ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу
Василишина Тараса Васильовича
“**Аналіз на спектрах алгебр аналітичних та гладких функцій на банаховому просторі**”,
подану на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук
зі спеціальності 01.01.01 — математичний аналіз

1. Актуальність теми дослідження. Важливою задачею при дослідженні алгебр Фреше є опис спектра (множини всіх нетривіальних неперервних скалярнозначних гомоморфізмів алгебри або так званих характерів) алгебри. Завдяки перетворенню Гельфанда, елементи алгебри Фреше можна зобразити у вигляді неперервних функцій на спектрі, а саму алгебру Фреше – як підалгебру алгебри всіх неперервних функцій на спектрі.

Вивчення спектрів алгебр аналітичних функцій обмеженого типу почалось з робіт Корна, Коула, Гамеліна, що з’явилися наприкінці 80-х років XX-го століття. Пізніше ці дослідження підхопили такі відомі математики як Арон, Галіндо, Гарсія, Маестре, Пінаско, Зальдуендо і теж Андрій Васильович Загороднюк, який є науковим консультантом дисертанта. Одним з ключових результатів докторської дисертації А.В. Загороднюка був опис спектра алгебри $H_b(X)$ цілих аналітичних функцій обмеженого типу на банаховому просторі X як множини послідовностей лінійних неперервних функціоналів на тензорних степенях простору X. Цей результат показав, що у загальному випадку, спектр алгебри $H_b(X)$ має досить складну структуру, але все ж допускає опис у вигляді певного простору послідовностей. Алгебра $H_b(X)$ відіграє важливу роль у теорії алгебр Фреше, оскільки розв’язки багатьох проблем цієї теорії (зокрема, відомої проблеми Майкла про розривний мультиплікативний функціонал) зводяться до часткового випадку алгебри $H_b(X)$. Дослідженням властивостей спектрів алгебр Фреше різних функціональних просторів (з додатковими умовами симетричності) займалися також учні Андрія Васильовича Загороднюка: В. Кравців, З.Новосад, І. Чернега. У цьому ж актуальному руслі сучасних досліджень знаходиться і докторська дисертація Тараса Васильовича Василишина.

2. Зміст роботи і новизна одержаних результатів. Дисертація (повний її обсяг – 309 сторінок друкованого тексту) складається зі вступу, семи розділів, висновків, списку літератури, що містить 132 найменування, та додатків, що містять список публікацій за темою дисертації і відомості про апробацію результатів дисертаційного дослідження.

Червоною ниткою через дисертаційне дослідження проходить ідея опису специфічної структури симетричних неперервних поліномів на просторах функцій чи послідовностей шляхом виділення так званих алгебраїчних базисів. Оскільки мультиплікативні функціонали повністю задаються своїми значеннями на алгебраїчному базисі, це дозволяє ототожнити спектр тої чи іншої алгебри Фреше симетричних функцій з певними просторами послідовностей.

Ця стратегія блискуче реалізована у другому розділі, присвяченому опису спектра алгебри Фреше $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на банаховому просторі $L_\infty[0,1]$. Вимога симетрії (разом з наявністю великої кількості зберігаючих міру автоморфізмів відрізка $[0,1]$), накладають дуже жорсткі обмеження на структуру поліномів на просторі $L_\infty[0,1]$. Виявляється, що кожен такий поліном виражається єдиним чином як алгебраїчна комбінація канонічних поліномів $R_n\colon L_\infty[0,1] \to \mathbb{C}$, $R_n\colon x \mapsto \int_0^1 x(t)^n dt$. Цей нетривіальний факт доведено у Теоремі 2.2. У Твердженні 2.6 автор дисертації доводить, що для кожного характера φ на алгебрі $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ послідовність $(\sqrt[n]{\varphi(R_n)})_{n=0}^{\infty}$ обмежена. Разом з всюди щільністю множини симетричних поліномів в $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ цей факт дозволяє ототожнити спектр алгебри Фреше $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ з простором послідовностей $\{(x_n)\colon \sup_n \sqrt[n]{|x_n|} < \infty\}$, що зроблено в Наслідку 2.2. У свою чергу, цей простір послідовностей можна ототожнити з сильним спряженим $H(\mathbf{C})'_\beta$ до простору Фреше усіх цілих аналітичних функцій однієї комплексної змінної. Як наслідок 2.3, алгебра Фреше $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ стає ізоморфною до алгебри Фреше $H\big(H(\mathbf{C})'_\beta\big)$ усіх цілих аналітичних функцій на просторі $H(\mathbf{C})'_\beta$.

Для банахового простору ℓ_∞ обмежених послідовностей ситуація кардинально відрізняється від ситуації з простором $L_\infty[0,1]$, що була розглянута вище. Як стверджує наслідок 3.1, кожен симетричний неперервний поліном на банаховому просторі ℓ_∞ є сталим. Якщо ж послабити умову симетрії до скінченної симетрії (інваріантності відносно скінченних перестановок), тоді вивчення алгебри скінченно-симетричних поліномів на ℓ_∞ зводиться до вивчення алгебри усіх поліномів на фактор-просторі ℓ_∞/c_0 про що іде мова у розділі 3.2.

У подальших розділах дисертації досліджуються варіації та комбінації цих двох крайностей, коли розглядають поліноми на просторах функцій чи послідовностей з деякими обмеженнями на симетричність поліномів. Зокрема, у четвертому розділі показано, що з точки зору симетричних поліномів, банахів простір $L_\infty[0,\infty)$ подібний на ℓ_∞ (тобто на ньому усі симетричні неперервні поліноми є сталими), а банахів простір $(L_1 \cap L_\infty)[0,\infty)$ на півосі $L_\infty[0,1]$ подібний на $L_\infty[0,1]$. Більш точно, за допомогою побудови алгебраїчних базисів, у теоремі 4.3 доведено, що алгебри Фреше симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на просторах $(L_1 \cap L_\infty)[0,\infty)$ та $L_\infty[0,1]$ є ізоморфними. У підрозділі 4.4 цей результат узагальнено на простори інтегровних суттєво обмежених функцій на просторах з мірою.

Значна увага у дисертації приділена опису структури поліномів на скінченних степенях просторів функцій та послідовностей. При цьому автору вдається винаходити компактні позначення у термінах мультиіндексів і уникнути громіздкості позначень, що свідчить при високу математичну культуру дисертанта.

3. Обґрунтованість і достовірність одержаних результатів. Усі одержані у дисертаційній роботі результати є новими, достовірними і строго обґрунтованими, що забезпечено наявністю чітких, повних і правильних доведень для усіх наведених у цій роботі тверджень.

4. Апробація результатів і публікації. Результати дисертації досить повно опубліковані у провідних наукових журналах України та інших країн і є добре відомими спеціалістам. Усі 23 статті зі списку публікацій повністю відповідають вимогам щодо публікацій результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук, 17 із них опубліковано у виданнях, проіндексованих у базах даних Scopus та/або Web of Science Core Collection. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на великій кількості вітчизняних і закордонних конференцій та фахових семінарів.

Автореферат повністю відображає зміст дисертації.

5. Практичне значення результатів дисертації. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати і розроблені методи можуть мати перспективи подальшого застосування в теорії аналітичних та гладких функцій на банахових просторах.

6. Зауваження. З формальної та естетичної точок зору, дисертація справляє дуже хороше враження: вона дбайливо вичитана і написана зрозумілою математичною мовою, зі збереженням належної строгості викладок і оптимізацією позначень. Але оскільки немає нічого ідеального у нашому грішному світі, цей текст теж не позбавлений певних недоліків, в основному мовних. Ось деякі з них:

1) Як на мене, речення «має менш складну топологічну векторну структуру від структур» на сторінці 41 не зовсім правильне, у мовному сенсі: замість прийменника «від» доцільніше вжити сполучник «ніж».

2) Автор систематично вживає символ $\subset$ для позначення як строгого, так і нестрогого включень. Правила хорошого математичного тону рекомендують вживати $\subset$ у першому випадку і $\subseteq$ в другому.

3) У реченні перед означенням 1.12 на сторінці 56 автор пише, що топологія τ_f не є слабшою, ніж топологія τ для кожного локально опуклого простору. Насправді це вірно для усіх лінійних топологічних просторів.

4) Всюди в дисертації автор пише текст в означеннях похилим шрифтом, замість того, щоб італізувати лише означувані поняття.

5) Термін «нехтовні» (англ. negligible) множини на сторінці 62 не звучить благозвучно. Я б перекладав його як нульові множини. Такий термін (null sets) теж вживається у англомовних статтях.

6) Зустрічаються кальки у перекладі з англійського «such that» зворотом «такий, що», який не властивий українській мові.

7) Мені видається, що умова 1) в означенні сепарабельного простору з мірою на сторінці 62 є надто обмежуючою, а саме, що умова $A \subset B \subset \Omega$ є зайвою. Особливо, якщо задумувалось, що така сепарабельність мала б бути еквівалентною сепарабельності псевдометричного простору, наділеного віддаллю, рівною мірі симетричної різниці множин, чи теж сепарабельності просторів функцій $L_p(\Omega)$.

8) Замість «точок із додатньою мірою» у теоремі 1.1 краще писати «синглетонів з додатньою мірою».

9) Я не впевнений, що в означенні лінійного простору $X(\Omega)$ слід відразу розглядати класи еквівалентності функцій, оскільки усі подальші дії (зокрема в означеннях 1.17, 1.18) і так відбуваються на представниках.

10) Означення 1.19 не містить усієї потрібної інформації про множину Ω, оскільки не пояснено значення модуля $|t|$ для точок цієї множини і теж не пояснено що значить необмеженість множини Ω.

11) В означенні 1.21 скінченні бієкції краще вводити за допомогою скінченності носія перестановки. У цьому випадку видно, що лінійний порядок на натуральних числах несуттєвий.

12) Часто в дисертації (зокрема у твердженні 2.2) вживається зворот «— це», хоча тире вже має значення «це», тобто «— це» означає «це це».

13) У прикладі 3.1 йде мова про банахову границю. Можливо, вартувало б пояснити, що мається на увазі під цим поняттям.

14) При вживанні мультиіндексів автор часто пише $|k| \geq \lceil p \rceil$ чи $|k| \leq \lfloor p \rfloor$, що еквівалентно $|k| \geq p$ та $|k| \leq p$, відповідно, оскільки число $|k|$ ціле. Тобто тут можна було уникнути ускладнення формул, не вживаючи верхньої та нижньої цілих частин.

15) Термін «well-defined» перекладається українською як «коректно визначений», а не «добре визначений» (див. сторінки 110, 170, та деякі інші).

16) Приємно здивувала поява дзета-функції Рімана в аргументах на сторінках 122—124.

17) У деяких формулах (наприклад, у доведенні теореми 5.1) замість нижніх трьокрапок «...» слід було писати центральні «$\cdots$», бо мова там іде про множення.

18) На сторінці 259 прізвище Митрофанова написано з помилкою.

Проте вказані вище зауваження не є суттєвими і не впливають на загальну високу оцінку дисертаційної роботи.

7. Висновки. Вважаю, що дисертаційна робота “Аналіз на спектрах алгебр аналітичних та гладких функцій на банаховому просторі” є завершеною науковою працею, що містить нові, важливі наукові результати, і задовольняє вимоги пп. 9, 10, 12-14 “Порядку присудження наукових ступенів”, затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24 липня 2013 року (із змінами і доповненнями, внесеними згідно з Постановами КМ № 656 від 19.08.2015 р., № 1159 від 30.12.2015 р., № 567 від 27.07.2016 р. та Наказом МОН № 40 від 12.01.2017 р.), щодо докторських дисертацій, а її автор, Василишин Тарас Васильович, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.01 – математичний аналіз.

Офіційний опонент
Доктор фізико-математичних наук,
професор, професор кафедри алгебри,
топології та основ математики
Львівського національного університету
імені Івана Франка Т. О. Банах

Підпис Банаха Т. О.
ПІДТВЕРДЖУЮ
ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР
ЛЬВІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ імені ІВАНА ФРАНКА

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ІВАНА ФРАНКА
ЗКПО 02070987