ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу Василишина Тараса Васильовича
"Аналіз на спектрах алгебр аналітичних та гладких функцій на банаховому просторі",
що подана до захисту на здобуття
наукового ступеня доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

Дисертаційну роботу присвячено вивченню спектрів топологічних алгебр аналітичних функцій на комплексних банахових просторах і топологічних алгебр гладких функцій на дійсних банахових просторах із певними додатковими властивостями симетрії.

Перші визначальні кроки у створенні теорії диференціального числення на нескінченновимірних просторах були зроблені на межі XIX–XX сторіч у роботах В. Вольтерра, Г. фон Коха, М. Фреше, Д. Гільберта, Р. Гато. Фінальний крок до сучасного визначення аналітичного відображення зроблено незалежно А. М. Грейвсом у 1935 році та А. Е. Тейлором у 1937 році. У подальшому розвитку теорії приймала участь велика кількість математиків. Зокрема, в середині 1940-х років значний внесок зробив М. А. Цорн; на початку 1950-х Ж. Себастьяо е Сілва розробив теорію диференціювання на довільних локально опуклих просторах; в 1960-х – 1980-х роках важливі результати отримано такими фахівцями, як А. Дуаді, А. Картан, Г. Х. Бремерман, М. Ерве, П. Лелонг, А. Мартіну, Л. Нахбін, К. Стейн, Ш. Дінін та ін. Зокрема, Н. В. Куе в 1984 році і Р. Мейсе та Д. Вогт в 1986 році розпочали дослідження властивостей алгебри Фреше $H_b(X)$ цілих аналітичних функцій обмеженого типу із топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах, заданих на банаховому просторі X. Спектр $H_b(X)$ був об'єктом досліджень в роботах Р. Арона, Т. Гамеліна, П. Галіндо, Ж. Мухіки, А. В. Загороднюка та інших. Спектри підалгебр симетричних (інваріантних відносно дії певної фіксованої групи лінійних операторів на просторі X) функцій алгебри $H_b(X)$ досліджувалися, зокрема, в роботах Р. Аленкара, Р. Арона, П. Галіндо, А. В. Загороднюка, автора дисертації. Наразі теорія перебуває у стані бурхливого розвитку та має численні застосування у багатьох розділах фізики і математики, отже, актуальність тематики дисертаційного дослідження Василишина Т. В. не викликає жодних сумнівів.

Дисертація (загальний обсяг — 309 сторінок) складається з анотації (українською та англійською мовами), вступу, семи розділів, висновків та списку літератури, що містить 132 найменування.

Перший розділ присвячений огляду літератури за тематикою дослідження та викладенню необхідного теоретичного матеріалу.

Другий розділ дисертаційної роботи присвячений дослідженню симетричних аналітичних функцій на комплексному банаховому просторі $L_\infty[0, 1]$ всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку. Зокрема, встановлено, що так звані елементарні симетричні поліноми утворюють алгебраїчний базис алгебри всіх симетричних неперервних комплекснозначних поліномів на просторі $L_\infty[0,1]$; розв'язано задачу побудови елемента простору $L_\infty[0,1]$ за наперед заданою послідовністю значень елементарних симетричних поліномів на цьому елементі. Даний результат став ключовим для опису спектра алгебри Фреше $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на просторі $L_\infty[0,1]$. Як виявилося, у алгебраїчному сенсі, спектр збігається із сильним спряженим до простору Фреше всіх цілих аналітичних функцій однієї комплексної змінної простором $H'(\mathbb{C})_\beta$. Топологізація спектра топологією простору $H'(\mathbb{C})_\beta$ дала можливість зобразити $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ як алгебру всіх аналітичних функцій на спектрі.

Третій розділ присвячений дослідженням симетричних та скінченно-симетричних поліномів і аналітичних функцій на комплексному банаховому просторі l_∞ всіх обмежених послідовностей комплексних чисел і на комплексному банаховому просторі $l_p(\mathbb{C}^n)$ всіх послідовностей n-вимірних комплексних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня $p \in [1,+\infty)$, є збіжним. Показано, що кожен комплекснозначний неперервний симетричний поліном на просторі l_∞ обов'язково є сталим відображенням; що алгебра Фреше всіх комплекснозначних скінченно-симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на l_∞ є ізоморфною до алгебри Фреше всіх комплекснозначних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на фактор-просторі l_∞/c_0, де c_0 — простір збіжних до нуля послідовностей комплексних чисел; побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних поліномів на просторі $l_p(\mathbb{C}^n)$.

У четвертому розділі вивчаються симетричні поліноми і аналітичні функції на просторах вимірних за Лебегом функцій, заданих на множинах нескінченної міри. Як виявилось, властивості симетричних і скінченно-симетричних поліномів і аналітичних функцій на комплексному банаховому просторі $L_\infty[0,+\infty)$ всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі та на просторі $L_\infty[0,1]$ є аналогічними. Зокрема, доведено, що кожен комплекснозначний неперервний симетричний поліном на $L_\infty[0,+\infty)$ обов'язково є сталим відображенням; що алгебра Фреше всіх комплекснозначних скінченно-симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на $L_\infty[0,+\infty)$ є ізоморфною до алгебри Фреше всіх комплекснозначних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на фактор-просторі $L_\infty[0,+\infty)/M_0$, де M_0 — замикання в $L_\infty[0,+\infty)$ підпростору всіх простих вимірних функцій із обмеженими носіями; що алгебри Фреше симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на просторі $L_\infty[0,1]$ і на підпросторі простору $L_\infty[0,+\infty)$, який складається зі всіх інтегровних функцій, є ізоморфними.

У п'ятому розділі побудовано скінченні алгебраїчні базиси алгебр всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартових степенях комплексних банахових просторів всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом у степені $p \in [1, +\infty)$ функцій на відрізку та на півосі; описано спектри алгебр Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на згаданих декартових степенях, і зображено дані алгебри Фреше як алгебри аналітичних функцій від скінченної кількості комплексних змінних.

Шостий розділ присвячений вивченню симетричних поліномів і симетричних аналітичних функцій на декартовому степені простору $L_\infty[0,1]$: побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів, і описано спектр алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу.

У сьомому розділі застосовано отримані у попередніх розділах результати і розроблену техніку до алгебр симетричних поліномів на деяких дійсних банахових просторах, алгебр симетричних $*$-поліномів на деяких комплексних банахових просторах, і до поповнень цих алгебр. Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх дійснозначних симетричних неперервних поліномів на дійсному банаховому просторі $l_p(\mathbb{R}^n)$ всіх послідовностей n-вимірних дійсних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня $p \in [1, +\infty)$, є збіжним. Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних $*$-поліномів на просторі $l_p(\mathbb{C}^n)$. Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх дійснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому степені дійсного банахового простору $L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]$ всіх дійснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку. Описано спектр певного поповнення алгебри всіх дійснозначних симетричних неперервних поліномів на $L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]$.

На жаль, дисертація не позбавлена і певних недоліків. А саме:

- При описі результатів підрозділу 7.7 на сторінках 7 та 13 незрозуміло, про декартові степені чого (якого простору чи просторів) йдеться.

- Перелік умовних позначень занадто короткий і не містить посилань на сторінки роботи, на яких ці позначення уводяться. До того ж майже половина цього переліку — це загальноприйняті позначення на кшталт $\mathbb{N}$ чи $\mathbb{R}$, які взагалі не варто окремо описувати.

- "Задачі дослідження" та "Наукова новизна отриманих результатів" описані занадто детально. Такий рівень деталізації не тільки ускладнює загальне сприйняття, але й змушує автора використовувати термінологію, що не є загальновідомою (наприклад, далеко не всі математики знають, що таке (p, q)-поліноми), це не сприяє розумінню суті отриманих результатів.

- При описі результатів попередніх досліджень автор не завжди усвідомлює, що читач може не бути знайомим із відповідними роботами. Так, наприклад, на сторінці 42 йдеться про властивості топології на спектрі алгебри цілих аналітичних функцій обмеженого типу на банаховому просторі; але без ознайомлення з роботою, на яку наведене посилання, незрозуміло, про яку саме топологію йде мова.

- Зустрічається незначна кількість невдалих фраз. Так, наприклад, на сторінках 42-43 сказано: "Зауважимо, що існування розривного комплекснозначного гомоморфізму на алгебрі Фреше складає відому проблему Майкла", в той час як проблема Майкла пов'язана з питанням про існування такого гомоморфізму. Інший приклад — неодноразово зустрічається фраза "доведемо [твердження] для n", що не дуже грамотно з мовної точки зору.

- На сторінці 47 автор пропонує для детального ознайомлення із сучасним станом досліджень у теорії аналітичних і полілінійних відображень на банахових просторах низку монографій та оглядових статей. Всі ці роботи, безумовно, дуже якісні та достойні уваги зацікавленого читача; але опубліковані вони у проміжку з 1981-го по 2002-й рік, тому казати про "сучасний стан" у 2021-му році не дуже коректно.

- Підрозділ 1.2.7 присвячений просторам Лебега-Рохліна. Такі простори не є загальновідомим поняттям, тому їх визначення варто було б відповідним чином оформити (тим більше що в подальшому є неодноразові посилання на вказане поняття), а не наводити "посеред тексту" (стор. 62).

- Уведення позначень, що не є загальноприйнятими (і, до речі, відсутні у списку позначень), не завжди продумане. Так, наприклад, відображення $R_n(x)$ уведене на сторінці 67 (де у ньому немає потреби), а вперше використовується без нагадування та посилання на сторінці 69. Інші приклади: позначення $\lceil p \rceil$ уведене (без належного виділення) на сторінці 108 і в подальшому неодноразово використовується без нагадування (зокрема, на сторінках 121, 197, 243, 258); позначення P_H уведене на сторінці 61 і використовується без нагадування на сторінці 87.

- Варто було б навести доведення, або хоча б пояснення для Наслідків 2.1 та 2.2 на сторінці 86.

- Назви багатьох підрозділів дуже довгі, що ускладнює їх сприйняття. Краще було б користуватись раніше уведеними позначеннями для відповідних просторів, а не описувати їх словами у назвах параграфів. Те ж саме стосується висновків до розділів 2, 3, 5, 7, та загальних висновків до роботи.

- Такі поняття, як (DF)-простір та простір Монтеля, не є загальновідомими. Автор увів їх у розгляд на стор. 88, але не навів у роботі відповідні означення.

- Вислів "для всіх достатньо великих n" у Означенні 2.1 на сторінці 89 невдалий, краще сказати, що послідовність $\{m_n\}$ є фінітною (або "містить лише скінченну кількість ненульових членів").

- Приклади 3.1 на сторінці 104 та 4.1 на сторінці 134 описані без уведення всіх необхідних для розуміння понять. На моє переконання, такі речі треба або описувати детально, або не наводити зовсім (вони не є критично необхідними для подальшого викладу).

- Формулювання Леми 3.2 на сторінці 120 не дуже вдале: неявно накладаються додаткові умови на множину K, про таке краще казати явно.

- На початках доведень тверджень та при викладі матеріалу автор не завжди пояснює локальну ціль, на яку спрямовані його зусилля. Це може значною мірою ускладнювати сприйняття окремих частин роботи. Приклад — уведення множини $M_N^{(J)}$ на сторінці 121.

- На сторінці 172 використовується позначення норми $\|\cdot\|_{p,n,[0,1]}$, визначення якої відсутнє (втім, із контексту можна зрозуміти, про яку норму йдеться).

- Теорема 5.3 на сторінці 182 сформульована невдало, вона навіть містить визначення підалгебри $\mathcal{A}(X)$. Краще було б увести всі необхідні об'єкти, перш ніж формулювати теорему.

- На сторінці 190 двічі анотуються результати підрозділу 5.2.

- На сторінці 246 після формули (7.10) краще сказати не "інакше" , а "в іншому випадку" .

- Формула (7.11) на сторінці 247 з точністю до "німого індексу" співпадає з формулою (1.11) на сторінці 53. Варто було б навести відповідне посилання хоча б з метою нагадати, що таке $(j, k-j)$-поліном. Також на сторінці 247 не варто уводити для таких поліномів назву "(p, q)-поліноми" , яка далі не використовується. На тій же сторінці не зайвим було б нагадати, що таке матриця Вандермонда.

- Літеру μ, яка у роботі позначає міру Лебега, не варто було б використовувати на сторінці 270 в якості індексу.

- Автор мав би пояснити на сторінці 281, що він розуміє під терміном "знак перестановки σ" .

– Незрозумілим є зауваження щодо продовження відображення A перед Твердженням 7.13 на сторінці 282.

– Робота містить незначну кількість друкарських помилок та описок, зокрема, на сторінках 41, 53, 62, 101, 128, 213, 236, 259, 277.

Втім, серед цих недоліків немає жодного суттєвого, отже, вони не можуть вплинути на загальну позитивну оцінку роботи.

Дисертація носить теоретичний характер. Вона виконана на високому науковому рівні. Всі наведені в ній результати, що виносяться на захист, є новими. Основні теореми і твердження чітко сформульовані, до них наведені повні доведення, що забезпечує достовірність основних положень та висновків дисертаційного дослідження. Дисертація є завершеною науковою працею. Результати повністю і своєчасно опубліковані у 23 статтях, які надруковані у наукових фахових виданнях з математики. Серед цих статей 17 опубліковані у виданнях, проіндексованих у базах даних Scopus та/або Web of Science Core Collection. Результати дисертації доповідались на багатьох наукових конференціях та семінарах як в Україні, так і за кордоном. Автореферат правильно і повністю відображає зміст дисертації.

Підсумовуючи усе вище викладене, вважаю, що дисертаційна робота "Аналіз на спектрах алгебр аналітичних та гладких функцій на банаховому просторі" за актуальністю тематики, обсягом виконаної роботи, новизною і науковою цінністю отриманих результатів повністю задовольняє вимоги пп. 9, 10, 12–14 "Порядку присудження наукових ступенів" (Постанова Кабінету Міністрів України № 567 від 24.07.2013) щодо докторських дисертацій, а її автор, Василишин Тараса Васильович, заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Офіційний опонент
доктор фіз.-мат. наук, ст. науковий співробітник
провідний науковий співробітник
відділу функціонального аналізу
Інституту математики НАН України

Національна академія наук України ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ Ідентифікаційний код 05417207 м. Київ

Підпис Качановський М.О.

ЗАСВІДЧУЮ
Зав. канцелярією
Інституту математики АН України
"26" 04 21 р.

25 квітня 2021 р.

Надійшов 26.04.2021 р.