НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Калюжний-Вербовецький Дмитро Семенович

УДК 512.57, 517.2, 517.5

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ВІЛЬНИХ НЕКОМУТАТИВНИХ ФУНКЦІЙ ТА ДЕЯКІ ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ В АЛГЕБРІ І АНАЛІЗІ

01.01.01 – математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2021

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана на кафедрі вищої математики і статистики Південноукраїнського національного педагогічного університету імені К. Д. Ушинського.

Науковий консультант: доктор фізико-математичних наук, професор
Пивоварчик Вячеслав Миколайович,
Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського,
завідувач кафедри вищої математики і статистики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
ДЕРКАЧ Володимир Олександрович,
Донецький національний університет імені Василя Стуса,
провідний науковий співробітник науково-дослідної частини;

доктор фізико-математичних наук, професор
ЗОЛОТАРЬОВ Володимир Олексійович,
Фізико-технічний інститут низьких температур імені Б. І. Вєркіна НАН України,
провідний науковий співробітник відділу теорії функцій;

доктор фізико-математичних наук, професор
НИЖНИК Леонід Павлович,
Інститут математики НАН України,
головний науковий співробітник відділу функціонального аналізу.

Захист відбудеться 12 травня 2021 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д. 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий 6 квітня 2021 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради А. С. Романюк

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Аналітичні функції від d некомутуючих змінних з'являються у новаторській праці Дж. Л. Тейлора у некомутативній (н.к.) спектральній теорії на початку 70-х років 20 століття[1]. Основна ідея полягає в тому, що функція від d некомутуючих змінних - це функція на наборах d квадратних матриць всіх розмірів, що є інваріантною при одночасному переплетенні (або еквівалентно - інваріантною щодо прямих сум і одночасній подібності). Тейлор показав, що такі функції дозволяють добре диференціальне (точніше, різницево-диференціальне) числення, аж до некомутативного аналогу класичної формули (Брука) Тейлора. Теорія була просунута далі у працях Войкулеску[2] на початку 21 століття з орієнтацією на застосування у теорії вільної ймовірності.[3] Ми згадуємо також роботи Хадвіна[4], Хадвіна–Каонга–Матеса[5], Хелтона–Клепа–Маккалоу[6] та Мьюлі–Солеля[7]. Вже нетривіальний випадок функцій однієї н.к. змінної був розглянутий Шануелем[8] (дивись також роботи Шануеля–Зейма[9] та Німця[10]).

У чисто алгебраїчній ситуації многочлени та раціональні функції від d некомутуючих змінних та їх значення на наборах d матриць довільного фіксованого розміру (над комутативним кільцем $\mathcal{R}$) є центральними об'єктами в теорії поліноміальних і раціональних тотожностей[11]. Глибоке і детальне вивчення кільця н.к. многочленів та косого поля н.к. раціональних функцій було проведено у роботах П. М. Кона[12].

---

[1] J. L. Taylor. A general framework for a multi-operator functional calculus. *Adv. Math.*, 9 (1972), 183–252; J. L. Taylor. Functions of several noncommuting variables. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 79 (1973), 1–34.

[2] D.-V. Voiculescu. The coalgebra of the free difference quotient and free probability. *Internat. Math. Res. Not.* 2000 (2000), no. 2, 79–106; D.-V. Voiculescu. Free analysis questions I: duality transform for the coalgebra of $\partial_{X:B}$ *International Math. Res. Notices* 16 (2004), 793–822; D.-V. Voiculescu. Free analysis questions. II: The Grassmannian completion and the series expansion at the origin. *J. Reine Angew. Math.* 645 (2010), 155–236.

[3] D.-V. Voiculescu. Operations on certain non-commutative operator-valued random variables. *Astérisque* 232 (1995), 243–275; D.-V. Voiculescu, K. J. Dykema, and A. Nica. Free random variables. A noncommutative probability approach to free products with applications to random matrices, operator algebras and harmonic analysis on free groups. CRM Monograph Series, 1. American Mathematical Society, Providence, RI, 1992. vi+70 pp.

[4] D. W. Hadwin. Continuous functions of operators; a functional calculus. *Indiana Univ. Math. J.* 27 (1978), no. 1, 113–125.

[5] D. W. Hadwin, L. Kaonga, and B. Mathes. Noncommutative continuous functions. *J. Korean Math. Soc.* 40 (2003), no. 5, 789–830.

[6] J. W. Helton, I. Klep, and S. McCullough. Analytic mappings between noncommutative pencil balls. *J. Math. Anal. Appl.* 376 (2011), no. 2, 407–428; J. W. Helton, I. Klep, and S. McCullough. Proper Analytic Free Maps. *J. Funct. Anal.* 260 (2011), no. 5, 1476–1490; J. W. Helton, I. Klep, and S. McCullough. Free analysis, convexity and LMI domains. *Mathematical methods in systems, optimization and control* (ed. by H. Dym, M. de Oliveira, and M. Putinar), pp. 195–219, *Operator Theory: Adv. Appl.* 222, Birkhauser, 2012.

[7] P. S. Muhly and B. Solel. Progress in noncommutative function theory. *Sci. China Math.* 54 (2011), no. 11, 2275–2294; P. S. Muhly and B. Solel. Tensorial function theory: From Berezin transforms to Taylor's Taylor series and back. *Integral Equations Operator Theory* 76 (2013), no. 4, 463–508.

[8] S. H. Schanuel. Continuous extrapolation to triangular matrices characterizes smooth functions. *J. Pure Appl. Algebra* 24 (1982), no. 1, 59–71.

[9] S. H. Schanuel and W. R. Zame. Naturality of the functional calculus. *Bull. Lond. Math. Soc.* 14 (1982), 218–220.

[10] P. Niemiec. Functional calculus for diagonalizable matrices. *Linear Multilinear Algebra* 62 (2014), no. 3, 297–321.

[11] L. H. Rowen. *Polynomial identities in ring theory*, Vol. 84 of Pure and Applied Mathematics. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1980.

[12] P. M. Cohn. *Free rings and their relations.* Academic Press, London, 1971. London Mathematical Society Monographs, No. 2. ; P. M. Cohn. *Free ideal rings and localization in general rings.* Cambridge University Press, Cambridge, 2006. New Mathematical Monographs 3.

Н.к. різницево-диференціальний оператор у налаштуванні н.к. многочленів добре відомий як універсальна деривація на вільній алгебрі[13].

У теорії систем і теорії керування н.к. раціональні функції і формальні степеневі ряди виникають природно як впізнавані формальні степеневі ряди теорії автоматів та формальних мов[14] і як передавальні функції багатовимірних систем з еволюцією уздовж вільного моноїду[15]. Зокрема, передавальні функції консервативних н.к. багатовимірних систем характеризуються як формальні степеневі ряди, значення яких на певному класі наборів d операторів є стискаючими. З'являються такі класи формальних степеневих рядів як некомутативне узагальнення класичного класу Шура стискаючих аналітичних функцій на одиничному крузі[16] в теорії операторних моделей для рядкових стисків та більш загальних некомутуючих наборів операторів[17], в теорії зображень алгебри Кунця[18] і в узагальненій алгебрі Харді, пов'язаній з W^* - відповідністю[19].

Виходячи з іншого напрямку, виявляється, що більшість проблем оптимізації, що з'являються в теорії систем та теорії керування, є безрозмірними і проблема містить раціональні вирази від цих матричних змінних, які, таким чином, мають однаковий вигляд, незалежний від матричних розмірів[20]. Це призводить до вивчення таких методів, як лінійні матричні нерівності (LMI)[21]–у контексті н.к.

---

[13] J. Lewin. A Matrix Representation for Associative Algebras I, II. *Trans. Amer. Math. Soc.* 188 (1977), 293–308, 309–317. ; G. M. Bergman and W. Dicks. On universal derivations. *J. Algebra* 36 (1975), 193–211; W. Dicks and J. Lewin. A Jacobian conjecture for free associative algebras. *Comm. Algebra* 10 (1982), no. 12, 1285–1306.

[14] S. C. Kleene. Representation of events in nerve nets and finite automata. In *Automata studies*, Annals of mathematics studies, no. 34, pages 3–41. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956; M. P. Schützenberger. On the definition of a family of automata. *Information and Control*, 4 (1961), 245–270; M. Fliess. Sur le plongement de l'algèbre des séries rationnelles non commutatives dans un corps gauche. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A*, 271 (1970), 926–927; M. Fliess. Matrices de Hankel. *J. Math. Pures Appl.*, 53 (1974), no. 9, 197–222.

[15] J. A. Ball, G. Groenewald, and T. Malakorn. Structured noncommutative multidimensional linear systems. *SIAM J. Control Optim.*, 44 (2005), no. 4, 1474–1528 (electronic).

[16] V. M. Adamjan and D. Z. Arov. On unitary coupling of semiunitary operators. Russian, *Mat. Issled.* **1** (1966), vyp. 2, 3–64. English translation: *Amer. Math. Soc. Transl.* 95 (1970), no. 2, 75–129; J. W. Helton. Discrete time systems, operator models, and scattering theory. *J. Funct. Anal.* 16 (1974), 15–38; J.A. Ball and N. Cohen. de Branges–Rovnyak operator models and systems theory: a survey. *Topics in Matrix and Operator Theory* (ed. by H. Bart, I. Gohberg, and M.A. Kaashoek), pp. 93–136, *Operator Theory: Adv. Appl.* 50, Birkhäuser-Verlag, Boston, 1991.

[17] G. Popescu. Free biholomorphic functions and operator model theory. *J. Funct. Anal.* 262 (2012), no. 7, 3240–3308; G. Popescu. Free biholomorphic functions and operator model theory, II. *J. Funct. Anal.* 265 (2013), no. 5, 786–836.

[18] O. Bratelli and P. E. T. Jorgensen, Iterated function systems and permutation representations of the Cuntz algebra, *Memoirs Amer. Math. Soc.* no. 139, 1999; K. R. Davidson and D. R. Pitts, Invariant subspaces and hyper-reflexivity for the free semigroup algebras, *Proc. London Math. Soc.* 78 (1999), 401–430.

[19] P. S. Muhly and B. Solel. Hardy algebras, W^*-correspondences and interpolation theory. *Math. Ann.* 330 (2004), 353–415; J. A. Ball, A. Biswas, Q. Fang, and S. ter Horst. Multivariable generalizations of the Schur class: Positive kernel characterization and transfer function realization. *Recent Advances in Operator Theory and Applicaions*, pp. 17–79, OT 187, Birkhäuser, Basel, 2008.

[20] J. W. Helton. Manipulating matrix inequalities automatically. In *Mathematical systems theory in biology, communications, computation, and finance (Notre Dame, IN, 2002)*, volume 134 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 237–256. Springer, New York, 2003.

[21] Yu. Nesterov and A. Nemirovskii. *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*, volume 13 of *SIAM Studies in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1994; A. Nemirovskii. Advances in convex optimization: conic programming. *Plenary Lecture, International Congress of Mathematicians (ICM)*, Madrid, Spain, 2006; R. E. Skelton, T. Iwasaki, and K. M. Grigoriadis. *A unified algebraic approach to linear control design*. Taylor & Francis, 1997.

опуклості і н.к. реальна напівалгебраїчна геометрія, де розглядаються многочлени та раціональні функції від d некомутуючих змінних, обчислені на наборах d матриць над $\mathbb{R}$[22].

Квазидетермінанти[23] та н.к. симетричні функції[24] є важливими прикладами н.к. раціональних функцій, тоді як формальний ряд Бейкера - Кемпбела - Хаусдорфа[25] є важливим прикладом формального н.к. степеневого ряда. Згадаємо тут також н.к. неперервні дроби[26].

Наша робота забезпечує уніфіковану основу для вивчення всіх цих об'єктів. Як заради потенційних застосувань, так і заради розвитку теорії в її природній загальності, виявляється, що правильне налаштування для теорії н.к. функцій - це матриці всіх розмірів над заданим векторним простором або заданим модулем. В особливому випадку, коли модуль є $\mathcal{R}^d$, $n \times n$ матриці над $\mathcal{R}^d$ можна ідентифікувати з наборами d матриць розміру $n \times n$ над $\mathcal{R}$, і ми маємо функції d змінних, ключові приклади яких наводилися вище. Вільні[27] н.к. функції – це у нашому означенні відображення матриць усіх розмірів над модулем у матриці того ж розміру, що є інваріантними щодо прямих сум і подібностей матриць, або, еквівалентно, інваріантними щодо переплетень матриць. Ми будуємо різницево–диференціальне числення для н.к. функцій і доводимо н.к. аналог формули Тейлора, яку ми називаємо формулою Тейлора–Тейлора, на честь Брука Тейлора і Джозефа Л. Тейлора. Далі ми описуємо деякі застосування цієї формули у алгебрі і аналізі, вивчаємо збіжність рядів Тейлора–Тейлора, характерізуємо три типа аналітичності для н.к. функцій, відповідаючих трьом природним топологіям на н.к. просторі, а також будуємо теорію збіжності н.к. степеневих рядів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Ця робота була частково підтримана грантом Двонаціональної Наукової Фундації США та Ізраїля (BSF) 2010432, грантом Національної Наукової Фундації США (NSF) DMS 0901628 та Центром Передових Досліджень з Математики університету імені Бен-Гуріона (Ізраїль). Частина цієї роботи була проведена під час візиту на Міжнародній Дослідницькій Станції Банфа (BIRS) за програмою "Дослідження в командах"(Банф, штат Альберта, Канада) 21-28 лютого 2010 р., та під час візиту

[22] J. W. Helton, "Positive" noncommutative polynomials are sums of squares. *Ann. of Math.* 156 (2002), no. 2, 675–694; J. W. Helton and S. McCullough. Convex noncommutative polynomials have degree two or less. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 25 (2004), no. 4, 1124–1139; J. W. Helton, S. A. McCullough, and V. Vinnikov. Noncommutative convexity arises from linear matrix inequalities. *J. Funct. Anal.*, 240 (2006), no. 1, 105–191.

[23] I. M. Gelfand and V. S. Retakh. Determinants of matrices over noncommutative rings. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*) 25 (1991), no. 2, 13–25, 96 (Russian); translation in *Funct. Anal. Appl.* 25 (1991), no. 2, 91–102; I. M. Gelfand and V. S. Retakh. Theory of noncommutative determinants, and characteristic functions of graphs. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 26 (1992), no. 4, 1–20, 96 (Russian); translation in *Funct. Anal. Appl.* 26 (1992), no. 4, 231–246.

[24] I. M. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V. S. Retakh, and J.-Y. Thibon. Noncommutative symmetric functions. *Adv. Math.* 112 (1995), no. 2, 218–348.

[25] E. B. Dynkin. Calculation of the coefficients in the Campbell-Hausdorff formula. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)* 57 (1947), 323–326 (Russian).

[26] J. H. M. Wedderburn. On continued fractions in non-commutative quantities. *Ann. of Math.* 15 (1913), 101–105.

[27] Оскільки ми вивчаємо тільки випадок вільних, тобто не зв'язаних між собою ніякими тотожностями, змінних, ми далі опускаємо слово "вільні"заради стислості.

в Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (MFO) за програмою "Дослідження в парах"(Обервольфах, Німеччина) з 2 по 15 травня 2010 року.

Мета та задачі дослідження. Метою цієї роботи є систематичний розвиток, у повній природній загальності, основ теорії функцій вільних некомутуючих змінних. Ця теорія пропонує єдиний спосіб розглядання багатьох вільних н.к. об'єктів, що з'являються в різних галузях математики.

Об'єктом дослідження є вільні н.к. функції, тобто відображення матриць усіх розмірів над модулем у матриці того ж розміру, що є інваріантними щодо прямих сум і подібностей матриць, або, еквивалентно, інваріантними щодо переплетень матриць.

Предметом дослідження є властивості н.к. функцій, зокрема різницево-диференціальне числення і аналітичність, а також збіжність н.к. степеневих рядів та узагальнення класичних теорем аналізу на н.к. випадок.

Методи дослідження. У роботі використовуються як класичні методи аналізу (наприклад, оцінки суми ряда, методи теорії зображень C^*-алгебр, теорії лінійних систем, теорії поліноміальних тотожностей), так і розроблені в роботі нові методи, специфічні для н.к. теорії – дивись у наступному розділі.

Наукова новизна одержаних результатів. Робота здобувача, описана в цій дисертації, будує основи теорії вільних н.к. функцій в повній природній загальності, розробляє н.к. різницево-диференціальне числення аж до н.к. аналогу ряду Тейлора, що відкриває шлях для дослідників у цій галузі, яким потрібен надійний ґрунт для подальшої роботи у цьому напрямку. Вона заснована на першій дослідницькій монографії[28], коли-небудь написаній на цю тему. Хоча ця робота й використовує деякі геніальні ідеї Джозефа Тейлора і враховує різні інші дослідницькі роботи, які ми згадували вище, ідеї для найбільш загальних налаштувань є новими, і у доведенні більшості результатів у загальному випадку було потрібно розробити нові методи та оригінальні підходи. Необхідні та достатні умови того, щоб коефіцієнти н.к. степеневого ряду були коефіцієнтами Тейлора–Тейлора н.к. функції, є новими. Алгебраїчні та аналітичні застосування формули Тейлора–Тейлора показують всю силу цієї теорії: так, ми показуємо, що н.к. функція на н.к. просторі над $\mathbb{K}^d$, де $\mathbb{K}$ – нескінченне поле, яка є многочленом обмеженого ступеня від матричних елементів при обчисленні на $n \times n$ матрицях, $n = 1, 2, \ldots$, обов'язково є н.к. многочленом; ми визначаємо та вивчаємо аналітичні н.к. функції в налаштуваннях трьох різних топологій, і у кожному з цих налаштувань ми показуємо, що локально обмежена н.к. функція є аналітичною. Деякі наші результати про збіжність н.к. степеневих рядів є передбачуваними, наприклад, формули Коші–Адамара для радіусів збіжності. Однак є багато вирішених у цій

[28] D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi and V. Vinnikov. *Foundations of free noncommutative function theory.* Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 199, AMS, Providence, RI, 2014.

роботі нових тонких питань, особливо пов'язаних із збіжністю рядів уздовж вільної напівгрупи та збіжністю на зрізах.

У розділі 2 представлено ряд результатів здобувача щодо спеціальних класів н.к. функцій. Ці роботи можна розглядати як мотивацію до роботи з основ загальної теорії н.к. функцій. Можна поділити ці роботи на три категорії (хоча окрема стаття може включати частини, що належать до різних категорій). Перша категорія включає розробку теорії матричнозначних н.к. раціональних функцій, яка багато в чому паралельна побудові загальної теорії н.к. функцій, здійсненій пізніше в цій дисертації, починаючи з розділу 3. Друга категорія включає результати, які є специфічними для н.к. випадку, а відповідні факти у багатовимірному комутативному випадку є недійсними або невідомими. Третя категорія включає роботи, де н.к. результат легше отримати, а потім він використовується для отримання його комутативного аналога шляхом н.к. ліфтінгу.

У дисертації розроблено ряд нових методів: н.к. ліфтінг, обчислення н.к. функцій та н.к. формальних степеневих рядів на ретельно підібраних нільпотентних матрицях, використання переплетень для доведення н.к. тотожностей, визначення та використання правих і лівих н.к. зсувів назад для матричнозначних н.к. раціональних функцій, визначення та використання класу спільно унітарних наборів d операторів та його дуальність із класом наборів d унітарних операторів, розширення н.к. областей та н.к. функцій на прямі суми, подібностно інваріантні конверти та відповідні розширення н.к. функцій, та ін.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати є внеском в теорію вільних н.к. функцій і можуть бути використані у н.к. алгебрі, теорії вільної ймовірності, спектральній теорії кількох некомутуючих операторів, теорії н.к. лінійних систем, у задачах оптимізації із матричними змінними. Робота може також бути використана при підготовці спеціалізованих курсів для студентів та аспірантів.

Особистий внесок здобувача. В основній частині дисертації результати, отримані у співпраці з різними колегами, включені наступним чином. У спільній роботі з професором В. Вінніковим [**7, 9, 8, 10**], розподіл робіт був специфічним для кожного автора: постановка більшості задач та загальна стратегія були сформульовані професором В. Вінніковим, тоді як більшість методів доведення розробляв здобувач. Винятки є такі: ідея доведення теореми 1.5 (результат з [**8**]) належить проф. В. Віннікову, але деталі доведення були розроблені та подальші твердження з [**8**] запропоновані та доведені здобувачем; деякі результати з монографії [**7**], а саме, леми 8.10 і 8.16, були доведені проф. В. Вінніковим, а лема 5.12 і теореми 6.4, 7.2, 7.4, 8.2, 8.11 були доведені здобувачем у співпраці з проф. В. Вінніковим. Результати про подібностно інваріантні конверти і відповідні поширення н.к. функцій, що представлені у розділі 10, [**7**, додаток A] написані у співпраці з Шибанандою Бісвасом, який запропонував ідею таких конвертів. Проте, доведення у розділі 10 належать здобувачу. У спільній роботі з професорами А. Грішпаном, В. Вінніковим та Х. Дж. Вордеманом [**6**], частина, включена в цю дисертацію та пов'язана із застосуванням теорії н.к. раціональних функцій, належить здобувачу. У статтях [**1, 2**] постановка задач належить професору Д. Алпаю, тоді як доведення результатів належать здобувачу. Так само, у [**3**], постановка задач належить професору Дж. А. Боллу, тоді як доведення результатів належать здобувачу. Деякі техніки у дисертації, що застосовані у підрозділі 1.8, що взяті зі спільних статей [**4, 5**] з професором Дж. А. Боллом, належать частині цих статей, що є внеском здобувача. У статті [**11**] здобувач є єдиним автором.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на наукових конференціях та засіданнях наукових семінаров провідних українських та міжнародних наукових установ, а саме:

Конференції:
Пленарні та напівпленарні доповіді:

2012 *Great Plains Operator Theory Symposium "GPOTS 2012"*, University of Houston, Houston, TX (USA)
2013 *South-Eastern Analysis Meeting "SEAM 2013"*, Virginia Tech, Blacksburg, VA (USA)
2014 *International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems "MTNS 2014"*, University of Groningen, Groningen (the Netherlands)

Мінікурси лекцій:

2010 *International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems "MTNS-2010"*, Budapest (Hungary)
2012 *International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems "MTNS-2012"*, Melbourne (Australia)

Запрошені доповіді:

2006 *South Eastern Analysis Meeting "SEAM XXII"*, Gainsville, FL (USA)
2006 *International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems "MTNS-2006"*, Kyoto (Japan)
2007 *International Conference "Characteristic Functions and Transfer Functions in Operator Theory and System Theory"*, dedicated to Paul Fuhrmann on his 70th anniversary and to the memory of Moshe Livšic on his 90th anniversary, Beer-Sheva (Israel)
2008 *International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems "MTNS-2008"*, Blacksburg, VA (USA)
2010 *International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems "MTNS-2010"*, Budapest (Hungary)
2010 *International Workshop on Operator Theory and Applications "IWOTA-2010"*, Berlin (Germany)

2010 *NSF Workshop "Control, Optimization, and Functional Analysis: Synergies and Perspectives"in honor of Bill Helton*, San Diego, CA (USA)
2011 *International Conference "Function theory and operator theory: Infinite dimensional and free setting"* Beer-Sheva (Israel)
2011 *International Workshop on Operator Theory and Applications "IWOTA-2011"*, Seville (Spain)
2011 *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference,* Orlando, FL (USA)
2012 *Joint Mathematics Meetings, AMS-MAA*, Boston, MA (USA)
2014 *AMS Sectional Meeting*, Albuquerque, NM (USA)
2014 *International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems "MTNS-2014"*, Groningen (the Netherlands)
2014 *International Workshop on Operator Theory and Applications "IWOTA-2014"*, Amsterdam (the Netherlands)
2015 *Joint Mathematical Meetings*, San Antonio, TX (USA)
2015 *International Workshop on Operator Theory and Applications "IWOTA-2015"*, Tbilisi (Georgia)
2016 *Workshop in Noncommutative Analysis*, The University of Iowa, Iowa City, IA (USA)
2016 *International Workshop on Operator Theory and Applications "IWOTA-2016"*, St. Louis, MO (USA)
2016 *International Workshop "Complex Analysis and Noncommutative Function Theory"*, Toulouse (France)

Доповіді на семінарах та колоквіумах:

2 червня 2005	The Mathematics Department Colloquium, Drexel University (Philadelphia, PA)
14 грудня, 2005	The Dean seminar, College of Art and Science, Drexel University (Philadelphia, PA)
2005–2015	The Analysis seminar, Drexel University (Philadelphia, PA)
24 серпня, 2007	The Mathematics Department Colloquium, Virginia Tech (Blacksburg, VA)
16 грудня, 2009	Operator algebras/operator theory seminar, Technion (Haifa, Israel)
12 листопада, 2012	Operator and system theory seminar, Ben Gurion University of the Negev (Beer Sheva, Israel)
17 квітня, 2014	Colloquium, Department of Mathematics, University of Iowa (Iowa City, IA)
19 квітня, 2014	Iowa–Nebraska Functional Analysis seminar,

	Iowa State University (Des Moines, IA)
15 грудня, 2014	Operator and System Theory seminar, Ben-Gurion University of the Negev (Beer-Sheva, Israel)
27 січня, 2021	Київський Семінар з функціонального аналізу (Київ, Україна)

Публікації. Результати дисертації опубліковані в одній монографії [**7**] та 10 статтях [**1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11**] у міжнародних наукових періодичних виданнях. 7 з цих статей [**2, 4, 5, 6, 9, 10, 11**] опубліковані в журналах, що належать до 1 квартиля (Q1), 2 з цих статей [**3, 8**] належать до 2-го квартиля (Q2), а 1 з цих статей [**1**] належить до 4-го квартиля (Q4) згідно з класифікацією журналу SCImago Journal and Country Rank. Наказом Міністерства освіти і науки України No. 1220 від 23 вересня 2019 р. стаття у журналі з 1-го або 2-го квартиля (Q1, Q2) згідно з класифікацією звітів про цитування журналу SCImago та Country Rank of Journal, прирівнюється до 3 публікацій, і кожна з тих, що належать до 4-го квартиля (Q4), зараховується як одна публікація. Усі 10 статей [**1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11**], опубліковані в наукових періодичних виданнях, включених до міжнародних наукових метричних баз даних Scopus та/або Web of Science. Матеріали дисертації також додатково відображені у 3 матеріалах конференцій [**12, 13, 14**].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із анотації, вступу, десяти розділів, розбитих на підрозділи, висновків, списку використаних джерел із 158 найменувань, списку найважливіших понять та позначень та додатку, що містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів. Повний обсяг дисертації становить 309 сторінок, основний текст займає 270 сторінок.

Автор висловлює щиру вдячність науковому консультанту професору Пивоварчику Вячеславу Миколайовичу за увагу до моєї роботи та підтримку.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі дисертації обгрунтовано актуальність теми, вказано зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, визначено мету і задачі, об'єкт, предмет, та методи дослідження, вказано наукову новизну та оригінальність результатів, охарактеризовано особливий внесок здобувача, наведено список конференцій та семінарів, на яких дисертаційна робота пройшла апробацію. Також у вступі дається огляд існуючої літератури, що мотивувала здобувача, та огляд недавніх робіт, у яких було використано результати дисертації та які продовжили дослідження в даній галузі, наведено стислий огляд роботи та основних понять і результатів.

У першому розділі наведені результати здобувача щодо різних класів вільних н.к. функцій, які послужили мотивацією для розробки основ загальної теорії.

У підрозділі 1.1 ми вивчаємо матричнозначні н.к. раціональні функції і доводимо теорему про сингулярності таких функцій. Наш підхід використовує раціональні вирази та обчислення їх на наборах матриць усіх розмірів.

Нехай $T = (T_1, \ldots, T_d)$ - набір d загальних матриць розміру $n \times n$, тобто матричні елементи $(T_i)_{jk}$, $i = 1, \ldots, d$; $j, k = 1, \ldots, n$, становлять dn^2 комутативних невизначених. Для многочлена $P = \sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} x^w P_w$ з матричними коефіцієнтами $P_w \in \mathbb{K}^{p \times q}$, де $\mathbb{K}$ - поле, а $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ - вільний моноїд на d твірних $g_1, \ldots, g_d$, визначаємо

$$P_n = \sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} T^w \otimes P_w \in \mathbb{K}^{np \times nq}[(T_i)_{jk}]\colon \; i = 1, \ldots, d; \; j, k = 1, \ldots, n$$

(тобто P_n є $np \times nq$ матричним многочленом від комутуючих невизначених $(T_i)_{jk}$). Ми також обчислюємо матричнозначні н.к. многочлени на наборах матриць над полем $\mathbb{K}$. Після цього ми визначаємо рекурсивно матричне значення $p \times q$-значного н.к. раціонального виразу R, його область регулярності $\operatorname{dom} R := \coprod_{n=1}^{\infty} \operatorname{dom}_n R$, де $\operatorname{dom}_n R$ - це відкрита по Заріському підмножина $(\mathbb{K}^{n \times n})^d$, та його значення R_n на загальних матрицях, для сум, добутків, обернених раціональних виразів та для блочних матриць, в яких блоки - раціональні вирази. Ми тоді можемо обчислити $R(X) \in \mathbb{K}^{np \times nq}$ для $X = (X_1, \ldots, X_d) \in \operatorname{dom}_n R$. Ми також даємо означення поширеної області регулярності, $\operatorname{edom} R_n$, як області регулярності раціональної функції від (комутуючих) матричних елементів, і $\operatorname{edom} R := \coprod_{n=1}^{\infty} \operatorname{edom}_n R$. Два н.к. раціональних вираза P і Q називаються еквівалентними, якщо вони співпадають на перетині їх областей регулярності. Нарешті, ми даємо означення матричнозначної н.к. раціональної функції $\mathfrak{R}$ як класу еквівалентності матричнозначних н.к. раціональних виразів, і для такої функції даємо означення $\operatorname{dom}_n \mathfrak{R} := \bigcup_{R \in \mathfrak{R}} \operatorname{dom}_n R, \quad \operatorname{dom} \mathfrak{R} := \coprod_{n=1}^{\infty} \operatorname{dom}_n \mathfrak{R}$ Оскільки $\operatorname{edom}_n R$ не залежить від вибору представника R в класі $\mathfrak{R}$, ми можемо однозначно визначити $\operatorname{edom}_n \mathfrak{R}$ та $\operatorname{edom} \mathfrak{R} := \coprod_{n=1}^{\infty} \operatorname{edom}_n \mathfrak{R}$. Не є важким побачити, що $\operatorname{dom} R \subseteq \operatorname{edom} R$ і $\operatorname{dom} \mathfrak{R} \subseteq \operatorname{edom} \mathfrak{R}$ для матричнозначних н.к. виразів та функцій. Розширена область регулярності матричнозначної н.к. раціональної функції інваріантна щодо спільних подібностей, але взагалі не є інваріантною щодо прямих сум. Визначимо стабільну розширену область регулярності, $\operatorname{edom}^{\mathrm{st}} R = \coprod_{n=1}^{\infty} \operatorname{edom}_n^{\mathrm{st}} R$, яка вже інваріантна як щодо спільних подібностей, так і щодо прямих сум, таким чином:

$$\operatorname{edom}_n^{\mathrm{st}} R := \{X \in \operatorname{edom}_n R\colon I_\ell \otimes X \in \operatorname{edom}_n R \text{ для всіх } \ell \in \mathbb{N}\}.$$

Легко побачити, що $\operatorname{dom} R \subseteq \operatorname{edom}^{\mathrm{st}} R \subseteq \operatorname{edom} R$. Таким самим чином, як і для розширеної області регулярності, можна визначити стабільну розширену область регулярності $\mathfrak{R}$, $\operatorname{edom}^{\mathrm{st}} \mathfrak{R} := \coprod_{n=1}^{\infty} \operatorname{edom}_n^{\mathrm{st}} \mathfrak{R}$.

Наступна теорема дає опис областей регулярності (або множин сингулярності) для матричнозначних н.к. раціональних функцій в термінах так званих мінімальних реалізацій.

Теорема 1.5. Нехай $\mathfrak{R}$ - $p \times q$ матричнозначна н.к. раціональна функція, представлена виразом

$$R = D(x) + C(x)(I_m - x_1 A_1 - \cdots - x_d A_d)^{-1} B(x)$$

для якогось m, де $A_k \in \mathbb{K}^{m \times m}$, $k = 1, \ldots, d$, $B(x) = \sum_{|w|=l_B} x^w B_w$ і $C(x) = \sum_{|w|=l_C} x^w C_w$ - однорідні н.к. многочлени з коефіцієнтами $B_w \in \mathbb{K}^{m \times q}$, $C_w \in \mathbb{K}^{p \times m}$, і $D(x)$ - н.к. многочлен з коефіцієнтами у $\mathbb{K}^{p \times q}$. Припустимо, що

$$\operatorname*{span}_{v,w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d,\ |w|=l_B} \operatorname{ran} A^v B_w = \mathbb{K}^m, \qquad \bigcap_{v,w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d,\ |w|=l_C} C_w A^v = \{0\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \operatorname{edom}^{\mathrm{st}} \mathfrak{R} &= \operatorname{dom} \mathfrak{R} \\ &= \coprod_{n=1}^{\infty} \left\{ X \in \left(\mathbb{K}^{n \times n}\right)^d : \det(I_n \otimes I_m - X_1 \otimes A_1 - \cdots - X_d \otimes A_d) \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

За допомогою техніки н.к. ліфтінгу, розвинутого у цьому підрозділі, ми здобули комутативну версію цього результата.

Теорема 1.11. Нехай R - $p \times q$ матричнозначна раціональна функція від d комутуючих невизначених $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_d$ (над полем $\mathbb{K}$), регулярна в точці 0. Тоді для будь-якої комутативної реалізації Форнасіні - Маркесіні

$$\mathrm{R} = D + C(I_m - \mathrm{x}_1 A_1 - \cdots - \mathrm{x}_d A_d)^{-1}(\mathrm{x}_1 B_1 + \cdots + \mathrm{x}_d B_d),$$

з мінімально можливим m (такі реалізації завжди існують), де $A_k \in \mathbb{K}^{m \times m}$, $B_k \in \mathbb{K}^{m \times q}$, $k = 1, \ldots, d$, $C \in \mathbb{K}^{p \times m}$, $D \in \mathbb{K}^{p \times q}$, область регулярності R, $\operatorname{dom} \mathrm{R}$, співпадає з

$$\{\mathrm{X} = (\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_d) \in \mathbb{K}^d \colon \det(I_m - \mathrm{X}_1 A_1 - \cdots - \mathrm{X}_d A_d) \neq 0\}.$$

У підрозділі 1.2 результати минулого підрозділу застосовано до характеризації стійких (комутативних) многочленов у матричній одиничній полікулі

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &:= \mathbb{B}^{\ell_1 \times m_1} \times \cdots \times \mathbb{B}^{\ell_k \times m_k} \\ &= \left\{ X = (X^{(1)}, \ldots, X^{(k)}) \in \mathbb{C}^{\ell_1 \times m_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{\ell_k \times m_k} \colon \|X^{(r)}\| < 1,\ r = 1, \ldots, k \right\}. \end{aligned}$$

Многочлен p називається стійким (відповідно, строго стійким) в області $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}^d$ якщо він не має нулів у $\mathcal{D}$ (відповідно, у замиканні області $\overline{\mathcal{D}}$). У випадку, коли $d = 1$ і $\mathcal{D}$ - це одиничний круг $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{C} \colon |x| < 1\}$, і $p(0) = 1$, ми можемо записати $p = (1 - x a_1) \cdots (1 - x a_n) = \det(I - xK)$, де $a_i = 1/x_i$, $i = 1, \ldots, n$, нулі x_i многочлена p рахуються з їх кратностями, $K = \operatorname{diag}[a_1, \ldots, a_n]$ і $n = \deg p$. Звідси випливає, що матриця K стискаюча (відповідно, строго стискаюча), тобто $\|K\| \leq 1$ (відповідно, $\|K\| < 1$); тут и далі $\|\cdot\|$- це операторна $(2,2)$-норма.

Головний результат цього підрозділу - існування строго стискаючого детермінантного зображення $p = \det(I - X_n K)$, $X_n = \bigoplus_{r=1}^k (X^{(r)} \otimes I_{n_r})$, для деякого $n = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ і деякої $\sum_{r=1}^k m_r n_r \times \sum_{s=1}^k \ell_s n_s$ матриці K з $\|K\| < 1$, для строго стійкого у $\mathcal{B}$ многочлена.

У підрозділі 1.3 ми розвиваємо різницево-диференціальне числення для н.к. раціональних функцій. Результати тут багато в чому схожі до загального випадку цього числення для н.к. функцій, яке ми розвиваємо далі у розділах 2 і 3.

У підрозділі 1.4 один із кількох типів симетрій матричнозначних н.к. раціональних функцій, розглянутих у [**1**], вивчається в термінах їх реалізацій Джівона – Росера. Н.к. система Джівона - Росера дається рівняннями

$$(1) \qquad \Sigma^{\mathrm{GR}}\colon \begin{cases} h_1(g_1 w) &= A_{11}h_1(w) + \cdots + A_{1d}h_d(w) + B_1 u(w), \\ &\vdots \\ h_d(g_d w) &= A_{d1}h_1(w) + \cdots + A_{dd}h_d + B_d u(w), \\ y(w) &= C_1 h_1(w) + \cdots + C_d h_d(w) + D u(w), \end{cases} \qquad (w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d).$$

Тут $h_j \in \mathbb{K}^{m_j}$, тобто простір станів має d компонент : $\mathbb{K}^m = \mathbb{K}^{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}^{m_d}$. Передавальна функція н.к. системи Джівона – Росера дається формулою

$$(2) \qquad F = D + C(I_m - \Delta(x)A)^{-1}\Delta(x)B,$$

де A - це $d \times d$ блочна матриця з блоками $A_{ij} \in \mathbb{K}^{m_i \times m_j}$, $\Delta(x) = x_1 P_1 + \cdots + x_d P_d$, і P_j - ортогональна проєкція простору станів $\mathbb{K}^m$ на j-ту компоненту $\mathbb{K}^{m_j}$. Система (1) називається керованою (відп., спостережуваною) якщо

$$\operatorname*{span\,ran}_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} \{P_j A^w B\} = \mathbb{K}^{m_j}, \qquad \left(\bigcap_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} \ker\{C A^w|_{\mathbb{K}^{m_j}}\} = \{0\}, \quad j = 1, \dots, d \right).$$

Керована і спостережувана система зветься мінімальною.

Один з результатів [**1**] - це так звана обмежена дійсна лема без втрат[29]. Нехай $\mathfrak{F}$ - $q \times q$ матричнозначна н.к. раціональна функція над полем $\mathbb{C}$, регулярна у нулі. Нехай $J = J^{-1} = J^* \in \mathbb{C}^{q \times q}$. Тоді $\mathfrak{F}$ називається матрично-J-унітарною на множині $\mathcal{J}_d$ усіх наборів d косоермітових $n \times n$ матриць, $n = 1, 2, \dots$ (що є н.к. аналогом уявної осі комплексної площини), якщо $F(X)(J \otimes I_n)F(X)^* = J \otimes I_n$, $X \in \mathcal{J}_d$ у всіх точках $X \in \mathcal{J}_d \cap \operatorname{dom} F$ для усіх матричнозначних н.к. раціональних виразів F, що представляють $\mathfrak{F}$. Припустимо, що $\mathfrak{F}$ - $q \times q$ матричнозначна н.к. раціональна функція над $\mathbb{C}$ регулярна в нулі, і (1)–(2) - її мінімальна реалізація Джівона – Росера. $\mathfrak{F}$ є матрично-J-унітарною на $\mathcal{J}_d$ тоді і тільки тоді, коли

(a) D - J-унітарна, тобто, $DJD^* = J$;

(b) існує оборотний розв'язок $H = \operatorname{diag}(H_1, \dots, H_d)$, з $H_j \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j}$, рівняння Ляпунова $A^*H + HA = -C^*JC$, і $B = -H^{-1}C^*JD$.

[29] Загальна обмежена дійсна лема вивчається в статті J. A. Ball, G. Groenewald, and T. Malakorn. Bounded real lemma for structured noncommutative multidimensional linear systems and robust control. *Multidimens. Syst. Signal Process.*, 17 (2006) no. 2–3, 119–150.

Матриця H однозначно визначена мінімальною реалізацією (1)–(2), і для цієї реалізації она зветься асоційованою структурною ермітовою матрицею. Більше того, $\mathfrak{F}$ є матрично-J-внутрішньою, тобто, вона матрично-J-унітарна і, крім того, J-стискаюча на множині всіх матриць X_j, таких що $X_j + X_j^* > 0$, $n = 1, 2, \dots$ (ця множина є н.к. аналогом правої півплощини), тоді і тільки тоді, коли асоційована структурна ермітова матриця H додатно визначена.

У підрозділі 1.5 доведено такий факт:

Теорема 1.26. Нехай $\mathfrak{F} = \sum_{w \in \mathcal{G}_d} x^w \mathfrak{F}_w$ - формальний н.к. степеневий ряд[30] з коефіцієнтами $\mathfrak{F}_w \in \mathbb{C}^{p \times q}$, і $m \in \mathbb{N}$ таке, що $\bigcap_{w \in \mathcal{G}_d \colon |w| \le m} \ker \mathfrak{F}_w = \bigcap_{w \in \mathcal{G}_d} \ker \mathfrak{F}_w$. Тоді існує $\epsilon > 0$ таке, що, для кожного $n \in \mathbb{N} \colon n \ge m^m$ (у випадку $m = 0$, для кожного $n \in \mathbb{N}$) ряд для $\mathfrak{F}$ збігається у н.к. полікрузі

$$\Gamma(\epsilon) = \coprod_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n(\epsilon) := \coprod_{n \in \mathbb{N}} \{X \in \left(\mathbb{C}^{n \times n}\right)^d : \|X_j\|_{2,2} < \epsilon,\ j = 1, \dots, d\}$$

і наступна тотожність має місце:

$$\bigcap_{X \in \Gamma_n(\epsilon)} \ker \mathfrak{F}(X) = \mathbb{C}^n \otimes \left(\bigcap_{w \in \mathcal{G}_d \colon |w| \le m} \ker \mathfrak{F}_w \right);$$

більше того, існують $\ell \in \mathbb{N} \colon \ell \le qn$ і $X^{(1)}, \dots, X^{(d)} \in \Gamma_n(\epsilon)$ такі, що

$$\bigcap_{j=1}^{\ell} \ker \mathfrak{F}(X^{(j)}) = \mathbb{C}^n \otimes \left(\bigcap_{w \in \mathcal{G}_d \colon |w| \le m} \ker \mathfrak{F}_w \right).$$

Спеціальним випадком цієї теореми є відомий факт з теорії раціональних тотожностей у кільцях з діленням: не існує раціональних тотожностей вірних для нескінченно багатьох матричних кілець $\mathbb{C}^{n_j \times n_j}$, $j = 1, 2, \dots$.

У теоремі 1.26 ми встановили зв'язок між властивостями формального степеневого ряда з d некомутуючими невизначеними і матричними коефіцієнтами і властивостями матричнозначних функцій на наборах d матриць усіх розмірів одержаними з цих рідів шляхом матричних підстановок. **У підрозділі 1.6** результати подібного типу були встановлени в налаштуванні додатних ядер[31]. Нагадаємо, що якщо Ω - деяка множина і $\mathcal{E}$ - гільбертів простір, операторнозначна функція $K \colon \Omega \times \Omega \to \mathcal{L}(\mathcal{E})$[32] називається додатним $\mathcal{L}(\mathcal{E})$-значним ядром на Ω, якщо для

---

[30] Зокрема, це може бути степеневий ряд матричнозначної н.к. раціональної функції регулярної в точці 0, який існує за теоремою Кліні - Шуценберже; див. S. C. Kleene. Representation of events in nerve nets and finite automata. In *Automata studies*, Annals of mathematics studies, no. 34, pages 3–41. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956; M. P. Schützenberger. On the definition of a family of automata. *Information and Control*, 4 (1961), 245–270.

[31] N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 337–404; S. Saitoh, *Theory of Reproducing Kernels and its Applications*, Pitman Res. Notes Math. 189, Longman Scientific and Technical, Harlow, 1988.

[32] $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ позначає C^*-алгебру обмежених лінійних операторів в $\mathcal{E}$.

будь-якого натурального l, будь-яких точок $\omega^{(1)},\ldots,\omega^{(l)}\in\Omega$ та будь-яких векторів $h^{(1)},\ldots,h^{(l)}\in\mathcal{E}$ маємо $\sum_{j,k=1}^{l}\left\langle K(\omega^{(j)},\omega^{(k)})h^{(k)},h^{(j)}\right\rangle_{\mathcal{E}}\geq 0$, чи еквівалентно, існує додатковий гільбертів простір $\mathcal{H}$ і операторнозначна функція $H\colon\Omega\to\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{E})$[33] такі, що факторизація $K(\omega,\omega')=H(\omega)H(\omega')^*$ має місце для усіх $\omega,\omega'\in\Omega$.

Для будь-якого векторного простора $\mathcal{L}$, позначимо через $\mathcal{L}\langle\langle x_1,\ldots,x_d\rangle\rangle$ простір всіх формальних н.к. степеневих рядів у $x_1,\ldots,x_d$ з коефіцієнтами у $\mathcal{L}$. Формальний степеневий ряд у $2d$ некомутуючих невизначених $x=(x_1,\ldots,x_d)$ та $x'=(x'_1,\ldots,x'_d)$, $K(x,x')=\sum_{w,w'\in\mathcal{F}_d}x^w x'^{w'^\top}K_{w,w'}\in\mathcal{L}(\mathcal{E})\langle\langle x,x'\rangle\rangle$, назвемо *додатним н.к. ядром*[34] якщо $(w,w')\mapsto K_{w,w'}$ - додатне $\mathcal{L}(\mathcal{E})$-значне ядро на $\mathcal{F}_d$, тобто, для будь-якого натурального l, будь-яких слів $w^{(1)},\ldots,w^{(l)}\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ та будь-яких векторів $h^{(1)},\ldots,h^{(l)}\in\mathcal{E}$, маємо $\sum_{j,k=1}^{l}\left\langle K_{w^{(j)},w^{(k)}}h^{(k)},h^{(j)}\right\rangle_{\mathcal{E}}\geq 0$; еквівалентно, існують додатковий гільбертів простір $\mathcal{H}$ і формальний н.к. степеневий ряд $H(x)=\sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d}x^wH_w\in\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{E})\langle\langle x\rangle\rangle$ такі, що $K(x,x')=H(x)H(x')^*$, де $(x'^w)^*=x'^{w^\top}$. [35]

Формальний н.к. степеневий ряд $K(x,x')\in\mathcal{L}(\mathcal{E})\langle\langle x,x'\rangle\rangle$ називається збіжним, якщо для кожного $n\in\mathbb{N}$ існує зв'язний відкритий окіл U_n точки 0 в $(\mathbb{C}^{n\times n})^d$ такий, що ряд $K(X,X')$ збігається рівномірно на компактних підмножинах $U_n\times U_n$ у нормі $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n\otimes\mathcal{E})$ (ми припускаємо що $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ і $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d\times\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ упорядковані, скажімо, лексикографічно).

Теорема 1.30. Формальний н.к. степеневий ряд $K(x,x')\in\mathcal{L}(\mathcal{E})\langle\langle x,x'\rangle\rangle$, що є збіжним на множині околів U_n точки 0 у $(\mathbb{C}^{n\times n})^d$, $n\in\mathbb{N}$, є додатним н.к. ядром тоді і тільки тоді, коли $K(X,X'):=\sum_{w,w'\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d}X^wX'^{*w'^\top}$ - додатне $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n\otimes\mathcal{E})$-значне ядро на U_n для кожного $n\in\mathbb{N}$.

В "нільпотентному"випадку можна сформулювати значно сильніший результат. Нехай $X=(X_1,\ldots,X_d)\in(\mathbb{C}^{n\times n})^d$, та нехай $n,r\in\mathbb{N}$. Визначимо множину $\mathrm{Nilp}_d(n,r)$ наборів d спільно нільпотентних матриць порядку не більше r, тобто $X^w=0$ для всіх $w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ з $|w|\geq r$. Визначимо також множину $\mathrm{Nilp}_d(n)=\bigcup_{r=1}^{\infty}\mathrm{Nilp}_d(n,r)$ спільно нільпотентних наборів d матриць розміру $n\times n$[36].

Теорема 1.31. Формальний н.к. степеневий ряд $K(x,x')$ з коефіцієнтами у $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ є додатним н.к. ядром тоді і тільки тоді, коли для кожного $n\in\mathbb{N}$ і $X\in\mathrm{Nilp}_d(n)$, $K(X,X)\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^n\otimes\mathcal{E})$ - додатно напіввизначений оператор, тобто для кожного $h\in\mathbb{C}^n\otimes\mathcal{E}$ маємо $\langle K(X,X)h,h\rangle_{\mathbb{C}^n\otimes\mathcal{E}}\geq 0$.

Зауважимо, що твердження аналогічне теоремі 1.31 не вірно у "збіжному"випадку. Дійсно, покладемо $K(x,x'):=1-xx'$ (тут $d=1$). Ясно, що $K(X,X)>0$

[33] $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{E})$ позначає банахів простір обмежених лінійних операторів з $\mathcal{H}$ в $\mathcal{E}$.

[34] Нагадаємо, що для слова $w=g_{i_1}\cdots g_{i_\ell}$ ми використаємо позначення $w^\top:=g_{i_\ell}\cdots g_{i_1}$.

[35] Це поняття додатності вивчалося у статті J.A. Ball and V. Vinnikov, Formal reproducing kernel Hilbert spaces: The commutative and noncommutative settings, in *Reproducing kernel spaces and applications*, 77–134, *Operator Theory Adv. Appl.* 143, Birkhäuser Verlag, Basel, 2003. В цій роботі припускається, що x_i комутує з x'_j. Для нашої мети зручніше мати справу з $2d$ некомутуючими невизначеними; помітимо, що це неважливе, тому що в усіх наших формулах кожний x'_j з'являється праворуч кожного x_i, у кожному одночлені.

[36] Зауважимо, що спільно нільпотентні набори матриць сумісно подібні наборам строго верхньо-трикутних матриць.

для матриці X (будь-якого розміру) близької до нуля, проте $K(x,x')$ не є додатним н.к. ядром, тому що матриця коефіцієнтів $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ невизначена.

Теорема 1.31 тягне за собою результат про факторізацію певного класу н.к. многочленів. Многочлен у $2d$ некомутуючих невизначених $x = (x_1, \ldots, x_d)$ та $x' = (x'_1, \ldots, x'_d)$ з коефіцієнтами у $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ називається спадковим, якщо він має вигляд $K(x,x') = \sum_{w,w' \in \mathcal{G}_d\colon |w| \le m, |w'| \le m} z^w z'^{w'^T} K_{w,w'} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}) \langle x, x' \rangle$, де $\mathcal{E}$ - гільбертів простір, тобто, кожний x'_j з'являється праворуч кожного x_i, у кожному одночлені.

Теорема 1.32. Спадковий многочлен $K(x,x')$ з коефіцієнтами у $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ задовольняє $K(X,X) \ge 0$ для всіх $X \in \mathrm{Nilp}_d(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ тоді і тільки тоді, коли існують гільбертів простір $\mathcal{H}$ (вимірності не більше ніж $\dim(\mathcal{E}) \sum_{j=0}^m d^j$) і многочлен $H(x) = \sum_{w \in \mathcal{G}_d\colon |w| \le m} x^w H_w \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{E}) \langle x \rangle$ такі, що $K(x,x') = H(x)H(x')^*$. Більше того, для цієї факторізації достатньо припустити, що $K(X,X) \ge 0$ має місце для всіх $X \in \mathrm{Nilp}_d(\sum_{j=0}^m d^j, m+1)$.[37]

У підрозділі 1.7 ми наводимо комутативні та н.к. аналоги класичних результатів про консервативні ділатації дисипативних 1D лінійних систем[38], які грають важливу роль в теорії моделей для операторів стиску[39]. Зауважимо, що існують різні узагальнення поняття лінійної системи на dD випадок. Ми розглядаємо так звані системи Форнасіні – Маркесіні (FM) і показуємо, що консервативні ділатації дисипативних систем завжди існують в н.к. налаштуванні, але не завжди існують в комутативному налаштуванні. Ми надаємо критерій існування таких ділатацій. Як і у розділі 1.1, комутативні результати у цьому розділі також випливають з н.к. результатів за допомогою застосування техніки н.к. ліфтінгу.

FM система у "частотній області"має вигляд

$$\Sigma^{FM}: \begin{cases} h(x) &= xAh(x) + xBu(x), \\ y(x) &= \quad Ch(x) + Du(x), \end{cases} \tag{3}$$

де h, u, y (комутативні або н.к., залежно від налаштування) формальні степеневі ряди у невизначених $x_1, \ldots, x_d$, з коефіцієнтами у гільбертових просторах $\mathcal{H}, \mathcal{U}$, і $\mathcal{Y}$, відповідно, і наборами d операторів $A = (A_1, \ldots, A_d) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^d$, $B = (B_1, \ldots, B_d) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{H})^d$, операторами $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{Y})$, $D \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$. Порівняння коефіцієнтів формальних степеневих рядів в обох частинах рівнянь (3) дає версію рівнянь FM системи у "часовій області".[40]

---

[37] Теорема 1.32 є аналогом головного результату статті J. W. Helton, "Positive" noncommutative polynomials are sums of squares. *Ann. of Math.* 156 (2002), no. 2, 675–694. Дивись також близькі результати про спадкові многочлени, спільно нільпотентні тестові матриці та узагальнення у статтях S. McCullough, Factorization of operator-valued polynomials in several non-commuting variables, *Linear Algebra Appl.* 326 (2001), no. 1-3, 193–203; J.W. Helton, S. McCullough, and M. Putinar, A non-commutative Positivstellensatz on isometries, *J. reine angew. Math.* 568 (2004), 71–80.

[38] D. Z. Arov. Пассивные линейные стационарные динамические системы. *Сиб. Мат. Ж.*, 20 (1979), no. 2, 211–228, 457; B. Sz.-Nagy. Sur les contractions de l'espace de Hilbert. *Acta Sci. Math. Szeged*, 15 (1953), 87–92.

[39] B. Sz.-Nagy and C. Foiaş. *Harmonic analysis of operators on Hilbert space.* Translated from the French and revised. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1970.

[40] Ці рівняння для FM системи у комутативному налаштуванні з'являються у статті E. Fornasini and G. Marchesini. Doubly-indexed dynamical systems: state-space models and structural properties. *Math. Systems*

Передавальна функція FM системи $\Sigma^{FM} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ (комутативної або н.к.) - це формальний степеневий ряд (комутативний або н.к.)

$$T_{\Sigma^{FM}}(x) = D + C(I_{\mathcal{H}} - xA)^{-1}xB = D + \sum_{j=0}^{\infty} C(xA)^j xB$$

з коефіцієнтами у $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$. Тут ми користуємось позначенням $xA := x_1A_1 + \cdots + x_dA_d$, тощо.

Комутативна FM система $\Sigma^{FM,c} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ називається дисипативною (відп., консервативною) у полікруговій версії, якщо для кожного $\zeta \in \mathbb{T}^d$, де $\mathbb{T}^d := \{x \in \mathbb{C}^d \colon |x_k| = 1, \ k = 1, \dots, d\}$ - одиничний тор, $G_\zeta := \left[\begin{smallmatrix} \zeta A & \zeta B \\ C & D \end{smallmatrix}\right] \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{H} \oplus \mathcal{Y})$ - стискаючий (відп., унітарний) оператор. Передавальна функція $T_{\Sigma^{FM,c}}$ дисипативної комутативної FM системи $\Sigma^{FM,c} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ належить класу $\mathcal{B}_d(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ аналітичних стискаючих $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$-значних функцій в одиничному полікрузі $\mathbb{D}^d$. Довільний комутативний формальний степеневий ряд асоційований з функцією F у класі Шура–Аглера $\mathcal{SA}_d(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ має консервативну FM реалізацію[41] $\Sigma^{FM,c} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ вигляду (3), тобто, $F = T_{\Sigma^{FM,c}}$.

Н.к. FM система $\Sigma^{FM,nc} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ називається дисипативною (відп., консервативною) у версії н.к. полікругу, якщо для кожного $U \in \mathcal{U}^d \cap \mathcal{L}(\mathcal{E})^d$, з деяким гільбертовим простором $\mathcal{E}$, де $\mathcal{U}^d$ - множина наборів d унітарних операторів у гільбертовому просторі, $G_U := \left[\begin{smallmatrix} U \otimes A & U \otimes B \\ I_{\mathcal{E}} \otimes C & I_{\mathcal{E}} \otimes D \end{smallmatrix}\right] \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes (\mathcal{H} \oplus \mathcal{U}), \mathcal{E} \otimes (\mathcal{H} \oplus \mathcal{Y}))$ є стискаючим (відп., унітарним) оператором. Тут $U \otimes A = U_1 \otimes A_1 + \cdots + U_d \otimes A_d$, і так далі. Не дуже важко показати, що н.к. FM система $\Sigma^{FM,nc} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ консервативна тоді і тільки тоді, коли відповідна комутативна FM система $\Sigma^{FM,c} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ консервативна.

Ясно, що якщо $\Sigma^{FM,nc}$ дисипативна, то $\Sigma^{FM,c}$ також дисипативна. Зворотне твердження не вірно у випадку $d \geq 3$.[42]

Пропозиція 1.34. Передавальна функція $T_{\Sigma^{FM,nc}}$ дисипативної н.к. FM системи $\Sigma^{FM,nc} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ належить класу $\mathcal{SA}_d^{nc}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$.

З другого боку, н.к. формальний степеневий ряд $\mathfrak{F}$ з класу $\mathcal{SA}_d^{nc}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ має консервативну н.к. FM реалізацію[43] $\Sigma^{FM,nc} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$, тобто, $\mathfrak{F} = T_{\Sigma^{FM,nc}}$. Оскільки будь-яка консервативна н.к. FM система є дисипативною, клас передавальних функцій дисипативних н.к. FM систем , як і клас передавальних

Theory, 12 (1978/79), no. 1, 59–72; і в н.к. налаштуванні - у статтях J. A. Ball, G. Groenewald, and T. Malakorn. Structured noncommutative multidimensional linear systems. *SIAM J. Control Optim.*, 44 (2005), no. 4, 1474–1528 (electronic), J. A. Ball, G. Groenewald, and T. Malakorn. Conservative structured noncommutative multidimensional linear systems. In *The state space method generalizations and applications*, volume 161 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 179–223. Birkhäuser, Basel, 2006.

[41] J. A. Ball, C. Sadosky, and V. Vinnikov. Conservative input-state-output systems with evolution on a multidimensional integer lattice. *Multidim. Syst. Signal Processing*, 16 (2005), 133–198.

[42] Д. С. Калюжный. Неравенство фон Неймана для линейных матриц-функций нескольких переменных *Мат. Заметки*, 64 (1998), 218–223.

[43] Теорема 5.3. у статті J. A. Ball, G. Groenewald, and T. Malakorn. Conservative structured noncommutative multidimensional linear systems. In *The state space method generalizations and applications*, volume 161 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 179–223. Birkhäuser, Basel, 2006.

функцій консервативних н.к. FM систем, з простором входів $\mathcal{U}$ і простором виходів $\mathcal{Y}$, є $\mathcal{SA}_d^{nc}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$.

Н.к. FM система $\widetilde{\Sigma}^{FM,nc} = (d;\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C},D;\widetilde{\mathcal{H}},\mathcal{U},\mathcal{Y})$ є ділатацією н.к. FM системи $\Sigma^{FM,nc} = (d;A,B,C,D;\mathcal{H},\mathcal{U},\mathcal{Y})$, якщо для кожних $n\in\mathbb{Z}_+\setminus\{0\}$ і $X = (X_1,\dots,X_d)\in(\mathbb{C}^{n\times n})^d$ існують підпростори $\mathcal{D}_X$ і $\mathcal{D}_{*,X}$ у $\mathbb{C}^n\otimes\widetilde{\mathcal{H}}$ такі, що

$$\mathbb{C}^n\otimes\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{D}_X\oplus(\mathbb{C}^n\otimes\mathcal{H})\oplus\mathcal{D}_{*,X}, \tag{4}$$

$$(X\otimes\widetilde{A})\mathcal{D}_X\subset\mathcal{D}_X,\qquad (I_n\otimes\widetilde{C})\mathcal{D}_X=\{0\}, \tag{5}$$

$$(X\otimes\widetilde{A})^*\mathcal{D}_{*,X}\subset\mathcal{D}_{*,X},\qquad (X\otimes\widetilde{B})^*\mathcal{D}_{*,X}=\{0\}, \tag{6}$$

$$X\otimes A=(I_n\otimes P_{\mathcal{H}})(X\otimes\widetilde{A})|\mathbb{C}^n\otimes\mathcal{H},\qquad X\otimes B=(I_n\otimes P_{\mathcal{H}})(X\otimes\widetilde{B}), \tag{7}$$

$$I_n\otimes C=(I_n\otimes\widetilde{C})|\mathbb{C}^n\otimes\mathcal{H}. \tag{8}$$

Пропозиція 1.36 стверджує що передавальні функції н.к. FM системи $\Sigma^{FM,nc}$ і її ділатації $\widetilde{\Sigma}^{FM,nc}$ співпадають.

Нехай н.к. FM система $\widetilde{\Sigma}^{FM,nc} = (d;\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C},D;\widetilde{\mathcal{H}},\mathcal{U},\mathcal{Y})$ є ділатацією н.к. FM системи $\Sigma^{FM,nc} = (d;A,B,C,D;\mathcal{H},\mathcal{U},\mathcal{Y})$. Ми будемо називати таку ділатацію рівномірною, якщо підпростори $\mathcal{D}_X$ і $\mathcal{D}_{*,X}$ у $\mathbb{C}^n\otimes\widetilde{\mathcal{H}}$ в рівняннях (4)–(6) незалежні від X і мають вигляд $\mathcal{D}_X=\mathbb{C}^n\otimes\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_{*,X}=\mathbb{C}^n\otimes\mathcal{D}_*$. Так що, $\widetilde{\Sigma}^{FM,nc}$ - рівномірна ділатація $\Sigma^{FM,nc}$, якщо існують підпростори $\mathcal{D}$ і $\mathcal{D}_*$ у $\widetilde{\mathcal{H}}$ такі, що

$$\widetilde{\mathcal{H}}=\mathcal{D}\oplus\mathcal{H}\oplus\mathcal{D}_*,$$
$$\widetilde{A_k}\mathcal{D}\subset\mathcal{D},\quad \widetilde{C}\mathcal{D}=\{0\},\quad \widetilde{A_k}^*\mathcal{D}_*\subset\mathcal{D}_*,\quad \widetilde{B_k}^*\mathcal{D}_*=\{0\},\quad k=1,\dots,d,$$
$$A_k=P_{\mathcal{H}}\widetilde{A_k}|\mathcal{H},\quad B_k=P_{\mathcal{H}}\widetilde{B_k},\quad C=\widetilde{C}|\mathcal{H},\quad k=1,\dots,d.$$

Пропозиція 1.37 стверджує, що н.к. FM система $\widetilde{\Sigma}^{FM,nc}$ - ділатація н.к. FM системи $\Sigma^{FM,nc}$ тоді і тільки тоді, коли $\widetilde{\Sigma}^{FM,nc}$ - рівномірна ділатація $\Sigma^{FM,nc}$.

Теорема 1.38. Кожна дисипативна н.к. FM система $\Sigma^{FM,nc}$ має (рівномірну) консервативну ділатацію.

Комутативна FM система $\widetilde{\Sigma}^{FM,c} = (d;\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C},D;\widetilde{\mathcal{H}},\mathcal{U},\mathcal{Y})$ називається ділатацією комутативної FM системи $\Sigma^{FM,c} = (d;A,B,C,D;\mathcal{H},\mathcal{U},\mathcal{Y})$, якщо для кожного $x\in\mathbb{C}^d$ існують підпростори $\mathcal{D}_x$ і $\mathcal{D}_{*,x}$ у $\widetilde{\mathcal{X}}$ такі, що

$$\widetilde{\mathcal{H}}=\mathcal{D}_x\oplus\mathcal{H}\oplus\mathcal{D}_{*,x}, \tag{9}$$

$$x\widetilde{A}\mathcal{D}_x\subset\mathcal{D}_x,\ \widetilde{C}\mathcal{D}_x=\{0\},\ (x\widetilde{A})^*\mathcal{D}_{*,x}\subset\mathcal{D}_{*,x},\ (x\widetilde{B})^*\mathcal{D}_{*,x}=\{0\}, \tag{10}$$

$$xA=P_{\mathcal{H}}(x\widetilde{A})|\mathcal{H},\ xB=P_{\mathcal{H}}(x\widetilde{B}),\ C=\widetilde{C}|\mathcal{H}. \tag{11}$$

Пропозиція 1.41 стверджує, що передавальні функції комутативної FM системи $\Sigma^{FM,c}$ і її ділатації $\widetilde{\Sigma}^{FM,c}$ співпадають.

Теорема 1.42. Дисипативна система $\Sigma^{FM,c} = (d;A,B,C,D;\mathcal{H},\mathcal{U},\mathcal{Y})$ має консервативну ділатацію тоді і тільки тоді, коли лінійна функція $G_x=\left[\begin{smallmatrix} xA & xB\\ C & D\end{smallmatrix}\right]$ з коефіцієнтами у $\mathcal{L}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{U},\mathcal{H}\oplus\mathcal{Y})$ належить класу $\mathcal{SA}_d(\mathcal{H}\oplus\mathcal{U},\mathcal{H}\oplus\mathcal{Y})$.

Зауважимо, що для $d \geq 3$ не всі дисипативні комутативні FM системи мають консервативні ділатації[44].

Ми назвемо ділатацію $\widetilde{\Sigma}^{FM,c}$ системи $\Sigma^{FM,c}$ рівномірною, якщо підпростори $\mathcal{D}_x$ у (9) і (10) - незалежні від $x \in \mathbb{C}^d$, тобто, $\mathcal{D}_x = \mathcal{D}$, $x \in \mathbb{C}^d$, або еквівалентно, підпростори $\mathcal{D}_{*,x}$ незалежні від $x \in \mathbb{C}^d$, тобто, $\mathcal{D}_{*,x} = \mathcal{D}$, $x \in \mathbb{C}^d$. Легко побачити, що комутативна FM система $\widetilde{\Sigma}^{FM,c} = (d; \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, D; \widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ є рівномірною ділатацією комутативної FM системи $\Sigma^{FM,c} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ тоді і тільки тоді, коли відповідна н.к. FM система $\widetilde{\Sigma}^{FM,nc} = (d; \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, D; \widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ є рівномірною ділатацією відповідної н.к. FM системи $\Sigma^{FM,nc} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$.

Наступна теорема є посиленням теореми 1.42.

Теорема 1.43. Дисипативна система $\Sigma^{FM,c} = (d; A, B, C, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ має рівномірну консервативну ділатацію тоді і тільки тоді, коли лінійна функція G_x належить класу $\mathcal{SA}_d(\mathcal{H} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{H} \oplus \mathcal{Y})$.

Зауважимо, що у комутативному випадку не кожна ділатація рівномірна (що відрізняється від н.к. віпадку). Більше того, не кожна консервативна ділатація рівномірна, тобто теорема 1.43 є дійсно посиленням теореми 1.42.

У підрозділі 1.8 вивчаються н.к. аналоги інтерполяційних задач Каратеодорі і Каратеодорі – Феєра. Класична інтерполяційна задача Каратеодорі така[45]: якщо дана послідовність комплексних чисел $c_0 > 0$, $c_1, \ldots, c_m$, знайти голоморфну функцію $f(x) = f_0 + xf_1 + x^2 f_2 + \cdots$ на відкритому одиничному крузі $\mathbb{D}$, чиї значення у $\mathbb{D}$ мають додатну дійсну частину (тобто, f належить класу Герглотця $\mathcal{H}_1$), і таку, що $f_0 = \frac{c_0}{2}$, $f_1 = c_1, \ldots, f_m = c_m$. Теплиць встановив, що оригінальний критерій розв'язності Каратеодорі, сформульований у термінах опуклих тіл, допускає наступне формулювання[46] у термінах коефіцієнтів c_k, $k = 0, \ldots, m$: задача Каратеодорі має розв'язок тоді і тільки тоді, коли $(m+1) \times (m+1)$ матриця

$$T_c = \begin{bmatrix} c_0 & c_1^* & \ldots & c_{m-1}^* & c_m^* \\ c_1 & \ddots & \ddots & \ldots & c_{m-1}^* \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{m-1} & \ldots & \ddots & \ddots & c_1^* \\ c_m & c_{m-1} & \ldots & c_1 & c_0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

додатно напіввизначена (тут $c_k^* = \overline{c_k}$). З інтегрального зображення Ріса – Герглотця[47] $f(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \frac{1+\bar{\lambda}x}{1-\bar{\lambda}x}\, d\mu(\lambda) + i \operatorname{Im} f(0)$, $x \in \mathbb{D}$, яке характеризує функції з $\mathcal{H}_1$ (тут μ - додатна міра Бореля на одиничному колі $\mathbb{T}$; у випадку, коли $f(0) = \frac{1}{2}$ другий

[44] Це випливає з головного результату статті Д. С. Калюжный. Неравенство фон Неймана для линейных матриц-функций нескольких переменных. *Мат. Заметки*, 64 (1998), 218–223.

[45] Ця задача була поставлена у статтях C. Carathéodory. Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen. *Math. Ann.*, 64 (1907), 95–115; C. Carathéodory. Über den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 32 (1911), 193–217, де були представлені критерії розв'язності і единості.

[46] O. Toeplitz. Über die Fourier'sche Entwickelung positiver Funktionen. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 32 (1911), 191–192.

[47] F. Riesz. Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale supérieure (Paris)*, 28 (1911), 33–62; G. Herglotz. Über Potenzreihen mit positiven, reelen Teil im Einheitkreis. *Berichte*

доданок у правій частині зникає і μ має повну варіацію $|\mu| = 1$) одержується зображення для коефіцієнтів Тейлора $f \in \mathcal{H}_1$: $f_0 = \frac{|\mu|}{2} + i \operatorname{Im} f(0), f_k = \int_{\mathbb{T}} \bar{\lambda}^k \, d\mu(\lambda)$, $k = 1, 2, \ldots$. Таким чином, задача Каратеодорі має розв'язок тоді і тільки тоді, коли існує додатна міра Бореля μ на $\mathbb{T}$ така, що $c_k = \int_{\mathbb{T}} \bar{\lambda}^k \, d\mu(\lambda)$, $k = 0, \ldots, m$, тобто, μ - розв'язок тригонометричної проблеми моментів для даних c_k, $k = 0, \ldots, m$.

В операторному випадку, дані задачі Каратеодорі - обмежені лінійні оператори $c_0 \geq 0$, $c_1, \ldots, c_m$ на сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{Y}$, і клас $\mathcal{H}_1$ замінюється на клас $\mathcal{H}_1(\mathcal{Y})$ голоморфних функцій у $\mathbb{D}$, чиї значення - обмежені лінійні оператори на $\mathcal{Y}$ з додатною дійсною частиною. Тоді критерій Каратеодорі – Теплиця, інтегральне зображення Ріса – Герглотця для $f \in \mathcal{H}_1(\mathcal{Y})$, і тригонометричне моментне зображення вірні з операторною блочною матрицею T_c у (12), додатною борелевою $\mathcal{L}(\mathcal{Y})$-значною мірою μ, і збіжністю інтегралів у сильній операторній топології. Зображення Ріса – Герглотця для випадку, коли $f(0) = \frac{I_{\mathcal{Y}}}{2}$, а значить, і моментне зображення для випадку, коли $c_0 = I_{\mathcal{Y}}$, допускають наступний операторний вигляд:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} V^* (I_{\mathcal{H}} + xG)(I_{\mathcal{H}} - xG)^{-1} V, \quad x \in \mathbb{D}, \\ c_k &= V^* G^k V, \qquad k = 0, \ldots, m, \end{aligned}$$

де G - унітарний оператор на деякому додатковому гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ і $V \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{H})$ - ізометрія[48].

Подібна задача була розглянута Каратеодорі і Феєром[49] у класі Шура $\mathcal{S}_1$ голоморфних стискаючих функцій у $\mathbb{D}$: якщо дана послідовність комплексних чисел $s_0, \ldots, s_m$, знайти голоморфну функцію $F(x) = F_0 + xF_1 + x^2 F_2 + \cdots$ з класу $\mathcal{S}_1$ таку, що $F_0 = s_0, \ldots, F_m = s_m$. І. Шур довів[50], що задача Каратеодорі – Феєра має розв'язок тоді і тільки тоді, коли матриця

$$T_s = \begin{bmatrix} s_0 & 0 & \ldots & 0 \\ s_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ s_m & \ldots & s_1 & s_0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

стискаюча. У операторному випадку, дані задачі Каратеодорі – Феєра - оператори $s_0, \ldots, s_m \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$, з гільбертовими просторами $\mathcal{U}$ і $\mathcal{Y}$, клас $\mathcal{S}_1$ замінюється на клас $\mathcal{S}_1(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ голоморфних у $\mathbb{D}$ функцій, чиї значення - стискаючі оператори у $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$, і критерій Шура формулюється таким же чином, як і в скалярному випадку, з операторно-блочною матрицею T_s у (13).

über die Verhandlungen der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematische-physische Klasse, 63 (1911), 501–511.

[48] М. Наймарк. Положительно определённые функции на коммутативной группе. *Известия Акад. Наук СССР*, 7 (1943), 237–244.

[49] C. Carathéodory and L. Fejér. Über den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard–Landau'schen Satz. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 32 (1911), 218–239.

[50] I. Schur. Über Potenzreihen die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. *J. Reine Angew. Math.*, 147 (1917), 205–232.

У [**11**], ці результати були узагальнені до н.к. налаштування . Крім н.к. класу Шура – Аглера $\mathcal{SA}_d^{\rm nc}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$, який ми обговорювали вище, ми ввели н.к. клас Герглотця – Аглера $\mathcal{HA}_d^{\rm nc}(\mathcal{Y})$, що складається з н.к. формальних степеневих рядів $\mathfrak{f}$ у d невизначених з коефіцієнтами у $\mathcal{L}(\mathcal{Y})$, збіжних у н.к. одиничному полікрузі $\mathcal{D}_{\rm nc}^d$ і маючих там додатно напіввизначену дійсну частину: $\mathfrak{f}(X)+\mathfrak{f}(X)^*\geq 0$, $X=(X_1,\ldots,X_d)\in\mathcal{D}_{\rm nc}^d$. Зауважимо, що комутативні аналоги класів Шура – Аглера і Герглотця – Аглера були детально розглянуті у [**4**] і [**5**].

Ми називаємо множину $\Lambda\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ допустимою, якщо $g_kw\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d\setminus\Lambda$ і $wg_k\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d\setminus\Lambda$ для кожних $w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d\setminus\Lambda$ і $k=1,\ldots,d$. Задача Каратеодорі у н.к. полікрузі формулюється таким чином:

Задача 1.44. Нехай $\Lambda\subset\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ - допустима множина. Для даних операторів $\{c_w\}_{w\in\Lambda}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y})$, з $c_\emptyset\geq 0$, знайти $\mathfrak{f}=\sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d}x^w\mathfrak{f}_w\in\mathcal{HA}_d^{\rm nc}(\mathcal{Y})$ таке, що $\mathfrak{f}_\emptyset=\frac{c_\emptyset}{2}$, $\mathfrak{f}_w=c_w$, $w\in\Lambda\setminus\{\emptyset\}$.

Ми також розглядаємо спеціальний випадок цієї задачі, де $c_\emptyset=I_\mathcal{Y}$.

Задача 1.45. Нехай $\Lambda\subset\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ - допустима множина. Для даних операторів $\{c_w\}_{w\in\Lambda}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y})$, з $c_\emptyset=I_\mathcal{Y}$, знайти $\mathfrak{f}=\sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d}x^w\mathfrak{f}\in\mathcal{HA}_d^{\rm nc}(\mathcal{Y})$ таке, що $\mathfrak{f}_\emptyset=\frac{c_\emptyset}{2}=\frac{I_\mathcal{Y}}{2}$, $\mathfrak{f}_w=c_w$, $w\in\Lambda\setminus\{\emptyset\}$.

Задача Каратеодорі – Феєра у н.к. полікрузі формулюється таким чином:

Задача 1.46. Нехай $\Lambda\subset\mathcal{F}_d$ - допустима множина. Для даних операторів $\{s_w\}_{w\in\Lambda}\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$, знайти $\mathfrak{F}=\sum_{w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d}x^w\mathfrak{F}_w\in\mathcal{SA}_d^{\rm nc}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ таке, що $\mathfrak{F}_w=s_w$, $w\in\Lambda$.

Для узагальнення критеріїв Теплиця і Шура, ми переформулювали їх у зручних для цього термінах. Ми показали, що задача Каратеодорі з даними $c_0\geq 0$, $c_1,\ldots,c_m\in\mathcal{L}(\mathcal{Y})$ має розв'язок тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{Re}p(T)\geq 0$ для кожної нільпотентної стискаючої матриці T з рангом нільпотентності не більше $m+1$, де $p:=\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^m x^kc_k$; задача Каратеодорі - Феєра з даними $s_0,\ldots,s_m\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ має розв'язок тоді і тільки тоді, коли $\|q(T)\|\leq 1$ для кожної нільпотентної стискаючої матриці T з рангом нільпотентності не більше $m+1$, де $q:=\sum_{k=0}^m x^ks_k$.

Далі ми вводимо клас $\mathcal{G}^d$ наборів операторів $G=(G_1,\ldots,G_d)$ на спільному гільбертовому просторі таких, що $\zeta G=\sum_{k=1}^d\zeta_kG_k$ - унітарний оператор для кожного $\zeta=(\zeta_1,\ldots,\zeta_d)\in\mathbb{T}^d$. Наступний результат є узагальненням теореми Наймарка.

Теорема 1.49. Задача 1.45 має розв'язок тоді і тільки тоді, коли існують гільбертів простір $\mathcal{H}$, набір операторів $G\in\mathcal{G}^d\cap\mathcal{L}(\mathcal{H})^d$ та ізометрія $V\in\mathcal{L}(\mathcal{Y},\mathcal{H})$ такі, що $c_w=V^*G^wV$, $w\in\Lambda$.

Нехай $\Lambda\subset\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ - допустима множина. Будемо казати, що $T=(T_1,\ldots,T_d)\in(\mathbb{C}^{n\times n})^d$ - набір Λ-спільно нільпотентних матриць, якщо $T^w=0$, $w\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_d\setminus\Lambda$. Позначимо клас наборів Λ-спільно нільпотентних матриць як $\operatorname{Nilp}_d(\Lambda)$. Наступний результат - н.к. аналог критерію Теплиця.

Теорема 1.51. Задача 1.44 має розв'язок тоді і тільки тоді, коли многочлен $p:=\frac{c_\emptyset}{2}+\sum_{w\in\Lambda\setminus\{\emptyset\}}x^wc_w$ задовольняє $\operatorname{Re}p(X)\geq 0$, $X\in\mathcal{D}_{\rm nc}^d\cap\operatorname{Nilp}_d(\Lambda)$.

Подібним чином, наступний результат є н.к. аналогом критерію Шура.

Теорема 1.55. Задача 1.46 має розв'язок тоді і тільки тоді, коли многочлен $q := \sum_{w\in\Lambda} x^w s_w$ задовольняє $\|q(X)\| \le 1$, $X \in \mathcal{D}^d_{\rm nc} \cap \mathrm{Nilp}_d(\Lambda)$.

У другому розділі ми починаємо будувати основи загальної теорії н.к. функцій. Підрозділ 2.1 присвячений основним означенням. Нехай $\mathcal{R}$ - комутативне кільце з одиницею. Для модуля $\mathcal{M}$ над $\mathcal{R}$ ми даємо означення н.к. простору над $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_{\rm nc} = \coprod_{n=1}^\infty \mathcal{M}^{n\times n}$. Для $X \in \mathcal{M}^{n\times n}$ і $Y \in \mathcal{M}^{m\times m}$ ми визначаємо їх пряму суму $X \oplus Y = \left[\begin{smallmatrix} X & 0\\ 0 & Y\end{smallmatrix}\right] \in \mathcal{M}^{(n+m)\times(n+m)}$. Зауважимо, що матриці над $\mathcal{R}$ діють справа і зліва на матриці над $\mathcal{M}$ за стандартними правилами матричного множення і дії $\mathcal{R}$ на $\mathcal{M}$: якщо $X \in \mathcal{M}^{p\times q}$ і $T \in \mathcal{R}^{r\times p}$, $S \in \mathcal{R}^{q\times s}$, то $TX \in \mathcal{M}^{r\times q}$, $XS \in \mathcal{M}^{p\times s}$. Підмножина $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\rm nc}$ називається н.к. множиною, якщо вона замкнена щодо прямих сум; явно, позначаючи $\Omega_n = \Omega \cap \mathcal{M}^{n\times n}$, ми маємо $X \oplus Y \in \Omega_{n+m}$ для всіх $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$. Ми домовимося, що $\mathcal{M}^{n\times 0}$, $\mathcal{M}^{0\times n}$ і $\Omega_0 = \mathcal{M}^{0\times 0}$ складаються кожний з одного (нульового) елемента, "порожньої матриці відповідного розміру", і що $X \oplus Y = Y \oplus X = X \in \Omega_n$ для $n \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$ і $Y \in \Omega_0$. У випадку, коли $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$, ми ототожнюємо матриці над $\mathcal{M}$ з наборами d матриць над $\mathcal{R}$: $\left(\mathcal{R}^d\right)^{p\times q} \cong \left(\mathcal{R}^{p\times q}\right)^d$. Тоді маємо для $X = (X_1, \ldots, X_d) \in \left(\mathcal{R}^{n\times n}\right)^d$ і $Y = (Y_1, \ldots, Y_d) \in \left(\mathcal{R}^{m\times m}\right)^d$, що $X \oplus Y = \left(\left[\begin{smallmatrix} X_1 & 0\\ 0 & Y_1\end{smallmatrix}\right], \ldots, \left[\begin{smallmatrix} X_d & 0\\ 0 & Y_d\end{smallmatrix}\right]\right) \in \left(\mathcal{R}^{(n+m)\times(n+m)}\right)^d$; і для набору $X = (X_1, \ldots, X_d) \in \left(\mathcal{R}^{p\times q}\right)^d$ і матриць $T \in \mathcal{R}^{r\times p}$, $S \in \mathcal{R}^{q\times s}$, що $TX = (TX_1, \ldots, TX_d) \in \left(\mathcal{R}^{r\times q}\right)^d$, $\quad XS = (X_1 S, \ldots, X_d S) \in \left(\mathcal{R}^{p\times s}\right)^d$.

Нехай $\mathcal{M}$ і $\mathcal{N}$ - модулі над $\mathcal{R}$, і нехай $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\rm nc}$ - н.к. множина. Відображення $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\rm nc}$, з $f(\Omega_n) \subseteq \mathcal{N}^{n\times n}$, $n = 0, 1, \ldots$, назвемо н.к. функцією, якщо f задовольняє наступні дві умови: f інваріантна щодо прямих сум:

$$f(X \oplus Y) = f(X) \oplus f(Y), \quad X, Y \in \Omega;$$

f інваріантна щодо подібностей: якщо $X \in \Omega_n$ і $S \in \mathcal{R}^{n\times n}$ оборотна з $SXS^{-1} \in \Omega_n$, то

$$f(SXS^{-1}) = Sf(X)S^{-1}.$$

Ці дві умови разом, за пропозицією 2.1, еквівалентні одній умові, а саме, f інваріантна щодо переплетень[51]: якщо $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$, і $T \in \mathcal{R}^{n\times m}$, то

$$XT = TY \Longrightarrow f(X)T = Tf(Y).$$

У підрозділі 2.2 ми вводимо праві і ліві н.к. різницево-диференціальні оператори, Δ_R і Δ_L, на н.к. функціях. Ми робимо це за допомогою обчислень н.к. функції f на блочних верхньо- (відп., нижньо-) трикутних матрицях. Ми показуємо у пропозиціях 2.4 і 2.6, що для $X \in \Omega_n$ і $Y \in \Omega_m$,

$$f\left(\begin{bmatrix} X & Z\\ 0 & Y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(X) & \Delta_R f(X,Y)(Z)\\ 0 & f(Y)\end{bmatrix},$$

[51]Ця умова виникала у статті J. L. Taylor. Functions of several noncommuting variables. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 79 (1973), 1–34.

і $Z \mapsto \Delta_R f(X,Y)(Z)$ - $\mathcal{R}$-лінійна функція з $\mathcal{M}^{n\times m}$ у $\mathcal{N}^{n\times m}$. Відображення $f \mapsto \Delta_R f$ грає роль правого н.к. різницевого оператору, коли $Y \neq X$, і правого диференціального оператору, коли $Y = X$. Аналогічно,

$$f\left(\begin{bmatrix} X & 0 \\ Z & Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(X) & 0 \\ \Delta_L f(X,Y)(Z) & f(Y) \end{bmatrix},$$

де $Z \mapsto \Delta_L f(X,Y)(Z)$ - $\mathcal{R}$-лінійна функція з $\mathcal{M}^{m\times n}$ у $\mathcal{N}^{m\times n}$. Відображення $f \mapsto \Delta_L f$ грає роль лівого н.к. різницевого оператору, коли $Y \neq X$, і лівого диференціального оператору, коли $Y = X$. У доведенні пропозицій 2.4 і 2.6 ми користуємость важливим припущенням, що область Ω - допустима справа (відп., зліва), тобто для кожних $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{n\times m}$ (відп., $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $Z \in \mathcal{M}^{m\times n}$) існує оборотне $r \in \mathcal{R}$ таке, що $\left[\begin{smallmatrix} X & rZ \\ 0 & Y \end{smallmatrix}\right] \in \Omega_{n+m}$ (відп., $\left[\begin{smallmatrix} X & 0 \\ rZ & Y \end{smallmatrix}\right] \in \Omega_{n+m}$). Ми доводимо у пропозиції 2.8, що якщо н.к. множина Ω - допустима як справа, так і зліва, то $\Delta_R f(X,Y)(Z) = \Delta_L f(Y,X)(Z)$. Таким чином, ліве і праве різницево-диференціальні числення симетричні одне до одного, і далі ми концентруємось тільки на “правій"версії числення.

У підрозділі 2.3 ми встановлюємо основні правила різницево-диференціального числення: диференціювання сталої н.к. функції, лінійної н.к. функції, добутку, мінус першого степеня та композиції н.к. функцій.

У підрозділі 2.4 ми встановлюємо різницеві формули першого порядку для н.к. функцій.

Теорема 2.10 Нехай $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\rm nc}$ - н.к. функція на допустимій справа н.к. множині Ω. Тоді для всіх $n \in \mathbb{N}$ і довільних $X, Y \in \Omega_n$,

$$f(X) - f(Y) = \Delta_R f(Y,X)(X-Y) = \Delta_R f(X,Y)(X-Y). \tag{14}$$

Насправді, теорема 2.10 - спеціальний випадок більш загальної теореми, у якій встановлюється загальна формула скінчених різниць.

Теорема 2.11 Нехай $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\rm nc}$ - н.к. функція на допустимій справа н.к. множині Ω. Тоді для всіх $n, m \in \mathbb{N}$ і довільних $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ і $S \in \mathcal{R}^{m\times n}$,

$$Sf(X) - f(Y)S = \Delta_R f(Y,X)(SX - YS). \tag{15}$$

Звісно, формула (15) тягне а собою умову інваріантності f щодо переплетень. З (14) випливає, що за певних умов неперервності $\Delta_R f(Y,Y)(Z)$ є похідною f у точці Y у напряму Z, тобто $\Delta_R f(Y,Y)$ - диференціал f у точці Y.

У підрозділі 2.5 ми показуємо, що для н.к. функції f, $\Delta_R f(X,Y)$ як функція X і Y також інваріантна щодо прямих сум і подібностей, або еквівалентно, щодо переплетень, у певному вигляді. Пропозиція 2.17 дає найбільш загальний вигляд цих властивостей. Зокрема, інваріантність щодо переплетень виглядає так:

$$TX = \tilde{X}T,\ SY = \tilde{Y}S \Longrightarrow T\,\Delta_R f(X,Y)(ZS) = \Delta_R f\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)(TZ)S, \tag{16}$$

з матрицями X, Y з допустимої справа множини Ω та матрицями T, S над $\mathcal{R}$ відповідних розмірів.

У підрозділі 2.6 ми розглядаємо, разом з повним різницево-диференіальним оператором Δ_R його напрямкову версію. Нехай $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\rm nc}$ - допустима справа н.к. множина, і нехай $f\colon \Omega \to \mathcal{N}_{\rm nc}$ - н.к. функція. Для $\mu \in \mathcal{M}$, ми визначаємо для кожних $n, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ лінійне відображення $\Delta_{R,\mu}f(X,Y)\colon \mathcal{R}^{n\times m} \to \mathcal{N}^{n\times m}$ як $\Delta_{R,\mu}f(X,Y)(A) = \Delta_R f(X,Y)(A\mu)$ Тут для матриці A над $\mathcal{R}$ і $\mu \in \mathcal{M}$ добуток $A\mu$ - матриця над $\mathcal{M}$ того ж розміру і $(A\mu)_{ij} = A_{ij}\mu$ для всіх i та j.

У спеціальному випадку, коли $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$, ми визначаємо j-й правий частковий н.к. різницево-диференціальний оператор $\Delta_{R,j} = \Delta_{R,e_j}$, де e_j -j-й стандартний базисний вектор у $\mathcal{R}^d$, $j = 1, \ldots, d$. За лінійністю, маємо $\Delta_R f(X,Y)(Z) = \sum_{j=1}^d \Delta_{R,j} f(X,Y)(Z_j)$.

Далі у цьому підрозділі основні правила н.к. різницево-диференціального числення переписуються для напрямкових н.к. різницево-диференціальних операторів, і для випадку, коли $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$, встановлюється різницева формула першого порядку у термінах часткових н.к. різницево-диференціальних операторів:

$$f(X) - f(Y) = \sum_{j=1}^{d} \Delta_{R,j} f(X,Y)(X_j - Y_j) = \sum_{j=1}^{d} \Delta_{R,j} f(Y,X)(X_j - Y_j).$$

Властивості $\Delta_{R,\mu}f(X,Y)$ як функції X і Y - такі самі, як і для повних н.к. різницево-диференціальних операторів.

У розділі 3 вводяться і вивчаються н.к. функції вищого порядку і їх різницево-диференціальне числення. **У підрозділі 3.1** дається означення н.к. функцій вищого порядку як функцій від $k+1$ аргументів у певних н.к. множинах, чиї значення - певні k-лінійні відображення, інваріантні щодо прямих сум і подібностей, або еквівалентно, інваріантні щодо переплетень (пропозиція 3.2), у певному сенсі. Нехай $\mathcal{M}_0, \ldots, \mathcal{M}_k, \mathcal{N}_0, \ldots, \mathcal{N}_k$ - модулі над кільцем $\mathcal{R}$. Нехай $\Omega^{(j)} \subseteq \mathcal{M}_{j,\rm nc}$ - н.к. множина, $j = 0, \ldots, k$. Розглянемо функції f на $\Omega^{(0)} \times \cdots \times \Omega^{(k)}$ з $f(\Omega^{(0)}_{n_0}, \ldots, \Omega^{(k)}_{n_k}) \subseteq \hom_{\mathcal{R}}\left({\mathcal{N}_1}^{n_0\times n_1} \otimes \cdots \otimes {\mathcal{N}_k}^{n_{k-1}\times n_k}, {\mathcal{N}_0}^{n_0\times n_k}\right)$. Іншими словами, для $X^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}, \ldots, X^k \in \Omega^{(k)}_{n_k}$, $f\left(X^0, \ldots, X^k\right)$ - k-лінійне відображення над $\mathcal{R}$ з ${\mathcal{N}_1}^{n_0\times n_1} \times \cdots \times {\mathcal{N}_k}^{n_{k-1}\times n_k}$ у ${\mathcal{N}_0}^{n_0\times n_k}$. Ми будемо казати, що f - н.к. функція порядку k, якщо f інваріантна щодо переплетень: якщо $T_j X^j = \tilde{X}^j T_j$, $j = 0,\ldots,k$, то

$$T_0 f(X^0, \ldots, X^k)(Z^1 T_1, \ldots, Z^k T_k) = f(\tilde{X}^0, \ldots, \tilde{X}^k)(T_0 Z^1, \ldots, T_{k-1} Z^k) T_k$$

для матриць $T_j \in \mathcal{R}^{\widetilde{n_j}\times n_j}$. Ми даємо означення н.к. функцій порядку нуль як просто н.к. функцій з розділу 1. Позначимо через $\mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\rm nc}, \ldots, \mathcal{N}_{k,\rm nc})$ клас н.к. функцій порядку k, $k = 0, 1, \ldots$. У випадку, коли $\mathcal{M}_0 = \cdots = \mathcal{M}_k =: \mathcal{M}$ і $\Omega^{(0)} = \cdots = \Omega^{(k)} =: \Omega$, ми пишемо $\mathcal{T}^k = \mathcal{T}^k(\Omega; \mathcal{N}_{0,\rm nc}, \ldots, \mathcal{N}_{k,\rm nc})$. Зауважимо, що для будь-якої н.к. функції $f \in \mathcal{T}^0(\Omega; \mathcal{N}_{\rm nc})$ маємо $\Delta_R f \in \mathcal{T}^1(\Omega; \mathcal{N}_{\rm nc}, \mathcal{M}_{\rm nc})$ (дивись (16)).

Для $Z^j \in {\mathcal{N}_j}^{n_{j-1}\times n_j}$, $n_j = m_j s_j$, $j = 1, \ldots, k$, визначимо

$$Z^1 {}_{s_0,s_2}\odot_{s_1} \cdots {}_{s_{k-2},s_k}\odot_{s_{k-1}} Z^k \in \left({\mathcal{N}_1}^{s_0\times s_1} \otimes \cdots \otimes {\mathcal{N}_k}^{s_{k-1}\times s_k}\right)^{m_0\times m_k},$$

розуміючи Z^j як $m_{j-1} \times m_j$ матрицю над ${\mathcal{N}_j}^{s_{j-1}\times s_j}$ і користаючись стандартними правилами матричного множення, тобто

$$(Z^1{}_{s_0,s_2}\!\odot_{s_1} \cdots {}_{s_{k-2},s_k}\!\odot_{s_{k-1}} Z^k)^{\alpha,\beta} = \sum_{\alpha_j=1,\dots,m_j\colon \alpha_0=\alpha,\alpha_k=\beta} Z^{1\alpha_0,\alpha_1} \otimes \cdots \otimes Z^{k\alpha_{k-1},\alpha_k},$$

де $Z^j = [Z^{j\alpha,\beta}]_{\alpha=1,\dots,m_{j-1},\beta=1,\dots,m_j}$. Це ітерація добутку матриць над двома модулями з операцією множення їх у третій модуль. У випадку, коли два множника мають квадратні блоки (необхідно одного розміру), ми опускаємо ліві нижні індекси, тобто ми пишемо $Z^1 \odot_s Z^2$ замість $Z^1{}_{s,s}\!\odot_s Z^2$. Для $s=1$ ми опускаємо правий нижній індекс, тобто ми пишемо $Z^1{}_{s_0,s_2}\!\odot Z^2$ замість $Z^1{}_{s_0,s_2}\!\odot_1 Z^2$, і пишемо $Z^1 \odot \cdots \odot Z^k$ замість $Z^1 \odot_1 \cdots \odot_1 Z^k$.[52]

Пропозиція 3.3. Нехай $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)},\dots,\Omega^{(k)};\mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}},\dots,\mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}})$ і $n_j = m_j s_j$, $j=0,\dots,k$. Для $Y^j \in \Omega^{(j)}_{s_j}$, $X^j = \bigoplus_{\alpha=1}^{m_j} Y^j$, $j=0,\dots,k$, і для $Z^j \in {\mathcal{N}_j}^{n_{j-1}\times n_j}$, $j=1,\dots,k$,

$$f(X^0,\dots,X^k)(Z^1,\dots,Z^k) = Z^1{}_{s_0,s_2}\!\odot_{s_1} \cdots {}_{s_{k-2},s_k}\!\odot_{s_{k-1}} Z^k f(Y^0,\dots,Y^k).$$

Тут лінійне відображення

$$f(Y^0,\dots,Y^k)\colon {\mathcal{N}_1}^{s_0\times s_1} \otimes \cdots \otimes {\mathcal{N}_k}^{s_{k-1}\times s_k} \longrightarrow {\mathcal{N}_0}^{s_0\times s_k}$$

діє на матрицю $Z^1{}_{s_0,s_2}\!\odot_{s_1} \cdots {}_{s_{k-2},s_k}\!\odot_{s_{k-1}} Z^k$. Для $X^j = \bigoplus_{\alpha=1}^{m_j} Y^j$, $j=0,\dots,k-1$, $X^k \in \Omega^{(k)}_{n_k}$, і для $Z^j \in {\mathcal{N}_j}^{n_{j-1}\times n_j}$, $j=1,\dots,k$,

$$f(X^0,\dots,X^k)(Z^1,\dots,Z^k) = Z^1{}_{s_0,s_2}\!\odot_{s_1} \cdots {}_{s_{k-2},s_k}\!\odot_{s_{k-1}} Z^k f(Y^0,\dots,Y^{k-1},X^k).$$

Тут лінійне відображення

$$\begin{aligned} f(Y^0,\dots,Y^{k-1},X^k)\colon & {\mathcal{N}_1}^{s_0\times s_1} \otimes \cdots \otimes (\mathcal{N}_{k-1})^{s_{k-2}\times s_{k-1}} \otimes {\mathcal{N}_k}^{s_{k-1}\times m_k s_k} \\ & \cong \left({\mathcal{N}_1}^{s_0\times s_1} \otimes \cdots \otimes {\mathcal{N}_k}^{s_{k-1}\times s_k}\right)^{1\times m_k} \longrightarrow {\mathcal{N}_0}^{s_0\times m_k s_k} \cong \left({\mathcal{N}_0}^{s_0\times s_k}\right)^{1\times m_k} \end{aligned}$$

діє на рядки матриці $Z^1{}_{s_0,s_2}\!\odot_{s_1} \cdots {}_{s_{k-2},s_k}\!\odot_{s_{k-1}} Z^k$; тобто $f(Y^0,\dots,Y^{k-1},X^k)$ - $m_k \times m_k$ матриця лінійних відображень

$${\mathcal{N}_1}^{s_0\times s_1} \otimes \cdots \otimes {\mathcal{N}_k}^{s_{k-1}\times s_k} \longrightarrow {\mathcal{N}_0}^{s_0\times s_k},$$

що множить матрицю $Z^1{}_{s_0,s_2}\!\odot_{s_1} \cdots {}_{s_{k-2},s_k}\!\odot_{s_{k-1}} Z^k$ справа.

У підрозділі 3.2 ми поширюємо Δ_R до оператору з $\mathcal{T}^k$ у $\mathcal{T}^{k+1}$ для всіх k. Подібно до випадку $k=0$, це робиться шляхом обчислення н.к. функції порядку

[52] Дивись, наприклад, с. 86 монографії G. Pisier. *Introduction to operator space theory.* London Mathematical Society Lecture Note Series, 294. Cambridge University Press, Cambridge, 2003; або с. 240 у V. Paulsen. *Completely bounded maps and operator algebras.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 78. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

k (> 0) на наборі $(k+1)$ квадратних матриць з одним з аргументів блочно-трикутним.

Пропозиція 3.7. Нехай $\mathcal{M}_j$, $\mathcal{N}_j$ - модулі, і нехай $\Omega^{(j)} \subseteq \mathcal{M}_{j,\mathrm{nc}}$ - н.к. множина, $j = 0, \dots, k$, і $\Omega^{(k)}$-допустима справа. Нехай $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \dots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}})$. Нехай $X^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}$, $\dots$, $X^{k-1} \in \Omega^{(k-1)}_{n_{k-1}}$, $X^{k\prime} \in \Omega^{(k)}_{n'_k}$, $X^{k\prime\prime} \in \Omega^{(k)}_{n''_k}$, $Z^1 \in {\mathcal{N}_1}^{n_0 \times n_1}$, $\dots$, $Z^{k-1} \in (\mathcal{N}_{k-1})^{n_{k-2} \times n_{k-1}}$, $Z^{k\prime} \in {\mathcal{N}_k}^{n_{k-1} \times n'_k}$, $Z^{k\prime\prime} \in {\mathcal{N}_k}^{n_{k-1} \times n''_k}$. Нехай $Z \in {\mathcal{M}_k}^{n'_k \times n''_k}$ таке, що $\begin{bmatrix} X^{k\prime} & Z \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix} \in \Omega^{(k)}_{n'_k + n''_k}$. Тоді

$$
\begin{aligned}
(17)\quad f\left(X^0, \dots, X^{k-1}, \begin{bmatrix} X^{k\prime} & Z \\ 0 & X^{k\prime\prime} \end{bmatrix}\right) & (Z^1, \dots, Z^{k-1}, \mathrm{row}\,[Z^{k\prime}, Z^{k\prime\prime}]) \\
= \mathrm{row}\, \Big[& f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k\prime}), \\
& \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime}, X^{k\prime\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k\prime}, Z) \\
& + f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k\prime\prime}) \Big].
\end{aligned}
$$

Тут $\Delta_R f(X^0, \dots, X^{k-1}, X^{k\prime}, X^{k\prime\prime})(Z^1, \dots, Z^{k-1}, Z^{k\prime}, Z)$ визначене однозначно через (17), незалежне від $Z^{k\prime\prime}$, і лінійне як функція Z.

Теорема 3.10. Нехай $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \dots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}})$, де $\Omega^{(k)} \subseteq \mathcal{M}_{k,\mathrm{nc}}$ допустима справа н.к. множина. Для кожних $X^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}$, $\dots$, $X^k \in \Omega^{(k)}_{n_k}$, $X^{k+1} \in \Omega^{(k)}_{n_{k+1}}$, відображення $(Z^1, \dots, Z^{k+1}) \longmapsto \Delta_R f(X^0, \dots, X^{k+1})(Z^1, \dots, Z^{k+1})$ з ${\mathcal{N}_1}^{n_0 \times n_1} \times \cdots \times {\mathcal{N}_k}^{n_{k-1} \times n_k} \times {\mathcal{M}_k}^{n_k \times n_{k+1}}$ у ${\mathcal{N}_0}^{n_0 \times n_{k+1}}$ - $(k+1)$-лінійне над $\mathcal{R}$. Більше того, $\Delta_R f \in \mathcal{T}^{k+1}(\Omega^{(0)}, \dots, \Omega^{(k)}, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}}, \mathcal{M}_{k,\mathrm{nc}})$.

Взагалі, ми можемо визначити н.к. різницево-диференціальний оператор ${}_j\Delta_R$, обчислюючи н.к. функцію порядку k на наборах $(k+1)$ квадратних матриць з $(j+1)$-им аргументом верхньо-трикутним, $j = 0, \dots, k$. Зокрема, $\Delta_R = {}_k\Delta_R$.

У підрозділі 3.3 встановлені різницеві формули першого порядку для н.к. функцій вищого порядку, аналогічні формулам (14) і (15). Ці формули для $(j+1)$-го аргументу містять н.к. різницево-диференціальний оператор ${}_j\Delta_R$.

У підрозділі 3.4 ми виводимо умови, необхідні для того, щоб н.к. функція вищого порядку була інтегровна , тобто була результатом застосування н.к. різницево-диференціального оператору до н.к. функції (або н.к. функції вищого порядку).

Теорема 3.24 Нехай $f \in \mathcal{T}^k(\Omega; \mathcal{N}_{\mathrm{nc}}, \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{M}_{\mathrm{nc}})$, де $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ - допустима справа н.к. множина. Якщо існує н.к. функція $g \in \mathcal{T}^0(\Omega; \mathcal{N}_{\mathrm{nc}})$ така, що $f = \Delta_R^k g$, то ${}_i\Delta_R f = {}_j\Delta_R f$, $i, j = 0, \dots, k$.

Наслідок 3.25. Для кожних $g \in \mathcal{T}^0(\Omega; \mathcal{N}_{\mathrm{nc}})$, $\ell \in \mathbb{N}$ і $j_s \in \mathbb{N}$ з $0 \leq j_s \leq s$, $s = 1, \dots, \ell$, маємо ${}_{j_\ell}\Delta_R \cdots {}_{j_1}\Delta_R g = \Delta_R^\ell g$.

Подібно до підрозділу 2.6, **у підрозділу 3.5** ми вивчаємо напрямкову версію н.к. різницево-диференціальних операторів. Нехай $\Omega^{(j)} \subseteq \mathcal{M}_{j,\mathrm{nc}}$, $j = 0, \dots, k$, - н.к. множини, і нехай $\Omega^{(k)} \subseteq \mathcal{M}_{k,\mathrm{nc}}$ допустима справа. Нехай

$$f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \dots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \dots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}}).$$

Для $\mu \in \mathcal{M}_k$, ми визначаємо для всіх $n_0, \ldots, n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $X^0 \in \Omega^{(0)}_{n_0}, \ldots, X^k \in \Omega^{(k)}$, $X^{k+1} \in \Omega^{(k)}_{n_{k+1}}$ $(k+1)$-лінійне відображення

$$\Delta_{R,\mu} f(X^0, \ldots, X^{k+1}) \colon \mathcal{N}_1^{n_0 \times n_1} \times \cdots \times \mathcal{N}_k^{n_{k-1} \times n_k} \times \mathcal{R}^{n_k \times n_{k+1}} \longrightarrow \mathcal{N}_0^{n_0 \times n_{k+1}},$$

$$\Delta_{R,\mu} f(X^0, \ldots, X^{k+1})(Z^1, \ldots, Z^k, A) = \Delta_R f(X^0, \ldots, X^{k+1})(Z^1, \ldots, Z^k, A\mu).$$

Більше того, $\Delta_{R,\mu} f \in \mathcal{T}^{k+1}(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}}, \mathcal{R}_{\mathrm{nc}})$.

У спеціальному випадку, коли $\mathcal{M}_k = \mathcal{R}^d$, ми визначаємо j-й правий частковий н.к. різницево-диференціальний оператор $\Delta_{R,j} = \Delta_{R,e_j}$. За лінійністю,

$$\Delta_R f(X^0, \ldots, X^{k+1})(Z^1, \ldots, Z^{k+1}) = \sum_{j=1}^{d} \Delta_{R,j} f(X^0, \ldots, X^{k+1})(Z^1, \ldots, Z^k, Z^{k+1}_j).$$

Для $\mu^1, \ldots, \mu^\ell \in \mathcal{M}_k$, ми визначаємо відповідний напрямковий н.к. різницево-диференціальний оператор ℓ-го порядку

$$\begin{aligned} \Delta^\ell_{R,\mu^1,\ldots,\mu^\ell} = \Delta_{R,\mu^\ell} \cdots \Delta_{R,\mu^1} \colon\ & \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}}) \\ & \longrightarrow \mathcal{T}^{k+\ell}(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}, \underbrace{\Omega^{(k)}, \ldots, \Omega^{(k)}}_{\ell \text{ times}}; \mathcal{N}_{0,\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{N}_{k,\mathrm{nc}}, \underbrace{\mathcal{R}_{\mathrm{nc}}, \ldots, \mathcal{R}_{\mathrm{nc}}}_{\ell \text{ times}}) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Delta^\ell_{R,\mu^1,\ldots,\mu^\ell} f(X^0, \ldots, X^{k+\ell})(Z^1, \ldots, Z^k, A^1, \ldots, A^\ell) \\ & \qquad = \Delta^\ell_R f(X^0, \ldots, X^{k+\ell})(Z^1, \ldots, Z^k, A^1\mu^1, \ldots, A^\ell\mu^\ell). \end{aligned}$$

У спеціальному випадку, коли $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$, ми визначаємо частковий н.к. різницево-диференціальний оператор ℓ-го порядку, відповідний до слова $w = g_{i_1} \cdots g_{i_\ell} \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ як $\Delta^w_R = \Delta^\ell_{R,e_{i_1},\ldots,e_{i_\ell}} = \Delta_{R,i_\ell} \cdots \Delta_{R,i_1}$. Зауважимо, що ми можемо інтерпретувати Δ^w_R як н.к. мультістепень, якщо ми розглядаємо Δ_R як набір $(\Delta_{R,1}, \ldots, \Delta_{R,d})$ часткових н.к. різницево-диферрнціальних операторів першого порядку.

За мультілінійностю, ми маємо для $f \in \mathcal{T}^k$:

$$\begin{aligned} & \Delta^\ell_R f(X^0, \ldots, X^{k+\ell})(Z^1, \ldots, Z^{k+\ell}) \\ & \qquad = \sum_{w = g_{i_1} \cdots g_{i_\ell}} \Delta^{w^\top}_R f(X^0, \ldots, X^{k+\ell})(Z^1, \ldots, Z^k, Z^{k+1}_{i_1}, \ldots, Z^{k+\ell}_{i_\ell}), \end{aligned}$$

де додавання береться над усіма словами довжини ℓ і де ми користуємось транспозицією слів: для $w = g_{i_1} \cdots g_{i_\ell}$ ми позначаємо $w^\top = g_{i_\ell} \cdots g_{i_1}$.

У розділі 4 ми застосовуємо числення н.к. різницево-диференціальних операторів вищого порядку, для отримання н.к. аналогу формули Брука Тейлора, яку ми називаємо формулою Тейлора – Тейлора, на честь Брука Тейлора і Джозефа Л. Тейлора.

Теорема 4.1. Нехай $f \in \mathcal{T}^0(\Omega; \mathcal{N}_{\rm nc})$, де $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{\rm nc}$ - допустима справа н.к. множина, $n \in \mathbb{N}$, і $Y \in \Omega_n$. Тоді для кожного $N \in \mathbb{N}$ і довільного $X \in \Omega_n$,

$$f(X) = \sum_{\ell=0}^{N} \Delta_R^\ell f(\underbrace{Y, \dots, Y}_{\ell+1 \text{ times}})(\underbrace{X-Y, \dots, X-Y}_{\ell \text{ times}}) + \Delta_R^{N+1} f(\underbrace{Y, \dots, Y}_{N+1 \text{ times}}, X)(\underbrace{X-Y, \dots, X-Y}_{N+1 \text{ times}}).$$

Користуючись степеневими позначеннями, які ми ввели у підрозділі 3.1, можна переписати формулу Тейлора – Тейлора у наступному вигляді (теорема 3.2):

$$f(X) = \sum_{\ell=0}^{N} \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s \ell} \Delta_R^\ell f(\underbrace{Y, \dots, Y}_{\ell+1 \text{ times}}) + \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s N+1} \Delta_R^{N+1} f(\underbrace{Y, \dots, Y}_{N+1 \text{ times}}, X). \tag{18}$$

З різницевих формул першого порядку для н.к. функцій вищого порядку випливають наступні відношення для мультилінійних відображень

$$f_\ell := \Delta_R^\ell f(Y, \dots, Y) \colon \left(\mathcal{M}^{s\times s}\right)^\ell \to \mathcal{N}^{s \times s}:$$

$$Sf_0 - f_0 S = f_1(SY - YS), \tag{19}$$

$$Sf_\ell(Z^1, \dots, Z^\ell) - f_\ell(SZ^1, Z^2, \dots, Z^\ell) = f_{\ell+1}(SY - YS, Z^1, \dots, Z^\ell), \tag{20}$$

$$\begin{aligned} f_\ell(Z^1, \dots, Z^{j-1}, Z^j S, Z^{j+1}, \dots, Z^\ell) - f_\ell(Z^1, \dots, Z^j, SZ^{j+1}, Z^{j+2}, \dots, Z^\ell) \\ = f_{\ell+1}(Z^1, \dots, Z^j, SY - YS, Z^{j+1}, \dots, Z^\ell), \end{aligned} \tag{21}$$

$$f_\ell(Z^1, \dots, Z^{\ell-1}, Z^\ell S) - f_\ell(Z^1, \dots, Z^\ell)S = f_{\ell+1}(Z^1, \dots, Z^\ell, SY - YS), \tag{22}$$

для кожного $S \in \mathcal{R}^{s\times s}$.

У випадку, коли $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$, формула Тейлора – Тейлора приймає вигляд

$$f(X) = \sum_{\ell=0}^{N} \sum_{|w|=\ell} \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s w} \Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{Y, \dots, Y}_{\ell+1 \text{ times}}) + \sum_{|w|=N+1} \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s w} \Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{Y, \dots, Y}_{N+1 \text{ times}}, X).$$

Зокрема, якщо $s = 1$ і $\mu \in \Omega_1$, ми одержуємо справжнє н.к. степеневе розвинення

$$f(X) = \sum_{\ell=0}^{N} \sum_{|w|=\ell} (X - I_m\mu)^w \Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{\mu, \dots, \mu}_{\ell+1 \text{ times}}) + \sum_{|w|=N+1} (X - I_m\mu)^w \Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{\mu, \dots, \mu}_{N+1 \text{ times}}, X). \tag{23}$$

У випадку, коли $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$, ми можемо переписати відношення (19) – (22) для мультилінійних форм $f_w = \Delta_R^{w^\top} f(Y, \ldots, Y)$, $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$:

$$(24) \qquad Sf_\emptyset - f_\emptyset S = \sum_{k=1}^{d} f_{g_k}(SY_k - Y_k S),$$

і для $w = g_{i_1} \cdots g_{i_\ell} \neq \emptyset$,

$$(25) \quad Sf_w(A^1, \ldots, A^\ell) - f_w(SA^1, A^2, \ldots, A^\ell) = \sum_{k=1}^{d} f_{g_k w}(SY_k - Y_k S, A^1, \ldots, A^\ell),$$

$$(26) \quad f_w(A^1, \ldots, A^{j-1}, A^j S, A^{j+1}, \ldots, A^\ell) - f_w(A^1, \ldots, A^j, SA^{j+1}, A^{j+2}, \ldots, A^\ell) = \sum_{k=1}^{d} f_{g_{i_1} \cdots g_{i_j} g_k g_{i_{j+1}} \cdots g_{i_\ell}}(A^1, \ldots, A^j, SY_k - Y_k S, A^{j+1}, \ldots, A^\ell),$$

$$(27) \; f_w(A^1, \ldots, A^{\ell-1}, A^\ell S) - f_w(A^1, \ldots, A^\ell) S = \sum_{k=1}^{d} f_{w g_k}(A^1, \ldots, A^\ell, SY_k - Y_k S),$$

для усіх S, A^1,…,$A^\ell \in \mathcal{R}^{s \times s}$.

У розділі 5 ми вивчаємо н.к. функції на нільпотентних матрицях.

У підрозділі 5.1 ми описуємо н.к. функції на нільпотентних матрицях як суми їх рядів Тейлора–Тейлора. Нехай $n, \kappa \in \mathbb{N}$. Визначимо множину $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}; n, \kappa)$ нільпотентних $n \times n$ матриць X над $\mathcal{M}$, рангу нільпотентності не більше κ, тобто, $X^{\odot \ell} = 0$ для всіх $\ell \geq \kappa$, а також множину $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}; n) = \bigcup_{\kappa=1}^{\infty} \mathrm{Nilp}(\mathcal{M}; n, \kappa)$ нільпотентних $n \times n$ матриць над $\mathcal{M}$ і множину $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}) = \coprod_{n=1}^{\infty} \mathrm{Nilp}(\mathcal{M}; n)$ нільпотентних матриць над $\mathcal{M}$. Зауважимо, що $\Omega = \mathrm{Nilp}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{nc}}$ - допустима справа н.к. множина і $\Omega_n = \mathrm{Nilp}(\mathcal{M}; n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

У випадку, коли $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$, множина $\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R}; n, \kappa) := \mathrm{Nilp}(\mathcal{R}^d; n, \kappa)$ складається з наборів d матриць X розміру $n \times n$ над $\mathcal{R}$, які є спільно нільпотентні рангу не більше κ, тобто, $X^w = 0$ для всіх $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ таких, що $|w| \geq \kappa$. Ми також маємо множину $\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R}; n) := \mathrm{Nilp}(\mathcal{R}^d; n)$ наборів d спільно нільпотентних $n \times n$ матриць над $\mathcal{R}$ і визначаємо н.к. множину $\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R}) := \mathrm{Nilp}(\mathcal{R}^d)$ наборів d спільно нільпотентних матриць над $\mathcal{R}$.

Теорема 5.2. Нехай $f \in \mathcal{T}^0(\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}); \mathcal{N}_{\mathrm{nc}})$. Тоді для всіх $X \in \mathrm{Nilp}(\mathcal{M})$

$$f(X) = \sum_{\ell=0}^{\infty} X^{\odot \ell} \Delta_R^\ell f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{\ell+1 \text{ times}}),$$

де сума має скінченну кількість доданків. У випадку, коли $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$, ми можемо користуватись (23) замість (18), щоб отримати:

Теорема 5.4. Нехай $f \in \mathcal{T}^0(\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R}); \mathcal{N}_{\mathrm{nc}})$. Тоді для всіх $X \in \mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R})$

$$f(X) = \sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} X^w \Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{|w|+1 \text{ times}}),$$

де сума має скінченну кількість доданків.

Ми тепер узагальнюємо теореми 5.2 і 5.4 на випадок довільного центру. Для $Y \in \mathcal{M}^{s\times s}$, ми визначаємо множину $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y; sm, \kappa)$ матриць X над $\mathcal{M}$ розміру $sm \times sm$, що спільно нільпотентні рангу не більше κ навколо Y, тобто $(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y)^{\odot_s \ell} = 0$ для всіх $\ell \geq \kappa$. Ми також визначаємо множину $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y; sm) = \bigcup_{\kappa=1}^{\infty} \mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y; sm, \kappa)$ і $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y) = \coprod_{m=1}^{\infty} \mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y; sm)$. Звернемо увагу на те, що $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y)$ - допустима справа н.к. множина.

У випадку $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$, нехай $\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R}, Y; sm, \kappa) := \mathrm{Nilp}(\mathcal{R}^d; sm, \kappa)$ складається з наборів d матриць X розміру $sm \times sm$ над $\mathcal{R}$, що спільно нільпотентні навколо Y рангу нільпотентності не більше κ, тобто, $(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y)^{\odot_s w} = 0$ для всіх $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ таких, що $|w| \geq \kappa$. Ми також маємо множини $\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R}, Y; sm) := \mathrm{Nilp}(\mathcal{R}^d, Y; sm)$ і $\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R}, Y) := \mathrm{Nilp}(\mathcal{R}^d, Y)$.

Теорема 5.6. Нехай $Y \in \mathcal{M}^{s\times s}$ і $f \in \mathcal{T}^0(\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y); \mathcal{N}_{\mathrm{nc}})$. Тоді для всіх $X \in \mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y; sm)$

$$f(X) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y \Big)^{\odot_s \ell} \Delta_R^{\ell} f(\underbrace{Y, \ldots, Y}_{\ell+1 \text{ times}}), \tag{28}$$

де сума має скінченну кількість доданків.

Теорема 5.8. Нехай $Y \in (\mathcal{R}^{s\times s})^d$ і $f \in \mathcal{T}^0(\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R}, Y); \mathcal{N}_{\mathrm{nc}})$. Тоді для всіх $X \in \mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R}, Y; sm)$

$$f(X) = \sum_{w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d} \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y \Big)^{\odot_s w} \Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{Y, \ldots, Y}_{|w|+1 \text{ times}}), \tag{29}$$

де сума має скінченну кількість доданків.

Далі у теоремах 5.9 і 5.10 доводиться, що розвинення н.к. функції на нільпотентних матрицях навколо Y у степеневий ряд - єдине і має вигляд (28) (зокрема, у випадку, коли $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$, (29)).

Нагадаємо, що коефіцієнти $f_\ell = \Delta_R^{\ell} f(\underbrace{Y, \ldots, Y}_{\ell+1 \text{ times}})$ (зокрема, $f_w = \Delta_R^{w^\top} f(\underbrace{Y, \ldots, Y}_{|w|+1 \text{ times}})$) степеневого ряду (28) (відп., (29)) н.к. функції на $\mathrm{Nilp}(\mathcal{M}, Y)$ (відп., $\mathrm{Nilp}_d(\mathcal{R}, Y)$) необхідно задовольняють умови (19) – (22) (відп., (24) – (27)). **У підрозділі 5.2** ми доводимо, що ці умови також достатні, тобто сума степеневого ряда с такими коефіцієнтами є н.к. функцією (теореми 5.13 і 5.15).

Розділ 6 присвячений деяким застосуванням формули Тейлора - Тейлора у алгебрі.

Теорема 6.1. Нехай f - н.к. функція на $(\mathbb{K}^d)_{\mathrm{nc}}$, де $\mathbb{K}$ нескінченне поле, із значеннями у $\mathcal{N}_{\mathrm{nc}}$ (так що $\mathcal{N}$ - векторний простір над $\mathbb{K}$). Припустимо, що для кожного n, $f(X_1, \ldots, X_d)$ - многочлен від dn^2 комутуючих змінних $(X_i)_{jk}$, $i = 1, \ldots, d$; $j, k = 1, \ldots, n$, із значеннями у $\mathcal{N}^{n\times n}$. Припустимо, що степені цих многочленів обмежені. Тоді f - н.к. многочлен з коефіцієнтами у $\mathcal{N}$.

Наступний приклад показує, що умова обмеженості степенів у теоремі 6.1 є істотною і не може бути опущеною. Нехай $p_n \in \mathbb{K}\langle x_1, x_2\rangle$ - послідовність многочленів строго зростаючих степенів α_n таких, що p_n зникає на $(\mathbb{K}^{n\times n})^2$. Наприклад[53], ми можемо взяти $p_n = \sum_{\pi\in S_{n+1}} \operatorname{sign}(\pi)\, x_1^{\pi(1)-1} x_2 \cdots x_1^{\pi(n+1)-1} x_2$, де S_{n+1} - симетрична група з $n+1$ елементами, і $\operatorname{sign}(\pi)$ - сигнатура пермутації π; звичайно, $\alpha_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ у цьому випадку. Визначимо н.к. функцію $f\colon (\mathbb{K}^2)_{\text{nc}} \to \mathbb{K}_{\text{nc}}$ як $f(X_1, X_2) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(X_1, X_2)$, де сума скінченна для кожного $n \in \mathbb{N}$: доданки $p_k(X_1, X_2)$, $k \geq n$, зникають. Звичайно, для всіх n, $f(X_1, X_2)$ -многочлен від $2n^2$ комутуючих змінних $(X_1)_{jk}$, $(X_2)_{jk}$, $j, k = 1, \ldots, n$, з коефіцієнтами у $\mathbb{K}^{n\times n}$. Проте, f не є н.к. многочленом.

Цей приклад відбиває загальну ситуацію: будь-яка н.к. функція на $(\mathbb{K}^d)_{\text{nc}}$, яка, для кожного розміру матриць, є многочленом від матричних елементів , може бути записана, як сума н.к. многочлена і нескінченного ряду н.к. многочленів зникаючих на матрицях зростаючих розмірів (теорема 6.4.).

У розділі 7 ми вивчаємо аналітичні н.к. функції у різних налаштуваннях та збіжність рядів Тейлора – Тейлора. В цьому розділі кільце $\mathcal{R}$ є поле $\mathbb{C}$. Ми розглядаємо три топології на н.к. просторі $\mathcal{V}_{\text{nc}}$ над векторним простором $\mathcal{V}$ над $\mathbb{C}$ і відповідні поняття аналітичності для н.к. функцій: скінченно-відкриту топологію і н.к. функції аналітичні на зрізах, топологію норми і аналітичні (за нормою) н.к. функції, рівномірну топологію і рівномірно аналітичні н.к. функції. Основний феномен встановлений у цьому розділі, для всіх трьох налаштувань - це що локально обмежена н.к. функція має бути аналітичною.

Два перших налаштування розглядаються **у підрозділі 7.1**. Нехай $\mathcal{V}$ -векторний простір над $\mathbb{C}$. Множина $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\text{nc}}$ називається скінченно-відкритою, якщо для кожного $n \in \mathbb{N}$ множина $\Omega_n \subseteq \mathcal{V}^{n\times n}$ скінченно-відкрита, тобто перетин Ω_n з будь-яким скінченно-вимірним підпростором $\mathcal{U}$ у $\mathcal{V}^{n\times n}$ відкритий у евклідовій топології $\mathcal{U}$. Зауважимо, що скінченно-відкрита множина Ω є допустимою справа (і зліва). Сукупність скінченно-відкритих н.к. множин складає скінченно-відкриту топологію на $\mathcal{V}_{\text{nc}}$.

Нехай $\mathcal{W}$ - банахів простір над $\mathbb{C}$. Допустима система матричних норм над $\mathcal{W}$ - це послідовність норм $\|\cdot\|_n$ на $\mathcal{W}^{n\times n}$, $n = 1, 2, \ldots$, що задовольняють наступні дві умови:

1. Для кожних $n, m \in \mathbb{N}$ існують $C_1(n,m)$, $C_1'(n,m) > 0$ такі, що для всіх $X \in \mathcal{W}^{n\times n}$ і $Y \in \mathcal{W}^{m\times m}$,

$$C_1(n,m)^{-1} \max\{\|X\|_n, \|Y\|_m\} \leq \|X \oplus Y\|_{n+m} \leq C_1'(n,m) \max\{\|X\|_n, \|Y\|_m\}. \tag{30}$$

2. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує $C_2(n) > 0$ таке, що для всіх $X \in \mathcal{W}^{n\times n}$ і $S, T \in \mathbb{C}^{n\times n}$,

$$\|SXT\|_n \leq C_2(n) \|S\|\, \|X\|_n \|T\|, \tag{31}$$

[53] Дивись L. H. Rowen. *Polynomial identities in ring theory*, Vol. 84 of Pure and Applied Mathematics. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1980; або E. Formanek. *The polynomial identities and invariants of $n \times n$ matrices.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 78. The American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.

де $\|\cdot\|$ позначає операторну норму на $\mathbb{C}^{n\times n}$ відповідну до стандартної евклідової норми на $\mathbb{C}^n$. Топологія норми на $\mathcal{W}_{\rm nc}$ визначається допустимою системою матричних норм над $\mathcal{W}$.

Нехай $\mathcal{V}$ -векторний простір, $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\rm nc}$ - скінченно-відкрита н.к. множина, і нехай $\mathcal{W}$ - банахів простір, забезпечений допустимою системою матричних норм над $\mathcal{W}$. Н.к. функція $f\colon \Omega \to \mathcal{W}_{\rm nc}$ називається локально обмеженою на зрізах, якщо для кожного $n \in \mathbb{N}$ функція $f|_{\Omega_n}$ локально обмежена на зрізах, тобто, для кожного $X \in \Omega_n$ і $Z \in \mathcal{V}^{n\times n}$ існує $\epsilon > 0$ таке, що $f(X+tZ)$ обмежене для $|t| < \epsilon$. Н.к. функція $f\colon \Omega \to \mathcal{W}_{\rm nc}$ називається диференційованою за Гато (або G-диференційованою), якщо для кожного $n \in \mathbb{N}$ функція $f|_{\Omega_n}$ - G-диференційована, тобто для кожного $X \in \Omega_n$ і $Z \in \mathcal{V}^{n\times n}$ існує G-похідна f в точці X в напрямку Z: $\delta f(X)(Z) = \lim_{t\to 0} \frac{f(X+tZ)-f(X)}{t} = \frac{d}{dt} f(X+tZ)\Big|_{t=0}$. Звідси випливає, що f аналітична на зрізах, тобто для кожних $X \in \Omega_n$ і $Z \in \mathcal{V}^{n\times n}$, $f(X+tZ)$ - аналітична функція від t в околі 0. За теоремою Хартогса [54], f аналітична на $\mathcal{U}\cap\Omega_n$ як функція кількох комплексних змінних для кожного n і кожного скінченно-вимірного підпростору $\mathcal{U}$ у $\mathcal{V}^{n\times n}$. Зауважимо також, що $\delta f(X)\colon \mathcal{V}^{n\times n} \to \mathcal{W}^{n\times n}$ - лінійний оператор[55].

Нехай $\mathcal{X}$ -векторний простір і $Y \in \mathcal{X}$. Нагадаємо, що множина $\Upsilon \subseteq \mathcal{X}$ називається повною круговою навколо Y, якщо для кожного $X \in \Upsilon$ маємо $Y + t(X-Y) \in \Upsilon$ для всіх $t \in \mathbb{C}$ з $|t| \leq 1$.

Теорема 7.2. Нехай н.к. функція $f\colon \Omega \to \mathcal{W}_{\rm nc}$ - локально обмежена на зрізах. Тоді f - G-диференційована. Для кожних $n \in \mathbb{N}$, $Y \in \Omega_n$, $Z \in \mathcal{V}^{n\times n}$ і кожного $N \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{N!}\frac{d^N}{dt^N} f(Y+tZ)\Big|_{t=0} = \Delta_R^N f(\underbrace{Y,\ldots,Y}_{N+1\ \text{times}})(\underbrace{Z,\ldots,Z}_{N\ \text{times}}).$$

Для кожних $n \in \mathbb{N}$ і $Y \in \Omega_n$, нехай

$$\Upsilon(Y) = \{X \in \Omega_n\colon Y + t(X-Y) \in \Omega_n \ \text{ і } t \in \mathbb{C} \ \ |t| \leq 1\}.$$

Тоді $\Upsilon(Y)$ - максимальна повна кругова множина навколо Y, що міститься у Ω_n і скінченно-відкрита. Для кожного $X \in \Upsilon(Y)$,

$$f(X) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \Delta_R^\ell f(\underbrace{Y,\ldots,Y}_{\ell+1\ \text{times}})(\underbrace{X-Y,\ldots,X-Y}_{\ell\ \text{times}}), \tag{32}$$

де ряд збігається абсолютно. Ряд у (32) збігається рівномірно на компактних підмножинах $\mathcal{U}\cap\Upsilon(Y)$ для кожного скінченно-вимірного підпростора $\mathcal{U}$ у $\mathcal{V}^{n\times n}$. Більше того, для кожної такої компактної множини K існує скінченно-відкрита повна

[54] С. 28 в монографії B. V. Shabat. *Introduction to complex analysis. Part II.* Translations of Mathematical Monographs 110, Functions of several variables, Translated from the third (1985) Russian edition by J. S. Joel, AMS, Providence, RI, 1992.

[55] Теорема 26.3.2 в монографії E. Hille and R. S. Phillips. *Functional analysis and semi-groups.* Third printing of the revised edition of 1957. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXI. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1974.

кругова множина Υ_K навколо Y, $K \subseteq \Upsilon_K \subseteq \Upsilon(Y)$ така, що

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sup_{X \in \Upsilon_K} \|\Delta_R^\ell f(\underbrace{Y, \dots, Y}_{\ell+1 \text{ times}})(\underbrace{X-Y, \dots, X-Y}_{\ell \text{ times}})\|_n < \infty.$$

Нехай $\mathcal{V}$ - банахів простір, забезпечений допустимою системою матричних норм над $\mathcal{V}$. Будема казати, що множина $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ відрита, якщо для кожних $n \in \mathbb{N}$ і $Y \in \Omega_n$ існує $\delta_n > 0$ таке, що відкрита куля $B(Y, \delta_n) := \{X \in \mathcal{V}^{n \times n} \colon \|X - Y\|_n < \delta_n\}$ міститься у Ω_n. Звісно, відкрита множина є скінченно-відкритою.

Нехай $\mathcal{V}$ і $\mathcal{W}$ - банахові простори, забезпечені допустимими системами матричних норм над $\mathcal{V}$ і над $\mathcal{W}$, і нехай $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ - відкрита н.к. множина. Н.к. функція $f \colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ називається локально обмеженою, якщо для кожного $n \in \mathbb{N}$ функція $f|_{\Omega_n}$ локально обмежена, тобто, для кожного $Y \in \Omega_n$ існує $\delta_n > 0$ таке, що f обмежена на $B(Y, \delta_n)$. Звісно, локально обмежена н.к. функція є локально обмеженою на зрізах.

Нехай $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ - відкрита н.к. множина. Н.к. функція $f \colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ називається диференційованою за Фреше (або F-диференційованою), якщо для кожного $n \in \mathbb{N}$ функція $f|_{\Omega_n}$ є F-диференційованою, тобто, $f|_{\Omega_n}$ є G-диференційованою і для будь-якого $X \in \Omega_n$ лінійний оператор $\delta f(X) \colon \mathcal{V}^{n \times n} \to \mathcal{W}^{n \times n}$ обмежений. Тоді[56]

$$\lim_{\|Z\|_n \to 0} \frac{\|f(X+Z) - f(X) - \delta f(X)(Z)\|_n}{\|Z\|_n} = 0$$

для всіх $X \in \Omega_n$. Н.к. функція $f \colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ називається аналітичною, якщо для кожного $n \in \mathbb{N}$ функція $f|_{\Omega_n}$ аналітична, тобто, $f|_{\Omega_n}$ локально обмежена і G-диференційована. У цьому випадку $f|_{\Omega_n}$ є також неперервною і F-диференційованою[57]. Тоді аналітична н.к. функція $f \colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ є неперервною у топологіях норми на н.к. просторах $\mathcal{V}_{\mathrm{nc}}$ і $\mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ і F-диференційованою.

Теорема 7.4. Нехай н.к. функція $f \colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ локально обмежена. Тоді, на додачу до висновків теореми 7.2, f аналітична. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $Y \in \Omega_n$, і нехай Υ - відкрита повна кругова навколо Y множина така, що $\Upsilon \subseteq \Omega_n$ і f обмежена на Υ. Для кожного $\epsilon > 0$, ряд Тейлора – Тейлора у (32) збігається рівномірно на множині $\Upsilon_\epsilon := \{X \in \Upsilon \colon Y + (1+\epsilon)(X - Y) \in \Upsilon\}$. Більше того,

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sup_{X \in \Upsilon_\epsilon} \|\Delta_R^\ell f(\underbrace{Y, \dots, Y}_{\ell+1 \text{ times}})(\underbrace{X-Y, \dots, X-Y}_{\ell \text{ times}})\|_n < \infty.$$

Відмітимо важливий спеціальний випадок теореми 7.4.

Наслідок 7.5. Нехай н.к. функція $f \colon \Omega \to \mathcal{W}_{\mathrm{nc}}$ - локально обмежена. Для кожних $n \in \mathbb{N}$ і $Y \in \Omega_n$, визначимо $\delta_n = \sup\{r > 0 \colon f \text{ обмежена на } B(Y, r)\}$.

[56] Це було показано Цорном у статті M. A. Zorn. Derivatives and Fréchet differentials. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52 (1946), 133–137.

[57] Теорема 3.17.1 у монографії E. Hille and R. S. Phillips. *Functional analysis and semi-groups.* Third printing of the revised edition of 1957. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXI. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1974.

Тоді ряд Тейлора – Тейлора у (32) збігається абсолютно і рівномірно на кожній відкритій кулі $B(Y,r) \subsetneq B(Y,\delta_n)$. Більше того,

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sup_{X\in B(Y,r)} \|\Delta_R^{\ell} f(\underbrace{Y,\ldots,Y}_{\ell+1 \text{ times}})(\underbrace{X-Y,\ldots,X-Y}_{\ell \text{ times}})\|_n < \infty.$$

У підрозділі 7.2 ми вивчаємо рівномірно-відкриту топологію на н.к. просторі. Нагадаємо, що банахів простір $\mathcal{W}$ над $\mathbb{C}$, забезпечений допустимою системою матричних норм таких, що (30) і (31) - вірні з $C_1 = C_1' = C_2 = 1$ для всіх n і m, називається операторним простором[58]. Нехай $\mathcal{W}$ - операторний простір. Для $Y \in \mathcal{W}^{s\times s}$ і $r > 0$, дамо означення н.к. кулі із центром у Y радіусу r як н.к. множини $B_{\rm nc}(Y,r) = \coprod_{m=1}^{\infty} B\Big(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y, r\Big) = \coprod_{m=1}^{\infty} \Big\{X \in \mathcal{W}^{sm\times sm} \colon \Big\|X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big\|_{sm} < r\Big\}$. У пропозиції 7.12 доведено, що н.к. кулі складають базу топології на $\mathcal{W}_{\rm nc}$, яку ми називаємо рівномірно-відкритою топологією.

У підрозділі 7.3 вивчаються рівномірно аналітичні н.к. функції. Нехай $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ - операторні простори, і нехай $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{\rm nc}$ - рівномірно відкрита н.к. множина. Н.к. функція $f\colon \Omega \to W_{\rm nc}$ називається рівномірно локально обмеженою, якщо для кожних $s \in \mathbb{N}$ і $Y \in \Omega_s$ існує $r > 0$ таке, що $B_{\rm nc}(Y,r) \subseteq \Omega$ і f обмежена на $B_{\rm nc}(Y,r)$, тобто, існує $M > 0$ таке, що $\|f(X)\|_{sm} \le M$ для всіх $m \in \mathbb{N}$ і $X \in B_{\rm nc}(Y,r)_{sm}$. Н.к. функція $f\colon \Omega \to W_{\rm nc}$ називається рівномірно аналітичною, якщо f рівномірно локально обмежена і G-диференційована.

Нехай $\mathcal{X}$ - векторний простір над $\mathbb{C}$ і $Y \in \mathcal{X}^{s\times s}$. Н.к. множина $\Upsilon_{\rm nc} \subseteq \mathcal{X}_{\rm nc}$ називається повною круговою навколо Y, якщо для кожного $m \in \mathbb{N}$ множина $(\Upsilon_{\rm nc})_{sm} = \Upsilon_{\rm nc} \cap \mathcal{X}^{sm\times sm}$ - повна кругова навколо $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y$. Для кожного $\epsilon > 0$, визначимо $\Upsilon_{{\rm nc},\epsilon} := \coprod_{m=1}^{\infty} \Big\{X \in (\Upsilon_{\rm nc})_{sm} \colon \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y + (1+\epsilon)\Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big) \in (\Upsilon_{\rm nc})_{sm}\Big\}$. Легко побачити, що якщо $\Upsilon_{\rm nc}$ є рівномірно відкритою повною круговою навколо Y н.к. множиною, то такою є також $\Upsilon_{{\rm nc},\epsilon}$, і $\bigcup_{\epsilon>0} \Upsilon_{{\rm nc},\epsilon} = \Upsilon_{\rm nc}$.

Теорема 7.21. Нехай н.к. функція $f\colon \Omega \to \mathcal{W}_{\rm nc}$ - рівномірно локально обмежена. Нехай $s \in \mathbb{N}$, $Y \in \Omega_s$, і нехай $\Upsilon_{\rm nc}$ - рівномірно відкрита повна кругова навколо Y н.к. множина така, що $\Upsilon_{\rm nc} \subseteq \Omega$ і f обмежена на $\Upsilon_{\rm nc}$. Тоді для кожних $\epsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$, і $X \in (\Upsilon_{{\rm nc},\epsilon})_{sm}$,

$$f(X) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s \ell} \Delta_R^{\ell} f\Big(\underbrace{Y,\ldots,Y}_{\ell+1 \text{ times}}\Big),$$

де ряд збігається абсолютно і рівномірно на $\Upsilon_{{\rm nc},\epsilon}$. Більше того,

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sup_{m\in\mathbb{N},\, X\in(\Upsilon_{{\rm nc},\epsilon})_{sm}} \Big\|\Big(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\Big)^{\odot_s \ell} \Delta_R^{\ell} f\Big(\underbrace{Y,\ldots,Y}_{\ell+1 \text{ times}}\Big)\Big\|_{sm} < \infty.$$

[58] Дивись монографії E. G. Effros and Zh.-J. Ruan. *Operator spaces.* London Mathematical Society Monographs. New Series, **23**. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000; V. Paulsen. *Completely bounded maps and operator algebras.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 78. Cambridge University Press, Cambridge, 2002; G. Pisier. *Introduction to operator space theory.* London Mathematical Society Lecture Note Series, 294. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

У підрозділі 7.4 результати про аналітичність поширені на випадок н.к. функцій вищих порядків.

У розділі 8 ми вивчаємо збіжність н.к. степеневих рядів у трьох різних топологіях, що введені у розділі 7. Результати є зворотними до результатів підрозділів 7.1 та 7.3. Ми обговорюємо збіжність н.к. степеневого ряду в скінченно-відкритій топології (відповідно, в топології норми і в рівномірно-відкритій топології) **у підрозділі 8.1** (відповідно, **8.2** і **8.3**). В кожній топології ми маємо оцінки типу Коші–Адамара для радіусів збіжності та найкращі оцінки величини області збіжності різної форми. Ми також характеризуємо максимальні н.к. множини, де сума ряду є аналітичною на зрізах (відповідно, аналітичною та рівномірно аналітичною) н.к. функцією і наводимо багато прикладів що ілюструють відмінності між різними типами областей збіжності.

У розділі 9 ми визначаємо та вивчаємо так звані розширення на доданки прямих сум н.к. множин та функцій. Якщо н.к. множина Ω є інваріантною щодо подібностей, тоді можна продовжити Ω на більшу н.к. множину, $\Omega_{\mathrm{d.s.e.}}$, яка містить разом з матрицею, яка розкладається у пряму суму матриць, кожний прямий доданок розкладу. Це розширення зберігає багато властивостей Ω (пропозиція 9.1). Тоді ми можемо розширити н.к. функцію f на Ω до н.к. функції $f_{\mathrm{d.s.e.}}$ на $\Omega_{\mathrm{d.s.e.}}$, яка успадковує найважливіші властивості f, зокрема, аналітичність (пропозиція 10.2). Подібним чином ми визначаємо і встановлюємо властивості розширень на доданки прямих сум н.к. функцій вищого порядку (пропозиція 9.3). Ми також визначаємо та вивчаємо такі розширення для послідовностей f_ℓ, $\ell = 0, 1, \ldots$, (відповідно, f_w, $w \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_d$) мультилінійних відображень, що задовольняють умови сумісності (відповідно, їх аналоги у випадку $\mathcal{M} = \mathcal{R}^d$) у пропозиції 9.4 (відповідно, у пропозиції 9.6).

Результати про подібностно інваріантні конверти н.к. множин і відповідні розширення н.к. функцій представлені **в розділі 10.** Для того, щоб визначити праві (ліві) різницево-диференціальні оператори через обчислення н.к. функції f на верхньо-трикутній (нижньо-трикутній) матриці з Ω, нам потрібна н.к. множина Ω, що є допустимою справа (зліва), тобто для (скажімо, верхнього) блоку трикутної матриці $\left[\begin{smallmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{smallmatrix}\right]$ ми можемо помножити Z на деякий обернений елемент r кільця $\mathcal{R}$, так що $\left[\begin{smallmatrix} X & rZ \\ 0 & Y \end{smallmatrix}\right] \in \Omega$. Тоді ми можемо визначити $\Delta_R f(X,Y)(rZ)$ і розширити це означення на довільні Z за лінійністю $\Delta_R f(X,Y)(\cdot)$. Хоча властивості Δ_R (Δ_L) можна встановити за допомогою цих масштабувань, це створює громіздкі технічні ускладнення у доведеннях. Щоб їх обійти, ми визначаємо так званий подібностно інваріантний конверт, $\widetilde{\Omega}$, н.к. множини Ω, тобто найменшу н.к. множину, що містить Ω та інваріантна щодо подібностей. Тоді виявляється, що $\widetilde{\Omega}$ також інваріантна щодо формування блочно-трикутних матриць (пропозиція 10.2). Нашим наступним кроком є розширення н.к. функції f на Ω до н.к. функції $\widetilde{f}$ на $\widetilde{\Omega}$. Таке розширення є єдиним (пропозиція 10.3). Подібне розширення побудовано для н.к. функції вищого порядку (пропозиція 10.5). Виявляється, що $(\Delta_R \widetilde{f})|_{\Omega\times\Omega} = \Delta_R f$ (зауваження 2.5), що дозволяє нам доводити різні твердження про різницево-диференціальні оператори у всьому рукопису, припускаючи, не втрачаючи загальності, що базова н.к. множина Ω є інваріантною щодо подібностей.

ВИСНОВКИ

Аналітичні функції від d некомутуючих змінних з'являються у роботі Дж. Л. Тейлора у некомутативній спектральній теорії на початку 70-х років 20 століття. Наприкінці 90-х років та на початку 21 століття інтерес до цих фунцій підвищився у зв'язку з розвитком теорії вільної ймовірності у роботах Д.-В. Войкулеску. Інші некомутативні об'єкти, такі як квазидетермінанти, некомутативні многочлени і раціональні функції, формальні степеневі ряди виникали у різних областях алгебри і аналізу, теорії автоматів і лінійних систем, теорії зображень операторних алгебр. Незважаючи на широкий спектр задач і областей дослідження, деякі спільні характеристики цих об'єктів вимагали побудову загальної теорії, яка би допускала дослідження їх разом.

У дисертації спочатку розглянуті задачи, в яких досліджені різні типи некомутативних об'єктів, що може розглядатися як мотивація для розвитку загальної теорії, а потім побудовано основи теорії вільних некомутативних функцій, тобто відображень матриць над деяким модулем (у спеціальному випадку, над лінійним простором) у матриці над іншим модулем, які зберігають матричні розміри і є інваріантними щодо прямих сум і подібностей, або еквівалентно, щодо переплетень матриць.

Основні результати дисертації такі:

- побудована теорія матричнозначних некомутативних раціональних функцій, зокрема розвинуте диференціальне числення і досліджені оператори лівого та правого зворотних зсувів;

- доведена теорема про сингулярності матричнозначних некомутативних раціональних функцій у термінах їх мінімальних реалізацій;

- розвинуто метод некомутативного ліфтінгу, за допомогою якого, зокрема, результат про сингулярності застосовано для отримання аналогічного результату у комутативному випадку;

- результати про сингулярності модифіковано і застосовано для отримання стискаючого детермінантного зображення комутативних многочленів, що є стійкими у матричній полікулі;

- досліджені некомутативні раціональні функції з симетріями, зокрема доведена так звана некомутативна обмежена дійсна лема без втрат;

- доведено формулу, що пов'язує перетин нульових підпросторів коефіцієнтів некомутативного формального степеневого ряду з перетином значень суми цього ряду на матрицях достатньо великого розміру; ця формула узагальнює відому теорему про відсутність раціональних тотожностей справедливих на матрицях усіх розмірів;

- доведено, що формально додатні некомутативні ядра можна описати як ядра, що є додатними на матрицях достатньо великого розміру;

- доведено, що спадковий некомутативний многочлен з операторними коефіцієнтами, що є додатним на наборах спільно нільпотентних матриць, допускає факторізацію як "квадрат" іншого некомутативного многочлена з операторними коефіцієнтами;

- показано, що дисипативна некомутативна лінійна система завжди допускає консервативну ділатацію, і методом некомутативного ліфтінгу знайден критерій існування консервативної ділатації для відповідної дисипативної комутативної системи;

- знайдені критерії розв'язності інтерполяційних задач Каратеодорі і Каратеодорі - Феєра у некомутативному полікрузі;

- розвинуте різницево-диференціальне числення для некомутативних функцій у найбільш загальному випадку;

- введені некомутативні функції вищого порядку та встановлені їх основні властивості;

- отримана некомутативна формула Тейлора;

- знайдені співвідношення для коефіцієнтів формального степеневого ряда необхідні і достатні для того, щоб цей ряд був рядом Тейлора некомутативної функції;

- як алгебраїчне застосування некомутативної формули Тейлора, отримана така теорема: некомутативна функція на наборах матриць над нескінченним полем, що є многочленом від матричних елементів для кожного матричного розміру обмеженого степеня, є некомутативним многочленом;

- розглянуто три природні топології на некомутативному просторі і дані відповідні означення аналітичних некомутативних функцій; як аналітичне застосування некомутативної формули Тейлора, у кожній з трьох топологій доведено, що локально обмежена некомутативна функція має бути аналітичною;

- побудовано теорію збіжності для некомутативних степеневих рядів з матричним центром;

- розвинуто метод поширень некомутативних множин та некомутативних функцій на доданки у прямих сумах;

- розвинуто метод подібностно інваріантних конвертів для некомутативних множин та відповідних поширень некомутативних функцій.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. D. Alpay, D. S. Kalyuzhnyĭ-Verbovetzkiĭ, Matrix-J-unitary non-commutative rational formal power series, *Operator Theory: Adv. Appl.*, 161 (2006), 49–114.
2. D. Alpay, D. S. Kalyuzhnyĭ-Verbovetzkiĭ, On the intersection of null spaces for matrix substitutions in a non-commutative rational formal power series, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 339 (2004), no. 8, pp. 533–538.
3. J. A. Ball and D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, Conservative dilations of dissipative multidimensional systems: The commutative and non-commutative settings. *Multidimens. Syst. Signal Process.* 19 (2008), 79–122.
4. J. A. Ball and D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, Schur–Agler and Herglotz–Agler classes of functions: positive-kernel decompositions and transfer-function realizations, *Adv. Math.* 280 (2015), 121–187.
5. J. A. Ball and D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, Rational Cayley inner Herglotz–Agler functions: Positive-kernel decompositions and transfer-function realizations. *Linear Algebra Appl.* 456 (2014), 138–156.
6. A. Grinshpan, D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, V. Vinnikov, and H. J. Woerdeman, Contractive determinantal representations of stable polynomials on a matrix polyball. *Mathematische Zeitschrift*, 283 (2016), no. 1–2, 25–37.
7. D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi and V. Vinnikov, Foundations of Free Noncommutative Function Theory, 178 pp. Mathematical Surveys and Monographs, AMS, 2014.
8. D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi and V. Vinnikov, Noncommutative rational functions, their difference-differential calculus and realizations. *Multidimens. Syst. Signal Process.* 23 (2012), no. 1-2, 49–77.
9. D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi and V. Vinnikov, Singularities of rational functions and minimal factorizations: The noncommutative and the commutative setting. *Linear Algebra Appl.* 430 (2009), no. 4, 869–889.
10. D. S. Kalyuzhnyĭ-Verbovetzkiĭ and V. Vinnikov. Non-commutative positive kernels and their matrix evaluations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 134 (2005), no. 3, 805–816.
11. D. S. Kalyuzhnyĭ-Verbovetzkiĭ, Carathéodory interpolation on the non-commutative polydisk, *J. Funct. Anal.*, 229 (2005), 241–276.
12. J. W. Helton, D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, I. Klep, and V. Vinnikov, A minicourse on noncommutative rational functions and noncommutative convexity. In: *Proceedings of the 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems – MTNS 2010*, 5–9 July, 2010, Budapest, Hungary, pp.737–738.
13. D. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, Noncommutative power series and noncommutative functions. In: *IWOTA 2011 Book of Abstracts*, Universidad de Sevilla, July 3–9, 2011, Seville, Spain, p. 38.

14. D. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, Noncommutative analytic functions. In: *GPOTS 2012 talks*, University of Houston, Department of Mathematics, May 30 - June 3, 2012, Houston, TX, p. 6.

АНОТАЦІЯ

Калюжний-Вербовецький Д. С. Основи теорії вільних некомутативних функцій та деякі її застосування в алгебрі і аналізі.–Кваліфікаційна праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01–Математичний аналіз.–Південноукраїнський національний педагогічний університет ім. К. Д. Ушинського.–Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2021.

Систематично розвинуто, у повній природній загальності, основи теорії функцій вільних некомутуючих змінних. Ця теорія пропонує єдиний спосіб розгляду багатьох вільних некомутативних об'єктів, що виникають у різних галузях математики. Побудовано некомутативне різницево-диференціальне числення, аж до некомутативної формули Тейлора. Отримано необхідні і достатні умови для коефіцієнтів некомутативного степеневого ряду щоб складати тейлорові коефіцієнти некомутативної функції. Доведено що некомутативна функція, що є многочленом від матричних елементів для кожного розміру матриць, обмеженої степені, має бути некомутативним многочленом. Доведено, що локально обмежена некомутативна функція має бути аналітичною. Розвинуто теорію збіжності для некомутативних степеневих рядів з матричним центром. В дисертації також розв'язано кілька задач у спеціальних класах некомутативних функцій.

Ключові слова: Вільна некомутативна функція, різницево-диференціальне числення, формула Тейлора–Тейлора, спільно нільпотентні матриці, розширення на доданки прямих сум, подібностно інваріантні конверти.

ABSTRACT

Kaliuzhnyi-Verbovetskyi D. S. Foundations of free noncommutative function theory and some its applications in algebra and analysis.–Qualifying work with the right of the manuscript.

Thesis for the doctor of mathematical and physical sciences degree in speciality 01.01.01–Mathematical Analysis.–South-Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushinsky.–Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2021.

This work develops, in a systematic way and in a full natural generality, the foundations of a theory of functions of free noncommuting variables. This theory offers a unified treatment for many (free) noncommutative objects appearing in various branches of mathematics. Noncommutative polynomials, noncommutative rational funcions, and noncommutative formal power series are most important special cases.

We introduce noncommutative functions as mappings of matrices of all sizes over a module to matrices of the same size over another module, which are invariant under direct sums and similarities of matrices. The last two conditions are equivalent, as we show, to the invariance under intertwinings. We develop the noncommutative difference-differential calculus, all the way to the noncommutative Taylor formula.

We establish relations between the coefficients of a noncommutative power series which are necessary and sufficient conditions for them to be the Taylor coefficients of a noncommutative function.

As one of algebraic applications of the noncommutative Taylor formula, we prove that a noncommutative function on matrices over an infinite field, which is a polynomial in matrix entries, for each matrix size, of uniformly bounded degree (for all marix sizes), must be a noncommutative polynomial.

We introduce three natural topologies on a noncommutative space and corresponding notions of analytic noncommutative function. As one of analytic applications of the noncommutative Taylor formula, we prove, for each of these topologies, that a locally bounded analytic function must be analytic.

For each of these three topologies, we develop a theory of convergence for noncommutative power series with a matrix center.

We define and study so-called direct summands extensions of noncommutative sets and noncommutative functions. Also, we define similarity invariant envelops of noncommutative sets and study the corresponding extensions of noncommutative functions.

Apart from the general theory, a number of results in the dissertation are presented for specific classes of noncommutative functions. A theory of matrix-valued noncommutative rational functions is developed in terms of matrix evaluations, and the theorem on singularities of a matrix-valued noncommutative rational function is proved. A method of noncommutative lifting is developed and applied to obtain a commutative analog of the singularity theorem. Another application of the singularity result is a theorem on the existence of contractive determinantal representations of commutative polynomials which are stable on a matrix polyball. We study matrix-valued noncommutative rational functions with symmetries; in particular, we prove the so-called lossless bounded real lemma for matrix-J-unitary noncommutative rational functions. A formula is established which relates the intersection of null spaces of the coefficients of a matrix-valued noncommutative formal power series with the intersection of null spaces of the values of the series on d-tuples of matrices of sufficiently large size. A special case of this formula implies a well known fact that a noncommutative rational function which vanishes on matrices of all sizes is equal to zero. It is shown that a formal power series in two d-tuples of noncommuting indeterminates which is a formal positive noncommutative kernel can be characterized as a positive kernel on matrices of sufficiently large size. Moreover, in the setting of nilpotent matrices, it suffices to have positivity when two d-tuples of matrices are equal. As a corollary, a factorization of positive hereditary polynomials is established, which is an analog of the noncommutative sum-of-square result of J. W. Helton and another type of noncommutative polynomial factorization result of S. McCullough. We prove the existence of conservative dilations for dissipative noncommutative systems, and - via noncommutative lifting - obtain a criterion for existence of such dilations for commutative systems. We also obtain criteria for solvability of interpolation problems of Carathéodory and Carathéodory - Fejér on the noncommutative polydisc.

Keywords: Free noncommutative function, difference-differential calculus, Taylor–Taylor formula, jointly nilpotent matrices, direct summands extension, similarity invariant envelope.