

## Відгук

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Василишина Тараса Васильовича

*“Аналіз на спектрах алгебр аналітичних та  
гладких функцій на банаховому просторі”*,

подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних  
наук зі спеціальності 01.01.01 — математичний аналіз

Дисертаційна робота присвячена вивченню властивостей алгебр неперервних поліномів із деякими додатковими властивостями симетрії, визначених на банахових просторах, опису спектрів алгебр Фреше аналітичних та диференційованих функцій, породжених вказаними підалгебрами поліномів, зображення цих алгебр Фреше як алгебр аналітичних та диференційованих функцій на їхніх спектрах.

Вивчення симетричних поліномів відносно дії групи підстановок на базисних векторах на просторі  $\ell_p$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , та відносно дії групи вимірних автоморфізмів множини  $[0,1]$  в просторі  $L_p[0,1]$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , було започатковано А. С. Немировським і С. М. Семеновим у їхній статті 1973 року. Результати цієї роботи було узагальнено М. Гонзалезом, Р. Гонзало і Х. Харамілло у їхній роботі 1999 року для просторів з симетричним базисом та переставно-інваріантних просторів. Алгебри симетричних аналітичних функцій на просторах  $\ell_p$  почали вивчатися Р. Аленкаром, Р. Ароном, П. Галіндо, А. В. Загороднюком у їхній роботі 2003 року. Зокрема, в цій роботі досліджено алгебру симетричних аналітичних функцій, які є рівномірно неперервними на одиничній кулі простору  $\ell_p$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , описано спектр такої алгебри. В серії робіт, П. Галіндо, А. В. Загороднюком та І. В. Чернегою досліджено алгебру  $H_{bs}(\ell_p)$  симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторах  $\ell_p$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , та алгебру симетричних

аналітичних функцій на полідиску простору  $\ell_1$ , досліджено оператори симетричного зсуву алгебри  $H_{bs}(\ell_1)$  та показано, що спектр цієї алгебри можна описати у вигляді мультиплікативної підгрупи в алгебрі аналітичних функцій експоненціального типу, розглянуто алгебраїчні структури на спектрі алгебри  $H_{bs}(\ell_1)$  та досліджено оператори мультиплікативного зсуву цієї алгебри.

Загальний підхід до вивчення симетричних аналітичних функцій на банахових просторах було представлено Р. Ароном, П. Галіндо, Д. Пінаско, І. Залдуеньйо в їхній роботі 2016 року, де вивчалися аналітичні функції на банаховому просторі, які є інваріантними відносно дії певної фіксованої групи лінійних операторів на просторі. Спектри алгебр симетричних (інваріантних відносно дії групи операторів) аналітичних функцій на банахових просторах вивчалися Д. Гарсією, М. Маестре, І. Залдуеньйо в їхній роботі 2019 року. Також симетричні аналітичні функції вивчалися Р. Ароном, Д. Гарсією, Х. Фалко і М. Маестре у роботі 2018 року.

Таким чином, вважаю, що тема дисертаційної роботи є актуальною.

Дисертація складається зі вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків.

У вступі обґрунтовано актуальність дослідження, вказано на зв'язок дисертаційної роботи з науково-дослідними темами, сформульовано мету і завдання дослідження, відзначено наукову новизну, теоретичне і практичне значення отриманих результатів, виокремлено особистий внесок здобувача і вказано установи та організації, де доповідалися і обговорювалися результати дисертації.

У першому розділі наведено необхідний теоретичний матеріал і зроблено огляд відомих результатів, що стосуються тематики дисертаційного дослідження.

Другий розділ дисертації присвячено дослідженням комплекснозначних неперервних симетричних поліномів і цілих аналітичних симетричних функцій на комплексному банаховому просторі  $L_\infty[0,1]$  всіх комплекснозначних вимірних за

Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку  $[0,1]$ . Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх симетричних неперервних комплекснозначних поліномів на цьому просторі. Описано спектр алгебри Фреше  $H_{bs}(L_\infty[0,1])$  всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на просторі  $L_\infty[0,1]$ . Зображено дану алгебру Фреше як алгебру аналітичних функцій на спектрі, який ототожнено із сильним спряженим простором до простору Фреше всіх цілих аналітичних функцій від однієї комплексної змінної.

Розділ 3 присвячено вивченню симетричних і скінченно-симетричних комплекснозначних неперервних поліномів і аналітичних функцій на деяких просторах послідовностей. Показано, що кожен комплекснозначний неперервний симетричний поліном на комплексному банаховому просторі  $\ell_\infty$  всіх обмежених послідовностей комплексних чисел обов'язково є сталим відображенням. Показано, що алгебра Фреше всіх комплекснозначних скінченно-симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному просторі  $\ell_\infty$  є ізоморфною до алгебри Фреше всіх комплекснозначних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на фактор-просторі  $\ell_\infty/c_0$ , де  $c_0$  – це комплексний банахів простір всіх збіжних до нуля послідовностей комплексних чисел. Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх послідовностей  $n$ -вимірних комплексних векторів таких, що ряд із  $p$ -норм цих векторів, піднесених до степеня  $p$ , є збіжним, де  $1 \leq p < +\infty$ .

Розділ 4 присвячено вивченню симетричних і скінченно-симетричних комплекснозначних неперервних поліномів і аналітичних функцій на деяких комплексних банахових просторах вимірних за Лебегом функцій на множинах нескінченної міри. Показано, що кожен комплекснозначний неперервний симетричний поліном на комплексному банаховому просторі  $L_\infty[0, +\infty)$  всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі обов'язково є сталим відображенням. Показано, що алгебра Фреше всіх

комплекснозначних скінченно-симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на просторі  $L_\infty[0, +\infty)$  є ізоморфною до алгебри Фреше всіх комплекснозначних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на факторпросторі  $L_\infty[0, +\infty)/M_0$ , де  $M_0$  – це замикання у просторі  $L_\infty[0, +\infty)$  підпростору всіх простих вимірних функцій із обмеженими носіями. Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі і показано, що алгебра Фреше комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цьому просторі ізоморфна до алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку. Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на об'єднанні просторів Лебега-Рохліна із неперервними мірами.

Розділ 5 присвячено вивченню симетричних комплекснозначних аналітичних функцій на декартових степенях комплексних банахових просторів  $L_p[0,1]$  і  $L_p[0, +\infty)$  всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом у степені  $p$  функцій на множинах  $[0,1]$  і  $[0, +\infty)$  відповідно, де  $1 \leq p < +\infty$ . Побудовано скінченні алгебраїчні базиси алгебр всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів, описано спектри алгебр Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цих декартових степенях, зображено дані алгебри Фреше як алгебри аналітичних функцій від скінченної кількості комплексних змінних.

Розділ 6 присвячено вивченню комплекснозначних симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на декартовому степені комплексного банахового

простору  $L_\infty[0,1]$  всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку  $[0,1]$ . Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів і описано спектр алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цьому декартовому степені.

Розділ 7 присвячено вивченню деяких класів диференційовних у дійсному сенсі функцій на банахових просторах. Зокрема, побудовано зліченні алгебраїчні базиси алгебр симетричних неперервних поліномів і  $*$ -поліномів на дійсному і комплексному банахових просторах всіх послідовностей  $n$ -вимірних векторів таких, що ряд із  $p$ -норм цих векторів, піднесених до степеня  $p$ , де  $1 \leq p < +\infty$ , є збіжним. Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх дійснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому степені дійсного банахового простору всіх дійснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку. Описано спектр алгебри Фреше, яка є поповненням алгебри всіх дійснозначних симетричних неперервних поліномів на дійсному банаховому просторі всіх дійснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку і показано, що ця алгебра містить неаналітичні функції.

Результати дисертаційної роботи є внеском в теорію диференційовних функцій на банахових просторах і можуть бути використані при дослідженнях алгебр аналітичних і диференційовних у дійсному сенсі функцій на банахових просторах.

Всі результати дисертації є новими та строго обґрунтованими. У випадку, коли використовуються результати чи ідеї інших авторів, дисертант це відзначає у роботі та робить відповідні посилання на праці цих авторів.

Результати роботи опубліковано у 23 журнальних статтях що входять до фахових видань, з яких 17 статей у виданнях, що входять у наукометричні бази Scopus та/або Web of Science Core Collection. Є також достатня кількість публікацій, які засвідчують апробацію дисертації.

Дисертація написана сучасною українською математичною мовою. Зміст автореферату повністю відповідає змісту дисертації.

Вважаю за необхідне висловити деякі зауваження, які не впливають на загальну позитивну оцінку дисертаційної роботи.

1. На с. 288 в рядку 15 замість “ототожено” має бути “ототожнено”.
2. Вважаю, що було б цікаво у подальших дослідженнях ввести аналітичну структуру на спектрі алгебри Фреше всіх симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на декартовому степені комплексного банахового простору всіх вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку і зобразити дану алгебру (якщо це можливо) як алгебру аналітичних функцій на спектрі.

Враховуючи вищевикладене, вважаю, що за актуальністю тематики, обсягом виконаної роботи, новизною і науковою цінністю отриманих результатів дисертаційна робота “Аналіз на спектрах алгебр аналітичних та гладких функцій на банаховому просторі” задовольняє вимоги пп. 9, 10, 12-14 “Порядку присудження наукових ступенів” затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24.07.2013 із змінами і доповненнями) щодо докторських дисертацій, а її автор Васишин Тарас Васильович заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.01 — математичний аналіз.

Доктор фізико-математичних наук, доцент,  
професор кафедри дослідження операцій  
Київського національного університету  
імені Тараса Шевченка

Відгук надійшов  
16.04.20 р.



Д. П. Проскурін