell;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}\colon \mathcal{M}^{\alpha_0\times\alpha_1} \times \dots \times \mathcal{M}^{\alpha_{\ell-1}\times\alpha_\ell} \to \mathcal{N}^{\alpha_0\times\alpha_\ell}$$

як

$$f^{\text{d.s.e.}}_{\ell;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}(W^1, \dots, W^\ell) := f_\ell(E_{\alpha_0}W^1E_{\alpha_1}^\top, \dots, E_{\alpha_{\ell-1}}W^\ell E_{\alpha_\ell}^\top)_{\alpha_0\alpha_\ell} \tag{9.12}$$

і перевіряємо, що (9.7)–(9.9) виконуються.

Нехай $1 \le \alpha, \beta \le m$ - довільні. Оскільки $E_iE_i^\top$ комутує з Y для кожного $i = 1, \dots, m$, з (4.5)–(4.7) випливає за лінійністю, що

$$\begin{aligned} f_\ell(Z^1, \dots, Z^\ell)_{\alpha\beta} &= f_\ell\Big(\sum_{1\le\gamma_0,\alpha_1\le m} E_{\gamma_0}Z^1_{\gamma_0\alpha_1}E_{\alpha_1}^\top, \dots, \\ &\qquad \sum_{1\le\gamma_{\ell-2},\alpha_{\ell-1}\le m} E_{\gamma_{\ell-2}}Z^{\ell-1}_{\gamma_{\ell-2}\alpha_{\ell-1}}E_{\alpha_{\ell-1}}^\top, \sum_{1\le\gamma_{\ell-1},\gamma_\ell\le m} E_{\gamma_{\ell-1}}Z^\ell_{\gamma_{\ell-1}\gamma_\ell}E_{\gamma_\ell}^\top\Big)_{\alpha\beta} \\ &= \Bigg(E_\alpha E_\alpha^\top f_\ell\Big(\sum_{1\le\gamma_0,\alpha_1\le m} E_{\gamma_0}Z^1_{\gamma_0\alpha_1}E_{\alpha_1}^\top E_{\alpha_1}E_{\alpha_1}^\top, \dots, \\ &\qquad \sum_{1\le\gamma_{\ell-2},\alpha_{\ell-1}\le m} E_{\gamma_{\ell-2}}Z^{\ell-1}_{\gamma_{\ell-2}\alpha_{\ell-1}}E_{\alpha_{\ell-1}}^\top E_{\alpha_{\ell-1}}E_{\alpha_{\ell-1}}^\top, \\ &\qquad \sum_{1\le\gamma_{\ell-1},\gamma_\ell\le m} E_{\gamma_{\ell-1}}Z^\ell_{\gamma_{\ell-1}\gamma_\ell}E_{\gamma_\ell}^\top\Big)E_\beta E_\beta^\top\Bigg)_{\alpha\beta} \\ &= f_\ell\Big(E_\alpha E_\alpha^\top \sum_{1\le\gamma_0,\alpha_1\le m} E_{\gamma_0}Z^1_{\gamma_0\alpha_1}E_{\alpha_1}^\top,\ E_{\alpha_1}E_{\alpha_1}^\top \sum_{1\le\gamma_1,\alpha_2\le m} E_{\gamma_1}Z^1_{\gamma_1\alpha_2}E_{\alpha_2}^\top, \dots, \\ &\qquad E_{\alpha_{\ell-2}}E_{\alpha_{\ell-2}}^\top \sum_{1\le\gamma_{\ell-2},\alpha_{\ell-1}\le m} E_{\gamma_{\ell-2}}Z^{\ell-1}_{\gamma_{\ell-2}\alpha_{\ell-1}}E_{\alpha_{\ell-1}}^\top, \\ &\qquad E_{\alpha_{\ell-1}}E_{\alpha_{\ell-1}}^\top \sum_{1\le\gamma_{\ell-1},\gamma_\ell\le m} E_{\gamma_{\ell-1}}Z^\ell_{\gamma_{\ell-1}\gamma_\ell}E_{\gamma_\ell}^\top E_\beta E_\beta^\top\Big)_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

$$= \sum_{1\le\alpha_1,\dots,\alpha_{\ell-1}\le m} f_\ell(E_\alpha Z^1_{\alpha\alpha_1}E^\top_{\alpha_1}, E_{\alpha_1}Z^2_{\alpha_1\alpha_2}E^\top_{\alpha_2},\dots,$$
$$E_{\alpha_{\ell-2}}Z^{\ell-1}_{\alpha_{\ell-2}\alpha_{\ell-1}}E^\top_{\alpha_{\ell-1}}, E_{\alpha_{\ell-1}}Z^\ell_{\alpha_{\ell-1}\beta}E^\top_\beta)_{\alpha\beta}$$
$$= \sum_{1\le\alpha_1,\dots,\alpha_{\ell-1}\le m} f^{\text{d.s.e.}}_{\ell;\alpha,\alpha_1,\dots,\alpha_{\ell-1},\alpha_\ell}(Z^1_{\alpha\alpha_1}, Z^2_{\alpha_1\alpha_2},\dots,Z^{\ell-1}_{\alpha_{\ell-2}\alpha_{\ell-1}}, Z^\ell_{\alpha_{\ell-1}\beta}),$$

тобто (9.5) виконується. З другого боку, якщо (9.5) задовольняється з деякими ℓ-лінійними відображеннями

$$f^{\text{d.s.e.}}_{\ell;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}\colon \mathcal{M}^{s_{\alpha_0}\times s_{\alpha_1}}\times\dots\times\mathcal{M}^{s_{\alpha_{\ell-1}}\times s_{\alpha_\ell}}\to\mathcal{N}^{s_{\alpha_0}\times s_{\alpha_\ell}},$$

то

$$f_\ell(E_{\alpha_0}Z^1_{\alpha_0\alpha_1}E^\top_{\alpha_1},\dots,E_{\alpha_{\ell-1}}Z^\ell_{\alpha_{\ell-1}\alpha_\ell}E^\top_{\alpha_\ell})_{\alpha_0\alpha_\ell}$$
$$= f^{\text{d.s.e.}}_{\ell;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}\Big((E_{\alpha_0}Z^1_{\alpha_0\alpha_1}E^\top_{\alpha_1})_{\alpha_0\alpha_1},\dots,(E_{\alpha_{\ell-1}}Z^\ell_{\alpha_{\ell-1}\alpha_\ell}E^\top_{\alpha_\ell})_{\alpha_{\ell-1}\alpha_\ell}\Big)$$
$$= f^{\text{d.s.e.}}_{\ell;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}(Z^1_{\alpha_0\alpha_1},\dots,Z^\ell_{\alpha_{\ell-1}\alpha_\ell}),$$

що співпадає з нашим оригінальним означенням $f^{\text{d.s.e.}}_{\ell;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}$ у (9.12).

(2) випливає з (9.6)–(9.9) з $S = I_{s/m}$.

(3) За (9.12) і (7.44), ми маємо для $W^1\in\mathcal{V}^{s_{\alpha_0}\times s_{\alpha_1}}$, …, $W^\ell\in\mathcal{V}^{s_{\alpha_{\ell-1}}\times s_{\alpha_\ell}}$:

$$\|f^{\text{d.s.e.}}_{\ell;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}(W^1,\dots,W^\ell)\|_{s_{\alpha_0},s_{\alpha_1}}$$
$$= \|\pi^{(s_1,\dots,s_m),\mathcal{W}}_{\alpha_0,\alpha_\ell} f^\ell(E_{\alpha_0}W^1E^\top_{\alpha_1},\dots,E_{\alpha_{\ell-1}}W^\ell E^\top_{\alpha_\ell})\|_{s_{\alpha_0},s_{\alpha_1}}$$
$$\le C^{\mathcal{W}}(s_{\alpha_0},s,s,s_{\alpha_\ell})\|f_\ell\|\|E_{\alpha_0}W^1E^\top_{\alpha_1}\|_s\cdots\|E_{\alpha_{\ell-1}}W^\ell E^\top_{\alpha_\ell}\|_s$$
$$\le C^{\mathcal{W}}(s_{\alpha_0},s,s,s_{\alpha_\ell})C^{\mathcal{V}}(s,s_{\alpha_0},s_{\alpha_1},s)\cdots C^{\mathcal{V}}(s,s_{\alpha_0},s_{\alpha_1},s)$$
$$\cdot\|f_\ell\|\,\|W^1\|_{s_{\alpha_0},s_{\alpha_1}}\cdots\|W^\ell\|_{s_{\alpha_{\ell-1}},s_{\alpha_\ell}},$$

де ми вказуємо відповідний банахів простір у нижньому індексі для відповідних прямокутних блочних проєкцій і констант. Таким чином, ℓ-лінійні відображення $f^{\text{d.s.e.}}_{\ell;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}$ є обмеженими.

(4) За (9.12) і (7.44), ми маємо для кожних n_0, …, $n_\ell\in\mathbb{N}$ і для кожних $W^1\in(\mathcal{V}^{s_{\alpha_0}\times s_{\alpha_1}})^{n_0\times n_1}\cong\mathcal{V}^{s_{\alpha_0}n_0\times s_{\alpha_1}n_1}$, …, $W^\ell\in\big(\mathcal{V}^{s_{\alpha_{\ell-1}}\times s_{\alpha_\ell}}\big)^{n_{\ell-1}\times n_\ell}\cong\mathcal{V}^{s_{\alpha_{\ell-1}}n_{\ell-1}\times s_{\alpha_\ell}n_\ell}$:

$$\|f^{\text{d.s.e.}(n_0,\dots,n_\ell)}_{\ell;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}(W^1,\dots,W^\ell)\|_{s_{\alpha_0}n_0,s_{\alpha_1}n_1}$$
$$= \|f^{(n_0,\dots,n_\ell)}_\ell((\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n_0\times n_0}}\otimes E_{\alpha_0})W^1(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n_1\times n_1}}\otimes E^\top_{\alpha_1}),\dots,$$
$$(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n_{\ell-1}\times n_{\ell-1}}}\otimes E_{\alpha_{\ell-1}})W^\ell(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n_\ell\times n_\ell}}\otimes E^\top_{\alpha_\ell}))_{s_{\alpha_0}n_0,s_{\alpha_1}n_1}\|_{s_{\alpha_0}n_0,s_{\alpha_1}n_1}$$
$$\le C^{\mathcal{W}}\|f_\ell\|_{\mathcal{L}^\ell_{\text{cb}}}\|(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n_0\times n_0}}\otimes E_{\alpha_0})W^1(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n_1\times n_1}}\otimes E^\top_{\alpha_1})\|_{sn_0,sn_1}\cdots$$
$$\cdot\|(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n_{\ell-1}\times n_{\ell-1}}}\otimes E_{\alpha_{\ell-1}})W^\ell(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n_\ell\times n_\ell}}\otimes E^\top_{\alpha_\ell})\|_{sn_{\ell-1},sn_\ell}$$
$$\le C^{\mathcal{W}}(C^{\mathcal{V}})^\ell\|f_\ell\|_{\mathcal{L}^\ell_{\text{cb}}}\|W^1\|_{s_{\alpha_0}n_0,s_{\alpha_1}n_1}\cdots\|W^\ell\|_{s_{\alpha_{\ell-1}}n_{\ell-1},s_{\alpha_\ell}n_\ell},$$

що тягне за собою (9.10). Звісно, у випадку операторних просторів, $C^{\mathcal{V}} = C^{\mathcal{W}} = 1$, і (9.10) стає (9.11). $\square$

Зауваження 9.5. Нехай $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. множина, яка є інваріантною щодо подібностей, нехай $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. функція, і нехай $Y = \bigoplus_{i=1}^m Y_{ii} \in \Omega_s$, з $Y_{ii} \in \mathcal{M}^{s_i \times s_i}$. Тоді послідовність ℓ-лінійних відображень

$$f_\ell := \Delta_R^\ell f(Y, \dots, Y)\colon \left(\mathcal{M}^{s\times s}\right)^\ell \to \mathcal{N}^{s\times s}, \qquad \ell = 0, 1, \dots,$$

задовольняє (4.4)–(4.7); дивись зауваження 4.3. За пропозицією 9.1, $\Omega_{\mathrm{d.s.e.}} \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ є н.к. множиною, інваріантною щодо подібностей, яка містить Ω, і за пропозицією 9.2, існує н.к. функція $f_{\mathrm{d.s.e.}}\colon \Omega_{\mathrm{d.s.e.}} \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$, що поширює f. Ми тоді маємо (3.6) для $k = \ell$ і $X^0 = \dots = X^\ell = Y$, з f у лівій частині заміненою на f_ℓ, і f у правій частині заміненою на $\Delta_R^\ell f_{\mathrm{d.s.e.}}$. Порівнюючи цю нерівність з (9.5), ми робимо висновок, що

$$f^{\mathrm{d.s.e.}}_{\ell;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell} = \Delta_R^\ell f_{\mathrm{d.s.e.}}(Y_{\alpha_0\alpha_0}, \dots, Y_{\alpha_\ell\alpha_\ell}). \tag{9.13}$$

З другого боку, для даної послідовності ℓ-лінійних відображень $f_\ell\colon \left(\mathcal{M}^{s\times s}\right)^\ell \to \mathcal{N}^{s\times s}$, $\ell = 0, 1, \dots$, що задовольняють умови (4.4)–(4.7) для $Y = \bigoplus_{i=1}^m Y_{ii} \in \mathcal{M}^{s\times s}$, за теоремою 5.13 ми можемо розглянути н.к. функцію

$$f(X) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s \ell} f_\ell \tag{9.14}$$

на $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y)$ із значеннями у $\mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$. Більше того, за теоремою 5.9, ми маємо, що $f_\ell = \Delta_R^\ell f(Y, \dots, Y)$. Поширюючи f до $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y)_{\mathrm{d.s.e.}}$ і записуючи ТТ розвинення для $f_{\mathrm{d.s.e.}}$ (яке є скінченною сумою у кожній точці $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y)_{\mathrm{d.s.e.}}$), ми можемо визначити розширення на доданки прямих сум $f^{\mathrm{d.s.e.}}_{\ell;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}$ для ℓ-лінійних відображень f_ℓ за (9.13). Це дає альтернативний шлях доведення частин (1) і (2) пропозиції 9.4, використовуючи пропозицію 9.2. Частини (3) і (4) пропозиції 9.4 можуть також бути виведені з пропозиції 9.2 за умови, що ряд у (9.14) визначає аналітичну (відп., рівномірно аналітичну) н.к. функцію f на деякому відкритому (відп., рівномірно-відкритому) околі Y.

Подібним шляхом, ми можемо визначити розширення послідовності ℓ-лінійних відображень $f_w\colon \left(\mathcal{M}^{s\times s}\right)^\ell \to \mathcal{N}^{s\times s}$, $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$, що задовольняють умови (4.14)–(4.17), на доданки прямих сум. Наступна пропозиція може бути доведена подібно до доведення пропозиції 9.4, або може бути виведена з результату пропозиції 9.4 за допомогою співвідношень (5.5), (5.7).

Пропозиція 9.6. *Нехай $\mathcal{R}$ - комутативне унітальне кільце, нехай $\mathcal{N}$ - модуль над $\mathcal{R}$, нехай $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{N}$ такі, що $s = s_1 + \dots + s_m$, нехай $Y = (Y_1, \dots, Y_d) \in \left(\mathcal{R}^{s\times s}\right)^d$ і $Y_k = (Y_k)_{11} \oplus \dots \oplus (Y_k)_{mm} \in \mathcal{R}^{s\times s}$, з $(Y_k)_{ii} \in \mathcal{R}^{s_i\times s_i}$, $k = 1, \dots, d$, $i = 1, \dots, m$, і нехай послідовність ℓ-лінійних відображень $f_w\colon \left(\mathcal{R}^{s\times s}\right)^\ell \to \mathcal{N}^{s\times s}$, $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d\colon |w| = \ell$, $\ell = 0, 1, \dots$, задовольняє* (4.14)–(4.17). *Тоді*

(1) *Відносно відповідного блочного розкладання $s \times s$ матриць,*

$$f^{\text{d.s.e.}}_{\emptyset;\alpha,\beta} := (f_\emptyset)_{\alpha\beta} \in \mathcal{N}^{s_\alpha \times s_\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, m, \tag{9.15}$$

задовольняє $f^{\text{d.s.e.}}_{\emptyset;\alpha,\beta} = 0$ *якщо* $\alpha \neq \beta$,

$$f_w(A^1, \dots, A^\ell)_{\alpha\beta} = \sum_{1 \le \alpha_1, \dots, \alpha_{\ell-1} \le m} f^{\text{d.s.e.}}_{w;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}(A^1_{\alpha_0\alpha_1}, \dots, A^\ell_{\alpha_{\ell-1}\alpha_\ell}), \tag{9.16}$$

$$\text{де } |w| = \ell,\ \alpha_0 = \alpha,\ \alpha_\ell = \beta,\ \alpha, \beta = 1, \dots, m,\ \ell = 1, 2, \dots,$$

з однозначно визначеними ℓ-лінійними відображеннями

$$f^{\text{d.s.e.}}_{w;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell} \colon \mathcal{R}^{s_{\alpha_0} \times s_{\alpha_1}} \times \dots \times \mathcal{R}^{s_{\alpha_{\ell-1}} \times s_{\alpha_\ell}} \to \mathcal{N}^{s_{\alpha_0} \times s_{\alpha_\ell}},$$

що задовольняють

$$S f^{\text{d.s.e.}}_{\emptyset;\beta,\beta} - f^{\text{d.s.e.}}_{\emptyset;\alpha,\alpha} S = \sum_{k=1}^{d} f^{\text{d.s.e.}}_{g_k;\alpha,\beta}(S(Y_k)_{\beta\beta} - (Y_k)_{\alpha\alpha} S), \quad S \in \mathcal{R}^{s_\alpha \times s_\beta}, \tag{9.17}$$

і для $\ell = 1, 2, \dots,$

$$\begin{aligned} S f^{\text{d.s.e.}}_{w;\gamma,\alpha_1,\dots,\alpha_\ell}(A^1, \dots, A^\ell) - f^{\text{d.s.e.}}_{w;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}(SA^1, A^2, \dots, A^\ell) \\ = \sum_{k=1}^{d} f^{\text{d.s.e.}}_{g_k w;\alpha_0,\gamma,\alpha_1,\dots,\alpha_\ell}(S(Y_k)_{\gamma\gamma} - (Y_k)_{\alpha_0\alpha_0} S, A^1, \dots, A^\ell), \quad S \in \mathcal{R}^{s_{\alpha_0} \times \gamma}, \end{aligned} \tag{9.18}$$

$$\begin{aligned} f^{\text{d.s.e.}}_{w;\alpha_0,\dots,\alpha_{j-1},\gamma,\alpha_{j+1},\dots,\alpha_\ell}(A^1, \dots, A^{j-1}, A^j S, A^{j+1}, \dots, A^\ell) \\ - f^{\text{d.s.e.}}_{w;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}(A^1, \dots, A^j, SA^{j+1}, A^{j+2}, \dots, A^\ell) \end{aligned} \tag{9.19}$$

$$= \sum_{k=1}^{d} f^{\text{d.s.e.}}_{g_{i_1} \cdots g_{i_j} g_k g_{i_{j+1}} \cdots g_{i_\ell};\alpha_0,\dots,\alpha_j,\gamma,\alpha_{j+1},\dots,\alpha_\ell}(A^1, \dots, A^j, S(Y_k)_{\gamma\gamma} - (Y_k)_{\alpha_j\alpha_j} S, A^{j+1}, \dots, A^\ell),$$

$$w = g_{i_1} \cdots g_{i_\ell} \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d,\ S \in \mathcal{R}^{s_{\alpha_j} \times \gamma},$$

$$\begin{aligned} f^{\text{d.s.e.}}_{w;\alpha_0,\dots,\alpha_{\ell-1},\gamma}(A^1, \dots, A^{\ell-1}, A^\ell S) - f^{\text{d.s.e.}}_{w;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}(A^1, \dots, A^\ell) S \\ = \sum_{k=1}^{d} f^{\text{d.s.e.}}_{w g_k;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell,\gamma}(A^1, \dots, A^\ell, S(Y_k)_{\gamma\gamma} - (Y_k)_{\alpha_\ell\alpha_\ell} S), \quad S \in \mathcal{R}^{\alpha_\ell \times \gamma}. \end{aligned} \tag{9.20}$$

Зокрема, умови (9.17)–(9.20) *для* $f^{\text{d.s.e.}}_{w;\alpha,\dots,\alpha}$, $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$, *з фіксованим* α, *співпадають з* (4.14)–(4.17) *для* s *заміненим на* s_α *і* Y *заміненим на* $Y_{\alpha\alpha}$;

(2) *Якщо* $s_1 = \ldots = s_m$ *і* $Y_{11} = \cdots = Y_{mm}$, *то відображення* $f^{\text{d.s.e.}}_{w;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}$, $1 \le \alpha_0, \dots, \alpha_\ell \le m$, *співпадають для кожного фіксованого* w;

(3) *Якщо* $\mathcal{R} = \mathbb{C}$, $\mathcal{M} = \mathcal{V}$ *і* $\mathcal{N} = \mathcal{W}$ *- банахові простори, забезпечені допустимими системами норм прямокутних матриць над* $\mathcal{V}$ *і* $\mathcal{W}$, *і* ℓ*-лінійні відображення* f_w *- обмежені, то такими ж є і* $f^{\text{d.s.e.}}_{w;\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}$;

(4) *Якщо* $\mathcal{R} = \mathbb{C}$, $\mathcal{M} = \mathcal{V}$ *і* $\mathcal{N} = \mathcal{W}$ *- банахові простори, забезпечені допустимими системами норм прямокутних матриць над* $\mathcal{V}$ *і* $\mathcal{W}$, (7.40) *виконуються для* $\mathcal{V}$ *і* $\mathcal{W}$ *з константами* $C^{\mathcal{V}}$ *і* $C^{\mathcal{W}}$, *які не залежать від* n, p, q *і* m, *і* ℓ*-лінійні відображення* f_w *- цілком обмежені, то такими ж є і* $f^{\text{d.s.e.}}_{w;\alpha_0,\ldots,\alpha_\ell}$, *і*

$$\|f^{\text{d.s.e.}}_{w;\alpha_0,\ldots,\alpha_\ell}\|_{\mathcal{L}^\ell_{\text{cb}}} \leq C^{\mathcal{W}}(C^{\mathcal{V}})^\ell \|f_w\|_{\mathcal{L}^\ell_{\text{cb}}}; \tag{9.21}$$

зокрема, якщо $\mathcal{V}$ *і* $\mathcal{W}$ *- операторні простори, то*

$$\|f^{\text{d.s.e.}}_{w;\alpha_0,\ldots,\alpha_\ell}\|_{\mathcal{L}^\ell_{\text{cb}}} \leq \|f_w\|_{\mathcal{L}^\ell_{\text{cb}}}. \tag{9.22}$$

Розділ 10

Подібностно інваріантні конверти і розширення н.к. функцій

Пропозиція 10.1. *Нехай $\mathcal{M}$ - модуль над комутативним унітальним кільцем $\mathcal{R}$, і нехай $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. множина. Тоді*

$$\widetilde{\Omega} := \{SXS^{-1} \colon X \in \Omega_n, S \in \mathcal{R}^{n\times n} \text{ оборотна}, n \in \mathbb{N}\}$$

- н.к. множина.

Ясно, що $\widetilde{\Omega}$ - найменша н.к. множина, що містить Ω і є інваріантною щодо подібностей. Ми будемо називати $\widetilde{\Omega}$ *подібностно інваріантним конвертом н.к. множини* Ω.

Доведення пропозиції 10.1. Нехай $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$, і нехай $S \in \mathcal{R}^{n\times n}$, $T \in \mathcal{R}^{m\times m}$ - оборотні, $n, m \in \mathbb{N}$. Тоді матриця $S \oplus T \in \mathcal{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ є оборотною, $X \oplus Y \in \Omega_{n+m}$ і

$$SXS^{-1} \oplus TYT^{-1} = (S \oplus T)(X \oplus Y)(S \oplus T)^{-1} \in \widetilde{\Omega}_{n+m}.$$

□

Пропозиція 10.2. *Якщо $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ - допустима справа (відп., зліва) н.к. множина, то такою є і її подібностно інваріантний конверт $\widetilde{\Omega}$. Більше того, для будь-яких $\widetilde{X} \in \widetilde{\Omega}_n$, $\widetilde{Y} \in \widetilde{\Omega}_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{n\times m}$ ми маємо*

$$\begin{bmatrix} \widetilde{X} & Z \\ 0 & \widetilde{Y} \end{bmatrix} \in \widetilde{\Omega}_{n+m},$$

і, відповідно, для будь-яких $\widetilde{X} \in \widetilde{\Omega}_n$, $\widetilde{Y} \in \widetilde{\Omega}_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{m\times n}$ ми маємо

$$\begin{bmatrix} \widetilde{X} & 0 \\ Z & \widetilde{Y} \end{bmatrix} \in \widetilde{\Omega}_{n+m}.$$

Доведення. Ми дамо доведення для допустимої справа н.к. множини Ω. Подібний аргумент працює для допустимої зліва н.к. множини Ω. Нехай $\widetilde{X} \in \widetilde{\Omega}_n$, $\widetilde{Y} \in \widetilde{\Omega}_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{n\times m}$. Тоді існують $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і оборотні $S \in \mathcal{R}^{n\times n}$, $T \in \mathcal{R}^{m\times m}$, а також $r \in \mathcal{R}$, такі, що $\widetilde{X} = SXS^{-1}$, $\widetilde{Y} = TYT^{-1}$ і

$$\begin{bmatrix} X & rS^{-1}ZT \\ 0 & Y \end{bmatrix} \in \Omega_{n+m}.$$

Тоді

$$\begin{bmatrix} \widetilde{X} & Z \\ 0 & \widetilde{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^{-1}S & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & rS^{-1}ZT \\ 0 & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^{-1}S & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}^{-1} \in \widetilde{\Omega}_{n+m}.$$

□

Пропозиція 10.3. *Нехай $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ - модулі над комутативним унітальним кільцем $\mathcal{R}$, нехай $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. множина, і нехай $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. функція. Тоді існує єдина н.к. функція $\widetilde{f}\colon \widetilde{\Omega} \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ така, що $\widetilde{f}\,|_{\Omega} = f$.*

Доведення. Для будь-яких $n \in \mathbb{N}$ і $\widetilde{X} \in \widetilde{\Omega}_n$, існують $X \in \Omega_n$ і оборотне $S \in \mathcal{R}^{n\times n}$ такі, що $\widetilde{X} = SXS^{-1}$, і ми покладаємо $\widetilde{f}(\widetilde{X}) = Sf(X)S^{-1}$. Це означення - коректне, оскільки $SXS^{-1} = TYT^{-1}$ для всіх $X, Y \in \Omega_n$ і для оборотних $S, T \in \mathcal{R}^{n\times n}$ тягне за собою, що $Y = (T^{-1}S)X(T^{-1}S)^{-1}$, отже, $f(Y) = (T^{-1}S)f(X)(T^{-1}S)^{-1}$ і $Tf(Y)T^{-1} = Sf(X)S^{-1}$. Безпосердньо перевіряється, що $\widetilde{f}\colon \widetilde{\Omega} \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ - н.к. функція і що $\widetilde{f}\,|_{\Omega} = f$. Якщо $\widetilde{g}\colon \widetilde{\Omega} \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ - інша н.к. функція така, що $\widetilde{g}\,|_{\Omega} = f$, то для будь-якого $X \in \Omega_n$ і оборотного $S \in \mathcal{R}^{n\times n}$ ми маємо

$$\widetilde{g}(SXS^{-1}) = S\widetilde{g}(X)S^{-1} = Sf(X)S^{-1} = \widetilde{f}(SXS^{-1}),$$

тобто ми необхідно маємо $\widetilde{g} = \widetilde{f}$. □

Ми будемо називати н.к. функцію $\widetilde{f}\colon \widetilde{\Omega} \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ з пропозиції 10.3 *канонічним розширенням н.к. функції $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$.*

Приклад 10.4. Нехай $\mathcal{V} = \mathcal{W} = \mathbb{C}$, з канонічною структурою операторного простору. Н.к. одинична куля $\Omega = B_{\mathrm{nc}}(0_{1\times 1}, 1)$ є н.к. множиною. Тоді її подібностно інваріантний конверт - це

$$\widetilde{\Omega} = \{Z \in \mathbb{C}_{\mathrm{nc}} \colon r_{\mathrm{spec}}(Z) < 1\}.$$

Справді, нехай $Z \in \mathbb{C}^{n\times n}$ - таке, що $r_{\mathrm{spec}}(Z) < 1$. Нам потрібно показати, що $Z = SXS^{-1}$ для деякого $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ з $\|X\| < 1$ і деякої оборотної матриці $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Достатньо показати це для жорданової клітини Z, тобто для

$$Z = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

з $|\lambda| < 1$. Нехай $\epsilon > 0$ - таке, що $\|X\| < 1$, де

$$X = \begin{bmatrix} \lambda & \epsilon & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \epsilon \\ & & & \lambda \end{bmatrix}.$$

Тоді $Z = SXS^{-1}$ з $S = \operatorname{diag}(\epsilon^{-1}, \dots, \epsilon^{-n})$.

Ясно, що н.к. функція $f\colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$, визначена як $f(Z) = (I - Z)^{-1}$, може бути канонічно розширена до н.к. функції на $\widetilde{\Omega}$, використовуючи таку саму формулу.

Пропозиція 10.3 може бути розширена на н.к. функції вищого порядку наступним чином.

Пропозиція 10.5. *Нехай $\mathcal{M}_0, \dots, \mathcal{M}_k, \mathcal{N}_0, \dots, \mathcal{N}_k$ - модулі над комутативним унітальним кільцем $\mathcal{R}$, нехай $\Omega^{(0)} \subseteq \mathcal{M}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \Omega^{(k)} \subseteq \mathcal{M}_{k,\mathrm{nc}}$ - н.к. множини, і нехай $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \dots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}})$. Тоді існує єдина н.к. функція порядку k, $\widetilde{f} \in \mathcal{T}^k(\widetilde{\Omega}^{(0)}, \dots, \widetilde{\Omega}^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}})$, така, що $\widetilde{f}|_{\Omega^{(0)} \times \dots \times \Omega^{(k)}} = f$.*

Доведення. Для будь-яких $n_0, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ і $\widetilde{X}^j \in \widetilde{\Omega}^{(j)}_{n_j}$, існують $X^j \in \Omega^{(j)}_{n_j}$ і оборотна матриця $S_j \in \mathcal{R}^{n_j \times n_j}$ такі, що $\widetilde{X}^j = S_j X^j S_j^{-1}$, $j = 0, \dots, k$. Ми покладаємо для будь-якого $Z^j \in \mathcal{N}_j^{n_{j-1} \times n_j}$, $j = 1, \dots, k$,

$$\widetilde{f}(\widetilde{X}^0, \dots, \widetilde{X}^k)(Z^1, \dots, Z^k) = S_0 f(X^0, \dots, X^k)(S_0^{-1} Z^1 S_1, \dots, S_{k-1}^{-1} Z^k S_k) S_k^{-1}.$$

Це означення коректне, оскільки рівності $S_j X^j S_j^{-1} = T_j Y^j T_j^{-1}$ для $X^j, Y^j \in \Omega^{(j)}_{n_j}$ і для оборотних $S_j, T_j \in \mathcal{R}^{n_j \times n_j}$ тягнуть за собою $Y^j = (T_j^{-1} S_j) X^j (T_j^{-1} S_j)^{-1}$, отже, за (3.3),

$$\begin{aligned} f(Y^0, \dots, Y^k)(T_0^{-1} S_0 Z^1 S_1^{-1} T_1, \dots, T_{k-1}^{-1} S_{k-1} Z^k S_k^{-1} T_k) \\ = T_0^{-1} S_0 f(X^0, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^k) S_k^{-1} T_k, \end{aligned}$$

і для $W_j = S_{j-1} Z^j S_j^{-1}$ ми маємо

$$\begin{aligned} T_0 f(Y^0, \dots, Y^k)(T_0^{-1} W^1 T_1, \dots, T_{k-1}^{-1} W^k T_k) T_k^{-1} \\ = S_0 f(X^0, \dots, X^k)(S_0^{-1} W^j S_1, \dots, S_{k-1}^{-1} W^1 S_k) S_k^{-1}. \end{aligned}$$

Очевидно, що $\widetilde{f}$ є інваріантною щодо подібностей, і що $\widetilde{f}\,|_{\Omega^{(0)} \times \dots \times \Omega^{(k)}} = f$. Ми також маємо

$$\begin{aligned} &\widetilde{f}(\widetilde{X}^{0\prime} \oplus \widetilde{X}^{0\prime\prime}, \dots, \widetilde{X}^{k\prime} \oplus \widetilde{X}^{k\prime\prime}) \left(\begin{bmatrix} Z^{1\prime,\prime} & Z^{1\prime,\prime\prime} \\ Z^{1\prime\prime,\prime} & Z^{1\prime\prime,\prime\prime} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} Z^{k\prime,\prime} & Z^{k\prime,\prime\prime} \\ Z^{k\prime\prime,\prime} & Z^{k\prime\prime,\prime\prime} \end{bmatrix} \right) \\ &\quad = (S_0' \oplus S_0'') f(X^{0\prime} \oplus X^{0\prime\prime}, \dots, X^{k\prime} \oplus X^{k\prime\prime}) \left(\begin{bmatrix} (S_0')^{-1} Z^{1\prime,\prime} S_1' & (S_0')^{-1} Z^{1\prime,\prime\prime} S_1'' \\ (S_0'')^{-1} Z^{1\prime\prime,\prime} S_1' & (S_0'')^{-1} Z^{1\prime\prime,\prime\prime} S_1'' \end{bmatrix}, \right. \\ &\qquad \left. \dots, \begin{bmatrix} (S_{k-1}')^{-1} Z^{k\prime,\prime} S_k' & (S_{k-1}')^{-1} Z^{k\prime,\prime\prime} S_k'' \\ (S_{k-1}'')^{-1} Z^{k\prime\prime,\prime} S_k' & (S_k'')^{-1} Z^{k\prime\prime,\prime\prime} S_k'' \end{bmatrix} \right) (S_k' \oplus S_k'')^{-1} \\ &\qquad = \begin{bmatrix} S_0' f^{\prime,\prime} (S_k')^{-1} & S_0' f^{\prime,\prime\prime} (S_k'')^{-1} \\ S_0'' f^{\prime\prime,\prime} (S_k')^{-1} & S_0'' f^{\prime\prime,\prime\prime} (S_k'')^{-1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

де відповідно до (3.1) і (3.2), для $\alpha, \beta \in \{',''\}$,

$$f^{\alpha,\beta} = \sum_{\alpha_0,\dots,\alpha_k \in \{',''\}:\ \alpha_0=\alpha, \alpha_k=\beta} f(X^{0\alpha_0}, \dots, X^{k\alpha_k}) \\ \left((S_0^{\alpha_0})^{-1} Z^{1\alpha_0,\alpha_1} S_1^{\alpha_1}, \dots, (S_{k-1}^{\alpha_{k-1}})^{-1} Z^{k\alpha_{k-1},\alpha_k} S_k^{\alpha_k}\right).$$

Тут $n_j' \in \mathbb{N}$, $n_j'' \in \mathbb{Z}_+$, $X^{j\alpha} \in \Omega_{n_j^\alpha}^{(j)}$, $\widetilde{X}^{j\alpha} \in \widetilde{\Omega}_{n_j^\alpha}^{(j)}$ для $j = 0, \dots, k$ - такі, що $\widetilde{X}^{j\alpha} = S_j^\alpha X^{j\alpha} (S_j^\alpha)^{-1}$ для оборотних $S_j \in \mathcal{R}^{n_j^\alpha \times n_j^\alpha}$, $\alpha \in \{',''\}$; $Z^{j\alpha,\beta} \in \mathcal{N}_j^{n_{j-1}^\alpha \times n_j^\beta}$ для $j = 1, \dots, k$, $\alpha, \beta \in \{',''\}$, блочний елемент $f^{\alpha,\beta}$ є порожнім, якщо n_0^α або n_k^β є 0, і доданок у сумі в правій частині є 0, якщо принаймні один з $n_j^{\alpha_j}$, $j = 1, \dots, k-1$, є 0. Отже,

$$\widetilde{f}(\widetilde{X}^{0\prime} \oplus \widetilde{X}^{0\prime\prime}, \dots, \widetilde{X}^{k\prime} \oplus \widetilde{X}^{k\prime\prime}) \left(\begin{bmatrix} Z^{1\prime,\prime} & Z^{1\prime,\prime\prime} \\ Z^{1\prime\prime,\prime} & Z^{1\prime\prime,\prime\prime} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} Z^{k\prime,\prime} & Z^{k\prime,\prime\prime} \\ Z^{k\prime\prime,\prime} & Z^{k\prime\prime,\prime\prime} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \widetilde{f}^{\prime,\prime} & \widetilde{f}^{\prime,\prime\prime} \\ \widetilde{f}^{\prime\prime,\prime} & \widetilde{f}^{\prime\prime,\prime\prime} \end{bmatrix},$$

з

$$\widetilde{f}^{\alpha,\beta} = S_0^\alpha f^{\alpha,\beta} (S_k^\beta)^{-1} = \sum_{\alpha_0,\dots,\alpha_k \in \{',''\}:\ \alpha_0=\alpha, \alpha_k=\beta} S_0^\alpha f\left(X^{0\alpha_0}, \dots, X^{k\alpha_k}\right) \\ \left((S_0^{\alpha_0})^{-1} Z^{1\alpha_0,\alpha_1} S_1^{\alpha_1}, \dots, (S_{k-1}^{\alpha_{k-1}})^{-1} Z^{k\alpha_{k-1},\alpha_k} S_k^{\alpha_k}\right) (S_k^\beta)^{-1} \\ = \sum_{\alpha_0,\dots,\alpha_k \in \{',''\}:\ \alpha_0=\alpha, \alpha_k=\beta} \widetilde{f}(\widetilde{X}^{0\alpha_0}, \dots, \widetilde{X}^{k\alpha_k})(Z^{1\alpha_0,\alpha_1}, \dots, Z^{k\alpha_{k-1},\alpha_k}).$$

Таким чином, $\widetilde{f}$ є інваріантною щодо прямих сум. Далі, якщо

$$\widetilde{g} \in \mathcal{T}^k(\widetilde{\Omega}^{(0)}, \dots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}})$$

- інша н.к. функція порядку k така, що $\widetilde{g}\,|_{\Omega^{(0)} \times \dots \times \Omega^{(k)}} = f$, то для будь-яких $X^j \in \Omega_{n_j}^{(j)}$ і оборотних $S_j \in \mathcal{R}^{n_j \times n_j}$, $j = 0, \dots, k$, ми маємо

$$\widetilde{g}(S_0 X^0 S_0^{-1}, \dots, S_k X^k S_k^{-1})(S_0 Z^1 S_1^{-1}, \dots, S_{k-1} Z^k S_k^{-1}) \\ = S_0 \widetilde{g}(X^0, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^k) S_k^{-1} = S_0 f(X^0, \dots, X^k)(Z^1, \dots, Z^k) S_k^{-1} \\ = \widetilde{f}(S_0 X^0 S_0^{-1}, \dots, S_k X^k S_k^{-1})(S_0 Z^1 S_1^{-1}, \dots, S_{k-1} Z^k S_k^{-1}),$$

тобто ми маємо обов'язково $\widetilde{g} = \widetilde{f}$. □

Ми будемо називати н.к. функцію $\widetilde{f} \in \mathcal{T}^k(\widetilde{\Omega}^{(0)}, \dots, \widetilde{\Omega}^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}})$ *канонічним розширенням н.к. функції* $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \dots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}})$.

Висновки

Аналітичні функції від d некомутуючих змінних з'являются у роботі Дж. Л. Тейлора у некомутативній спектральній теорії на початку 70-х років 20 століття. Наприкінці 90-х років та на початку 21 століття інтерес до цих фунцій підвищився у зв'язку з розвитком теорії вільної ймовірності у роботах Д.-В. Войкулеску. Інші некомутативні об'єкти, такі як квазидетермінанти, некомутативні многочлени і раціональні функції, формальні степеневі ряди виникали у різних областях алгебри і аналізу, теорії автоматів і лінійних систем, теорії зображень операторних алгебр. Незважаючи на широкий спектр задач і областей дослідження, деякі спільні характеристики цих об'єктів вимагали побудову загальної теорії, яка би допускала дослідження їх разом.

У дисертації спочатку розглянуті задачи, в яких досліджені різні типи некомутативних об'єктів, що може розглядатися як мотивація для розвитку загальної теорії, а потім побудовано основи теорії вільних некомутативних функцій, тобто відображень матриць над деяким модулем (у спеціальному випадку, над лінійним простором) у матриці над іншим модулем, які зберігають матричні розміри і є інваріантними щодо прямих сум і подібностей, або еквівалентно, щодо переплетень матриць.

Основні результати дисертації такі:

- побудована теорія матричнозначних некомутативних раціональних функцій, зокрема розвинуте диференціальне числення і досліджені оператори лівого та правого зворотних зсувів;
- доведена теорема про сингулярності матричнозначних некомутативних раціональних функцій у термінах їх мінімальних реалізацій;
- розвинуто метод некомутативного ліфтінгу, за допомогою якого, зокрема, результат про сингулярності застосовано для отримання аналогічного результату у комутативному випадку;
- результати про сингулярності модифіковано і застосовано для отримання стискаючого детермінантного зображення комутативних многочленів, що є стійкими у матричній полікулі;
- досліджені некомутативні раціональні функції з симетріями, зокрема доведена так звана некомутативна обмежена дійсна лема без втрат;
- доведено формулу, що пов'язує перетин нульових підпросторів коефіцієнтів некомутативного формального степеневого ряду з перетином нульових

підпросторів значень суми цього ряду на матрицях достатньо великого розміру; ця формула узагальнює відому теорему про відсутність раціональних тотожностей вірних на матрицях усіх розмірів;

- доведено, що формально додатні некомутативні ядра можна описати як ядра додатні на матрицях досить великого розміру;

- доведено, що спадковий некомутативний многочлен з операторними коефіцієнтами, що є додатним на наборах спільно нільпотентних матриць, допускає факторізацію як "квадрат" іншого некомутативного многочлена з операторними коефіцієнтами;

- показано, що дисипативна некомутативна лінійна система завжди допускає консервативну ділатацію, і методом некомутативного ліфтінгу знайден критерій існування консервативної ділатації для відповідної дисипативної комутативної системи;

- знайдені критерії розв'язності інтерполяційних задач Каратеодорі і Каратеодорі - Феєра у некомутативному полікрузі;

- розвинуте різницево-диференціальне числення для некомутативних функцій у найбільш загальному випадку;

- введені некомутативні функції вищого порядку та встановлені їх основні властивості;

- отримана некомутативна формула Тейлора;

- знайдені співвідношення для коефіцієнтів формального степеневого ряду необхідні і достатні для того, щоб цей ряд був рядом Тейлора некомутативної функції;

- як алгебраїчне застосування некомутативної формули Тейлора, отримана така теорема: некомутативна функція на наборах матриць над нескінченним полем, що є многочленом від матричних елементів для кожного матричного розміру обмеженого степеня, є некомутативний многочлен;

- розглянуто три природні топології на некомутативному просторі і дані відповідні означення аналітичних некомутативних функцій; як аналітичне застосування некомутативної формули Тейлора, у кожній з трьох топологій, доведено, що локально обмежена некомутативна функція має бути аналітичною;

- побудовано теорію збіжності для некомутативних степеневих рядів з матричним центром;

- розвинуто метод поширень некомутативних множин та некомутативних функцій на доданки у прямих сумах;
- розвинуто метод подібностно інваріантних конвертів некомутативних множин та відповідних поширень некомутативних функцій.

Бібліоґрафія

[1] G. Abduvalieva and D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, Fixed point theorems for noncommutative functions. *J. Math. Anal. Appl.* 401 (2013), no. 1, 436–446.

[2] G. Abduvalieva and D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, Implicit/inverse function theorems for free noncommutative functions. *J. Funct. Anal.* 269 (2015), no. 9, 2813–2844.

[3] G. K. Abduvalieva, *Fixed point and implicit/inverse functions theorem for noncommutative functions.* Ph. D. Thesis. Drexel University, Philadelphia, PA, 2015.

[4] V. M. Adamjan and D. Z. Arov. On unitary coupling of semiunitary operators. Russian, *Mat. Issled.* **1** (1966), vyp. 2, 3–64. English translation: *Amer. Math. Soc. Transl.* 95 (1970), no. 2, 75–129.

[5] M. Aguiar. Infinitesimal Hopf algebras. *New trends in Hopf algebra theory (La Falda, 1999)*, 1–9, *Contemp. Math.*, 267, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[6] J. Agler. On the representation of certain holomorphic functions defined on a polydisc. *Oper. Theory Adv. Appl.* 48, pp. 47–66, Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.

[7] J. Agler and J. E. McCarthy. Global holomorphic functions in several non-commuting variables. *Canad. J. Math.* 67 (2015), no. 2, 241—285.

[8] J. Agler and J. E. McCarthy. Pick Interpolation for free holomorphic functions. *Amer. J. Math.* 137 (2015), 1685–1701.

[9] J. Agler and N. J. Young. Symmetric functions of two noncommuting variables. *J. Funct. Anal.* 266 (2014), no. 9, 5709–5732.

[10] D. Alpay, A. Dijksma, J. Rovnyak, and H. de Snoo, *Schur functions, operator colligations, and reproducing kernel Pontryagin spaces*, Operator Theory: Adv. Appl. 96, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.

[11] D. Alpay and I. Gohberg, Unitary rational matrix functions, in: Topics in interpolation theory of rational matrix-valued functions, *Oper. Theory Adv. Appl.*, 33 (1988), 175–222.

[12] D. Alpay and D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi. On the intersection of null spaces for matrix substitutions in a non-commutative rational formal power series. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 339 (2004), no. 8, 533–538.

[13] D. Alpay and D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi. Matrix-J-unitary non-commutative rational formal power series. *Oper. Theory Adv. Appl.* 161, Birkhäuser, Basel, 2006, 49–113.

[14] C.-G.Ambrozie and D. Timotin. A von Neumann type inequality for certain domains in C^n. *Proc. Amer. Math. Soc.* 131 (2003), 859–869.

[15] S. A. Amitsur. Rational identities and applications to algebra and geometry. *J. Algebra*, 3 (1966), 304–359.

[16] N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 337–404.

[17] D. Z. Arov. Passive linear steady-state dynamical systems. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 20 (1979), no. 2, 211–228, 457.

[18] W. B. Arveson. Subalgebras of C^*-algebras. *Acta Math.*, 123 (1969), 141–224.

[19] W. Arveson. Subalgebras of C^*-algebras. II. *Acta Math.*, 128 (1972), no. 3-4, 271–308.

[20] J. A. Ball, A. Biswas, Q. Fang, and S. ter Horst. Multivariable generalizations of the Schur class: Positive kernel characterization and transfer function realization. *Recent Advances in Operator Theory and Applicaions*, pp. 17–79, OT 187, Birkhäuser, Basel, 2008.

[21] J. A. Ball and V. Bolotnikov. Realization and interpolation for Schur-Agler-class functions on domains with matrix polynomial defining function in C^n. *J. Funct. Anal.* 213 (2004), 45–87.

[22] J.A. Ball and N. Cohen. de Branges–Rovnyak operator models and systems theory: a survey. *Topics in Matrix and Operator Theory* (ed. by H. Bart, I. Gohberg, and M.A. Kaashoek), pp. 93–136, *Operator Theory: Adv. Appl.* 50, Birkhäuser-Verlag, Boston, 1991.

[23] H. Bart, I. Gohberg, and M. A. Kaashoek. *Minimal factorization of matrix and operator functions*, volume 1 of *Operator Theory: Adv. Appl.*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1979.

[24] J. A. Ball, G. Groenewald, and T. Malakorn. Structured noncommutative multidimensional linear systems. *SIAM J. Control Optim.*, 44 (2005), no. 4, 1474–1528 (electronic).

[25] J. A. Ball, G. Groenewald, and T. Malakorn. Bounded real lemma for structured noncommutative multidimensional linear systems and robust control. *Multidimens. Syst. Signal Process.*, 17 (2006) no. 2–3, 119–150.

[26] J. A. Ball, G. Groenewald, and T. Malakorn. Conservative structured noncommutative multidimensional linear systems. In *The state space method generalizations and applications*, volume 161 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 179–223. Birkhäuser, Basel, 2006.

[27] J. A. Ball and D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi. Conservative dilations of dissipative multidimensional systems: The commutative and non-commutative settings. *Multidim. Syst. Signal Processing*, 19 (2008), 79–122.

[28] J. A. Ball and D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, Schur–Agler and Herglotz–Agler classes of functions: positive-kernel decompositions and transfer-function realizations, Adv. Math. 280 (2015), 121–187.

[29] J. A. Ball and D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, Rational Cayley inner Herglotz–Agler functions: Positive-kernel decompositions and transfer-function realizations. *Linear Algebra Appl.* 456 (2014), 138–156.

[30] J. A. Ball, C. Sadosky, and V. Vinnikov. Conservative input-state-output systems with evolution on a multidimensional integer lattice. *Multidim. Syst. Signal Processing*, 16 (2005), 133–198.

[31] J. A. Ball and T. T. Trent. Unitary colligations, reproducing kernel Hilbert spaces, and Nevanlinna-Pick interpolation in several variables. *J. Funct. Anal.* 157 (1998), 1–61.

[32] J.A. Ball and V. Vinnikov, Formal reproducing kernel Hilbert spaces: The commutative and noncommutative settings, in *Reproducing kernel spaces and applications*, 77–134, *Operator Theory Adv. Appl.* 143, Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.

[33] J. A. Ball and V. Vinnikov, Lax-Phillips scattering and conservative linear systems: a Cuntz-algebra multidimensional setting, *Memoirs Amer. Math. Soc.* 178 (2005), no. 837.

[34] S. T. Belinschi, M. Popa, and V. Vinnikov. Infinite divisibility and a non-commutative Boolean-to-free Bercovici-Pata bijection. *J. Funct. Anal.* 262 (2012), no. 1, 94–123.

[35] S. T. Belinschi, M. Popa, and V. Vinnikov. On the operator-valued analogues of the semicircle, arcsine and Bernoulli laws. em J. Oper. Theory 70 (2013), 239–258.

[36] H. Bercovici and D.-V. Voiculescu. Free convolutions of measures with unbounded support. *Indiana Univ. Math. J.* 42 (1993), 733–773.

[37] G. M. Bergman. Skew fields of noncommutative rational functions, after Amitsur. In *Séminaire Schützenberger–Lentin–Nivat, Année 1969/70, No. 16*. Paris, 1970.

[38] G. M. Bergman and W. Dicks. On universal derivations. *J. Algebra* 36 (1975), 193–211.

[39] J. Berstel and C. Reutenauer. *Rational series and their languages*, volume 12 of *EATCS Monographs on Theoretical Computer Science*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[40] O. Bratelli and P. E. T. Jorgensen, Iterated function systems and permutation representations of the Cuntz algebra, *Memoirs Amer. Math. Soc.* no. 139, 1999.

[41] J. F. Camino, J. W. Helton, R. E. Skelton, and J. Ye, Matrix inequalities: a symbolic procedure to determine convexity automatically, *Integral Equations and Operator Theory*, 46 (2003), no. 4, 399–454.

[42] C. Carathéodory. Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen. *Math. Ann.*, 64 (1907), 95–115.

[43] C. Carathéodory. Über den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 32 (1911), 193–217.

[44] C. Carathéodory and L. Fejér. Über den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard–Landau'schen Satz. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 32 (1911), 218–239.

[45] P. M. Cohn. The embedding of firs in skew fields. *Proc. London Math. Soc.*, 23 (1971), 193–213.

[46] P. M. Cohn. *Free rings and their relations*. Academic Press, London, 1971. London Mathematical Society Monographs, No. 2.

[47] P. M. Cohn. Universal skew fields of fractions. *Symposia Math.*, 8 (1972), 135–148.

[48] P. M. Cohn. *Free ideal rings and localization in general rings.* Cambridge University Press, Cambridge, 2006. New Mathematical Monographs 3.

[49] K. R. Davidson and D. R. Pitts, Invariant subspaces and hyper-reflexivity for the free semigroup algebras, *Proc. London Math. Soc.* 78 (1999), 401–430.

[50] W. Dicks and J. Lewin. A Jacobian conjecture for free associative algebras. *Comm. Algebra* 10 (1982), no. 12, 1285–1306.

[51] M. A. Dritschel, On factorization of trigonometric polynomials. *Integral Equations Operator Theory* **49** (2004), no. 1, 11–42.

[52] M. A. Dritschel, S. Marcantognini, and S. McCullough. Interpolation in semigroupoid algebras. *J. Reine Angew. Math.* 606 (2007), 1–40.

[53] M. A. Dritschel and S. McCullough. Test functions, kernels, realizations and interpolation. *Operator Theory, Structured Matrices, and Dilation*, pp. 153–179, Theta Series in Advanced Mathematics, Bucharest, 2007.

[54] E. B. Dynkin. Calculation of the coefficients in the Campbell-Hausdorff formula. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)* 57 (1947), 323–326 (Russian).

[55] E. G. Effros and Zh.-J. Ruan. *Operator spaces.* London Mathematical Society Monographs. New Series, **23**. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.

[56] C. Foiaş and A. E. Frazho, *The commutant lifting approach to interpolation problems.* Operator Theory: Advances and Applications, 44. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990. xxiv+632 pp.

[57] E. Fornasini and G. Marchesini. Doubly-indexed dynamical systems: state-space models and structural properties. *Math. Systems Theory*, 12 (1978/79), no. 1, 59–72.

[58] E. Fornasini and G. Marchesini. A critical review of recent results on 2-D system theory. In *Control science and technology for the progress of society, Vol. 1 (Kyoto, 1981)*, pages 255–261. IFAC, Laxenburg, 1982.

[59] M. Fliess. Sur le plongement de l'algèbre des séries rationnelles non commutatives dans un corps gauche. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A*, 271 (1970), 926–927.

[60] M. Fliess. Matrices de Hankel. *J. Math. Pures Appl.*, 53 (1974), no. 9, 197–222.

[61] M. Fliess. Sur divers produits de séries formelles. *Bull. Soc. Math. France*, 102 (1974), 181–191.

[62] E. Formanek. *The polynomial identities and invariants of $n \times n$ matrices.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 78. The American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.

[63] I. Gelfand, S. Gelfand, V. Retakh, and R. L. Wilson. Quasideterminants. *Adv. Math.* 193 (2005), no. 1, 56–141.

[64] I. M. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V. S. Retakh, and J.-Y. Thibon. Noncommutative symmetric functions. *Adv. Math.* 112 (1995), no. 2, 218–348.

[65] I. M. Gelfand and V. S. Retakh. Determinants of matrices over noncommutative rings. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*) 25 (1991), no. 2, 13–25, 96 (Russian); translation in *Funct. Anal. Appl.* 25 (1991), no. 2, 91–102.

[66] I. M. Gelfand and V. S. Retakh. Theory of noncommutative determinants, and characteristic functions of graphs. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 26 (1992), no. 4, 1–20, 96 (Russian); translation in *Funct. Anal. Appl.* 26 (1992), no. 4, 231–246.

[67] D. D. Givone and R. P. Roesser, Multidimensional linear iterative circuits–general properties, *IEEE Trans. Computers* 21 (1972), 1067–1073.

[68] A. Grinshpan, D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, V. Vinnikov, and H. J. Woerdeman, Contractive determinantal representations of stable polynomials on a matrix polyball. *Mathematische Zeitschrift*, 283 (2016), no. 1–2, 25–37.

[69] A. Grinshpan, D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, V. Vinnikov, and H. J. Woerdeman, Matrix-valued Hermitian positivstellensatz, lurking contractions, and contractive determinantal representations of stable polynomials. *Operator Theory: Adv. Appl.*, 255 (2016), 123–136.

[70] D. W. Hadwin. Continuous functions of operators; a functional calculus. *Indiana Univ. Math. J.* 27 (1978), no. 1, 113–125.

[71] D. W. Hadwin, L. Kaonga, and B. Mathes. Noncommutative continuous functions. *J. Korean Math. Soc.* 40 (2003), no. 5, 789–830.

[72] J. W. Helton. Discrete time systems, operator models, and scattering theory. *J. Funct. Anal.* 16 (1974), 15–38.

[73] J. W. Helton, "Positive" noncommutative polynomials are sums of squares. *Ann. of Math.* 156 (2002), no. 2, 675–694.

[74] J. W. Helton. Manipulating matrix inequalities automatically. In *Mathematical systems theory in biology, communications, computation, and finance (Notre Dame, IN, 2002)*, volume 134 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 237–256. Springer, New York, 2003.

[75] J. W. Helton, D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, I. Klep, and V. Vinnikov, A minicourse on noncommutative rational functions and noncommutative convexity. In: *Proceedings of the 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems – MTNS 2010*, 5–9 July, 2010, Budapest, Hungary, pp.737–738.

[76] J. W. Helton, I. Klep, and S. McCullough. Analytic mappings between noncommutative pencil balls. *J. Math. Anal. Appl.* 376 (2011), no. 2, 407–428.

[77] J. W. Helton, I. Klep, and S. McCullough. Proper Analytic Free Maps. *J. Funct. Anal.* 260 (2011), no. 5, 1476–1490.

[78] J. W. Helton, I. Klep, and S. McCullough. Free analysis, convexity and LMI domains. *Mathematical methods in systems, optimization and control* (ed. by H. Dym, M. de Oliveira, and M. Putinar), pp. 195–219, *Operator Theory: Adv. Appl.* 222, Birkhauser, 2012.

[79] J. W. Helton, I. Klep, and S. McCullough. Free Convex Algebraic Geometry. *Semidefinite optimization and convex algebraic geometry* (ed. by G. Blekherman, P. Parrilo, and R. Thomas), pp. 341–405, SIAM, 2013.

[80] J. W. Helton, I. Klep, S. McCullough, and N. Slinglend. Non-commutative ball maps. *J. Funct. Anal.* 257(2009), 47-87.

[81] J. W. Helton and S. McCullough. Convex noncommutative polynomials have degree two or less. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 25 (2004), no. 4, 1124–1139.

[82] J. W. Helton and S. McCullough. Every convex free basic semi-alebraic set has an LMI representation. *Ann. Math.*, 176 (2012), no. 2, 979–1013.

[83] J.W. Helton, S. McCullough, and M. Putinar, A non-commutative Positivstellensatz on isometries, *J. reine angew. Math.* 568 (2004), 71–80.

[84] J. W. Helton, S. A. McCullough, M. Putinar, and V. Vinnikov. Convex matrix inequalities versus linear matrix inequalities, *IEEE Trans. Aut. Control*, 54 (2009), no. 5, 952–964.

[85] J. W. Helton, S. A. McCullough, and V. Vinnikov. Noncommutative convexity arises from linear matrix inequalities. *J. Funct. Anal.*, 240 (2006), no. 1, 105–191.

[86] G. Herglotz. Über Potenzreien mit positiven, reelen Teil im Einheitkreis. *Berichte über die Verhandlungen der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematische-physische Klasse*, 63 (1911), 501–511.

[87] R. G. Heyneman and M. E. Sweedler. Affine Hopf algebras. I. *J. Algebra*, 13 (1969), 192–241.

[88] E. Hille and R. S. Phillips. *Functional analysis and semi-groups.* Third printing of the revised edition of 1957. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXI. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1974.

[89] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Topics in matrix analysis.* Corrected reprint of the 1991 original. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[90] J. E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory.* Springer-Verlag, New-York–Heidelberg–Berlin, 1972.

[91] J. K. Hunter and B. Nachtergaele, *Applied analysis.* World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2001. xiv+439 pp.

[92] S. A. Joni and G.-C. Rota. Coalgebras and bialgebras in combinatorics. *Stud. Appl. Math.* 61 (1979), no. 2, 93–139.

[93] D. S. Kalyuzhniy. Multiparametric dissipative linear stationary dynamical scattering systems: discrete case. *J. Operator Theory*, 43 (2000), no. 2, 427–460.

[94] D. S. Kalyuzhnyĭ. The von Neumann inequality for linear matrix functions of several variables. *Mat. Zametki*, 64 (1998), 218–223. (Russian); translation in *Math. Notes* 64 (1998), no. 1-2, 186–189.

[95] D. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, Noncommutative power series and noncommutative functions. In: *IWOTA 2011 Book of Abstracts*, Universidad de Sevilla, July 3–9, 2011, Seville, Spain, p. 38.

[96] D. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, Noncommutative analytic functions. In: *GPOTS 2012 talks*, University of Houston, Department of Mathematics, May 30 - June 3, 2012, Houston, TX, p. 6.

[97] D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi and V. Vinnikov. *Foundations of free noncommutative function theory.* Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 199, AMS, Providence, RI, 2014.

[98] D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi and V. Vinnikov. Singularities of noncommutative rational functions and minimal factorizations. *Linear Algebra Appl.* 430 (2009), 869–889.

[99] D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi and V. Vinnikov. Noncommutative rational functions, their difference-differential calculus and realizations. *Multidimens. Syst. Signal Process.* 23 (2012), no. 1–2, 49–77.

[100] D. S. Kaliyuzhnyĭ-Verbovetzkiĭ. Carathéodory interpolation on the non-commutative polydisk. *J. Funct. Anal.* 229 (2005), no. 2, 241–276.

[101] D. S. Kalyuzhnyĭ-Verbovetzkiĭ and V. Vinnikov. Non-commutative positive kernels and their matrix evaluaions. *Proc. Amer. Math. Soc.* 134 (2005), no. 3, 805–816.

[102] L. B. Kantorovich and G. P. Akilov, *Functional Analysis*, 2nd ed., Nauka, Moscow, 1977.

[103] S. C. Kleene. Representation of events in nerve nets and finite automata. In *Automata studies*, Annals of mathematics studies, no. 34, pages 3–41. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.

[104] J. Lewin. A Matrix Representation for Associative Algebras I, II. *Trans. Amer. Math. Soc.* 188 (1977), 293–308, 309–317.

[105] S. McCullough, Factorization of operator-valued polynomials in several non-commuting variables, *Linear Algebra Appl.* 326 (2001), no. 1-3, 193–203.

[106] P. S. Muhly and B. Solel. Hardy algebras, W^*-correspondences and interpolation theory. *Math. Ann.* 330 (2004), 353–415.

[107] P. S. Muhly and B. Solel. Progress in noncommutative function theory. *Sci. China Math.* 54 (2011), no. 11, 2275–2294.

[108] P. S. Muhly and B. Solel. Schur class operator functions and automorphisms of Hardy algbras. *Doc. Math.* 13 (2008), 365–411.

[109] P. S. Muhly and B. Solel. Tensorial function theory: From Berezin transforms to Taylor's Taylor series and back. *Integral Equations Operator Theory* 76 (2013), no. 4, 463–508.

[110] J. Mujica. *Complex analysis in Banach spaces. Holomorphic functions and domains of holomorphy in finite and infinite dimensions.* North-Holland Mathematics Studies, 120. Notas de Matema'tica [Mathematical Notes], 107. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986.

[111] A. Nemirovskii. Advances in convex optimization: conic programming. *Plenary Lecture, International Congress of Mathematicians (ICM)*, Madrid, Spain, 2006.

[112] Yu. Nesterov and A. Nemirovskii. *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*, volume 13 of *SIAM Studies in Applied Mathematics.* Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1994.

[113] M. Neumark. Positive definite operator functions on a commutative group. *Bull. Acad. Sci. URSS Sér. Math. [Izvestia Akad. Nauk SSSR]*, 7 (1943), 237–244.

[114] A. Nica and R. Speicher. *Lectures on combinatorics of free probability*, London Math. Soc. Lecture Note Series 335, Cambridge Univ. Press, 2006.

[115] P. Niemiec. Functional calculus for diagonalizable matrices. *Linear Multilinear Algebra* 62 (2014), no. 3, 297–321.

[116] V. I. Paulsen. Representations of function algebras, abstract operator spaces, and Banach space geometry. *J. Funct. Anal.* 109 (1992), no. 1, 113–129.

[117] V. Paulsen. *Completely bounded maps and operator algebras.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 78. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[118] G. Pisier. *Introduction to operator space theory.* London Mathematical Society Lecture Note Series, 294. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[119] M. Popa and V. Vinnikov. Non-commutative functions and non-commutative free Levy-Hincin formula. *Adv. Math.* 236 (2013), 131–157.

[120] G. Popescu, Models for infinite sequences of noncommuting operators, *Acta Sci. Math.* 53 (1989), 355–368.

[121] G. Popescu, Characteristic functions for infinite sequences of noncommuting operators, *J. Operator Theory* 22 (1989), 51–71.

[122] G. Popescu, Isometric dilations for infinite sequences of noncommuting operators, *Trans. Amer. Math. Soc.* 316 (1989), 523–536.

[123] G. Popescu, Multi-analytic operators on Fock spaces, *Math. Ann.* 303 (1995), 31–46.

[124] G. Popescu. Free holomorphic functions on the unit ball of $B(H)^n$. *J. Funct. Anal.* 241 (2006), 268–333.

[125] G. Popescu. Free holomorphic automorphisms of the unit ball of $B(H)^n$. *J. reine angew. Math.* 638 (2010), 119–168.

[126] G. Popescu. Operator theory on noncommutative domains. *Mem. Amer. Math. Soc.* 205 (2010), no. 964.

[127] G. Popescu. Free biholomorphic functions and operator model theory. *J. Funct. Anal.* 262 (2012), no. 7, 3240–3308.

[128] G. Popescu. Free biholomorphic functions and operator model theory, II. *J. Funct. Anal.* 265 (2013), no. 5, 786–836.

[129] F. Riesz. Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale supérieure (Paris)*, 28 (1911), 33–62.

[130] L. H. Rowen. *Polynomial identities in ring theory*, Vol. 84 of Pure and Applied Mathematics. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1980.

[131] H. L. Royden and P. M. Fitzpatrick, *Real Analysis*, 4th ed. Prentice Hall, 2010.

[132] Zh.-J. Ruan. On real operator spaces. International Workshop on Operator Algebra and Operator Theory (Linfen, 2001). *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 19 (2003), no 3, 485–496.

[133] S. Saitoh, *Theory of Reproducing Kernels and its Applications*, Pitman Res. Notes Math. 189, Longman Scientific and Technical, Harlow, 1988.

[134] D. Sarason. On spectral sets having connected complement. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 26 (1965), 289–299.

[135] S. H. Schanuel. Continuous extrapolation to triangular matrices characterizes smooth functions. *J. Pure Appl. Algebra* 24 (1982), no. 1, 59–71.

[136] S. H. Schanuel and W. R. Zame. Naturality of the functional calculus. *Bull. Lond. Math. Soc.* 14 (1982), 218–220.

[137] I. Schur. Über Potenzreihen die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. *J. Reine Angew. Math.*, 147 (1917), 205–232.

[138] M. P. Schützenberger. On the definition of a family of automata. *Information and Control*, 4 (1961), 245–270.

[139] M. P. Schützenberger. Certain elementary families of automata. In *Proc. Sympos. Math. Theory of Automata (New York, 1962)*, pages 139–153. Polytechnic Press of Polytechnic Inst. of Brooklyn, Brooklyn, New York, 1963.

[140] B. V. Shabat. *Introduction to complex analysis. Part II.* Translations of Mathematical Monographs 110, Functions of several variables, Translated from the third (1985) Russian edition by J. S. Joel, AMS, Providence, RI, 1992.

[141] R. E. Skelton, T. Iwasaki, and K. M. Grigoriadis. *A unified algebraic approach to linear control design.* Taylor & Francis, 1997.

[142] W. F. Stinespring. Positive functions on C^*-algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6 (1955), 211–216.

[143] B. Sz.-Nagy. Sur les contractions de l'espace de Hilbert. *Acta Sci. Math. Szeged*, 15 (1953), 87–92.

[144] B. Sz.-Nagy and C. Foiaş. *Harmonic analysis of operators on Hilbert space.* Translated from the French and revised. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1970.

[145] J. L. Taylor. A general framework for a multi-operator functional calculus. *Adv. Math.*, 9 (1972), 183–252.

[146] J. L. Taylor. Functions of several noncommuting variables. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 79 (1973), 1–34.

[147] O. Toeplitz. Über die Fourier'sche Entwickelung positiver Funktionen. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 32 (1911), 191–192.

[148] I. M. Vinogradov, Elements of number theory, Mineola, NY: Dover Publications, 2003, reprint of the 1954 edition.

[149] D.-V. Voiculescu. Symmetries of some reduced free product C^*-algebras. *Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory (Busceni, 1983)*, Lecture Notes in Math. 1132, Springer, Berlin, 1985, pp. 556–588.

[150] D.-V. Voiculescu. Addition of certain non-commutative random variables. *J. Funct. Anal.* 66 (1986), 323–346.

[151] D.-V. Voiculescu. Operations on certain non-commutative operator-valued random variables. *Astérisque* 232 (1995), 243–275.

[152] D.-V. Voiculescu. The coalgebra of the free dfference quotient and free probability. *Internat. Math. Res. Not.* 2000 (2000), no. 2, 79–106.

[153] D.-V. Voiculescu. Free analysis questions I: duality transform for the coalgebra of $\partial_{X:B}$ *International Math. Res. Notices* 16 (2004), 793–822.

[154] D.-V. Voiculescu. Free analysis questions. II: The Grassmannian completion and the series expansion at the origin. *J. Reine Angew. Math.* 645 (2010), 155–236.

[155] D.-V. Voiculescu, K. J. Dykema, and A. Nica. Free random variables. A noncommutative probability approach to free products with applications to random matrices, operator algebras and harmonic analysis on free groups. CRM Monograph Series, 1. American Mathematical Society, Providence, RI, 1992. vi+70 pp.

[156] J. Volčič. On domains of noncommutative rational functions. Linear Algebra Appl. 516 (2017), 69–81.

[157] J. H. M. Wedderburn. On continued fractions in non-commutative quantities. *Ann. of Math.* 15 (1913), 101–105.

[158] M. A. Zorn. Derivatives and Fréchet differentials. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52 (1946), 133–137.

Покажчик

π^s_{ij}, 188
$(C_{w,(0)} \otimes C_{w,(1)} \otimes \cdots \otimes C_{w,(\ell)}) \star Z^{[w]}$, 167
$(\diamondsuit^d)_{\mathrm{nc}}(Y, \mathbf{r})$, 261
$(\mathbb{D}^d)_{\mathrm{nc}}(Y, \mathbf{r})$, 256
$A_{w,(0)} \otimes A_{w,(1)} \otimes \cdots \otimes A_{w,(\ell)}$, 166
$B(Y, \delta)$, 194
$B_\tau(Y, \delta)$, 203
$B_{\mathrm{nc}}(\phi, r)$, 227
$B_{\mathrm{nc}}(Y, r)$, 29, 199
E_{ij}, 188
E_i, 218
P_{ij}, 188
S_n, 182
$W \overset{\mathrm{fin}}{\to} Z$, 236
$W \overset{\mathrm{unif}}{\to} Z$, 245
$X \oplus Y$, 28, 111
X^w, 26
$X^{\odot \ell}$, 164
$X^{\odot k}$, 29
$X^{\odot w}$, 165
$X^{\odot_s \ell}$, 32
$X^{\odot_s w}$, 32
$X^{\odot_s \ell}$, 163
$X^{\odot_s w}$, 165
$Z^1 \odot Z^2$, 140
$Z^1 \odot_s Z^2$, 140
${Z^1}_{s_0,s_2} \odot Z^2$, 140
$\Delta_L f(X, Y)(Z)$, 113
Δ_L, 30, 113
$\Delta_R f(X, Y)(Z)$, 113
Δ_R, 30, 113
Δ^w_R, 162
$\Delta_R f(X, Y)(Z)$, 30
$\Delta_{L,\mu} f(X, Y)$, 130
$\Delta_{L,j}$, 130
$\Delta^\ell_{R,\mu^1,\ldots,\mu^\ell}$, 161
$\Delta_{R,\mu} f(X, Y)$, 130
$\Delta_{R,\mu} f(X^0, \ldots, X^{k+1})$, 160
$\Delta_{R,j}$, 130
Ω, 28, 111
Ω^{inv}, 122
$\Omega^\top$, 119
Ω_0, 111
Ω_n, 28, 111
$\Omega_{\mathrm{d.s.e.}}$, 271
$\Upsilon(Y)$, 191
Υ_ϵ, 195
$\Upsilon_{\mathrm{nc},\boldsymbol{\rho}}$, 213
$\Upsilon_{\mathrm{nc},\epsilon}$, 207
$\Upsilon_{\mathrm{free,abs}}$, 257
$\Upsilon_{\mathrm{free,unif-normal}}$, 257
$\Upsilon_{\mathrm{nc,fin-G}}$, 237
$\Upsilon_{\mathrm{nc,fin}}$, 236
$\Upsilon_{\mathrm{nc,norm-an}}$, 243
$\Upsilon_{\mathrm{nc,norm}}$, 242
$\Upsilon_{\mathrm{nc,unif-normal}}$, 246
$\Upsilon_{\mathrm{nc,unif}}$, 246
$\Upsilon_{\mathrm{free},\prec}$, 264
$\|W\|_{H,n_0,n_k}$, 226
$\|\cdot\|_n$, 29, 187
$\|\cdot\|_{n,m}$, 217
$\|\omega\|_{\mathcal{L}^k_{\mathrm{cb}}}$, 225, 226
$\|\omega\|_{\mathcal{L}^k}$, 222
$\|\phi\|_{\mathrm{cb}}$, 204
$\delta f(X)(Z)$, 190
$\delta^N f(X)$, 194
$\diamondsuit_{\mathrm{nc}}(Y, r)$, 34, 215
$\operatorname{dom} r$, 27
$\emptyset$, 26
$\mathbb{K}$, 26
$\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$, 26
ι_{ij}, 188
ι^s_{ij}, 188
$\iota^{(s_1,\ldots,s_m)}_{ij}$, 218
$\mathbb{C}^d$, 19
$\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$, 35
$\mathcal{L}^k_{cb}(\mathcal{W}_1 \times \cdots \times \mathcal{W}_k, \mathcal{W}_0)$, 225
$\mathcal{T}(\Omega; \mathcal{N}_{\mathrm{nc}})$, 31
$\mathfrak{r}$, 27
$(\mathcal{R}^{n\times n})^d$, 26
$\mathcal{M}^{0\times 0}$, 111
$\mathcal{M}^{n\times n}$, 28, 111
$\mathcal{R}^{n\times n}$, 26
$\mathcal{J}^n_{\mathcal{N}}$, 185
$\mathcal{M}$, 28, 111
$\mathcal{N}\langle x_1, \ldots, x_d\rangle$, 181
$\mathcal{N}_{\mathrm{loc}}\langle x_1, \ldots, x_d\rangle$, 185
$\mu(Z)$, 236
$\mu(\mathbf{r})$, 256
$\mu_\diamond(\mathbf{r})$, 264
μ_m, 241
μ_{cb}, 245
$\mu_{\mathrm{unif-normal}}(Z)$, 245
$\mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$, 28, 111
$\phi^{(m_0,\ldots,m_k)}(W^1, \ldots, W^k)$, 227
π_{ij}, 188

$\pi_{ij}^{(s_1,\ldots,s_m)}$, 218
$\operatorname{rad}\Omega$, 201
$\rho(Z)$, 236
ρ_m, 241
ρ_{cb}, 245
$\rho_{\mathrm{fin}}(Z)$, 236
$\rho_{\mathrm{norm}}(Z)$, 241
$\rho_{\mathrm{unif-normal}}(Z)$, 245
$\rho_{\mathrm{unif}}(Z)$, 244
$\mathcal{R}$, 111
$\mathcal{R}\langle x_1,\ldots,x_d\rangle$, 26
$\mathcal{R}\langle\langle x_1,\ldots,x_d\rangle\rangle$, 26
$\mathcal{R}^d$, 111
$\mathcal{M}^{0\times n}$, 111
$\mathcal{M}^{n\times 0}$, 111
$r_{\mathrm{spec}}(Z)$, 264
τ-куля, 203
τ-топологія, 203
τ-відкрита множина, 203
$\mathcal{T}^k(\Omega^{(0)},\ldots,\Omega^{(k)};\mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}},\ldots,\mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}})$, 31, 135
$\mathcal{T}^k_{\mathrm{uan}}(\Omega^{(0)},\ldots,\Omega^{(k)};\mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}},\ldots,\mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$, 233
$\mathcal{T}^k_{\mathrm{an}}(\Omega^{(0)},\ldots,\Omega^{(k)};\mathcal{W}_{0,\mathrm{nc}},\ldots,\mathcal{W}_{k,\mathrm{nc}})$, 225
$\mathbf{T}(\mathcal{L})$, 164
$\mathrm{Nilp}(\mathcal{M})$, 169
$\mathrm{Nilp}(\mathcal{M},Y)$, 170
$\mathrm{Nilp}(\mathcal{M},Y;sm)$, 170
$\mathrm{Nilp}(\mathcal{M},Y;sm,\kappa)$, 170
$\mathrm{Nilp}(\mathcal{M};n)$, 169
$\mathrm{Nilp}(\mathcal{M};n,\kappa)$, 169
$\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R})$, 169
$\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R},Y)$, 170
$\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R},Y;sm)$, 170
$\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R},Y;sm,\kappa)$, 170
$\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R};n)$, 169
$\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R};n,\kappa)$, 169
$|w|$, 26
$\widetilde{\Omega}$, 116, 285
$\widetilde{f}$, 116, 287
${}_j\Delta_R$, 154
e_j, 130
$f\cdot_{\mathrm{op}} g$, 121
$f^\top$, 119
$f^{\mathrm{d.s.e.}}_{\ell;\alpha_0,\ldots,\alpha_\ell}$, 278
$f^{\mathrm{d.s.e.}}_{w;\gamma,\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell}$, 282
$f_{\mathrm{d.s.e.}}$, 273
m_W, 246
x^w, 26
$y\cdot_{\mathrm{op}} x$, 121
$\mathbb{C}$, 19
$\mathbf{T}(\mathcal{M})$, 29
$\mathrm{Nilp}(\mathcal{M})$, 29
$\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R})$, 33
$\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R},Y)$, 33
адитивне відображення, 117
аналітична н.к. функція, 194
аналітична н.к. функція вищого порядку, 223
аналітична на зрізах н.к. функція, 190
асоційовані радіуси нормальної збіжності ряду, 256
блочна ін'єкція, 188
блочна проєкція, 188
цілком ізометричне лінійне відображення, 204
цілком обмежене k-лінійне відображення, 225
цілком обмежене лінійне відображення, 204
цілком стискаюче лінійне відображення, 204
частковий н.к. різницево-диференціальний оператор вищого порядку, 162
диференціал Гато (G-диференціал) вищого порядку, 194
диференційована за Фреше (F-диференційована) н.к. функція вищого порядку, 223
диференційована за Фреше, або F-диференційована, н.к. функція, 194
диференційована за Гато, або G-диференційована н.к. функція, 190
диференційована за Гато, або G-диференційована, н.к. функція вищого порядку, 222
дійсно аналітична н.к. функція, 199
дійсно аналітична на зрізах н.к. функція, 199
додатно-однорідна функція, 236
допустима система матричних норм, 29, 187
допустима система норм прямокутних матриць, 217
допустима справа н.к. множина, 28, 115
допустима зліва н.к. множина, 115
формула Тейлора–Тейлора (TT формула), 31
ін'єкція, 188
інваріантна щодо переплетень н.к. функція, 30
інваріантна щодо подібностей н.к. функція, 30
інваріантна щодо прямих сум н.к. функція, 27, 30
інваріантна щодо спільних подібностей н.к. функція, 28
інваріантність щодо переплетень, 112, 135
інваріантність щодо подібностей, 112, 134
інваріантність щодо прямих сум, 112, 134
канонічне розширення н.к. функції, 116, 286
канонічне розширення н.к. функції вищого порядку, 288
координатна н.к. функція, 120
лівий частковий н.к. різницево-диференціальний оператор, 130
лівий н.к. різницево-диференціальний оператор, 30
локально обмежена н.к. функція, 194
локально обмежена н.к. функція вищого порядку, 222
локально обмежена на зрізах н.к. функція, 190
локально поліноміальна н.к. функція, 185
матрично-кругова множина навколо Y, 208
н.к. діамант, 34, 215, 261
н.к. функція, 30, 112
н.к. функція порядку k, 31, 133, 135
н.к. куля, 29, 199, 227
н.к. множина, 28, 111
н.к. полікруг, 27, 256
н.к. простір, 28, 111
напрямковий н.к. різницево-диференціальний оператор, 130
напрямкові н.к. різницево-диференціальні оператори вищого порядку, 161
неперервна на зрізах н.к. функція вищого порядку, 224
нільпотентна матриця навколо Y рангу не більше κ, 170

нільпотентна матриця рангу не більше κ, 169
норма Хагерупа, 226
обмежене k-лінійне відображення, 222
однорідне відображення, 115
операторний простір, 29
подібностно інваріантний конверт, 116, 285
поліноміальна на зрізах н.к. функція, 185
повна кругова множина (або c-зірка) навколо Y, 190
повна кругова множина навколо Y, 207
повна множина типу Рейнхардта навколо Y, 255
повна н.к. множина типу Рейнхардта навколо Y, 256
позначення Свідлера без додавання, 166
правий частковий н.к. різницево-диференціальний оператор, 130, 160
правий н.к. різницево-диференціальний оператор, 30
правий н.к. різницево-диференціальний оператор вищого порядку, 149
проєкція, 188
пряма сума матриць, 111
прямокутна блочна ін'єкція, 218
прямокутна блочна проєкція, 218
псевдометрика, 203
радикал множини, 201
радикальна множина, 201
рівномірно аналітична н.к. функція, 206
рівномірно цілком обмежено (ц.о.-) аналітична н.к. функція, 228
рівномірно локально цілком обмежена н.к. функція вищого порядку, 227
рівномірно локально обмежена н.к. функція, 206
рівномірно-відкрита множина, 200
рівномірно-відкрита топологія, 29, 199, 227
розширення н.к. функції на доданки прямих сум, 273
розширення н.к. функції вищого порядку на доданки прямих сум, 276
розширення н.к. множини на доданки прямих сум, 271
скінченно відкрита множина, 187
спільно нільпотентні матриці навколо Y рангу не більше κ, 170
спільно нільпотентні матриці рангу не більше κ, 169
стала н.к. функція, 120
відкрита множина у н.к. просторі, 194
${Z^1}_{s_0,s_2} \odot_{s_1} Z^2$, 140

диференціал Гато (G-диференціал), 194

W-Гато (G_W-) диференційована н.к. функція вищого порядку, 220
W-аналітична на зрізах н.к. функція, 220
W-локально обмежена на афінних скінченновимірних підпросторах н.к. функція вищого порядку, 234
W-локально обмежена на зрізах н.к. функція вищого порядку, 220
W-неперервна на зрізах н.к. функція вищого порядку, 221

Додаток

Апробація результатів дисертації

Результати дисертації доповідались та обговорювались на наукових конференціях та засіданнях наукових семінаров провідних українських та міжнародних наукових установ, а саме:

Конференції:

Пленарні та напівпленарні доповіді:

2012 *Great Plains Operator Theory Symposium "GPOTS 2012"*, University of Houston, Houston, TX (USA)

2013 *South-Eastern Analysis Meeting "SEAM 2013"*, Virginia Tech, Blacksburg, VA (USA)

2014 *International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems "MTNS 2014"*, University of Groningen, Groningen (the Netherlands)

Мінікурси лекцій:

2010 *International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems "MTNS-2010"*, Budapest (Hungary)

2012 *International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems "MTNS-2012"*, Melbourne (Australia)

Запрошені доповіді:

2006 *South Eastern Analysis Meeting "SEAM XXII"*, Gainsville, FL (USA)

2006 *International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems "MTNS-2006"*, Kyoto (Japan)

2007 *International Conference "Characteristic Functions and Transfer Functions in Operator Theory and System Theory"*, dedicated to Paul Fuhrmann on his 70th anniversary and to the memory of Moshe Livšic on his 90th anniversary, Beer-Sheva (Israel)

2008 *International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems "MTNS-2008"*, Blacksburg, VA (USA)

2010 *International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems "MTNS-2010"*, Budapest (Hungary)

2010 *International Workshop on Operator Theory and Applications "IWOTA-2010"*, Berlin (Germany)

2010 *NSF Workshop "Control, Optimization, and Functional Analysis: Synergies and Perspectives"in honor of Bill Helton*, San Diego, CA (USA)
2011 *International Conference "Function theory and operator theory: Infinite dimensional and free setting"* Beer-Sheva (Israel)
2011 *International Workshop on Operator Theory and Applications "IWOTA-2011"*, Seville (Spain)
2011 *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference,* Orlando, FL (USA)
2012 *Joint Mathematics Meetings, AMS-MAA*, Boston, MA (USA)
2012 *International Workshop on Operator Theory and Applications "IWOTA-2012"*, Sydney (Australia)
2014 *AMS Sectional Meeting*, Albuquerque, NM (USA)
2014 *International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems "MTNS-2014"*, Groningen (the Netherlands)
2014 *International Workshop on Operator Theory and Applications "IWOTA-2014"*, Amsterdam (the Netherlands)
2015 *Joint Mathematical Meetings*, San Antonio, TX (USA)
2015 *International Workshop on Operator Theory and Applications "IWOTA-2015"*, Tbilisi (Georgia)
2016 *Workshop in Noncommutative Analysis*, The University of Iowa, Iowa City, IA (USA)
2016 *International Workshop on Operator Theory and Applications "IWOTA-2016"*, St. Louis, MO (USA)
2016 *International Workshop "Complex Analysis and Noncommutative Function Theory"*, Toulouse (France)

Доповіді на семінарах та колоквіумах:

2 червня 2005	The Mathematics Department Colloquium, Drexel University (Philadelphia, PA)
14 грудня, 2005	The Dean seminar, College of Art and Science, Drexel University (Philadelphia, PA)
2005–2015	The Analysis seminar, Drexel University (Philadelphia, PA)
24 серпня, 2007	The Mathematics Department Colloquium, Virginia Tech (Blacksburg, VA)
16 грудня, 2009	Operator algebras/operator theory seminar, Technion (Haifa, Israel)
12 листопада, 2012	Operator and system theory seminar, Ben Gurion University of the Negev (Beer Sheva, Israel)
17 квітня, 2014	Colloquium, Department of Mathematics, University of Iowa

	(Iowa City, IA)
19 квітня, 2014	Iowa–Nebraska Functional Analysis seminar, Iowa State University (Des Moines, IA)
15 грудня, 2014	Operator and System Theory seminar, Ben-Gurion University of the Negev (Beer-Sheva, Israel)
27 січня, 2021	Київський Семінар з функціонального аналізу (Київ, Україна)

Список опублікованих праць за темою дисертації

Публікації, в яких опубліковано основні результати дисертації

Монографія:

D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi and V. Vinnikov, Foundations of Free Noncommutative Function Theory, 178 pp. Mathematical Surveys and Monographs, AMS, 2014.

Статті у періодичних виданнях:

1. D. Alpay, D. S. Kalyuzhnyĭ-Verbovetzkiĭ, Matrix-J-unitary non-commutative rational formal power series, *Operator Theory: Adv. Appl.*, 161 (2006), 49–114.

2. D. Alpay, D. S. Kalyuzhnyĭ-Verbovetzkiĭ, On the intersection of null spaces for matrix substitutions in a non-commutative rational formal power series, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 339 (2004), no. 8, pp. 533–538.

3. J. A. Ball and D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, Conservative dilations of dissipative multidimensional systems: The commutative and non-commutative settings. *Multidimens. Syst. Signal Process.* 19 (2008), 79–122.

4. J. A. Ball and D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, Schur–Agler and Herglotz–Agler classes of functions: positive-kernel decompositions and transfer-function realizations, *Adv. Math.* 280 (2015), 121–187.

5. J. A. Ball and D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, Rational Cayley inner Herglotz–Agler functions: Positive-kernel decompositions and transfer-function realizations. *Linear Algebra Appl.* 456 (2014), 138–156.

6. A. Grinshpan, D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, V. Vinnikov, and H. J. Woerdeman, Contractive determinantal representations of stable polynomials on a matrix polyball. *Mathematische Zeitschrift*, 283 (2016), no. 1–2, 25–37.

7. D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi and V. Vinnikov, Noncommutative rational functions, their difference-differential calculus and realizations. *Multidimens. Syst. Signal Process.* 23 (2012), no. 1-2, 49–77.

8. D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi and V. Vinnikov, Singularities of rational functions and minimal factorizations: The noncommutative and the commutative setting. *Linear Algebra Appl.* 430 (2009), no. 4, 869–889.

9. D. S. Kalyuzhnyĭ-Verbovetzkiĭ and V. Vinnikov. Non-commutative positive kernels and their matrix evaluaions. *Proc. Amer. Math. Soc.* 134 (2005), no. 3, 805–816.

10. D. S. Kalyuzhnyĭ-Verbovetzkiĭ, Carathéodory interpolation on the non-commutative polydisk, *J. Funct. Anal.*, 229 (2005), 241–276.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. J. W. Helton, D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, I. Klep, and V. Vinnikov, A mini-course on noncommutative rational functions and noncommutative convexity. In: *Proceedings of the 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems – MTNS 2010*, 5–9 July, 2010, Budapest, Hungary, pp.737–738.

2. D. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, Noncommutative power series and noncommutative functions. In: *IWOTA 2011 Book of Abstracts*, Universidad de Sevilla, July 3–9, 2011, Seville, Spain, p. 38.

3. D. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, Noncommutative analytic functions. In: *GPOTS 2012 talks*, University of Houston, Department of Mathematics, May 30 - June 3, 2012, Houston, TX, p. 6.