ДВНЗ “ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНИКА”
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ВАСИЛИШИН ТАРАС ВАСИЛЬОВИЧ

УДК 517.98

ДИСЕРТАЦІЯ

АНАЛІЗ НА СПЕКТРАХ АЛГЕБР АНАЛІТИЧНИХ ТА ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ НА БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

01.01.01 — математичний аналіз

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ____________________ Т. В. Василишин

Науковий консультант
ЗАГОРОДНЮК АНДРІЙ ВАСИЛЬОВИЧ,
доктор фізико-математичних
наук, професор

ІВАНО-ФРАНКІВСЬК — 2021

АНОТАЦІЯ

Василишин Т. В. Аналіз на спектрах алгебр аналітичних та гладких функцій на банаховому просторі. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”. — Інститут математики НАН України, Київ, 2021.

Дисертаційну роботу присвячено вивченню спектрів (множин нетривіальних неперервних скалярнозначних гомоморфізмів) топологічних алгебр аналітичних функцій на комплексних банахових просторах і топологічних алгебр гладких функцій на дійсних банахових просторах із деякими додатковими властивостями симетрії.

Дисертація складається зі вступу і семи розділів.

Перший розділ присвячено огляду літератури з теми дисертації та викладенню допоміжних понять і тверджень.

Другий розділ присвячено вивченню симетричних (інваріантних відносно композиції аргументу із довільним вимірним автоморфізмом відрізка) неперервних поліномів і симетричних аналітичних функцій на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку.

В підрозділі 2.1 показано, що елементарні симетричні поліноми, визначені як інтеграли від степенів функції, утворюють зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх симетричних неперервних комплекснозначних поліномів на комплексному банаховому просторі $L_\infty[0,1]$ всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку $[0,1]$. Також розв'язано задачу побудови елемента простору $L_\infty[0,1]$ за наперед заданими значеннями елементарних симетричних поліномів.

Підрозділ 2.2 присвячено вивченню спектра алгебри Фреше $H_{bs}\left(L_\infty[0,1]\right)$ всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеже-

ного типу на просторі $L_\infty[0,1]$ із топологією рівномірної збіжності на обмежених підмножинах простору $L_\infty[0,1]$. Показано, що кожен характер (елемент спектра) цієї алгебри є функціоналом обчислення значення в точці. Також показано, що спектр алгебри Фреше $H_{bs}\left(L_\infty[0,1]\right)$ можна ототожнити із множиною всіх послідовностей комплексних чисел $\{c_n\}_{n=1}^\infty$, для яких послідовність $\left\{|c_n|^{1/n}\right\}_{n=1}^\infty$ є обмеженою.

В підрозділі 2.3 задано аналітичну структуру на спектрі алгебри Фреше $H_{bs}\left(L_\infty[0,1]\right)$. Розглянуто спектр як сильний спряжений простір $H'(\mathbb{C})_\beta$ до простору Фреше $H(\mathbb{C})$ всіх цілих аналітичних функцій від однієї комплексної змінної із топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах. Показано, що алгебра Фреше $H_{bs}\left(L_\infty[0,1]\right)$ є ізоморфною до алгебри Фреше $H(H'(\mathbb{C})_\beta)$ всіх комплекснозначних цілих аналітичних функцій на просторі $H'(\mathbb{C})_\beta$.

Третій розділ присвячено вивченню симетричних (інваріантних відносно перестановок координат аргументу) і скінченно-симетричних (інваріантних відносно скінченних перестановок координат аргументу) комплекснозначних неперервних поліномів і аналітичних функцій на деяких просторах послідовностей.

В підрозділі 3.1 показано, що кожен комплекснозначний неперервний симетричний поліном на комплексному банаховому просторі ℓ_∞ всіх обмежених послідовностей комплексних чисел обов'язково є сталим відображенням.

Підрозділ 3.2 присвячено вивченню скінченно-симетричних комплекснозначних аналітичних функцій на комплексному просторі ℓ_∞. Показано, що алгебра Фреше всіх комплекснозначних скінченно-симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на просторі ℓ_∞ із топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах є ізоморфною до алгебри Фреше всіх комплекснозначних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на фактор-просторі ℓ_∞/c_0, де c_0 — це комплексний банахів простір всіх збіжних до нуля послідовностей комплексних чисел.

Підрозділ 3.3 присвячено вивченню алгебри $\mathcal{P}_s(\ell_p(\mathbb{C}^n))$ всіх комплекснозначних симетричних неперервних поліномів на комплексному банаховому просторі $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ всіх послідовностей n-вимірних комплексних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня p, є збіжним, де $n \in \mathbb{N}$ і $1 \leq p < +\infty$. Доведено, що так звані степеневі симетричні поліноми утворюють зліченний алгебраїчний базис алгебри $\mathcal{P}_s(\ell_p(\mathbb{C}^n))$. Також розв'язано задачу побудови елемента скінченновимірного підпростору простору $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ за наперед заданими значеннями скінченної кількості степеневих симетричних поліномів на цьому елементі. Зауважимо, що результати цього підрозділу є важливими для досліджень симетричних аналітичних функцій на декартових степенях банахових просторів інтегровних за Лебегом функцій.

Четвертий розділ присвячено вивченню симетричних і скінченно-симетричних комплекснозначних неперервних поліномів і аналітичних функцій на деяких комплексних банахових просторах вимірних за Лебегом функцій на множинах нескінченної міри.

В підрозділі 4.1 показано, що кожен комплекснозначний неперервний симетричний поліном на комплексному банаховому просторі $L_\infty[0, +\infty)$ всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі обов'язково є сталим відображенням. Цей результат аналогічний до основного результату підрозділу 3.1.

В підрозділі 4.2 показано, що алгебра Фреше всіх комплекснозначних скінченно-симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на просторі $L_\infty[0, +\infty)$ із топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах є ізоморфною до алгебри Фреше всіх комплекснозначних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на фактор-просторі $L_\infty[0, +\infty)/M_0$, де M_0 — це замикання у просторі $L_\infty[0, +\infty)$ підпростору всіх простих вимірних за Лебегом функцій із обмеженими носіями. Даний результат аналогічний до основного результату підрозділу 3.2.

Підрозділ 4.3 присвячено вивченню симетричних аналітичних функцій на комплексному банаховому просторі $(L_1 \cap L_\infty)[0, +\infty)$ всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі. Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на просторі $(L_1 \cap L_\infty)[0, +\infty)$ і показано, що алгебри Фреше комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на просторах $(L_1 \cap L_\infty)[0, +\infty)$ і $L_\infty[0, 1]$ є ізоморфними.

В підрозділі 4.4 побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних інтегровних суттєво обмежених функцій на довільному об'єднанні просторів Лебега-Рохліна із неперервними мірами.

П'ятий розділ присвячено вивченню симетричних комплекснозначних аналітичних функцій на декартових степенях комплексних банахових просторів $L_p[0, 1]$ і $L_p[0, +\infty)$ всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом у степені p функцій на множинах $[0, 1]$ і $[0, +\infty)$ відп., де $1 \leq p < +\infty$.

В підрозділі 5.1 побудовано скінченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних поліномів на декартовому степені простору $L_p[0, 1]$ і показано, що алгебра Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій на декартовому степені простору $L_p[0, 1]$ ізоморфна до алгебри Фреше $H(\mathbb{C}^m)$ всіх комплекснозначних аналітичних функцій на просторі $\mathbb{C}^m$, де m — це потужність вищезгаданого алгебраїчного базису.

В підрозділі 5.2 показано, що у випадку $p \notin \mathbb{N}$ кожен комплекснозначний симетричний неперервний поліном на декартовому степені простору $L_p[0, +\infty)$ обов'язково є сталим відображенням. У випадку $p \in \mathbb{N}$ встановлено результати для симетричних неперервних поліномів і симетричних аналітичних функцій на декартовому степені простору $L_p[0, +\infty)$, аналогічні до результатів підрозділу 5.1.

Шостий розділ присвячено вивченню комплекснозначних симетричних аналітичних функцій на декартовому степені комплексного банахового простору $L_\infty[0,1]$.

В підрозділі 6.1 побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних поліномів на декартовому степені простору $L_\infty[0,1]$.

В підрозділі 6.2 описано спектр алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на декартовому степені простору $L_\infty[0,1]$. Показано, що кожен елемент спектра є функціоналом обчислення значення в точці.

Сьомий розділ присвячено вивченню деяких класів диференційовних у дійсному сенсі функцій на банахових просторах.

Підрозділ 7.1 присвячено вивченню алгебри $\mathcal{P}_s(\ell_p(\mathbb{R}^n))$ всіх симетричних неперервних поліномів на дійсному банаховому просторі $\ell_p(\mathbb{R}^n)$ всіх послідовностей n-вимірних дійсних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня p, є збіжним, де $n \in \mathbb{N}$ і $1 \leq p < +\infty$. Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри $\mathcal{P}_s(\ell_p(\mathbb{R}^n))$.

В підрозділі 7.2 побудовано формули для відновлення (p,q)-поліноміальних компонент $*$-поліномів, які діють між комплексними лінійними просторами, за значеннями $*$-поліномів. Ці формули використано для досліджень симетричних $*$-поліномів, які діють з $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}$. Показано, що кожен такий $*$-поліном можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації деяких “елементарних” симетричних $*$-поліномів.

В підрозділі 7.3 побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних $*$-поліномів на просторі $\ell_p(\mathbb{C}^n)$.

Підрозділ 7.4 присвячено вивченню так званих операторів зсуву на алгебрі Фреше функцій, яка є поповненням алгебри всіх неперервних комплекснозначних $*$-поліномів на довільному комплексному банаховому просторі.

В підрозділі 7.5 побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх дійснозначних симетричних неперервних поліномів на декартовому степені дійсного банахового простору $L_\infty[0,1]$ всіх дійснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку $[0,1]$.

Підрозділ 7.6 присвячено вивченню дійснозначних симетричних функцій на дійсному банаховому просторі $L_\infty[0,1]$. Описано спектр алгебри Фреше $\mathcal{A}_s\left(L_\infty[0,1]\right)$, яка є поповненням алгебри всіх дійснозначних симетричних неперервних поліномів на просторі $L_\infty[0,1]$ відносно сім'ї норм від комплексифікацій поліномів. Показано, що дана алгебра Фреше містить неаналітичні функції.

Підрозділ 7.7 містить деякі результати стосовно продовжень полілінійних відображень на декартові степені.

Ключові слова: полілінійне відображення, поліном, однорідний поліном, $*$-поліном, (m,n)-поліном, аналітична функція, гладка функція, симетрична функція, скінченно-симетрична функція, топологічна алгебра, алгебра Фреше, спектр топологічної алгебри, алгебраїчний базис алгебри, функція обмеженого типу, вимірна за Лебегом суттєво обмежена функція, інтегровна за Лебегом функція, простір Лебега-Рохліна.

ABSTRACT

Vasylyshyn T. V. Analysis on spectra of algebras of analytic and smooth functions on a Banach space. — Qualifying scientific work on rights of manuscript.

The thesis for obtaining the Doctor of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.01 — mathematical analysis. — Public Higher Education Institution “Vasyl Stefanyk Precarpathian National University”. — Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2021.

The thesis is devoted to the study of spectra (sets of nontrivial continuous scalar-valued homomorphisms) of topological algebras of analytic functions on complex Banach spaces and topological algebras of smooth functions on real Banach spaces with some additional properties of symmetry.

The thesis consists of an introduction and seven sections.

The first section is devoted to the literature review on the topic of the thesis and to the presentation of the auxiliary concepts and statements.

The second section is devoted to the study of symmetric (invariant under the composition of its argument with any measurable automorphism of a segment) continuous polynomials and symmetric analytic functions on the complex Banach space of all complex-valued Lebesgue measurable essentially bounded functions on a segment.

In the subsection 2.1 it is shown that elementary symmetric polynomials, which are defined as integrals of powers of a function, form a countable algebraic basis of the algebra of all symmetric continuous complex-valued polynomials on the complex Banach space $L_\infty[0,1]$ of all complex-valued Lebesgue measurable essentially bounded functions on $[0,1]$. Also it is solved the problem of the construction of an element of the space $L_\infty[0,1]$ by the predefined values of elementary symmetric polynomials.

The subsection 2.2 is devoted to the study of the spectrum of the Fréchet algebra $H_{bs}\left(L_\infty[0,1]\right)$ of all complex-valued symmetric entire analytic functions of bounded type on the space $L_\infty[0,1]$ endowed with the topology of uniform

convergence on bounded subsets of the space $L_\infty[0,1]$. It is shown that every character (element of the spectrum) of this algebra is a point-evaluation functional. Also it is shown that the spectrum of the Fréchet algebra $H_{bs}\left(L_\infty[0,1]\right)$ can be identified with the set of all sequences of complex numbers $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ such that the sequence $\left\{|c_n|^{1/n}\right\}_{n=1}^\infty$ is bounded.

In the subsection 2.3 it is endowed the spectrum of the Fréchet algebra $H_{bs}\left(L_\infty[0,1]\right)$ with an analytic structure. It is considered the spectrum as the strong dual space $H'(\mathbb{C})_\beta$ to the Fréchet space $H(\mathbb{C})$ of all entire analytic functions of one complex variable with the topology of the uniform convergence on bounded sets. It is shown that the Fréchet algebra $H_{bs}\left(L_\infty[0,1]\right)$ is isomorphic to the Fréchet algebra $H(H'(\mathbb{C})_\beta)$ of all complex-valued entire analytic functions on the space $H'(\mathbb{C})_\beta$.

The third section is devoted to the study of symmetric (invariant under the action of permutations on its argument) and finitely symmetric (invariant under the action of finite permutations on its argument) complex-valued continuous polynomials and analytic functions on some sequence spaces.

In the subsection 3.1 it is shown that every complex-valued continuous symmetric polynomial on the complex Banach space ℓ_∞ of all bounded sequences of complex numbers is necessarily constant.

The subsection 3.2 is devoted to the study of finitely symmetric complex-valued analytic functions on the complex space ℓ_∞. It is shown that the Fréchet algebra of all complex-valued finitely symmetric entire analytic functions of bounded type on the space ℓ_∞ endowed with the topology of uniform convergence on bounded sets is isomorphic to the Fréchet algebra of all complex-valued entire analytic functions of bounded type on the quotient space ℓ_∞/c_0, where c_0 is the complex Banach space of all convergent to zero sequences of complex numbers.

The subsection 3.3 is devoted to the study of the algebra $\mathcal{P}_s(\ell_p(\mathbb{C}^n))$ of all complex-valued symmetric continuous polynomials on the complex Banach space $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ of all sequences of n-dimensional complex vectors such that the series of pth powers of p-norms of these vectors is convergent, where $n \in \mathbb{N}$ and $1 \leq p < +\infty$. It is proved that the so-called power sum symmetric polynomials form a countable algebraic basis of the algebra $\mathcal{P}_s(\ell_p(\mathbb{C}^n))$. Also it is solved the problem of the construction of an element of a finite-dimensional subspace of the space $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ by the predefined values of a finite number of power sum symmetric polynomials on this element. Note that the results of this subsection are important for investigations of symmetric analytic functions on Cartesian powers of Banach spaces of Lebesgue integrable functions.

The fourth section is devoted to the study of symmetric and finitely symmetric complex-valued continuous polynomials and analytic functions on some complex Banach spaces of Lebesgue measurable functions on sets of infinite measure.

In the subsection 4.1 it is shown that every complex-valued continuous symmetric polynomial on the complex Banach space $L_\infty[0, +\infty)$ of all complex-valued Lebesgue measurable essentially bounded functions on the semi-axis is necessarily constant. This result is analogical to the main result of the subsection 3.1.

In the subsection 4.2 it is shown that the Fréchet algebra of all complex-valued finitely symmetric entire analytic functions of bounded type on the space $L_\infty[0, +\infty)$ endowed with the topology of uniform convergence on bounded sets is isomorphic to the Fréchet algebra of all complex-valued entire analytic functions of bounded type on the quotient space $L_\infty[0, +\infty)/M_0$, where M_0 is the closure of the subspace of all simple Lebesgue measurable functions with bounded supports in the space $L_\infty[0, +\infty)$. This result is analogical to the main result of the subsection 3.2.

The subsection 4.3 is devoted to the study of symmetric analytic functions on the complex Banach space $(L_1 \cap L_\infty)[0, +\infty)$ of all complex-valued Lebesgue integrable essentially bounded functions on the semi-axis. It is constructed a countable algebraic basis of the algebra of all complex-valued continuous symmetric polynomials on the space $(L_1 \cap L_\infty)[0, +\infty)$ and it is shown that the Fréchet algebras of complex-valued symmetric entire analytic functions of bounded type on the spaces $(L_1 \cap L_\infty)[0, +\infty)$ and $L_\infty[0, 1]$ are isomorphic.

In the subsection 4.4 it is constructed a countable algebraic basis of the algebra of all complex-valued symmetric continuous polynomials on the complex Banach space of all complex-valued integrable essentially bounded functions on the arbitrary union of Lebesgue-Rohlin measure spaces with continuous measures.

The fifth section is devoted to the study of symmetric complex-valued analytic functions on Cartesian powers of complex Banach spaces $L_p[0, 1]$ and $L_p[0, +\infty)$ of all complex-valued Lebesgue integrable in a power p functions on $[0, 1]$ and $[0, +\infty)$ resp., where $1 \leq p < +\infty$.

In the subsection 5.1 it is constructed a finite algebraic basis of the algebra of all complex-valued symmetric continuous polynomials on the Cartesian power of the space $L_p[0, 1]$ and it is shown that the Fréchet algebra of all complex-valued symmetric entire analytic functions on the Cartesian power of the space $L_p[0, 1]$ is isomorphic to the Fréchet algebra $H(\mathbb{C}^m)$ of all complex-valued analytic functions on $\mathbb{C}^m$, where m is the cardinality of the above-mentioned algebraic basis.

In the subsection 5.2 it is shown that in the case $p \notin \mathbb{N}$ every complex-valued symmetric continuous polynomial on the Cartesian power of the space $L_p[0, +\infty)$ is necessarily constant. In the case $p \in \mathbb{N}$ there are established results for symmetric continuous polynomials and symmetric analytic functions on the Cartesian power of the space $L_p[0, +\infty)$, analogical to the results of the subsection 5.1.

The sixth section is devoted to the study of complex-valued symmetric analytic functions on the Cartesian power of the complex Banach space $L_\infty[0, 1]$.

In the subsection 6.1 it is constructed a countable algebraic basis of the algebra of all complex-valued symmetric continuous polynomials on the Cartesian power of the space $L_\infty[0, 1]$.

In the subsection 6.2 it is described the spectrum of the Fréchet algebra of all complex-valued symmetric entire analytic functions of bounded type on the Cartesian power of the space $L_\infty[0,1]$. It is shown that every element of the spectrum is a point-evaluation functional.

The seventh section is devoted to the study of some classes of differentiable in the real sense functions on Banach spaces.

The subsection 7.1 is devoted to the study of the algebra $\mathcal{P}_s(\ell_p(\mathbb{R}^n))$ of all symmetric continuous polynomials on the real Banach space $\ell_p(\mathbb{R}^n)$ of all sequences of n-dimensional real vectors such that the series of pth powers of p-norms of these vectors is convergent, where $1 \leq p < +\infty$ and $n \in \mathbb{N}$. It is constructed a countable algebraic basis of the algebra $\mathcal{P}_s(\ell_p(\mathbb{R}^n))$.

In the subsection 7.2 it is constructed formulas for recovering of (p,q)-polynomial components of $*$-polynomials, acting between complex vector spaces, by the values of $*$-polynomials. These formulas are used for investigations of symmetric $*$-polynomials, acting from $\mathbb{C}^n$ to $\mathbb{C}$. It is shown that every such a $*$-polynomial can be represented as an algebraic combination of some "elementary" symmetric $*$-polynomials.

In the subsection 7.3 it is constructed a countable algebraic basis of the algebra of all complex-valued symmetric continuous $*$-polynomials on the space $\ell_p(\mathbb{C}^n)$.

The subsection 7.4 is devoted to the study of the so-called shift operators on the Fréchet algebra of functions, which is the completion of the algebra of all continuous complex-valued $*$-polynomials on a complex Banach space.

In the subsection 7.5 it is constructed a countable algebraic basis of the algebra of all real-valued symmetric continuous polynomials on the Cartesian power of the real Banach space $L_\infty[0,1]$ of all real-valued Lebesgue measurable essentially bounded functions on $[0,1]$.

The subsection 7.6 is devoted to the study of real-valued symmetric functions on the real Banach space $L_\infty[0,1]$. It is described the spectrum of the Fréchet algebra $\mathcal{A}_s\left(L_\infty[0,1]\right)$, which is the completion of the algebra of all real-valued symmetric continuous polynomials on the space $L_\infty[0,1]$ with respect to

the system of norms of complexifications of polynomials. It is shown that this Fréchet algebra contains nonanalytic functions.

The subsection 7.7 contains some results on extensions of multilinear mappings to Cartesian powers.

Key words: multilinear mapping, polynomial, homogeneous polynomial, analytic function, smooth function, $*$-polynomial, (m, n)-polynomial, symmetric function, finitely symmetric function, topological algebra, Fréchet algebra, spectrum of a topological algebra, algebraic basis of an algebra, function of a bounded type, Lebesgue measurable essentially bounded function, Lebesgue integrable function, Lebesgue-Rohlin measure space.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, В ЯКИХ ОПУБЛІКОВАНІ ОСНОВНІ НАУКОВІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Василишин Т. В. Про простори (p, q)-лінійних і (p, q)-однорідних відображень між комплексними лінійними просторами // Прикарпатський вісник НТШ. Число. — 2015. — № 1(29). — С. 31–34.
2. Василишин Т. В. Операція згортки на просторі, спряженому до алгебри $C(\mathcal{P}_*(X))$ // Прикарпатський вісник НТШ. Число. — 2017. — № 2(38). — С. 23–27.
3. Василишин Т. В. Симетричні поліноми на дійсному банаховому просторі $L_\infty[0, 1]$ // Прикарпатський вісник НТШ. Число. — 2018. — № 1(45). — С. 21–25.
4. Василишин Т. В. Деякі властивості елементарних симетричних поліномів на декартовому квадраті комплексного банахового простору $L_\infty[0, 1]$ // Прикарпатський вісник НТШ. Число. — 2018. — № 2(46). — С. 9–16.
5. Василишин Т. В., Струтинський М. М. Алгебри симетричних $*$-поліномів на просторі $\mathbb{C}^2$ // Мат. мет. та фіз.-мех. поля. — 2018. — Т. 61, № 2. — С. 38–48.
6. Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. The algebra of symmetric analytic functions on L_∞ // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics — 2017. — Vol. 147, Iss. 4. — P. 743–761.
7. Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. Symmetric and finitely symmetric polynomials on the spaces ℓ_∞ and $L_\infty[0, +\infty)$ // Mathematische Nachrichten. — 2018. — Vol. 291, Iss. 11–12. — P. 1712–1726.
8. Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. Analytic structure on the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions on L_∞ // RACSAM — 2020. — Vol. 114, Article number 56.
9. Kravtsiv V., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. On algebraic basis of the algebra of symmetric polynomials on $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ // Journal of Function Spaces

— 2017. — Vol. 2017. — Article ID 4947925, 8 p.

10. Vasylyshyn T. V. Symmetric continuous linear functionals on complex space $L_\infty[0,1]$ // Carpathian Math. Publ. — 2014. — Vol. 6, No. 1. — P. 8–10.
11. Vasylyshyn T. V. Continuous block-symmetric polynomials of degree at most two on the space $(L_\infty)^2$ // Carpathian Math. Publ. — 2016. — Vol. 8, No. 1. — P. 38–43.
12. Vasylyshyn T. V. Extensions of multilinear mappings to powers of linear spaces // Carpathian Math. Publ. — 2016. — Vol. 8, No. 2. — P. 211–214.
13. Vasylyshyn T. V. Some properties of shift operators on algebras generated by $*$-polynomials // Carpathian Math. Publ. — 2018. — Vol. 10, No. 1. — P. 206–212.
14. Vasylyshyn T. V. Symmetric $*$-polynomials on $\mathbb{C}^n$ // Carpathian Math. Publ. — 2018. — Vol. 10, No. 2. — P. 395–401.
15. Vasylyshyn T. V. Point-evaluation functionals on algebras of symmetric functions on $(L_\infty)^2$ // Carpathian Math. Publ. — 2019. — Vol. 11, No. 2. — P. 493–501.
16. Vasylyshyn T. V. Symmetric functions on spaces $\ell_p(\mathbb{R}^n)$ and $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ // Carpathian Math. Publ. — 2020. — Vol. 12, No. 1. — P. 5–16.
17. Vasylyshyn T. Symmetric polynomials on $(L_p)^n$ // Eur. J. Math. — 2020. — Vol. 6, Iss. 1. — P. 164–178.
18. Vasylyshyn T. V. Symmetric polynomials on the Cartesian power of L_p on the semi-axis // Mat. Stud. — 2018. — Vol. 50, Iss. 1. — P. 93–104.
19. Vasylyshyn T. V. The algebra of symmetric polynomials on $(L_\infty)^n$ // Mat. Stud. — 2019. — Vol. 52, Iss. 1. — P. 71–85.
20. Vasylyshyn T. Algebras of entire symmetric functions on spaces of Lebesgue-measurable essentially bounded functions // J. Math. Sci. — 2020. — Vol. 246. — P. 264–276.
21. Vasylyshyn T. Symmetric polynomials on the space of bounded integrable functions on the semi-axis // International Journal of Pure and Applied Mathematics — 2017. — Vol. 117, Iss. 3. — P. 425–430.

22. Vasylyshyn T. V., Zagorodnyuk A. V. Continuous symmetric 3-homogeneous polynomials on spaces of Lebesgue measurable essentially bounded functions // Methods of Functional Analysis and Topology — 2018. — Vol. 24, Iss. 4. — P. 381–398.
23. Vasylyshyn T. V., Zagorodnyuk A. V. Symmetric polynomials on the Cartesian power of the real Banach space $L_\infty[0, 1]$ // Mat. Stud. — 2020. — Vol. 53, № 2. — P. 192–205.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, ЯКІ ЗАСВІДЧУЮТЬ АПРОБАЦІЮ МАТЕРІАЛІВ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Василишин Т. В. Симетричні функціонали на просторі $L_\infty[0, 1]$ // IX Літня школа “Алгебра, топологія і аналіз” (Поляниця, 7–18 липня 2014 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2014. — С. 21.
2. Василишин Т. В., Загороднюк А. В. Опис спектра алгебри аналітичних симетричних функцій на просторі $L_\infty[0, 1]$ // IV Міжнародна ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 30 червня – 5 липня 2014 р.): тези доп. — Чернівці, 2014. — С. 15.
3. Василишин Т. В. Базис алгебри неперервних симетричних поліномів на просторі $L_\infty[0, 1]$ // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей і математичного аналізу” (Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2015 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2015. — С. 13.
4. Василишин Т. В., Загороднюк А. В. Симетричні поліноми на просторах $L_\infty[0, 1]$ і $L_\infty[0, +\infty)$ // Всеукраїнська наукова конференція, присвячена 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу “Прикладні задачі математики” (Івано-Франківськ, 13–15 жовтня 2016 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2016. — С. 26.

5. Василишин Т. В., Загороднюк А. В., Кравців В. В. Алгебри блочно-симетричних поліномів // Всеукраїнська наукова конференція, присвячена 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу “Прикладні задачі математики” (Івано-Франківськ, 13–15 жовтня 2016 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2016. — с. 27–28.
6. Василишин Т. В., Кравців В. В. Алгебра симетричних поліномів на просторі $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2017. — С. 56.
7. Василишин Т. В. Симетричні поліноми та симетричні аналітичні функції на просторах вимірних за Лебегом функцій // Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики” присвячена 90-річчю від дня народження академіка НАН України Я.С. Підстригача та 40-річчю створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН України (Львів, 22–25 травня 2018 р.): збірник наук. праць у 3-х т. — Львів, 2018. — Т. 3, С. 50.
8. Василишин Т. В. Базиси алгебр симетричних поліномів на деяких банахових просторах // VI Всеукраїнська математична конференція “Нелінійні проблеми аналізу” імені Б.В. Василишина (Микуличин, 26–28 вересня 2018 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2018. — С. 12.
9. Vasylyshyn T. V. Topology on the spectrum of the algebra of entire symmetric functions of bounded type on the complex L_∞ // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach (Lviv, 18–23 September 2017): book of abstracts — Lviv, 2017. — p. 31–33.
10. Vasylyshyn T. V. The spectrum of the algebra of symmetric analytic functions on L_∞ // Conference on NonLinear Functional Analysis (Valencia, Spain, 17–20 October 2017): book of abstracts — Valencia, 2017. — P. 46.
11. Vasylyshyn T. V. Symmetric analytic functions on some Banach spaces

of Lebesgue measurable functions // International Scientific Conference "Banach Spaces and their Applications" dedicated to the 70th anniversary of Prof. A.M. Plichko (Lviv, Ukraine, 26–29 June 2019): book of abstracts — Lviv, 2019. — P. 122.

12. Vasylyshyn T. V. Symmetric analytic functions on Banach spaces // International Conference "Morse theory and its applications" dedicated to the memory and 70th anniversary of Volodymyr Sharko (Kyiv, Ukraine, 25–28 September 2019): book of abstracts — Kyiv, 2019. — p. 52–53.
13. Vasylyshyn T. V. Some classes of symmetric functions on Banach spaces // XI International V. Skorobohatko Mathematical Conference (Lviv, Ukraine, 26–30 October 2020): book of abstracts — Lviv, 2020. — P. 118.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$ —	множина всіх цілих додатних чисел
$\mathbb{Z}_+$ —	множина всіх цілих невід'ємних чисел
$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ —	множини всіх раціональних, дійсних, комплексних чисел відповідно
$\mathcal{S}$ —	множина всіх бієкцій множини $\mathbb{N}$
$\mathcal{S}_n$ —	множина всіх бієкцій множини $\{1, \ldots, n\}$
$H_b(X)$ —	алгебра Фреше всіх цілих аналітичних функцій обмеженого типу (обмежених на обмежених множинах) на банаховому просторі X
$H_{bs}(X)$ —	алгебра Фреше всіх симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на банаховому просторі X
$H(\mathbb{C}^m)$ —	алгебра Фреше всіх цілих аналітичних функцій на просторі $\mathbb{C}^m$

ВСТУП

Актуальність теми. Перші визначальні кроки у створенні теорії диференціального числення на нескінченновимірних просторах були зроблені В. Вольтерра (1887 р.), Г. фон Кохом (1899 р.), М. Фреше (1899 р.) і Д. Гільбертом (1909 р.). Г. фон Кох запропонував мономіальний підхід для дослідження аналітичних функцій на нескінченновимірних полідисках. Даний підхід було узагальнено Д. Гільбертом. М. Фреше у цей час розробив поняття похідної і полінома на дійсних і на комплексних нескінченновимірних просторах. Р. Гато проаналізував і узагальнив роботи М. Фреше і Д. Гільберта. Він дав означення комплексного полінома, похідної, згодом названої похідною за Гато, узагальнив інтегральну формулу Коші і нерівність Коші, довів теореми збіжності для аналітичних функцій, встановив відповідність між похідними аналітичної функції і однорідними поліномами у розкладі цієї функції у ряд Тейлора, а також отримав різноманітні результати щодо аналітичних продовжень і розкладів у степеневі ряди для нескінченновимірного випадку. Покращена версія означення однорідного полінома була дана В. Богненблустом і Е. Хілле (1931 р.), які займалися дослідженнями рядів Діріхле на нескінченновимірних просторах.

В 1923 році Н. Вінер зауважив, що інтегральну формулу Коші можна узагальнити на випадок аналітичних функцій від однієї комплексної змінної зі значеннями в банаховому просторі і у цьому випадку багато класичних результатів, таких, як теорема Морери, теорема Абеля і теорема про лишки, залишаються істинними.

В 1930-х роках інтенсивне вивчення аналізу і геометрії на абстрактних просторах було здійснено А. Д. Міхалом і його учнями Р. С. Мартіном, А. Х. Кліфордом, І. Е. Хайбергом і А. Е. Тейлором. В 1932 році Р. С. Мартін розробив теорію аналітичних відображень на банахових просторах із використанням степеневих рядів. Фінальний крок до сучасного означення аналітичного відображення був зроблений незалежно А. М. Грейвсом в 1935 році і А. Е. Тейлором в 1937 році. Львівська школа функціонального аналізу, включаючи С. Банаха, С. Мазура і В. Орліча, також зробила значний внесок у розвиток теорії у цей період.

В середині 1940-х років значний внесок у розвиток теорії зробив М. А. Цорн. Ж. Себастьяо е Сілва на початку 1950-х років розробив теорію диференціювання на довільних локально опуклих просторах. В кінці 1950-х — на початку 1960-х років Г. Х. Бремерманом було розпочато вивчення псевдоопуклих областей аналітичності. В 1960-х — 1970-х роках інтенсивний розвиток теорії відбувався завдяки таким математикам, як А. Дуаді, А. Картан, Г. Х. Бремерман, М. Ерве, П. Лелонг, А. Мартіну, Л. Нахбін, К. Стейн та інші.

Аналітичні функції на ядерних просторах і на просторах, спряжених до ядерних, вперше почав досліджувати Ф. Дж. Боланд в 1978 році. Цілковито ядерні простори із базисом вивчалися Ф. Дж. Боландом і Ш. Дініном у зв'язку із вивченням питання існування абсолютного базису простору цілих аналітичних функцій із топологією рівномірної збіжності на компактних множинах. A-ядерні простори було введено Ш. Дініном в 1982 році. Теорія A-ядерних просторів була розвинута у роботах Ф. Дж. Боланда і Ш. Дініна.

Н. В. Кує в 1984 році і Р. Мейсе, Д. Вогт в 1986 році розпочали дослідження властивостей алгебри Фреше $H_b(X)$ цілих аналітичних функцій обмеженого типу із топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах.

Зауважимо, що важливою задачею при дослідженні алгебр Фреше є опис спектра (множини всіх нетривіальних неперервних скалярнозначних гомоморфізмів алгебри або так званих характерів) алгебри. Завдяки перетворенню Гельфанда, елементи алгебри Фреше можна зобразити у вигляді неперервних функцій на спектрі, а саму алгебру Фреше — як підалгебру алгебри всіх неперервних функцій на спектрі. Якщо ж додатково вдається ввести на спектрі структуру аналітичного многовиду, то природно виникає питання про такі додаткові властивості функції на спектрі, яка є результатом перетворення Гельфанда, як диференційовність.

Вивчення спектрів алгебр аналітичних функцій обмеженого типу почалось з робіт Б. Коула, Т. Гамеліна 1986 року і Т. Корна, Б. Коула, Т. Гамеліна 1989 року. В цих роботах досліджено властивості алгебри аналітичних функцій на одиничній кулі спряженого простору, яка породжена $*$-слабко неперервними лінійними функціоналами. Р. Арон, Б. Коул і Т. Гамелін у своїй статті 1991 року займалися досліженням, зокрема, спектра алгебри цілих аналітичних функцій обмеженого типу на банаховому просторі. Автори дослідили топологію на спектрі, показавши, що ця топологія, в загальному випадку, не є лінійною. Також доведено "слабку версію теореми про корону для алгебри $H_b(X)$". Тобто, показано, що для довільного (не обов'язково неперервного) комплекснозначного гомоморфізму на алгебрі $H_b(X)$ існує напрямленість яка збігається до цього гомоморфізму у слабко поліноміальній топології. Зауважимо, що існування розривного комплекснозначного гомоморфізму на алгебрі Фреше (зокрема на $H_b(X)$) складає відому проблему Майкла, сформульовану Е. Майклом у 1952 році.

За допомогою перетворення Арона-Бернера кожен скалярнозначний поліном можна однозначно продовжити із банахового простору на другий спряжений простір зі збереженням норми. Для цілих аналітичних функцій обмеженого типу цей результат узагальнено А. Давіє і Т. Гамеліном в 1989 році. Р. Арон, Б. Коул і Т. Гамелін за допомогою даного результату показали, що кожен елемент простору X'' породжує характер на алгебрі $H_b(X)$.

Р. Арон, П. Галіндо, Д. Гарсія, М. Маестре в роботі 1996 року показали, що якщо на просторі X існує поліном, який не є слабко неперервним на обмежених множинах, то на алгебрі $H_b(X)$ існує характер, який не є породжений елементом простору X''.

Алгебри аналітичних функцій та їхні спектри досліджувались у роботах Ж. Мухіки. Зокрема, у своїй роботі 2001 року Ж. Мухіка досліджував умови, при яких всі характери алгебри аналітичних функцій обмеженого типу на деякій відкритій збалансованій множині банахового простору X породжуються значеннями в деякій точці цієї множини.

В 2006 році А. В. Загороднюком отримано опис спектра алгебри $H_b(X)$ у вигляді множини послідовностей лінійних неперервних функціоналів на тензорних степенях простору X.

Вивчення симетричних поліномів відносно дії групи підстановок на базисних векторах в ℓ_p та відносно дії групи вимірних автоморфізмів множини $[0,1]$ в просторі $L_p[0,1]$ було започатковано А. С. Немировським і С. М. Семеновим в їхній статті 1973 року, де, зокрема, показано, що кожен неперервний симетричний поліном на просторі ℓ_p можна єдиним чином подати у вигляді алгебраїчної комбінації (лінійної комбінації добутків) так званих елементарних симетричних поліномів. Аналогічний результат встановлено для неперервних симетричних поліномів на просторі $L_p[0,1]$. Ці результати було узагальнено М. Гонзалезом, Р. Гонзало і Х. Харамілло в їхній роботі 1999 року для просторів з симетричним базисом та переставно-інваріантних просторів.

Алгебри симетричних аналітичних функцій на просторах ℓ_p почали вивчатися Р. Аленкаром, Р. Ароном, П. Галіндо, А. В. Загороднюком в їхній роботі 2003 року. Зокрема, в цій роботі досліджено алгебри симетричних аналітичних функцій, які є рівномірно неперервними на одиничній кулі простору ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, описано спектр такої алгебри. В серії робіт, П. Галіндо, А. В. Загороднюком та І. В. Чернегою досліджено алгебру $H_{bs}(\ell_p)$ симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторах ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, та алгебру симетричних аналітичних функцій на полідиску простору ℓ_1, досліджено оператори симетричного зсуву алгебри $H_{bs}(\ell_1)$ та показано, що спектр цієї алгебри можна описати у вигляді мультиплікативної підгрупи в алгебрі аналітичних функцій експоненціального типу, розглянуто алгебраїчні структури на спектрі алгебри $H_{bs}(\ell_1)$ та досліджено оператори мультиплікативного зсуву цієї алгебри. Так звані блочно-симетричні поліноми і аналітичні функції на просторах ℓ_p, інваріантні відносно перестановок блоків координат аргументу, досліджувалися в роботах В. В. Кравців.

Загальний підхід до вивчення симетричних аналітичних функцій на банахових просторах було представлено Р. Ароном, П. Галіндо, Д. Пінаско, І. Залдуеньйо в їхній роботі 2016 року, де вивчалися аналітичні функції на банаховому просторі, які є інваріантними відносно дії певної фіксованої групи лінійних операторів на просторі. Спектри алгебр симетричних аналітичних функцій на банахових просторах вивчалися Д. Гарсією, М. Маестре, І. Залдуеньйо в їхній роботі 2019 року. Також симетричні аналітичні функції від скінченної кількості змінних вивчалися Р. Ароном, Д. Гарсією, Х. Фалко і М. Маестре в 2018 р. В тому ж році питання віддільності точок симетричними (інваріантними відносно дії групи операторів) поліномами від скінченної кількості змінних вивчалися Р. Ароном, Х. Фалко і М. Маестре.

В аналізі природним чином виникають також функції, які не є аналітичними, але є диференційовними у дійсному сенсі. Наприклад, у комплексній версії теореми Стоуна-Вейєрштрасса стверджується, що довільну неперервну комплекснозначну функцію, задану на компакті, можна рівномірно наблизити функціями, отриманими зі змінних скінченною кількістю операцій додавання, множення, взяття комплексного спряження і множення на комплексні скаляри. Такі функції, у загальному випадку, не є аналітичними, проте вони є диференційовними у дійсному сенсі. Прикладами таких функцій у нескінченновимірному нелінійному аналізі є так звані $*$-поліноми, які вперше було введено (без назви) Ж. Мухікою. М. А. Митрофанов в 2009 році досліджував апроксимаційні властивості $*$-поліномів і побудував $*$-поліном на комплексному просторі ℓ_2, який не можна рівномірно наблизити елементами алгебри, породженої поліномами і комплексно спряженими до поліномів функціями. У цьому, зокрема, полягає різниця між нескінченновимірним і скінченновимірним випадками. Із даного прикладу випливає, що $*$-поліномами можна рівномірно наблизити більшу кількість неперервних функцій, ніж елементами алгебри, породженої поліномами і функціями, комплексно спряженими до поліномів, у випадку функцій на просторі ℓ_2.

У дисертаційній роботі продовжено дослідження спектрів алгебр аналітичних функцій на банахових просторах та інших пов'язаних з ними алгебр. Зокрема, досліджено алгебри функцій з додатковими властивостями симетричності на банахових просторах з симетричною структурою. Тому тема дисертації є важливою і актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження виконувались у рамках науково-дослідних держбюджетних тем “Розробка аналітичних методів у нескінченновимірному комплексному аналізі та теорії операторів” (номер державної реєстрації 0113U000184), “Гомоморфізми та функціональне числення в алгебрах аналітичних функцій на банахових просторах” (номер державної реєстрації 0115U002305), “Дослідження аналітичних структур у спектрі алгебр голоморфних функцій банахового простору та в обернених спектральних задачах” (номер державної реєстрації 0116U003562) кафедри математичного і функціонального аналізу факультету математики та інформатики ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”, а також, у рамках науково-дослідної роботи “Дослідження симетричних функцій на деяких банахових просторах” (номер державної реєстрації 0119U103204) за підтримки Гранту Президента України для молодих вчених.

Мета і задачі дослідження. Метою дослідження є вивчення властивостей алгебр неперервних поліномів із деякими додатковими властивостями симетрії, визначених на банахових просторах, опис спектрів алгебр Фреше аналітичних та диференційовних функцій, породжених вказаними підалгебрами поліномів, зображення цих алгебр Фреше як алгебр аналітичних та диференційовних функцій на їхніх спектрах.

Об'єктом дослідження є алгебри неперервних поліномів і $*$-поліномів на банахових просторах, симетричні функції на банахових просторах вимірних за Лебегом функцій, симетричні функції на банахових просторах послідовностей, симетричні функції на декартових степенях банахових просторів вимірних за Лебегом функцій, спектри алгебр Фреше функцій на банахових просторах.

Предметом дослідження є властивості алгебр неперервних поліномів і $*$-поліномів на банахових просторах, структури спектрів алгебр Фреше функцій на банахових просторах.

Задачі дослідження:

- Побудувати алгебраїчний базис алгебри всіх симетричних неперервних комплекснозначних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку;

- Описати спектр (множину нетривіальних неперервних комплекснозначних гомоморфізмів) алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку і зобразити дану алгебру Фреше як алгебру аналітичних функцій на спектрі;

- Дослідити алгебри симетричних і скінченно-симетричних неперервних поліномів і аналітичних функцій на комплексному банаховому просторі всіх обмежених послідовностей комплексних чисел;

- Побудувати алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх послідовностей n-вимірних комплексних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня p, є збіжним, де $1 \leq p < +\infty$;

- Дослідити алгебри симетричних і скінченно-симетричних неперервних поліномів і аналітичних функцій на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі;

- Побудувати алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі і дослідити алгебру Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цьому просторі;
- Побудувати алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на об'єднанні просторів Лебега-Рохліна із неперервними мірами;
- Побудувати алгебраїчні базиси алгебр всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартових степенях комплексних банахових просторів всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом у степені p, де $1 \leq p < +\infty$, функцій на відрізку і на півосі, описати спектри алгебр Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цих декартових степенях і зобразити дані алгебри Фреше як алгебри аналітичних функцій на їхніх спектрах;
- Побудувати алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому степені комплексного банахового простору всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку, описати спектр алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цьому декартовому степені;
- Побудувати алгебраїчний базис алгебри всіх дійснозначних симетричних неперервних поліномів на дійсному банаховому просторі всіх по-

слідовностей n-вимірних дійсних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня p, є збіжним, де $1 \leq p < +\infty$;

- Дослідити алгебри симетричних неперервних $*$-поліномів на скінченновимірному комплексному просторі;
- Побудувати алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних $*$-поліномів на комплексному банаховому просторі всіх послідовностей n-вимірних дійсних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня p, є збіжним, де $1 \leq p < +\infty$;
- Побудувати і дослідити властивості операторів зсуву на алгебрі Фреше функцій, яка є поповненням алгебри всіх неперервних комплекснозначних $*$-поліномів на довільному комплексному банаховому просторі;
- Побудувати алгебраїчний базис алгебри всіх дійснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому степені дійсного банахового простору всіх дійснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку;
- Описати спектр алгебри Фреше, яка є поповненням алгебри всіх дійснозначних симетричних неперервних поліномів на дійсному банаховому просторі всіх дійснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку.

Методи дослідження. У роботі використано методи теорії алгебр Фреше, теорії випадкових збіжних рядів, теорії ядерних просторів.

Наукова новизна отриманих результатів. Усі результати дисертаційної роботи є новими і полягають у такому:

— побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх симетричних неперервних комплекснозначних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку;

— описано спектр алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку;

— зображено алгебру Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку як алгебру аналітичних функцій на спектрі, який ототожено із сильним спряженим простором до простору Фреше всіх цілих аналітичних функцій від однієї комплексної змінної;

— показано, що кожен комплекснозначний неперервний симетричний поліном на комплексному банаховому просторі ℓ_∞ всіх обмежених послідовностей комплексних чисел обов'язково є сталим відображенням;

— показано, що алгебра Фреше всіх комплекснозначних скінченно-симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному просторі ℓ_∞ є ізоморфною до алгебри Фреше всіх комплекснозначних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на фактор-просторі ℓ_∞/c_0, де c_0 — це комплексний банахів простір всіх збіжних до нуля послідовностей комплексних чисел;

— побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх послідовностей n-вимірних комплексних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня p, є збіжним, де $1 \leq p < +\infty$;

— показано, що кожен комплекснозначний неперервний симетричний поліном на комплексному банаховому просторі $L_\infty[0, +\infty)$ всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі обов'язково є сталим відображенням;

— показано, що алгебра Фреше всіх комплекснозначних скінченно-симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному просторі $L_\infty[0, +\infty)$ є ізоморфною до алгебри Фреше всіх комплекснозначних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на фактор-просторі $L_\infty[0, +\infty)/M_0$, де M_0 — це замикання у просторі $L_\infty[0, +\infty)$ підпростору всіх простих вимірних функцій із обмеженими носіями;

— побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі і показано, що алгебра Фреше комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цьому просторі ізоморфна до алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку;

— побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на об'єднанні просторів Лебега-Рохліна із неперервними мірами;

— побудовано скінченні алгебраїчні базиси алгебр всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартових степенях комплексних банахових просторів всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом у степені p, де $1 \leq p < +\infty$, функцій на відрізку і на півосі, описано спектри алгебр Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цих декартових степенях і зображено дані алгебри Фреше як алгебри аналітичних функцій від скінченної кількості комплексних змінних;

— побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому степені комплексного банахового простору всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку, описано спектр алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цьому декартовому степені;

— побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх дійснозначних симетричних неперервних поліномів на дійсному банаховому просторі всіх послідовностей n-вимірних дійсних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня p, є збіжним, де $1 \leq p < +\infty$;

— побудовано формули для відновлення (p, q)-поліноміальних компонент $*$-поліномів, які діють між комплексними лінійними просторами, за значеннями $*$-поліномів. Ці формули використано для досліджень симетричних $*$-поліномів, які діють з $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}$. Показано, що кожен такий $*$-поліном можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації деяких “елементарних” симетричних $*$-поліномів;

— побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних $*$-поліномів на комплексному банаховому просторі всіх послідовностей n-вимірних комплексних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня p, є збіжним, де $1 \leq p < +\infty$;

— побудовано і досліджено властивості операторів зсуву на алгебрі Фреше функцій, яка є поповненням алгебри всіх неперервних комплекснозначних $*$-поліномів на довільному комплексному банаховому просторі;

— побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх дійснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому степені дійсного банахового простору всіх дійснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку;

— описано спектр алгебри Фреше, яка є поповненням алгебри всіх дійснозначних симетричних неперервних поліномів на дійсному банаховому просторі всіх дійснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку і показано, що ця алгебра містить неаналітичні функції.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Її результати можуть бути використані в теорії аналітичних функцій на банахових просторах, теорії гладких функцій на банахових просторах, теорії алгебр Фреше, теорії поліномів на банахових просторах.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертації, що виносяться на захист, отримано автором самостійно. У статті [5] М. М. Струтинському належать теорема 1 і наслідок 1. У статті [58] П. Галіндо належать наслідок 4.8 і твердження 5.1, А. В. Загороднюку належать наслідок 5.5, наслідок 6.1 і теорема 6.2. У статті [59] П. Галіндо належить лема 6.2, А. В. Загороднюку належить твердження 4.2. У статті [60] П. Галіндо належить теорема 4.1, А. В. Загороднюку належать твердження 4.2, наслідок 4.3 і наслідок 4.4. У статті [82] А. В. Загороднюку і В. В. Кравців належить теорема 8. У статті [124] А. В. Загороднюку належать твердження 3.1 і твердження 3.3. Крім цього, у статтях [58], [59], [60], [82], [124], [125] А. В. Загороднюку належать постановки задач та аналіз отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на:

— Дев'ятій літній школі “Алгебра, топологія і аналіз” (Поляниця, 7–18 липня 2014 р.);

— Четвертій міжнародній ганській конференції, присвяченій 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 30 червня – 5 липня 2014 р.);

— Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми теорії ймовірностей і математичного аналізу” (Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2015 р.);

— Всеукраїнській науковій конференції, присвяченій 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу “Прикладні задачі математики” (Івано-Франківськ, 13–15 жовтня 2016 р.);

— Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.);

— Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми механіки та математики” присвяченій 90-річчю від дня народження академіка НАН України Я. С. Підстригача та 40-річчю створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН України (Львів, 22–25 травня 2018 р.);

— Шостій всеукраїнській математичній конференції “Нелінійні проблеми аналізу” імені Б. В. Василишина (Микуличин, 26–28 вересня 2018 р.);

— Міжнародній конференції з функціонального аналізу, присвяченій 125 річниці від дня народження Стефана Банаха (Львів, 18–23 вересня 2017 р.);

— Конференції із нелінійного функціонального аналізу (Валенсія, Іспанія, 17–20 жовтня 2017 р.);

— Міжнародній науковій конференції “Банахові простори та їх застосування”, присвяченій 70-річчю проф. А. М. Плічка (Львів, 26–29 червня 2019 р.);

— Міжнародній конференції “Теорія Морса та її застосування”, присвяченій пам’яті і 70 річниці з дня народження Володимира Шарка (Київ, 25–28 вересня 2019 р.);

— Одинадцятій міжнародній математичній конференції імені В. Скоробогатька (Львів, 26–30 жовтня 2020 р.);

а також на:

— науковому семінарі із теорії аналітичних функцій Державної школи вищої освіти в Хелмі (Хелм, Республіка Польща);

— науковому семінарі з функціонального аналізу Жешувського університету (Жешув, Республіка Польща, керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. О. В. Лопушанський);

— науковому семінарі з функціонального аналізу Краківської політехніки імені Тадеуша Костюшка (Краків, Республіка Польща, керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. А. М. Плічко);

— науковому семінарі з функціонального аналізу Університету Валенсії (Валенсія, Іспанія);

— науковому семінарі відділу аналізу, геометрії та топології Інситуту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (Львів);

— Західноукраїнському математичному семінарі (керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. Т. О. Банах);

— науковому семінарі факультету математики та інформатики ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника";

— наукових семінарах кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника";

— засіданнях Наукового товариства імені Т. Г. Шевченка.

Публікації. Результати дисертації опубліковано у 36 друкованих працях, серед яких: 23 статті у вітчизняних та закордонних фахових наукових виданнях [1], [2], [3], [4], [5], [58], [59], [60], [82], [106], [107], [108], [109], [110], [111], [112], [113], [114], [115], [116], [117], [124], [125], решта у матеріалах міжнародних та всеукраїнських наукових конференцій [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [118], [119], [120], [121], [122]; 17 статей опубліковано у виданнях, проіндексованих у базах даних Scopus та/або Web of Science Core Collection [58], [59], [60], [82], [106], [107], [108], [110], [111], [112], [113], [114], [115], [116], [117], [124], [125].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків. Повний обсяг роботи становить 309 сторінок друкованого тексту. Список використаних джерел займає 13 сторінок і містить 132 найменування. Додатки займають 5 сторінок і містять список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

У цьому розділі наведено необхідний теоретичний матеріал. Зроблено огляд результатів досліджень, які стосуються теми дисертації. Усі поняття і твердження, які не належать автору, наведено із зазначенням авторства і відповідного посилання на джерело.

1.1. Огляд літератури

Перші визначальні кроки у створенні нескінченновимірної теорії диференціювання були зроблені В. Вольтерра (1887 р.), Г. фон Кохом (1899 р.), М. Фреше (1899 р.) і Д. Гільбертом (1909 р.). Г. фон Кох [77] запропонував мономіальний підхід для дослідження аналітичних функцій на нескінченновимірних полідисках. Даний підхід було узагальнено Д. Гільбертом. М. Фреше [54,55] у цей час розробив поняття похідної і полінома на дійсних і на комплексних нескінченновимірних просторах. Р. Гато [63–65] проаналізував і узагальнив роботи М. Фреше і Д. Гільберта. В роботах [63,64] Р. Гато дав означення комплексного полінома, похідної, згодом названої похідною за Гато, узагальнив інтегральну формулу Коші і нерівність Коші, довів теореми збіжності для аналітичних функцій, встановив відповідність між похідними аналітичної функції і однорідними поліномами у розкладі цієї функції у ряд Тейлора, а також отримав різноманітні результати щодо аналітичних продовжень і розкладів у степеневі ряди для нескінченновимірного випадку. Дослідження Р. Гато в основному зосереджені на просторах $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, C[a,b]$ і ℓ_2. Покращена версія означення однорідного полінома була дана В. Богненблустом і Е. Хілле в [32], які займалися дослідженнями рядів Діріхле на нескінченновимірних просторах.

В 1920 році С. Банах у своїй дисертації описав аксіоми повного нормованого лінійного простору, згодом названого банаховим. В 1923 році Н. Вінер, який на три місяці пізніше від С. Банаха сформулював ті самі аксіоми, зауважив, що інтегральну формулу Коші можна узагальнити на випадок векторнозначних аналітичних функцій від однієї комплексної змінної і у цьому випадку багато класичних результатів, таких, як теорема Морери, теорема Абеля і теорема про лишки, залишаються істинними.

В 1930-х роках інтенсивне вивчення аналізу і геометрії на абстрактних просторах було здійснено А. Д. Міхалом і його учнями Р. С. Мартіном, А. Х. Кліфордом, І. Е. Хайбергом і А. Е. Тейлором. В 1932 році Р. С. Мартін [86] розробив теорію аналітичних відображень на банахових просторах із використанням степеневих рядів. Фінальний крок до сучасного означення аналітичного відображення був зроблений незалежно А. М. Грейвсом [69] і А. Е. Тейлором [102, 103]. Львівська школа функціонального аналізу, включаючи С. Банаха, С. Мазура і В. Орліча, також зробила значний внесок у розвиток теорії у цей період.

В середині 1940-х років значний вклад у розвиток теорії зробив М. А. Цорн [130–132]. Ж. Себастьяо е Сілва [98, 99] на початку 1950-х років розробив теорію диференціювання на довільних локально опуклих просторах. В кінці 1950-х — на початку 1960-х років Г. Х. Бремерманом було розпочато вивчення псевдоопуклих областей аналітичності. Середина 1960-х років ознаменувалася виходом дисертації А. Дуаді [52]. Ш. Дінін у своїй монографії [48] пише: “Той факт, що Дуаді використовував у своїй дисертації аналітичні функції на нескінченновимірних банахових просторах, привернув увагу таких відомих математиків, як А. Картан, Г. Х. Бремерман, М. Ерве, П. Лелонг, А. Мартіну, Л. Нахбін, К. Стейн і мотивував їх спрямовувати їхніх учнів до вивчення нескінченновимірної аналітичності. Це призвело до бурхливого розвитку теорії”.

Аналітичні функції на ядерних просторах і на просторах, спряжених до ядерних, вперше почав досліджувати Ф. Дж. Боланд, який у роботі [34] довів, що топологічний векторний простір $(H(X), \tau_0)$ цілих аналітичних функцій на просторі X, де τ_0 — це топологія рівномірної збіжності на компактних множинах простору X, є ядерним, якщо простір X є квазіповним спряженим ядерним простором. Цілковито ядерні простори із базисом вивчалися Ф. Дж. Боландом і Ш. Дініном [35,36] у зв'язку із вивченням питання існування абсолютного базису простору $(H(X), \tau_0)$. A-ядерні простори було введено Ш. Дініном [50]. Теорія A-ядерних просторів була розвинута у роботах [37, 38, 49].

Алгебра $H_b(X)$ цілих аналітичних функцій обмеженого типу (обмежежених на обмежених множинах) і алгебра $H_{ub}(X)$ цілих аналітичних функцій рівномірно обмеженого типу (таких функцій f, для яких існує окіл нуля V, що функція f є обмеженою на множині αV для кожного $\alpha > 0$) вивчалися з точки зору їхньої структури, як топологічних векторних просторів, у роботах [56], [76] і [88, твердження 4.1]. Якщо X є банаховим простором, то $H_b(X)$ із топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах є локально мультиплікативно опуклою алгеброю Фреше і, як наслідок, має менш складну топологічну векторну структуру від структур, які вводять на алгебрі $H(X)$ всіх цілих аналітичних функцій. Відповідно, вивчення властивостей алгебри $H_b(X)$ може служити сходинкою до вивчення відповідних властивостей алгебри $H(X)$. Зауважимо, що функція на сепарабельному гільбертовому просторі, задана як $f((x_1, x_2, \ldots)) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^n$, є цілою аналітичною функцією на всьому просторі, але є необмеженою на кожній кулі радіуса, більшого від 1, з центром в нулі. У відомій теоремі Джозефсона-Нізенцвейга, доведеній даними авторами незалежно, стверджується: якщо X є нескінченновимірним банаховим простором, то існує $*$-слабко збіжна до нуля послідовність елементів з одиничними нормами простору X'. Відповідно, Б. Джозефсон [74] на основі даної теореми побудував приклад функції, яка належить алгебрі $H(X)$, але не належить алгебрі $H_b(X)$, для довільного нескінченновимірного банахового простору X, замінивши у прикладі, наведеному вище, координату x_n на n-тий член послідовності функціоналів. Таким чином, алгебра $H_b(X)$ є власною підалгеброю алгебри $H(X)$ для кожного нескінченновимірного банахового простору X.

Питання про продовжуваність поліномів з підпростору на ширший простір розглядалось у роботі Р. Арона і П. Бернера [20]. Виявляється, що в загальному випадку, для неперервного полінома на підпросторі банахового простору може не існувати продовження на увесь простір. Проте кожен скалярнозначний поліном можна однозначно продовжити на другий спряжений простір зі збереженням норми. Для цілих аналітичних функцій обмеженого типу цей результат узагальнено А. Давіє і Т. Гамеліном в [46].

Проблема продовжуваності поліномів і полілінійних відображень з банахового простору на ширший простір також досліджувалась в роботах [21], [91], [129] та інших. Ця проблема має відношення до опису спектрів (множин нетривіальних комплекснозначних неперервних гомоморфізмів) алгебр аналітичних функцій на комплексних банахових просторах. Справді, якщо $\widetilde{f}$ — продовження Арона-Бернера аналітичної функції $f \in H_b(X)$ до другого спряженого простору, то будь-яка точка $z \in X''$ породжує характер (елемент спектра) φ_z на $H_b(X)$ за формулою $\varphi_z(f) = \widetilde{f}(z)$.

Вивчення спектрів алгебр аналітичних функцій обмеженого типу почалось з робіт Б. Коула, Т. Гамеліна [45] і Т. Корна, Б. Коула, Т. Гамеліна [40]. Зокрема, у роботі [40] досліджено властивості алгебри аналітичних функцій на одиничній кулі спряженого простору, яка породжена $*$-слабко неперервними лінійними функціоналами. Суттєве просування у цьому напрямку відбулось після публікації статті Р. Арона, Б. Коула і Т. Гамеліна [22]. У цій роботі досліджується, зокрема, спектр алгебри цілих аналітичних функцій обмеженого типу на банаховому просторі. Автори дослідили топологію на спектрі, показавши, що ця топологія, в загальному випадку, не є лінійною (див. також [31]). Також, у [22] доведено "слабку версію теореми про корону для $H_b(X)$". Тобто, показано, що для довільного (не обов'язково неперервного) комплекснозначного гомоморфізму φ на алгебрі $H_b(X)$ існує напрямленість $(x_\alpha) \subset X$, яка збігається до φ у слабко поліноміальній топології. Тобто, для кожного неперервного полінома P, $P(x_\alpha) \to \varphi(P)$. Зауважимо, що існування розривного комплекснозначного гомоморфізму на алгебрі Фреше (зокрема на $H_b(X)$) складає відому проблему Майкла [89] (див. також [51]). У [92, с. 240] Ж. Мухіка показав, що всі комплекснозначні гомоморфізми на довільній алгебрі Фреше є неперервними тоді і тільки тоді, коли існує нескінченновимірний банахів простір X з базисом Шаудера такий, що всі комплекснозначні гомоморфізми на алгебрі $H_b(X)$ є неперервними. Зауважимо також, що в [57] побудовано розривний комплекснозначний гомоморфізм на алгебрі поліномів на довільному нескінченновимірному банаховому просторі (алгебра поліномів не є алгеброю Фреше). У роботі [22] та наступній статті цих авторів [23] доведено, що якщо поліноми скінченного типу (які є лінійними комбінаціями добутків лінійних неперервних функціоналів) є щільними в алгебрі $H_b(X)$, то спектр алгебри $H_b(X)$ збігається із простором X''. В роботі [26] Р. Арон, П. Галіндо, Д. Гарсія, М. Маестре показали, що якщо на просторі X існує поліном, який не є слабко неперервним на обмежених множинах, то на алгебрі $H_b(X)$ існує характер, який не належить простору X''. Зауважимо, що кожен апроксимаційний поліном (поліном, який наближається поліномами скінченного типу) є слабко неперервним на обмежених множинах. Правильно і навпаки, якщо простір X' має властивість апроксимації. Точніше, простір X' має властивість апроксимації тоді і тільки тоді, коли простір апроксимаційних поліномів з X в Y збігається з простором слабко неперервних поліномів з X в Y для довільного банахового простору Y [28]. Також в роботі [22] введено операцію згортки для характерів алгебри $H_b(X)$ та досліджено умови, при яких ця згортка буде комутативною. Ці дослідження продовжено в роботі [26].

Алгебри аналітичних функцій та їхні спектри досліджувались у роботах Ж. Мухіки. У роботі [93] розглянуто питання лінеаризації аналітичних функцій, тобто зображення аналітичних функцій у вигляді лінійних функціоналів на деяких топологічних векторних просторах. У роботі [94] досліджувались умови, при яких всі характери алгебри аналітичних функцій обмеженого типу на деякій відкритій збалансованій множині банахового простору X породжуються значеннями в деякій точці цієї множини. Зокрема, доведено, що якщо простір X' має властивість апроксимації, то для цього необхідно і достатньо, щоб простір X був рефлексивним і поліноми скінченного типу були щільними в множині всіх неперервних поліномів. Також показано, що при згаданих умовах на простір X, в алгебрі аналітичних функцій обмеженого типу виконується теорема Гільберта про нулі для скінченнопороджених ідеалів. Прикладом нескінченновимірного банахового простору, для якого виконуються ці умови, є простір Цірельсона, введений у [104].

В роботах [127,128] А. В. Загороднюк показав, що кожен характер алгебри $H_b(X)$ можна подати у вигляді послідовності лінійних функціоналів $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ таких, що кожен функціонал u_k належить до банахового простору E_k, де $E_1 = X''$ і E_n збігається із деяким підпростором спряженого простору до простору n-однорідних неперервних поліномів $\mathcal{P}(^n X)$ на просторі X для $n \geq 2$. Більш детально, для $n \in \mathbb{N}$ позначимо $A_n(X)$ замикання алгебри, породженої поліномами степеня, не більшого від n, в алгебрі $H_b(X)$. Зауважимо, що $A_1(X) \subset A_2(X) \subset \ldots$ Для $n \geq 2$ нехай E_n — це простір всіх лінійних неперервних функціоналів на просторі $\mathcal{P}(^n X)$, звуження яких на простір $\mathcal{P}(^n X) \cap A_{n-1}(X)$ є тотожним нулем. Відомо, що $A_1(c_0) = A_2(c_0) = \ldots$ Звідси, зокрема, випливає, що спектр алгебри $H_b(c_0)$ збігається із другим спряженим простором до простору c_0, тобто із простором ℓ_∞. Також відомо, що $A_k(\ell_p) = A_m(\ell_p)$ тоді і лише тоді, коли $k < p$ і $m < p$. Зокрема, $A_k(\ell_1) \neq A_m(\ell_1)$, якщо $k \neq m$. Наприклад, так звані елементарні симетричні поліноми $F_k : \ell_1 \to \mathbb{C}$, визначені рівністю

$$F_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^k,$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_1$, є такими, що $F_k \in A_k(\ell_1) \setminus A_{k-1}(\ell_1)$ для $k \geq 2$.

Вивчення симетричних поліномів відносно дії групи підстановок на базисних векторах в ℓ_p та відносно дії групи вимірних автоморфізмів множини $[0, 1]$ в просторі $L_p[0, 1]$ було започатковано А. С. Немировським і

С. М. Семеновим в статті [95], де, зокрема, показано, що кожен неперервний симетричний поліном на просторі ℓ_p можна єдиним чином подати у вигляді алгебраїчної комбінації (лінійної комбінації добутків) елементарних симетричних поліномів F_k, де $k \in \{\lceil p \rceil, \lceil p \rceil + 1, \ldots\}$ визначених попередньою рівністю (строго кажучи, продовжень цих поліномів на простір ℓ_p, визначених цією ж рівністю). Також в [95] показано, що кожен неперервний симетричний поліном на просторі $L_p[0,1]$ можна єдиним чином подати у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів

$$R_k : L_p[0,1] \ni x \mapsto \int_{[0,1]} (x(t))^k \, dt,$$

де $k \in \{1, \ldots, \lfloor p \rfloor\}$. Ці результати було узагальнено М. Гонзалезом, Р. Гонзало і Х. Харамілло в [67] для просторів з симетричним базисом та переставно інваріантних просторів. Зокрема, в [67] вивчалися симетричні поліноми відносно дії групи вимірних автоморфізмів множини $[0, +\infty)$ в просторі $L_p[0, +\infty)$. Було показано, що якщо $p \notin \mathbb{N}$, то існують лише сталі неперервні симетричні поліноми на просторі $L_p[0, +\infty)$, а якщо $p \in \mathbb{N}$, то кожен неперервний симетричний поліном на просторі $L_p[0, +\infty)$ можна єдиним чином подати у вигляді лінійної комбінації степенів полінома

$$\tilde{R}_p : L_p[0, +\infty) \ni x \mapsto \int_{[0,+\infty)} (x(t))^p \, dt.$$

Зауважимо, що в [95] вперше розглядається питання про стабілізацію алгебр A_n і показано, що для просторів ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, ланцюг таких алгебр не стабілізується. Цей результат уточнено в [68].

Алгебри симетричних аналітичних функцій на просторах ℓ_p почали вивчатися Р. Аленкаром, Р. Ароном, П. Галіндо, А. В. Загороднюком в роботі [17]. Зокрема, в роботі [17] досліджено алгебри симетричних аналітичних функцій, які є рівномірно неперервними на одиничній кулі простору ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, описано спектр такої алгебри. У [41] досліджено алгебру $H_{bs}(\ell_p)$ симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторах ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ та алгебру симетричних аналітичних функцій на полідиску простору ℓ_1. В роботі [42] досліджено оператори симетричного зсуву алгебри $H_{bs}(\ell_1)$ та показано, що спектр цієї алгебри можна описати у вигляді мультиплікативної підгрупи в алгебрі аналітичних функцій експоненціального типу. В роботі [43] розглянуто алгебраїчні структури на спектрі алгебри $H_{bs}(\ell_1)$ та досліджено оператори мультиплікативного зсуву цієї алгебри. Див. також огляд [44] стосовно симетричних аналітичних функцій на просторах ℓ_p. Так звані блочно-симетричні поліноми і аналітичні функції на просторах ℓ_p, інваріантні відносно перестановок блоків координат аргументу, досліджувалися в роботах [79–81, 83, 84].

Загальний підхід до вивчення симетричних аналітичних функцій на банахових просторах було представлено Р. Ароном, П. Галіндо, Д. Пінаско, І. Залдуеньйо в роботі [27], де вивчалися аналітичні функції на банаховому просторі, які є інваріантними відносно дії певної фіксованої групи лінійних операторів на просторі. Спектри алгебр симетричних аналітичних функцій на банахових просторах вивчалися Д. Гарсією, М. Маестре, І. Залдуеньйо в роботі [62]. Також симетричні аналітичні функції від скінченної кількості змінних вивчалися Р. Ароном, Д. Гарсією, Х. Фалко, М. Маестре в роботі [24]. Питання віддільності точок симетричними (інваріантними відносно дії групи операторів) поліномами від скінченної кількості змінних вивчалися Р. Ароном, Х. Фалко, М. Маестре в роботі [25].

Наступним питанням, яке пов'язане з алгебрами аналітичних функцій є проблема існування структури аналітичного многовиду на спектрі довільної банахової алгебри та алгебри Фреше. Це питання є важливим і активно досліджувалось багатьма авторами у випадку скінченновимірних аналітичних структур. Детальніше з цього приводу можна дізнатись з огляду [78], див. також [29] та [101]. Абстрактні аналітичні многовиди над локально опуклими просторами вивчаються у другій частині монографії П. Мазе [87]. У [26] описано деяку нескінченновимірну аналітичну структуру на спектрі алгебри аналітичних функцій обмеженого типу на відкритих областях для симетрично регулярних за Аренсом просторів. Поняття регулярного простору (алгебри) було введено Р. Аренсом у [18] і досліджувалось в [66] та [105].

Детальніше з сучасним станом досліджень у теорії аналітичних і полілінійних відображень на банахових просторах можна ознайомитись в монографіях та оглядових статтях [19], [39], [47], [48], [61], [70], [71], [72], [92].

В аналізі природним чином виникають також функції, які не є аналітичними, але є диференційовними у дійсному сенсі. Наприклад, у комплексній версії теореми Стоуна-Вейєрштрасса стверджується, що довільну неперервну комплекснозначну функцію, задану на компакті, можна рівномірно наблизити функціями, отриманими зі змінних скінченною кількістю операцій додавання, множення, взяття комплексного спряження і множення на комплексні скаляри. Такі функції, у загальному випадку, не є аналітичними, проте вони є диференційовними у дійсному сенсі. Прикладами таких функцій у нескінченновимірному нелінійному аналізі є так звані $*$-поліноми, які вперше було введено (без назви) у монографії [92]. В роботі [90] досліджувалися апроксимаційні властивості $*$-поліномів. Також в цій роботі показано, що наступний $*$-поліном, заданий на комплексному просторі ℓ_2,

$$\ell_2 \ni (x_1, x_2, \ldots) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{x}_n \in \mathbb{C}$$

не можна рівномірно наблизити елементами алгебри, породженої поліномами і комплексно спряженими до поліномів функціями. У цьому, зокрема, полягає різниця між нескінченновимірним і скінченновимірним випадками. Із даного прикладу випливає, що $*$-поліномами можна рівномірно наблизити більшу кількість неперервних функцій, ніж елементами алгебри, породженої поліномами і функціями, комплексно спряженими до поліномів, у випадку функцій на просторі ℓ_2.

1.2. Попередні відомості

Позначимо $\mathbb{N}$ множину всіх додатних цілих чисел і $\mathbb{Z}_+$ множину всіх невід'ємних цілих чисел. Позначимо $\mathcal{S}$ множину всіх бієкцій $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Для $n \in \mathbb{N}$, позначимо $\mathcal{S}_n$ множину всіх бієкцій $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.

1.2.1. Поліноми

Нехай X і Y — це лінійні простори над полями $\mathbb{K}_1$ і $\mathbb{K}_2$ відповідно, такими, що $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2$ і $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2 \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Відображення $A : X^m \to Y$, де $m \in \mathbb{N}$, називають *m-лінійним відображенням*, якщо відображення A є лінійним відносно кожного зі своїх m аргументів (часто використовують терміни "полілінійне відображення", якщо не уточнено число m). m-Лінійне відображення, яке є інваріантним відносно перестановок своїх аргументів, називають *симетричним*. Для m-лінійного відображення $A : X^m \to Y$ визначимо відображення $A^{(s)} : X^m \to Y$ формулою:

$$A^{(s)}(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_m} A\big(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(m)}\big),$$

де $x_1, \ldots, x_m \in X$. Відображення $A^{(s)}$ є симетричним і m-лінійним. Це відображення називають *симетризацією* відображення A. Відображення $P : X \to Y$ називають *m-однорідним поліномом*, якщо існує m-лінійне відображення $A : X^m \to Y$ таке, що відображення P є звуженням на діагональ відображення A, тобто

$$P(x) = A(\underbrace{x, \ldots, x}_{m})$$

для кожного $x \in X$. Зауважимо, що відображення P також є звуженням на діагональ відображення $A_P := A^{(s)}$, яке є симетризацією відображення A. Відображення A_P називають симетричним m-лінійним відображенням, *асоційованим* з m-однорідним поліномом P. Згідно із [92, теорема 1.10, с. 6], відображення A_P можна відновити за значеннями m-однорідного полінома

P за допомогою формули:

$$A_P(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{2^m m!} \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m = \pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m P(\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_m x_m), \qquad (1.1)$$

яку називають поляризаційною формулою. Також будемо використовувати поліноміальну формулу (див. [92, теорема 1.8, с. 5]):

$$P(x_1 + \ldots + x_k) =$$
$$= \sum_{n_1 + \ldots + n_k = n} \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} A_P(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{n_1}, \underbrace{x_2, \ldots, x_2}_{n_2}, \ldots, \underbrace{x_k, \ldots, x_k}_{n_k}) \qquad (1.2)$$

та її наслідок, біноміальну формулу (див. [92, наслідок 1.9, с. 6]):

$$P(x + y) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} A_P(\underbrace{x, \ldots, x}_{n}, \underbrace{y, \ldots, y}_{m}), \qquad (1.3)$$

де

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Із формули (1.1) випливає наступне твердження.

Твердження 1.1. *Нехай P — m-однорідний поліном, який діє з простору X в простір Y. Нехай J — лінійний оператор, який діє з простору X в X такий, що $P(J(x)) = P(x)$ для кожного $x \in X$. Тоді*

$$A_P(J(x_1), \ldots, J(x_m)) = A_P(x_1, \ldots, x_m)$$

для кожних $x_1, \ldots, x_m \in X$, де A_P — це симетричне m-лінійне відображення, асоційоване із m-однорідним поліномом P.

Для зручності визначимо 0-однорідні поліноми, які діють з простору X в простір Y, як сталі відображення.

Відображення $P : X \to Y$ називають *поліномом*, якщо його можна подати у вигляді

$$P = \sum_{j=0}^{K} P_j, \qquad (1.4)$$

де $K \in \mathbb{Z}_+$ і P_j є j-однорідним поліномом для кожного $j \in \{0, \dots, K\}$. Нехай $\deg P$ — це найбільше число $j \in \{0, \dots, K\}$ таке, що $P_j \not\equiv 0$.

Для комплексних чисел $t_1, \dots, t_m$ нехай $V_{t_1,\dots,t_m}$ — це матриця Вандермонда:

$$V_{t_1,\dots,t_m} := \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{m-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_m & t_m^2 & \dots & t_m^{m-1} \end{pmatrix}.$$

Відомо, що

$$\det(V_{t_1,\dots,t_m}) = \prod_{1 \le j < s \le m} (t_s - t_j).$$

Якщо числа $t_1, \dots, t_m$ є попарно різними, то $\det(V_{t_1,\dots,t_m}) \neq 0$.

Наступне твердження дає метод відновлення однорідних компонент довільного полінома P за значеннями цього полінома.

Твердження 1.2. (Див. [86]) *Нехай P — це поліном вигляду* (1.4). *Нехай $\lambda_0, \dots, \lambda_K$ — це попарно різні ненульові дійсні числа. Тоді*

$$P_j(x) = \sum_{s=0}^{K} w_{js} P(\lambda_s x),$$

для кожного $j \in \{0, \dots, K\}$, де числа w_{js} — це елементи матриці $W = (w_{js})_{j,s=\overline{0,K}}$, яка є оберненою матрицею до матриці Вандермонда $V_{\lambda_0,\dots,\lambda_K}$.

Припустимо, що простори X і Y є нормованими просторами з нормами $\|\cdot\|_X$ і $\|\cdot\|_Y$ відповідно. Зауважимо, що m-лінійне відображення $A : X^m \to Y$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли значення

$$\|A\| = \sup_{\|x_1\|_X \le 1, \dots, \|x_m\|_X \le 1} \|A(x_1, \dots, x_m)\|_Y$$

є скінченним. Як наслідок, якщо відображення A — неперервне, то

$$\|A(x_1, \dots, x_m)\|_Y \le \|A\| \|x_1\|_X, \dots, \|x_m\|_X \tag{1.5}$$

для кожних $x_1, \dots, x_m \in X$. Аналогічно, m-однорідний поліном $P : X \to Y$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли значення

$$\|P\| = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|P(x)\|_Y$$

є скінченним. Звідси

$$\|P(x)\|_Y \leq \|P\|\|x\|_X^m \tag{1.6}$$

для кожного $x \in X$. Із формули (1.1) випливає, що для кожного неперервного m-однорідного полінома $P : X \to Y$ виконується наступна нерівність:

$$\|P\| \leq \|A_P\| \leq \frac{m^m}{m!}\|P\|, \tag{1.7}$$

яку називають поляризаційною нерівністю.

1.2.2. $*$-Поліноми

В [92, с. 8] введено поняття відображень між комплексними лінійними просторами, які є лінійними відносно частини своїх аргументів і антилінійними відносно усіх інших аргументів. Класи таких відображень містять в собі класи полілініних відображень. Водночас, згадані відображення та їх звуження на діагоналі мають кращі апроксимаційні властивості щодо наближення неперервних функцій на комплексних банахових просторах, ніж полілінійні відображення і поліноми. Дамо формальні означення.

Нехай X і Y — це комплексні лінійні простори. Відображення $A : X^{m+n} \to Y$, де $(m, n) \in \mathbb{Z}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$, називають (m, n)-*лінійним відображенням*, якщо відображення A є лінійним відносно кожного із перших m аргументів і є антилінійним відносно кожного з останніх n аргументів. (m, n)-Лінійне відображення, яке є інваріантним відносно перестановок його перших m аргументів і останніх n аргументів окремо, називають (m, n)-*симетричним*. Для (m, n)-лінійного відображення $A : X^{m+n} \to Y$, визначимо відображення $A^{(s)} : X^{m+n} \to Y$ рівністю:

$$\begin{aligned} A^{(s)}(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) &= \\ &= \frac{1}{m!n!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_m} \sum_{\theta \in \mathcal{S}_n} A\big(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(m)}, x_{m+\theta(1)}, \ldots, x_{m+\theta(n)}\big). \end{aligned}$$

Відображення $A^{(s)}$ є (m, n)-симетричним і (m, n)-лінійним. Це відображення називають (m, n)-*симетризацією* відображення A. Відображення P :

$X \to Y$ називають (m,n)-*поліномом*, якщо існує (m,n)-лінійне відображення $A_P : X^{m+n} \to Y$ таке, що відображення P є звуженням на діагональ відображення A_P, тобто

$$P(x) = A_P(\underbrace{x, \ldots, x}_{m+n})$$

для кожного $x \in X$. Зауважимо, що відображення P є також звуженням на діагональ відображення $A_P^{(s)}$, яке є (m,n)-симетризацією відображення A_P. Відображення $A_P^{(s)}$ називають (m,n)-симетричним (m,n)-лінійним відображенням, *асоційованим* із (m,n)-поліномом P. Згідно із [123, теорема 3.1], відображення $A_P^{(s)}$ можна відновити за значеннями (m,n)-полінома P за допомогою поляризаційної формули:

$$A_P^{(s)}(x_1, \ldots, x_{m+n}) = \frac{1}{2^{m+n} m! n!} \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m+n} = \pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{m+n} \sum_{j=1}^{2n+1} \frac{1}{2n+1} \times$$
$$\times \alpha_j^{2n+1-m} P\big(\alpha_j(\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_m x_m) + \varepsilon_{m+1} x_{m+1} + \ldots + \varepsilon_{m+n} x_{m+n}\big), \quad (1.8)$$

де $\alpha_j = e^{2\pi i j/(2n+1)}$ для $j \in \{1, \ldots, 2n+1\}$.

Зауважимо, що для (m,n)-полінома $P : X \to Y$ і для довільних елементів $x_1, \ldots, x_k \in X$, де $k \in \mathbb{N}$, виконується рівність

$$P(x_1 + \ldots + x_k) = \sum_{\substack{\mu_1 + \ldots + \mu_k = m \\ \mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{Z}_+}} \sum_{\substack{\nu_1 + \ldots + \nu_k = n \\ \nu_1, \ldots, \nu_k \in \mathbb{Z}_+}} \frac{m!}{\mu_1! \ldots \mu_k!} \frac{n!}{\nu_1! \ldots \nu_k!} \times$$
$$\times A_P(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{\mu_1}, \ldots, \underbrace{x_k, \ldots, x_k}_{\mu_k}, \underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{\nu_1}, \ldots, \underbrace{x_k, \ldots, x_k}_{\nu_k}). \quad (1.9)$$

Також зауважимо, що

$$P(\lambda x) = \lambda^m \bar{\lambda}^n P(x) \quad (1.10)$$

для кожних $x \in X$ і $\lambda \in \mathbb{C}$.

Для зручності визначимо $(0,0)$-поліноми, які діють з X в Y, як сталі відображення.

Відображення $P : X \to Y$ називають $*$-*поліномом*, якщо його можна подати у вигляді

$$P = \sum_{t=0}^{K} \sum_{j=0}^{t} P_{j,t-j}, \tag{1.11}$$

де $K \in \mathbb{Z}_+$ і $P_{j,t-j}$ — це $(j, t-j)$-поліном для кожних $t \in \{0, \dots, K\}$ і $j \in \{0, \dots, t\}$. Нехай $\deg P$ — це найбільше число $t \in \{0, \dots, K\}$, для якого існує число $j \in \{0, \dots, t\}$ таке, що $P_{j,t-j} \not\equiv 0$.

Припустимо, що X і Y — це комплексні нормовані простори з нормами $\| \cdot \|_X$ і $\| \cdot \|_Y$ відповідно. Зауважимо, що (m, n)-лінійне відображення $A : X^{m+n} \to Y$ є неперервним якщо і тільки якщо значення

$$\|A\| = \sup_{\|x_1\|_X \le 1, \dots, \|x_{m+n}\|_X \le 1} \|A(x_1, \dots, x_{m+n})\|_Y$$

є скінченним. Аналогічно, (m, n)-поліном $P : X \to Y$ є неперервним якщо і тільки якщо значення

$$\|P\| = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|P(x)\|_Y$$

є скінченним. Із формули (1.8) випливає наступна нерівність:

$$\|A_P^{(s)}\| \le \frac{(m+n)^{m+n}}{m!n!} \|P\|. \tag{1.12}$$

1.2.3. Алгебри та їхні спектри

Нехай $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$.

Означення 1.1. *Лінійний простір $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{K}$ називають* алгеброю*, якщо в ньому введено ще одну алгебраїчну операцію — множення, яка задовольняє таким аксіомам:*

1. *$(xy)z = x(yz)$ для кожних $x, y, z \in \mathcal{A}$.*
2. *$x(y+z) = xy + xz$; $(y+z)x = yx + zx$ для кожних $x, y, z \in \mathcal{A}$.*
3. *$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$ для кожних $x, y \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{K}$.*

Якщо існує елемент $e \in \mathcal{A}$ *такий, що* $ex = xe = x$ *для кожного* $x \in \mathcal{A}$, *то елемент* e *називають* одиницею *алгебри* $\mathcal{A}$, *а саму алгебру називають* алгеброю з одиницею.

Якщо операція множення комутативна, тобто якщо $xy = yx$ *для кожних* $x, y \in \mathcal{A}$, *то алгебру* $\mathcal{A}$ *називають* комутативною алгеброю.

Означення 1.2. *Нормований простір* $\mathcal{A}$ *називають* нормованою алгеброю, *якщо він є алгеброю з одиницею і виконані такі аксіоми:*

1. $\|e\| = 1$.
2. $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.

Якщо нормована алгебра $\mathcal{A}$ *є повною (тобто є банаховим простором), то її називають* банаховою алгеброю.

Означення 1.3. *Топологічний лінійний простір* $\mathcal{A}$ *називають* топологічною алгеброю, *якщо він є алгеброю з одиницею і множення є сукупно неперервним.*

Означення 1.4. *Топологічну алгебру* $\mathcal{A}$ *називають* локально мультиплікативно опуклою, *якщо топологія на алгебрі* $\mathcal{A}$ *є породженою деякою сім'єю напівнорм* $\{p_j : j \in J\}$, *де* J *— деяка індексна множина, для яких виконуються такі дві умови:*

1. $p_j(e) = 1$ *для кожного* $j \in J$.
2. $p_j(xy) \leq p_j(x)p_j(y)$ *для кожних* $x, y \in \mathcal{A}$, $j \in J$.

Означення 1.5. *Повну метризовну локально мультиплікативно опуклу топологічну алгебру називають* алгеброю Фреше.

Означення 1.6. *Нехай* $\mathcal{A}$ *— топологічна алгебра над полем* $\mathbb{K}$. *Нетривіальний неперервний гомоморфізм* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ *називають* характером *алгебри* $\mathcal{A}$. *Множину всіх характерів алгебри* $\mathcal{A}$ *називають* спектром *алгебри* $\mathcal{A}$ *і позначають* $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Твердження 1.3. (Див. [14, с. 521–522]) *Норма кожного неперервного характера на нормованій алгебрі дорівнює 1.*

1.2.4. Алгебраїчні комбінації

Нехай T — довільна непорожня множина і $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$.

Означення 1.7. *Відображення* $f : T \to \mathbb{K}$ *називають* алгебраїчною комбінацією *відображень* $f_1, \ldots, f_m : T \to \mathbb{K}$ *над полем* $\mathbb{K}$, *якщо існує поліном* $Q : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$ *такий, що*

$$f(x) = Q(f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

для кожного $x \in T$.

Означення 1.8. *Множину* $\{f_1, \ldots, f_m\}$ *відображень* $f_1, \ldots, f_m : T \to \mathbb{K}$ *називають* алгебраїчно незалежною, *якщо кожен поліном* $Q : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$, *для якого виконуеться рівність*

$$Q(f_1(x), \ldots, f_m(x)) = 0$$

для кожного $x \in T$, *тотожно дорівнює нулю.*

Якщо множина відображень $\{f_1, \ldots, f_m\}$ є алгебраїчно незалежною і поліноми $Q_1, Q_2 : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$ такі, що

$$Q_1(f_1(x), \ldots, f_m(x)) = Q_2(f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

для кожного $x \in T$, тоді поліном Q_1 тотожно дорівнює поліному Q_2. Отже, кожна алгебраїчна комбінація елементів алгебраїчно незалежної множини відображень є єдиною.

Означення 1.9. *Нескіненну множину відображень називають* алгебраїчно незалежною, *якщо кожна її скінченна підмножина є алгебраїчно незалежною.*

Означення 1.10. *Нехай $\mathcal{A}$ — деяка алгебра над полем $\mathbb{K}$ відображень $f : T \to \mathbb{K}$ із поточковими операціями, де T — деяка непорожня множина. Непорожню підмножину $\mathcal{B}$ алгебри $\mathcal{A}$ називають* алгебраїчним базисом *алгебри $\mathcal{A}$, якщо кожен елемент алгебри $\mathcal{A}$ можна єдиним чином подати у вигляді алгебраїчної комбінації деяких елементів підмножини $\mathcal{B}$.*

Зауважимо, що із даного означення випливає, що кожен алгебраїчний базис є алгебраїчно незалежною множиною.

1.2.5. Аналітичні функції на локально опуклих просторах

Означення 1.11. (Див. [47, означення 2.1, с. 53]) *Підмножину U лінійного простору X називають* скінченно-відкритою, *якщо множина $U \cap F$ є відкритою підмножиною евклідового простору F для кожного скінченновимірного підпростору F простору X.*

(Див. [47, с. 53]). Скінченно-відкриті підмножини лінійного простору X утворюють інваріантну відносно зсувів топологію τ_f. Збалансовані τ_f-околи нуля утворюють базу τ_f-околів нуля. На локально опуклому просторі (X, τ) топологія τ_f є не слабшою від топології τ, тобто $\tau_f \geq \tau$.

Означення 1.12. (Див. [47, означення 2.2, с. 54]) *Комплекснозначну функцію f, визначену на скінченно-відкритій підмножині U комплексного лінійного простору X називають* G-аналітичною, *або* аналітичною за Гато, *якщо для кожних $a \in U, b \in X$ комплекснозначна функція від однієї комплексної змінної*

$$\lambda \mapsto f(a + \lambda b)$$

є аналітичною в деякому околі нуля. Позначимо $H_G(U)$ множину всіх G-аналітичних функцій, які діють з множини U в поле $\mathbb{C}$.

Із [47, твердження 2.4, с. 55] випливає наступне твердження.

Твердження 1.4. *Нехай U є скінченно-відкритою підмножиною комплексного лінійного простору X і $f \in H_G(U)$. Тоді для кожної точки $a \in U$ існує єдина послідовність однорідних поліномів, які діють з простору X в поле $\mathbb{C}$, $\left\{f_m^{(a)}\right\}_{m=0}^{\infty}$, така, що*

$$f(a+y) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m^{(a)}(y)$$

для кожного y із деякого τ_f-околу нуля. Даний ряд називають рядом Тейлора функції f у точці a.

Означення 1.13. (Див. [47, означення 2.6, с. 57]) *Нехай (X, τ) — це комплексний локально опуклий простір і нехай U — це деяка скінченно-відкрита підмножина простору X. Функцію $f : U \to \mathbb{C}$ називають* аналітичною, *якщо вона є G-аналітичною і для кожного $a \in U$ існує τ-окіл нуля V такий, що ряд*

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m^{(a)}(y)$$

є збіжним для кожного $y \in V$ і функція

$$V \ni y \mapsto \sum_{m=0}^{\infty} f_m^{(a)}(y) \in \mathbb{C}$$

є неперервною. Лінійний простір всіх аналітичних функцій, які діють з множини U в поле $\mathbb{C}$, позначають $H(U)$. Функцію, яка є аналітичною на всьому просторі X, називають цілою.

Із [47, лема 2.8, с. 58] випливає наступне твердження.

Твердження 1.5. *Нехай U — це скінченно-відкрита підмножина деякого комплексного локально опуклого простору X і функція $f : U \to \mathbb{C}$ є G-аналітичною. Тоді функція f є аналітичною тоді і тільки тоді, коли вона є локально обмеженою.*

Із [47, наслідок 2.9, с. 59] випливає наступне твердження.

Твердження 1.6. *Нехай X — це комплексний локально опуклий простір. Нехай U — відкрита підмножина простору X і нехай $f \in H(U)$. Тоді для кожної точки a із множини U і для кожного $m \in \mathbb{N}$, m-однорідний поліном $f_m^{(a)}$ є неперервним.*

(Див. [47, с. 166]). Нехай U — відкрита підмножина комплексного локально опуклого простору X і нехай B — збалансована замкнена підмножина простору X. Нехай

$$d_B(a, U) = \sup\big\{|\lambda| :\ \lambda \in \mathbb{C}, a + \lambda B \subset U\big\}$$

для $a \in U$. Якщо X є нормованим простором, а B — це замкнена куля одиничного радіуса з центром в нулі простору X, то число $d_B(a, U)$ — це відстань від точки a до доповнення множини U.

Нехай $f \in H(U)$. *Радіусом обмеженості* функції f у точці $a \in U$ відносно множини B називають число

$$r_f(a, B) = \sup\Big\{|\lambda| :\ \lambda \in \mathbb{C}, a + \lambda B \subset U, \sup_{y \in a+\lambda B} |f(y)| < \infty\Big\}.$$

Радіусом рівномірної збіжності функції f у точці $a \in U$ відносно множини B називають число

$$R_f(a, B) = \sup\Big\{|\lambda| :\ \lambda \in \mathbb{C}, a + \lambda B \subset U, \text{і ряд Тейлора функції } f \text{ у точці } a \text{ рівномірно збігається до функції } f \text{ на множині } a + \lambda B\Big\}.$$

Частковим випадком [47, твердження 4.7, с. 166] є наступне твердження.

Твердження 1.7. *Нехай U — відкрита підмножина комплексного локально опуклого простору X. Нехай $f \in H(U)$. Якщо $a \in U$, B — замкнена збалансована підмножина простору X і $r_f(a, B) > 0$, то*

$$r_f(a, B) = R_f(a, B) = \min\left\{d_B(a, U), \left(\limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in B} \big|f_n^{(a)}(y)\big|^{1/n}\right)^{-1}\right\}.$$

При цьому, можливим є варіант $r_f(a, B) = R_f(a, B) = +\infty$.

Нехай X — це комплексний нормований простір. Цілу функцію $f : X \to \mathbb{C}$, для якої $r_f(0, B) = +\infty$, де B — замкнена куля одиничного радіуса з центром в нулі простору X, називають функцією *обмеженого типу*. Іншими словами, функцію f називають функцією обмеженого типу, якщо вона є обмеженою на кожній обмеженій підмножині простору X. Із твердження 1.7 випливає, що до такої функції f її ряд Тейлора у точці нуль, $\sum_{m=0}^{\infty} f_m$, рівномірно збігається на кожній обмеженій підмножині простору X (для спрощення запису, через f_m позначено $f_m^{(0)}$). Із [92, наслідок 7.3, с. 47] випливає наступна формула, яку називають інтегральною формулою Коші:

$$f_m(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \frac{f(\xi y)}{\xi^{m+1}} \, d\xi, \tag{1.13}$$

де $m \in \mathbb{Z}_+$, $y \in X$ і $r > 0$.

Нехай X — це комплексний банахів простір. Нехай $H_b(X)$ — це алгебра Фреше всіх цілих функцій обмеженого типу $f : X \to \mathbb{C}$ із топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах. Нехай

$$\|f\|_r = \sup_{\|x\| \le r} |f(x)|$$

для $f \in H_b(X)$ і $r \in (0, +\infty)$. Топологія алгебри Фреше $H_b(X)$ є породженою будь-якою множиною норм

$$\{\| \cdot \|_r : \ r \in U\},$$

де U — це довільна необмежена підмножина множини $(0, +\infty)$.

1.2.6. Алгебра цілих функцій від скінченної кількості комплексних змінних

Зауважимо, що кожна ціла функція на просторі $\mathbb{C}^m$, де $m \in \mathbb{N}$, є функцією обмеженого типу, тому $H_b(\mathbb{C}^m) = H(\mathbb{C}^m)$. Таким чином, $H(\mathbb{C}^m)$ — це алгебра Фреше всіх цілих функцій $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ із топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах. Топологія алгебри Фреше $H(\mathbb{C}^m)$ є породженою будь-якою множиною норм $\{\| \cdot \|_r : \ r \in U\}$, де U — це довільна необмежена підмножина множини $(0,+\infty)$, визначених формулою

$$\|f\|_r = \sup_{\|z\|_\infty \le r} |f(z)|$$

для $f \in H(\mathbb{C}^m)$ і $r \in (0,+\infty)$, де $\|z\|_\infty = \max_{1\le j\le m} |z_j|$ для $z = (z_1,\ldots,z_m) \in \mathbb{C}^m$.

Наступні означення потрібні для встановлення деяких властивостей алгебри Фреше $H(\mathbb{C})$.

Означення 1.14. (Див. [47, с. 218]) *Базис Шаудера* $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ *в локально опуклому просторі* X *називають абсолютним базисом, якщо для кожної неперервної напівнорми* p *на* X *існує неперервна напівнорма* q *на* X *така, що*

$$\sum_{n=1}^\infty |x_n| p(e_n) \le q\Big(\sum_{n=1}^\infty x_n e_n\Big)$$

для кожного елемента $\sum_{n=1}^\infty x_n e_n \in X$.

Означення 1.15. (Див. [47, с. 226, означення 5.11]) *Локально опуклий простір* X *називають А-ядерним, якщо в ньому існує абсолютний базис* $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ *і існує послідовність додатних дійсних чисел* $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty$ *така, що ряд* $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\delta_n}$ *є збіжним і напівнорма* q*, визначена формулою*

$$q\Big(\sum_{n=1}^\infty x_n e_n\Big) = \sum_{n=1}^\infty \delta_n p(x_n e_n)$$

для кожного елемента $\sum_{n=1}^\infty x_n e_n \in X$, *є неперервною для кожної неперервної напівнорми* p *на* X.

Будемо використовувати наступний результат, який є частковим результатом [47, наслідок 5.22].

Лема 1.1. *Послідовність поліномів* $e_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $e_n(z) = z^{n-1}$, *де* $n \in \mathbb{N}$, *утворює абсолютний базис Шаудера простору* $H(\mathbb{C})$. *Більше того, простір* $H(\mathbb{C})$ *є А-ядерним простором.*

Означення 1.16. (Див. [47, с. 221, означення 5.3]) *Нехай P — це множина послідовностей невід'ємних дійсних чисел таких, що для кожного $r \in \mathbb{N}$ існує послідовність $w = \{w_n\}_{n=1}^{\infty} \in P$ така, що $w_r > 0$. Нехай $\Lambda(P)$ — це множина всіх послідовностей комплексних чисел, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, таких, що $\sum_{n=1}^{\infty} w_n|x_n| < \infty$ для кожної послідовності $w = \{w_n\}_{n=1}^{\infty} \in P$. Будемо розглядати на $\Lambda(P)$ топологію, породжену напівнормами p_w, $w = \{w_n\}_{n=1}^{\infty} \in P$, де*

$$p_w\big(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\big) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n|x_n|$$

для кожної послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Lambda(P)$.

Із того, що алгебра Фреше $H(\mathbb{C})$ є повним локально опуклим простором із абсолютним базисом, випливає правильність наступного твердження.

Твердження 1.8. (Див. [47, с. 221–222] або [73, §2.10 I, твердження 11]) *Відображення*

$$H(\mathbb{C}) \ni \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \mapsto \{a_{n-1}\}_{n=1}^{\infty} \in \Lambda(P_H),$$

де

$$P_H = \big\{\{m^{n-1}\}_{n=1}^{\infty} : \ m \in \mathbb{N}\big\},$$

є ізоморфізмом.

1.2.7. Простори Лебега-Рохліна

Простір з мірою — це трійка $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$, де Ω — непорожня множина, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра підмножин множини Ω, і $\nu : \mathcal{F} \to [0, +\infty)$ — міра. Також будемо припускати, що міра ν є *повною*, тобто що кожна підмножина вимірної множини нульової міри також є вимірною. *Ізоморфізм* між двома просторами з мірами $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \nu_1)$ і $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \nu_2)$ — це бієкція $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ така, що f і f^{-1} є вимірними і зберігають міру. У випадку, коли

$(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \nu_1) = (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \nu_2)$, відображення f називають *вимірним автоморфізмом.* Два простори з мірами $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \nu_1)$ і $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \nu_2)$ називають *ізоморфними за модулем нуль*, якщо існують нехтовні множини, тобто множини нульової міри, $M \subset \Omega_1$ і $N \subset \Omega_2$ такі, що простори з мірами $\Omega_1 \setminus M$ і $\Omega_2 \setminus N$ є ізоморфними [96, §1, №5].

Нехай простір з мірою $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ такий, що $\nu(\Omega) = 1$. Простір з мірою $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ називають *сепарабельним* (див. [96, §2, №1]), якщо існує зліченна сім'я $\mathcal{G}$ вимірних підмножин, яка має наступні дві властивості:

1. Для кожної вимірної множини $A \subset \Omega$ існує множина B така, що $A \subset B \subset \Omega$, множина B збігається із множиною A за модулем нуль, і множина B є елементом σ-алгебри, породженої сім'єю $\mathcal{G}$.
2. Для кожної пари точок $x, y \in \Omega$ існує множина $G \subset \mathcal{G}$ така, що або $x \in G, y \notin G$, або $x \notin G, y \in G$.

Кожну зліченну сім'ю $\mathcal{G}$ вимірних множин, яка задовольняє умови (1) і (2), називають *базисом* простору $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ — це сепарабельний простір з мірою і нехай $B = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ — це довільний базис в просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$. Якщо всі перетини вигляду $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, де A_n є однією із двох множин B_n і $\Omega \setminus B_n$, є непорожніми, тоді простір $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ називають *повним* відносно базису B. Згідно із [96, §2, №2], якщо простір $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ є повним за модулем нуль (тобто, ізоморфний за модулем нуль до деякого повного простору з мірою) відносно деякого базису, тоді цей простір є повним за модулем нуль відносно кожного іншого базису. Сепарабельний простір з мірою, який є повним за модулем нуль відносно свого базису, називають простором *Лебега-Рохліна.*

Теорема 1.1. (Див. [96, §2, №1–4]). *Кожен простір Лебега-Рохліна із неперервною мірою (тобто, немає точок із додатною мірою) є ізоморфним за модулем нуль до відрізка* $[0, 1]$ *із лінійною мірою Лебега.*

Теорема 1.2. (Див. [96, §2, №1–4]). *Кожна вимірна за Лебегом підмножина* $E \subset [0, 1]$ *є ізоморфною за модулем нуль до відрізка довжини*

$\mu(E)$, де μ — лінійна міра Лебега.

1.2.8. Симетричні функції на просторах вимірних функцій

Нехай Ω — вимірна за Лебегом підмножина множини $\mathbb{R}$, для якої $\mu(\Omega) > 0$. Нехай Ξ_Ω — це множина всіх бієкцій $\sigma : \Omega \to \Omega$ таких, що для кожної вимірної за Лебегом множини $E \subset \Omega$ множини $\sigma(E)$ і $\sigma^{-1}(E)$ є вимірними за Лебегом і $\mu(\sigma(E)) = \mu(\sigma^{-1}(E)) = \mu(E)$. Зауважимо, що множина Ξ_Ω є множиною всіх вимірних автоморфізмів множини Ω.

Нехай $X(\Omega)$ — лінійний простір класів функцій, заданих на множині Ω, такий, що для кожного класу $\theta \in X(\Omega)$ і для кожної бієкції $\sigma \in \Xi_\Omega$, множина

$$\theta \circ \sigma := \{x \circ \sigma : \ x \in \theta\}$$

є класом, який належить простору $X(\Omega)$.

Означення 1.17. *Функцію f, задану на просторі $X(\Omega)$, назвемо симетричною, якщо для кожних $\theta \in X(\Omega)$ і $\sigma \in \Xi_\Omega$ виконується рівність*

$$f(\theta \circ \sigma) = f(\theta).$$

Означення 1.18. *Нехай $n \in \mathbb{N}$. Функцію f, задану на n-тому декартовому степені простору $X(\Omega)$, назвемо симетричною, якщо для кожних $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in (X(\Omega))^n$ і $\sigma \in \Xi_\Omega$ виконується рівність*

$$f(\theta \circ \sigma) = f(\theta),$$

де

$$\theta \circ \sigma = (\theta_1 \circ \sigma, \ldots, \theta_n \circ \sigma).$$

Означення 1.19. *Нехай множина Ω — необмежена. Бієкцію $\sigma \in \Xi_\Omega$ назвемо* скінченною, *якщо для неї існує число $a > 0$ таке, що $\sigma(t) = t$ майже скрізь на множині $\{t \in \Omega : \ |t| > a\}$. Позначимо Ξ_Ω^0 множину всіх бієкцій $\sigma \in \Xi_\Omega$, які є скінченними. Функцію f, задану на просторі $X(\Omega)$, назвемо* скінченно-симетричною, *якщо $f(\theta \circ \sigma) = f(\theta)$ для кожних $\theta \in X(\Omega)$ і $\sigma \in \Xi_\Omega^0$.*

Наведемо приклади просторів типу простору $X(\Omega)$.

Приклад 1.1. *Нехай* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *або* $\mathbb{C}$. *Нехай* Ω *— вимірна за Лебегом підмножина множини* $\mathbb{R}$ *з додатною мірою. Нехай* $L_\infty^{(\mathbb{K})}(\Omega)$ *— це банахів простір над полем* $\mathbb{K}$ *всіх (класів еквівалентності рівних майже скрізь) вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій* $x : \Omega \to \mathbb{K}$, *з нормою*

$$\|x\|_{L_\infty^{(\mathbb{K})}(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{t\in\Omega}|x(t)|. \tag{1.14}$$

Приклад 1.2. *Нехай* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *або* $\mathbb{C}$. *Нехай* $p \in [1, +\infty)$ *і нехай* Ω *— вимірна за Лебегом підмножина множини* $\mathbb{R}$ *з додатною мірою. Нехай* $L_\infty^{(\mathbb{K})}(\Omega)$ *— це банахів простір над полем* $\mathbb{K}$ *всіх (класів еквівалентності рівних майже скрізь) вимірних за Лебегом функцій* $x : \Omega \to \mathbb{K}$, *для яких степінь* p *абсолютного значення є інтегровним за Лебегом, з нормою*

$$\|x\|_{L_p^{(\mathbb{K})}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}. \tag{1.15}$$

1.2.9. Симетричні функції на просторах послідовностей

Нехай $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$. Нехай Y — лінійний простір над полем $\mathbb{K}$. Нехай X — лінійний простір послідовностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, де $x_1, x_2, \ldots \in Y$, такий, що для кожної послідовності $x = (x_1, x_2, \ldots) \in X$ і для кожної бієкції $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ послідовність

$$x \circ \sigma := (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots)$$

належить простору X.

Означення 1.20. *Функцію* f, *задану на просторі* X *називають* симетричною, *якщо* $f(x \circ \sigma) = f(x)$ *для кожної послідовності* $x \in X$ *і для кожної бієкції* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Означення 1.21. *Нехай відображення* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *є бієкцією. Назвемо відображення* σ *скінченною бієкцією, якщо існує число* $a \in \mathbb{N}$ *таке, що звуження відображення* σ *на множину* $\{a, a+1, \ldots\}$ *є тотожним* *відображенням. Функцію f, задану на просторі X називають* скінченно-симетричною, *якщо $f(x \circ \sigma) = f(x)$ для кожної послідовності $x \in X$ і для кожної скінченної бієкції $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*

Наведемо приклад простору типу простору X.

Приклад 1.3. *Нехай $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$. Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $p \in [1, +\infty)$. Позначимо $\ell_p(\mathbb{K}^n)$ лінійний простір всіх послідовностей*

$$x = (x_1, x_2, \ldots),$$

де $x_j = \left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right) \in \mathbb{K}^n$ для $j \in \mathbb{N}$ таких, що ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{n} \left|x_j^{(s)}\right|^p$ збіжний. Простір $\ell_p(\mathbb{K}^n)$ з нормою

$$\|x\|_{\ell_p(\mathbb{K}^n)} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{n} \left|x_j^{(s)}\right|^p \right)^{1/p} \tag{1.16}$$

є банаховим простором.

РОЗДІЛ 2

СИМЕТРИЧНІ АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОГО ТИПУ НА КОМПЛЕКСНОМУ БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ ВИМІРНИХ ЗА ЛЕБЕГОМ СУТТЄВО ОБМЕЖЕНИХ ФУНКЦІЙ НА ВІДРІЗКУ

Даний розділ присвячено вивченню симетричних (інваріантних відносно композиції аргументу із довільним вимірним автоморфізмом відрізка) неперервних поліномів і симетричних аналітичних функцій на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку.

Введемо позначення, які будуть використовуватися у межах даного розділу. Нехай $L_\infty[0,1] := L_\infty^{(\mathbb{C})}([0,1])$ — це комплексний банахів простір всіх вимірних за Лебегом суттєво обмежених комплекснозначих функцій, заданих на відрізку $[0,1]$ (див. приклад 1.1). Норму $\|\cdot\|_{L_\infty^{(\mathbb{C})}([0,1])}$ на цьому просторі, визначену формулою (1.14), в цьому розділі будемо позначати $\|\cdot\|_\infty$.

2.1. Симетричні неперервні поліноми на комплексному банаховому просторі вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку

У даному підрозділі розглянемо комплекснозначні симетричні n-однорідні неперервні поліноми на просторі $L_\infty[0,1]$. У цьому підрозділі доведемо, що кожен такий поліном можна подати, і при цьому єдиним чином, як алгебраїчну комбінацію так званих елементарних симетричних поліномів.

Згідно із означенням 1.17, функцію f, задану на просторі $L_\infty[0,1]$, називають симетричною, якщо

$$f(x \circ \sigma) = f(x)$$

для кожних функцій $x \in L_\infty[0,1]$ і $\sigma \in \Xi_{[0,1]}$, де $\Xi_{[0,1]}$ — це множина бієкцій відрізка $[0,1]$, які зберігають міру Лебега, визначена на с. 63.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ визначимо відображення $R_n : L_\infty[0,1] \to \mathbb{C}$ формулою

$$R_n(x) = \int_{[0,1]} (x(t))^n \, dt, \tag{2.1}$$

де $x \in L_\infty[0,1]$. Зауважимо, що відображення R_n є n-однорідним симетричним неперервним поліномом таким, що $\|R_n\| = 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Назвемо поліноми R_n *елементарними симетричними поліномами.*

Доведемо деякі допоміжні результати. Наступне твердження показує, що вимірний автоморфізм відрізка $[0,1]$ може бути визначений з точністю до нехтовних множин.

Твердження 2.1. *Нехай f — це ізоморфізм за модулем нуль відрізка* $[0,1]$. *Тоді існує вимірний автоморфізм відрізка* $[0,1]$, *який збігається з f майже скрізь.*

Доведення. Існують нехтовні множини M і N такі, що відображення

$$f : [0,1] \setminus M \to [0,1] \setminus N$$

є ізоморфізмом. Нехай $\mathcal{K}$ — це канторова множина. Нехай

$$C_1 = \mathcal{K} \cap ([0,1] \setminus M) \text{ і } C_2 = \mathcal{K} \cap ([0,1] \setminus N).$$

Множини

$$U = \mathcal{K} \cup f^{-1}(C_2) \cup M \text{ і } V = \mathcal{K} \cup f(C_1) \cup N$$

є нехтовними множинами потужності континуум. Нехай h — це бієкція між множинами U і V. Зауважимо, що функція

$$g(t) = \begin{cases} h(t), & \text{якщо } t \in U \\ f(t), & \text{якщо } t \in [0,1] \setminus U \end{cases}$$

є бієкцією, і тому є вимірним автоморфізмом відрізка $[0,1]$. □

Для кожної множини $E \subset [0,1]$ нехай

$$\mathbf{1}_E(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t \in E \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Твердження 2.2. *Нехай* $E_1, \dots, E_N \subset [0,1]$ *— це вимірні множини такі, що* $\mu(E_j \cap E_k) = 0$ *якщо* $j \neq k$*, де* μ *— це лінійна міра Лебега. Тоді існує біекція* $\sigma_{E_1,\dots,E_N} \in \Xi_{[0,1]}$ *така, що*

$$\mathbf{1}_{E_m} = \mathbf{1}_{[b_{m-1},b_m]} \circ \sigma_{E_1,\dots,E_N}$$

для кожного $m \in \{1, \dots, N\}$ *майже скрізь на відрізку* $[0,1]$*, де* $b_k = \sum_{j=1}^{k} \mu(E_j)$ *для* $k \in \{1, \dots, N\}$ *і* $b_0 = 0$.

Доведення. Без обмеження загальності можемо припустити, що множини E_m — неперетинні. Нехай $E_{N+1} = [0,1] \setminus \bigcup_{m=1}^{N} E_m$ і $b_{N+1} = 1$. Згідно із теоремою 1.2, кожна вимірна множина $E \subset [0,1]$ є ізоморфною за модулем нуль до відрізка довжини $\mu(E)$. Таким чином, кожна множина E_m є ізоморфною за модулем нуль до відрізка $[b_m, b_{m+1}]$. Нехай f_m — це відповідний ізоморфізм. Нехай

$$\sigma_{E_1,\dots,E_N}(t) = f_m(t)$$

якщо $t \in E_m$, $m \in \{1, \dots, N+1\}$. Можна перевірити, що відображення $\sigma_{E_1,\dots,E_N}$ задовольняє потрібні умови. Твердження доведено. □

Нехай ε_k — це k-та функція Радемахера, тобто

$$\varepsilon_k(t) = \operatorname{sign} \sin 2^k \pi t$$

для $t \in [0,1]$.

Твердження 2.3. *Ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(t)}{k+1}$ *є збіжним майже скрізь на відрізку* $[0,1]$.

Доведення. Відомо (див. [75, розділ 3] або [16, с. 162]), що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(t) u_k$ є збіжним майже скрізь на відрізку $[0,1]$ тоді і тільки тоді, коли ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2$ є збіжним. Як наслідок, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(t)}{k+1}$ є збіжним майже скрізь на відрізку $[0,1]$. □

Теорема 2.1. *Для кожної послідовності* $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ *такої, що послідовність* $\big\{\sqrt[n]{|\xi_n|}\big\}_{n=1}^{\infty}$ *є обмеженою, існує функція* $x_\xi \in L_\infty[0,1]$ *така, що* $R_n\big(x_\xi\big) = \xi_n$ *для кожного* $n \in \mathbb{N}$ *і*

$$\|x_\xi\|_\infty \leq \frac{2}{M} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|\xi_n|},$$

де

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{k+1}\right). \tag{2.2}$$

Доведення. Згідно із твердженням 2.3, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(t)}{k+1}$ є збіжним майже скрізь на відрізку $[0,1]$. Для кожного числа $n \in \mathbb{N}$ визначимо функцію $p_n : [0,1] \to \mathbb{C}$ формулою

$$p_n(t) = \exp\left(\frac{i\pi}{2n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(t)}{k+1}\right)$$

для тих $t \in [0,1]$, для яких ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(t)}{k+1}$ збіжний, і $p_n(t) = 0$ для тих $t \in [0,1]$, для яких цей ряд розбіжний. Зауважимо, що $|p_n(t)| = 1$ майже скрізь. Тому $p_n \in L_\infty[0,1]$ і $\|p_n\|_\infty = 1$.

Доведемо деякі леми, які потрібні для завершення доведення теореми.

Лема 2.1. *Для кожних* $m, n \in \mathbb{N}$ *маємо*

$$R_m(p_n) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{m}{n(k+1)}\right).$$

Доведення. За означенням,

$$R_m(p_n) = \int_0^1 (p_n(t))^m \, dt.$$

Послідовність функцій $\big\{p_n^{(l)}\big\}_{l=1}^{\infty} \subset L_\infty[0,1]$, заданих формулою

$$p_n^{(l)}(t) = \exp\left(\frac{i\pi}{2n} \sum_{k=1}^{l} \frac{\varepsilon_k(t)}{k+1}\right),$$

збігається майже скрізь до функції p_n. За теоремою Лебега про мажоровану збіжність,

$$\int_0^1 (p_n(t))^m \, dt = \lim_{l\to\infty} \int_0^1 \left(p_n^{(l)}(t)\right)^m dt.$$

Зауважимо, що

$$\int_0^1 \left(p_n^{(l)}(t)\right)^m dt = \int_0^1 \exp\left(\frac{i\pi m}{2n}\sum_{k=1}^{l}\frac{\varepsilon_k(t)}{k+1}\right) dt =$$
$$= \int_0^1 \exp\left(\frac{i\pi m}{2n}\cdot\frac{\varepsilon_1(t)}{2}\right)\exp\left(\frac{i\pi m}{2n}\sum_{k=2}^{l}\frac{\varepsilon_k(t)}{k+1}\right) dt =$$

$$= \exp\left(\frac{i\pi m}{2n}\cdot\frac{1}{2}\right)\int_{[0,\frac{1}{2}]}\exp\left(\frac{i\pi m}{2n}\sum_{k=2}^{l}\frac{\varepsilon_k(t)}{k+1}\right) dt+$$
$$+ \exp\left(\frac{i\pi m}{2n}\cdot\frac{(-1)}{2}\right)\int_{[\frac{1}{2},1]}\exp\left(\frac{i\pi m}{2n}\sum_{k=2}^{l}\frac{\varepsilon_k(t)}{k+1}\right) dt =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi m}{2n}\cdot\frac{1}{2}\right)\int_{[0,\frac{1}{2}]}\exp\left(\frac{i\pi m}{2n}\sum_{k=2}^{l}\frac{\varepsilon_k(t)}{k+1}\right) dt =$$
$$= 4\cos\left(\frac{\pi m}{2n}\cdot\frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi m}{2n}\cdot\frac{1}{3}\right)\int_{[0,\frac{1}{4}]}\exp\left(\frac{i\pi m}{2n}\sum_{k=3}^{l}\frac{\varepsilon_k(t)}{k+1}\right) dt =$$
$$= 2^l\prod_{k=1}^{l}\cos\left(\frac{\pi m}{2n}\cdot\frac{1}{k+1}\right)\int_{[0,\frac{1}{2^l}]} dt = \prod_{k=1}^{l}\cos\left(\frac{\pi m}{2n}\cdot\frac{1}{k+1}\right).$$

Тому

$$R_m(p_n) = \lim_{l\to\infty}\prod_{k=1}^{l}\cos\left(\frac{\pi m}{2n}\cdot\frac{1}{k+1}\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi m}{2n}\cdot\frac{1}{k+1}\right).$$

Лему доведено. □

Продовження доведення теореми.

Нехай $\alpha_k = \exp\left(\frac{2\pi ik}{n}\right)$ для $k = 1, 2, \ldots, n$. Визначимо функцію $y_n : [0,1] \to \mathbb{C}$ наступним чином: для $t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$, де $k \in \{1, \ldots, n\}$, покладемо

$$y_n(t) = \alpha_k p_n(nt - k + 1).$$

Також покладемо $y_n(1) = 1$. Зауважимо, що $y_n \in L_\infty[0,1]$ і $\|y_n\|_\infty = 1$.

Лема 2.2. *Для* $m, n \in \mathbb{N}$ *маємо*

$$R_m(y_n) = \begin{cases} M, & \text{якщо } m = n \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases}$$

де $M = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{k+1}\right)$.

Доведення. Зауважимо, що

$$R_m(y_n) = \int_0^1 (y_n(t))^m \, dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)} \big(\alpha_k p_n(nt - k + 1)\big)^m \, dt =$$
$$= \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^m\right) \int_0^1 (p_n(t))^m \, dt = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^m\right) R_m(p_n).$$

Оскільки

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^m = \begin{cases} 1, & \text{якщо } m \text{ є кратним } n \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases}$$

то $R_m(y_n) = 0$, якщо m не є кратним n. Якщо ж m є кратним n, тобто $m = k_0 n$ для деякого $k_0 \in \mathbb{N}$, то

$$R_m(y_n) = R_m(p_n) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{m}{n(k+1)}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{k_0}{k+1}\right).$$

Якщо $m \neq n$, то $k_0 > 1$ і один із множників дорівнює $\cos\frac{\pi}{2}$, і, як наслідок, $R_m(y_n) = 0$. У випадку $m = n$ маємо

$$R_n(y_n) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{k+1}\right) = M.$$

Лему доведено. □

Продовження доведення теореми.

Покладемо

$$x_n(t) = \frac{1}{\sqrt[n]{M}} y_n(t).$$

Враховуючи, що $\|y_n\|_\infty = 1$ і $0 < M < 1$, маємо

$$\|x_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt[n]{M}}\|y_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt[n]{M}} \leq \frac{1}{M}.$$

Із леми 2.2 випливає, що

$$R_m(x_n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } m = n \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Тепер побудуємо функцію x_ξ. Для $t \in \left[\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}, \frac{2^n-1}{2^n}\right)$, де $n \in \mathbb{N}$, покладемо

$$x_\xi(t) = 2\sqrt[n]{\xi_n}\, x_n(2^n t - 2^n + 2).$$

Нехай $a = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|\xi_n|}$. Тоді $|\xi_n| \le a^n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що

$$\|x_\xi\|_\infty \le \sup_{n\in\mathbb{N}} 2\left|\sqrt[n]{\xi_n}\right| \|x_n\|_\infty \le \frac{2a}{M}.$$

Отже, $x_\xi \in L_\infty[0,1]$. Для $m \in \mathbb{N}$ маємо

$$\begin{aligned} R_m(x_\xi) = & \int_0^1 (x_\xi(t))^m\, dt = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2\sqrt[n]{\xi_n}\right)^m \int_{\left[\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}, \frac{2^n-1}{2^n}\right)} \left(x_n(2^n t - 2^n + 2)\right)^m dt = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2\sqrt[n]{\xi_n}\right)^m \frac{1}{2^n} \int_0^1 (x_n(t))^m\, dt = \left(2\sqrt[m]{\xi_m}\right)^m \frac{1}{2^m} = \xi_m. \end{aligned}$$

Теорему доведено. □

Враховуючи, що відображення

$$L_\infty[0,1] \ni x \mapsto x \circ \sigma \in L_\infty[0,1],$$

де σ — довільний елемент множини $\Xi_{[0,1]}$, є лінійним оператором, із твердження 1.1 випливає наступне твердження.

Твердження 2.4. *Для кожного симетричного k-однорідного полінома $Q : L_\infty[0,1] \to \mathbb{C}$ і для кожних функцій $\sigma \in \Xi_{[0,1]}, x_1, \ldots, x_k \in L_\infty[0,1]$ маємо рівність*

$$A_Q(x_1 \circ \sigma, \ldots, x_k \circ \sigma) = A_Q(x_1, \ldots, x_k),$$

де A_Q — це k-лінійне симетричне відображення, асоційоване із поліномом Q.

Доведемо, що коефіцієнти алгебраїчної комбінації елементарних симетричних поліномів можна відновити за значеннями комбінації.

Твердження 2.5. *Для кожного* $N \in \mathbb{N}$ *існують функції* $x_j \in L_\infty[0,1]$ *і сталі* $u^{(j)}_{k_1,\ldots,k_N} \in \mathbb{C}$, *де* $j \in \{1, \ldots, (N+1)^N\}$ *і* $k_1, \ldots, k_N \in \{0, \ldots, N\}$ *такі, що для кожної функції* $G : L_\infty[0,1] \to \mathbb{C}$ *вигляду*

$$G(x) = \sum_{k_1=0}^{N} \ldots \sum_{k_N=0}^{N} \alpha_{k_1,\ldots,k_N} R_1^{k_1}(x) \ldots R_N^{k_N}(x),$$

де $\alpha_{k_1,\ldots,k_N} \in \mathbb{C}$, *виконується наступна рівність:*

$$\alpha_{k_1,\ldots,k_N} = \sum_{j=1}^{(N+1)^N} u^{(j)}_{k_1,\ldots,k_N} G(x_j).$$

Доведення. Для кожного $j \in \left\{1, \ldots, (N+1)^N\right\}$ за теоремою 2.1, існує функція $x_j \in L_\infty[0,1]$ така, що $R_m(x_j) = j^{(N+1)^{m-1}}$ для $1 \le m \le (N+1)^N$ і $R_m(x_j) = 0$ для $m > (N+1)^N$. Тоді

$$\sum_{k_1=0}^{N} \ldots \sum_{k_N=0}^{N} \alpha_{k_1,\ldots,k_N} j^{k_1 + k_2(N+1) + k_3(N+1)^2 + \ldots + k_N(N+1)^{N-1}} = G(x_j) \qquad (2.3)$$

для кожного $j \in \left\{1, \ldots, (N+1)^N\right\}$. Можна перевірити, що вираз $k_1 + k_2(N+1) + k_3(N+1)^2 + \ldots + k_N(N+1)^{N-1}$ набуває всіх значень від 0 до $(N+1)^N - 1$. Отже, визначник системи лінійних рівнянь (2.3) є, з точністю до перестановки, визначником Вандермонда, який не дорівнює нулю. Тому існують сталі $u^{(j)}_{k_1,\ldots,k_N} \in \mathbb{C}$, де $j \in \left\{1, \ldots, (N+1)^N\right\}$ і $k_1, \ldots, k_N \in \{0, \ldots, N\}$, такі, що

$$\alpha_{k_1,\ldots,k_N} = \sum_{j=1}^{(N+1)^N} u^{(j)}_{k_1,\ldots,k_N} G(x_j).$$

Твердження доведено. ☐

Доведемо основний результат даного підрозділу.

Теорема 2.2. *Кожен симетричний неперервний n-однорідний поліном $P : L_\infty[0,1] \to \mathbb{C}$ можна єдиним чином подати у вигляді*

$$P(x) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1}(x)\ldots R_n^{k_n}(x), \tag{2.4}$$

де $\alpha_{k_1,\ldots,k_n} \in \mathbb{C}$ і $x \in L_\infty[0,1]$. Іншими словами, множина $\{R_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ є алгебраїчним базисом алгебри всіх симетричних неперервних поліномів на просторі $L_\infty[0,1]$.

Доведення. Коли існування коефіцієнтів буде доведено, їхня єдиність випливатиме з твердження 2.5.

Існування коефіцієнтів будемо доводити індукцією за n. У випадку $n = 1$ поліном P є симетричним неперевним лінійним функціоналом. Визначимо функцію $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ рівністю

$$g(t) = P(\mathbf{1}_{[0,t]}).$$

За симетричністю і лінійністю полінома P,

$$g(t_1+t_2) = P\big(\mathbf{1}_{[0,t_1+t_2]}\big) = P\big(\mathbf{1}_{[0,t_1]} + \mathbf{1}_{[t_1,t_1+t_2]}\big) = P\big(\mathbf{1}_{[0,t_1]}\big) + P\big(\mathbf{1}_{[t_1,t_1+t_2]}\big) = \\ = P\big(\mathbf{1}_{[0,t_1]}\big) + P\big(\mathbf{1}_{[0,t_2]}\big) = g(t_1) + g(t_2), \tag{2.5}$$

де $t_1, t_2 \in [0,1]$ такі, що $t_1 + t_2 \leq 1$. Отже, функція g є адитивною, тобто, задовольняє функціональне рівняння Коші. За неперервністю полінома P також отримуємо обмеженість функції g. Відомо, що кожна обмежена адитивна функція на відрізку $[0,1]$ є обов'язково лінійною (див., напр., [15, розділ 2]). Отже, функція g є лінійною і, як наслідок, $g(t) = tg(1)$ для кожного $t \in [0,1]$. Отже,

$$P\big(\mathbf{1}_{[0,t]}\big) = tP\big(\mathbf{1}_{[0,1]}\big). \tag{2.6}$$

Нехай E — це вимірна підмножина відрізка $[0,1]$. Із твердження 2.2, у якому візьмемо $N = 1$ і $E_1 = E$, випливає, що існує функція $\sigma_E \in \Xi_{[0,1]}$

така, що $\mathbf{1}_E = \mathbf{1}_{[0,\mu(E)]} \circ \sigma_E$ майже скрізь на відрізку $[0,1]$. Із симетричності полінома P і з рівності (2.6) випливає, що

$$P\big(\mathbf{1}_E\big) = P\big(\mathbf{1}_{[0,\mu(E)]}\big) = \mu(E) P\big(\mathbf{1}_{[0,1]}\big).$$

Для простої вимірної за Лебегом функції $x = \sum_{j=1}^J h_j \mathbf{1}_{E_j}$, де $J \in \mathbb{N}$, $h_j \in \mathbb{C}$ і $E_j \subset [0,1]$ для $j \in \{1, \ldots, J\}$, за лінійністю полінома P,

$$P(x) = \sum_{j=1}^J h_j P\big(\mathbf{1}_{E_j}\big) = P\big(\mathbf{1}_{[0,1]}\big) \sum_{j=1}^J h_j \mu(E_j) = P\big(\mathbf{1}_{[0,1]}\big) R_1(x).$$

Оскільки множина простих вимірних за Лебегом функцій є щільною в просторі $L_\infty[0,1]$, то із неперервності полінома P випливає, що

$$P(x) = P\big(\mathbf{1}_{[0,1]}\big) R_1(x)$$

для кожної функції $x \in L_\infty[0,1]$. Для випадку $n = 1$ доведення завершено.

Припустимо, що теорема є правильною для кожного $m \in \{1, \ldots, n-1\}$. Доведемо її для n. Для того, щоб це зробити, доведемо деякі леми.

Лема 2.3. *Нехай* $1 \le m < n$, $[a,b] \subset [0,1]$ *і нехай функції* $y_1, \ldots, y_{n-m} \in L_\infty[0,1]$ *такі, що їхні звуження на відрізок* $[a,b]$ *є сталими. Тоді існує стала* $C_1(m,a,b) > 0$ *така, що для кожної вимірної підмножини* E *відрізка* $[a,b]$

$$\big|A_P\big(\underbrace{\mathbf{1}_E, \ldots, \mathbf{1}_E}_{m}, y_1, \ldots, y_{n-m}\big)\big| \le \mu(E) \|y_1\|_\infty \cdots \|y_{n-m}\|_\infty C_1(m,a,b).$$

Доведення. Для кожної функції $x \in L_\infty[0,1]$ покладемо

$$\widehat{x}(t) = \begin{cases} x\left(\frac{t-a}{b-a}\right), & \text{якщо } t \in [a,b] \\ 0, & \text{якщо } t \in [0,1] \setminus [a,b]. \end{cases}$$

Нехай

$$L(x) = A_P\big(\underbrace{\widehat{x}, \ldots, \widehat{x}}_{m}, y_1, \ldots, y_{n-m}\big)$$

для $x \in L_\infty[0,1]$. Для кожної функції $\sigma \in \Xi_{[0,1]}$ покладемо

$$\widetilde{\sigma}(t) = \begin{cases} a + (b-a)\sigma\left(\frac{t-a}{b-a}\right), & \text{якщо } t \in [a,b] \\ t, & \text{якщо } t \in [0,1] \setminus [a,b]. \end{cases}$$

Можна переконатися, що $\widetilde{\sigma} \in \Xi_{[0,1]}$. Доведемо, що $\widehat{x \circ \sigma} = \widehat{x} \circ \widetilde{\sigma}$. Справді, якщо $t \in [a, b]$, то

$$\widehat{x \circ \sigma}(t) = (x \circ \sigma) \left(\frac{t-a}{b-a} \right)$$

і

$$\big(\widehat{x} \circ \widetilde{\sigma}\big)(t) = \widehat{x}\big(\widetilde{\sigma}(t)\big) = \widehat{x} \left(a + (b-a)\sigma \left(\frac{t-a}{b-a} \right) \right) = \\ = x \left(\frac{a + (b-a)\sigma \left(\frac{t-a}{b-a} \right) - a}{b-a} \right) = (x \circ \sigma) \left(\frac{t-a}{b-a} \right).$$

Якщо $t \in [0,1] \setminus [a,b]$, то $\widehat{x \circ \sigma}(t) = 0$ і тому $\big(\widehat{x} \circ \widetilde{\sigma}\big)(t) = \widehat{x}\big(\widetilde{\sigma}(t)\big) = \widehat{x}(t) = 0$. Доведено. Таким чином,

$$L(x \circ \sigma) = A_P\big(\underbrace{\widehat{x \circ \sigma}, \ldots, \widehat{x \circ \sigma}}_{m}, y_1, \ldots, y_{n-m}\big) = \\ = A_P\big(\underbrace{\widehat{x} \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, \widehat{x} \circ \widetilde{\sigma}}_{m}, y_1, \ldots, y_{n-m}\big).$$

Оскільки звуження на відрізок $[a,b]$ функцій y_j є сталими, то $y_j \circ \widetilde{\sigma} = y_j$ для $j \in \{1, \ldots, n-m\}$. Тому

$$A_P\big(\underbrace{\widehat{x} \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, \widehat{x} \circ \widetilde{\sigma}}_{m}, y_1, \ldots, y_{n-m}\big) = A_P\big(\underbrace{\widehat{x} \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, \widehat{x} \circ \widetilde{\sigma}}_{m}, y_1 \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, y_{n-m} \circ \widetilde{\sigma}\big).$$

Згідно із твердженням 2.4,

$$A_P\big(\underbrace{\widehat{x} \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, \widehat{x} \circ \widetilde{\sigma}}_{m}, y_1 \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, y_{n-m} \circ \widetilde{\sigma}\big) = A_P\big(\underbrace{\widehat{x}, \ldots, \widehat{x}}_{m}, y_1, \ldots, y_{n-m}\big) = L(x).$$

Отже, $L(x \circ \sigma) = L(x)$ для кожної функції $\sigma \in \Xi_{[0,1]}$. Із неперервності відображення A_P випливає неперервність полінома L. Отже, L є неперервним симетричним m-однорідним поліномом на просторі $L_\infty[0,1]$. Згідно із припущенням індукції, поліном L можна подати у вигляді

$$L(x) = \sum_{\substack{k_1 + 2k_2 + \ldots + mk_m = m \\ k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1, \ldots, k_m}^{([a,b])}(y_1, \ldots, y_{n-m}) R_1^{k_1}(x) \ldots R_m^{k_m}(x),$$

де коефіцієнти залежать від вибору відрізка $[a,b]$ і функцій $y_1, \ldots, y_{n-m}$.

Згідно із твердженням 2.5, існують функції $x_j \in L_\infty[0,1]$ і сталі $u^{(j)}_{k_1,\ldots,k_m} \in \mathbb{C}$, де $j \in \{1,\ldots,(m+1)^m\}$ і $k_1,\ldots,k_m \in \{0,\ldots,m\}$, такі, що

$$\alpha^{([a,b])}_{k_1,\ldots,k_m}(y_1,\ldots,y_{n-m}) = \sum_{j=1}^{(m+1)^m} u^{(j)}_{k_1,\ldots,k_m} L(x_j).$$

Отже,

$$\alpha^{([a,b])}_{k_1,\ldots,k_m}(y_1,\ldots,y_{n-m}) = \sum_{j=1}^{(m+1)^m} u^{(j)}_{k_1,\ldots,k_m} A_P\big(\underbrace{\widehat{x_j},\ldots,\widehat{x_j}}_{m}, y_1,\ldots,y_{n-m}\big).$$

Звідси випливає, що відображення $\alpha^{([a,b])}_{k_1,\ldots,k_m} : (L_\infty[0,1])^{n-m} \to \mathbb{C}$ є неперервним і $(n-m)$-лінійним. Тому, згідно із нерівністю (1.5),

$$\left|\alpha^{([a,b])}_{k_1,\ldots,k_m}(y_1,\ldots,y_{n-m})\right| \le \left\|\alpha^{([a,b])}_{k_1,\ldots,k_m}\right\| \|y_1\|_\infty \cdots \|y_{n-m}\|_\infty.$$

Нехай E — вимірна підмножина відрізка $[a,b]$. Покладемо

$$\widehat{E} = \left\{\frac{t-a}{b-a} : \ t \in E\right\}.$$

Оскільки $E \subset [a,b]$, то $\widehat{E} \subset [0,1]$. Оскільки $\widehat{\mathbf{1}_{\widehat{E}}} = \mathbf{1}_E$, то

$$A_P\big(\underbrace{\mathbf{1}_E,\ldots,\mathbf{1}_E}_{m}, y_1,\ldots,y_{n-m}\big) = A_P\Big(\underbrace{\widehat{\mathbf{1}_{\widehat{E}}},\ldots,\widehat{\mathbf{1}_{\widehat{E}}}}_{m}, y_1,\ldots,y_{n-m}\Big) = L\big(\mathbf{1}_{\widehat{E}}\big) =$$
$$= \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+mk_m=m\\ k_1,\ldots,k_m\in\mathbb{Z}_+}} \alpha^{([a,b])}_{k_1,\ldots,k_m}(y_1,\ldots,y_{n-m}) R_1^{k_1}\big(\mathbf{1}_{\widehat{E}}\big)\ldots R_m^{k_m}\big(\mathbf{1}_{\widehat{E}}\big) =$$
$$= \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+mk_m=m\\ k_1,\ldots,k_m\in\mathbb{Z}_+}} \alpha^{([a,b])}_{k_1,\ldots,k_m}(y_1,\ldots,y_{n-m}) \mu\big(\widehat{E}\big)^{k_1+k_2+\ldots+k_m}.$$

Взявши до уваги, що $\mu\big(\widehat{E}\big)^{k_1+k_2+\ldots+k_m} \le \mu\big(\widehat{E}\big) = \frac{1}{b-a}\mu(E)$, отримуємо нерівність

$$\big|A_P\big(\underbrace{\mathbf{1}_E,\ldots,\mathbf{1}_E}_{m}, y_1,\ldots,y_{n-m}\big)\big| \le$$
$$\le \frac{1}{b-a}\mu(E)\|y_1\|_\infty \cdots \|y_{n-m}\|_\infty \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+mk_m=m\\ k_1,\ldots,k_m\in\mathbb{Z}_+}} \left\|\alpha^{([a,b])}_{k_1,\ldots,k_m}\right\|.$$

Позначивши

$$C_1(m,a,b) = \frac{1}{b-a} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+mk_m=m \\ k_1,\ldots,k_m\in\mathbb{Z}_+}} \left\|\alpha^{([a,b])}_{k_1,\ldots,k_m}\right\|,$$

отримуємо потрібний результат. Лему доведено. $\square$

Лема 2.4. *Нехай* $1 \le m < n$ *і відрізки* $[a,b],[c_1,d_1],[c_2,d_2] \subset [0,1]$ *такі, що* $\mu\big([a,b]\cap[c_1,d_1]\big)=0$, $\mu\big([a,b]\cap[c_2,d_2]\big)=0$, $\mu\big([c_1,d_1]\cap[c_2,d_2]\big)=0$ *і* $\mu\big([c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]\big) \le \mu\big([a,b]\big)$. *Нехай функції* $y_1,\ldots,y_{n-m}\in L_\infty[0,1]$ *такі, що їхні звуження на множину* $[a,b]\cup[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]$ *є сталими. Тоді існує стала* $C(m,a,b)>0$ *така, що*

$$\big|A_P\big(\underbrace{\mathbf{1}_{[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]},\ldots,\mathbf{1}_{[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]}}_{m},y_1,\ldots,y_{n-m}\big)\big| \le$$
$$\le \mu\big([c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]\big)\|y_1\|_\infty\ldots\|y_{n-m}\|_\infty C(m,a,b).$$

Доведення. Визначимо відображення $\sigma_1:[0,1]\to[0,1]$ формулою:

$$\sigma_1(t)=\begin{cases} a+t-c_1, & \text{якщо } t\in(c_1,d_1)\\ c_1+t-a, & \text{якщо } t\in(a,a+d_1-c_1)\\ a+d_1-c_1+t-c_2, & \text{якщо } t\in(c_2,d_2)\\ c_2+t-(a+d_1-c_1), & \text{якщо } t\in(a+d_1-c_1,a+d_1-c_1+d_2-c_2)\\ t, & \text{інакше.}\end{cases}$$

Можна перевірити, що $\sigma_1\in\Xi_{[0,1]}$. Згідно із твердженням 2.4,

$$A_P\big(\underbrace{\mathbf{1}_{[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]},\ldots,\mathbf{1}_{[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]}}_{m},y_1,\ldots,y_{n-m}\big) =$$
$$= A_P\big(\underbrace{\mathbf{1}_{[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]}\circ\sigma_1,\ldots,\mathbf{1}_{[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]}\circ\sigma_1}_{m},y_1\circ\sigma_1,\ldots,y_{n-m}\circ\sigma_1\big).$$

Оскільки $\mathbf{1}_{[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]}\circ\sigma_1=\mathbf{1}_{[a,a+d_1-c_1+d_2-c_2]}$ і $y_j\circ\sigma_1=y_j$ для кожного $j\in\{1,\ldots,n-m\}$, то

$$A_P\big(\underbrace{\mathbf{1}_{[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]},\ldots,\mathbf{1}_{[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]}}_{m},y_1,\ldots,y_{n-m}\big) =$$
$$= A_P\big(\underbrace{\mathbf{1}_{[a,a+d_1-c_1+d_2-c_2]},\ldots,\mathbf{1}_{[a,a+d_1-c_1+d_2-c_2]}}_{m},y_1,\ldots,y_{n-m}\big).$$

Згідно із лемою 2.3, існує стала $C_1(m,a,b) > 0$ така, що

$$\Big|A_P\big(\underbrace{\mathbf{1}_{[a,a+d_1-c_1+d_2-c_2]},\ldots,\mathbf{1}_{[a,a+d_1-c_1+d_2-c_2]}}_{m},y_1,\ldots,y_{n-m}\big)\Big| \leq$$

$$\leq \mu\big([a,a+d_1-c_1+d_2-c_2]\big)\|y_1\|_\infty\ldots\|y_{n-m}\|_\infty C_1(m,a,b).$$

Покладемо $C(m,a,b) = C_1(m,a,b)$. Лему доведено. □

Лема 2.5. *Існує послідовність* $\{s_k\}_{k=1}^\infty \subset [0,1]$ *така, що* $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = 0$ *і для кожної послідовності* $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ *такої, що* $0 \leq r_k \leq s_k$, *виконується нерівність*

$$\big|P\big(\mathbf{1}_{[0,r_k]}\big)\big| \leq \frac{1}{k}\big(\|P\|+1\big).$$

Доведення. Покладемо $s_1 = 1$. За неперервністю полінома P,

$$\big|P\big(\mathbf{1}_{[0,r_1]}\big)\big| \leq \|P\| < \|P\|+1$$

для кожного $0 \leq r_1 \leq s_1$.

Для $k \geq 2$ нехай $t \geq 0$ таке, що $kt < \frac{1}{2}$. Оскільки $\mathbf{1}_{[0,kt]} = \sum_{j=1}^k \mathbf{1}_{[(j-1)t,jt]}$ майже скрізь, то, згідно із поліноміальною формулою (1.2),

$$P\big(\mathbf{1}_{[0,kt]}\big) = \sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_k=n\\ n_1,n_2,\ldots,n_k\in\mathbb{Z}_+}} \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}\times$$

$$\times A_P\big(\underbrace{\mathbf{1}_{[0,t]},\ldots,\mathbf{1}_{[0,t]}}_{n_1},\underbrace{\mathbf{1}_{[t,2t]},\ldots,\mathbf{1}_{[t,2t]}}_{n_2},\ldots,\underbrace{\mathbf{1}_{[(k-1)t,kt]},\ldots,\mathbf{1}_{[(k-1)t,kt]}}_{n_k}\big).$$

Для кожного мультиіндексу $(n_1,n_2,\ldots,n_k)$, нехай $l = l_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)} \in \{1,\ldots,k\}$ — це позиція першого ненульового елемента в $(n_1,n_2,\ldots,n_k)$. Сума доданків, для яких $n_l = n$, тобто мультиіндекс має лише один ненульовий елемент, дорівнює $kP\big(\mathbf{1}_{[0,t]}\big)$ за симетричністю P. Тому

$$kP\big(\mathbf{1}_{[0,t]}\big) = P\big(\mathbf{1}_{[0,kt]}\big) - \sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_k=n\\ n_l<n\\ n_1,n_2,\ldots,n_k\in\mathbb{Z}_+}} \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}\times$$

$$\times A_P\big(\underbrace{\mathbf{1}_{[0,t]},\ldots,\mathbf{1}_{[0,t]}}_{n_1},\underbrace{\mathbf{1}_{[t,2t]},\ldots,\mathbf{1}_{[t,2t]}}_{n_2},\ldots,\underbrace{\mathbf{1}_{[(k-1)t,kt]},\ldots,\mathbf{1}_{[(k-1)t,kt]}}_{n_k}\big).$$

Якщо $n_l < n$, то, згідно із лемою 2.4, в якій покладемо $m = n_l$, $[a, b] = [\frac{1}{2}, 1]$, $[c_1, d_1] = [(l-1)t, lt]$ і $c_2 = d_2$,

$$\Big|A_P\big(\underbrace{\mathbf{1}_{[0,t]}, \ldots, \mathbf{1}_{[0,t]}}_{n_1}, \underbrace{\mathbf{1}_{[t,2t]}, \ldots, \mathbf{1}_{[t,2t]}}_{n_2}, \ldots, \underbrace{\mathbf{1}_{[(k-1)t,kt]}, \ldots, \mathbf{1}_{[(k-1)t,kt]}}_{n_k}\big)\Big| \leq$$

$$\leq tC\Big(n_l, \frac{1}{2}, 1\Big).$$

Врахувавши, що $\big|P\big(\mathbf{1}_{[0,kt]}\big)\big| \leq \|P\|$, маємо

$$\big|kP\big(\mathbf{1}_{[0,t]}\big)\big| \leq \|P\| + t \sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_k=n \\ n_l<n \\ n_1,n_2,\ldots,n_k \in \mathbb{Z}_+}} \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} C\Big(n_l, \frac{1}{2}, 1\Big).$$

Покладемо

$$s_k = \min\left\{(2k+1)^{-1}, \left(\sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_k=n \\ n_l<n \\ n_1,n_2,\ldots,n_k \in \mathbb{Z}_+}} \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} C\Big(n_l, \frac{1}{2}, 1\Big)\right)^{-1}\right\}.$$

Тоді для $0 \leq t \leq s_k$,

$$k\big|P\big(\mathbf{1}_{[0,t]}\big)\big| \leq \|P\| + 1.$$

Отже,

$$\big|P\big(\mathbf{1}_{[0,r_k]}\big)\big| \leq \frac{1}{k}\big(\|P\| + 1\big).$$

Лему доведено. □

Лема 2.6. *Нехай* $x = \sum_{j=1}^{N} h_j \mathbf{1}_{[a_j,b_j]}$, *де* $n \in \mathbb{N}$, $h_j \in \mathbb{C}$ *для* $j \in \{1, \ldots, N\}$ *і* $a_j < b_j \leq a_{j+1}$ *для кожного* $j \in \{1, \ldots, N-1\}$. *Тоді для кожного* $l \in \{1, \ldots, N\}$ *і для кожних послідовностей* $\{a_l^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b_l^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, *таких, що* $a_l \leq a_l^{(k)} \leq a_l + \frac{1}{2}\min\{s_k, b_l - a_l\}$ *і* $b_l - \frac{1}{2}\min\{s_k, b_l - a_l\} \leq b_l^{(k)} \leq b_l$, *буде виконуватись рівність*

$$\lim_{k\to\infty} P\big(x^{(k)}\big) = P(x),$$

де

$$x^{(k)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq l}}^{N} h_j \mathbf{1}_{[a_j,b_j]} + h_l \mathbf{1}_{\left[a_l^{(k)}, b_l^{(k)}\right]}.$$

Доведення. Нехай $\delta^{(k)} = -h_l \mathbf{1}_{[a_l, a_l^{(k)}] \cup [b_l^{(k)}, b_l]}$. Тоді $x^{(k)} = x + \delta^{(k)}$. Згідно із біноміальною формулою (1.3),

$$P\big(x^{(k)}\big) = P(x) + P\big(\delta^{(k)}\big) + \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m} A_P\big(\underbrace{\delta^{(k)}, \ldots, \delta^{(k)}}_{m}, \underbrace{x, \ldots, x}_{n-m}\big).$$

Оскільки P є симетричним n-однорідним поліномом, то

$$P\big(\delta^{(k)}\big) = (-h_l)^n P\Big(\mathbf{1}_{[a_l, a_l^{(k)}] \cup [b_l^{(k)}, b_l]}\Big) = (-h_l)^n P\Big(\mathbf{1}_{[0, a_l^{(k)} - a_l + b_l - b_l^{(k)}]}\Big).$$

Оскільки $a_l^{(k)} - a_l + b_l - b_l^{(k)} \le s_k$, то за лемою 2.5,

$$\Big| P\Big(\mathbf{1}_{[0, a_l^{(k)} - a_l + b_l - b_l^{(k)}]}\Big)\Big| \le \frac{1}{k}\big(\|P\| + 1\big).$$

Отже,

$$\big|P\big(\delta^{(k)}\big)\big| \le \frac{1}{k}|h_l|^n\big(\|P\| + 1\big).$$

Згідно із лемою 2.4, в якій покладемо $[c_1, d_1] = \Big[a_l, a_l^{(k)}\Big]$, $[c_2, d_2] = \Big[b_l^{(k)}, b_l\Big]$, $[a, b] = [a_l, b_l]$ і $y_1 = \ldots = y_{n-m} = x$,

$$\begin{aligned} \big|A_P\big(\underbrace{\delta^{(k)}, \ldots, \delta^{(k)}}_{m}, \underbrace{x, \ldots, x}_{n-m}\big)\big| = |h_l|^m \big|A_P\big(\underbrace{\mathbf{1}_A, \ldots, \mathbf{1}_A}_{m}, \underbrace{x, \ldots, x}_{n-m}\big)\big| \le \\ \le \mu\left(\Big[a_l, a_l^{(k)}\Big] \cup \Big[b_l^{(k)}, b_l\Big]\right) |h_l|^m \|x\|_\infty^{n-m} C(m, a_l, b_l) \le \\ \le s_k |h_l|^m \|x\|_\infty^{n-m} C(m, a_l, b_l). \end{aligned}$$

Тому

$$\big|P\big(x^{(k)}\big) - P(x)\big| \le \frac{1}{k}|h_l|^n\big(\|P\| + 1\big) + s_k \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m} |h_l|^m \|x\|_\infty^{n-m} C(m, a_l, b_l).$$

Нагадаємо, що $\lim_{k\to\infty} s_k = 0$. Отже,

$$\lim_{k\to\infty} P\big(x^{(k)}\big) = P(x).$$

Лему доведено. □

Продовження доведення теореми.

Для $M \in \mathbb{N}$ покладемо

$$G_M = \left\{ \sum_{j=1}^{2^M} d_j \mathbf{1}_{\left[\frac{j-1}{2^M}, \frac{j}{2^M}\right]} : \ d_j \in \mathbb{C} \right\}.$$

Також покладемо

$$G = \bigcup_{M=1}^{\infty} G_M.$$

Визначимо відображення $g_M : \mathbb{C}^{2^M} \to \mathbb{C}$ рівністю

$$g_M\big(d_1, \ldots, d_{2^M}\big) = P\left(\sum_{j=1}^{2^M} d_j \mathbf{1}_{\left[\frac{j-1}{2^M}, \frac{j}{2^M}\right]} \right),$$

де $d_1, \ldots, d_{2^M} \in \mathbb{C}$. Зауважимо, що відображення g_M є симетричним поліномом степеня n від 2^M скалярних змінних. Відомо, що існує поліном p_M такий, що

$$g_M\big(d_1, \ldots, d_{2^M}\big) = p_M\left(\frac{1}{2^M} \sum_{j=1}^{2^M} d_j, \frac{1}{2^M} \sum_{j=1}^{2^M} d_j^2, \ldots, \frac{1}{2^M} \sum_{j=1}^{2^M} d_j^n \right).$$

Отже, для кожної функції $x \in G_M$,

$$P(x) = p_M\big(R_1(x), R_2(x), \ldots, R_n(x)\big).$$

Тобто,

$$P(x) = \sum_{k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n} \alpha_{k_1, \ldots, k_n} R_1^{k_1}(x) R_2^{k_2}(x) \ldots R_n^{k_n}(x). \tag{2.7}$$

Оскільки $G_M \subset G_{M'}$ для $M \le M'$, то коефіцієнти $\alpha_{k_1,\ldots,k_n}$ не залежать від M. Отже, рівність (2.7) виконується для кожної функції $x \in G$.

Нехай

$$D = \left\{ \frac{K}{2^M} : \ M \in \mathbb{N}, K \in \left\{0, 1, \ldots, 2^M\right\} \right\}.$$

Нехай $x = \sum_{j=1}^{N} h_j \mathbf{1}_{[a_j, b_j]}$, де $h_j \in \mathbb{C}$ для $j \in \{1, \ldots, N\}$ і $a_j < b_j \le a_{j+1}$ для $j \in \{1, \ldots, N-1\}$.

Для кожного $l \in \{1, \ldots, N\}$ виберемо послідовності $\big\{a_l^{(k)}\big\}_{k=1}^{\infty}, \big\{b_l^{(k)}\big\}_{k=1}^{\infty} \subset D$ такі, що

$$a_l \le a_l^{(k)} \le a_l + \frac{1}{2} \min\{s_k, b_l - a_l\},$$

$$b_l - \frac{1}{2}\min\{s_k, b_l - a_l\} \leq b_l^{(k)} \leq b_l.$$

Тоді для кожного мультиіндексу $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_N) \in \mathbb{N}^N$ функція

$$x_\varkappa = \sum_{j=1}^N h_j \mathbf{1}_{\left[a_j^{(\varkappa_j)}, b_j^{(\varkappa_j)}\right]}$$

належить до множини G. Використовуючи лему 2.6 N разів, отримуємо

$$\begin{aligned} P(x) &= \lim_{\varkappa_1\to\infty} \lim_{\varkappa_2\to\infty} \ldots \lim_{\varkappa_N\to\infty} P(x_\varkappa) = \\ &= \lim_{\varkappa_1\to\infty} \lim_{\varkappa_2\to\infty} \ldots \lim_{\varkappa_N\to\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1}(x_\varkappa)\ldots R_n^{k_n}(x_\varkappa) = \\ &= \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1}(x)\ldots R_n^{k_n}(x). \end{aligned}$$

Нехай

$$x = \sum_{j=1}^N h_j \mathbf{1}_{E_j},$$

де $E_1, E_2, \ldots, E_N$ — це неперетинні вимірні підмножини відрізка $[0,1]$. Згідно із твердженням 2.2, існує функція $\sigma = \sigma_{E_1,\ldots,E_N} \in \Xi_{[0,1]}$ така, що

$$\mathbf{1}_{E_m} = \mathbf{1}_{\left[\sum_{j=1}^{m-1}\mu(E_j), \sum_{j=1}^{m}\mu(E_j)\right]} \circ \sigma$$

для кожного $m \in \{1, \ldots, N\}$ майже скрізь на відрізку $[0,1]$. Згідно із симетричністю полінома P,

$$\begin{aligned} P(x) &= P\big(x \circ \sigma^{-1}\big) = P\left(\sum_{j=1}^N h_j \mathbf{1}_{\left[\sum_{m=1}^{j-1}\mu(A_m), \sum_{m=1}^{j}\mu(A_m)\right]}\right) = \\ &= \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1}(x)\ldots R_n^{k_n}(x). \end{aligned}$$

Отже, для кожної простої вимірної функції x рівність (2.7) виконується. Оскільки множина простих вимірних функцій є щільною в просторі $L_\infty[0,1]$, то із неперервності полінома P випливає, що рівність (2.7) виконується для кожної функції $x \in L_\infty[0,1]$. Теорему доведено. $\square$

2.2. Спектр алгебри Фреше цілих симетричних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку

Нехай $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ — це підалгебра алгебри Фреше $H_b(L_\infty[0,1])$, введеної на с. 59, яка складається зі всіх функцій $f \in H_b(L_\infty[0,1])$, які є симетричними. Даний підрозділ присвячено вивченню спектра алгебри Фреше $H_{bs}\left(L_\infty[0,1]\right)$. Буде показано, що кожен характер (елемент спектра) цієї алгебри є функціоналом обчислення значення в точці. Також буде показано, що спектр алгебри Фреше $H_{bs}\left(L_\infty[0,1]\right)$ можна ототожнити із множиною всіх послідовностей комплексних чисел $\{c_n\}_{n=1}^\infty$, для яких послідовність $\left\{|c_n|^{1/n}\right\}_{n=1}^\infty$ є обмеженою.

Зауважимо, що повнота алгебри $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ випливає із наступної леми.

Лема 2.7. *Нехай X — комплексний банахів простір і нехай послідовність функцій $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset H_b(X)$ збігається до функції $f \in H_b(X)$. Нехай $A : X \to X$ — довільне відображення. Якщо для деякого $x \in X$ виконується рівність $f_n(A(x)) = f_n(x)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то $f(A(x)) = f(x)$.*

Доведення. Нехай $x \in X$ такий, що $f_n(A(x)) = f_n(x)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Нехай $r = \max\{\|x\|, \|A(x)\|\}$. Оскільки послідовність $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ збігається до функції f, то, зокрема, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_r = 0$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\|y\|\le r} |f(y) - f_n(y)| = 0. \tag{2.8}$$

Оскільки $\|x\| \le r$ і $\|A(x)\| \le r$, то із рівності (2.8) випливають рівності $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ і $\lim_{n\to\infty} f_n(A(x)) = f(A(x))$. Оскільки $f_n(A(x)) = f_n(x)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(A(x))$. Внаслідок єдиності границі послідовності, $f(x) = f(A(x))$. Лему доведено. □

Із леми 2.7 випливає, що якщо послідовність симетричних функцій $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset H_b(L_\infty[0,1])$ збігається до функції $f \in H_b(L_\infty[0,1])$, то функція

f є симетричною. Звідси випливає повнота алгебри $H_{bs}(L_\infty[0,1])$. Отже, алгебра $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ є алгеброю Фреше.

Кожну функцію $f \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$ можна подати у вигляді її ряду Тейлора із неперервних однорідних поліномів, які, у свою чергу, як наслідок інтегральної формули Коші (1.13) і симетричності функції f, теж є симетричними. Тому, згідно із теоремою 2.2, кожну функцію $f \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$ можна подати у вигляді

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1}(x)\cdots R_n^{k_n}(x) \qquad (2.9)$$

де $\alpha_{k_1k_2\ldots k_n} \in \mathbb{C}$ і ряд збігається рівномірно на обмежених множинах. Для кожного характера $\varphi \in \mathcal{M}(H_{bs}(L_\infty[0,1]))$, де $\mathcal{M}(H_{bs}(L_\infty[0,1]))$ — спектр (див. означення 1.6) алгебри Фреше $H_{bs}(L_\infty[0,1])$, внаслідок неперервності, лінійності і мультиплікативності характера φ, маємо

$$\varphi(f) = \alpha_0\varphi(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} \varphi(R_1)^{k_1}\cdots\varphi(R_n)^{k_n}.$$

Оскільки характер φ є нетривіальним функціоналом, то $\varphi(1) = 1$ внаслідок рівності

$$\varphi(1) = \varphi(1\cdot 1) = \varphi(1)^2.$$

Тому для кожного характера $\varphi \in \mathcal{M}(H_{bs}(L_\infty[0,1]))$,

$$\varphi(f) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} \varphi(R_1)^{k_1}\cdots\varphi(R_n)^{k_n}.$$

Таким чином, бачимо, що кожен характер $\varphi \in \mathcal{M}(H_{bs}(L_\infty[0,1]))$ цілком визначено послідовністю його значень на поліномах R_n :

$$(\varphi(R_1), \varphi(R_2), \ldots, \varphi(R_n), \ldots).$$

Твердження 2.6. *Для кожного характера* $\varphi \in \mathcal{M}(H_{bs}(L_\infty[0,1]))$ *існує число* $a > 0$ *таке, що* $|\varphi(R_n)| \le a^n$ *для кожного* $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. Нехай $\varphi \in \mathcal{M}(H_{bs}(L_\infty[0,1]))$. Оскільки характер φ є неперервним лінійним функціоналом на алгебрі Фреше $H_{bs}(L_\infty[0,1])$, то існує число $r > 0$ таке, що характер φ є неперервним відносно норми $\|\cdot\|_r$. Зауважимо, що алгебра $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ є нормованою алгеброю відносно норми $\|\cdot\|_r$, тому, згідно із твердженням 1.3,

$$\sup_{\substack{f \in H_{bs}(L_\infty[0,1]) \\ \|f\|_r \le 1}} |\varphi(f)| = 1. \tag{2.10}$$

Зауважимо, що $\|R_n\|_r = r^n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, тому $\|r^{-n} R_n\|_r = 1$. Тому, згідно із рівністю (2.10),

$$|\varphi(r^{-n} R_n)| \le 1$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тому, враховуючи однорідність функціонала φ, отримуємо нерівність

$$|\varphi(R_n)| \le r^n$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Отже, достатньо покласти $a = r$. Твердження доведено. ☐

Зауважимо, що для довільного фіксованого елемента $x \in L_\infty[0,1]$ функціонал обчислення значення в точці $\delta_x : H_{bs}(L_\infty[0,1]) \to \mathbb{C}$, визначений формулою

$$\delta_x(f) = f(x),$$

де $f \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$, належить до спектра $\mathcal{M}(H_{bs}(L_\infty[0,1]))$. Згідно із теоремою 2.1, для кожної послідовності $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ такої, що послідовність $\big\{\sqrt[n]{|\xi_n|}\big\}_{n=1}^\infty$ є обмеженою, існує функція $x_\xi \in L_\infty[0,1]$ така, що $R_n\big(x_\xi\big) = \xi_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Таким чином, отримуємо наступні наслідки.

Наслідок 2.1. *Кожен характер $\varphi \in \mathcal{M}(H_{bs}(L_\infty[0,1]))$ є функціоналом обчислення значення в точці.*

Наслідок 2.2. *Множина $\mathcal{M}(H_{bs}(L_\infty[0,1]))$ може бути ототожнена з множиною $\Delta \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ всіх послідовностей $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ таких, що послідовність $\big\{\sqrt[n]{|\xi_n|}\big\}_{n=1}^\infty$ є обмеженою.*

2.3. Ізоморфізм алгебри Фреше цілих симетричних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку і алгебри Фреше цілих функцій на сильно спряженому просторі до простору цілих функцій від однієї комплексної змінної

В даному підрозділі буде задано аналітичну структуру на спектрі алгебри Фреше $H_{bs}\left(L_\infty[0,1]\right)$. Буде розглянуто спектр алгебри $H_{bs}\left(L_\infty[0,1]\right)$ як сильний спряжений простір $H'(\mathbb{C})_\beta$ до простору Фреше $H(\mathbb{C})$ всіх цілих аналітичних функцій від однієї комплексної змінної із топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах і буде показано, що алгебра Фреше $H_{bs}\left(L_\infty[0,1]\right)$ є ізоморфною до алгебри Фреше $H(H'(\mathbb{C})_\beta)$ всіх комплекснозначних цілих аналітичних функцій на просторі $H'(\mathbb{C})_\beta$.

Згідно із [47, с. 226, Наслідок. 5.10], сильно спряжений простір $H'(\mathbb{C})_\beta$ до простору всіх цілих функцій $H(\mathbb{C})$ із топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах (див. визначення на с. 59), є ізоморфним із визначеним в означенні 1.16 простором $\Lambda(P_H')$, де

$$P_H' = \big\{\{|x_n|\}_{n=1}^\infty : \ \{x_n\}_{n=1}^\infty \in \Lambda(P_H)\big\},$$

тобто

$$P_H' = \big\{\{w_n\}_{n=1}^\infty \subset [0,+\infty) : \ \lim_{n\to\infty} w_n^{1/n} = 0\big\}.$$

Можна перевірити, що $\Lambda(P_H')$ є простором всіх послідовностей комплексних чисел $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ таких, що $\sup_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^{1/n} < \infty$, тобто в теоретико-множинному сенсі простір $\Lambda(P_H')$ збігається із множиною послідовностей Δ, визначеній у наслідку 2.2, яка, в свою чергу, є у бієктивній відповідності із спектром $\mathcal{M}(H_{bs}(L_\infty[0,1]))$. Таким чином, простір $\Lambda(P_H')$ (відповідно, і ізоморфний до цього простору простір $H'(\mathbb{C})_\beta$) можна розглядати як реалізацію спектра $\mathcal{M}(H_{bs}(L_\infty[0,1]))$ із введеною на ньому структурою топологічного лінійного простору.

Як згадувалося у лемі 1.1, простір $H(\mathbb{C})$ є A-ядерним простором. Як наслідок, згідно із [47, с. 227, твердження 5.12], простір $H'(\mathbb{C})_\beta$ також є A-ядерним простором. Оскільки простір $H(\mathbb{C})$ є простором Фреше, то простір $H'(\mathbb{C})_\beta$ є (DF)-простором. Оскільки простір $H(\mathbb{C})$ є простором Монтеля, то, згідно із [97, с. 188, п. 5.9], простір $H'(\mathbb{C})_\beta$ також є простором Монтеля. Таким чином, простір $H'(\mathbb{C})_\beta$, а з ним і простір $\Lambda(P'_H)$, є A-ядерним (DFM)-простором.

У наступних двох лемах побудовано явним чином фундаментальну послідовність обмежених множин в просторі $\Lambda(P'_H)$.

Лема 2.8. *Нехай $r > 0$. Множина*

$$K_r = \left\{\{c_n\}_{n=1}^\infty \in \Lambda(P'_H) : \ |c_n| \le r^n \ \textit{для кожного}\ n \in \mathbb{N}\right\} \tag{2.11}$$

є компактною в просторі $\Lambda(P'_H)$.

Доведення. Оскільки простір $\Lambda(P'_H)$ є простором Монтеля, то кожна обмежена замкнена підмножина простору $\Lambda(P'_H)$ є компактною. Спершу доведемо, що множина K_r є обмеженою. Нехай $w = \{w_n\}_{n=1}^\infty \in P'_H$. Покажемо, що

$$\sup_{c \in K_r} p_w(c) < \infty.$$

Оскільки $w \in P'_H$, то $\lim_{n\to\infty} w_n^{1/n} = 0$. Як наслідок, функція $h(z) = \sum_{n=1}^\infty w_n z^n$, де $z \in \mathbb{C}$, є цілою. Тому для кожної послідовності $c = \{c_n\}_{n=1}^\infty \in K_r$,

$$p_w(c) = \sum_{n=1}^\infty w_n |c_n| \le \sum_{n=1}^\infty w_n r^n = h(r).$$

Як наслідок,

$$\sup_{c \in K_r} p_w(c) \le h(r) < \infty.$$

Отже, множина K_r є обмеженою. Для того, щоб показати, що множина K_r є замкненою, розглянемо послідовність $y = \{y_n\}_{n=1}^\infty \in \Lambda(P'_H) \setminus K_r$ і покажемо, що існує окіл послідовності y, який є неперетинним з множиною K_r. Оскільки $y \notin K_r$, то існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $|y_{n_0}| > r^{n_0}$. Визначимо послідовність $v = \{v_n\}_{n=1}^\infty$ формулою

$$v_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n = n_0 \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Тоді $v \in P'_H$ і окіл послідовності y

$$V = \big\{c \in \Lambda(P'_H) : \; p_v(y-c) < |y_{n_0}| - r^{n_0}\big\}$$

є неперетинним з множиною K_r. Отже, множина K_r є замкненою. Таким чином, множина K_r є компактною. □

Лема 2.9. *Для кожної обмеженої множини $S \subset \Lambda(P'_H)$ існує число $r > 0$ таке, що $S \subset K_r$, де множина K_r визначена рівністю* (2.11).

Доведення. Згідно із [47, с. 223, лема 5.6], існує послідовність $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Lambda(P'_H)$ така, що для кожної послідовності $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in S$ виконується нерівність $|c_n| \le |a_n|$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Нехай $r = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^{1/n}$. Тоді $|a_n| \le r^n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тому $S \subset K_r$. □

Нехай $H\big(\Lambda(P'_H)\big)$ — це алгебра всіх аналітичних функцій $g : \Lambda(P'_H) \to \mathbb{C}$ з топологією τ_0 рівномірної збіжності на компактних підмножинах простору $\Lambda(P'_H)$. Нехай

$$\|g\|_K = \sup_{x\in K} |g(x)|$$

для $g \in H(\Lambda(P'_H))$ і для компактної підмножини K простору $\Lambda(P'_H)$. Топологія τ_0 є породженою сім'єю напівнорм

$$\big\{\|\cdot\|_K : \; K \text{ є компактною підмножиною простору } \Lambda(P'_H)\big\}.$$

Оскільки простір $\Lambda(P'_H)$ є (DFM)-простором, то $H\big(\Lambda(P'_H)\big)$ є простором Фреше.

Означення 2.1. (Див. [47, с. 236, означення 5.20]) *Функцію*

$$\Lambda \ni x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{m_n} \in \mathbb{C},$$

де $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ — це послідовність невід'ємних цілих чисел така, що $m_n = 0$ для всіх достатньо великих n, називають мономом на просторі послідовностей Λ. (Тут $0^0 = 1$.)

Згідно із [47, с. 240, наслідок 5.22], мономи утворюють абсолютний базис в просторі $H\big(\Lambda(P'_H)\big)$ і простір $H\big(\Lambda(P'_H)\big)$ є А-ядерним простором. Як наслідок, отримуємо наступний результат.

Лема 2.10. *Кожна функція* $g \in H(\Lambda(P'_H))$ *може бути виражена через мономи у вигляді*

$$g\big(\{c_n\}_{n=1}^{\infty}\big) = \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{Z}_+}} \gamma_{k_1,\ldots,k_n} c_1^{k_1} \cdots c_n^{k_n},$$

де $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Lambda(P'_H)$ *і* $\gamma_{k_1,\ldots,k_n} \in \mathbb{C}$. *Крім того, за означенням абсолютного базису, для кожного* $r > 0$ *існує* $r^* > 0$ *(яке не залежить від* g*) таке, що*

$$|\gamma_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{Z}_+}} |\gamma_{k_1,\ldots,k_n}| \|c_1^{k_1} \cdots c_n^{k_n}\|_{K_r} \leq \|g\|_{K_{r^*}}.$$

Кожну функцію $f \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$ можна подати у вигляді

$$f = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1} \cdots R_n^{k_n}.$$

Визначимо функцію $J(f) : \Lambda(P'_H) \to \mathbb{C}$ рівністю

$$J(f)\big(\{c_n\}_{n=1}^{\infty}\big) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} c_1^{k_1} \cdots c_n^{k_n} \tag{2.12}$$

для кожної послідовності $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Lambda(P'_H)$.

Теорема 2.3. *Для кожної функції* $f \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$ *функція* $J(f)$, *визначена рівністю* (2.12), *є цілою функцією на просторі* $\Lambda(P'_H)$. *Далі, відображення*

$$J : H_{bs}(L_\infty[0,1]) \ni f \mapsto J(f) \in H\big(\Lambda(P'_H)\big)$$

є ізоморфізмом між алгебрами Фреше $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ *і* $H\big(\Lambda(P'_H)\big)$.

Доведення. Нехай $f \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$. Функцію f можна подати у вигляді

$$f = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1}\cdots R_n^{k_n}.$$

Доведемо, що функція $J(f)$ є добре визначеною. Нехай $c \in \Lambda(P'_H)$. Згідно із теоремою 2.1, існує функція $x_c \in L_\infty[0,1]$ така, що $\{R_n(x_c)\}_{n=1}^\infty = c$. Тому, згідно із рівністю (2.12),

$$J(f)(c) = f(x_c),$$

і, оскільки значення $f(x_c)$ є скінченним, то значення $J(f)(c)$ також є скінченним. Отже, функція $J(f)$ є добре визначеною.

Доведемо, що $J(f) \in H(\Lambda(P'_H))$. Згідно із твердженням 1.5, достатньо показати, що функція $J(f)$ є G-аналітичною і локально обмеженою на просторі $\Lambda(P'_H)$. Для того, щоб довести, що функція $J(f)$ є G-аналітичною на просторі $\Lambda(P'_H)$, зафіксуємо послідовності $a = \{a_n\}_{n=1}^\infty, b = \{b_n\}_{n=1}^\infty \in \Lambda(P'_H)$ і розглянемо функцію $h : \mathbb{C} \ni \lambda \mapsto J(f)(a + \lambda b) \in \mathbb{C}$. Доведемо, що функція h є цілою. Згідно із рівністю (2.12),

$$h(\lambda) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} (a_1+\lambda b_1)^{k_1}\cdots (a_n+\lambda b_n)^{k_n}.$$

Для $m \in \mathbb{N}$ покладемо

$$h_m(\lambda) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{m} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} (a_1+\lambda b_1)^{k_1}\cdots (a_n+\lambda b_n)^{k_n},$$

де $\lambda \in \mathbb{C}$. Зауважимо, що функція h_m є поліномом.

Доведемо, що послідовність поліномів $\{h_m\}_{m=1}^\infty$ збігається до функції h відносно топології алгебри Фреше $H(\mathbb{C})$. Нехай $\mathbb{D}$ — це одиничний круг в множині $\mathbb{C}$. Зафіксуємо $l \in \mathbb{N}$. Нехай $\lambda \in l\mathbb{D}$. За теоремою 2.1, існує функція $x_{a+\lambda b} \in L_\infty[0,1]$ така, що $\left\{R_n(x_{a+\lambda b})\right\}_{n=1}^\infty = a + \lambda b$ і

$$\|x_{a+\lambda b}\|_\infty \le \frac{2}{M} \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n + \lambda b_n|^{1/n},$$

де стала M визначена рівністю (2.2). Якщо $\rho_a = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^{1/n}$ і $\rho_b = \sup_{n\in\mathbb{N}} |b_n|^{1/n}$, то $|a_n| \leq \rho_a^n$ і $|b_n| \leq \rho_b^n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тому

$$|a_n + \lambda b_n| \leq |a_n| + |\lambda||b_n| \leq |a_n| + l|b_n| \leq \rho_a^n + l\rho_b^n \leq \rho_a^n + l^n\rho_b^n \leq \\ \leq 2\big(\max\{\rho_a, l\rho_b\}\big)^n \leq \big(2\max\{\rho_a, l\rho_b\}\big)^n.$$

Як наслідок,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n + \lambda b_n|^{1/n} \leq 2\max\{\rho_a, l\rho_b\}.$$

Отже, якщо $\rho = 2\max\{\rho_a, l\rho_b\}$, то $\|x_{a+\lambda b}\|_\infty \leq \frac{2\rho}{M}$. Зауважимо, що $h(\lambda) = f(x_{a+\lambda b})$ і $h_m(\lambda) = f_m(x_{a+\lambda b})$, де

$$f_m = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{m} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n \\ k_1,\dots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\dots,k_n} R_1^{k_1}\cdots R_n^{k_n}.$$

Тому для кожного $\lambda \in l\mathbb{D}$,

$$|h(\lambda) - h_m(\lambda)| = |f(x_{a+\lambda b}) - f_m(x_{a+\lambda b})| \leq \|f - f_m\|_{\frac{2\rho}{M}}.$$

Як наслідок,

$$\sup_{\lambda\in l\mathbb{D}} |h(\lambda) - h_m(\lambda)| \leq \|f - f_m\|_{\frac{2\rho}{M}}.$$

Оскільки $\|f - f_m\|_{\frac{2\rho}{M}} \to 0$ при $m \to \infty$, то послідовність $\{h_m\}_{m=1}^\infty$ рівномірно збігається до функції h на крузі $l\mathbb{D}$. Отже, функція h є цілою. Тому функція $J(f)$ є G-аналітичною.

Доведемо, що функція $J(f)$ є обмеженою на кожній обмеженій підмножині S простору $\Lambda(P'_H)$. За лемою 2.9, існує $r > 0$ таке, що $S \subset K_r$, де множина K_r визначена формулою (2.11). Нехай $c = \{c_n\}_{n=1}^\infty \in K_r$. За теоремою 2.1, існує функція $x_c \in L_\infty[0,1]$ така, що $\{R_n(x_c)\}_{n=1}^\infty = c$ і $\|x_c\|_\infty \leq \frac{2}{M}\sup_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^{1/n}$. Оскільки $|c_n| \leq r^n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то $\|x_c\|_\infty \leq \frac{2r}{M}$. Як наслідок,

$$|J(f)(c)| = |f(x_c)| \leq \|f\|_{\frac{2r}{M}},$$

і, отже,

$$\sup_{c\in S} |J(f)(c)| \leq \|f\|_{\frac{2r}{M}}.$$

Отже, функція $J(f)$ є обмеженою на множині S. Оскільки функція $J(f)$ є обмеженою на кожній обмеженій підмножині (DFM)-простору $\Lambda(P'_H)$, то ця функція є локально обмеженою (див. [47, вправа 2.27]). Отже, функція $J(f)$ є аналітичною, що і треба було довести.

Тепер, коли ми знаємо, що відображення J є добре визначеним, покажемо, що це відображення є бієкцією. Нехай функції $f_1, f_2 \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$ такі, що $f_1 \neq f_2$. Тоді існує функція $x \in L_\infty[0,1]$ така, що $f_1(x) \neq f_2(x)$. Тоді

$$J(f_1)\big(\{R_n(x)\}_{n=1}^\infty\big) = f_1(x) \neq f_2(x) = J(f_2)\big(\{R_n(x)\}_{n=1}^\infty\big).$$

Тому $J(f_1) \neq J(f_2)$. Отже, відображення J є ін'єктивним. Покажемо, що відображення J є сюр'єктивним. Нехай $g \in H(\Lambda(P'_H))$. Побудуємо функцію $f \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$ таку, що $J(f) = g$. Згідно із лемою 2.10, функцію g можна подати у вигляді

$$g\big(\{c_n\}_{n=1}^\infty\big) = \gamma_0 + \sum_{n=1}^\infty \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \gamma_{k_1,\ldots,k_n} c_1^{k_1}\cdots c_n^{k_n},$$

де $\{c_n\}_{n=1}^\infty \in \Lambda(P'_H)$ і $\gamma_{k_1,\ldots,k_n} \in \mathbb{C}$. Визначимо функцію $f : L_\infty[0,1] \to \mathbb{C}$ формулою

$$f = \gamma_0 + \sum_{n=1}^\infty \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \gamma_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1}\cdots R_n^{k_n}.$$

Оскільки $f(x) = g\big(\{R_n(x)\}_{n=1}^\infty\big)$ для кожної функції $x \in L_\infty[0,1]$ і функція g є добре визначеною на просторі $\Lambda(P'_H)$, то функція f є добре визаченою на просторі $L_\infty[0,1]$. Покажемо, що $f \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$. Зауважимо, що функція f є симетричною. Доведемо, що функція f є обмеженою на кожній замкненій кулі з центром в нулі. Для кожного $r > 0$, згідно із лемою 2.10, існує $r^* > 0$ таке, що

$$|\gamma_0| + \sum_{n=1}^\infty \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} |\gamma_{k_1,\ldots,k_n}| \|c_1^{k_1}\cdots c_n^{k_n}\|_{K_r} \le \|g\|_{K_{r^*}}. \tag{2.13}$$

Для кожної функції $x \in L_\infty[0,1]$ такої, що $\|x\|_\infty \le r$, маємо $\{R_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset K_r$ і, як наслідок,

$$|f(x)| \le |\gamma_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} |\gamma_{k_1,\ldots,k_n}||R_1(x)|^{k_1}\cdots|R_n(x)|^{k_n} \le$$

$$\le |\gamma_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} |\gamma_{k_1,\ldots,k_n}|\|c_1^{k_1}\cdots c_n^{k_n}\|_{K_r}.$$

Враховуючи нерівність (2.13),

$$|f(x)| \le \|g\|_{K_{r^*}}.$$

Як наслідок, $\|f\|_r \le \|g\|_{K_{r^*}}$. Отже, функція f є обмеженою на обмежених підмножинах простору $L_\infty[0,1]$.

Доведемо, що функція f є аналітичною. Згідно із твердженням 1.5, достатньо показати, що функція f є G-аналітичною і локально обмеженою. Оскільки функція f є обмеженою на обмежених підмножинах простору $L_\infty[0,1]$, то ця функція є локально обмеженою. Отже, достатньо показати, що функція f є G-аналітичною. Зафіксуємо функції $x,y \in L_\infty[0,1]$. Розглянемо функцію $h : \mathbb{C} \ni \lambda \mapsto f(x+\lambda y) \in \mathbb{C}$. Покажемо, що функція h є цілою. Зауважимо, що

$$h(\lambda) = \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \gamma_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1}(x+\lambda y)\cdots R_n^{k_n}(x+\lambda y).$$

Для $m \in \mathbb{N}$ покладемо

$$h_m(\lambda) = \gamma_0 + \sum_{n=1}^{m} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \gamma_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1}(x+\lambda y)\cdots R_n^{k_n}(x+\lambda y),$$

де $\lambda \in \mathbb{C}$. Оскільки функція $\lambda \mapsto R_j(x+\lambda y)$ є поліномом для кожного $j \in \mathbb{N}$, то функція h_m є поліномом для кожного $m \in \mathbb{N}$. Покажемо, що послідовність поліномів $\{h_m\}_{m=1}^\infty$ рівномірно збігається до функції h на крузі

$l\mathbb{D}$, для кожного $l \in \mathbb{N}$. Нехай $\rho = \|x\|_\infty + l\|y\|_\infty$. Згідно із лемою 2.10, існує $\rho^* > 0$ таке, що

$$|\gamma_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} |\gamma_{k_1,\ldots,k_n}| \|c_1^{k_1} \cdots c_n^{k_n}\|_{K_\rho} \le \|g\|_{K_{\rho^*}}. \tag{2.14}$$

Нехай $\lambda \in l\mathbb{D}$. Тоді $\|x + \lambda y\|_\infty \le \rho$ і, як наслідок, $\{R_n(x + \lambda y)\}_{n=1}^{\infty} \in K_\rho$. Тому

$$\begin{aligned} &|h(\lambda) - h_m(\lambda)| \le \\ &\le \sum_{n=m+1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} |\gamma_{k_1,\ldots,k_n}| |R_1(x+\lambda y)|^{k_1} \cdots |R_n(x+\lambda y)|^{k_n} \le \\ &\qquad \le \sum_{n=m+1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} |\gamma_{k_1,\ldots,k_n}| \|c_1^{k_1} \cdots c_n^{k_n}\|_{K_\rho}. \end{aligned}$$

Як наслідок,

$$\sup_{\lambda\in l\mathbb{D}} |h(\lambda) - h_m(\lambda)| \le \sum_{n=m+1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} |\gamma_{k_1,\ldots,k_n}| \|c_1^{k_1} \cdots c_n^{k_n}\|_{K_\rho}.$$

Згідно із нерівністю (2.14), ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} |\gamma_{k_1,\ldots,k_n}| \|c_1^{k_1} \cdots c_n^{k_n}\|_{K_\rho}$$

збіжний. Тому

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} |\gamma_{k_1,\ldots,k_n}| \|c_1^{k_1} \cdots c_n^{k_n}\|_{K_\rho} = 0.$$

Як наслідок, $\sup_{\lambda\in l\mathbb{D}} |h(\lambda) - h_m(\lambda)| \to 0$ при $m \to \infty$, тобто послідовність $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ рівномірно збігається до функції h на крузі $l\mathbb{D}$. З цього випливає, що функція h є цілою. Отже, функція f є G-аналітичною і, як наслідок, є аналітичною. Отже, $f \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$ і $J(f) = g$. Таким чином, відображення J є сюр'єктивним.

Зауважимо, що відображення J є лінійним.

Доведемо, що відображення J є неперервним. Оскільки відображення J є лінійним, то достатньо показати, що це відображення відображає обмежені множини в обмежені множини. Нехай B — це довільна обмежена підмножина алгебри $H_{bs}(L_\infty[0,1])$. Покажемо, що множина $J(B)$ є обмеженою підмножиною алгебри $H\big(\Lambda(P'_H)\big)$. Зафіксуємо $r > 0$ і розглянемо $c \in K_r$. Згідно із теоремою 2.1, існує функція $x_c \in L_\infty[0,1]$ така, що $\{R_n(x_c)\}_{n=1}^\infty = c$ і $\|x_c\|_\infty \leq \frac{2r}{M}$. Для кожної функції $f \in B$, маємо $J(f)(c) = f(x_c)$. Оскільки $\|x_c\|_\infty \leq \frac{2r}{M}$, то $|f(x_c)| \leq \|f\|_{\frac{2r}{M}}$. Тому $|J(f)(c)| \leq \|f\|_{\frac{2r}{M}}$ і, як наслідок,

$$\|J(f)\|_{K_r} \leq \|f\|_{\frac{2r}{M}}. \tag{2.15}$$

Оскільки множина B є обмеженою в алгебрі $H_{bs}(L_\infty[0,1])$, то

$$\sup_{f \in B} \|f\|_{\frac{2r}{M}} < \infty. \tag{2.16}$$

Згідно із нерівністю (2.15), враховуючи нерівність (2.16),

$$\sup_{f \in B} \|J(f)\|_{K_r} \leq \sup_{f \in B} \|f\|_{\frac{2r}{M}} < \infty.$$

Отже, множина $J(B)$ є обмеженою. Таким чином, відображення J є неперервним.

Згідно із теоремою про відкрите відображення (див. [53, теорема 5.4.5]), відображення J^{-1} є обмеженим. Також зауважимо, що відображення J є мультиплікативним, оскільки воно є мультиплікативним на щільній підалгебрі, породженій послідовністю $\{R_n\}_{n=1}^\infty$. Отже, відображення J є ізоморфізмом. Теорему доведено. □

Отриманий результат показує, що на спектрі алгебри $H_{bs}(L_\infty[0,1])$, ототожненому із простором $\Lambda(P'_H)$, можна визначити таку аналітичну структуру, що всі функції із алгебри $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ стають аналітичними на спектрі. Як уже було зауважено, простір $H'(\mathbb{C})_\beta$ є ізоморфним з простором $\Lambda(P'_H)$. Таким чином, маємо наступний наслідок.

Наслідок 2.3. *Алгебри Фреше* $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ *і* $H(H'(\mathbb{C})_\beta)$ *є ізоморфними.*

2.4. Висновки до розділу 2

Цей розділ присвячено дослідженням комплекснозначних неперервних симетричних поліномів і цілих аналітичних симетричних функцій на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку.

Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх симетричних неперервних комплекснозначних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку.

Описано спектр алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку.

Зображено алгебру Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку як алгебру аналітичних функцій на спектрі, який ототожено із сильним спряженим простором до простору Фреше всіх цілих аналітичних функцій від однієї комплексної змінної.

Результати, наведені в цьому розділі, опубліковано в таких працях: [58], [60], [106].

РОЗДІЛ 3

СИМЕТРИЧНІ І СКІНЧЕННО-СИМЕТРИЧНІ АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ НА ДЕЯКИХ КОМПЛЕКСНИХ БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Даний розділ присвячено вивченню симетричних (інваріантних відносно перестановок координат аргументу) і скінченно-симетричних (інваріантних відносно скінченних перестановок координат аргументу) комплекснозначних неперервних поліномів і аналітичних функцій на деяких просторах послідовностей.

3.1. Симетричні поліноми на банаховому просторі обмежених послідовностей комплексних чисел

Нехай ℓ_∞ — це комплексний банахів простір всіх обмежених послідовностей комплексних чисел. В даному підрозділі буде показано, що кожен комплекснозначний неперервний симетричний поліном на просторі ℓ_∞ обов'язково є сталим відображенням.

У даному підрозділі, для зручності, будемо розглядати числові послідовності із простору ℓ_∞ як функції, задані на множині $\mathbb{N}$. Відповідно, індекс елемента послідовності будемо записувати в круглих дужках, як аргумент функції.

Згідно із означенням 1.20, функцію $f : \ell_\infty \to \mathbb{C}$ називають симетричною, якщо виконується рівність $f(x \circ \sigma) = f(x)$ для кожної послідовності $x = (x(1), x(2), \ldots) \in \ell_\infty$ і для кожної бієкції $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

В даному підрозділі доведено, що єдиними комплекснозначними симетричними неперервними поліномами на просторі ℓ_∞ є сталі відображення.

Для множини $E \subset \mathbb{N}$ позначимо $\mathbf{1}_E$ послідовність $(x(1), \ldots, x(m), \ldots)$

таку, що

$$x(m) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } m \in E \\ 0, & \text{якщо } m \in \mathbb{N} \setminus E. \end{cases}$$

Для нескінченної множини $E \subset \mathbb{N}$ існує єдина зростаюча бієкція, що діє з $\mathbb{N}$ в E, яку позначимо v_E.

Твердження 3.1. *Нехай $\varphi : \ell_\infty \to \mathbb{C}$ — це симетрична (не обов'язково лінійна) функція така, що*

$$\varphi(\mathbf{1}_{E_1 \cup E_2}) = \varphi(\mathbf{1}_{E_1}) + \varphi(\mathbf{1}_{E_2}) \tag{3.1}$$

для кожних двох неперетинних множин $E_1, E_2 \subset \mathbb{N}$. Тоді $\varphi(\mathbf{1}_E) = 0$ для кожної множини $E \subset \mathbb{N}$.

Доведення. Нехай F і F_1 — це нескінченні підмножини множини $\mathbb{N}$ такі, що множини $\mathbb{N} \setminus F$ і $\mathbb{N} \setminus F_1$ також є нескінченними. Покажемо, що $\varphi(\mathbf{1}_F) = \varphi(\mathbf{1}_{F_1})$. Зауважимо, що відображення

$$\sigma_{F,F_1}(m) = \begin{cases} v_{F_1}(v_F^{-1}(m)), & \text{якщо } m \in F \\ v_{\mathbb{N}\setminus F_1}(v_{\mathbb{N}\setminus F}^{-1}(m)), & \text{якщо } m \in \mathbb{N} \setminus F \end{cases}$$

є бієкцією з $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ такою, що $\sigma_{F,F_1}(F) = F_1$ і $\sigma_{F,F_1}(\mathbb{N} \setminus F) = \mathbb{N} \setminus F_1$. Тому $\mathbf{1}_F = \mathbf{1}_{F_1} \circ \sigma_{F,F_1}$. Згідно із симетричністю відображення φ,

$$\varphi(\mathbf{1}_F) = \varphi(\mathbf{1}_{F_1}). \tag{3.2}$$

Нехай A — це нескінченна підмножина в $\mathbb{N}$ така, що множина $\mathbb{N} \setminus A$ також є нескінченною. Перевіримо, що $\varphi(\mathbf{1}_A) = 0$. Нехай A_1 і A_2 — це неперетинні нескінченні підмножини множини A такі, що $A = A_1 \cup A_2$. Тоді, згідно із рівністю (3.2),

$$\varphi(\mathbf{1}_A) = \varphi(\mathbf{1}_{A_1}) = \varphi(\mathbf{1}_{A_2}).$$

З іншого боку, згідно із рівністю (3.1),

$$\varphi(\mathbf{1}_A) = \varphi(\mathbf{1}_{A_1}) + \varphi(\mathbf{1}_{A_2}).$$

Тому

$$\varphi(\mathbf{1}_A) = 0. \tag{3.3}$$

Нехай B — це довільна нескінченна підмножина множини $\mathbb{N}$. Покажемо, що $\varphi(\mathbf{1}_B) = 0$. Нехай B_1 і B_2 — це неперетинні нескінченні підмножини множини B такі, що $B = B_1 \cup B_2$. Тоді множини $\mathbb{N} \setminus B_1$ і $\mathbb{N} \setminus B_2$ є нескінченними. Тому, згідно із рівністю (3.3), $\varphi(\mathbf{1}_{B_1}) = 0$ і $\varphi(\mathbf{1}_{B_2}) = 0$. Згідно із рівністю (3.1),

$$\varphi(\mathbf{1}_B) = \varphi(\mathbf{1}_{B_1}) + \varphi(\mathbf{1}_{B_2}).$$

Отже,

$$\varphi(\mathbf{1}_B) = 0. \tag{3.4}$$

Нехай C — це скінченна підмножина множини $\mathbb{N}$. Тоді, згідно із рівністю (3.1),

$$\varphi(\mathbf{1}_{\mathbb{N}}) = \varphi(\mathbf{1}_C) + \varphi(\mathbf{1}_{\mathbb{N}\setminus C}).$$

Оскільки множини $\mathbb{N}$ і $\mathbb{N} \setminus C$ є нескінченними, то, згідно із рівністю (3.4), $\varphi(\mathbf{1}_{\mathbb{N}}) = 0$ і $\varphi(\mathbf{1}_{\mathbb{N}\setminus C}) = 0$. Тому $\varphi(\mathbf{1}_C) = 0$. Твердження доведено. □

Теорема 3.1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$. Нехай $P : \ell_\infty \to \mathbb{C}$ — це симетричний неперервний n-однорідний поліном. Тоді поліном P тотожно дорівнює нулю.*

Доведення. Доведемо теорему методом математичної індукції по n. У випадку $n = 1$ поліном P є симетричним неперервним лінійним функціоналом. Нехай

$$x = \sum_{j=1}^{N} a_j \mathbf{1}_{B_j}, \tag{3.5}$$

де $N \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$ і $B_1, \ldots, B_N$ — це попарно неперетинні підмножини множини $\mathbb{N}$. Згідно із лінійністю полінома P,

$$P(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j P(\mathbf{1}_{B_j}).$$

Згідно із твердженням 3.1, $P(\mathbf{1}_{B_j}) = 0$. Тому $P(x) = 0$. Зауважимо, що множина послідовностей вигляду (3.5) є щільною в просторі ℓ_∞. Тому, згідно із неперервністю полінома P, $P(y) = 0$ для кожної послідовності $y \in \ell_\infty$.

Нехай $n \geq 2$. Припустимо, що теорема є правильною для кожного $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Доведемо правильність теореми для n. Нехай $A_P : (\ell_\infty)^n \to \mathbb{C}$ — це неперервне n-лінійне симетричне відображення, асоційоване з поліномом P. Згідно із твердженням 1.1, де $J : x \mapsto x \circ \sigma$,

$$A_P(x_1 \circ \sigma, \ldots, x_n \circ \sigma) = A_P(x_1, \ldots, x_n) \tag{3.6}$$

для кожних послідовностей $x_1, \ldots, x_n \in \ell_\infty$ і для кожної бієкції $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Доведемо наступну допоміжну лему.

Лема 3.1. *Нехай* $F_1, \ldots, F_l$ *— це попарно неперетинні підмножини множини* $\mathbb{N}$, *де* $2 \leq l \leq n$. *Тоді*

$$A_P(\underbrace{\mathbf{1}_{F_1}, \ldots, \mathbf{1}_{F_1}}_{k_1}, \ldots, \underbrace{\mathbf{1}_{F_l}, \ldots, \mathbf{1}_{F_l}}_{k_l}) = 0,$$

де $k_1, \ldots, k_l \in \mathbb{N}$ *такі, що* $k_1 + \ldots + k_l = n$.

Доведення. Без зменшення загальності можемо вважати, що множина $\Omega = \mathbb{N} \setminus \bigcup_{s=1}^{l-1} F_s$ є нескінченною. Нехай відображення $w : \Omega \to \mathbb{N}$ є бієкцією. Нехай

$$\widehat{y}(m) = \begin{cases} y(w(m)), & \text{якщо } m \in \Omega \\ 0, & \text{якщо } m \in \mathbb{N} \setminus \Omega \end{cases}$$

для послідовності $y \in \ell_\infty$. Визначимо відображення $Q : \ell_\infty \to \mathbb{C}$ формулою

$$Q : y \mapsto A_P(\underbrace{\mathbf{1}_{F_1}, \ldots, \mathbf{1}_{F_1}}_{k_1}, \ldots, \underbrace{\mathbf{1}_{F_{l-1}}, \ldots, \mathbf{1}_{F_{l-1}}}_{k_{l-1}}, \underbrace{\widehat{y}, \ldots, \widehat{y}}_{k_l}).$$

Зауважимо, що відображення Q є неперервним k_l-однорідним поліномом. Покажемо, що поліном Q є симетричним. Нехай відображення $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ є бієкцією. Зауважимо, що

$$\widehat{y \circ \sigma} = \widehat{y} \circ \widetilde{\sigma},$$

де відображення $\widetilde{\sigma} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ визначене формулою

$$\widetilde{\sigma}(m) = \begin{cases} w^{-1}(\sigma(w(m))), & \text{якщо } m \in \Omega \\ m, & \text{якщо } m \in \mathbb{N} \setminus \Omega. \end{cases}$$

Можна переконатися, що відображення $\widetilde{\sigma}$ є бієкцією. Оскільки $\widetilde{\sigma}(m) = m$ для $m \in \mathbb{N} \setminus \Omega$, то $\mathbf{1}_{F_s} \circ \widetilde{\sigma} = \mathbf{1}_{F_s}$ для $s \in \{1, \ldots, l-1\}$. Тому

$$Q(y \circ \sigma) = A_P(\underbrace{\mathbf{1}_{F_1}, \ldots, \mathbf{1}_{F_1}}_{k_1}, \ldots, \underbrace{\mathbf{1}_{F_{l-1}}, \ldots, \mathbf{1}_{F_{l-1}}}_{k_{l-1}}, \underbrace{\widehat{y \circ \sigma}, \ldots, \widehat{y \circ \sigma}}_{k_l}) =$$

$$= A_P(\underbrace{\mathbf{1}_{F_1} \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, \mathbf{1}_{F_1} \circ \widetilde{\sigma}}_{k_1}, \ldots, \underbrace{\mathbf{1}_{F_{l-1}} \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, \mathbf{1}_{F_{l-1}} \circ \widetilde{\sigma}}_{k_{l-1}}, \underbrace{\widehat{y} \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, \widehat{y} \circ \widetilde{\sigma}}_{k_l}).$$

Згідно із рівністю (3.6),

$$A_P(\underbrace{\mathbf{1}_{F_1} \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, \mathbf{1}_{F_1} \circ \widetilde{\sigma}}_{k_1}, \ldots, \underbrace{\mathbf{1}_{F_{l-1}} \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, \mathbf{1}_{F_{l-1}} \circ \widetilde{\sigma}}_{k_{l-1}}, \underbrace{\widehat{y} \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, \widehat{y} \circ \widetilde{\sigma}}_{k_l}) =$$

$$= A_P(\underbrace{\mathbf{1}_{F_1}, \ldots, \mathbf{1}_{F_1}}_{k_1}, \ldots, \underbrace{\mathbf{1}_{F_{l-1}}, \ldots, \mathbf{1}_{F_{l-1}}}_{k_{l-1}}, \underbrace{\widehat{y}, \ldots, \widehat{y}}_{k_l}) = Q(y).$$

Отже, $Q(y \circ \sigma) = Q(y)$. Таким чином, відображення Q є неперервним k_l-однорідним симетричним поліномом. Оскільки $k_l < n$, то $Q = 0$ за припущенням індукції. Нехай $H = w(F_l)$. Тоді $\widehat{\mathbf{1}_H} = \mathbf{1}_{F_l}$. Тому

$$Q(\mathbf{1}_H) = A_P(\underbrace{\mathbf{1}_{F_1}, \ldots, \mathbf{1}_{F_1}}_{k_1}, \ldots, \underbrace{\mathbf{1}_{F_l}, \ldots, \mathbf{1}_{F_l}}_{k_l}).$$

Отже,

$$A_P(\underbrace{\mathbf{1}_{F_1}, \ldots, \mathbf{1}_{F_1}}_{k_1}, \ldots, \underbrace{\mathbf{1}_{F_l}, \ldots, \mathbf{1}_{F_l}}_{k_l}) = 0.$$

Лему доведено. □

Продовження доведення теореми.

Нехай E_1 і E_2 — це неперетинні підмножини множини $\mathbb{N}$. Згідно із біноміальною формулою (1.3),

$$P(\mathbf{1}_{E_1 \cup E_2}) = P(\mathbf{1}_{E_1}) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{j!(n-j)!} A_P(\underbrace{\mathbf{1}_{E_1}, \ldots, \mathbf{1}_{E_1}}_{n-j}, \underbrace{\mathbf{1}_{E_2}, \ldots, \mathbf{1}_{E_2}}_{j}) + P(\mathbf{1}_{E_2}).$$

Згідно із лемою 3.1,

$$A_P(\underbrace{\mathbf{1}_{E_1}, \ldots, \mathbf{1}_{E_1}}_{n-j}, \underbrace{\mathbf{1}_{E_2}, \ldots, \mathbf{1}_{E_2}}_{j}) = 0.$$

Тому $P(\mathbf{1}_{E_1\cup E_2}) = P(\mathbf{1}_{E_1}) + P(\mathbf{1}_{E_2})$. Таким чином, згідно із твердженням 3.1,

$$P(\mathbf{1}_E) = 0 \tag{3.7}$$

для кожної множини $E \subset \mathbb{N}$.

Для послідовності x вигляду (3.5), згідно із поліноміальною формулою (1.2),

$$\begin{aligned} P(x) = a_1^n P(\mathbf{1}_{B_1}) + \ldots + a_N^n P(\mathbf{1}_{B_n}) + \\ + \sum_{k_1+\ldots+k_l=n,\, l\geq 2} \frac{n!}{k_1!\ldots k_l!} A_P(\underbrace{\mathbf{1}_{B_1},\ldots,\mathbf{1}_{B_1}}_{k_1},\ldots,\underbrace{\mathbf{1}_{B_l},\ldots,\mathbf{1}_{B_l}}_{k_l}). \end{aligned}$$

Тому, згідно із рівністю (3.7) і згідно із лемою 3.1, $P(x) = 0$. Оскільки множина послідовностей вигляду (3.5) є щільною в просторі ℓ_∞ і поліном P є неперервним, то $P(y) = 0$ для кожної послідовності $y \in \ell_\infty$. Теорему доведено. □

Наслідок 3.1. *Нехай $P : \ell_\infty \to \mathbb{C}$ — це симетричний неперервний поліном. Тоді поліном P є сталим відображенням.*

3.2. Скінченно-симетричні аналітичні функції на банаховому просторі обмежених послідовностей комплексних чисел

Згідно із означенням 1.21, функцію f, задану на комплексному банаховому простір всіх обмежених послідовностей комплексних чисел ℓ_∞ називають скінченно-симетричною, якщо виконується рівність $f(x \circ \sigma) = f(x)$ для кожної скінченної бієкції $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ і для кожної послідовності $x \in \ell_\infty$. Основним результатом даного підрозділу є встановлений факт, що алгебра Фреше скінченно-симетричних цілих функцій обмеженого типу на просторі ℓ_∞ ізоморфна з алгеброю Фреше цілих функцій обмеженого типу на фактор-просторі ℓ_∞/c_0, де c_0 — це простір збіжних до нуля послідовностей комплексних чисел.

Зауважимо, що існує велика кількість скінченно-симетричних аналітичних функцій на просторі ℓ_∞. Наступний приклад наведено А. Загороднюком у роботі [59].

Приклад 3.1. (Див. [59, с. 5]) *Якщо $\mathcal{U}$ є вільним ультрафільтром на множині $\mathbb{N}$ і g — ціла функція на множині $\mathbb{C}$, то відображення*

$$\ell_\infty \ni x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \mapsto \lim_{\mathcal{U}} g(x_n) \in \mathbb{C}$$

є скінченно-симетричною цілою функцією обмеженого типу на просторі ℓ_∞. Також кожна банахова границя є скінченно-симетричним лінійним функціоналом на просторі ℓ_∞.

Позначимо $\mathcal{P}_{fs}(\ell_\infty)$ алгебру всіх скінченно-симетричних поліномів і $H_{bfs}(\ell_\infty)$ алгебру всіх скінченно-симетричних цілих функцій обмеженого типу на просторі ℓ_∞.

Для кожної послідовності $y \in \ell_\infty$, визначимо множину $\operatorname{supp} y$ наступним чином:

$$\operatorname{supp} y = \big\{m \in \mathbb{N} : \ y(m) \neq 0\big\}$$

і назвемо цю множину носієм послідовності y. Нехай c_{00} — це простір всіх послідовностей $y \in \ell_\infty$, для яких носій є скінченною множиною.

В роботі [59] А. Загороднюк довів наступне твердження.

Твердження 3.2. (Див. [59, Твердження 4.2]) *Нехай* $f \in H_{bfs}(\ell_\infty)$. *Тоді звуження функції* f *на простір* c_0 *є сталою функцією.*

Наведене твердження буде використано у доведенні наступної теореми.

Теорема 3.2. *Ціла функція* $f \in H_b(\ell_\infty)$ *є скінченно-симетричною тоді і тільки тоді, коли існує функція* $\widetilde{f} \in H_b(\ell_\infty/c_0)$ *така, що* $f = \widetilde{f} \circ \mathcal{Q}$, *де* $\mathcal{Q}$ *— це фактор-відображення із* ℓ_∞ *в* ℓ_∞/c_0.

Доведення. Для кожної скінченної перестановки $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ і для кожної послідовності $x \in \ell_\infty$ маємо $x - x \circ \sigma \in c_0$ і, тому, $\mathcal{Q}(x) = \mathcal{Q}(x \circ \sigma)$, отже $\widetilde{f} \circ \mathcal{Q}(x) = \widetilde{f} \circ \mathcal{Q}(x \circ \sigma)$.

Для того, щоб довести зворотне твердження, достатньо показати, що

$$P(x+y) = P(x)$$

для кожного неперервного скінченно-симетричного n-однорідного полінома $P : \ell_\infty \to \mathbb{C}$ і для кожних послідовностей $x \in \ell_\infty$ і $y \in c_0$.

Нехай A_P — це неперервне n-лінійне симетричне відображення, асоційоване із поліномом P. Згідно із біноміальною формулою (1.3),

$$P(x+y) = P(x) + P(y) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} A_P(\underbrace{y, \ldots, y}_{k}, \underbrace{x, \ldots, x}_{n-k}).$$

Згідно із твердженням 3.2, $P(y) = 0$. Доведемо, що

$$A_P(\underbrace{y, \ldots, y}_{k}, \underbrace{x, \ldots, x}_{n-k}) = 0$$

для $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Спочатку припустимо, що послідовність y має скінченний носій, тобто, $y \in c_{00}$. Нехай $K = \max\{j \in \mathbb{N} : y(j) \neq 0\}$ і $\Omega_0 = \{1, \ldots, K\}$. Нехай $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ — це деякі попарно неперетинні нескінченні множини такі, що $\mathbb{N} \setminus \Omega_0 = \bigcup_{j=1}^n \Omega_j$. Для кожного $j \in \{0, \ldots, n\}$ визначимо послідовність

$$x_j(m) = \begin{cases} x(m), & \text{якщо } m \in \Omega_j \\ 0, & \text{якщо } m \in \mathbb{N} \setminus \Omega_j. \end{cases}$$

Оскільки $x = \sum_{j=0}^{n} x_j$, то

$$A_P(\underbrace{y,\ldots,y}_{k},\underbrace{x,\ldots,x}_{n-k}) = \sum_{j_1=0}^{n} \ldots \sum_{j_{n-k}=0}^{n} A_P(\underbrace{y,\ldots,y}_{k}, x_{j_1},\ldots,x_{j_{n-k}}).$$

Нехай $j_1,\ldots,j_{n-k} \in \{0,\ldots,n\}$. Доведемо, що

$$A_P(\underbrace{y,\ldots,y}_{k}, x_{j_1},\ldots,x_{j_{n-k}}) = 0.$$

Без зменшення загальності можемо припустити, що $j_1 = \ldots = j_{k_0} = 0$, $j_{k_0+1} = \ldots = j_{k_0+k_1} = 1, \ldots, j_{k_0+\ldots+k_{l-1}+1} = \ldots = j_{k_0+\ldots+k_l} = l$, де $l \in \{0,\ldots,n-k\}, k_0 \geq 0, k_1,\ldots,k_l \geq 1$ (у випадку $l \geq 1$) і $k_0+k_1+\ldots+k_l = n-k$. Нехай $w' : \Omega_{l+1} \to \mathbb{N} \setminus \Omega_0$ — це зростаюча бієкція. Визначимо бієкцію $w : \Omega_0 \cup \Omega_{l+1} \to \mathbb{N}$ формулою

$$w(m) = \begin{cases} m, & \text{якщо } m \in \Omega_0 \\ w'(m), & \text{якщо } m \in \Omega_{l+1}. \end{cases}$$

Для послідовності $z \in \ell_\infty$ нехай

$$\widehat{z}(m) = \begin{cases} (z \circ w)(m), & \text{якщо } m \in \Omega_0 \cup \Omega_{l+1} \\ 0, & \text{якщо } m \in \mathbb{N} \setminus (\Omega_0 \cup \Omega_{l+1}). \end{cases}$$

Визначимо відображення $B : (\ell_\infty)^{k+k_0} \to \mathbb{C}$ наступним чином:

$$B : (z_1,\ldots,z_{k+k_0}) \mapsto A_P\big(\widehat{z_1},\ldots,\widehat{z_{k+k_0}},\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{k_1},\ldots,\underbrace{x_l,\ldots,x_l}_{k_l}\big).$$

Зауважимо, що відображення B — це неперервне симетричне $(k+k_0)$-лінійне відображення. Для кожної скінченної бієкції $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, визначимо скінченну бієкцію $\widetilde{\sigma} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ формулою

$$\widetilde{\sigma}(m) = \begin{cases} (w^{-1} \circ \sigma \circ w)(m), & \text{якщо } m \in \Omega_0 \cup \Omega_{l+1} \\ m, & \text{якщо } m \in \mathbb{N} \setminus (\Omega_0 \cup \Omega_{l+1}). \end{cases}$$

Можна перевірити, що $\widehat{z \circ \sigma} = \widehat{z} \circ \widetilde{\sigma}$ і $x_j \circ \widetilde{\sigma} = x_j$ для $z \in \ell_\infty$ і $j \in \{1,\ldots,l\}$. Тому для кожних послідовностей $z_1,\ldots,z_{k+k_0} \in \ell_\infty$ і для кожної скінченної біекції $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ отримуємо рівність

$$\begin{aligned} &B(z_1 \circ \sigma, \dots, z_{k+k_0} \circ \sigma) = \\ &\quad = A_P\big(\widehat{z_1} \circ \widetilde{\sigma}, \dots, \widehat{z_{k+k_0}} \circ \widetilde{\sigma}, \underbrace{x_1 \circ \widetilde{\sigma}, \dots, x_1 \circ \widetilde{\sigma}}_{k_1}, \dots, \underbrace{x_l \circ \widetilde{\sigma}, \dots, x_l \circ \widetilde{\sigma}}_{k_l}\big) = \\ &\qquad = A_P\big(\widehat{z_1}, \dots, \widehat{z_{k+k_0}}, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{k_1}, \dots, \underbrace{x_l, \dots, x_l}_{k_l}\big) = B(z_1, \dots, z_{k+k_0}). \end{aligned}$$

Отже, звуження відображення B на діагональ є неперервним скінченно-симетричним $(k + k_0)$-однорідним поліномом. Згідно із твердженням 3.2, $B(z, \dots, z) = 0$ для кожної послідовності $z \in c_{00}$. Згідно із поляризаційною формулою (1.1), $B(z_1, \dots, z_{k+k_0}) = 0$ для кожних послідовностей $z_1, \dots, z_{k+k_0} \in c_{00}$. Оскільки послідовності y і x_0 належать простору c_{00}, то $B(\underbrace{y, \dots, y}_{k}, \underbrace{x_0, \dots, x_0}_{k_0}) = 0$, тобто

$$A_P(\underbrace{\widehat{y}, \dots, \widehat{y}}_{k}, \underbrace{\widehat{x_0}, \dots, \widehat{x_0}}_{k_0}, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{k_1}, \dots, \underbrace{x_l, \dots, x_l}_{k_l}) = 0.$$

Зауважимо, що $\widehat{y} = y$ і $\widehat{x_0} = x_0$. Тому

$$A_P(\underbrace{y, \dots, y}_{k}, \underbrace{x_0, \dots, x_0}_{k_0}, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{k_1}, \dots, \underbrace{x_l, \dots, x_l}_{k_l}) = 0.$$

Отже, $P(x+y) = P(x)$ для кожних послідовностей $x \in \ell_\infty$ і $y \in c_{00}$. Оскільки кожен елемент у просторі c_0 можна наблизити елементами зі скінченними носіями, враховуючи неперервність полінома P, маємо $P(x+y) = P(x)$ для кожних $y \in c_0$, $x \in \ell_\infty$. Теорему доведено. □

Наслідок 3.2. *Алгебра Фреше скінченно-симетричних цілих функцій обмеженого типу на просторі ℓ_∞ ізоморфна з алгеброю Фреше $H_b(\ell_\infty/c_0)$.*

3.3. Симетричні поліноми на деяких банахових просторах послідовностей комплексних векторів

Даний підрозділ присвячено вивченню алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних поліномів на комплексному банаховому просторі $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ (див. приклад 1.3). Буде доведено, що так звані степеневі симетричні поліноми утворюють зліченний алгебраїчний базис цієї алгебри. Також буде розв'язано задачу побудови елемента скінченновимірного підпростору простору $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ за наперед заданими значеннями скінченної кількості степеневих симетричних поліномів на цьому елементі.

Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $p \in [1, +\infty)$. Розглянемо банахів простір $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ всіх послідовностей векторів

$$x = (x_1, x_2, \ldots),$$

де $x_j = \left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right) \in \mathbb{C}^n$ для $j \in \mathbb{N}$, таких, що ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{n} |x_j^{(s)}|^p$$

збіжний (див. приклад 1.3), із нормою $\|\cdot\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}$, визначеною формулою (1.16). Згідно із означенням 1.20, функцію $f : \ell_p(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}$ називають симетричною, якщо $f(x \circ \sigma) = f(x)$ для кожної послідовності $x \in \ell_p(\mathbb{C}^n)$ і кожної бієкції $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, де $x \circ \sigma = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots)$.

Позначимо $\mathcal{P}_s(\ell_p(\mathbb{C}^n))$ алгебру всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на просторі $\ell_p(\mathbb{C}^n)$.

Для мультиіндексу $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ покладемо $|k| = k_1 + \ldots + k_n$. Для кожного мультиіндексу $k \in \mathbb{Z}_+^n$ такого, що $|k| \geq \lceil p \rceil$, де $\lceil p \rceil$ — це найменше ціле число, яке є не меншим від p, визначимо відображення $H_k^{(\mathbb{C}^n)} : \ell_p(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}$ формулою

$$H_k^{(\mathbb{C}^n)}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{\substack{s=1 \\ k_s > 0}}^{n} \left(x_j^{(s)}\right)^{k_s}. \tag{3.8}$$

Зауважимо, що відображення $H_k^{(\mathbb{C}^n)}$ є симетричним $|k|$-однорідним поліномом. Поліноми $H_k^{(\mathbb{C}^n)}$ є узагальненнями так званих степеневих симетричних поліномів на скінченновимірних просторах (див., напр., [85, с. 23] або [100, с. 297]).

Твердження 3.3. *Для* $p \in [1, +\infty)$ *і для кожного мультиіндексу* $k \in \mathbb{Z}_+^n$ *такого, що* $|k| \geq \lceil p \rceil$, *поліном* $H_k^{(\mathbb{C}^n)}$ *на просторі* $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ *є неперервним і* $\left\| H_k^{(\mathbb{C}^n)} \right\| \leq 1$.

Доведення. Нехай послідовність $x \in \ell_p(\mathbb{C}^n)$ така, що $\|x\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)} \leq 1$. Зауважимо, що

$$\left| H_k^{(\mathbb{C}^n)}(x) \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{\substack{s=1 \\ k_s > 0}}^{n} \left| x_j^{(s)} \right|^{k_s}.$$

Оскільки $\left| x_j^{(s)} \right| \leq \max_{1 \leq m \leq n} \left| x_j^{(m)} \right|$ для кожних $s \in \{1, \ldots, n\}$ і $j \in \mathbb{N}$, то

$$\prod_{\substack{s=1 \\ k_s > 0}}^{n} \left| x_j^{(s)} \right|^{k_s} \leq \left(\max_{1 \leq m \leq n} \left| x_j^{(m)} \right| \right)^{|k|}$$

для кожного $j \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що

$$\left(\max_{1 \leq m \leq n} \left| x_j^{(m)} \right| \right)^{|k|} = \max_{1 \leq m \leq n} \left| x_j^{(m)} \right|^{|k|} \leq \sum_{m=1}^{n} \left| x_j^{(m)} \right|^{|k|}.$$

Тому

$$\left| H_k^{(\mathbb{C}^n)}(x) \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \left| x_j^{(m)} \right|^{|k|}.$$

Оскільки $\|x\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)} \leq 1$, то $\left| x_j^{(m)} \right| \leq 1$ для кожних $m \in \{1, \ldots, n\}$ і $j \in \mathbb{N}$, тому, враховуючи нерівність $|k| \geq \lceil p \rceil$, маємо $\left| x_j^{(m)} \right|^{|k|} \leq \left| x_j^{(m)} \right|^p$. Отже,

$$\left| H_k^{(\mathbb{C}^n)}(x) \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \left| x_j^{(m)} \right|^p = \|x\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}^p \leq 1.$$

Тому

$$\left\| H_k^{(\mathbb{C}^n)} \right\| = \sup_{\|x\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)} \leq 1} \left| H_k^{(\mathbb{C}^n)}(x) \right| \leq 1.$$

Отже, поліном $H_k^{(\mathbb{C}^n)}$ є обмеженим і, як наслідок, є неперервним. Твердження доведено. □

Займемося дослідженням симетричних поліномів на просторі $\ell_p(\mathbb{C}^n)$.

Для $m \in \mathbb{N}$, нехай $c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$ — це простір всіх послідовностей

$$x = (x_1, \ldots, x_m, \bar{0}, \ldots),$$

де $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{C}^n$ і $\bar{0} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}) \in \mathbb{C}^n$. Зауважимо, що простір $c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$ ізоморфний з простором $(\mathbb{C}^n)^m$. Нехай

$$c_{00}(\mathbb{C}^n) = \bigcup_{m=1}^{\infty} c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n).$$

Зауважимо, що простір $c_{00}(\mathbb{C}^n)$ є щільним підпростором простору $\ell_p(\mathbb{C}^n)$. Також зауважимо, що поліном $H_k^{(\mathbb{C}^n)}$ є добре визначеним на просторі $c_{00}(\mathbb{C}^n)$ для кожного ненульового мультиіндексу $k \in \mathbb{Z}_+^n$.

Для довільних послідовностей n-вимірних векторів комплексних чисел $x = (x_1, \ldots, x_m, \bar{0}, \ldots), y = (y_1, \ldots, y_s, \bar{0}, \ldots) \in c_{00}(\mathbb{C}^n)$ покладемо

$$x \oplus y = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_s, \bar{0}, \ldots).$$

Для послідовностей $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)} \in c_{00}(\mathbb{C}^n)$, нехай

$$\bigoplus_{j=1}^{r} x^{(j)} = x^{(1)} \oplus \ldots \oplus x^{(r)}.$$

Зауважимо, що

$$\Big\| \bigoplus_{j=1}^{r} x^{(j)} \Big\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}^p = \sum_{j=1}^{r} \|x^{(j)}\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}^p. \tag{3.9}$$

Також зауважимо, що для кожного ненульового мультиіндексу $k \in \mathbb{Z}_+^n$ виконується рівність

$$H_k^{(\mathbb{C}^n)}\Big(\bigoplus_{j=1}^{r} x^{(j)}\Big) = \sum_{j=1}^{r} H_k^{(\mathbb{C}^n)}\big(x^{(j)}\big). \tag{3.10}$$

Для кожних $m \in \mathbb{N}$ і $j \in \{1, \ldots, m\}$ покладемо

$$\alpha_{mj} = \frac{1}{m^{1/m}} \exp(2\pi i j/m). \tag{3.11}$$

Також покладемо $\alpha_{01} = 0$. Для мультиіндексу $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, нехай

$$a_l = \bigoplus_{j_1=1}^{\widehat{l_1}} \ldots \bigoplus_{j_n=1}^{\widehat{l_n}} \big((\alpha_{l_1 j_1}, \ldots, \alpha_{l_n j_n}), \bar{0}, \ldots\big), \tag{3.12}$$

де $\widehat{l_j} = \max\{1, l_j\}$ для $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Визначимо частковий порядок на множині $\mathbb{Z}_+^n$ наступним чином. Для мультиіндексів $k, l \in \mathbb{Z}_+^n$ покладемо $k \succeq l$ якщо і тільки якщо існує мультиіндекс $m \in \mathbb{Z}_+^n$ такий, що $k_s = m_s l_s$ для кожного $s \in \{1, \ldots, n\}$. Будемо писати $k \succ l$, якщо $k \succeq l$ і $k \neq l$.

Твердження 3.4. *Для мультиіндексу $k \in \mathbb{Z}_+^n$ такого, що $|k| \geq 1$, і для довільного мультиіндексу $l \in \mathbb{Z}_+^n$ виконується рівність*

$$H_k^{(\mathbb{C}^n)}(a_l) = \begin{cases} \prod\limits_{\substack{s=1 \\ k_s>0}}^{n} \frac{1}{l_s^{k_s/l_s - 1}} \prod\limits_{\substack{s=1 \\ k_s=0}}^{n} \widehat{l_s}, & \textit{якщо} \quad k \succeq l \\ 0, & \textit{інакше,} \end{cases}$$

де, за означенням, добуток нульової кількості множників вважається рівним 1. *Зокрема, виконується рівність $H_k^{(\mathbb{C}^n)}(a_k) = 1$.*

Доведення. Згідно із рівностями (3.10) і (3.12),

$$H_k^{(\mathbb{C}^n)}(a_l) = \sum_{j_1=1}^{\widehat{l_1}} \ldots \sum_{j_n=1}^{\widehat{l_n}} H_k^{(\mathbb{C}^n)}\Big(\big((\alpha_{l_1 j_1}, \ldots, \alpha_{l_n j_n}), \bar{0}, \ldots\big)\Big).$$

За означенням полінома $H_k^{(\mathbb{C}^n)}$,

$$H_k^{(\mathbb{C}^n)}\Big(\big((\alpha_{l_1 j_1}, \ldots, \alpha_{l_n j_n}), \bar{0}, \ldots\big)\Big) = \prod_{\substack{s=1 \\ k_s>0}}^{n} (\alpha_{l_s j_s})^{k_s}.$$

Тому

$$H_k^{(\mathbb{C}^n)}(a_l) = \sum_{j_1=1}^{\widehat{l_1}} \ldots \sum_{j_n=1}^{\widehat{l_n}} \prod_{\substack{s=1 \\ k_s>0}}^{n} (\alpha_{l_s j_s})^{k_s} =$$

$$= \prod_{\substack{s=1 \\ k_s>0}}^{n} \sum_{j_s=1}^{\widehat{l_s}} (\alpha_{l_s j_s})^{k_s} \prod_{\substack{s=1 \\ k_s=0}}^{n} \sum_{j_s=1}^{\widehat{l_s}} 1 = \prod_{\substack{s=1 \\ k_s>0}}^{n} \sum_{j_s=1}^{\widehat{l_s}} (\alpha_{l_s j_s})^{k_s} \prod_{\substack{s=1 \\ k_s=0}}^{n} \widehat{l_s}. \tag{3.13}$$

Нехай $k \succeq l$. Тоді існує мультиіндекс $m \in \mathbb{Z}_+^n$ такий, що $k_s = m_s l_s$ для кожного $s \in \{1, \ldots, n\}$. Для $s \in \{1, \ldots, n\}$ такого, що $k_s > 0$, також буде $l_s > 0$. Як наслідок, для такого s маємо $\widehat{l_s} = l_s$, і, згідно із рівністю (3.11),

$$\sum_{j_s=1}^{\widehat{l_s}} (\alpha_{l_s j_s})^{k_s} = \sum_{j_s=1}^{l_s} \left(\frac{1}{l_s^{1/l_s}} \exp(2\pi i j_s / l_s) \right)^{m_s l_s} =$$

$$= \frac{1}{l_s^{m_s}} \sum_{j_s=1}^{l_s} \exp(2\pi i j_s m_s) = \frac{1}{l_s^{m_s}} \sum_{j_s=1}^{l_s} 1 = \frac{1}{l_s^{m_s-1}} = \frac{1}{l_s^{k_s/l_s-1}}.$$

Тому, згідно із рівністю (3.13),

$$H_k^{(\mathbb{C}^n)}(a_l) = \prod_{\substack{s=1\\k_s>0}}^{n} \frac{1}{l_s^{k_s/l_s-1}} \prod_{\substack{s=1\\k_s=0}}^{n} \widehat{l_s}.$$

У випадку $k = l$ маємо

$$H_k^{(\mathbb{C}^n)}(a_k) = \prod_{\substack{s=1\\k_s>0}}^{n} \frac{1}{k_s^{k_s/k_s-1}} \prod_{\substack{s=1\\k_s=0}}^{n} \widehat{k_s} = 1.$$

Нехай $k \not\succeq l$. Тоді маємо два випадки.

Випадок 1: існує число $s \in \{1, \ldots, n\}$ таке, що $k_s > l_s = 0$. Тоді

$$\sum_{j_s=1}^{\widehat{l_s}} (\alpha_{l_s j_s})^{k_s} = (\alpha_{01})^{k_s} = 0,$$

тому $H_k^{(\mathbb{C}^n)}(a_l) = 0$.

Випадок 2: існує $s \in \{1, \ldots, n\}$ таке, що $l_s > k_s > 0$. Тоді

$$\sum_{j_s=1}^{\widehat{l_s}} (\alpha_{l_s j_s})^{k_s} = \sum_{j_s=1}^{l_s} \left(\frac{1}{l_s^{1/l_s}} \exp(2\pi i j_s / l_s) \right)^{k_s} = \frac{1}{l_s^{k_s/l_s}} \sum_{j_s=1}^{l_s} \exp(2\pi i j_s / l_s)^{k_s}.$$

Відомо, що

$$\sum_{j=1}^{q} \exp(2\pi i j / q)^r = 0$$

для кожних $q \in \{2, 3, \ldots\}$ і $r \in \{1, \ldots, q-1\}$. Тому

$$\sum_{j_s=1}^{l_s} \exp(2\pi i j_s / l_s)^{k_s} = 0$$

і, як наслідок, $H_k^{(\mathbb{C}^n)}(a_l) = 0$. Твердження доведено. $\square$

Доведемо наступне допоміжне твердження.

Твердження 3.5. *Функція* $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = (c_1^x + \ldots + c_m^x)^{1/x}$, *де* $m \in \mathbb{N}$ *і* $c_1, \ldots, c_m > 0$, *є строго спадною.*

Доведення. Доведемо, що $g'(x) < 0$ для кожного $x \in (0, +\infty)$. Зауважимо, що $g(x) = \exp\bigl(\frac{1}{x}\ln(c_1^x + \ldots + c_m^x)\bigr)$. Тому

$$g'(x) = g(x)\left(-\frac{1}{x^2}\ln(c_1^x + \ldots + c_m^x) + \frac{1}{x}\frac{c_1^x \ln c_1 + \ldots + c_m^x \ln c_m}{c_1^x + \ldots + c_m^x}\right) =$$
$$= -\frac{g(x)}{x^2(c_1^x + \ldots + c_m^x)}\Bigl((c_1^x + \ldots + c_m^x)\ln(c_1^x + \ldots + c_m^x) - x(c_1^x \ln c_1 + \ldots +$$
$$+ c_m^x \ln c_m)\Bigr) = -\frac{g(x)}{x^2(c_1^x + \ldots + c_m^x)}\Bigl(c_1^x\bigl(\ln(c_1^x + \ldots + c_m^x) - \ln c_1^x\bigr) + \ldots +$$
$$+ c_m^x\bigl(\ln(c_1^x + \ldots + c_m^x) - \ln c_m^x\bigr)\Bigr).$$

Оскільки $\frac{g(x)}{x^2(c_1^x + \ldots + c_m^x)} > 0$ і $\ln(c_1^x + \ldots + c_m^x) > \ln c_j^x$ для кожного $j \in \{1, \ldots, m\}$, то $g'(x) < 0$. Твердження доведено. $\square$

Наслідок 3.3. *Для кожної послідовності* $x \in \ell_p(\mathbb{C}^n)$ *і для кожного* $q \geq p$ *виконується нерівність*

$$\|x\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)} \geq \|x\|_{\ell_q(\mathbb{C}^n)}.$$

Для довільної непорожньої скінченної множини $M \subset \mathbb{Z}_+^n$ визначимо відображення $\pi_M : c_{00}(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}^{|M|}$, де $|M|$ — це потужність множини M, формулою

$$\pi_M(x) = \bigl(H_k^{(\mathbb{C}^n)}(x)\bigr)_{k \in M}, \tag{3.14}$$

де $\bigl(H_k^{(\mathbb{C}^n)}(x)\bigr)_{k \in M}$ — це $|M|$-вимірний вектор значень поліномів $H_k^{(\mathbb{C}^n)}$ на послідовності x, заіндексований мультиіндексами $k \in M$. На просторі $\mathbb{C}^{|M|}$ задамо норму $\|\xi\|_\infty = \max_{k \in M} |\xi_k|$, де $\xi = (\xi_k)_{k \in M} \in \mathbb{C}^{|M|}$.

Теорема 3.3. *Нехай* M *— це скінченна непорожня підмножина множини* $\mathbb{Z}_+^n$ *така, що* $|k| \geq 1$ *для кожного мультиіндексу* $k \in M$. *Тоді* *(i) існує число* $m \in \mathbb{N}$ *таке, що для кожного вектора* $\xi = (\xi_k)_{k\in M} \in \mathbb{C}^{|M|}$ *знайдеться послідовність* $x_\xi \in c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$ *така, що* $\pi_M(x_\xi) = \xi$;

(ii) існує стала $\rho_M > 0$ *така, що при* $\|\xi\|_\infty < 1$ *буде* $\|x_\xi\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)} < \rho_M$ *для кожного* $p \in [1, +\infty)$.

Доведення. (i) Нехай $\xi = (\xi_k)_{k\in M} \in \mathbb{C}^{|M|}$. Для кожного $k \in M$ визначимо число $\eta_k \in \mathbb{C}$ і послідовність $b_k \in c_{00}(\mathbb{C}^n)$ наступним чином. Для мінімальних елементів k частково впорядкованої множини $(M, \preceq)$, нехай $\eta_k = \xi_k$ і $b_k = \sqrt[|k|]{\eta_k}\, a_k$, де послідовність a_k визначена формулою (3.12), і

$$\sqrt[|k|]{\eta_k} = \begin{cases} \sqrt[|k|]{|\eta_k|}\, e^{i \arg \eta_k/|k|}, & \text{якщо} \quad \eta_k \neq 0 \\ 0, & \text{якщо} \quad \eta_k = 0. \end{cases}$$

Для мультиіндексів $k \in M$, які не є мінімальними елементами множини $(M, \preceq)$, визначимо число η_k і послідовність b_k за індукцією формулами

$$\eta_k = \xi_k - \sum_{\substack{l\in M \\ l\prec k}} H_k^{(\mathbb{C}^n)}(b_l) \tag{3.15}$$

і

$$b_k = \sqrt[|k|]{\eta_k}\, a_k \tag{3.16}$$

відповідно. Покладемо $x_\xi = \bigoplus\limits_{l\in M} b_l$. Зауважимо, що $x_\xi \in c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$, де

$$m = \sum_{k\in M} \min\{j \in \mathbb{N} : \ a_k \in c_{00}^{(j)}(\mathbb{C}^n)\}.$$

Для $k \in M$, згідно із рівністю (3.10), $H_k^{(\mathbb{C}^n)}(x_\xi) = \sum\limits_{l\in M} H_k^{(\mathbb{C}^n)}(b_l)$. Оскільки відображення $H_k^{(\mathbb{C}^n)}$ є $|k|$-однорідним поліномом, то

$$H_k^{(\mathbb{C}^n)}(b_l) = \left(\sqrt[|l|]{\eta_l}\right)^{|k|} H_k^{(\mathbb{C}^n)}(a_l). \tag{3.17}$$

Згідно із твердженням 3.4, $H_k^{(\mathbb{C}^n)}(a_l)$ не дорівнює нулю лише для мультиіндексів $l \in M$ таких, що $l \preceq k$. Тому

$$H_k^{(\mathbb{C}^n)}(x_\xi) = H_k^{(\mathbb{C}^n)}(b_k) + \sum_{\substack{l\in M \\ l\prec k}} H_k^{(\mathbb{C}^n)}(b_l).$$

Згідно із твердженням 3.4, $H_k^{(\mathbb{C}^n)}(a_k) = 1$, тому, згідно із рівністю (3.17), $H_k^{(\mathbb{C}^n)}(b_k) = \eta_k$. Отже,

$$H_k^{(\mathbb{C}^n)}(x_\xi) = \eta_k + \sum_{\substack{l \in M \\ l \prec k}} H_k^{(\mathbb{C}^n)}(b_l).$$

Враховуючи рівність (3.15), маємо $H_k^{(\mathbb{C}^n)}(x_\xi) = \xi_k$. Отже, $\pi_M(x_\xi) = \xi$.

(ii) Нехай вектор $\xi = (\xi_k)_{k \in M} \in \mathbb{C}^{|M|}$ такий, що $\|\xi\|_\infty < 1$. Для мультиіндексу $k \in M$, нехай

$$\langle k \rangle = \max\Big\{ s \in \mathbb{N} :\ \exists l^{(1)}, \ldots, l^{(s)} \in M \text{ такі, що } l^{(1)} \prec \ldots \prec l^{(s)} = k \Big\}$$

Зауважимо, що для мінімальних елементів $k \in M$ маємо $\langle k \rangle = 1$.

Нехай

$$C = \max\Big\{ 1, \max_{k \in M} \|a_k\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)} \Big\}. \tag{3.18}$$

Нехай

$$r = \max_{k \in M} \langle k \rangle$$

і для кожного $j \in \{1, \ldots, r\}$ нехай

$$\mu_j = \prod_{s=1}^{j} (1 + m_s),$$

де

$$m_s = \Big| \{ k \in M :\ \langle k \rangle = s \} \Big|.$$

Також покладемо $\mu_0 = 1$.

Зауважимо, що для кожного $j \in \{1, \ldots, r\}$,

$$\begin{aligned} \mu_j = \mu_{j-1}(1 + m_j) = \mu_{j-1} + \mu_{j-1} m_j = \mu_{j-2} + \mu_{j-2} m_{j-1} + \mu_{j-1} m_j = \\ = \ldots = \mu_0 + \mu_0 m_1 + \mu_1 m_2 + \ldots + \mu_{j-1} m_j. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Доведемо, що для кожного мультиіндексу $k \in M$

$$\|b_k\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)} < \mu_{\langle k \rangle - 1} C^{\langle k \rangle}. \tag{3.20}$$

Будемо доводити методом математичної індукції по величині $\langle k \rangle$. У випадку $\langle k \rangle = 1$ маємо $\eta_k = \xi_k$, тому $\|b_k\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)} = \sqrt[|k|]{|\xi_k|} \|a_k\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)}$. Оскільки

$|\xi_k| < 1$, то $\|b_k\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)} < \|a_k\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)} \leq C = \mu_0 C$. Якщо $r = 1$, то нерівність (3.20) доведено. Нехай $r \geq 2$ і $j \in \{2, \ldots, r\}$. Припустимо, що нерівність (3.20) виконується для кожного мультиіндексу $k \in M$ такого, що $\langle k \rangle \in \{1, \ldots, j-1\}$. Доведемо нерівність (3.20) для мультиіндексів $k \in M$ таких, що $\langle k \rangle = j$. Із рівностей (3.16) і (3.18) випливає нерівність

$$\|b_k\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)} \leq \sqrt[|k|]{|\eta_k|}\|a_k\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)} \leq \sqrt[|k|]{|\eta_k|}C. \tag{3.21}$$

Із рівності (3.15) випливає нерівність

$$|\eta_k| \leq |\xi_k| + \sum_{\substack{l \in M \\ l \prec k}} |H_k^{(\mathbb{C}^n)}(b_l)|.$$

Оскільки відображення $H_k^{(\mathbb{C}^n)}$ є $|k|$-однорідним поліномом на просторі $\ell_1(\mathbb{C}^n)$ і $\left\|H_k^{(\mathbb{C}^n)}\right\| \leq 1$, то

$$\left|H_k^{(\mathbb{C}^n)}(b_l)\right| \leq \left\|H_k^{(\mathbb{C}^n)}\right\| \|b_l\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)}^{|k|} \leq \|b_l\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)}^{|k|}.$$

Тому, враховуючи нерівність $|\xi_k| < 1$, маємо

$$|\xi_k| + \sum_{\substack{l \in M \\ l \prec k}} \left|H_k^{(\mathbb{C}^n)}(b_l)\right| < 1 + \sum_{\substack{l \in M \\ l \prec k}} \|b_l\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)}^{|k|}.$$

Тому

$$\sqrt[|k|]{|\eta_k|} < \left(1 + \sum_{\substack{l \in M \\ l \prec k}} \|b_l\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)}^{|k|}\right)^{1/|k|}. \tag{3.22}$$

Згідно із твердженням 3.5,

$$\left(1 + \sum_{\substack{l \in M \\ l \prec k}} \|b_l\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)}^{|k|}\right)^{1/|k|} \leq 1 + \sum_{\substack{l \in M \\ l \prec k}} \|b_l\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)}. \tag{3.23}$$

Зауважимо, що якщо $l \prec k$, то $\langle l \rangle < \langle k \rangle$. Тому

$$\sum_{\substack{l \in M \\ l \prec k}} \|b_l\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)} \leq \sum_{\substack{l \in M \\ \langle l \rangle < \langle k \rangle}} \|b_l\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)}. \tag{3.24}$$

Оскільки $\langle k\rangle = j$, то

$$\sum_{\substack{l\in M\\ \langle l\rangle<\langle k\rangle}} \|b_l\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)} = \sum_{s=1}^{j-1}\sum_{\substack{l\in M\\ \langle l\rangle=s}} \|b_l\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)}. \tag{3.25}$$

За припущенням індукції, якщо $\langle l\rangle = s$, де $s\in\{1,\dots,j-1\}$, то виконується нерівність $\|b_l\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)} < \mu_{s-1}C^s$. Тому

$$\sum_{\substack{l\in M\\ \langle l\rangle=s}} \|b_l\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)} < \sum_{\substack{l\in M\\ \langle l\rangle=s}} \mu_{s-1}C^s = \mu_{s-1}C^s \sum_{\substack{l\in M\\ \langle l\rangle=s}} 1 = \mu_{s-1}m_sC^s. \tag{3.26}$$

Оскільки $C\geq 1$, то $C^s\leq C^{j-1}$ для кожного $s\in\{1,\dots,j-1\}$, тому

$$1+\sum_{s=1}^{j-1}\mu_{s-1}m_sC^s \leq 1 + C^{j-1}\sum_{s=1}^{j-1}\mu_{s-1}m_s \leq \left(1+\sum_{s=1}^{j-1}\mu_{s-1}m_s\right)C^{j-1}. \tag{3.27}$$

Оскільки $\mu_0 = 1$, то, згідно із рівністю (3.19),

$$1+\sum_{s=1}^{j-1}\mu_{s-1}m_s = \mu_{j-1}. \tag{3.28}$$

Згідно із рівностями і нерівностями (3.22) — (3.28),

$$\sqrt[|k|]{|\eta_k|} < \mu_{j-1}C^{j-1}. \tag{3.29}$$

Згідно із нерівностями (3.21) і (3.29), $\|b_k\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)} \leq \mu_{j-1}C^j$. Отже, нерівність (3.20) виконується для кожного мультиіндексу $k\in M$.

Згідно із рівністю (3.9) і згідно із твердженням 3.5,

$$\|x_\xi\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)} \leq \sum_{l\in M}\|b_l\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)}.$$

Згідно із нерівністю (3.20),

$$\sum_{l\in M}\|b_l\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)} = \sum_{j=1}^{r}\sum_{\substack{l\in M\\ \langle l\rangle=j}}\|b_l\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)} < \sum_{j=1}^{r}\sum_{\substack{l\in M\\ \langle l\rangle=j}}\mu_{j-1}C^j = \sum_{j=1}^{r}\mu_{j-1}C^j\sum_{\substack{l\in M\\ \langle l\rangle=j}}1 =$$

$$= \sum_{j=1}^{r}\mu_{j-1}m_jC^j \leq \left(\sum_{j=1}^{r}\mu_{j-1}m_j\right)C^r < \left(\mu_0+\sum_{j=1}^{r}\mu_{j-1}m_j\right)C^r = \mu_rC^r.$$

Покладемо $\rho_M = \mu_r C^r$. Маємо, що $\|x_\xi\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)} < \rho_M$, якщо $\|\xi\|_\infty < 1$. Згідно із наслідком 3.3, $\|x_\xi\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)} \leq \|x_\xi\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)} \leq \rho_M$ для кожного $p \in [1, +\infty)$. Теорему доведено. □

Наслідок 3.4. *Нехай множина* $M = \{k^{(1)}, \ldots, k^{(s)}\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ *така, що* $|k^{(j)}| \geq 1$ *для кожного* $j \in \{1, \ldots, s\}$. *Тоді існує* $m \in \mathbb{N}$ *таке, що для кожного* $m' \geq m$ *поліноми* $H_{k^{(1)}}^{(\mathbb{C}^n)}, \ldots, H_{k^{(s)}}^{(\mathbb{C}^n)}$ *є алгебраїчно незалежними на просторі* $c_{00}^{(m')}(\mathbb{C}^n)$.

Доведення. Згідно із теоремою 3.3, існує $m \in \mathbb{N}$ таке, що для кожного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_s) \in \mathbb{C}^s$ існує послідовність $x_\xi \in c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$ така, що

$$H_{k^{(j)}}^{(\mathbb{C}^n)}(x_\xi) = \xi_j \tag{3.30}$$

для кожного $j \in \{1, \ldots, s\}$. Покажемо, що поліноми $H_{k^{(1)}}^{(\mathbb{C}^n)}, \ldots, H_{k^{(s)}}^{(\mathbb{C}^n)}$ є алгебраїчно незалежними на просторі $c_{00}^{(m')}(\mathbb{C}^n)$ для кожного $m' \geq m$. Нехай $Q : \mathbb{C}^s \to \mathbb{C}$ — це такий поліном, що

$$Q\Big(H_{k^{(1)}}^{(\mathbb{C}^n)}(x), \ldots, H_{k^{(s)}}^{(\mathbb{C}^n)}(x)\Big) = 0$$

для кожної послідовності $x \in c_{00}^{(m')}(\mathbb{C}^n)$. Покладемо $x = x_\xi$. Враховуючи рівність (3.30), маємо $Q(\xi_1, \ldots, \xi_s) = 0$ для довільних $\xi_1, \ldots, \xi_s \in \mathbb{C}$, тобто $Q \equiv 0$. Отже, множина поліномів $\Big\{H_{k^{(1)}}^{(\mathbb{C}^n)}, \ldots, H_{k^{(s)}}^{(\mathbb{C}^n)}\Big\}$ є алгебраїчно незалежною. Наслідок доведено. □

Побудуємо алгебраїчний базис алгебри $\mathcal{P}_s(\ell_1(\mathbb{C}^n))$.

В роботі [82] А. В. Загороднюк і В. В. Кравців довели наступну теорему.

Теорема 3.4. (Див. [82, Теорема 8]) *Кожен* N*-однорідний поліном* $P \in \mathcal{P}_s(c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n))$, *де* m *— це довільне додатне ціле число, можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів* $H_k^{(\mathbb{C}^n)}$, *де мультиіндекси* $k \in \mathbb{Z}_+^n$ *такі, що* $1 \leq |k| \leq N$.

Скористаємося цією теоремою для доведення наступного результату.

Теорема 3.5. *Нехай* $P : c_{00}(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}$ *— це симетричний* N*-однорідний поліном. Нехай* $M_N = \{k \in \mathbb{Z}_+^n : \ 1 \leq |k| \leq N\}$*. Існує поліном* $q : \mathbb{C}^{|M_N|} \to \mathbb{C}$ *такий, що* $P = q \circ \pi_{M_N}$*, де відображення* π_{M_N} *визначене формулою* (3.14).

Доведення. Згідно із наслідком 3.4, існує $m \in \mathbb{N}$ таке, що для кожного $m' \geq m$ поліноми $H_k^{(\mathbb{C}^n)}$, де $k \in M_N$, є алгебраїчно незалежними. Тому зображення, яке існує згідно із теоремою 3.4 для звуження полінома P на простір $c_{00}^{(m')}(\mathbb{C}^n)$, є єдиним. Отже, для кожного $m' \geq m$ існує єдиний поліном $q_{m'} : \mathbb{C}^{|M_N|} \to \mathbb{C}$ такий, що $P(x) = (q_{m'} \circ \pi_{M_N})(x)$ для кожного $x \in c_{00}^{(m')}(\mathbb{C}^n)$. Оскільки $c_{00}^{(m')}(\mathbb{C}^n) \supset c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$, то поліном q_m є звуженням полінома $q_{m'}$ на $\pi_{M_N}(c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n))$. Згідно із теоремою 3.3, $\pi_{M_N}(c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)) = \mathbb{C}^{|M_N|}$, тому $q_{m'} \equiv q_m$. Нехай $q = q_m$. Тоді $P(x) = (q \circ \pi_{M_N})(x)$ для кожного $x \in c_{00}(\mathbb{C}^n)$. Теорему доведено. □

Теорема 3.6. *Множина поліномів*

$$\left\{ H_k^{(\mathbb{C}^n)} : \ k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\} \right\}$$

є алгебраїчним базисом алгебри $\mathcal{P}_s(\ell_1(\mathbb{C}^n))$.

Доведення. Доведемо, що кожен симетричний неперервний поліном на просторі $\ell_1(\mathbb{C}^n)$ можна єдиним чином подати у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів $H_k^{(\mathbb{C}^n)}$. Достатньо довести теорему для однорідних поліномів. Нехай $P : \ell_1(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}$ — це симетричний неперервний N-однорідний поліном. Згідно із теоремою 3.5, звуження полінома P на простір $c_{00}(\mathbb{C}^n)$ можна єдиним чином подати у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів $H_k^{(\mathbb{C}^n)}$, де мультиіндекси $k \in \mathbb{Z}_+^n$ такі, що $1 \leq |k| \leq N$. Оскільки простір $c_{00}(\mathbb{C}^n)$ є щільним у просторі $\ell_1(\mathbb{C}^n)$ і поліноми $H_k^{(\mathbb{C}^n)}$ є добре визначеними і неперервними на просторі $\ell_1(\mathbb{C}^n)$, то дане зображення можна продовжити на простір $\ell_1(\mathbb{C}^n)$. Теорему доведено. □

Нехай $p \in (1, +\infty)$. Побудуємо алгебраїчний базис алгебри $\mathcal{P}_s(\ell_p(\mathbb{C}^n))$. Доведемо комплексний аналог леми 2 із статті [95].

Лема 3.2. *Нехай* $K \subset \mathbb{C}^m$ *і* $\varkappa : K \to \mathbb{C}^{m-1}$ *— це ортогональна проекція:* $\varkappa\big((x_1, x_2, \ldots, x_m)\big) = (x_2, \ldots, x_m)$*. Нехай* $K_1 = \varkappa(K)$, $\operatorname{int} K_1 \neq \emptyset$ *і для кожної відкритої множини* $U \subset K_1$ *множина* $\varkappa^{-1}(U)$ *є необмеженою. Якщо поліном* $Q(x_1, \ldots, x_m)$ *є обмеженим на множині* K*, то* Q *не залежить від* x_1*.*

Доведення. Припустимо, що поліном Q залежить від x_1. Тоді

$$Q(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{j=0}^{k} q_j(x_2, \ldots, x_m) x_1^j,$$

де $1 \leq k \leq \deg Q$ і $q_k \not\equiv 0$. Зауважимо, що $q_k \not\equiv 0$ на множині $\operatorname{int} K_1$, тому існує точка $a \in \operatorname{int} K_1$ така, що $q_k(a) \neq 0$. Оскільки множина $\operatorname{int} K_1$ є відкритою і поліном q_k є неперервним, то існує $r > 0$ таке, що $B(a, r) \subset \operatorname{int} K_1$ і $\inf_{b \in B(a,r)} |q_k(b)| > 0$, де $B(a, r)$ — це відкрита куля з центром a і радіусом r у просторі $\mathbb{C}^{m-1}$. Зауважимо, що для точки $(x_1, \ldots, x_m) \in \varkappa^{-1}(B(a, r))$,

$$|Q(x_1, \ldots, x_m)| \geq |q_k(x_2, \ldots, x_m)||x_1|^k - \sum_{j=0}^{k-1} |q_j(x_2, \ldots, x_m)||x_1|^j \geq$$

$$\geq c|x_1|^k - \sum_{j=0}^{k-1} d_j |x_1|^j, \quad (3.31)$$

де

$$c = \inf_{b \in B(a,r)} |q_k(b)| \quad \text{і} \quad d_j = \sup_{b \in B(a,r)} |q_j(b)|$$

для $j \in \{0, \ldots, k-1\}$. Зауважимо, що для полінома $cx_1^k + \sum_{j=0}^{k-1} d_j x_1^j$ існує $R > 0$ таке, що якщо $|x_1| > R$, то

$$c|x_1|^k > 2 \sum_{j=0}^{k-1} d_j |x_1|^j,$$

тобто

$$\sum_{j=0}^{k-1} d_j |x_1|^j < \frac{1}{2} c |x_1|^k.$$

Тому, якщо $|x_1| > R$, то

$$c|x_1|^k - \sum_{j=0}^{k-1} d_j |x_1|^j > c|x_1|^k - \frac{1}{2}c|x_1|^k = \frac{1}{2}c|x_1|^k. \tag{3.32}$$

Оскільки множина $\varkappa^{-1}(B(a,r))$ є необмеженою, то існує послідовність

$$\left\{\left(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}\right)\right\}_{n=1}^{\infty} \subset \varkappa^{-1}(B(a,r))$$

така, що $x_1^{(n)} \to \infty$ при $n \to +\infty$. Враховуючи нерівності (3.31) і (3.32), маємо

$$\left|Q\left(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}\right)\right| > \frac{1}{2}c\left|x_1^{(n)}\right|^k \to +\infty$$

при $n \to +\infty$, що суперечить обмеженості полінома Q на множині K. Лему доведено. $\square$

Для $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ нехай $\mathcal{V}(k) = \big\{s \in \{1, \ldots, n\} : \ k_s \neq 0\big\}$ і $\nu(k) = |\mathcal{V}(k)|$.

Лема 3.3. *Для $k, l \in \mathbb{Z}_+^n$, якщо $l \succ k$ і $\nu(l) \geq \nu(k)$, то $|l| > |k|$.*

Доведення. Оскільки $l \succ k$, то існує мультиіндекс $m \in \mathbb{Z}_+^n$ такий, що

$$(l_1, \ldots, l_n) = (m_1 k_1, \ldots, m_n k_n)$$

і $l \neq k$. Тому, якщо $k_s = 0$ для деякого $s \in \{1, \ldots, n\}$, то $l_s = 0$ також. Це означає, що $\mathcal{V}(l) \subset \mathcal{V}(k)$. З іншого боку, $\nu(l) \geq \nu(k)$. Тому $\mathcal{V}(l) = \mathcal{V}(k)$, тобто для $s \in \{1, \ldots, n\}$ маємо, що $l_s \neq 0$ тоді і тільки тоді, коли $k_s \neq 0$. Тому для кожного $s \in \mathcal{V}(l)$ маємо, що $m_s \geq 1$. Оскільки $l \neq k$, то існує $s_0 \in \mathcal{V}(l)$ таке, що $m_{s_0} \geq 2$. Тому

$$|l| = m_1 k_1 + \ldots + m_n k_n > k_1 + \ldots + k_n = |k|.$$

Лему доведено. $\square$

Для $N \in \mathbb{N}$ і $J \in \{1, \ldots, n\}$, нехай

$$M_N^{(J)} = \big\{l \in \mathbb{Z}_+^n : \ 1 \leq |l| < \lceil p \rceil, \nu(l) \geq J\big\} \cup \\ \cup \big\{l \in \mathbb{Z}_+^n : \ \lceil p \rceil \leq |l| \leq N\big\}. \tag{3.33}$$

Згідно із теоремою 3.3, для $M = M_N^{(1)}$ існує стала $\rho = \rho_M > 0$ така, що множина $\pi_M(V_\rho)$ містить відкриту одиничну кулю простору $\mathbb{C}^{|M|}$ з нормою $\|\cdot\|_\infty$, де

$$V_\rho = \Big\{ x \in c_{00}(\mathbb{C}^n) : \; \|x\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)} < \rho \Big\}. \tag{3.34}$$

Твердження 3.6. *Для* $J \in \{1, \ldots, N\}$ *нехай* $q\Big((\xi_l)_{l \in M_N^{(J)}} \Big)$ *— це поліном на просторі* $\mathbb{C}^{|M_N^{(J)}|}$*. Якщо поліном* q *є обмеженим на множині* $\pi_{M_N^{(J)}}(V_\rho)$*, то поліном* q *не залежить від змінної* ξ_k *такої, що* $\nu(k) = J$ *і* $1 \le |k| < \lceil p \rceil$.

Доведення. Нехай мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$ такий, що $\nu(k) = J$ і $1 \le |k| < \lceil p \rceil$. Нехай $K = \pi_{M_N^{(J)}}(V_\rho)$, $K_1 = \pi_{M_N^{(J)} \setminus \{k\}}(V_\rho)$ і $\varkappa : K \to K_1$ — це ортогональна проекція, визначена формулою

$$\varkappa : (\xi_l)_{l \in M_N^{(J)}} \mapsto (\xi_l)_{l \in M_N^{(J)} \setminus \{k\}}.$$

Покажемо, що для кожної кулі

$$B(u, r) = \Big\{ \xi \in \mathbb{C}^{|M_N^{(J)} \setminus \{k\}|} : \; \|\xi - u\|_\infty < r \Big\}$$

з центром $u = (u_l)_{l \in M_N^{(J)} \setminus \{k\}} \in \mathbb{C}^{|M_N^{(J)} \setminus \{k\}|}$ і радіусом $r > 0$ таким, що $B(u,r) \subset \pi_{M_N^{(J)} \setminus \{k\}}(V_\rho)$, множина $\varkappa^{-1}(B(u,r))$ є необмеженою. Оскільки $u \in \pi_{M_N^{(J)} \setminus \{k\}}(V_\rho)$, то існує точка $x_u \in V_\rho$ така, що $\pi_{M_N^{(J)} \setminus \{k\}}(x_u) = u$. Для $m \in \mathbb{N}$ покладемо $x_m = \bigoplus\limits_{j=1}^{m} \frac{1}{j^{1/|k|}} a_k$, де послідовність a_k визначена формулою (3.12). Виберемо ε таке, що

$$0 < \varepsilon < \min\left\{ 1, \frac{\rho - \|x_u\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}}{\|a_k\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)} \zeta(p/|k|)^{1/p}}, \frac{r}{\|a_k\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)}^N \zeta(1 + 1/|k|)} \right\},$$

де $\zeta(\cdot)$ — це дзета-функція Рімана. Нехай $x_{m,\varepsilon} = (\varepsilon x_m) \oplus x_u$. Покажемо, що $x_{m,\varepsilon} \in V_\rho$. Згідно із рівністю (3.9),

$$\|x_m\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}^p = \sum_{j=1}^{m} \Big\| \frac{1}{j^{1/|k|}} a_k \Big\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}^p = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j^{p/|k|}} \|a_k\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}^p =$$

$$= \|a_k\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}^p \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j^{p/|k|}} < \|a_k\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}^p \zeta(p/|k|).$$

Тому $\|x_m\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)} < \|a_k\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}\zeta(p/|k|)^{1/p}$. Згідно із нерівністю трикутника,

$$\|x_{m,\varepsilon}\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)} \leq \varepsilon\|x_m\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)} + \|x_u\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)} < \varepsilon\|a_k\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}\zeta(p/|k|)^{1/p} + \|x_u\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}.$$

Оскільки $\varepsilon < \frac{\rho - \|x_u\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}}{\|a_k\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}\zeta(p/|k|)^{1/p}}$, то $\|x_{m,\varepsilon}\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)} < \rho$. Отже, $x_{m,\varepsilon} \in V_\rho$.

Зауважимо, що для довільного ненульового мультиіндексу $l \in \mathbb{Z}_+^n$, згідно із рівністю (3.10),

$$H_l^{(\mathbb{C}^n)}(x_m) = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j^{|l|/|k|}} H_l^{(\mathbb{C}^n)}(a_k) = H_l^{(\mathbb{C}^n)}(a_k) \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j^{|l|/|k|}}$$

і

$$\begin{aligned} H_l^{(\mathbb{C}^n)}(x_{m,\varepsilon}) = \varepsilon^{|l|} H_l^{(\mathbb{C}^n)}(x_m) + H_l^{(\mathbb{C}^n)}(x_u) = \\ = \varepsilon^{|l|} H_l^{(\mathbb{C}^n)}(a_k) \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j^{|l|/|k|}} + H_l^{(\mathbb{C}^n)}(x_u). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Покажемо, що $\pi_{M_N^{(J)} \setminus \{k\}}(x_{m,\varepsilon}) \in B(u,r)$. Для мультиіндексу $l \in M_N^{(J)} \setminus \{k\}$ такого, що $l \not\succ k$, згідно із твердженням 3.4, $H_l^{(\mathbb{C}^n)}(a_k) = 0$, тому, згідно із рівністю (3.35),

$$H_l^{(\mathbb{C}^n)}(x_{m,\varepsilon}) = H_l^{(\mathbb{C}^n)}(x_u) = u_l.$$

Нехай мультиіндекс $l \in M_N^{(J)} \setminus \{k\}$ такий, що $l \succ k$. Якщо $\lceil p \rceil \leq |l| \leq N$, то $|l| > |k|$, оскільки $|k| < \lceil p \rceil$. Якщо $1 \leq |l| < \lceil p \rceil$ і $\nu(l) \geq J$, то $|l| > |k|$ згідно із лемою 3.3. Отже, $|l| > |k|$ в обидвох випадках. Згідно із рівністю (3.35),

$$\left|H_l^{(\mathbb{C}^n)}(x_{m,\varepsilon}) - u_l\right| \leq \varepsilon^{|l|} \left|H_l^{(\mathbb{C}^n)}(a_k)\right| \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j^{|l|/|k|}}.$$

Оскільки $0 < \varepsilon < 1$, то

$$\varepsilon^{|l|} \leq \varepsilon.$$

Згідно із твердженням 3.3, $\left\|H_l^{(\mathbb{C}^n)}\right\| \leq 1$, тому, згідно із нерівністю (1.6),

$$\left|H_l^{(\mathbb{C}^n)}(a_k)\right| \leq \|a_k\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)}^{|l|}.$$

Враховуючи, що $\|a_k\|_{\ell_1(\mathbb{C}^n)} \geq 1$ і $|l| \leq N$, маємо, що $\left|H_l^{(\mathbb{C}^n)}(a_k)\right| \leq \|a_k\|^N_{\ell_1(\mathbb{C}^n)}$. Оскільки $|l|$ і $|k|$ є цілими числами і $|l| > |k|$, то $|l| \geq |k| + 1$, тому,

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j^{|l|/|k|}} \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j^{1+1/|k|}} < \zeta(1 + 1/|k|).$$

Отже,

$$\left|H_l^{(\mathbb{C}^n)}(x_{m,\varepsilon}) - u_l\right| < \varepsilon \|a_k\|^N_{\ell_1(\mathbb{C}^n)} \zeta(1 + 1/|k|).$$

Оскільки $\varepsilon < \frac{r}{\|a_k\|^N_{\ell_1(\mathbb{C}^n)}\zeta(1+1/|k|)}$, то $\left|H_l^{(\mathbb{C}^n)}(x_{m,\varepsilon}) - u_l\right| < r$, тому $\pi_{M_N^{(J)} \setminus \{k\}}(x_{m,\varepsilon}) \in B(u, r)$.

Згідно із твердженням 3.4, $H_k^{(\mathbb{C}^n)}(a_k) = 1$, тому, згідно із рівністю (3.35),

$$H_k^{(\mathbb{C}^n)}(x_{m,\varepsilon}) = \varepsilon^{|l|} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j} + H_k^{(\mathbb{C}^n)}(x_u) \to \infty$$

при $m \to +\infty$. Отже, множина $\varkappa^{-1}(B(u, r))$ є необмеженою. Згідно із лемою 3.2, поліном q не залежить від змінної ξ_k. Твердження доведено. □

Теорема 3.7. *Нехай $P \in \mathcal{P}_s(\ell_p(\mathbb{C}^n))$ — це N-однорідний поліном, де $N \in \mathbb{N}$. Якщо $N < \lceil p \rceil$, то $P \equiv 0$. Інакше існує єдиний поліном $q : \mathbb{C}^{|M_{p,N}|} \to \mathbb{C}$ такий, що $P = q \circ \pi^{(p)}_{M_{p,N}}$, де*

$$M_{p,N} = \left\{ k \in \mathbb{Z}_+^n : \lceil p \rceil \leq |k| \leq N \right\}$$

і відображення $\pi^{(p)}_{M_{p,N}} : \ell_p(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}^{|M_{p,N}|}$ визначене рівністю

$$\pi^{(p)}_{M_{p,N}}(x) = \left(H_k^{(\mathbb{C}^n)}(x)\right)_{k \in M_{p,N}},$$

де $x \in \ell_p(\mathbb{C}^n)$.

Доведення. Нехай P_0 — це звуження полінома P на простір $c_{00}(\mathbb{C}^n)$. Зауважимо, що відображення P_0 є неперервним симетричним N-однорідним поліномом. Згідно із теоремою 3.5, існує єдиний поліном $q : \mathbb{C}^{|M_N|} \to \mathbb{C}$, де $M_N = M_N^{(1)}$ такий, що $P_0 = q \circ \pi_{M_N}$. Оскільки поліном P_0 є неперервним, то P_0 є обмеженим на множині V_ρ, визначеній формулою (3.34). Тому поліном q є обмеженим на множині $\pi_{M_N}(V_\rho)$.

Доведемо, що поліном q не залежить від аргументів ξ_k, де мультиіндекси k такі, що $1 \leq |k| < \lceil p \rceil$ методом математичної індукції по $\nu(k)$. Згідно із твердженням 3.6, для $J = 1$ маємо, що поліном $q\big((\xi_k)_{k \in M_N}\big)$ не залежить від аргументів ξ_k таких, що $\nu(k) = 1$ і $1 \leq |k| < \lceil p \rceil$. Припустимо, що твердження є правильним для $\nu(k) \in \{1, \ldots, J-1\}$, де $J \in \{2, \ldots, n\}$, тобто поліном $q\big((\xi_k)_{k \in M_N}\big)$ не залежить від аргументів ξ_k, для яких $1 \leq \nu(k) \leq J-1$ і $1 \leq |k| < \lceil p \rceil$. Тоді звуження полінома q на простір $\mathbb{C}^{|M_N^{(J)}|}$, згідно із твердженням 3.6, не залежить від аргументів ξ_k, для яких $\nu(k) = J$ і $1 \leq |k| < \lceil p \rceil$. Отже, поліном q не залежить від аргументів ξ_k, для яких $1 \leq |k| < \lceil p \rceil$.

Оскільки поліноми $H_k^{(\mathbb{C}^n)}$, де $k \in M_{p,N}$, є визначеними і неперервними на просторі $\ell_p(\mathbb{C}^n)$, і простір $c_{00}(\mathbb{C}^n)$ є щільним в просторі $\ell_p(\mathbb{C}^n)$, то маємо рівність $P = q \circ \pi^{(p)}_{M_{p,N}}$. Зауважимо, що у випадку $N < \lceil p \rceil$ маємо $M_{p,N} = \emptyset$ і, як наслідок, $P \equiv 0$. Теорему доведено. □

Наслідок 3.5. *Множина поліномів*

$$\Big\{ H_k^{(\mathbb{C}^n)} : \ k \in \mathbb{Z}_+^n, \, |k| \geq \lceil p \rceil \Big\}$$

є алгебраїчним базисом алгебри $\mathcal{P}_s(\ell_p(\mathbb{C}^n))$.

3.4. Висновки до розділу 3

Цей розділ присвячено дослідженням симетричних і скінченно-симетричних неперервних поліномів і цілих аналітичних функцій на комплексному банаховому просторі всіх обмежених послідовностей комплексних чисел, а також, дослідженням неперервних симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх послідовностей n-вимірних комплексних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня p, є збіжним, де $1 \leq p < +\infty$.

Показано, що кожен комплекснозначний неперервний симетричний поліном на комплексному банаховому просторі ℓ_∞ всіх обмежених послідовностей комплексних чисел обов'язково є сталим відображенням.

Показано, що алгебра Фреше всіх комплекснозначних скінченно-симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному просторі ℓ_∞ є ізоморфною до алгебри Фреше всіх комплекснозначних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на фактор-просторі ℓ_∞/c_0, де c_0 — це комплексний банахів простір всіх збіжних до нуля послідовностей комплексних чисел.

Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх послідовностей n-вимірних комплексних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня p, є збіжним, де $1 \leq p < +\infty$.

Результати, наведені в цьому розділі, опубліковано в таких працях: [59], [82].

РОЗДІЛ 4

СИМЕТРИЧНІ І СКІНЧЕННО-СИМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ НА КОМПЛЕКСНИХ БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ ВИМІРНИХ ЗА ЛЕБЕГОМ СУТТЄВО ОБМЕЖЕНИХ ФУНКЦІЙ НА МНОЖИНАХ НЕСКІНЧЕННОЇ МІРИ

Даний розділ присвячено вивченню симетричних і скінченно-симетричних комплекснозначних неперервних поліномів і аналітичних функцій на деяких комплексних банахових просторах вимірних за Лебегом функцій на множинах нескінченної міри.

4.1. Симетричні поліноми на комплексному банаховому просторі вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі

В даному підрозділі буде показано, що кожен комплекснозначний неперервний симетричний поліном на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі обов'язково є сталим відображенням. Цей результат аналогічний до основного результату підрозділу 3.1.

Нехай Ω — це вимірна за Лебегом підмножина множини $[0, +\infty)$ ненульової міри. Нехай $L_\infty(\Omega) := L_\infty^{(\mathbb{C})}(\Omega)$ — це комплексний банахів простір всіх вимірних за Лебегом суттєво обмежених комплекснозначних функцій, заданих на множині Ω (див. приклад 1.1). Згідно із означенням 1.17, функцію f, задану на просторі $L_\infty(\Omega)$ називають симетричною, якщо $f(x \circ \sigma) = f(x)$ для кожних функцій $x \in L_\infty(\Omega)$ і $\sigma \in \Xi_\Omega$, де Ξ_Ω — це множина всіх бієкцій множини Ω, які зберігають міру Лебега, визначена на с. 63.

Позначимо $\mathcal{P}_s({}^n L_\infty(\Omega))$ банахів простір всіх комплекснозначних неперервних n-однорідних симетричних поліномів на просторі $L_\infty(\Omega)$, де $n \in \mathbb{N}$.

В даному підрозділі буде доведено, що якщо $\mu(\Omega) = +\infty$, де μ — це лінійна міра Лебега, то $\mathcal{P}_s({}^nL_\infty(\Omega)) = \{0\}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Спочатку доведемо деякі допоміжні результати.

Нехай $D = \bigcup_{k=1}^{\infty}[\alpha_k, \beta_k)$, де $0 \le \alpha_1 < \beta_1 \le \alpha_2 < \beta_2 \le \ldots$ такі, що $\mu(D) = +\infty$. Визначимо відображення $\delta_D : [0, +\infty) \to D$ наступним чином. Для $t \in [0, +\infty)$ існує $m \in \mathbb{N}$ таке, що $\sum_{k=1}^{m-1}(\beta_k - \alpha_k) \le t < \sum_{k=1}^{m}(\beta_k - \alpha_k)$. Покладемо

$$\delta_D(t) = \alpha_m + t - \sum_{k=1}^{m-1}(\beta_k - \alpha_k). \tag{4.1}$$

Можна перевірити, що відображення δ_D є бієкцією, яка зберігає міру.

Позначимо $\Delta_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty}[2k-2, 2k-1)$ і $\Delta_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty}[2k-1, 2k)$.

Для кожної множини $E \subset [0, +\infty)$, нехай

$$\mathbf{1}_E(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t \in E \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases}$$

де $t \in [0, +\infty)$. Зауважимо, що

$$\mathbf{1}_E = \mathbf{1}_{\sigma(E)} \circ \sigma$$

майже скрізь на множині $[0, +\infty)$ для кожної вимірної множини $E \subset [0, +\infty)$ і для кожної функції $\sigma \in \Xi_{[0,+\infty)}$.

Твердження 4.1. *Для кожної вимірної множини $E \subset [0, +\infty)$ існує функція $\sigma_E \in \Xi_{[0,+\infty)}$ така, що*

$$\mathbf{1}_E = \mathbf{1}_\Delta \circ \sigma_E$$

майже скрізь на множині $[0, +\infty)$, де

$$\Delta = \begin{cases} [0, \mu(E)), & \text{якщо } \mu(E) < +\infty \\ [\mu([0,+\infty) \setminus E), +\infty), & \text{якщо } \mu(E) = +\infty \text{ і } \mu([0,+\infty) \setminus E) < +\infty \\ \Delta_1, & \text{якщо } \mu(E) = +\infty \text{ і } \mu([0,+\infty) \setminus E) = +\infty. \end{cases} \tag{4.2}$$

Доведення. Згідно із твердженням 4.2, для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує функція $\sigma_n \in \Xi_{[n-1,n]}$ така, що

$$\mathbf{1}_{E \cap [n-1,n]} = \mathbf{1}_{[n-1, n-1+a_n)} \circ \sigma_n$$

майже скрізь на відрізку $[n-1,n]$, де $a_n=\mu\big(E\cap[n-1,n]\big)$. Визначимо відображення $\sigma':[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, поклавши $\sigma'(t)=\sigma_n(t)$ для $t\in[n-1,n]$, де $n\in\mathbb{N}$. Тоді $\sigma'\in\Xi_{[0,+\infty)}$ і

$$\mathbf{1}_E=\mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty}[n-1,n-1+a_n)}\circ\sigma' \tag{4.3}$$

майже скрізь на множині $[0,+\infty)$.

Нехай $b_n=\sum_{k=1}^{n}a_k, b_0=0, c_n=\sum_{k=1}^{n}(1-a_k)$ і $c_0=0$. Визначимо відображення $\sigma'':[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ наступним чином. Якщо $\mu(E)<+\infty$, то покладемо

$$\sigma''(t)=\begin{cases} b_{n-1}+t-(n-1), & \text{якщо існує } n\in\mathbb{N} \text{ таке, що}\\ & t\in[n-1,n-1+a_n)\\ \mu(E)+c_{n-1}+t-(n-1+a_n), & \text{інакше.}\end{cases}$$

Якщо $\mu(E)=+\infty$ і $\mu\big([0,+\infty)\setminus E\big)<+\infty$, то покладемо

$$\sigma''(t)=\begin{cases} \mu\big([0,+\infty)\setminus E\big)+b_{n-1}+t-(n-1), & \text{якщо існує } n\in\mathbb{N} \text{ таке, що}\\ & t\in[n-1,n-1+a_n)\\ c_{n-1}+t-(n-1+a_n), & \text{інакше.}\end{cases}$$

Якщо $\mu(E)=+\infty$ і $\mu\big([0,+\infty)\setminus E\big)=+\infty$, то покладемо

$$\sigma''(t)=\begin{cases} \delta_{\Delta_1}\big(b_{n-1}+t-(n-1)\big), & \text{якщо існує } n\in\mathbb{N} \text{ таке, що}\\ & t\in[n-1,n-1+a_n)\\ \delta_{\Delta_2}\big(c_{n-1}+t-(n-1+a_n)\big), & \text{інакше,}\end{cases}$$

де відображення δ_{Δ_1} і δ_{Δ_2} визначені формулою (4.1). У кожному випадку

$$\sigma''\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}[n-1,n-1+a_n)\Big)=\Delta,$$

де множина Δ визначена формулою (4.2). Тому

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty}[n-1,n-1+a_n)}=\mathbf{1}_\Delta\circ\sigma'' \tag{4.4}$$

майже скрізь на множині $[0,+\infty)$.

Згідно із рівностями (4.3) і (4.4), виконується рівність

$$\mathbf{1}_E = \mathbf{1}_\Delta \circ \sigma_E$$

майже скрізь на множині $[0, +\infty)$, де $\sigma_E = \sigma'' \circ \sigma'$. Твердження доведено. □

Твердження 4.2. *Для кожної вимірної множини* $E \subset [0, +\infty)$ *і для кожного неперервного симетричного полінома* $P : L_\infty[0, +\infty) \to \mathbb{C}$ *такого, що* $P(0) = 0$, *виконується рівність* $P(\mathbf{1}_E) = 0$.

Доведення. Для $\alpha > 0$ нехай S_α — це підпростір простору $L_\infty[0, +\infty)$ всіх функцій вигляду

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \mathbf{1}_{[\alpha(n-1), \alpha n)},$$

де $(z_1, \ldots, z_n, \ldots) \in \ell_\infty$. Простір S_α є ізометрично ізоморфним з простором ℓ_∞. Тому звуження полінома P на простір S_α, згідно із теоремою 3.1, враховуючи рівність $P(0) = 0$, дорівнює нулю. Нехай E — це вимірна підмножина множини $[0, +\infty)$. Згідно із твердженням 4.1, існує функція $\sigma_E \in \Xi_{[0,+\infty)}$ така, що

$$\mathbf{1}_E = \mathbf{1}_\Delta \circ \sigma_E$$

майже скрізь на множині $[0, +\infty)$, де множина Δ визначена формулою (4.2). Оскільки поліном P є симетричним, то

$$P(\mathbf{1}_E) = P(\mathbf{1}_\Delta).$$

Якщо $\mu(E) < +\infty$, то $\mathbf{1}_\Delta = \mathbf{1}_{[0,\mu(E))} \in S_{\mu(E)}$. Якщо $\mu(E) = +\infty$ і $\mu\big([0, +\infty) \setminus E\big) < +\infty$, то $\mathbf{1}_\Delta = \mathbf{1}_{[\mu([0,+\infty)\setminus E), +\infty)} \in S_{\mu([0,+\infty)\setminus E)}$. Якщо $\mu(E) = +\infty$ і $\mu([0, +\infty) \setminus E) = +\infty$, то $\mathbf{1}_\Delta = \mathbf{1}_{\Delta_1} \in S_1$. Тому, у кожному випадку, $P(\mathbf{1}_\Delta) = 0$. Твердження доведено. □

Твердження 4.3. *Нехай* Ω *— це вимірна підмножина множини* $[0, +\infty)$ *така, що* $\mu(\Omega) = +\infty$. *Тоді простір* $\mathcal{P}_s({}^n L_\infty(\Omega))$ *є ізометрично ізоморфним з простором* $\mathcal{P}_s({}^n L_\infty[0, +\infty))$, *де* $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. Згідно із твердженням 4.1, існує функція $\sigma_\Omega \in \Xi_{[0,+\infty)}$ така, що $\mathbf{1}_\Omega = \mathbf{1}_\Delta \circ \sigma_\Omega$ майже скрізь на множині $[0,+\infty)$, де

$$\Delta = \begin{cases} [\mu([0,+\infty) \setminus \Omega), +\infty), & \text{якщо } \mu([0,+\infty) \setminus \Omega) < +\infty \\ \Delta_1, & \text{якщо } \mu([0,+\infty) \setminus \Omega) = +\infty. \end{cases}$$

Визначимо відображення $\gamma : [0,+\infty) \to \Omega$ формулою $\gamma = \sigma_\Omega^{-1}|_\Delta \circ \delta_\Delta$. Відображення γ є бієкцією, яка зберігає міру.

Визначимо відображення $\beta : L_\infty(\Omega) \to L_\infty[0,+\infty)$ як $\beta : x \mapsto x \circ \gamma$. Зауважимо, що відображення β є ізометричним ізоморфізмом.

Визначимо відображення $\alpha : \mathcal{P}_s({}^n L_\infty[0,+\infty)) \to \mathcal{P}_s({}^n L_\infty(\Omega))$ як $\alpha : P \mapsto P \circ \beta$. Можна переконатися, що відображення $\alpha(P)$ є неперервним n-однорідним поліномом для кожного полінома $P \in \mathcal{P}_s({}^n L_\infty[0,+\infty))$. Доведемо, що поліном $\alpha(P)$ є симетричним. Нехай $\sigma \in \Xi_\Omega$. За означенням, для функції $x \in L_\infty(\Omega)$,

$$\alpha(P)(x \circ \sigma) = P(\beta(x \circ \sigma)).$$

Зауважимо, що

$$\beta(x \circ \sigma) = \beta(x) \circ \upsilon(\sigma),$$

де відображення $\upsilon : \Xi_\Omega \to \Xi_{[0,+\infty)}$ визначене як $\upsilon : \sigma \mapsto \gamma^{-1} \circ \sigma \circ \gamma$. Тому

$$\alpha(P)(x \circ \sigma) = P(\beta(x) \circ \upsilon(\sigma)).$$

Згідно із симетричністю полінома P, виконується рівність

$$P(\beta(x) \circ \upsilon(\sigma)) = P(\beta(x)).$$

Отже, поліном $\alpha(P)$ є симетричним. Аналогічно можна довести, що відображення $\alpha^{-1}(Q)$ є неперервним n-однорідним симетричним поліномом на просторі $L_\infty[0,+\infty)$ для кожного полінома $Q \in \mathcal{P}_s({}^n L_\infty(\Omega))$. Оскільки відображення β — це ізометричний ізоморфізм, то відображення α також є ізометричним ізоморфізмом. Твердження доведено. $\square$

Отримуємо наступний наслідок із тверджень 4.2 і 4.3.

Наслідок 4.1. *Нехай Ω — це вимірна підмножина множини $[0,+\infty)$ така, що $\mu(\Omega)=+\infty$. Тоді для кожної вимірної множини $E\subset\Omega$ і для кожного неперервного симетричного полінома $P:L_\infty(\Omega)\to\mathbb{C}$ такого, що $P(0)=0$, виконується рівність $P(\mathbf{1}_E)=0$.*

Теорема 4.1. *Нехай P — це неперервний n-однорідний симетричний поліном на просторі $L_\infty[0,+\infty)$, де $n\in\mathbb{N}$. Тоді поліном P тотожно дорівнює нулю.*

Доведення. Нехай $A_P:(L_\infty[0,+\infty))^n\to\mathbb{C}$ — це неперервне n-лінійне симетричне відображення, асоційоване із поліномом P. Згідно із твердженням 1.1, де $J:x\mapsto x\circ\sigma$,

$$A_P(x_1\circ\sigma,\ldots,x_n\circ\sigma)=A_P(x_1,\ldots,x_n) \tag{4.5}$$

для кожних функцій $x_1,\ldots,x_n\in L_\infty[0,+\infty)$ і $\sigma\in\Xi_{[0,+\infty)}$.

Доведемо, що $P(x)=0$ для кожної простої вимірної функції $x\in L_\infty[0,+\infty)$. Нехай $x=\sum_{j=1}^m z_j\mathbf{1}_{E_j}$, де $z_1,\ldots,z_m\in\mathbb{C}$ і $E_1,\ldots,E_m$ — це попарно неперетинні вимірні підмножини множини $[0,+\infty)$. Згідно із n-лінійністю відображення A_P,

$$P(x)=A_P(x,\ldots,x)=\sum_{j_1=1}^m\ldots\sum_{j_n=1}^m z_{j_1}\ldots z_{j_n}A_P(\mathbf{1}_{E_{j_1}},\ldots,\mathbf{1}_{E_{j_n}}).$$

Доведемо, що $A_P(\mathbf{1}_{E_{j_1}},\ldots,\mathbf{1}_{E_{j_n}})=0$ для кожних $j_1,\ldots,j_n\in\{1,\ldots,m\}$. Без обмеження загальності можемо припустити, що

$$j_1=\ldots=j_{k_1}=1,\ j_{k_1+1}=\ldots=j_{k_1+k_2}=2,\ldots$$
$$\ldots,j_{k_1+\ldots+k_{l-1}+1}=\ldots=j_{k_1+\ldots+k_l}=l,$$

де $l\in\{1,\ldots,m\}$, $k_1+\ldots+k_l=n$, і $\mu(\Omega)=+\infty$, де

$$\Omega=\begin{cases}[0,+\infty), & \text{якщо } l=1\\ [0,+\infty)\setminus\bigcup_{s=1}^{l-1}E_s, & \text{якщо } l>1.\end{cases}$$

Для функції $y\in L_\infty(\Omega)$ покладемо

$$\widehat{y}(t)=\begin{cases}y(t), & \text{якщо } t\in\Omega\\ 0, & \text{якщо } t\in[0,+\infty)\setminus\Omega.\end{cases}$$

Відображення $Q : L_\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$, визначене формулою

$$Q : y \mapsto A_P\big(\mathbf{1}_{E_1}, \ldots, \mathbf{1}_{E_1}, \ldots, \mathbf{1}_{E_{l-1}}, \ldots, \mathbf{1}_{E_{l-1}}, \widehat{y}, \ldots, \widehat{y}\big),$$

є неперервним k_l-однорідним поліномом. Покажемо, що поліном Q є симетричним. Нехай $\sigma \in \Xi_\Omega$. Покладемо

$$\widetilde{\sigma}(t) = \begin{cases} \sigma(t), & \text{якщо } t \in \Omega \\ t, & \text{якщо } t \in [0, +\infty) \setminus \Omega. \end{cases}$$

Зауважимо, що $\widetilde{\sigma} \in \Xi_{[0,+\infty)}$ і $\mathbf{1}_{E_s} \circ \widetilde{\sigma} = \mathbf{1}_{E_s}$ для кожного $s \in \{1, \ldots, l-1\}$, оскільки $E_1, \ldots, E_{l-1} \subset [0, +\infty) \setminus \Omega$. Зауважимо, що $\widehat{y \circ \sigma} = \widehat{y} \circ \widetilde{\sigma}$ для кожної функції $y \in L_\infty(\Omega)$. Тому

$$Q(y \circ \sigma) = A_P\big(\mathbf{1}_{E_1} \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, \mathbf{1}_{E_1} \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, \mathbf{1}_{E_{l-1}} \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, \mathbf{1}_{E_{l-1}} \circ \widetilde{\sigma}, \widehat{y} \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, \widehat{y} \circ \widetilde{\sigma}\big).$$

Згідно із рівністю (4.5),

$$A_P\big(\mathbf{1}_{E_1} \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, \mathbf{1}_{E_1} \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, \mathbf{1}_{E_{l-1}} \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, \mathbf{1}_{E_{l-1}} \circ \widetilde{\sigma}, \widehat{y} \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, \widehat{y} \circ \widetilde{\sigma}\big) = \\ = A_P\big(\mathbf{1}_{E_1}, \ldots, \mathbf{1}_{E_1}, \ldots, \mathbf{1}_{E_{l-1}}, \ldots, \mathbf{1}_{E_{l-1}}, \widehat{y}, \ldots, \widehat{y}\big).$$

Тому $Q(y \circ \sigma) = Q(y)$. Отже, поліном Q є симетричним.

Зауважимо, що $E_l \subset \Omega$. Тому, згідно із наслідком 4.1, $Q(\mathbf{1}_{E_l}) = 0$, тобто

$$A_P\big(\mathbf{1}_{E_1}, \ldots, \mathbf{1}_{E_1}, \ldots, \mathbf{1}_{E_l}, \ldots, \mathbf{1}_{E_l}\big) = 0.$$

Отже, $P(x) = 0$ для кожної простої вимірної функції $x \in L_\infty[0, +\infty)$. Оскільки множина таких функцій є щільною в просторі $L_\infty[0, +\infty)$, то, за неперервністю полінома P, маємо, що $P(x) = 0$ для кожної функції $x \in L_\infty[0, +\infty)$. Теорему доведено. □

Отримуємо наступний наслідок із твердження 4.3 і теореми 4.1.

Наслідок 4.2. *Нехай* Ω *— це вимірна підмножина множини* $[0, +\infty)$ *така, що* $\mu(\Omega) = +\infty$ *і нехай* P *— це неперервний* n*-однорідний симетричний поліном на просторі* $L_\infty(\Omega)$*. Тоді* $P = 0$.

Таким чином, єдиними неперервними симетричними поліномами на просторі $L_\infty(\Omega)$, де Ω — це вимірна підмножина множини $[0, +\infty)$ така, що $\mu(\Omega) = +\infty$, є сталі відображення.

4.2. Скінченно-симетричні аналітичні функції на комплексному банаховому просторі вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі

Нехай $L_\infty[0,+\infty) := L_\infty^{(\mathbb{C})}([0,+\infty))$ — це комплексний банахів простір всіх вимірних за Лебегом суттєво обмежених комплекснозначних функцій, заданих на множині $[0,+\infty)$ (див. приклад 1.1). Згідно із означенням 1.19, функцію f, задану на просторі $L_\infty[0,+\infty)$ називають скінченно-симетричною, якщо $f(x\circ\sigma) = f(x)$ для кожних $x \in L_\infty[0,+\infty)$ і $\sigma \in \Xi^0_{[0,+\infty)}$, де $\Xi^0_{[0,+\infty)}$ — це множина всіх скінченних бієкцій множини $[0,+\infty)$, які зберігають міру Лебега, визначена в означенні 1.19.

В даному підрозділі буде показано, що алгебра Фреше всіх комплекснозначних скінченно-симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на просторі $L_\infty[0,+\infty)$ є ізоморфною до алгебри Фреше всіх комплекснозначних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на фактор-просторі $L_\infty[0,+\infty)/M_0$, де M_0 — це замикання у просторі $L_\infty[0,+\infty)$ підпростору всіх простих вимірних за Лебегом функцій із обмеженими носіями. Даний результат аналогічний до основного результату підрозділу 3.2.

А. В. Загороднюком у роботі [59] наведено наступний приклад скінченно-симетричної функції на просторі $L_\infty[0,+\infty)$.

Приклад 4.1. (Див. [59, с. 1722]) *Нехай $\mathcal{U}$ — це вільний ультрафільтр на множині $\mathbb{N}$ і нехай g — ціла функція на множині $\mathbb{C}$. Тоді відображення*

$$L_\infty[0,+\infty) \ni x \mapsto \lim_{\mathcal{U}} \int_{[n,n+1]} g(x(t))\,dt \in \mathbb{C}$$

є скінченно-симетричною цілою функцією обмеженого типу на просторі $L_\infty[0,+\infty)$.

В роботі [59] П. Галіндо довів наступну лему, яка буде використана у даному підрозділі.

Лема 4.1. (Див. [59, Лема 6.2]) *Якщо множини* $A, B \subset [0, +\infty)$ *є неперетинними вимірними множинами ненульової міри такими, що множина* $[0, +\infty) \setminus (A \cup B)$ *також має ненульову міру, тоді існує вимірна бієкція* $w : [0, +\infty) \setminus B \to [0, +\infty)$ *така, що* $w([0, +\infty) \setminus (A \cup B)) \overset{\text{м. с.}}{=} [0, +\infty) \setminus A$ *і* $w(t) = t$ *для* $t \in A$.

Нехай M_{00} — це простір всіх функцій вигляду

$$x = \sum_{j=1}^{N} a_j \mathbf{1}_{E_j}, \tag{4.6}$$

де $N \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$ і $E_1, \ldots, E_N$ — це попарно неперетинні обмежені вимірні підмножини множини $[0, +\infty)$ ненульової міри. Нехай M_0 — це замикання множини M_{00} в просторі $L_\infty[0, +\infty)$.

Твердження 4.4. *Нехай* $P : L_\infty[0, +\infty) \to \mathbb{C}$ *— це неперервний скінченно-симетричний* n*-однорідний поліном. Тоді* $P(x) = 0$ *для кожної функції* $x \in M_0$.

Доведення. Оскільки множина M_{00} є щільною в множині M_0, то достатньо довести результат для функцій $x \in M_{00}$.

Нехай $a > 0$ і $y_m = 1_{[0,am)}$ для $m \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що послідовність $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ є обмеженою. За неперервністю полінома P, послідовність $\{P(y_m)\}_{m=1}^{\infty}$ також є обмеженою. Оскільки поліном P є скінченно-симетричним, то

$$P(\mathbf{1}_{[0,a)}) = P(\mathbf{1}_{[a(k-1),ak)}) \tag{4.7}$$

для кожного $k \in \mathbb{N}$ і

$$P(\mathbf{1}_E) = P(\mathbf{1}_{[0,\mu(E))}) \tag{4.8}$$

для кожної обмеженої вимірної множини $E \subset [0, +\infty)$. Будемо доводити твердження методом математичної індукції по n. У випадку $n = 1$ поліном P є лінійним функціоналом. Тому

$$P(y_m) = \sum_{k=1}^{m} P(\mathbf{1}_{[a(k-1),ak)}).$$

Згідно із рівністю (4.7),

$$P(y_m) = mP(\mathbf{1}_{[0,a)}).$$

Послідовність $\{P(y_m)\}_{m=1}^{\infty}$ є обмеженою якщо і тільки якщо $P(\mathbf{1}_{[0,a)}) = 0$. Оскільки поліном P є скінченно-симетричним, то, згідно із рівністю (4.8), для кожної функції x вигляду (4.6),

$$P(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j P(\mathbf{1}_{E_j}) = 0.$$

Припустимо, що твердження виконується для кожного $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Доведемо його для n. Нехай A_P — це неперервне n-лінійне симетричне відображення, асоційоване із поліномом P. Згідно із n-лінійністю відображення A_P,

$$P(x) = \sum_{j_1=1}^{N} \ldots \sum_{j_n=1}^{N} a_{j_1} \ldots a_{j_n} A_P(\mathbf{1}_{E_{j_1}}, \ldots, \mathbf{1}_{E_{j_n}})$$

для функцій x вигляду (4.6). Нехай $j_1, \ldots, j_n \in \{1, \ldots, N\}$ такі, що $j_m \neq j_s$ для деяких $m, s \in \{1, \ldots, n\}$. Доведемо, що у цьому випадку

$$A_P(\mathbf{1}_{E_{j_1}}, \ldots, \mathbf{1}_{E_{j_n}}) = 0.$$

Без обмеження загальності можемо припустити, що $j_1 = \ldots = j_{k_1} = 1$, $j_{k_1+1} = \ldots = j_{k_1+k_2} = 2, \ldots, j_{k_1+\ldots+k_{l-1}+1} = \ldots = j_{k_1+\ldots+k_l} = l$, де $l \geq 2$, $k_1, \ldots, k_l \geq 1$ і $k_1 + \ldots + k_l = n$. Оскільки множина $\bigcup_{s=1}^{l} E_s$ є обмеженою, тобто існує $c > 0$ таке, що $\bigcup_{s=1}^{l} E_s \subset [0, c)$, можемо розглянути множину $E_1' = E_1 \cup [c, +\infty)$. Для множин $B = \bigcup_{s=2}^{l} E_s$ і $A = E_1'$ виконуються умови леми 4.1, тому існує вимірна бієкція

$$w : [0, +\infty) \setminus \bigcup_{s=2}^{l} E_s \to [0, +\infty)$$

така, що $w(t) = t$ якщо $t \in E_1'$ і

$$w\left([0, +\infty) \setminus \left(\bigcup_{s=2}^{l} E_s \cup E_1'\right)\right) \overset{\text{м. с.}}{=} [0, +\infty) \setminus E_1'.$$

Для функції $z \in L_\infty[0,+\infty)$ нехай

$$\widehat{z}(t) = \begin{cases} (z \circ w)(t), & \text{якщо } t \in [0,+\infty) \setminus \bigcup_{s=2}^{l} E_s \\ 0, & \text{якщо } t \in \bigcup_{s=2}^{l} E_s. \end{cases}$$

Визначимо відображення $B : (L_\infty[0,+\infty))^{k_1} \to \mathbb{C}$ наступним чином:

$$B : (z_1, \ldots, z_{k_1}) \mapsto A_P(\widehat{z_1}, \ldots, \widehat{z_{k_1}}, \underbrace{\mathbf{1}_{E_2}, \ldots, \mathbf{1}_{E_2}}_{k_2}, \ldots, \underbrace{\mathbf{1}_{E_l}, \ldots, \mathbf{1}_{E_l}}_{k_l}).$$

Зауважимо, що відображення B є неперервним симетричним k_1-лінійним відображенням. Покажемо, що

$$B(z_1 \circ \sigma, \ldots, z_{k_1} \circ \sigma) = B(z_1, \ldots, z_{k_1})$$

для $z_1, \ldots, z_{k_1} \in L_\infty[0,+\infty)$ і $\sigma \in \Xi^0_{[0,+\infty)}$. Для даної функції $\sigma \in \Xi^0_{[0,+\infty)}$ побудуємо функцію $\widetilde{\sigma}$ наступним чином:

$$\widetilde{\sigma}(t) = \begin{cases} (w^{-1} \circ \sigma \circ w)(t), & \text{якщо } t \in [0,+\infty) \setminus \bigcup_{s=2}^{l} E_s \\ t, & \text{якщо } t \in \bigcup_{s=2}^{l} E_s. \end{cases}$$

Зауважимо, що $\widetilde{\sigma} \in \Xi^0_{[0,+\infty)}$, оскільки для $t > c$, маємо $t \in E_1'$, і, отже, $w(t) = t$. Можна перевірити, що $\widehat{z \circ \sigma} = \widehat{z} \circ \widetilde{\sigma}$ для кожної функції $z \in L_\infty[0,+\infty)$, і що $\mathbf{1}_{E_j} \circ \widetilde{\sigma} = \mathbf{1}_{E_j}$ для кожного $j \in \{2, \ldots, l\}$. Тому

$$\begin{aligned} &B(z_1 \circ \sigma, \ldots, z_{k_1} \circ \sigma) = \\ &\quad = A_P(\widehat{z_1} \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, \widehat{z_{k_1}} \circ \widetilde{\sigma}, \underbrace{\mathbf{1}_{E_2} \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, \mathbf{1}_{E_2} \circ \widetilde{\sigma}}_{k_2}, \ldots, \underbrace{\mathbf{1}_{E_l} \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, \mathbf{1}_{E_l} \circ \widetilde{\sigma}}_{k_l}). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} &A_P(\widehat{z_1} \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, \widehat{z_{k_1}} \circ \widetilde{\sigma}, \underbrace{\mathbf{1}_{E_2} \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, \mathbf{1}_{E_2} \circ \widetilde{\sigma}}_{k_2}, \ldots, \underbrace{\mathbf{1}_{E_l} \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, \mathbf{1}_{E_l} \circ \widetilde{\sigma}}_{k_l}) = \\ &\qquad = A_P(\widehat{z_1}, \ldots, \widehat{z_{k_1}}, \underbrace{\mathbf{1}_{E_2}, \ldots, \mathbf{1}_{E_2}}_{k_2}, \ldots, \underbrace{\mathbf{1}_{E_l}, \ldots, \mathbf{1}_{E_l}}_{k_l}), \end{aligned}$$

то $B(z_1 \circ \sigma, \ldots, z_{k_1} \circ \sigma) = B(z_1, \ldots, z_{k_1})$. Отже, звуження відображення B на діагональ є неперервним скінченно-симетричним k_1-однорідним поліномом.

За припущенням індукції, $B(\mathbf{1}_{E_1}, \ldots, \mathbf{1}_{E_1}) = 0$, тобто

$$A_P(\underbrace{\widehat{\mathbf{1}_{E_1}}, \ldots, \widehat{\mathbf{1}_{E_1}}}_{k_1}, \underbrace{\mathbf{1}_{E_2}, \ldots, \mathbf{1}_{E_2}}_{k_2}, \ldots, \underbrace{\mathbf{1}_{E_l}, \ldots, \mathbf{1}_{E_l}}_{k_l}) = 0.$$

Зауважимо, що $\widehat{\mathbf{1}_{E_1}} = \mathbf{1}_{E_1}$. Отже, для функцій x вигляду (4.6),

$$P(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j^N P(\mathbf{1}_{E_j}).$$

Тому $P(y_m) = P(\sum_{k=1}^{m} \mathbf{1}_{[a(k-1),ak)}) = mP(\mathbf{1}_{[0,a)})$. Оскільки послідовність $\{P(y_m)\}_{m=1}^{\infty}$ є обмеженою, то $P(\mathbf{1}_{[0,a)}) = 0$. Відповідно до (4.8), для кожної обмеженої вимірної множини $E \subset [0, +\infty)$, маємо $P(\mathbf{1}_E) = P(\mathbf{1}_{[0,\mu(E))})$, отже, $P(\mathbf{1}_E) = 0$. Таким чином,

$$P(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j^n P(\mathbf{1}_{[0,\mu(E_j))}) = 0.$$

Твердження доведено. □

Означення 4.1. *Для кожної функції $x \in L_\infty[0, +\infty)$ визначимо множину* $\operatorname{supp} x$ *наступним чином:*

$$\operatorname{supp} x = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_x\left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]\right),$$

де

$$\Gamma_x(A) = \begin{cases} A, & \textit{якщо}\ \operatorname{ess\,sup}_{t\in A}|x(t)| > 0 \\ \emptyset, & \textit{інакше} \end{cases}$$

для кожної множини $A \subset [0, +\infty)$. Множину $\operatorname{supp} x$ *називають* носієм *функції x.*

Твердження 4.5. *Нехай $P : L_\infty[0, +\infty) \to \mathbb{C}$ — це неперервний скінченно-симетричний n-однорідний поліном. Тоді $P(x + y) = P(x)$ для кожних функцій $x \in L_\infty[0, +\infty)$ і $y \in M_{00}$.*

Доведення. Нехай A_P — це неперервне n-лінійне симетричне відображення, асоційоване із поліномом P. Згідно із біноміальною формулою (1.3),

$$P(x + y) = P(x) + P(y) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} A_P(\underbrace{y, \ldots, y}_{k}, \underbrace{x, \ldots, x}_{n-k}).$$

Згідно із твердженням 4.4, $P(y) = 0$. Доведемо, що

$$A_P(\underbrace{y, \ldots, y}_{k}, \underbrace{x, \ldots, x}_{n-k}) = 0$$

для $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Нехай $\Omega_0 = \operatorname{supp} y \subset [0, a]$. Нехай $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ — це попарно неперетинні вимірні множини такі, що $[0, +\infty) \setminus \Omega_0 = \bigcup_{j=1}^{n} \Omega_j$ і $\mu(\Omega_j) = +\infty$ для кожного $j \in \{1, \ldots, n\}$. Визначимо для $j \in \{0, \ldots, n\}$, функції

$$x_j(t) = \begin{cases} x(t), & \text{якщо } t \in \Omega_j \\ 0, & \text{якщо } t \in [0, +\infty) \setminus \Omega_j. \end{cases}$$

Оскільки $x = \sum_{j=0}^{n} x_j$, то

$$A_P(\underbrace{y, \ldots, y}_{k}, \underbrace{x, \ldots, x}_{n-k}) = \sum_{j_1=0}^{n} \cdots \sum_{j_{n-k}=0}^{n} A_P(\underbrace{y, \ldots, y}_{k}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-k}}).$$

Нехай $j_1, \ldots, j_{n-k} \in \{0, \ldots, n\}$. Доведемо, що

$$A_P(\underbrace{y, \ldots, y}_{k}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-k}}) = 0.$$

Без обмеження загальності можемо вважати, що $j_1 = \ldots = j_{k_0} = 0$, $j_{k_0+1} = \ldots = j_{k_0+k_1} = 1, \ldots, j_{k_0+\ldots+k_{l-1}+1} = \ldots = j_{k_0+\ldots+k_l} = l$, де $l \in \{0, \ldots, n-k\}, k_0 \geq 0, k_1, \ldots, k_l \geq 1$ (у випадку $l \geq 1$) і $k_0 + k_1 + \ldots + k_l = n - k$.

Скориставшись лемою 4.1 з $A = \Omega_0 \cup (\Omega_{l+1} \cap [a, +\infty))$ і $B = [0, +\infty) \setminus (\Omega_0 \cup \Omega_{l+1})$, отримаємо вимірну бієкцію $w : \Omega_0 \cup \Omega_{l+1} \to [0, +\infty)$ таку, що $w(t) = t$ для $t \in \Omega_0 \cup (\Omega_{l+1} \cap [a, +\infty))$.

Для $z \in L_\infty[0, +\infty)$ нехай

$$\widehat{z}(t) = \begin{cases} (z \circ w)(t), & \text{якщо } t \in \Omega_0 \cup \Omega_{l+1} \\ 0, & \text{якщо } t \in [0, +\infty) \setminus (\Omega_0 \cup \Omega_{l+1}). \end{cases}$$

Визначимо відображення $B : (L_\infty[0, +\infty))^{k+k_0} \to \mathbb{C}$ наступним чином:

$$B : (z_1, \ldots, z_{k+k_0}) \mapsto A_P(\widehat{z_1}, \ldots, \widehat{z_{k+k_0}}, \underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{k_1}, \ldots, \underbrace{x_l, \ldots, x_l}_{k_l}).$$

Зауважимо, що відображення B є неперервним симетричним $(k+k_0)$-лінійним відображенням. Для кожної функції $\sigma \in \Xi^0_{[0,+\infty)}$, побудуємо функцію $\widetilde{\sigma} \in \Xi_{[0,+\infty)}$ наступним чином:

$$\widetilde{\sigma} = \begin{cases} (w^{-1} \circ \sigma \circ w)(t), & \text{якщо } t \in \Omega_0 \cup \Omega_{l+1} \\ t, & \text{якщо } t \in [0,+\infty) \setminus (\Omega_0 \cup \Omega_{l+1}). \end{cases}$$

Зауважимо, що $\widetilde{\sigma} \in \Xi^0_{[0,+\infty)}$, оскільки для $t > a$, маємо $w(t) = t$.

Можна переконатися, що $\widehat{z \circ \sigma} = \widehat{z} \circ \widetilde{\sigma}$ і $x_j \circ \widetilde{\sigma} = x_j$ для кожних $z \in L_\infty[0,+\infty)$ і $j \in \{1,\ldots,l\}$. Тому для кожних функцій $z_1,\ldots,z_{k+k_0} \in L_\infty[0,+\infty)$ і $\sigma \in \Xi^0_{[0,+\infty)}$

$$\begin{aligned} &B(z_1 \circ \sigma, \ldots, z_{k+k_0} \circ \sigma) = \\ &\quad = A_P(\widehat{z_1} \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, \widehat{z_{k+k_0}} \circ \widetilde{\sigma}, \underbrace{x_1 \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, x_1 \circ \widetilde{\sigma}}_{k_1}, \ldots, \underbrace{x_l \circ \widetilde{\sigma}, \ldots, x_l \circ \widetilde{\sigma}}_{k_l}) = \\ &\qquad = A_P(\widehat{z_1}, \ldots, \widehat{z_{k+k_0}}, \underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{k_1}, \ldots, \underbrace{x_l, \ldots, x_l}_{k_l}) = B(z_1, \ldots, z_{k+k_0}). \end{aligned}$$

Отже, звуження відображення B на діагональ є неперервним скінченно-симетричним $(k+k_0)$-однорідним поліномом. Згідно із твердженням 4.4, $B(z,\ldots,z) = 0$ для кожної функції $z \in M_{00}$. Згідно із поляризаційною формулою (1.1), $B(z_1,\ldots,z_{k+k_0}) = 0$ для кожних функцій $z_1,\ldots,z_{k+k_0} \in M_{00}$. Оскільки функції y і x_0 належать до множини M_{00}, то

$$B(\underbrace{y,\ldots,y}_{k}, \underbrace{x_0,\ldots,x_0}_{k_0}) = 0,$$

тобто

$$A_P(\underbrace{\widehat{y},\ldots,\widehat{y}}_{k}, \underbrace{\widehat{x_0},\ldots,\widehat{x_0}}_{k_0}, \underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{k_1}, \ldots, \underbrace{x_l,\ldots,x_l}_{k_l}) = 0.$$

Зауважимо, що $\widehat{y} = y$ і $\widehat{x_0} = x_0$. Тому

$$A_P(\underbrace{y,\ldots,y}_{k}, \underbrace{x_0,\ldots,x_0}_{k_0}, \underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{k_1}, \ldots, \underbrace{x_l,\ldots,x_l}_{k_l}) = 0.$$

Отже, $P(x+y) = P(x)$ для кожних функцій $x \in L_\infty[0,+\infty)$ і $y \in M_{00}$. Твердження доведено. □

Із неперервності полінома P випливає наступний наслідок.

Наслідок 4.3. *Нехай* $P : L_\infty[0, +\infty) \to \mathbb{C}$ *— це неперервний скінченно-симетричний* n*-однорідний поліном. Тоді* $P(x + y) = P(x)$ *для кожних функцій* $x \in L_\infty[0, +\infty)$ *і* $y \in M_0$.

Нехай $\mathcal{Q}$ — це фактор-відображення, яке діє з простору $L_\infty[0, +\infty)$ в фактор-простір $L_\infty[0, +\infty)/M_0$.

Наслідок 4.4. *Ціла функція* $f \in H_b(L_\infty[0, +\infty))$ *є скінченно-симетричною, тоді і тільки тоді, коли існує функція* $\widetilde{f} \in H_b(L_\infty[0, +\infty)/M_0)$ *така, що* $f = \widetilde{f} \circ \mathcal{Q}$.

Наслідок 4.5. *Алгебра Фреше скінченно-симетричних цілих функцій обмеженого типу на просторі* $L_\infty[0, +\infty)$ *ізоморфна з алгеброю Фреше* $H_b(L_\infty[0, +\infty)/M_0)$.

4.3. Симетричні аналітичні функції на комплексному банаховому просторі інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі

В даному підрозділі буде побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі і буде показано, що алгебра Фреше комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цьому просторі ізоморфна до алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку.

Нехай $L_\infty[0,+\infty) := L_\infty^{(\mathbb{C})}([0,+\infty))$ — це комплексний банахів простір всіх вимірних за Лебегом суттєво обмежених комплекснозначих функцій, заданих на півосі $[0,+\infty)$ (див. приклад 1.1). Норму $\|\cdot\|_{L_\infty^{(\mathbb{C})}([0,+\infty))}$ на цьому просторі, визначену формулою (1.14), в даному підрозділі будемо позначати $\|\cdot\|_\infty$.

Нехай $L_1[0,+\infty) := L_1^{(\mathbb{C})}([0,+\infty))$ — це комплексний банахів простір всіх вимірних за Лебегом інтегровних комплекснозначних функцій, заданих на півосі $[0,+\infty)$ (див. приклад 1.2). Норму $\|\cdot\|_{L_1^{(\mathbb{C})}([0,+\infty))}$ на цьому просторі, визначену формулою (1.15), в даному підрозділі будемо позначати $\|\cdot\|_1$.

Розглянемо простір $(L_1\cap L_\infty)[0,+\infty) := L_1[0,+\infty)\cap L_\infty[0,+\infty)$ з нормою $\|x\|_{1,\infty} = \max\{\|x\|_1, \|x\|_\infty\}$. Згідно із [30, теорема 1.3, с. 97], простір $(L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$ є банаховим простором.

Згідно із означенням 1.17, функцію f, задану на просторі $(L_1\cap L_\infty)[0,+\infty)$, називають симетричною, якщо

$$f(x \circ \sigma) = f(x)$$

для кожних функцій $x \in (L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$ і $\sigma \in \Xi_{[0,+\infty)}$, де $\Xi_{[0,+\infty)}$ — це множина бієкцій відрізка $[0, +\infty)$, які зберігають міру Лебега, визначена на с. 63.

Зауважимо, що множина функцій $\{\mathbf{1}_{[0,a]} :\ a > 0\}$, де $\mathbf{1}_{[0,a]}$ — це характеристична функція відрізка $[0, a]$, є незліченною і відстань між двома різними такими функціями є не меншою від 1. Тому простір $(L_1 \cap L_\infty)[0, +\infty)$ є несепарабельним.

Для $n \in \mathbb{N}$ визначимо відображення $\tilde{R}_n : (L_1 \cap L_\infty)[0, +\infty) \to \mathbb{C}$ формулою

$$\tilde{R}_n(x) = \int_{[0,+\infty)} (x(t))^n \, dt.$$

Зауважимо, що відображення $\tilde{R}_n$ є симетричним n-однорідним поліномом. Покажемо, що $\|\tilde{R}_n\| = 1$. Нехай функція $x \in (L_1 \cap L_\infty)[0, +\infty)$ така, що $\|x\|_{1,\infty} \leq 1$. Тоді $\|x\|_1 \leq 1$ і $\|x\|_\infty \leq 1$. Оскільки $\|x\|_\infty \leq 1$, то $|x(t)|^n \leq |x(t)|$ для майже всіх $t \in [0, +\infty)$. Тому

$$|\tilde{R}_n(x)| \leq \int_{[0,+\infty)} |x(t)|^n \, dt \leq \int_{[0,+\infty)} |x(t)| \, dt = \|x\|_1 \leq 1.$$

Отже,

$$\|\tilde{R}_n\| = \sup_{\|x\|_{1,\infty} \leq 1} |\tilde{R}_n(x)| \leq 1.$$

З іншого боку, маємо $\|\mathbf{1}_{[0,1]}\|_{1,\infty} = 1$ і $\tilde{R}_n(\mathbf{1}_{[0,1]}) = 1$. Тому $\|\tilde{R}_n\| = 1$ і, як наслідок, поліном $\tilde{R}_n$ є неперервним.

Теорема 4.2. *Кожен симетричний неперервний n-однорідний поліном $P : (L_1 \cap L_\infty)[0, +\infty) \to \mathbb{C}$ можна єдиним чином подати у вигляді*

$$P(x) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} \tilde{R}_1^{k_1}(x) \cdots \tilde{R}_n^{k_n}(x),$$

де $\alpha_{k_1,\ldots,k_n} \in \mathbb{C}$.

Доведення. Нехай $P : (L_1 \cap L_\infty)[0, +\infty) \to \mathbb{C}$ — це неперервний симетричний n-однорідний поліном. Для $a > 0$ визначимо X_a як підпростір всіх функцій $x \in (L_1 \cap L_\infty)[0, +\infty)$ таких, що $\operatorname{supp} x \subset [0, a]$, де $\operatorname{supp} x$ — це носій функції x (див. означення 4.1). Позначимо P_a звуження полінома P

на підпростір X_a. Зауважимо, що підпростір X_1 ізометрично ізоморфний з простором $L_\infty[0,1]$. Тому, згідно із теоремою 2.2, існують єдині коефіцієнти $\alpha_{k_1,\ldots,k_n} \in \mathbb{C}$ такі, що

$$P_1(x) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1}(x)\cdots R_n^{k_n}(x)$$

для кожної функції $x \in X_1$. Для $a > 1$ визначимо відображення $J_a : X_1 \to X_a$ формулою $J_a(x)(t) = x(t/a)$. Зауважимо, що відображення J_a є лінійною бієкцією. Зауважимо, що $\|J_a(x)\|_1 = a\|x\|_1$ і $\|J_a(x)\|_\infty = \|x\|_\infty$, тому

$$\|x\|_{1,\infty} \leq \|J_a(x)\|_{1,\infty} \leq a\|x\|_{1,\infty}.$$

Отже, відображення J_a є ізоморфізмом. Нехай $G_a = P_a \circ J_a$. Зауважимо, що відображення G_a є неперервним симетричним n-однорідним поліномом на просторі X_1. Тому, згідно із теоремою 2.2, існують коефіцієнти $\alpha^{(a)}_{k_1,\ldots,k_n} \in \mathbb{C}$ такі, що

$$G_a(x) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha^{(a)}_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1}(x)\cdots R_n^{k_n}(x)$$

для кожної функції $x \in X_1$. Нехай $x = J_a^{-1}(y)$ для $y \in X_a$. Зауважимо, що

$$G_a(x) = G_a(J_a^{-1}(y)) = P_a(J_a(J_a^{-1}(y))) = P_a(y)$$

і

$$R_j(x) = R_j(J_a^{-1}(y)) = \int_{[0,1]} (y(at))^j\,dt = \frac{1}{a}\int_{[0,a]} (y(t))^j\,dt = \frac{1}{a}\tilde{R}_j(y).$$

Тому

$$P_a(y) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \frac{\alpha^{(a)}_{k_1,\ldots,k_n}}{a^{k_1+\ldots+k_n}} \tilde{R}_1^{k_1}(y)\cdots \tilde{R}_n^{k_n}(y).$$

Зауважимо, що звуження полінома P_a на підпростір X_1 збігається з P_1. З іншого боку, звуження полінома $\tilde{R}_j$ на підпростір X_1 збігається з R_j. Тому, враховуючи єдиність коефіцієнтів $\alpha_{k_1,\ldots,k_n}$, маємо $\frac{\alpha^{(a)}_{k_1,\ldots,k_n}}{a^{k_1+\ldots+k_n}} = \alpha_{k_1,\ldots,k_n}$. Отже, для кожного $a \geq 1$ і для кожної функції $y \in X_a$,

$$P_a(y) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} \tilde{R}_1^{k_1}(y) \cdots \tilde{R}_n^{k_n}(y). \qquad (4.9)$$

Нехай E — це вимірна за Лебегом підмножина множини $[0,+\infty)$ така, що $\mu(E) < +\infty$, де μ — це лінійна міра Лебега. Для кожного $j \in \mathbb{N}$, нехай $E_j = [j-1, j) \cap E$ і $F_j = \tau_j(E_j)$, де $\tau_j(t) = t - (j-1)$. Згідно із теоремою 1.2, кожна вимірна підмножина $F \subset [0,1]$ є ізоморфною за модулем нуль до відрізка довжини $\mu(F)$. Тому для кожного $j \in \mathbb{N}$ існує функція $\sigma_j \in \Xi_{[0,1]}$ така, що $\sigma_j(F_j) \overset{\text{м. с.}}{=} [0, \mu(F_j)]$ і $\sigma_j([0,1] \setminus F_j) \overset{\text{м. с.}}{=} [\mu(F_j), 1]$. Визначимо відображення $\sigma_E : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ наступним чином: для $t \in [0,+\infty)$ такого, що $m - 1 \leq t < m$, де $m \in \mathbb{N}$, покладемо

$$\sigma_E(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m-1} \mu(E_k) + \sigma_m(\tau_m(t)), & \text{якщо } t \in E \\ \mu(E) + \sum_{k=1}^{m-1}(1 - \mu(E_k)) + \sigma_m(\tau_m(t)) - \mu(E_m), & \text{інакше.} \end{cases}$$

Можна перевірити, що $\sigma_E \in \Xi_{[0,+\infty)}$, $\sigma_E(E) \overset{\text{м. с.}}{=} [0, \mu(E)]$ і $\sigma_E([0,+\infty) \setminus E) \overset{\text{м. с.}}{=} [\mu(E), +\infty)$.

Нехай функція $y \in (L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$ така, що $\mu(\mathrm{supp}\ y) < +\infty$. Оскільки поліном P є симетричним, то $P(y) = P(y \circ \sigma^{-1}_{\mathrm{supp}\, y})$. Зауважимо, що $y \circ \sigma^{-1}_{\mathrm{supp}\, y} \in X_{\mu(\mathrm{supp}\, y)} \subset X_{\max\{1, \mu(\mathrm{supp}\, y)\}}$. Тому, згідно із рівністю (4.9),

$$P(y) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} \tilde{R}_1^{k_1}(y \circ \sigma^{-1}_{\mathrm{supp}\, y}) \cdots \tilde{R}_n^{k_n}(y \circ \sigma^{-1}_{\mathrm{supp}\, y}) =$$

$$= \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} \tilde{R}_1^{k_1}(y) \cdots \tilde{R}_n^{k_n}(y). \qquad (4.10)$$

Нехай $x \in (L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$. Для кожного $m \in \mathbb{N}$, нехай

$$x_m(t) = \begin{cases} x(t), & \text{якщо } |x(t)| > \frac{1}{m}, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Нехай

$$A_0 = \{t \in [0,+\infty) : \ |x(t)| > 1\}$$

і

$$A_m = \left\{ t \in [0, +\infty) : \ \frac{1}{m+1} < |x(t)| \leq \frac{1}{m} \right\}$$

для $m \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що множини $A_0, A_1, A_2, \ldots$ є неперетинними. Оскільки $x \in L_1[0, +\infty)$, то $\mu(A_m) < +\infty$ для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$. Оскільки ряд

$$\|x\|_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{A_m} |x(t)|\, dt$$

збіжний, то

$$\|x - x_j\|_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{A_m} |x(t) - x_j(t)|\, dt = \sum_{m=0}^{j-1} \int_{A_m} |x(t) - x(t)|\, dt +$$
$$+ \sum_{m=j}^{+\infty} \int_{A_m} |x(t) - 0|\, dt = \sum_{m=j}^{+\infty} \int_{A_m} |x(t)|\, dt \to 0$$

при $j \to +\infty$. Зауважимо, що $\|x - x_j\|_\infty \leq \frac{1}{j}$. Отже, $\|x - x_j\|_{1,\infty} \to 0$, тобто $x_j \to x$, при $j \to +\infty$. Зауважимо, що $\mathrm{supp}\, x_j = \bigcup_{m=0}^{j-1} A_m$. Оскільки $\mu(A_m) < +\infty$ для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$, то $\mu(\mathrm{supp}\, x_j) < +\infty$. Тому, згідно із рівністю (4.10),

$$P(x_j) = \sum_{\substack{k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n \\ k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1, \ldots, k_n} \tilde{R}_1^{k_1}(x_j) \cdots \tilde{R}_n^{k_n}(x_j).$$

За неперервністю поліномів $\tilde{R}_1, \ldots, \tilde{R}_n$ і P,

$$P(x) = \lim_{j \to +\infty} P(x_j) = \sum_{\substack{k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n \\ k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1, \ldots, k_n} \tilde{R}_1^{k_1}(x) \cdots \tilde{R}_n^{k_n}(x).$$

Теорему доведено. □

Наслідок 4.6. *Множина* $\{\tilde{R}_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ *є алгебраїчним базисом алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на просторі* $(L_1 \cap L_\infty)[0, +\infty)$.

Нехай $H_{bs}((L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty))$ — це алгебра Фреше всіх цілих симетричних функцій $f : (L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty) \to \mathbb{C}$, які є обмеженими на обмежених множинах простору $(L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$ із топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах. Нехай

$$\|f\|_r = \sup_{\|x\|_{1,\infty} \le r} |f(x)|$$

для $f \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$ і $r \in (0,+\infty)$. Топологія алгебри $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ є породженою будь-якою множиною норм

$$\{\|\cdot\|_r : \ r \in U\},$$

де U — це довільна необмежена підмножина множини $(0,+\infty)$. Із теореми 4.2 і з інтегральної формули Коші випливає наступний наслідок.

Наслідок 4.7. *Кожну функцію $f \in H_{bs}((L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty))$ можна єдиним чином подати у вигляді*

$$f = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} \tilde{R}_1^{k_1} \ldots \tilde{R}_n^{k_n},$$

де $\alpha_{k_1 k_2 \ldots k_n} \in \mathbb{C}$, і ряд збігається рівномірно на обмежених множинах.

Як бачимо, елементи алгебр Фреше $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ і $H_{bs}((L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty))$ мають схожу будову. Далі побудуємо ізоморфізм між цими алгебрами, тобто лінійне мультиплікативне бієктивне відображення, яке є неперервним разом із оберненим до нього відображенням.

Лема 4.2. *Для кожної функції $y \in (L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$ існує функція $x \in L_\infty[0,1]$ така, що $\tilde{R}_n(y) = R_n(x)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і*

$$\|x\|_\infty \le \frac{2}{M} \|y\|_{1,\infty},$$

де стала M визначена рівністю (2.2).

Доведення. Розглянемо числову послідовність $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, де $\xi_n = \tilde{R}_n(y)$ для $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $\tilde{R}_n$ є n-однорідним поліномом і $\|\tilde{R}_n\| = 1$, то

$$|\tilde{R}_n(y)| \le \|y\|_{1,\infty}^n$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Як наслідок,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|\xi_n|} \le \|y\|_{1,\infty} < \infty.$$

Тому, згідно з теоремою 2.1, існує функція $x \in L_\infty[0,1]$ така, що $R_n(x) = \xi_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і

$$\|x\|_\infty \le \frac{2}{M} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|\xi_n|} \le \frac{2}{M}\|y\|_{1,\infty},$$

де стала M визначена рівністю (2.2). Лему доведено. □

Визначимо відображення $J : H_{bs}(L_\infty[0,1]) \to H_{bs}((L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty))$. Нехай функція f належить алгебрі $H_{bs}(L_\infty[0,1])$, тоді її можна єдиним чином подати у вигляді (2.9), тобто

$$f = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1} \ldots R_n^{k_n}. \tag{4.11}$$

Покладемо

$$J(f) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} \tilde{R}_1^{k_1} \ldots \tilde{R}_n^{k_n} \tag{4.12}$$

Покажемо, що відображення J є коректно визначеним.

Твердження 4.6. *Для кожної функції $f \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$ функція $J(f)$ належить алгебрі Фреше $H_{bs}((L_1\cap L_\infty)[0,+\infty))$ і для кожного $r > 0$ виконується оцінка*

$$\|J(f)\|_r \le \|f\|_{\frac{2}{M}r}, \tag{4.13}$$

де стала M визначена рівністю (2.2).

Доведення. Нехай $f \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$. Тоді функцію f можна подати у вигляді (4.11). Покажемо, що функція $J(f)$, визначена рівністю (4.12), належить алгебрі Фреше $H_{bs}((L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty))$, тобто є цілою симетричною функцією обмеженого типу на просторі $(L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$. Згідно з лемою 4.2, для кожної функції $y \in (L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$ існує функція $x \in L_\infty[0,1]$

така, що $\tilde{R}_n(y) = R_n(x)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і $\|x\|_\infty \leq \frac{2}{M}\|y\|_{1,\infty}$. Оскільки $\tilde{R}_n(y) = R_n(x)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то $J(f)(y) = f(x)$. Враховуючи, що $\|x\|_\infty \leq \frac{2}{M}\|y\|_{1,\infty}$, отримуємо нерівність

$$\sup_{\|y\|_{1,\infty} \leq r} |J(f)(y)| \leq \sup_{\|x\|_\infty \leq \frac{2}{M} r} |f(x)|$$

для кожного $r > 0$. Тобто

$$\|J(f)\|_r \leq \|f\|_{\frac{2}{M} r} \tag{4.14}$$

для кожного $r > 0$. Звідси випливає, що функція $J(f)$ є коректно визначеною функцією на просторі $(L_1 \cap L_\infty)[0, +\infty)$, тобто для кожного $y \in (L_1 \cap L_\infty)[0, +\infty)$ значення $J(f)(y)$ є скінченним. Оскільки функція f є функцією обмеженого типу, то вона є обмеженою на кожній кулі з центром в нулі простору $L_\infty[0, 1]$. Тому, згідно з нерівністю (4.14), функція $J(f)$ є обмеженою на кожній кулі з центром в нулі простору $(L_1 \cap L_\infty)[0, +\infty)$, тобто функція $J(f)$ є функцією обмеженого типу. Симетричність функції $J(f)$ випливає із симетричності поліномів $\tilde{R}_n$. Доведемо, що функція $J(f)$ є цілою. Оскільки функція f є цілою і обмеженою на всіх обмежених підмножинах простору $L_\infty[0, 1]$, то її радіус обмеженості дорівнює нескінченності і, згідно із твердженням 1.7,

$$\limsup_{n \to \infty} \|P_n\|_1^{1/n} = 0, \tag{4.15}$$

де $P_0 = \alpha_0$ і

$$P_n = \sum_{\substack{k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n \\ k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1, \ldots, k_n} R_1^{k_1} \ldots R_n^{k_n}$$

для $n \in \mathbb{N}$. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n, \tag{4.16}$$

де $\tilde{P}_0 = \alpha_0$ і

$$\tilde{P}_n = \sum_{\substack{k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n \\ k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1, \ldots, k_n} \tilde{R}_1^{k_1} \ldots \tilde{R}_n^{k_n}$$

для $n \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що $\tilde{P}_n = J(P_n)$, тому, згідно з нерівністю (4.14),

$$\|\tilde{P}_n\|_1 \le \|P_n\|_{\frac{2}{M}}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Оскільки поліном P_n є n-однорідним, то

$$\|P_n\|_{\frac{2}{M}} = \sup_{\|x\| \le \frac{2}{M}} |P_n(x)| = \sup_{\|x\|\le 1} \Big| P_n\Big(\frac{2}{M}x\Big)\Big| = \Big(\frac{2}{M}\Big)^n \sup_{\|x\|\le 1} |P_n(x)| = \\ = \Big(\frac{2}{M}\Big)^n \|P_n\|_1.$$

Тому

$$\|\tilde{P}_n\|_1 \le \Big(\frac{2}{M}\Big)^n \|P_n\|_1. \tag{4.17}$$

Згідно з рівністю (4.15) і нерівністю (4.17),

$$0 \le \limsup_{n\to\infty} \|\tilde{P}_n\|_1^{1/n} \le \frac{2}{M} \limsup_{n\to\infty} \|P_n\|_1^{1/n} = 0.$$

Тому

$$\limsup_{n\to\infty} \|\tilde{P}_n\|_1^{1/n} = 0$$

і, як наслідок, згідно із твердженням 1.7, сума ряду (4.16) є цілою функцією на просторі $(L_1 \cap L_\infty)[0, +\infty)$, радіус обмеженості якої дорівнює нескінченності. Згідно з рівністю (4.12) ця сума дорівнює функції $J(f)$. Отже, функція $J(f)$ є цілою симетричною функцією обмеженого типу на просторі $(L_1 \cap L_\infty)[0, +\infty)$, тобто функція $J(f)$ належить алгебрі Фреше $H_{bs}((L_1 \cap L_\infty)[0, +\infty))$. Твердження доведено. □

Твердження 4.7. *Відображення J, визначене рівністю* (4.12), *є лінійним і неперервним.*

Доведення. Нехай f і g — довільні функції, які належать алгебрі Фреше $H_{bs}(L_\infty[0,1])$. Тоді функції f і g можна єдиним чином подати у вигляді

$$f = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n \\ k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1} \ldots R_n^{k_n},$$

$$g = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \beta_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1}\ldots R_n^{k_n}$$

відповідно. Нехай λ — довільне комплексне число. Зауважимо, що

$$\lambda f = \lambda\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \lambda\alpha_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1}\ldots R_n^{k_n}$$

і

$$f + g = \alpha_0 + \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} (\alpha_{k_1,\ldots,k_n} + \beta_{k_1,\ldots,k_n}) R_1^{k_1}\ldots R_n^{k_n}.$$

Тому

$$J(\lambda f) = \lambda\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \lambda\alpha_{k_1,\ldots,k_n} \tilde{R}_1^{k_1}\ldots \tilde{R}_n^{k_n} = \lambda J(f)$$

і

$$J(f+g) = \alpha_0 + \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} (\alpha_{k_1,\ldots,k_n} + \beta_{k_1,\ldots,k_n}) \tilde{R}_1^{k_1}\ldots \tilde{R}_n^{k_n} =$$

$$= J(f) + J(g).$$

Отже, відображення J є лінійним. Оскільки алгебри Фреше $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ і $H_{bs}((L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty))$ є зліченно-нормованими топологічними векторними просторами, то для лінійного відображення J неперервність еквівалентна обмеженості. Обмеженість, у свою чергу, випливає з оцінки (4.13). Отже, відображення J є неперервним. Твердження доведено. □

Твердження 4.8. *Відображення J, визначене рівністю* (4.12), *є мультиплікативним.*

Доведення. Згідно з рівністю (4.12),

$$J(R_1^{k_1}\ldots R_n^{k_n}) = \tilde{R}_1^{k_1}\ldots \tilde{R}_n^{k_n}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}_+$. Тому, враховуючи, що кожен неперервний однорідний симетричний поліном на $L_\infty[0,1]$ можна єдиним чином подати у вигляді (2.4), а також враховуючи лінійність відображення J, отримуємо, що

$$J(PQ) = J(P)J(Q) \tag{4.18}$$

для довільних поліномів $P, Q \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$. Тепер розглянемо дві довільні функції $f, g \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$. Оскільки функції f і g — це цілі функції обмеженого типу, то їх можна подати як суми відповідних рядів Тейлора:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} P_n, \qquad g = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n.$$

Оскільки добуток двох елементів алгебри належить алгебрі, то функція fg є цілою симетричною функцією обмеженого типу на просторі $L_\infty[0,1]$. Тоді

$$fg = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{k} P_s Q_{k-s}.$$

З лінійності і неперервності відображення J маємо:

$$J(fg) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{k} J(P_s Q_{k-s}).$$

Згідно з рівністю (4.18), $J(P_s Q_{k-s}) = J(P_s)J(Q_{k-s})$. Тому

$$J(fg) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{k} J(P_s)J(Q_{k-s}) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} J(P_n) \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} J(Q_n) \right).$$

З огляду на лінійність і неперервність відображення J, запишемо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} J(P_n) = J\left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n \right) = J(f),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} J(Q_n) = J\left(\sum_{n=0}^{\infty} Q_n \right) = J(g).$$

Тому $J(fg) = J(f)J(g)$. Отже, відображення J є мультиплікативним. Твердження доведено. □

Покажемо, що відображення J є бієкцією. Для цього побудуємо ізометричне вкладення простору $L_\infty[0,1]$ у простір $(L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$. Визначимо відображення $v : L_\infty[0,1] \to (L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$ таким чином: для $x \in L_\infty[0,1]$ покладемо

$$v(x)(t) = \begin{cases} x(t), & \text{якщо } t \in [0,1] \\ 0, & \text{якщо } t \in (1,+\infty). \end{cases} \tag{4.19}$$

Як легко перевірити, відображення v є лінійним і ін'єктивним. Покажемо, що відображення v є ізометричним. Для довільного $x \in L_\infty[0,1]$ маємо

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,+\infty)} |v(x)(t)| = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,1]} |x(t)| = \|x\|_\infty$$

і

$$\int_{[0,+\infty)} |v(x)(t)|\,dt = \int_{[0,1]} |x(t)|\,dt \le \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,1]} |x(t)| = \|x\|_\infty.$$

Тому $\|v(x)\|_{1,\infty} = \|x\|_\infty$. Отже, відображення v є ізометричним вкладенням. Звідси, зокрема, випливає, що для кожного $r > 0$ множина

$$\big\{v(x) : \ x \in L_\infty[0,1], \ \|x\|_\infty \le r\big\}$$

є підмножиною замкненої кулі із центром в нулі і радіусом r простору $(L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$. Тому для довільної функції обмеженого типу $g : (L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty) \to \mathbb{C}$ і для довільного $r > 0$

$$\sup_{x\in L_\infty[0,1],\ \|x\|_\infty \le r} |g(v(x))| \le \sup_{y\in(L_1\cap L_\infty)[0,+\infty),\ \|y\|_{1,\infty}\le r} |g(y)|. \tag{4.20}$$

Лема 4.3. *Для кожної функції* $g \in H_{bs}((L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty))$ *функція* $g \circ v$ *належить алгебрі Фреше* $H_{bs}(L_\infty[0,1])$, *де відображення* v *визначене формулою* (4.19).

Доведення. Нехай $g \in H_{bs}((L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty))$. Оскільки функція g є функцією обмеженого типу, то для кожного $r > 0$ значення $\|g\|_r$ є скінченним. Тому з нерівності (4.20) випливає, що значення $\|g \circ v\|_r$ також є скінченним для кожного $r > 0$. Отже, функція $g \circ v$ є функцією обмеженого типу.

Покажемо, що функція $g \circ v$ є симетричною. Нехай $\sigma \in \Xi_{[0,1]}$. Покладемо

$$\tilde{\sigma}(t) = \begin{cases} \sigma(t), & \text{якщо } t \in [0,1] \\ t, & \text{якщо } t \in (1,+\infty). \end{cases}$$

Зауважимо, що $\tilde{\sigma} \in \Xi_{[0,+\infty)}$. Тому, внаслідок симетричності функції g маємо, що $g(y \circ \tilde{\sigma}) = g(y)$ для довільного елемента $y \in (L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$. Таким чином, враховуючи, що $v(x \circ \sigma) = v(x) \circ \tilde{\sigma}$, отримуємо, що

$$(g \circ v)(x \circ \sigma) = g(v(x) \circ \tilde{\sigma}) = g(v(x)) = (g \circ v)(x).$$

Отже, функція $g \circ v$ є симетричною. Доведемо, що функція $g \circ v$ є цілою. Оскільки функція g є цілою функцією обмеженого типу, то її ряд Тейлора, члени якого позначимо $P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots$, рівномірно збігається до g на кожній замкненій кулі із центром в нулі простору $(L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$. При цьому, згідно із твердженням 1.7,

$$\limsup_{n\to\infty} \|P_n\|_1^{1/n} = 0.$$

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n \circ v. \tag{4.21}$$

Згідно із нерівністю (4.20), $\|P_n \circ v\|_1 \le \|P_n\|_1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тому

$$\limsup_{n\to\infty} \|P_n \circ v\|_1^{1/n} = 0,$$

тобто сума ряду (4.21) є цілою функцією обмеженого типу на просторі $L_\infty[0,1]$. Нехай $r > 0$. Покажемо, що ряд (4.21) рівномірно збігається до функції $g \circ v$ на замкненій кулі з центром в нулі і радіусом r. Нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n$$

рівномірно збігається до функції g на замкненій кулі з центром в нулі і радіусом r, то існує число $N \in \mathbb{N}$ таке, що для кожного $m > N$ виконується нерівність

$$\left\| g - \sum_{n=0}^{m} P_n \right\|_r < \varepsilon.$$

Тому, згідно з нерівністю (4.20),

$$\left\| g \circ v - \sum_{n=0}^{m} P_n \circ v \right\|_r \leq \left\| g - \sum_{n=0}^{m} P_n \right\|_r < \varepsilon$$

при $m > N$. Отже, ряд (4.21) рівномірно збігається до функції $g \circ v$ на кожній замкненій кулі з центром в нулі простору $L_\infty[0,1]$. Тому функція $g \circ v$ є цілою. Лему доведено. $\square$

Покажемо, що відображення J, визначене формулою (4.12), є сюр'єкцією. Нехай g — довільна функція, яка належить алгебрі $H_{bs}((L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty))$. Тоді функцію g можна подати у вигляді

$$g = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} \tilde{R}_1^{k_1} \ldots \tilde{R}_n^{k_n}. \tag{4.22}$$

За лемою 4.3, функція $f = g \circ v$ належить алгебрі $H_{bs}(L_\infty[0,1])$. Згідно з рівністю (4.22),

$$f = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} (\tilde{R}_1 \circ v)^{k_1} \ldots (\tilde{R}_n \circ v)^{k_n}.$$

Врахувавши, що $\tilde{R}_n \circ v = R_n$, отримуємо, що

$$f = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1} \ldots R_n^{k_n}.$$

З огляду на рівність (4.12) отримуємо, що $J(f) = g$. Отже, відображення J є сюр'єкцією. Більше того, для кожної функції $f \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$

$$J(f) \circ v = f. \tag{4.23}$$

Тепер доведемо, що відображення J є ін'єкцією. Оскільки відображення J є лінійним, то достатньо показати, що образом кожного ненульового елемента алгебри $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ при дії відображення J є ненульовий елемент алгебри $H_{bs}((L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty))$. Нехай f — довільна ненульова функція, яка належить алгебрі $H_{bs}(L_\infty[0,1])$. Припустимо, що $J(f) = 0$. Тоді, згідно з рівністю (4.23), $f = J(f) \circ \upsilon = 0$. Отримали суперечність. Отже, відображення J є ін'єкцією. Таким чином, відображення J є бієкцією. Із нерівностей (4.13) і (4.20), маємо, що

$$\|f\|_r \leq \|J(f)\|_r \leq \|f\|_{\frac{2}{M}r}$$

для кожної функції $f \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$ і для кожного $r > 0$. З цієї нерівності випливає, що відображення J і J^{-1} є неперервними. Таким чином, отримуємо наступну теорему.

Теорема 4.3. *Відображення J, визначене формулою* (4.12), *є ізоморфізмом алгебр Фреше $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ і $H_{bs}((L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty))$.*

4.4. Симетричні поліноми на комплексному банаховому просторі інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на об'єднанні просторів Лебега-Рохліна

В даному підрозділі узагальнено деякі результати підрозділу 4.3 на випадок неперервних симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на довільних об'єднаннях просторів Лебега-Рохліна (див. означення на с. 62), а саме, побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри таких поліномів.

Згідно із теоремою 1.1, кожен простір Лебега-Рохліна із неперервною мірою є ізоморфним за модулем нуль до відрізка $[0,1]$ із лінійною мірою Лебега. Наступна проста лема показує, що за таким ізоморфізмом за модулем нуль можна побудувати ізоморфізм.

Лема 4.4. *Кожен простір Лебега-Рохліна із неперервною мірою є ізоморфним до відрізка* $[0,1]$ *із лінійною мірою Лебега.*

Доведення. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ — це простір Лебега-Рохліна із неперервною мірою. Згідно із теоремою 1.1, простір $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ є ізоморфним за модулем нуль до відрізка $[0,1]$ із лінійною мірою Лебега, тобто існують нехтовні множини $M \subset \Omega$ і $N \subset [0,1]$ такі, що множина $\Omega \setminus M$ є ізоморфною до множини $[0,1] \setminus N$. Нехай $f : \Omega \setminus M \to [0,1] \setminus N$ — це відповідний ізоморфізм. Нехай K — це довільна нехтовна підмножина множини $[0,1] \setminus N$ із потужністю континуум. Тоді множина $f^{-1}(K)$ є нехтовною підмножиною множини $\Omega \setminus M$ із потужністю континуум. Як наслідок, обидві множини $C_1 = M \cup f^{-1}(K)$ і $C_2 = N \cup K$ є нехтовними множинами потужності континуум. Нехай $h : C_1 \to C_2$ — це бієкція. Визначимо відображення $g : \Omega \to [0,1]$ рівністю

$$g(t) = \begin{cases} h(t), & \text{якщо } t \in C_1 \\ f(t), & \text{якщо } t \in [0,1] \setminus C_1. \end{cases}$$

Зауважимо, що відображення g є ізоморфізмом між простором $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ і відрізком $[0,1]$ із лінійною мірою Лебега. Лему доведено. □

Нехай Γ — це довільна непорожня індексна множина. Нехай

$$\big\{(\Omega_\gamma, \mathcal{F}_\gamma, \nu_\gamma) : \ \gamma \in \Gamma\big\} \tag{4.24}$$

— це множина просторів Лебега-Рохліна із неперервними мірами. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ — це диз'юнктне об'єднання усіх просторів, які належать до множини (4.24), тобто

$$\Omega = \bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} \Omega_\gamma,$$

$$\mathcal{F} = \Big\{A \in \Omega : \quad A \cap \Omega_\gamma \in \mathcal{F}_\gamma \text{ для кожного } \gamma \in \Gamma\Big\}$$

і

$$\nu(A) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \nu_\gamma(A \cap \Omega_\gamma)$$

для $A \in \mathcal{F}$. Згідно із лемою 4.4, для кожного $\gamma \in \Gamma$ існує ізоморфізм w_γ між простором $(\Omega_\gamma, \mathcal{F}_\gamma, \nu_\gamma)$ і відрізком $[0, 1]$ із лінійною мірою Лебега. Тому для кожного $\gamma \in \Gamma$ відображення $W_\gamma : L_\infty[0, 1] \to L_\infty(\Omega_\gamma)$, визначене рівністю

$$W_\gamma(x) = x \circ w_\gamma \tag{4.25}$$

для $x \in L_\infty[0, 1]$, є лінійною ізометричною біекцією.

Нехай $(L_1 \cap L_\infty)(\Omega)$ — це комплексний банахів простір всіх вимірних інтегровних суттєво обмежених функцій $x : \Omega \to \mathbb{C}$ із нормою

$$\|x\| = \max\{\|x\|_1, \|x\|_\infty\},$$

де

$$\|x\|_1 = \int_\Omega |x(t)|\, dt,$$
$$\|x\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{t\in\Omega}|x(t)|.$$

Лема 4.5. *Нехай* $\gamma \in \Gamma$. *Відображення* $J_\gamma : L_\infty(\Omega_\gamma) \to (L_1 \cap L_\infty)(\Omega)$, *визначене рівністю*

$$J_\gamma(x)(t) = \begin{cases} x(t), & \textit{якщо } \ t \in \Omega_\gamma, \\ 0, & \textit{якщо } \ t \in \Omega \setminus \Omega_\gamma \end{cases} \tag{4.26}$$

для $x \in L_\infty(\Omega_\gamma)$, *є лінійним ізометричним ін'єктивним відображенням. Як наслідок, простір* $L_\infty(\Omega_\gamma)$ *можна розглядати, як підпростір простору* $(L_1 \cap L_\infty)(\Omega)$.

Доведення. Зауважимо, що відображення J_γ є лінійним і ін'єктивним. Покажемо, що відображення J_γ є ізометричним. Нехай $x \in L_\infty(\Omega_\gamma)$. Зауважимо, що $\|J_\gamma(x)\|_\infty = \|x\|_\infty$. Оскільки $\nu_\gamma(\Omega_\gamma) = 1$, то

$$\|J_\gamma(x)\|_1 = \int_\Omega |J_\gamma(x)(t)|\,dt = \int_{\Omega_\gamma} |x(t)|\,dt \le \|x\|_\infty.$$

Тому

$$\|J_\gamma(x)\| = \max\bigl\{\|J_\gamma(x)\|_1, \|J_\gamma(x)\|_\infty\bigr\} = \|x\|_\infty.$$

Отже, відображення J_γ є ізометричним. Лему доведено. □

Аналогічно до понять і позначень, введених у підрозділі 1.2.8, будемо позначати Ξ_Ω множину всіх бієкцій $\sigma : \Omega \to \Omega$ таких, що для кожної вимірної множини $E \subset \Omega$ множини $\sigma(E)$ і $\sigma^{-1}(E)$ є вимірними і $\nu(\sigma(E)) = \nu(\sigma^{-1}(E)) = \nu(E)$. Функцію $f : (L_1 \cap L_\infty)(\Omega) \to \mathbb{C}$ назвемо симетричною, якщо

$$f(x \circ \sigma) = f(x)$$

для кожних $x \in (L_1 \cap L_\infty)(\Omega)$ і $\sigma \in \Xi_\Omega$.

Для $n \in \mathbb{N}$ визначимо відображення $\tilde{R}_{n,\Omega} : (L_1 \cap L_\infty)(\Omega) \to \mathbb{C}$ рівністю

$$\tilde{R}_{n,\Omega}(x) = \int_\Omega (x(t))^n\,dt,$$

де $x \in (L_1 \cap L_\infty)(\Omega)$. Зауважимо, що відображення $\tilde{R}_{n,\Omega}$ є n-однорідним симетричним поліномом для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Для кожної множини $E \subset \Omega$ нехай

$$\mathbf{1}_E(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t \in E \\ 0, & \text{якщо } t \in \Omega \setminus E. \end{cases}$$

Покажемо, що поліноми $\tilde{R}_{n,\Omega}$ є неперервними.

Лема 4.6. *Для кожного $n \in \mathbb{N}$ виконуєтьcя рівність $\|\tilde{R}_{n,\Omega}\| = 1$ і, як наслідок, поліном $\tilde{R}_{n,\Omega}$ є неперервним.*

Доведення. Покажемо, що $\|\tilde{R}_{n,\Omega}\| = 1$. Нехай елемент $x \in (L_1 \cap L_\infty)(\Omega)$ такий, що $\|x\| \leq 1$. Тоді $\|x\|_1 \leq 1$ і $\|x\|_\infty \leq 1$. Оскільки $\|x\|_\infty \leq 1$, то $|x(t)| \leq 1$ для майже всіх $t \in \Omega$. Як наслідок, $|x(t)|^n \leq |x(t)|$ для майже всіх $t \in \Omega$. Тому

$$|\tilde{R}_n(x)| \leq \int_\Omega |x(t)|^n \, dt \leq \int_\Omega |x(t)| \, dt = \|x\|_1 \leq 1.$$

Отже,

$$\|\tilde{R}_{n,\Omega}\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\tilde{R}_n(x)| \leq 1.$$

З іншого боку, для довільного фіксованого індексу $\gamma \in \Gamma$, маємо $\|\mathbf{1}_{\Omega_\gamma}\| = 1$ і $\tilde{R}_{n,\Omega}(\mathbf{1}_{\Omega_\gamma}) = 1$. Тому $\|\tilde{R}_{n,\Omega}\| = 1$. Як наслідок, поліном $\tilde{R}_{n,\Omega}$ є неперервним. Лему доведено. □

Теорема 4.4. *Кожен симетричний неперервний n-однорідний поліном $P : (L_1 \cap L_\infty)(\Omega) \to \mathbb{C}$ можна єдиним чином подати у вигляді*

$$P(x) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} \left(\tilde{R}_{1,\Omega}(x)\right)^{k_1} \cdots \left(\tilde{R}_{n,\Omega}(x)\right)^{k_n},$$

де $x \in (L_1 \cap L_\infty)(\Omega)$ і $\alpha_{k_1,\ldots,k_n} \in \mathbb{C}$.

Доведення. Для $\gamma \in \Gamma$ визначимо відображення $Q_\gamma : L_\infty[0,1] \to \mathbb{C}$ рівністю

$$Q_\gamma = P \circ J_\gamma \circ W_\gamma, \tag{4.27}$$

де відображення W_γ і J_γ визначені рівностями (4.25) і (4.26) відповідно. Маємо наступну діаграму:

$$\begin{tikzcd} L_\infty[0,1] \arrow[r, "W_\gamma"] & L_\infty(\Omega_\gamma) \arrow[r, "J_\gamma"] & (L_1 \cap L_\infty)(\Omega) \arrow[r, "P"] & \mathbb{C}. \end{tikzcd}$$

Оскільки відображення W_γ і J_γ є лінійними і неперервними, а відображення P є неперервним n-однорідним поліномом, то відображення $P \circ J_\gamma$ і Q_γ є неперервними n-однорідними поліномами.

Доведемо, що відображення $P \circ J_\gamma$ є симетричним поліномом на просторі $L_\infty(\Omega_\gamma)$. Нехай $x \in L_\infty(\Omega_\gamma)$ і $\sigma \in \Xi_{\Omega_\gamma}$. Покажемо, що

$$(P \circ J_\gamma)(x \circ \sigma) = (P \circ J_\gamma)(x).$$

Зауважимо, що

$$J_\gamma(x \circ \sigma) = J_\gamma(x) \circ \sigma',$$

де відображення $\sigma' : \Omega \to \Omega$ визначене рівністю

$$\sigma'(t) = \begin{cases} \sigma(t), & \text{якщо } t \in \Omega_\gamma \\ t, & \text{якщо } t \in \Omega \setminus \Omega_\gamma. \end{cases}$$

Можна перевірити, що $\sigma' \in \Xi_\Omega$. Оскільки поліном P є симетричним, то

$$(P \circ J_\gamma)(x \circ \sigma) = P(J_\gamma(x) \circ \sigma') = P(J_\gamma(x)) = (P \circ J_\gamma)(x).$$

Отже, поліном $P \circ J_\gamma$ є симетричним.

Доведемо, що поліном Q_γ є симетричним. Нехай $x \in L_\infty[0,1]$ і $\tau \in \Xi_{[0,1]}$. Згідно із рівністю (4.27),

$$Q_\gamma(x \circ \tau) = (P \circ J_\gamma)(W_\gamma(x \circ \tau)).$$

Згідно із рівністю (4.25),

$$W_\gamma(x \circ \tau) = x \circ \tau \circ w_\gamma.$$

Тому

$$Q_\gamma(x \circ \tau) = (P \circ J_\gamma)(x \circ \tau \circ w_\gamma).$$

Зауважимо, що $x \circ \tau \circ w_\gamma = x \circ w_\gamma \circ w_\gamma^{-1} \circ \tau \circ w_\gamma$. Маємо наступну діаграму:

$$\begin{tikzcd} \Omega_\gamma \arrow[r, "w_\gamma"] & {[0,1]} \arrow[r, "\tau"] & {[0,1]} \arrow[r, "w_\gamma^{-1}"] & \Omega_\gamma \arrow[r, "w_\gamma"] & {[0,1]} \arrow[r, "x"] & \mathbb{C}. \end{tikzcd}$$

Оскільки відображення w_γ і τ є ізоморфізмами, то $w_\gamma^{-1} \circ \tau \circ w_\gamma \in \Xi_{\Omega_\gamma}$. Оскільки поліном $P \circ J_\gamma$ є симетричним, то

$$(P \circ J_\gamma)(x \circ \tau \circ w_\gamma) = \big(P \circ J_\gamma\big)\big(x \circ w_\gamma \circ (w_\gamma^{-1} \circ \tau \circ w_\gamma)\big) = (P \circ J_\gamma)(x \circ w_\gamma).$$

Згідно із рівностями (4.25) і (4.27), виконується рівність

$$(P \circ J_\gamma)(x \circ w_\gamma) = Q_\gamma(x).$$

Тому $Q_\gamma(x \circ \tau) = Q_\gamma(x)$. Отже, поліном Q_γ є симетричним.

Доведемо, що поліном Q_γ не залежить від індексу γ. Нехай індекси $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ такі, що $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Покажемо, що $Q_{\gamma_1} \equiv Q_{\gamma_2}$. Нехай $x \in L_\infty[0,1]$. Згідно із рівностями (4.25) і (4.27), виконується рівність

$$Q_{\gamma_1}(x) = P(J_{\gamma_1}(x \circ w_{\gamma_1})). \tag{4.28}$$

Визначимо відображення $\sigma_{\gamma_1,\gamma_2} : \Omega \to \Omega$ рівністю

$$\sigma_{\gamma_1,\gamma_2}(t) = \begin{cases} (w_{\gamma_2}^{-1} \circ w_{\gamma_1})(t), & \text{якщо } t \in \Omega_{\gamma_1}, \\ (w_{\gamma_1}^{-1} \circ w_{\gamma_2})(t), & \text{якщо } t \in \Omega_{\gamma_2}, \\ t, & \text{якщо } t \in \Omega \setminus (\Omega_{\gamma_1} \cap \Omega_{\gamma_2}). \end{cases}$$

Оскільки відображення w_{γ_1} і w_{γ_2} є ізоморфізмами, то $\sigma_{\gamma_1,\gamma_2} \in \Xi_\Omega$. Оскільки поліном P є симетричним, то

$$P(J_{\gamma_1}(x \circ w_{\gamma_1})) = P(J_{\gamma_1}(x \circ w_{\gamma_1}) \circ \sigma_{\gamma_1,\gamma_2}). \tag{4.29}$$

Покажемо, що

$$J_{\gamma_1}(x \circ w_{\gamma_1}) \circ \sigma_{\gamma_1\gamma_2} = J_{\gamma_2}(x \circ w_{\gamma_2}).$$

Якщо $t \in \Omega_{\gamma_2}$, то $\sigma_{\gamma_1,\gamma_2}(t) = (w_{\gamma_1}^{-1} \circ w_{\gamma_2})(t)$. У цьому випадку $\sigma_{\gamma_1,\gamma_2}(t) \in \Omega_{\gamma_1}$, тому, згідно із рівністю (4.26),

$$\big(J_{\gamma_1}(x \circ w_{\gamma_1})\big)\big(\sigma_{\gamma_1,\gamma_2}(t)\big) = \big(x \circ w_{\gamma_1}\big)\big((w_{\gamma_1}^{-1} \circ w_{\gamma_2})(t)\big) = (x \circ w_{\gamma_2})(t).$$

Якщо $t \in \Omega \setminus \Omega_{\gamma_2}$, то $\sigma_{\gamma_1,\gamma_2}(t) \in \Omega \setminus \Omega_{\gamma_1}$, тому, згідно із рівністю (4.26),

$$\big(J_{\gamma_1}(x \circ w_{\gamma_1})\big)\big(\sigma_{\gamma_1,\gamma_2}(t)\big) = 0.$$

Отже,

$$\big(J_{\gamma_1}(x \circ w_{\gamma_1})\big)\big(\sigma_{\gamma_1,\gamma_2}(t)\big) = \begin{cases} (x \circ w_{\gamma_2})(t), & \text{якщо } t \in \Omega_{\gamma_2}, \\ 0, & \text{якщо } t \in \Omega \setminus \Omega_{\gamma_2}, \end{cases}$$

тобто

$$\big(J_{\gamma_1}(x \circ w_{\gamma_1})\big)\big(\sigma_{\gamma_1\gamma_2}(t)\big) = (J_{\gamma_2}(x \circ w_{\gamma_2}))(t)$$

для кожного $t \in \Omega$. Тому

$$J_{\gamma_1}(x \circ w_{\gamma_1}) \circ \sigma_{\gamma_1,\gamma_2} = J_{\gamma_2}(x \circ w_{\gamma_2}). \tag{4.30}$$

Як наслідок, згідно із рівностями (4.28), (4.29) і (4.30),

$$Q_{\gamma_1}(x) = P(J_{\gamma_2}(x \circ w_{\gamma_2})) = Q_{\gamma_2}(x).$$

Тому $Q_{\gamma_1} \equiv Q_{\gamma_2}$. Таким чином, поліном Q_γ не залежить від γ.

Оскільки Q_γ є неперервним n-однорідним симетричним поліномом на просторі $L_\infty[0,1]$, то, згідно із теоремою 2.2, поліном Q_γ можна єдиним чином подати у вигляді

$$Q(x) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1}(x)\ldots R_n^{k_n}(x), \tag{4.31}$$

де $x \in L_\infty[0,1]$ і $\alpha_{k_1,\ldots,k_n} \in \mathbb{C}$, а поліноми $R_1,\ldots,R_n$ визначено формулою (2.1).

Нагадаємо, що для кожного індексу $\gamma \in \Gamma$ відображення w_γ є ізоморфізмом між простором $(\Omega_\gamma, \mathcal{F}_\gamma, \nu_\gamma)$ і відрізком $[0,1]$ із лінійною мірою Лебега μ. Для кожного індексу $\gamma \in \Gamma$ побудуємо ізоморфізм w'_γ між між простором $(\Omega_\gamma, \mathcal{F}_\gamma, \nu_\gamma)$ і півінтервалом $[0,1)$ із лінійною мірою Лебега. Виберемо зліченну множину $M \subset \Omega_\gamma$ таку, що $w_\gamma^{-1}(1) \in M$. Нехай $N = w_\gamma(M) \setminus \{1\}$. Оскільки відображення w_γ є біекцією, то множина N є зліченною. Внаслідок того, що міри ν_γ і μ є неперервними, множини M і N є нехтовними. Нехай $h : M \to N$ — довільна біекція. Визначимо відображення $w'_\gamma : \Omega_\gamma \to [0,1)$ рівністю

$$w'_\gamma(t) = \begin{cases} w_\gamma(t), & \text{якщо } t \in \Omega_\gamma \setminus M \\ h(t), & \text{якщо } t \in M \end{cases}$$

Як легко переконатися, відображення w'_γ є ізоморфізмом між простором $(\Omega_\gamma, \mathcal{F}_\gamma, \nu_\gamma)$ і півінтервалом $[0,1)$ із лінійною мірою Лебега.

Нехай $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \in \Gamma$ — це довільна послідовність попарно різних індексів. Визначимо відображення $v_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty} : \bigsqcup_{n=1}^\infty \Omega_{\gamma_n} \to [0, +\infty)$, поклавши

$$v_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty}(t) = w_k'(t) + k - 1$$

для $t \in \Omega_{\gamma_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що відображення $v_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty}$ є ізоморфізмом просторів $\bigsqcup_{n=1}^\infty \Omega_{\gamma_n}$ і $[0, +\infty)$.

Визначимо відображення $V_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty} : (L_1 \cap L_\infty)[0, +\infty) \to (L_1 \cap L_\infty)\left(\bigsqcup_{n=1}^\infty \Omega_{\gamma_n}\right)$ рівністю

$$V_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty}(x) = x \circ v_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty},$$

де $x \in (L_1 \cap L_\infty)[0, +\infty)$. Оскільки відображення $v_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty}$ є ізоморфізмом відповідних просторів з мірами, то, як легко переконатися, відображення $V_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty}$ є лінійною ізометричною бієкцією.

Визначимо відображення $I_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty} : (L_1 \cap L_\infty)\left(\bigsqcup_{n=1}^\infty \Omega_{\gamma_n}\right) \to (L_1 \cap L_\infty)(\Omega)$ рівністю

$$I_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty}(x)(t) = \begin{cases} x(t), & \text{якщо } t \in \bigsqcup_{n=1}^\infty \Omega_{\gamma_n} \\ 0, & \text{якщо } t \in \Omega \setminus \bigsqcup_{n=1}^\infty \Omega_{\gamma_n}, \end{cases}$$

де $x \in (L_1 \cap L_\infty)\left(\bigsqcup_{n=1}^\infty \Omega_{\gamma_n}\right)$. Можна переконатися, що відображення $I_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty}$ є лінійним, ізометричним і ін'єктивним.

Маємо наступну діаграму:

$$(L_1 \cap L_\infty)[0, +\infty) \xrightarrow{V_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty}} (L_1 \cap L_\infty)\left(\bigsqcup_{n=1}^\infty \Omega_{\gamma_n}\right) \xrightarrow{I_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty}} (L_1 \cap L_\infty)(\Omega) \xrightarrow{P} \mathbb{C}.$$

Оскільки відображення $V_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty}$ і $I_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty}$ є лінійними і неперервними, а відображення P є неперервним n-однорідним поліномом, то відображення $P \circ I_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty} \circ V_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty}$ є неперервним n-однорідним поліномом. Також можна перевірити, що поліном $P \circ I_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty} \circ V_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty}$ є симетричним. Тому, згідно із теоремою 4.2, поліном $P \circ I_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty} \circ V_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty}$ можна єдиним чином подати у вигляді

$$\big(P \circ I_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty} \circ V_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty}\big)(x) = \sum_{\substack{k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n \\ k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}_+}} \beta_{k_1, \ldots, k_n} \tilde{R}_1^{k_1}(x) \cdots \tilde{R}_n^{k_n}(x),$$

де $x \in (L_1 \cap L_\infty)[0, +\infty)$ і $\beta_{k_1,\ldots,k_n} \in \mathbb{C}$. Оскільки відображення $V_{\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}}$ є ізоморфізмом, то

$$\begin{aligned}\big(P \circ I_{\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}}\big)(y) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} &\beta_{k_1,\ldots,k_n}\times\\ &\times\Big(\big(\tilde{R}_1 \circ V^{-1}_{\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}}\big)(y)\Big)^{k_1}\cdots\Big(\big(\tilde{R}_n \circ V^{-1}_{\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}}\big)(y)\Big)^{k_n} \qquad (4.32)\end{aligned}$$

для кожного $y \in (L_1 \cap L_\infty)\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}\Omega_{\gamma_n}\right)$. Покажемо, що коефіцієнти $\beta_{k_1,\ldots,k_n}$ збігаються із відповідними коефіцієнтами $\alpha_{k_1,\ldots,k_n}$, отриманими у формулі (4.31). Визначимо відображення $T : L_\infty(\Omega_{\gamma_1}) \to (L_1 \cap L_\infty)\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}\Omega_{\gamma_n}\right)$ рівністю

$$T(x)(t) = \begin{cases} x(t), & \text{якщо } t \in \Omega_{\gamma_1}\\ 0, & \text{якщо } t \in \bigsqcup\limits_{n=2}^{\infty}\Omega_{\gamma_n}, \end{cases}$$

де $x \in L_\infty(\Omega_{\gamma_1})$. Можна переконатися, що відображення T є лінійним, ізометричним і ін'єктивним. Отримуємо наступну діаграму:

$$\begin{tikzcd}
L_\infty[0,1] \arrow[r, "W_{\gamma_1}"] & L_\infty(\Omega_{\gamma_1}) \arrow[r, "T"] & (L_1 \cap L_\infty)\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}\Omega_{\gamma_n}\right) \arrow[d, "I_{\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}}"] & \\
 & & (L_1 \cap L_\infty)(\Omega) \arrow[r, "P"] & \mathbb{C}.
\end{tikzcd}$$

Із рівності (4.32) випливає рівність

$$\begin{aligned}\big(P \circ I_{\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}} \circ T \circ W_{\gamma_1}\big)(x) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} &\beta_{k_1,\ldots,k_n}\times\\ \times\Big(\big(\tilde{R}_1 \circ V^{-1}_{\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}} \circ T \circ W_{\gamma_1}\big)(y)\Big)^{k_1}&\cdots\Big(\big(\tilde{R}_n \circ V^{-1}_{\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}} \circ T \circ W_{\gamma_1}\big)(y)\Big)^{k_n}\end{aligned} \qquad (4.33)$$

для кожного $x \in L_\infty[0,1]$. Врахувавши, що $P \circ I_{\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}} \circ T \circ W_{\gamma_1} = Q_{\gamma_1}$ і $\tilde{R}_j \circ V^{-1}_{\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}} \circ T \circ W_{\gamma_1} = R_j$ для кожного $j \in \mathbb{N}$, із рівності (4.33) отримуємо рівність

$$Q_\gamma(x) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \beta_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1}(x)\cdots R_n^{k_n}(x)$$

для кожного $x \in L_\infty[0,1]$. Внаслідок єдиності зображення (4.31), отримуємо рівність $\beta_{k_1,\ldots,k_n} = \alpha_{k_1,\ldots,k_n}$ для кожних $k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{Z}_+$ таких, що $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$. Тому із рівності (4.32) отримуємо рівність

$$\big(P \circ I_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty}\big)(y) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} \times \\ \times \Big(\big(\tilde{R}_1 \circ V^{-1}_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty}\big)(y)\Big)^{k_1} \cdots \Big(\big(\tilde{R}_n \circ V^{-1}_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty}\big)(y)\Big)^{k_n},$$

яка виконується для кожного $y \in (L_1 \cap L_\infty)\left(\bigsqcup_{n=1}^\infty \Omega_{\gamma_n}\right)$. Звідси, для кожного $z \in (L_1 \cap L_\infty)(\Omega)$, який належить образу $I_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty}\Big((L_1 \cap L_\infty)\left(\bigsqcup_{n=1}^\infty \Omega_{\gamma_n}\right)\Big)$, маємо

$$P(z) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} \times \\ \times \Big(\big(\tilde{R}_1 \circ V^{-1}_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty} \circ I^{-1}_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty}\big)(z)\Big)^{k_1} \cdots \Big(\big(\tilde{R}_n \circ V^{-1}_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty} \circ I^{-1}_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty}\big)(z)\Big)^{k_n}.$$

Врахувавши, що

$$\big(\tilde{R}_j \circ V^{-1}_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty} \circ I^{-1}_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty}\big)(z) = \tilde{R}_{j,\Omega}(z)$$

для кожного $j \in \mathbb{N}$, отримуємо, що для кожного $z \in (L_1 \cap L_\infty)(\Omega)$, який належить образу $I_{\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty}\Big((L_1 \cap L_\infty)\left(\bigsqcup_{n=1}^\infty \Omega_{\gamma_n}\right)\Big)$, виконується рівність

$$P(z) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} \Big(\tilde{R}_{1,\Omega}(z)\Big)^{k_1} \cdots \Big(\tilde{R}_{n,\Omega}(z)\Big)^{k_1}. \tag{4.34}$$

Як бачимо, коефіцієнти у даній рівності не залежать від вибору послідовності індексів $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$.

Покажемо, що рівність (4.34) є правильною для кожного $z \in (L_1 \cap L_\infty)(\Omega)$. Нехай z — це довільний елемент простору $(L_1 \cap L_\infty)(\Omega)$. Оскільки норма

$$\|z\|_1 = \int_\Omega |z(t)|\,dt = \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_{\Omega_\gamma} |z(t)|\,dt$$

є скінченною, то існує не більше, ніж зліченна кількість індексів $\gamma \in \Gamma$, для яких $\int_{\Omega_\gamma} |z(t)|\,dt > 0$. Таким чином, існує послідовність попарно різних індексів $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Gamma$ така, що $z = 0$ майже скрізь на множині Ω_γ для кожного індексу $\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тому $z \in I_{\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}}\left((L_1 \cap L_\infty)\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} \Omega_{\gamma_n}\right)\right)$. Як наслідок, для елемента z виконується рівність (4.34). Теорему доведено.

□

4.5. Висновки до розділу 4

Цей розділ присвячено дослідженням симетричних і скінченно-симетричних неперервних поліномів і аналітичних функцій на просторах вимірних за Лебегом функцій на множинах з нескінченними мірами.

Показано, що кожен комплекснозначний неперервний симетричний поліном на комплексному банаховому просторі $L_\infty[0,+\infty)$ всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі обов'язково є сталим відображенням.

Показано, що алгебра Фреше всіх комплекснозначних скінченно-симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному просторі $L_\infty[0,+\infty)$ є ізоморфною до алгебри Фреше всіх комплекснозначних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на фактор-просторі $L_\infty[0,+\infty)/M_0$, де M_0 — це замикання у просторі $L_\infty[0,+\infty)$ підпростору всіх простих вимірних функцій із обмеженими носіями.

Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі і показано, що алгебра Фреше комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цьому просторі ізоморфна до алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку.

Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на об'єднанні просторів Лебега-Рохліна із неперервними мірами.

Результати, наведені в цьому розділі, опубліковано в таких працях: [59], [109], [117].

РОЗДІЛ 5

СИМЕТРИЧНІ АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ НА ДЕКАРТОВИХ СТЕПЕНЯХ КОМПЛЕКСНИХ БАНАХОВИХ ПРОСТОРІВ ІНТЕГРОВНИХ ЗА ЛЕБЕГОМ У СТЕПЕНІ p, $(1 \leq p < \infty)$, ФУНКЦІЙ

Даний розділ присвячено вивченню симетричних комплекснозначних аналітичних функцій на декартових степенях комплексних банахових просторів $L_p[0,1]$ і $L_p[0,+\infty)$ всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом у степені p функцій на множинах $[0,1]$ і $[0,+\infty)$ відповідно, де $1 \leq p < +\infty$.

5.1. Симетричні аналітичні функції на декартовому степені комплексного банахового простору інтегровних за Лебегом у степені p, де $1 \leq p < \infty$, функцій на відрізку

В даному підрозділі буде побудовано скінченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому степені простору $L_p[0,1]$ і буде показано, що алгебра Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій на цьому декартовому степені ізоморфна до алгебри Фреше $H(\mathbb{C}^m)$ всіх комплекснозначних аналітичних функцій на просторі $\mathbb{C}^m$, де m — це потужність вищезгаданого алгебраїчного базису.

Нехай $p \in [1,+\infty)$ і $n \in \mathbb{N}$. Нехай $L_p[0,1] := L_p^{(\mathbb{C})}([0,1])$ — це комплексний банахів простір вимірних за Лебегом функцій $y : [0,1] \to \mathbb{C}$, для яких степінь p абсолютного значення є інтегровним за Лебегом (див. приклад 1.2) із нормою $\|\cdot\|_{L_p[0,1]} := \|\cdot\|_{L_p^{(\mathbb{C})}([0,1])}$, визначеною формулою (1.15).

Нехай $(L_p[0,1])^n$ — це n-тий декартів степінь простору $L_p[0,1]$ з нормою

$$\|y\|_{p,n,[0,1]} = \left(\sum_{s=1}^{n} \int_{[0,1]} |y_s(t)|^p \, dt\right)^{1/p},$$

де $y = (y_1, \ldots, y_n) \in (L_p[0,1])^n$.

Згідно із означенням 1.18, функцію $f : (L_p[0,1])^n \to \mathbb{C}$ називають симетричною, якщо $f((y_1 \circ \sigma, \ldots, y_n \circ \sigma)) = f((y_1, \ldots, y_n))$ для кожного елемента $(y_1, \ldots, y_n) \in (L_p[0,1])^n$ і для кожної бієкції $\sigma \in \Xi_{[0,1]}$, де множина Ξ_Ω визначена на с. 63.

Позначимо $\mathcal{P}_s((L_p[0,1])^n)$ алгебру всіх симетричних неперервних комплекснозначних поліномів на просторі $(L_p[0,1])^n$.

Для кожного мультиіндексу $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ такого, що $1 \le |k| \le \lfloor p \rfloor$, де $|k| = k_1 + \ldots + k_n$ і $\lfloor p \rfloor$ — це ціла частина числа p, визначимо відображення $R_{k,[0,1]} : (L_p[0,1])^n \to \mathbb{C}$ формулою

$$R_{k,[0,1]}(y) = \int_{[0,1]} \prod_{\substack{s=1 \\ k_s > 0}}^{n} (y_s(t))^{k_s}\, dt, \tag{5.1}$$

де $y = (y_1, \ldots, y_n) \in (L_p[0,1])^n$.

Теорема 5.1. *Для мультиіндексу $k \in \mathbb{Z}_+^n$ такого, що $1 \le |k| \le \lfloor p \rfloor$, відображення $R_{k,[0,1]}$, визначене формулою* (5.1)*, є добре визначеним неперервним симетричним $|k|$-однорідним поліномом на просторі $(L_p[0,1])^n$.*

Доведення. Визначимо відображення $B : (L_p[0,1])^{|k|} \to \mathbb{C}$ формулою

$$B(x_1, \ldots, x_{|k|}) = \int_{[0,1]} x_1(t) \ldots x_{|k|}(t)\, dt.$$

Зауважимо, що відображення B є $|k|$-лінійним. Нехай $Q : L_p[0,1] \to \mathbb{C}$ — це звуження відображення B на діагональ. Оскільки

$$|Q(x)| = \left| \int_{[0,1]} (x(t))^{|k|}\, dt \right| \le \int_{[0,1]} |x(t)|^{|k|}\, dt = \|x\|_{L_{|k|}[0,1]}^{|k|} \le \|x\|_{L_p[0,1]}^{|k|}$$

для кожної функції $x \in L_p[0,1]$, то

$$\|Q\| = \sup_{\|x\|_{L_p[0,1]} \le 1} |Q(x)| \le \sup_{\|x\|_{L_p[0,1]} \le 1} \|x\|_{L_p[0,1]}^{|k|} = 1.$$

Тому відображення Q є неперервним, отже, відображення B також є неперервним.

Зауважимо, що

$$R_{k,[0,1]}(y) = B(\underbrace{y_1, \ldots, y_1}_{k_1}, \ldots, \underbrace{y_n, \ldots, y_n}_{k_n}), \tag{5.2}$$

де $y = (y_1, \ldots, y_n) \in (L_p[0,1])^n$. Отже, відображення $R_{k,[0,1]}$ є добре визначеним.

Зауважимо, що для фіксованих елементів $x, y \in (L_p[0,1])^n$ функція $\lambda \in \mathbb{C} \mapsto R_{k,[0,1]}(x + \lambda y) \in \mathbb{C}$ є поліномом степеня щонайбільше $|k|$. Тому, згідно із [92, теорема 3.6, с. 22], відображення $R_{k,[0,1]}$ є поліномом степеня щонайбільше $|k|$. Також зауважимо, що $R_k(\lambda y) = \lambda^{|k|} R_{k,[0,1]}(y)$ для кожних $\lambda \in \mathbb{C}$ і $y \in (L_p[0,1])^n$. Тому, згідно із [92, вправа 2.C, с. 16], відображення $R_{k,[0,1]}$ є $|k|$-однорідним поліномом.

Згідно із рівністю (5.2),

$$|R_{k,[0,1]}(y)| \leq \|B\| \|y_1\|_{L_p[0,1]}^{k_1} \cdots \|y_n\|_{L_p[0,1]}^{k_n}$$

для кожного елемента $y = (y_1, \ldots, y_n) \in (L_p[0,1])^n$. Тому, для кожного елемента $y \in (L_p[0,1])^n$ такого, що $\|y\|_{p,n,[0,1]} \leq 1$, маємо $|R_{k,[0,1]}(y)| \leq \|B\|$. Отже, $\|R_{k,[0,1]}\| \leq \|B\|$. Як наслідок, поліном $R_{k,[0,1]}$ є неперервним. Як легко переконатися, поліном $R_{k,[0,1]}$ є симетричним. Теорему доведено. ☐

Лема 5.1. *Нехай $P = P_0 + P_1 + \ldots + P_N$ — це симетричний неперервний комплекснозначний поліном на просторі $(L_p[0,1])^n$, де $P_0 \in \mathbb{C}$ і P_j — це j-однорідний поліном для кожного $j \in \{1, \ldots, N\}$. Тоді кожен поліном P_j є симетричним і неперервним, де $j \in \{0, \ldots, N\}$.*

Доведення. Даний результат випливає із інтегральної формули Коші (1.13), оскільки сума $P_0 + P_1 + \ldots + P_N$ є розкладом у ряд Тейлора полінома P в точці 0. ☐

Для $m \in \mathbb{N}$ визначимо відображення $J_m : c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n) \to (L_p[0,1])^n$ формулою

$$J_m(x) = \left(\sum_{j=1}^m x_j^{(1)} \mathbf{1}_{\left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right]}, \ldots, \sum_{j=1}^m x_j^{(n)} \mathbf{1}_{\left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right]} \right) \tag{5.3}$$

для $x = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots) \in c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$, де простір $c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$ визначено на с. 110. Задамо на просторі $c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$ норму $\|\cdot\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}$, визначену формулою (1.16). Зауважимо, що відображення J_m є лінійним оператором. Покажемо, що відображення J_m є неперервним.

Лема 5.2. *Для кожної послідовності $x \in c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$ виконується рівність*

$$\|J_m(x)\|_{p,n,[0,1]} = \frac{1}{m^{1/p}}\|x\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}.$$

Доведення. Для послідовності $x = (x_1, \ldots, x_m, \bar{0}, \ldots) \in c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$ маємо

$$\|J_m(x)\|_{p,n,[0,1]}^p = \sum_{s=1}^n \int_{[0,1]} \left|\sum_{j=1}^m x_j^{(s)} \mathbf{1}_{\left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right]}(t)\right|^p dt =$$

$$= \sum_{s=1}^n \int_{[0,1]} \sum_{j=1}^m |x_j^{(s)}|^p \mathbf{1}_{\left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right]}(t)\, dt = \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^m |x_j^{(s)}|^p \int_{[0,1]} \mathbf{1}_{\left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right]}(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^m |x_j^{(s)}|^p = \frac{1}{m}\|x\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}^p.$$

Тому $\|J_m(x)\|_{p,n,[0,1]} = \frac{1}{m^{1/p}}\|x\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}$. Лему доведено. □

Як наслідок, відображення J_m є неперервним. Для $l \in \mathbb{N}$, нехай

$$D_l = J_{2^l}\left(c_{00}^{(2^l)}(\mathbb{C}^n)\right).$$

Зауважимо, що відображення J_{2^l} є бієкцією між просторами $c_{00}^{(2^l)}(\mathbb{C}^n)$ і D_l. Оскільки відображення J_{2^l} є лінійним і неперервним, то це відображення є неперервним ізоморфізмом між просторами $c_{00}^{(2^l)}(\mathbb{C}^n)$ і D_l. Нехай

$$D = \bigcup_{l=1}^{\infty} D_l.$$

Зауважимо, що простір D є щільним у просторі $(L_p[0,1])^n$.

Для $m \in \mathbb{N}$ і для кожного ненульового мультиіндексу $k \in \mathbb{Z}_+^n$ визначимо відображення $H_k^{(m)} : c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}$ рівністю

$$H_k^{(m)}(x) = \sum_{j=1}^m \prod_{\substack{s=1\\ k_s>0}}^n \left(x_j^{(s)}\right)^{k_s}, \tag{5.4}$$

де $x = (x_1, \ldots, x_m, \bar{0}, \ldots) \in c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$. Зауважимо, що відображення $H_k^{(m)}$ є симетричним $|k|$-однорідним поліномом і, оскільки простір $c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$ є скінченновимірним, то поліном $H_k^{(m)}$ є неперервним відносно будь-якої норми, заданої на просторі $c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$. Також зауважимо, що поліноми $H_k^{(m)}$ є звуженнями поліномів $H_k^{(\mathbb{C}^n)}$, визначених рівністю (7.5).

Лема 5.3. *Для кожного ненульового мультиіндексу $k \in \mathbb{Z}_+^n$ виконується рівність*

$$R_{k,[0,1]}(J_{2^l}(x)) = \frac{1}{2^l} H_k^{(2^l)}(x)$$

для кожної послідовності $x \in c_{00}^{(2^l)}(\mathbb{C}^n)$, де $l \in \mathbb{N}$.

Доведення. Для послідовності $x = (x_1, \ldots, x_{2^l}, \bar{0}, \ldots) \in c_{00}^{(2^l)}(\mathbb{C}^n)$ маємо

$$R_{k,[0,1]}(J_{2^l}(x)) = \int_{[0,1]} \prod_{\substack{s=1 \\ k_s>0}}^{n} \left(\sum_{j=1}^{2^l} x_j^{(s)} \mathbf{1}_{\left[\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l}\right]}(t) \right)^{k_s} dt =$$

$$= \int_{[0,1]} \prod_{\substack{s=1 \\ k_s>0}}^{n} \sum_{j=1}^{2^l} \left(x_j^{(s)}\right)^{k_s} \mathbf{1}_{\left[\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l}\right]}(t)\, dt = \int_{[0,1]} \sum_{j=1}^{2^l} \prod_{\substack{s=1 \\ k_s>0}}^{n} \left(x_j^{(s)}\right)^{k_s} \mathbf{1}_{\left[\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l}\right]}(t)\, dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{2^l} \prod_{\substack{s=1 \\ k_s>0}}^{n} \left(x_j^{(s)}\right)^{k_s} \int_{[0,1]} \mathbf{1}_{\left[\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l}\right]}(t)\, dt = \frac{1}{2^l} \sum_{j=1}^{2^l} \prod_{\substack{s=1 \\ k_s>0}}^{n} \left(x_j^{(s)}\right)^{k_s} = \frac{1}{2^l} H_k^{(2^l)}(x).$$

Лему доведено. □

Нехай числа $a, b \in [0,1]$ такі, що $a < b$ і існують числа $r_1, r_2, s \in \mathbb{Z}_+$, для яких $a = r_1/2^s$ і $b = r_2/2^s$. Визначимо відображення $S_{[a,b]} : D \to D$ наступним чином. Для $y \in D$, покладемо

$$(S_{[a,b]}(y))(t) = \begin{cases} y\left(\frac{t-a}{b-a}\right), & \text{якщо } t \in [a,b] \\ (0, \ldots, 0), & \text{якщо } t \in [0,1] \setminus [a,b]. \end{cases}$$

Лема 5.4. *Для кожного $y \in D$ виконується рівність*

$$\|S_{[a,b]}(y)\|_{p,n,[0,1]} = (b-a)^{1/p} \|y\|_{p,n,[0,1]}.$$

Доведення. Для $y = (y_1, \dots, y_n) \in D$ маємо

$$\|S_{[a,b]}(y)\|^p_{p,n,[0,1]} = \sum_{s=1}^n \int_{[a,b]} \Big| y_s\Big(\frac{t-a}{b-a}\Big)\Big|^p \, dt = (b-a) \sum_{s=1}^n \int_{[0,1]} |y_s(\theta)|^p \, d\theta = \\ = (b-a)\|y\|^p_{p,n,[0,1]}.$$

Тому $\|S_{[a,b]}(y)\|_{p,n,[0,1]} = (b-a)^{1/p}\|y\|_{p,n,[0,1]}$. Лему доведено. □

Лема 5.5. *Для кожного елемента $y \in D$ і кожного ненульового мультиіндексу $k \in \mathbb{Z}^n_+$ виконується рівність*

$$R_{k,[0,1]}(S_{[a,b]}(y)) = (b-a)R_{k,[0,1]}(y).$$

Доведення. Для $y = (y_1, \dots, y_n) \in D$ маємо

$$R_{k,[0,1]}(S_{[a,b]}(y)) = \int_{[a,b]} \prod_{\substack{s=1 \\ k_s>0}}^n \Big(y_s\Big(\frac{t-a}{b-a}\Big)\Big)^{k_s} dt = (b-a) \int_{[0,1]} \prod_{\substack{s=1 \\ k_s>0}}^n (y_s(\theta))^{k_s} \, d\theta = \\ = (b-a)R_{k,[0,1]}(y).$$

Лему доведено. □

Теорема 5.2. *Кожен N-однорідний симетричний неперервний поліном $P : (L_p[0,1])^n \to \mathbb{C}$ можна єдиним чином подати у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів $R_{k,[0,1]}$, де мультиіндекси $k \in \mathbb{Z}^n_+$ такі, що $1 \le |k| \le \min\{\lfloor p \rfloor, N\}$.*

Доведення. Нехай Q — це звуження полінома P на множину D. Нехай

$$M_N = \{k \in \mathbb{Z}^n_+ : \ 1 \le |k| \le N\}.$$

Згідно із теоремою 3.3, у якій покладемо $M = M_N$, існують числа $m \in \mathbb{N}$ і $\rho > 0$ такі, що для кожного $\xi \in \mathbb{C}^{M_N}$ існує послідовність $x_\xi \in c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$ така, що $\pi^{(m)}_{M_N}(x_\xi) = \xi$ і якщо $\|\xi\|_\infty < 1$, то $\|x_\xi\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)} < \rho$. Отже, відображення $\pi^{(m)}_{M_N}$ є сюр'єктивним. Для $m' \ge m$, звуження полінома $H^{(m')}_k$ на простір $c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$ дорівнює поліному $H^{(m)}_k$ для кожного мультиіндексу $k \in \mathbb{Z}^n_+$ такого, що $|k| \ge 1$. Як наслідок, звуження відображення $\pi^{(m')}_{M_N}$ на простір

$c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$ дорівнює $\pi_{M_N}^{(m)}$. Оскільки відображення $\pi_{M_N}^{(m)}$ є сюр'єктивним, то відображення $\pi_{M_N}^{(m')}$ також є сюр'єктивним.

Нехай

$$l_0 = \lfloor \log_2 m \rfloor + 1. \tag{5.5}$$

Тоді $2^{l_0} \geq m$. Нехай $l \geq l_0$. Оскільки відображення J_{2^l} є неперервним і лінійним, то відображення $Q \circ J_{2^l}$ є N-однорідним неперервним поліномом на просторі $c_{00}^{(2^l)}(\mathbb{C}^n)$. Також зауважимо, що відображення $Q \circ J_{2^l}$ є симетричним. Тому, згідно із теоремою 3.4, відображення $Q \circ J_{2^l}$ можна подати як алгебраїчну комбінацію поліномів $H_k^{(2^l)}$, де $k \in M_N$. Іншими словами, існує поліном $q_l : \mathbb{C}^{M_N} \to \mathbb{C}$ такий, що

$$(Q \circ J_{2^l})(x) = q_l\big(\pi_{M_N}^{(2^l)}(x)\big)$$

для кожної послідовності $x \in c_{00}^{(2^l)}(\mathbb{C}^n)$. Оскільки відображення $\pi_{M_N}^{(2^l)}$ є сюр'єктивним, то такий поліном q_l єдиний.

Для $y \in D_l$, нехай $x = J_{2^l}^{-1}(y)$. Тоді

$$(Q \circ J_{2^l})(J_{2^l}^{-1}(y)) = q_l\big(\pi_{M_N}^{(2^l)}(J_{2^l}^{-1}(y))\big).$$

Згідно із лемою 5.3, $R_{k,[0,1]}(J_{2^l}(x)) = \frac{1}{2^l} H_k^{(2^l)}(x)$. Тому

$$H_k^{(2^l)}(J_{2^l}^{-1}(y)) = 2^l R_{k,[0,1]}(y).$$

Як наслідок,

$$\pi_{M_N}^{(2^l)}(J_{2^l}^{-1}(y)) = \big(2^l R_{k,[0,1]}(y)\big)_{k \in M_N}.$$

Отже, для кожного елемента $y \in D_l$ виконується рівність

$$Q(y) = q_l\Big(\big(2^l R_{k,[0,1]}(y)\big)_{k \in M_N}\Big).$$

Для $a \in \mathbb{C}$ визначимо відображення $\gamma_a : \mathbb{C}^{M_N} \to \mathbb{C}^{M_N}$ формулою

$$\gamma_a\big((\xi_k)_{k \in M_N}\big) = (a\xi_k)_{k \in M_N},$$

де $(\xi_k)_{k \in M_N} \in \mathbb{C}^{M_N}$. Нехай $\widetilde{q}_l = q_l \circ \gamma_{2^l}$. Тоді відображення $\widetilde{q}_l$ є поліномом на просторі $\mathbb{C}^{M_N}$ і

$$Q(y) = \widetilde{q}_l\Big(\big(R_{k,[0,1]}(y)\big)_{k \in M_N}\Big) \tag{5.6}$$

для кожного елемента $y \in D_l$.

Покажемо, що $\widetilde{q}_{l_0} \equiv \widetilde{q}_{l_0+1} \equiv \dots$ Для $l > l_0$ маємо $D_{l_0} \subset D_l$. Тому, згідно із рівністю (5.6),

$$\widetilde{q}_l\big(\big(R_{k,[0,1]}(y)\big)_{k\in M_N}\big) = Q(y) = \widetilde{q}_{l_0}\big(\big(R_{k,[0,1]}(y)\big)_{k\in M_N}\big) \tag{5.7}$$

для кожного елемента $y \in D_{l_0}$. Нехай $\eta = (\eta_k)_{k\in M_N}$ — це довільний елемент простору $\mathbb{C}^{M_N}$. Для $\xi = \gamma_{2^{l_0}}(\eta)$ існує послідовність $x_\xi \in c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$ така, що $\pi_{M_N}^{(m)}(x_\xi) = \xi$. Оскільки $2^{l_0} \geq m$, то $\pi_{M_N}^{(2^{l_0})}(x_\xi) = \xi$, тобто, $H_k^{(2^{l_0})}(x_\xi) = \xi_k$ для кожного мультиіндексу $k \in M_N$. Нехай $y_\xi = J_{2^{l_0}}(x_\xi)$. Згідно із лемою 5.3,

$$R_{k,[0,1]}(y_\xi) = \frac{1}{2^{l_0}} H_k^{(2^{l_0})}(x_\xi) = \frac{1}{2^{l_0}}\xi_k = \eta_k$$

для кожного мультиіндексу $k \in M_N$. Отже, $\big(R_{k,[0,1]}(y_\xi)\big)_{k\in M_N} = \eta$. Згідно із формулою (5.7), у якій покладемо $y = y_\xi$, маємо $\widetilde{q}_l(\eta) = \widetilde{q}_{l_0}(\eta)$. Оскільки ця рівність виконується для кожного $\eta \in \mathbb{C}^{M_N}$, то $\widetilde{q}_l \equiv \widetilde{q}_{l_0}$. Отже,

$$\widetilde{q}_{l_0} \equiv \widetilde{q}_{l_0+1} \equiv \dots$$

Нехай $q = \widetilde{q}_{l_0}$. Згідно із рівністю (5.6), виконується рівність

$$Q(y) = q\big(\big(R_{k,[0,1]}(y)\big)_{k\in M_N}\big) \tag{5.8}$$

для кожного елемента $y \in D$.

Розглянемо випадок $N > p$. Нехай мультиіндекс $k_0 \in \mathbb{Z}_+^n$ такий, що $\lfloor p \rfloor < |k_0| \leq N$. Покажемо, що поліном $q = q\big((\xi_k)_{k\in M_N}\big)$ не залежить від аргументу ξ_{k_0}. Скористаємося лемою 3.2. Нехай

$$V = \left\{ y \in D : \quad \|y\|_{p,n,[0,1]} < \frac{\rho}{2^{l_0/p}} \right\}$$

і

$$K = \nu(V),$$

де відображення $\nu : D \to \mathbb{C}^{M_N}$ визначене формулою

$$\nu(y) = \big(R_{k,[0,1]}(y)\big)_{k\in M_N}$$

для $y \in D$. Нехай $\varkappa : \mathbb{C}^{M_N} \to \mathbb{C}^{M_N \setminus \{k_0\}}$ — це ортогональна проекція, визначена формулою

$$\varkappa\big((\xi_k)_{k \in M_N}\big) = (\xi_k)_{k \in M_N \setminus \{k_0\}}$$

для $(\xi_k)_{k \in M_N} \in \mathbb{C}^{M_N}$. Нехай $K_1 = \varkappa(K)$. Покажемо, що $\operatorname{int} K_1 \neq \emptyset$. Для довільного елемента $\xi = (\xi_k)_{k \in M_N} \in \mathbb{C}^{M_N}$ такого, що $\|\xi\|_\infty < 1$ існує послідовність $x_\xi \in c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$ така, що $\|x_\xi\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)} < \rho$ і $\pi_{M_N}^{(m)}(x_\xi) = \xi$. Нехай $y_\xi = J_{2^{l_0}}(x_\xi)$, де число l_0 визначене формулою (5.5). Згідно із лемою 5.2,

$$\|y_\xi\|_{p,n,[0,1]} = \frac{1}{2^{l_0/p}} \|x_\xi\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)} < \frac{\rho}{2^{l_0/p}}.$$

Отже, $y_\xi \in V$. Згідно із лемою 5.3, враховуючи, що відображення $\pi_{M_N}^{(m)}$ — це звуження відображення $\pi_{M_N}^{(2^{l_0})}$,

$$\begin{aligned}\nu(y_\xi) = \big(R_{k,[0,1]}(y_\xi)\big)_{k \in M_N} = \Big(\frac{1}{2^{l_0}} H_k^{(2^{l_0})}(x_\xi)\Big)_{k \in M_N} &= \frac{1}{2^{l_0}} \pi_{M_N}^{(2^{l_0})}(x_\xi) = \\ &= \frac{1}{2^{l_0}} \pi_{M_N}^{(m)}(x_\xi) = \frac{1}{2^{l_0}} \xi.\end{aligned}$$

Оскільки $y_\xi \in V$ і $K = \nu(V)$, то $\frac{1}{2^{l_0}} \xi \in K$. Отже, множина K містить відкриту кулю

$$F = \Big\{\eta \in \mathbb{C}^{M_N} : \quad \|\eta\|_\infty < \frac{1}{2^{l_0}}\Big\}.$$

Оскільки $\|\varkappa(\eta)\|_\infty \leq \|\eta\|_\infty$, то множина $\varkappa(F)$ містить відкриту кулю

$$F' = \Big\{\eta' \in \mathbb{C}^{M_N \setminus \{k_0\}} : \quad \|\eta'\|_\infty < \frac{1}{2^{l_0}}\Big\}.$$

Тому множина K_1 містить множину F'. Отже, $\operatorname{int} K_1 \neq \emptyset$.

Нехай U — це непорожня відкрита підмножина множини K_1. Покажемо, що множина $\varkappa^{-1}(U)$ є необмеженою. Оскільки множина U є відкритою і непорожньою, то існують $\zeta' \in U$ і $\varepsilon > 0$ такі, що відкрита куля

$$B(\zeta', \varepsilon) = \Big\{\eta' \in \mathbb{C}^{M_N \setminus \{k_0\}} : \quad \|\eta' - \zeta'\|_\infty < \varepsilon\Big\}$$

міститься у множині U. Оскільки $\zeta' \in U \subset K_1$ і $K_1 = \varkappa(K)$, то існує елемент $\zeta \in K$ такий, що $\varkappa(\zeta) = \zeta'$. Оскільки $K = \nu(V)$, то існує елемент $y_\zeta \in V$ такий, що $\nu(y_\zeta) = \zeta$.

Визначимо елемент $\delta = (\delta_k)_{k\in M_N} \in \mathbb{C}^{M_N}$ формулою

$$\delta_k = \begin{cases} 1/2, & \text{якщо } k = k_0 \\ 0, & \text{якщо } k \in M_N \setminus \{k_0\}. \end{cases}$$

Оскільки $\|\delta\|_\infty = 1/2 < 1$, то існує послідовність $x_\delta \in c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$ така, що $\|x_\delta\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)} < \rho$ і $\pi_{M_N}^{(m)}(x_\delta) = \delta$, тобто

$$H_k^{(m)}(x_\delta) = \begin{cases} 1/2, & \text{якщо } k = k_0 \\ 0, & \text{якщо } k \in M_N \setminus \{k_0\}. \end{cases}$$

Нехай число $l \geq l_0$ таке, що

$$2^l > \frac{1}{\varepsilon} \max_{k\in M_N\setminus\{k_0\}} |\zeta_k|. \tag{5.9}$$

Нехай $y_\delta = J_{2^l}(x_\delta)$. Тоді, згідно із лемою 5.3, $R_{k,[0,1]}(y_\delta) = \frac{1}{2^l} H_k^{(2^l)}(x_\delta)$. Оскільки $2^l \geq m$ і $x_\delta \in c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$, то $H_k^{(2^l)}(x_\delta) = H_k^{(m)}(x_\delta)$. Тому

$$R_{k,[0,1]}(y_\delta) = \begin{cases} 1/2^{l+1}, & \text{якщо } k = k_0 \\ 0, & \text{якщо } k \in M_N \setminus \{k_0\} \end{cases} = (1/2^l)\delta_k.$$

Оскільки $R_{k_0}(y_\delta) \neq 0$, то $\|y_\delta\|_{p,n,[0,1]} > 0$. Оскільки $|k_0| > \lfloor p \rfloor$ і обидва числа $|k_0|$ і $\lfloor p \rfloor$ є цілими, то $|k_0| \geq \lfloor p \rfloor + 1$. Тому $|k_0| > p$. Як наслідок, $p/|k_0| < 1$. Тому існує число β таке, що

$$0 < \beta < \frac{1}{\|y_\delta\|_{p,n,[0,1]}} \frac{\rho}{2^{l_0/p}} \Big(1 - (1/2)^{1-p/|k_0|}\Big)^{1/p}.$$

Для $j \in \mathbb{N}$, нехай

$$z_j = S_{[1/2^l,1]}(y_\zeta) + \sum_{s=1}^{j} \alpha_s S_{[1/2^{l+s},1/2^{l+s-1}]}(y_\delta),$$

де

$$\alpha_s = \beta\Big(\frac{2^s}{s}\Big)^{1/|k_0|}.$$

Покажемо, що $z_j \in V$. Згідно із лемою 5.4,

$$\|z_j\|_{p,n,[0,1]}^p = \|S_{[1/2^l,1]}(y_\zeta)\|_{p,n,[0,1]}^p + \sum_{s=1}^{j} \alpha_s^p \|S_{[1/2^{l+s},1/2^{l+s-1}]}(y_\delta)\|_{p,n,[0,1]}^p =$$

$$= (1 - 1/2^l)\|y_\zeta\|_{p,n,[0,1]}^p + \sum_{s=1}^{j} \alpha_s^p \Big(\frac{1}{2^{l+s-1}} - \frac{1}{2^{l+s}}\Big)\|y_\delta\|_{p,n,[0,1]}^p.$$

Зауважимо, що $\|y_\zeta\|_{p,n,[0,1]} < \frac{\rho}{2^{l_0/p}}$, оскільки $y_\zeta \in V$. Також зауважимо, що

$$\sum_{s=1}^{j} \alpha_s^p \Big(\frac{1}{2^{l+s-1}} - \frac{1}{2^{l+s}}\Big) \|y_\delta\|^p_{p,n,[0,1]} = \frac{1}{2^l} \|y_\delta\|^p_{p,n,[0,1]} \sum_{s=1}^{j} \frac{\alpha_s^p}{2^s} =$$

$$= \frac{1}{2^l} \|y_\delta\|^p_{p,n,[0,1]} \sum_{s=1}^{j} \frac{\beta^p (2^s/s)^{p/|k_0|}}{2^s} = \frac{1}{2^l} \beta^p \|y_\delta\|^p_{p,n,[0,1]} \sum_{s=1}^{j} \Big((1/2)^{1-p/|k_0|}\Big)^s \frac{1}{s^{p/|k_0|}} \le$$

$$\le \frac{1}{2^l} \beta^p \|y_\delta\|^p_{p,n,[0,1]} \sum_{s=1}^{j} \Big((1/2)^{1-p/|k_0|}\Big)^s < \frac{1}{2^l} \beta^p \|y_\delta\|^p_{p,n,[0,1]} \sum_{s=1}^{\infty} \Big((1/2)^{1-p/|k_0|}\Big)^s =$$

$$= \frac{1}{2^l} \beta^p \|y_\delta\|^p_{p,n,[0,1]} \frac{1}{1 - (1/2)^{1-p/|k_0|}} <$$

$$< \frac{1}{\|y_\delta\|^p_{p,n,[0,1]}} \frac{\rho^p}{2^{l_0}} \Big(1 - (1/2)^{1-p/|k_0|}\Big) \frac{1}{2^l} \|y_\delta\|^p_{p,n,[0,1]} \frac{1}{1 - (1/2)^{1-p/|k_0|}} = \frac{\rho^p}{2^{l_0+l}}.$$

Тому

$$\|z_j\|^p_{p,n,[0,1]} < (1 - 1/2^l) \frac{\rho^p}{2^{l_0}} + \frac{\rho^p}{2^{l_0+l}} = \frac{\rho^p}{2^{l_0}}.$$

Отже, $\|z_j\|_{p,n,[0,1]} < \frac{\rho}{2^{l_0/p}}$ і, як наслідок, $z_j \in V$. Тому $\nu(z_j) \in K$.

Для кожного мультиіндексу $k \in M_N$, згідно із лемою 5.5,

$$R_{k,[0,1]}(z_j) = R_{k,[0,1]}(S_{[1/2^l,1]}(y_\zeta)) + \sum_{s=1}^{j} \alpha_s^{|k_0|} R_{k,[0,1]}(S_{[1/2^{l+s},1/2^{l+s-1}]}(y_\delta)) =$$

$$= (1 - 1/2^l) R_{k,[0,1]}(y_\zeta) + \sum_{s=1}^{j} \alpha_s^{|k_0|} \Big(\frac{1}{2^{l+s-1}} - \frac{1}{2^{l+s}}\Big) R_{k,[0,1]}(y_\delta) =$$

$$= (1 - 1/2^l)\zeta_k + \sum_{s=1}^{j} \alpha_s^{|k_0|} \frac{1}{2^{2l+s}} \delta_k. \quad (5.10)$$

Покажемо, що $\varkappa(z_j) \in B(\zeta', \varepsilon)$. Для $k \in M_N \setminus \{k_0\}$, згідно із рівністю (5.10),

$$R_{k,[0,1]}(z_j) = (1 - 1/2^l)\zeta_k.$$

Тому, враховуючи нерівність (5.9),

$$\Big\| \big(R_{k,[0,1]}(z_j)\big)_{k \in M_N \setminus \{k_0\}} - \zeta' \Big\|_\infty = \max_{k \in M_N \setminus \{k_0\}} \big|(1 - 1/2^l)\zeta_k - \zeta_k\big| =$$

$$= \frac{1}{2^l} \max_{k \in M_N \setminus \{k_0\}} |\zeta_k| < \varepsilon.$$

Отже, $\varkappa(z_j) \in B(\zeta', \varepsilon)$.

Покажемо, що множина $\varkappa^{-1}(B(\zeta', \varepsilon))$ є необмеженою. Згідно із рівністю (5.10),

$$R_{k_0}(z_j) = (1 - 1/2^l)\zeta_{k_0} + \sum_{s=1}^{j} \alpha_s^{|k_0|} \frac{1}{2^{2l+s}} \cdot \frac{1}{2}.$$

Зауважимо, що

$$\sum_{s=1}^{j} \alpha_s^{|k_0|} \frac{1}{2^{2l+s+1}} = \frac{1}{2^{2l+1}} \sum_{s=1}^{j} \frac{\alpha_s^{|k_0|}}{2^s} = \frac{\beta}{2^{2l+1}} \sum_{s=1}^{j} \frac{1}{s}.$$

Тому $R_{k_0}(z_j) = (1 - 1/2^l)\zeta_{k_0} + \frac{\beta}{2^{2l+1}} \sum_{s=1}^{j} \frac{1}{s} \to \infty$ при $j \to +\infty$. Отже, множина $\varkappa^{-1}(B(\zeta', \varepsilon))$ є необмеженою. Оскільки $B(\zeta', \varepsilon) \subset U$ то множина $\varkappa^{-1}(U)$ також є необмеженою.

Зауважимо, що

$$\sup_{y \in V} |Q(y)| = \sup_{y \in D,\ \|y\|_{p,n,[0,1]} < \frac{\rho}{2^{l_0/p}}} |P(y)| \le \sup_{y \in (L_p[0,1])^n,\ \|y\|_{p,n,[0,1]} < \frac{\rho}{2^{l_0/p}}} |P(y)| =$$
$$= \left(\frac{\rho}{2^{l_0/p}}\right)^N \|P\|.$$

Отже, поліном Q є обмеженим на множині V. Як наслідок, поліном q є обмеженим на множині K. Згідно із лемою 3.2, поліном q не залежить від аргументу ξ_{k_0}. Тому, у випадку $N > p$, поліном q не залежить від аргументу ξ_k, для якого $\lfloor p \rfloor < |k| \le N$.

Отже, у загальному випадку, поліном q залежить тільки від аргументів ξ_k, для яких $k \in M'$, де

$$M' = \left\{ k \in \mathbb{Z}_+^n :\ 1 \le |k| \le \min\{\lfloor p \rfloor, N\} \right\}.$$

Нехай $\widehat{q}$ — це звуження полінома q на множину $\mathbb{C}^{M'}$. Згідно із рівністю (5.8),

$$Q(y) = \widehat{q}\Big(\big(R_{k,[0,1]}(y)\big)_{k \in M'}\Big)$$

для кожного елемента $y \in D$.

Покажемо, що

$$P(y) = \widehat{q}\Big(\big(R_{k,[0,1]}(y)\big)_{k \in M'}\Big)$$

для кожного елемента $y \in (L_p[0,1])^n$. Оскільки множина D є щільною в просторі $(L_p[0,1])^n$, для кожного елемента $y \in (L_p[0,1])^n$, то існує послідовність $\{y_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset D$, яка збігається до елемента y. Оскільки поліном P є неперервним, то

$$P(y) = \lim_{j\to+\infty} Q(y_j) = \lim_{j\to+\infty} \widehat{q}\big(\big(R_{k,[0,1]}(y_j)\big)_{k\in M'}\big).$$

Оскільки відображення $\widehat{q}$ є поліномом на скінченновимірному просторі, то воно є неперервним. Тому

$$\lim_{j\to+\infty} \widehat{q}\big(\big(R_{k,[0,1]}(y_j)\big)_{k\in M'}\big) = \widehat{q}\big(\big(\lim_{j\to+\infty} R_{k,[0,1]}(y_j)\big)_{k\in M'}\big).$$

Згідно із теоремою 5.1, поліном $R_{k,[0,1]}$ є неперервним. Тому

$$\lim_{j\to+\infty} R_{k,[0,1]}(y_j) = R_{k,[0,1]}(y).$$

Отже, $P(y) = \widehat{q}\big(\big(R_{k,[0,1]}(y)\big)_{k\in M'}\big)$ для кожного елемента $y \in (L_p[0,1])^n$. Теорему доведено. $\square$

Наслідок 5.1. *Множина поліномів* $\big\{R_{k,[0,1]} : \ k \in \mathbb{Z}_+^n,\ 1 \le |k| \le \lfloor p \rfloor\big\}$ *є алгебраїчним базисом алгебри* $\mathcal{P}_s((L_p[0,1])^n)$.

Доведення. Нехай $P = P_0 + P_1 + \ldots + P_N$ — це симетричний неперервний комплекснозначний поліном на просторі $(L_p[0,1])^n$, де $P_0 \in \mathbb{C}$ і P_j — це j-однорідний поліном для $j \in \{1,\ldots,N\}$. Згідно із лемою 5.1, для кожного $j \in \{1,\ldots,N\}$ поліном P_j є симетричним неперервним j-однорідним поліномом. Тому, згідно із теоремою 5.2, поліноми P_j можна єдиним чином подати у вигляді алгебраїчних комбінацій поліномів $R_{k,[0,1]}$, де мультиіндекси $k \in \mathbb{Z}_+^n$ такі, що $1 \le |k| \le \min\{\lfloor p \rfloor, j\}$. Як наслідок, поліном P можна подати як суму цих алгебраїчних комбінацій. Наслідок доведено. $\square$

Нехай $H_{bs}\left((L_p[0,1])^n\right)$ — це підалгебра алгебри Фреше $H_b\left((L_p[0,1])^n\right)$, введеної на с. 59, яка складається зі всіх функцій $f \in H_b\left((L_p[0,1])^n\right)$, які є симетричними.

Із леми 2.7 випливає, що якщо послідовність симетричних функцій $\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H_b((L_p[0,1])^n)$ збігається до функції $f \in H_b((L_p[0,1])^n)$, то функція f є симетричною. Звідси випливає повнота алгебри $H_{bs}((L_p[0,1])^n)$. Отже, алгебра $H_{bs}((L_p[0,1])^n)$ є алгеброю Фреше.

Доведемо наступний результат, який буде використано для опису спектра (див. означення 1.6) алгебри Фреше $H_{bs}((L_p[0,1])^n)$.

Теорема 5.3. *Нехай X — це комплексний банахів простір. Нехай $m \in \mathbb{N}$ і нехай $\Gamma = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ — це множина поліномів на просторі X, яка має наступні властивості:*

1. *Для кожного $j \in \{1, \ldots, m\}$ відображення $P_j : X \to \mathbb{C}$ є неперервним d_j-однорідним поліномом, де $d_j \in \mathbb{N}$.*
2. *Множина поліномів Γ є алгебраїчно незалежною.*
3. *Існує стала $C > 0$ така, що для кожного вектора $z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m$ існує елемент $x_z \in X$ такий, що $\|x_z\| \leq C\|z\|_\infty$ і $P_j(x_z) = z_j$ для кожного $j \in \{1, \ldots, m\}$.*

Нехай $\mathcal{A}(X)$ — це замкнена підалгебра алгебри Фреше $H_b(X)$ така, що для кожної функції $f \in \mathcal{A}(X)$ кожен член ряду Тейлора цієї функції є алгебраїчною комбінацією елементів множини Γ. Тоді алгебри Фреше $\mathcal{A}(X)$ і $H(\mathbb{C}^m)$ є ізоморфними. Спектр алгебри Фреше $\mathcal{A}(X)$ збігається із множиною усіх функціоналів обчислення значень в точках простору X.

Доведення. Нехай $f \in \mathcal{A}(X)$. Оскільки $\mathcal{A}(X) \subset H_b(X)$, то функція f є цілою аналітичною функцією обмеженого типу на просторі X. Тому існує рівномірно збіжний до функції f на кожній обмеженій підмножині простору X ряд Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, де f_n — це неперервний n-однорідний поліном для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$. Згідно із умовою теореми, кожен поліном f_n можна зобразити у вигляді алгебраїчної комбінації елементів множини Γ. Згідно із умовою 2, така алгебраїчна комбінація є єдиною. Оскільки поліном f_n є n-однорідним, то ця алгебраїчна комбінація повинна бути лінійною комбінацією n-однорідних поліномів вигляду $P_1^{k_1} P_2^{k_2} \cdots P_m^{k_m}$, де $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}_+$, (тут вважаємо, що $0^0 = 1$). Зауважимо, що поліном $P_1^{k_1}P_2^{k_2}\cdots P_m^{k_m}$ є n-однорідним якщо і тільки якщо $d_1k_1 + \ldots + d_mk_m = n$. Відповідно, кожен поліном f_n можна єдиним чином зобразити у вигляді

$$f_n = \sum_{\substack{d_1k_1+\ldots+d_mk_m=n\\ k_1,\ldots,k_m\in\mathbb{Z}_+}} \alpha^{(n)}_{k_1,\ldots,k_m} P_1^{k_1}P_2^{k_2}\cdots P_m^{k_m},$$

де $\alpha^{(n)}_{k_1,\ldots,k_m} \in \mathbb{C}$. Звідси випливає, що кожну функцію $f \in \mathcal{A}(X)$ можна єдиним чином подати у вигляді ряду

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{d_1k_1+\ldots+d_mk_m=n\\ k_1,\ldots,k_m\in\mathbb{Z}_+}} \alpha^{(n)}_{k_1,\ldots,k_m} P_1^{k_1}P_2^{k_2}\cdots P_m^{k_m}, \tag{5.11}$$

де $\alpha^{(n)}_{k_1,\ldots,k_m} \in \mathbb{C}$.

Визначимо відображення $J : \mathcal{A}(X) \to H(\mathbb{C}^m)$, поклавши для кожної функції $f \in \mathcal{A}(X)$ вигляду (5.11),

$$J(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{d_1k_1+\ldots+d_mk_m=n\\ k_1,\ldots,k_m\in\mathbb{Z}_+}} \alpha^{(n)}_{k_1,\ldots,k_m} z_1^{k_1}z_2^{k_2}\cdots z_m^{k_m}, \tag{5.12}$$

де $z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m$. Покажемо, що функція $J(f)$ належить алгебрі Фреше $H(\mathbb{C}^m)$ для кожної функції $f \in \mathcal{A}(X)$. За умовою теореми, існує стала $C > 0$ така, що для кожного вектора $z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m$ існує елемент $x_z \in X$ такий, що $\|x_z\| \le C\|z\|_\infty$ і $P_j(x_z) = z_j$ для кожного $j \in \{1, \ldots, m\}$. Тому, зважаючи на рівності (5.11) і (5.12),

$$J(f)(z) = f(x_z) \tag{5.13}$$

для кожного $z \in \mathbb{C}^m$. Оскільки функція f є добре визначеною на просторі X, то із рівності (5.13) випливає, що функція $J(f)$ є добре визначеною на просторі $\mathbb{C}^m$. Тому ряд у правій частині рівності (5.12) є збіжним для кожного $z \in \mathbb{C}^m$. Відповідно, функція $J(f)$ є аналітичною на просторі $\mathbb{C}^m$, тобто $J(f) \in H(\mathbb{C}^m)$.

Доведемо, що відображення J є ізоморфізмом між алгебрами Фреше $\mathcal{A}(X)$ і $H(\mathbb{C}^m)$.

Зауважимо, що лінійність і мультиплікативність відображення J можна перевірити безпосередньо.

Доведемо ін'єктивність відображення J. Зауважимо, що для кожної функції $f \in \mathcal{A}(X)$ і для кожного елемента $x \in X$ виконується рівність

$$f(x) = J(f)\big(\big(P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m(x)\big)\big). \tag{5.14}$$

Якщо дві функції $f, g \in \mathcal{A}(X)$ є різними, то існує елемент $x_0 \in X$ такий, що $f(x_0) \neq g(x_0)$. Відповідно, згідно із рівністю (5.14),

$$J(f)\big(\big(P_1(x_0), P_2(x_0), \ldots, P_m(x_0)\big)\big) \neq J(g)\big(\big(P_1(x_0), P_2(x_0), \ldots, P_m(x_0)\big)\big).$$

Отже, $J(f) \neq J(g)$. Таким чином, відображення J є ін'єктивним.

Доведемо неперервність відображення J. Нехай $r > 0$. Для $f \in \mathcal{A}(X)$ маємо

$$\|J(f)\|_r = \sup_{\|z\|_\infty \leq r} |J(f)(z)|.$$

Враховуючи умову 3 і рівність (5.13), отримуємо

$$\sup_{\|z\|_\infty \leq r} |J(f)(z)| = \sup_{\|z\|_\infty \leq r} |f(x_z)| \leq \sup_{\|x\| \leq Cr} |f(x)| = \|f\|_{Cr}.$$

Таким чином, для кожного $r > 0$ і для кожної функції $f \in \mathcal{A}(X)$ маємо нерівність

$$\|J(f)\|_r \leq \|f\|_{Cr}.$$

Отже, відображення J є неперервним.

Доведемо сюр'єктивність відображення J. Спочатку встановимо деякий допоміжний факт. Нехай $r > 0$ і $f \in \mathcal{A}(X)$. Згідно із рівністю (5.14),

$$\|f\|_r = \sup_{\|x\| \leq r} |f(x)| = \sup_{\|x\| \leq r} \big|J(f)\big(\big(P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m(x)\big)\big)\big|.$$

Згідно із нерівністю (1.6),

$$|P_j(x)| \leq \|P_j\| \|x\|^{d_j}$$

для кожного $x \in X$ і $j \in \{1, \ldots, m\}$. Тому, за умови $\|x\| \leq r$, маємо

$$\big\|\big(P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m(x)\big)\big\|_\infty \leq \rho(r),$$

де

$$\rho(r) = \max_{1\leq j\leq m} \left(\|P_j\| r^{d_j}\right).$$

Тому

$$\sup_{\|x\|\leq r} \left| J(f)\big(\big(P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m(x)\big)\big)\right| \leq \sup_{\|z\|_\infty\leq \rho(r)} |J(f)(z)| = \|J(f)\|_{\rho(r)}.$$

Таким чином, для кожних $r > 0$ і $f \in \mathcal{A}(X)$ виконується нерівність

$$\|f\|_r \leq \|J(f)\|_{\rho(r)}. \tag{5.15}$$

Нехай $g \in H(\mathbb{C}^m)$. Побудуємо функцію $f \in \mathcal{A}(X)$ таку, що $J(f) = g$. Оскільки функція g належить алгебрі $H(\mathbb{C}^m)$, то її можна подати у вигляді збіжного на всьому просторі $\mathbb{C}^m$ ряду Тейлора:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1+\ldots+l_m=n \\ l_1,\ldots,l_m\in\mathbb{Z}_+}} \beta_{l_1,\ldots,l_m} z_1^{l_1} z_2^{l_2} \cdots z_m^{l_m},$$

де $z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m$ і $\beta_{l_1,\ldots,l_m} \in \mathbb{C}$. Для кожного $N \in \mathbb{N}$ визначимо поліном $g_N : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ рівністю

$$g_N(z) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{\substack{l_1+\ldots+l_m=n \\ l_1,\ldots,l_m\in\mathbb{Z}_+}} \beta_{l_1,\ldots,l_m} z_1^{l_1} z_2^{l_2} \cdots z_m^{l_m},$$

де $z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m$, а також, визначимо поліном $f_N : X \to \mathbb{C}$ рівністю

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{\substack{l_1+\ldots+l_m=n \\ l_1,\ldots,l_m\in\mathbb{Z}_+}} \beta_{l_1,\ldots,l_m} P_1^{l_1}(x) P_2^{l_2}(x) \cdots P_m^{l_m}(x),$$

де $x \in X$. Зауважимо, що $f_N \in \mathcal{A}(X)$ і виконується рівність $J(f_N) = g_N$ для кожного $N \in \mathbb{N}$. Також зауважимо, що послідовність $\{g_N\}_{N=1}^{\infty}$ збігається до функції g відносно топології алгебри Фреше $H(\mathbb{C}^m)$. Згідно із нерівністю (5.15), для кожних $r > 0$, $j, N \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\|f_{N+j} - f_N\|_r \leq \|g_{N+j} - g_N\|_{\rho(r)},$$

тому із фундаментальності послідовності $\{g_N\}_{N=1}^{\infty}$ випливає фундаментальність послідовності $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$. Оскільки алгебра $\mathcal{A}(X)$ — повна, то послідовність $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ є збіжною до деякої функції $f \in \mathcal{A}(X)$. За неперервністю відображення J, отримуємо рівність

$$J(f) = \lim_{N\to\infty} J(f_N) = \lim_{N\to\infty} g_N = g.$$

Отже, відображення J є сюр'єктивним.

Таким чином, відображення J є лінійним, мультиплікативним, бієктивним і неперервним. Неперервність оберненого відображення J^{-1} випливає із нерівності (5.15). Отже, відображення J є ізоморфізмом.

Опишемо спектр $\mathcal{M}(\mathcal{A}(X))$ алгебри Фреше $\mathcal{A}(X)$. Нагадаємо, що функціоналом обчислення значення в точці $x \in X$ називають відображення $\delta_x : \mathcal{A}(X) \to \mathbb{C}$, визначене рівністю $\delta_x(f) = f(x)$, де $f \in \mathcal{A}(X)$. Зауважимо, що $\delta_x \in \mathcal{M}(\mathcal{A}(X))$ для кожного $x \in X$. Покажемо, що кожен характер алгебри Фреше $\mathcal{A}(X)$ є функціоналом обчислення значення в деякій точці простору X. Нехай $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A}(X))$. Нехай

$$z = \big(\varphi(P_1), \varphi(P_2), \ldots, \varphi(P_m)\big).$$

Згідно із умовою теореми, існує елемент $x_z \in X$ такий, що $P_j(x_z) = \varphi(P_j)$ для кожного $j \in \{1, \ldots, m\}$. Розглянемо дію характерів φ і δ_{x_z} на довільну функцію $f \in \mathcal{A}(X)$. Функцію f можна подати у вигляді (5.11). Тоді

$$\delta_{x_z}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{d_1k_1+\ldots+d_mk_m=n\\ k_1,\ldots,k_m\in\mathbb{Z}_+}} \alpha^{(n)}_{k_1,\ldots,k_m} \big(P_1(x_z)\big)^{k_1} \big(P_2(x_z)\big)^{k_2} \cdots \big(P_m(x_z)\big)^{k_m} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{d_1k_1+\ldots+d_mk_m=n\\ k_1,\ldots,k_m\in\mathbb{Z}_+}} \alpha^{(n)}_{k_1,\ldots,k_m} \big(\varphi(P_1)\big)^{k_1} \big(\varphi(P_2))\big)^{k_2} \cdots \big(\varphi(P_m)\big)^{k_m}.$$

З іншого боку, внаслідок неперервності, лінійності і мультиплікативності характера φ, маємо

$$\varphi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{d_1k_1+\ldots+d_mk_m=n\\ k_1,\ldots,k_m\in\mathbb{Z}_+}} \alpha^{(n)}_{k_1,\ldots,k_m} \big(\varphi(P_1)\big)^{k_1} \big(\varphi(P_2))\big)^{k_2} \cdots \big(\varphi(P_m)\big)^{k_m}.$$

Отже, $\varphi(f) = \delta_{x_z}(f)$ для кожної функції $f \in \mathcal{A}(X)$, тобто $\varphi = \delta_{x_z}$. Таким чином, спектр $\mathcal{M}(\mathcal{A}(X))$ є множиною усіх функціоналів обчислення значень у точках простору X. Теорему доведено. □

Використаємо доведений результат для випадку, коли $\mathcal{A}(X)$ — це алгебра Фреше $H_{bs}((L_p[0,1])^n)$.

Теорема 5.4. *Алгебра Фреше $H_{bs}((L_p[0,1])^n)$ ізоморфна із алгеброю Фреше $H(\mathbb{C}^m)$, де m — це потужність множини мультиіндексів*

$$M = \big\{k \in \mathbb{Z}_+^n : \ 1 \le |k| \le \lfloor p \rfloor \big\}.$$

Спектр алгебри Фреше $H_{bs}((L_p[0,1])^n)$ збігається із множиною усіх функціоналів обчислення значень в точках простору $(L_p[0,1])^n$.

Доведення. Нехай $X = (L_p[0,1])^n$, $\mathcal{A}(X) = H_{bs}((L_p[0,1])^n)$ і

$$\Gamma = \{R_{k,[0,1]} : \ k \in M\}.$$

Перевіримо виконання умов теореми 5.3. Для кожного мультиіндексу $k \in M$, згідно із теоремою 5.1, відображення $R_{k,[0,1]}$ є неперервним $|k|$-однорідним поліномом. Із наслідку 5.1 випливає, що множина поліномів Γ є алгебраїчно незалежною. Отже, умови 1 і 2 виконано.

Доведемо виконання умови 3. Із теореми 3.3 випливає, що для множини M існують числа $l \in \mathbb{N}$ і $\rho_M > 0$ такі, що для кожного набору комплексних чисел $\xi = (\xi_k)_{k \in M}$, заіндексованого елементами множини M, для якого $\|\xi\|_\infty < 1$, існує послідовність $y_\xi \in c_{00}^{(2^l)}(\mathbb{C}^n)$ така, що $\|y_\xi\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)} < \rho_M$ і $H_k^{(2^l)}(y_\xi) = \xi_k$ для кожного $k \in M$, де поліноми $H_k^{(2^l)}$ визначено рівністю (5.4).

Нехай $z = (z_k)_{k \in M}$ — довільний набір комплексних чисел, заіндексований елементами множини M. Розглянемо випадок $\|z\|_\infty > 0$. Нехай

$$a = 2^{l+1} \|z\|_\infty.$$

Нехай

$$\xi = \left(\frac{2^l z_k}{a^{|k|}} \right)_{k \in M}.$$

Тоді

$$\|\xi\|_\infty = \max_{k\in M}\left|\frac{2^l z_k}{a^{|k|}}\right| \le \max_{k\in M}\left|\frac{2^l z_k}{a}\right| = \frac{2^l\|z\|_\infty}{a} = \frac{1}{2} < 1.$$

Тому існує послідовність $y_\xi \in c_{00}^{(2^l)}(\mathbb{C}^n)$ така, що $\|y_\xi\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)} < \rho_M$ і

$$H_k^{(2^l)}(y_\xi) = \frac{2^l z_k}{a^{|k|}} \tag{5.16}$$

для кожного $k \in M$. Нехай

$$x_z = J_{2^l}\big(ay_\xi\big),$$

де відображення J_{2^l} визначено рівністю (5.3). Згідно із лемою 5.2, враховуючи нерівність $\|y_\xi\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)} < \rho_M$, маємо

$$\|x_z\|_{p,n,[0,1]} = \frac{1}{2^{l/p}}\|ay_\xi\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)} < \frac{a\rho_M}{2^{l/p}} = \frac{2^{l+1}\rho_M}{2^{l/p}}\|z\|_\infty.$$

Таким чином,

$$\|x_z\|_{p,n,[0,1]} \le C\|z\|_\infty,$$

де $C = \frac{2^{l+1}\rho_M}{2^{l/p}}$. При цьому, стала C не залежить від z. Згідно із лемою 5.3, враховуючи рівність (5.16), а також, взявши до уваги $|k|$-однорідність полінома $H_k^{(2^l)}$, отримуємо рівність

$$R_{k,[0,1]}(x_\xi) = \frac{1}{2^l}H_k^{(2^l)}(ay_\xi) = \frac{1}{2^l}a^{|k|}H_k^{(2^l)}(y_\xi) = \frac{1}{2^l}a^{|k|}\frac{2^l z_k}{a^{|k|}} = z_k$$

для кожного $k \in M$. Залишилося розглянути випадок $\|z\|_\infty = 0$. У цьому випадку покладемо $x_z \equiv 0$. Таким чином, умова 3 виконана.

Як було зауважено вище, алгебра $H_{bs}((L_p[0,1])^n)$ є замкненою підалгеброю алгебри $H_{bs}((L_p[0,1])^n)$.

Кожну функцію $f \in H_{bs}((L_p[0,1])^n)$ можна подати у вигляді її ряду Тейлора із неперервних однорідних поліномів, які, у свою чергу, як наслідок інтегральної формули Коші (1.13) і симетричності функції f, теж є симетричними. Тому, згідно із теоремою 5.2, N-тий член ряду Тейлора функції f, де $N \in \mathbb{N}$, можна єдиним чином подати у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів $R_{k,[0,1]}$, де мультиіндекси $k \in \mathbb{Z}_+^n$ такі, що виконується нерівність $1 \leq |k| \leq \min\{\lfloor p \rfloor, N\}$. Оскільки кожен такий мультиіндекс k є елементом множини M, то кожен відповідний поліном $R_{k,[0,1]}$ є елементом множини Γ. Таким чином, для алгебри Фреше $H_{bs}((L_p[0,1])^n)$ виконано всі умови теореми 5.3. Отже, згідно із теоремою 5.3, алгебра Фреше $H_{bs}((L_p[0,1])^n)$ ізоморфна із алгеброю Фреше $H(\mathbb{C}^m)$, де m — це потужність множини мультиіндексів M і спектр алгебри Фреше $H_{bs}((L_p[0,1])^n)$ збігається із множиною усіх функціоналів обчислення значень в точках простору $(L_p[0,1])^n$. Теорему доведено. $\square$

5.2. Симетричні аналітичні функції на декартовому степені комплексного банахового простору інтегровних за Лебегом у степені p, де $1 \le p < \infty$, функцій на півосі

В даному підрозділі буде показано, що у випадку $p \notin \mathbb{N}$ кожен комплекснозначний неперервний симетричний поліном на декартовому степені комплексного банахового простору $L_p[0,+\infty)$ всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом у степені p функцій на множині $[0,+\infty)$ обов'язково є сталим відображенням. У випадку $p \in \mathbb{N}$ буде побудовано скінченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому степені простору $L_p[0,+\infty)$ і буде показано, що алгебра Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій на цьому декартовому степені ізоморфна до алгебри Фреше $H(\mathbb{C}^m)$ всіх комплекснозначних аналітичних функцій на просторі $\mathbb{C}^m$, де m — це потужність вищезгаданого алгебраїчного базису.

Нехай $p \in [1,+\infty)$ і $n \in \mathbb{N}$. Нехай Ω — вимірна за Лебегом підмножина множини $\mathbb{R}$ з додатною мірою. Нехай $L_p(\Omega) := L_p^{(\mathbb{C})}(\Omega)$ — комплексний банахів простір вимірних за Лебегом функцій $y : \Omega \to \mathbb{C}$ для яких степінь p абсолютного значення є інтегровним за Лебегом (див. приклад 1.2). Також введемо спрощені позначення $L_p[0,+\infty) := L_p([0,+\infty))$ і $L_p[a,b] := L_p([a,b])$ для відрізка $[a,b]$. Нехай $(L_p(\Omega))^n$ — це n-тий декартів степінь простору $L_p(\Omega)$ з нормою

$$\|y\|_{p,n,\Omega} = \left(\sum_{s=1}^{n} \int_{\Omega} |y_s(t)|^p \, dt\right)^{1/p},$$

де $y = (y_1, \ldots, y_n) \in (L_p(\Omega))^n$.

Згідно із означенням 1.18, функцію $f : (L_p(\Omega))^n \to \mathbb{C}$ називають симетричною, якщо $f((y_1 \circ \sigma, \ldots, y_n \circ \sigma)) = f((y_1, \ldots, y_n))$ для кожного елемента $(y_1, \ldots, y_n) \in (L_p(\Omega))^n$ і для кожної бієкції $\sigma \in \Xi_\Omega$, де множина Ξ_Ω визначена на с. 63.

В даному підрозділі побудовано алгебраїчний базис алгебри всіх симетричних неперервних комплекснозначних поліномів і описано спектр алгебри Фреше всіх цілих симетричних комплекснозначних функцій обмеженого типу на просторі $(L_p[0,+\infty))^n$.

Якщо $p \in \mathbb{N}$, то для кожного мультиіндексу $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ такого, що $|k| = p$, визначимо відображення $R_{k,[0,+\infty)} : (L_p[0,+\infty))^n \to \mathbb{C}$ формулою

$$R_{k,[0,+\infty)}(y) = \int_{[0,+\infty)} \prod_{\substack{s=1 \\ k_s>0}}^{n} (y_s(t))^{k_s}\, dt,$$

де $y = (y_1, \ldots, y_n) \in (L_p[0,+\infty))^n$.

Для кожного мультиіндексу $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ такого, що $1 \leq |k| \leq \lfloor p \rfloor$, де $|k| = k_1 + \ldots + k_n$, і для кожного відрізка $[a,b]$, визначимо відображення $R_{k,[a,b]} : (L_p[a,b])^n \to \mathbb{C}$ формулою

$$R_{k,[a,b]}(y) = \int_{[a,b]} \prod_{\substack{s=1 \\ k_s>0}}^{n} (y_s(t))^{k_s}\, dt,$$

де $y = (y_1, \ldots, y_n) \in (L_p[a,b])^n$.

Зауважимо, що відображення $R_{k,[a,b]}$ і $R_{k,[0,+\infty)}$ є $|k|$-однорідними симетричними поліномами. Неперервність цих поліномів можна довести аналогічно до доведення теореми 5.1.

Для кожного $m \in \mathbb{N}$ визначимо відображення $v_{1,m} : (L_p[0,1])^n \to (L_p[0,m])^n$ наступним чином. У випадку $m = 1$, нехай $v_{1,m}(x) = x$ для кожного елемента $x \in (L_p[0,1])^n$. У випадку $m \geq 2$, нехай

$$v_{1,m}(x)(t) = \begin{cases} x(t), & \text{якщо } t \in [0,1] \\ 0, & \text{якщо } t \in (1,m] \end{cases}$$

для кожного елемента $x \in (L_p[0,1])^n$ і для кожного $t \in [0,m]$. Аналогічним чином, для кожного $m \in \mathbb{N}$, визначимо відображення $v_{m,\infty} : (L_p[0,m])^n \to (L_p[0,+\infty))^n$ формулою

$$v_{m,\infty}(x)(t) = \begin{cases} x(t), & \text{якщо } t \in [0,m] \\ 0, & \text{якщо } t \in (m,+\infty), \end{cases} \tag{5.17}$$

де $x \in (L_p[0,m])^n$ і $t \in [0,+\infty)$. Зауважимо, що відображення $v_{1,m}$ і $v_{m,\infty}$ є ізометричними і лінійними.

Лема 5.6. *Нехай* $m, N \in \mathbb{N}$ *і* $P : (L_p[0,+\infty))^n \to \mathbb{C}$ *— це неперервний симетричний* N*-однорідний поліном. Тоді відображення* $P \circ v_{m,\infty}$ *є неперервним симетричним* N*-однорідним поліномом на просторі* $(L_p[0,m])^n$.

Доведення. Маємо наступну діаграму:

$$\begin{tikzcd}(L_p[0,m])^n \arrow[r, "v_{m,\infty}"] & (L_p[0,+\infty))^n \arrow[r, "P"] & \mathbb{C}.\end{tikzcd}$$

Оскільки відображення $v_{m,\infty}$ є лінійним та ізометричним, а поліном P є неперервним і N-однорідним, то відображення $P \circ v_{m,\infty}$ є неперервним N-однорідним поліномом. Покажемо, що відображення $P \circ v_{m,\infty}$ є симетричним. Нехай $x \in (L_p[0,m])^n$ і $\sigma \in \Xi_{[0,m]}$. Визначимо відображення $\tilde{\sigma} : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ формулою

$$\tilde{\sigma}(t) = \begin{cases} \sigma(t), & \text{якщо } t \in [0,m] \\ t, & \text{якщо } t \in (m,+\infty). \end{cases}$$

Оскільки $\sigma \in \Xi_{[0,m]}$, то $\tilde{\sigma} \in \Xi_{[0,+\infty)}$. Покажемо, що $v_{m,\infty}(x \circ \sigma) = v_{m,\infty}(x) \circ \tilde{\sigma}$. Оскільки $\tilde{\sigma}(t) \in [0,m]$ тоді і тільки тоді, коли $t \in [0,m]$, і $\tilde{\sigma}(t) \in (m,+\infty)$ тоді і тільки тоді, коли $t \in (m,+\infty)$, то

$$\begin{aligned}(v_{m,\infty}(x) \circ \tilde{\sigma})(t) &= v_{m,\infty}(x)(\tilde{\sigma}(t)) = \\ &= \begin{cases} x(\tilde{\sigma}(t)), & \text{якщо } \tilde{\sigma}(t) \in [0,m] \\ 0, & \text{якщо } \tilde{\sigma}(t) \in (m,+\infty) \end{cases} = \\ &= \begin{cases} x(\tilde{\sigma}(t)), & \text{якщо } t \in [0,m] \\ 0, & \text{якщо } t \in (m,+\infty) \end{cases} = \\ &= \begin{cases} x(\sigma(t)), & \text{якщо } t \in [0,m] \\ 0, & \text{якщо } t \in (m,+\infty) \end{cases} = v_{m,\infty}(x \circ \sigma)(t).\end{aligned}$$

Отже, $v_{m,\infty}(x \circ \sigma) = v_{m,\infty}(x) \circ \tilde{\sigma}$. Тому

$$(P \circ v_{m,\infty})(x \circ \sigma) = P(v_{m,\infty}(x) \circ \tilde{\sigma}).$$

Оскільки поліном P є симетричним і $\tilde{\sigma} \in \Xi_{[0,+\infty)}$, то

$$P(v_{m,\infty}(x) \circ \tilde{\sigma}) = P(v_{m,\infty}(x)).$$

Тому

$$(P \circ v_{m,\infty})(x \circ \sigma) = (P \circ v_{m,\infty})(x).$$

Отже, відображення $P \circ v_{m,\infty}$ є симетричним. Лему доведено. □

Для $m \in \mathbb{N}$, визначимо відображення $I_m : (L_p[0,1])^n \to (L_p[0,m])^n$ формулою

$$I_m(x)(t) = x(t/m),$$

де $x \in (L_p[0,1])^n$ і $t \in [0,m]$. Зауважимо, що відображення I_m є лінійною бієкцією. Покажемо, що відображення I_m є неперервним. Для елемента $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (L_p[0,1])^n$ маємо

$$\begin{aligned}\|I_m(x)\|_{p,n,[0,m]} &= \left(\int_{[0,m]} |x_1(t/m)|^p \, dt + \ldots + \int_{[0,m]} |x_n(t/m)|^p \, dt\right)^{1/p} = \\ &= \left(m \int_{[0,1]} |x_1(\tau)|^p \, d\tau + \ldots + m \int_{[0,1]} |x_n(\tau)|^p \, d\tau\right)^{1/p} = \\ &= m^{1/p} \|x\|_{p,n,[0,1]}.\end{aligned}$$

Отже, відображення I_m є неперервним. Таким чином, відображення I_m є ізоморфізмом.

Лема 5.7. *Нехай $m, N \in \mathbb{N}$ і $P : (L_p[0,+\infty))^n \to \mathbb{C}$ — це неперервний симетричний N-однорідний поліном. Тоді відображення $P \circ v_{m,\infty} \circ I_m$ є неперервним симетричним N-однорідним поліномом на просторі $(L_p[0,1])^n$.*

Доведення. Маємо наступну діаграму:

$$\begin{tikzcd}(L_p[0,1])^n \arrow[r, "I_m"] & (L_p[0,m])^n \arrow[r, "v_{m,\infty}"] & (L_p[0,+\infty))^n \arrow[r, "P"] & \mathbb{C}.\end{tikzcd}$$

Згідно із лемою 5.6, відображення $P \circ v_{m,\infty}$ є неперервним симетричним N-однорідним поліномом на просторі $(L_p[0,m])^n$. Оскільки відображення I_m є ізоморфізмом і відображення $P \circ v_{m,\infty}$ є неперервним N-однорідним поліномом, то відображення $P \circ v_{m,\infty} \circ I_m$ є неперервним N-однорідним поліномом. Покажемо, що відображення $P \circ v_{m,\infty} \circ I_m$ є симетричним. Нехай $x \in (L_p[0,1])^n$ і $\sigma \in \Xi_{[0,1]}$. Визначимо відображення $\hat{\sigma} : [0,m] \to [0,m]$

формулою

$$\hat{\sigma}(t) = m\sigma(t/m).$$

Зауважимо, що $\hat{\sigma} \in \Xi_{[0,m]}$. Покажемо, що $I_m(x \circ \sigma) = I_m(x) \circ \hat{\sigma}$. Зауважимо, що для кожного $t \in [0, m]$

$$(I_m(x) \circ \hat{\sigma})(t) = I_m(x)(\hat{\sigma}(t)) = x(\hat{\sigma}(t)/m) = x(\sigma(t/m)) = (x \circ \sigma)(t/m) = \\ = I_m(x \circ \sigma)(t).$$

Отже, $I_m(x \circ \sigma) = I_m(x) \circ \hat{\sigma}$. Тому

$$(P \circ v_{m,\infty} \circ I_m)(x \circ \sigma) = (P \circ v_{m,\infty})(I_m(x \circ \sigma)) = (P \circ v_{m,\infty})(I_m(x) \circ \hat{\sigma}).$$

Оскільки відображення $P \circ v_{m,\infty}$ є симетричним і $\hat{\sigma} \in \Xi_{[0,m]}$, то

$$(P \circ v_{m,\infty})(I_m(x) \circ \hat{\sigma}) = (P \circ v_{m,\infty})(I_m(x)).$$

Тому

$$(P \circ v_{m,\infty} \circ I_m)(x \circ \sigma) = (P \circ v_{m,\infty} \circ I_m)(x).$$

Отже, відображення $P \circ v_{m,\infty} \circ I_m$ є симетричним. Лему доведено. ☐

Для кожної непорожньої скінченної множини $M \subset \mathbb{Z}_+^n$ і для кожного відображення $l : M \to \mathbb{Z}_+$, нехай

$$\varkappa(l, M) = \sum_{k \in M} |k| l(k).$$

Лема 5.8. *Нехай* $P : (L_p[0, +\infty))^n \to \mathbb{C}$ *— це неперервний симетричний* N*-однорідний поліном, де* $N \in \mathbb{N}$*. Тоді для кожного* $m \in \mathbb{N}$*, поліном* $P \circ v_{m,\infty}$ *можна единим чином подати у вигляді*

$$P \circ v_{m,\infty} = \sum_{\substack{l : M_1 \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l, M_1) = N}} \alpha_l \prod_{\substack{k \in M_1 \\ l(k) > 0}} R_{k,[0,m]}^{l(k)},$$

де

$$M_1 = \left\{ k \in \mathbb{Z}_+^n : \ 1 \le |k| \le \min\{\lfloor p \rfloor, N\} \right\} \tag{5.18}$$

і коефіцієнти $\alpha_l \in \mathbb{C}$ *не залежать від* m.

Доведення. Згідно із лемою 5.6, відображення $P \circ v_{1,\infty}$ є неперервним симетричним N-однорідним поліномом на просторі $(L_p[0,1])^n$. Тому, згідно із теоремою 5.2, поліном $P \circ v_{1,\infty}$ можна єдиним чином подати як алгебраїчну комбінацію поліномів $R_{k,[0,1]}$, де мультиіндекси $k \in \mathbb{Z}_+^n$ такі, що $1 \le |k| \le \min\{\lfloor p \rfloor, N\}$. Іншими словами, поліном $P \circ v_{1,\infty}$ можна єдиним чином подати у вигляді

$$P \circ v_{1,\infty} = \sum_{\substack{l: M_1 \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l, M_1) = N}} \alpha_l \prod_{\substack{k \in M_1 \\ l(k) > 0}} R_{k,[0,1]}^{l(k)}, \tag{5.19}$$

де $\alpha_l \in \mathbb{C}$ і множина M_1 визначена формулою (5.18).

Нехай $m \in \mathbb{N}$. Розглянемо наступну діаграму:

$$\begin{tikzcd}
 & (L_p[0,1])^n \arrow[d, "v_{1,m}"'] \arrow[dr, "v_{1,\infty}"] & & \\
(L_p[0,1])^n \arrow[r, "I_m"'] & (L_p[0,m])^n \arrow[r, "v_{m,\infty}"'] & (L_p[0,+\infty))^n \arrow[r, "P"'] & \mathbb{C}.
\end{tikzcd}$$

Зауважимо, що $v_{m,\infty} \circ v_{1,m} = v_{1,\infty}$. Згідно із лемою 5.7, відображення $P \circ v_{m,\infty} \circ I_m$ є неперервним симетричним N-однорідним поліномом на просторі $(L_p[0,1])^n$. Тому, згідно із теоремою 5.2, поліном $P \circ v_{m,\infty} \circ I_m$ можна єдиним чином подати як алгебраїчну комбінацію поліномів $R_{k,[0,1]}$, де мультиіндекси $k \in \mathbb{Z}_+^n$ такі, що $1 \le |k| \le \min\{\lfloor p \rfloor, N\}$. Іншими словами, поліном $P \circ v_{m,\infty} \circ I_m$ можна єдиним чином подати у вигляді

$$P \circ v_{m,\infty} \circ I_m = \sum_{\substack{l: M_1 \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l, M_1) = N}} \beta_l^{(m)} \prod_{\substack{k \in M_1 \\ l(k) > 0}} R_{k,[0,1]}^{l(k)}, \tag{5.20}$$

де $\beta_l^{(m)} \in \mathbb{C}$ і множина M_1 визначена формулою (5.18). Оскільки відображення I_m є ізоморфізмом, то, згідно із рівністю (5.20),

$$P \circ v_{m,\infty} = \sum_{\substack{l: M_1 \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l, M_1) = N}} \beta_l^{(m)} \prod_{\substack{k \in M_1 \\ l(k) > 0}} \left(R_{k,[0,1]} \circ I_m^{-1}\right)^{l(k)}. \tag{5.21}$$

Для елемента $x = (x_1, \dots, x_n) \in (L_p[0, m])^n$ і для мультиіндексу $k \in M_1$ маємо

$$\big(R_{k,[0,1]} \circ I_m^{-1}\big)(x) = \int_{[0,1]} \prod_{\substack{s=1\\ k_s>0}}^{n} (x_s(mt))^{k_s}\, dt = \frac{1}{m} \int_{[0,m]} \prod_{\substack{s=1\\ k_s>0}}^{n} (x_s(\tau))^{k_s}\, d\tau = $$
$$= \frac{1}{m} R_{k,[0,m]}(x).$$

Отже, $R_{k,[0,1]} \circ I_m^{-1} = \frac{1}{m} R_{k,[0,m]}$. Тому, згідно із рівністю (5.21),

$$P \circ v_{m,\infty} = \sum_{\substack{l:M_1\to\mathbb{Z}_+\\ \varkappa(l,M_1)=N}} \beta_l^{(m)} \prod_{\substack{k\in M_1\\ l(k)>0}} \left(\frac{1}{m} R_{k,[0,m]}\right)^{l(k)} =$$
$$= \sum_{\substack{l:M_1\to\mathbb{Z}_+\\ \varkappa(l,M_1)=N}} \frac{\beta_l^{(m)}}{m^{\sum_{k\in M_1} l(k)}} \prod_{\substack{k\in M_1\\ l(k)>0}} R_{k,[0,m]}^{l(k)}. \quad (5.22)$$

Згідно із рівністю (5.22),

$$P \circ v_{m,\infty} \circ v_{1,m} = \sum_{\substack{l:M_1\to\mathbb{Z}_+\\ \varkappa(l,M_1)=N}} \frac{\beta_l^{(m)}}{m^{\sum_{k\in M_1} l(k)}} \prod_{\substack{k\in M_1\\ l(k)>0}} \big(R_{k,[0,m]} \circ v_{1,m}\big)^{l(k)}.$$

Враховуючи, що $v_{m,\infty} \circ v_{1,m} = v_{1,\infty}$ і $R_{k,[0,m]} \circ v_{1,m} = R_{k,[0,1]}$, маємо

$$P \circ v_{1,\infty} = \sum_{\substack{l:M_1\to\mathbb{Z}_+\\ \varkappa(l,M_1)=N}} \frac{\beta_l^{(m)}}{m^{\sum_{k\in M_1} l(k)}} \prod_{\substack{k\in M_1\\ l(k)>0}} R_{k,[0,1]}^{l(k)}.$$

Із єдиності зображення (5.19) випливає, що

$$\alpha_l = \frac{\beta_l^{(m)}}{m^{\sum_{k\in M_1} l(k)}}$$

для кожного відображення $l : M_1 \to \mathbb{Z}_+$ такого, що $\varkappa(l, M_1) = N$. Тому, згідно із рівністю (5.22),

$$P \circ v_{m,\infty} = \sum_{\substack{l:M_1\to\mathbb{Z}_+\\ \varkappa(l,M_1)=N}} \alpha_l \prod_{\substack{k\in M_1\\ l(k)>0}} R_{k,[0,m]}^{l(k)}.$$

Лему доведено. □

Теорема 5.5. *Нехай* $N \in \mathbb{N}$. *Нехай* $P : (L_p[0, +\infty))^n \to \mathbb{C}$ *— це симетричний неперервний* N*-однорідний поліном. Якщо* $p \notin \mathbb{N}$ *або* $N < p$, *то* $P \equiv 0$. *Якщо* $p \in \mathbb{N}$ *і* $N \geq p$, *то* P *можна єдиним чином подати як алгебраїчну комбінацію поліномів* $R_{k,[0,+\infty)}$, *де мультиіндекси* $k \in \mathbb{Z}_+^n$ *такі, що* $|k| = p$.

Доведення. Згідно із лемою 5.8, для кожного $m \in \mathbb{N}$, поліном $P \circ v_{m,\infty}$ можна єдиним чином подати у вигляді

$$P \circ v_{m,\infty} = \sum_{\substack{l:M_1 \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l,M_1)=N}} \alpha_l \prod_{\substack{k \in M_1 \\ l(k)>0}} R_{k,[0,m]}^{l(k)}, \tag{5.23}$$

де множина M_1 визначена формулою (5.18) і коефіцієнти $\alpha_l \in \mathbb{C}$ не залежать від m.

Доведемо наступні факти:

(i) Якщо $1 \leq N < \lceil p \rceil$, то $\alpha_l = 0$ для кожного відображення $l : M_1 \to \mathbb{Z}_+$ такого, що $\varkappa(l, M_1) = N$.

(ii) Якщо $p \notin \mathbb{N}$, то $\alpha_l = 0$ для кожного відображення $l : M_1 \to \mathbb{Z}_+$ такого, що $\varkappa(l, M_1) = N$.

(iii) Якщо $p \in \mathbb{N}$ і $p > 1$, то $\alpha_l = 0$ для кожного відображення $l : M_1 \to \mathbb{Z}_+$, для якого $\varkappa(l, M_1) = N$ і існує $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $1 \leq |k| < p$, таке, що $l(k) \neq 0$.

Нехай

$$M = \big\{k \in \mathbb{Z}_+^n : \ 1 \leq |k| \leq \max\{\lceil p \rceil, N\}\big\}.$$

Згідно із наслідком 3.4, існує число $m_0 \in \mathbb{N}$ таке, що поліноми $\{H_k^{(m_0)} : \ k \in M\}$, визначені формулою (5.4), є алгебраїчно незалежними на просторі $c_{00}^{(m_0)}(\mathbb{C}^n)$. Розглянемо наступну діаграму:

$$\begin{tikzcd}
c_{00}^{(m_0)}(\mathbb{C}^n) \arrow[r, "J'"] \arrow[d, "u"'] & (L_p[0, m_0])^n \arrow[d, "v_{m_0,\infty}"] & \\
\ell_p(\mathbb{C}^n) \arrow[r, "J"'] & (L_p[0, +\infty))^n \arrow[r, "P"'] & \mathbb{C},
\end{tikzcd} \tag{5.24}$$

де відображення u, J' і J визначені наступним чином. Відображення u є вкладенням простору $c_{00}^{(m_0)}(\mathbb{C}^n)$ в простір $\ell_p(\mathbb{C}^n)$. Відображення J' визначимо формулою

$$J'(a) = \Big(\sum_{j=1}^{m_0} a_j^{(1)} \mathbf{1}_{[j-1,j]}, \dots, \sum_{j=1}^{m_0} a_j^{(n)} \mathbf{1}_{[j-1,j]}\Big),$$

де

$$a = \big((a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(n)}), \dots, (a_{m_0}^{(1)}, \dots, a_{m_0}^{(n)}), \bar{0}, \dots\big) \in c_{00}^{(m_0)}(\mathbb{C}^n)$$

і

$$\mathbf{1}_{[j-1,j]}(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t \in [j-1, j] \\ 0, & \text{якщо } t \in [0, +\infty) \setminus [j-1, j] \end{cases}$$

для кожного $j \in \mathbb{N}$. Аналогічним чином, відображення J визначимо формулою

$$J(a) = \Big(\sum_{j=1}^{+\infty} a_j^{(1)} \mathbf{1}_{[j-1,j]}, \dots, \sum_{j=1}^{+\infty} a_j^{(n)} \mathbf{1}_{[j-1,j]}\Big),$$

де

$$a = \big((a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(n)}), (a_2^{(1)}, \dots, a_2^{(n)}), \dots\big) \in \ell_p(\mathbb{C}^n).$$

Зауважимо, що $v_{m_0,\infty} \circ J' = J \circ u$. Отже, діаграма (5.24) є комутативною. Зауважимо, що відображення u, J' і J є лінійними. Також зауважимо, що для кожної послідовності $a \in \ell_p(\mathbb{C}^n)$,

$$\|J(a)\|_{p,n,[0,+\infty)} = \Big(\sum_{s=1}^{n} \int_{[0,+\infty)} \sum_{j=1}^{+\infty} \big|a_j^{(s)}\big|^p \mathbf{1}_{[j-1,j]}(t)\, dt\Big)^{1/p} = \\ = \Big(\sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{+\infty} \big|a_j^{(s)}\big|^p\Big)^{1/p} = \|a\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}.$$

Отже, відображення J є ізометричним. Аналогічним чином, можна переконатися, що відображення J' є ізометричним.

Зауважимо, що для кожної послідовності $a \in c_{00}^{(m_0)}(\mathbb{C}^n)$ і для кожного мультиіндексу $k \in \mathbb{Z}_+^n$ такого, що $|k| \geq 1$,

$$\begin{aligned}(R_{k,[0,m_0]} \circ J')(a) &= \int_{[0,m_0]} \prod_{\substack{s=1\\ k_s>0}}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m_0} a_j^{(s)} \mathbf{1}_{[j-1,j]}(t) \Big)^{k_s} dt = \\ &= \int_{[0,m_0]} \sum_{j=1}^{m_0} \prod_{\substack{s=1\\ k_s>0}}^{n} \big(a_j^{(s)}\big)^{k_s} \mathbf{1}_{[j-1,j]}(t)\, dt = \\ &= \sum_{j=1}^{m_0} \prod_{\substack{s=1\\ k_s>0}}^{n} \big(a_j^{(s)}\big)^{k_s} = H_k^{(m_0)}(a),\end{aligned}$$

тобто, $R_{k,[0,m_0]} \circ J' = H_k^{(m_0)}$. Тому, згідно із рівністю (5.23),

$$P \circ v_{m_0,\infty} \circ J' = \sum_{\substack{l:M_1 \to \mathbb{Z}_+\\ \varkappa(l,M_1)=N}} \alpha_l \prod_{\substack{k \in M_1\\ l(k)>0}} \big(H_k^{(m_0)}\big)^{l(k)}. \tag{5.25}$$

Оскільки відображення P є неперервним N-однорідним поліномом і відображення J є неперервним і лінійним, то відображення $P \circ J$ є неперервним N-однорідним поліномом. Можна перевірити, що відображення $P \circ J$ є симетричним.

Розглянемо випадок $1 \leq N < \lceil p \rceil$. Згідно із теоремою 3.7, $P \circ J \equiv 0$. Тому $P \circ J \circ u \equiv 0$. Оскільки $J \circ u = v_{m_0,\infty} \circ J'$, то $P \circ v_{m_0,\infty} \circ J' \equiv 0$. Отже, згідно із рівністю (5.25),

$$\sum_{\substack{l:M_1 \to \mathbb{Z}_+\\ \varkappa(l,M_1)=N}} \alpha_l \prod_{\substack{k \in M_1\\ l(k)>0}} \big(H_k^{(m_0)}\big)^{l(k)} \equiv 0. \tag{5.26}$$

Оскільки $M_1 \subset M$ і поліноми $\{H_k^{(m_0)} : \ k \in M\}$ є алгебраїчно незалежними, то поліноми $\{H_k^{(m_0)} : \ k \in M_1\}$ є алгебраїчно незалежними. Тому, згідно із рівністю (5.26), $\alpha_l = 0$ для кожного відображення $l : M_1 \to \mathbb{Z}_+^n$ такого, що $\varkappa(l, M_1) = N$. Доведення факту (i) завершено.

Розглянемо випадок $N \geq \lceil p \rceil$ і $p > 1$. Згідно із теоремою 3.7, поліном $P \circ J$ можна єдиним чином подати у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів H_k, де $\lceil p \rceil \leq |k| \leq N$, тобто, поліном $P \circ J$ можна єдиним чином подати у вигляді

$$P \circ J = \sum_{\substack{r:M_2 \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(r,M_2)=N}} \gamma_r \prod_{\substack{k \in M_2 \\ r(k)>0}} (H_k)^{r(k)}, \tag{5.27}$$

де $\gamma_r \in \mathbb{C}$ і

$$M_2 = \big\{k \in \mathbb{Z}_+^n : \ \lceil p \rceil \le |k| \le N\big\}.$$

Згідно із рівністю (5.27), враховуючи, що $H_k \circ u = H_k^{(m_0)}$,

$$P \circ J \circ u = \sum_{\substack{r:M_2 \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(r,M_2)=N}} \gamma_r \prod_{\substack{k \in M_2 \\ r(k)>0}} \big(H_k^{(m_0)}\big)^{r(k)}. \tag{5.28}$$

Оскільки $p > 1$, то множина

$$M_1' := M \setminus M_2 = \big\{k \in \mathbb{Z}_+^n : \ 1 \le |k| < p\big\}$$

є непорожньою. Для кожного відображення $q : M \to \mathbb{Z}_+$ для якого виконується рівність $\varkappa(q, M) = N$, визначимо комплексні числа A_q і Γ_q наступним чином. Якщо $M = M_1$, то покладемо $A_q = \alpha_q$. Інакше, нехай

$$A_q = \begin{cases} \alpha_{q|_{M_1}}, & \text{якщо } q|_{M \setminus M_1} \equiv 0 \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Нехай

$$\Gamma_q = \begin{cases} \gamma_{q|_{M_2}}, & \text{якщо } q|_{M \setminus M_2} \equiv 0 \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Тоді рівності (5.25) і (5.28) можна переписати у вигляді

$$P \circ v_{m_0,\infty} \circ J' = \sum_{\substack{q:M \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(q,M)=N}} A_q \prod_{\substack{k \in M \\ q(k)>0}} \big(H_k^{(m_0)}\big)^{q(k)} \tag{5.29}$$

і

$$P \circ J \circ u = \sum_{\substack{q:M \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(q,M)=N}} \Gamma_q \prod_{\substack{k \in M \\ q(k)>0}} \big(H_k^{(m_0)}\big)^{q(k)} \tag{5.30}$$

відповідно. Оскільки $P \circ v_{m_0,\infty} \circ J' = P \circ J \circ u$, то, згідно із рівностями (5.29) і (5.30),

$$\sum_{\substack{q:M \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(q,M)=N}} (A_q - \Gamma_q) \prod_{\substack{k \in M \\ q(k)>0}} \big(H_k^{(m_0)}\big)^{q(k)} \equiv 0.$$

Оскільки поліноми $\{H_k^{(m_0)}:\ k \in M\}$ є алгебраїчно незалежними, то

$$A_q - \Gamma_q = 0 \tag{5.31}$$

для кожного відображення $q : M \to \mathbb{Z}_+$ такого, що $\varkappa(q, M) = N$.

Доведемо факт (ii). Нехай $p \notin \mathbb{N}$. Якщо $N < \lceil p \rceil$, то з факту (i) випливає факт (ii). Розглянемо випадок $N \geq \lceil p \rceil$. У цьому випадку, $M = M_1 \sqcup M_2$ і обидві множини M_1 і M_2 є непорожніми. Нехай відображення $l : M_1 \to \mathbb{Z}_+$ таке, що $\varkappa(l, M_1) = N$. Визначимо відображення $\hat{l} : M \to \mathbb{Z}_+$ формулою

$$\hat{l}(k) = \begin{cases} l(k), & \text{якщо } k \in M_1 \\ 0, & \text{якщо } k \in M_2. \end{cases}$$

Тоді $\varkappa(\hat{l}, M) = N$. Оскільки $\hat{l}|_{M\setminus M_1} \equiv 0$, то $A_{\hat{l}} = \alpha_l$. Оскільки $\varkappa(l, M_1) \neq 0$, то існує мультиіндекс $k_0 \in M_1$ такий, що $l(k_0) \neq 0$. Оскільки $\hat{l}(k_0) = l(k_0) \neq 0$ і $k_0 \in M_1 = M \setminus M_2$, то $\hat{l}|_{M\setminus M_2} \not\equiv 0$. Як наслідок, $\Gamma_{\hat{l}} = 0$. Згідно із рівністю (5.31), $A_{\hat{l}} = \Gamma_{\hat{l}}$, тобто, $\alpha_l = 0$. Доведення факту (ii) завершено.

Доведемо факт (iii). Нехай $p \in \mathbb{N}$ і $p > 1$. Якщо $N < p$, то із факту (i) випливає факт (iii). Розглянемо випадок $N \geq p$. У цьому випадку,

$$M_1 = \left\{k \in \mathbb{Z}_+^n :\ 1 \leq |k| \leq p\right\},$$

$$M_2 = \left\{k \in \mathbb{Z}_+^n :\ p \leq |k| \leq N\right\},$$

$$M = \left\{k \in \mathbb{Z}_+^n :\ 1 \leq |k| \leq N\right\}.$$

Нехай відображення $l : M_1 \to \mathbb{Z}_+$ таке, що $\varkappa(l, M_1) = N$ і існує мультиіндекс $k_0 \in \mathbb{Z}_+^n$, $1 \leq |k_0| < p$, для якого $l(k_0) \neq 0$. Оскільки $1 \leq |k_0| < p$, то $k_0 \in M \setminus M_2$. Розглянемо випадок $M_1 = M$. У цьому випадку $A_l = \alpha_l$ і $\Gamma_l = 0$, оскільки $l|_{M\setminus M_2} \not\equiv 0$. Тому, згідно із рівністю (5.31), $\alpha_l = 0$. Розглянемо випадок $M_1 \neq M$. Визначимо відображення $\hat{l} : M \to \mathbb{Z}_+$ формулою

$$\hat{l}(k) = \begin{cases} l(k), & \text{якщо } k \in M_1 \\ 0, & \text{якщо } k \in M \setminus M_1. \end{cases}$$

Тоді $\varkappa(\hat{l}, M) = N$. Оскільки $\hat{l}|_{M\setminus M_1} \equiv 0$, то $A_{\hat{l}} = \alpha_l$. Оскільки $\hat{l}(k_0) = l(k_0) \neq 0$ і $k_0 \in M \setminus M_2$, то $\hat{l}|_{M\setminus M_2} \not\equiv 0$ і, як наслідок, $\Gamma_{\hat{l}} = 0$. Тому, згідно із рівністю (5.31), $\alpha_l = 0$. Факт (iii) доведено.

Згідно із рівністю (5.23), враховуючи факти (i) — (iii), для кожного $m \in N$, якщо $p \notin \mathbb{N}$ або $N < p$, то $P \circ v_{m,\infty} \equiv 0$, і якщо $p \in \mathbb{N}$ і $N \geq p$, то

$$P \circ v_{m,\infty} = \sum_{\substack{w:M_0\to\mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(w,M_0)=N}} \alpha_{\tilde{w}} \prod_{\substack{k\in M_0 \\ w(k)>0}} R_{k,[0,m]}^{w(k)},$$

де

$$M_0 = \big\{k \in \mathbb{Z}_+^n : \ |k| = p\big\}$$

і відображення $\tilde{w} : M_1 \to \mathbb{Z}_+$ визначене формулою

$$\tilde{w}(k) = \begin{cases} w(k), & \text{якщо } k \in M_0 \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

для кожного відображення $w : M_0 \to \mathbb{Z}_+$.

Нехай $D = \bigcup_{m=1}^{\infty} v_{m,\infty}\big((L_p[0,m])^n\big)$. Зауважимо, що множина D є лінійним підпростором простору $(L_p[0,+\infty))^n$. Можна перевірити, що множина D є щільною в просторі $(L_p[0,+\infty))^n$.

Нехай $x \in D$. Тоді існує число $m \in \mathbb{N}$ таке, що $x \in v_{m,\infty}\big((L_p[0,m])^n\big)$. Як наслідок, існує елемент $y \in (L_p[0,m])^n$ такий, що $x = v_{m,\infty}(y)$. Тоді

$$(P\circ v_{m,\infty})(y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{w:M_0\to\mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(w,M_0)=N}} \alpha_{\tilde{w}} \prod_{\substack{k\in M_0 \\ w(k)>0}} \big(R_{k,[0,m]}(y)\big)^{w(k)}, & \text{якщо } p \in \mathbb{N} \text{ і } N \geq p \\ 0, & \text{якщо } p \notin \mathbb{N} \text{ або } N < p. \end{cases}$$

Оскільки $(P \circ v_{m,\infty})(y) = P(v_{m,\infty})(y) = P(x)$ і $R_{k,[0,m]}(y) = R_{k,[0,+\infty)}(x)$, то

$$P(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{w:M_0\to\mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(w,M_0)=N}} \alpha_{\tilde{w}} \prod_{\substack{k\in M_0 \\ w(k)>0}} \big(R_{k,[0,+\infty)}(x)\big)^{w(k)}, & \text{якщо } p \in \mathbb{N} \text{ і } N \geq p, \\ 0, & \text{якщо } p \notin \mathbb{N} \text{ або } N < p. \end{cases} \tag{5.32}$$

Оскільки поліноми P і $R_{k,[0,+\infty)}$, де $k \in M_0$, є неперервними на просторі $(L_p[0,+\infty))^n$ і рівність (5.32) виконується для кожного елемента x щільного підпростору D простору $(L_p[0,+\infty))^n$, то рівність (5.32) виконується для кожного елемента x простору $(L_p[0, +\infty))^n$. Оскільки коефіцієнти α_l у зображенні (5.23) є єдиними, то зображення (5.32) є єдиним. Отже, доведено, що якщо $p \notin \mathbb{N}$ або $N < p$, то $P \equiv 0$, інакше поліном P можна єдиним чином подати у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів $R_{k,[0,+\infty)}$, де мультиіндекси $k \in \mathbb{Z}_+^n$ такі, що $|k| = p$. □

Наслідок 5.2. *Нехай P — це симетричний неперервний поліном на просторі $(L_p[0, +\infty))^n$. Якщо $p \notin \mathbb{N}$, то поліном P є сталим відображенням. Якщо $p \in \mathbb{N}$, то поліном P можна єдиним чином подати як алгебраїчну комбінацію поліномів $R_{k,[0,+\infty)}$, де мультиіндекси $k \in \mathbb{Z}_+^n$ такі, що $|k| = p$.*

Доведення. Нехай $P = P_0 + P_1 + \ldots + P_N$, де $P_0 \in \mathbb{C}$ і P_j є j-однорідним поліномом для кожного $j \in \{1, \ldots, N\}$. Згідно із інтегральною формулою Коші (1.13), оскільки $P_0+P_1+\ldots+P_N$ — це ряд Тейлора полінома P у точці 0, то кожен поліном P_j є симетричним і неперервним, де $j \in \{1, \ldots, N\}$.

Якщо $p \notin \mathbb{N}$, то, згідно із теоремою 5.5, $P_j \equiv 0$ для кожного $j \in \{1, \ldots, N\}$, тому, $P = P_0$.

Якщо $p \in \mathbb{N}$, то, згідно із теоремою 5.5, кожен поліном P_j, де $j \in \{1, \ldots, N\}$, можна єдиним чином подати, як алгебраїчну комбінацію поліномів $R_{k,[0,+\infty)}$, де мультиіндекси $k \in \mathbb{Z}_+^n$ такі, що $|k| = p$ (кожен поліном P_j такий, що $P_j \equiv 0$, можна розглядати як тривіальну алгебраїчну комбінацію поліномів $R_{k,[0,+\infty)}$). Отже, поліном P можна зобразити, як алгебраїчну комбінацію поліномів $R_{k,[0,+\infty)}$, де мультиіндекси $k \in \mathbb{Z}_+^n$ такі, що $|k| = p$. Це зображення є єдиним, оскільки кожен поліном P_j єдиним чином визначається значеннями полінома P згідно із інтегральною формулою Коші. Наслідок доведено. □

Нехай $p \in \mathbb{N}$. Нехай $H_{bs}\left((L_p[0, +\infty)^n\right)$ — це підалгебра алгебри Фреше $H_b\left((L_p[0, +\infty))^n\right)$, введеної на с. 59, яка складається зі всіх функцій $f \in H_b\left((L_p[0, +\infty))^n\right)$, які є симетричними.

Із леми 2.7 випливає, що якщо послідовність симетричних функцій $\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H_b((L_p[0, +\infty))^n)$ збігається до функції $f \in H_b((L_p[0, +\infty))^n)$, то функція f є симетричною. Звідси випливає, що алгебра $H_{bs}((L_p[0,+\infty))^n)$ є повною. Отже, алгебра $H_{bs}((L_p[0,+\infty))^n)$ є алгеброю Фреше.

Застосувавши до алгебри Фреше $H_{bs}((L_p[0,+\infty))^n)$ теорему 5.3, отримуємо наступний результат, який можна довести аналогічно до теореми 5.4.

Теорема 5.6. *Нехай* $p \in \mathbb{N}$. *Алгебра Фреше* $H_{bs}((L_p[0,+\infty)^n)$ *ізоморфна із алгеброю Фреше* $H(\mathbb{C}^m)$, *де* m *— це потужність множини мультиіндексів*

$$M = \big\{k \in \mathbb{Z}_+^n : \, |k| = p\big\}.$$

Спектр алгебри Фреше $H_{bs}((L_p[0,+\infty)^n)$ *збігається із множиною усіх функціоналів обчислення значень в точках простору* $(L_p[0,+\infty))^n$.

5.3. Висновки до розділу 5

Цей розділ присвячено дослідженням неперервних симетричних поліномів і цілих аналітичних симетричних функцій на декартових степенях комплексних банахових просторів вимірних за Лебегом інтегровних у степені p, де $1 \leq p < +\infty$, функцій на відрізку і на півосі.

В даному розділі побудовано скінченні алгебраїчні базиси алгебр всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартових степенях комплексних банахових просторів всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом у степені p, де $1 \leq p < +\infty$, функцій на відрізку і на півосі, описано спектри алгебр Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цих декартових степенях і зображено дані алгебри Фреше як алгебри аналітичних функцій від скінченної кількості комплексних змінних.

Результати, наведені в цьому розділі, опубліковано в таких працях: [112], [116].

РОЗДІЛ 6

СИМЕТРИЧНІ АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ НА ДЕКАРТОВОМУ СТЕПЕНІ КОМПЛЕКСНОГО БАНАХОВОГО ПРОСТОРУ ВИМІРНИХ ЗА ЛЕБЕГОМ СУТТЄВО ОБМЕЖЕНИХ ФУНКЦІЙ НА ВІДРІЗКУ

Даний розділ присвячено вивченню комплекснозначних симетричних аналітичних функцій на декартовому степені комплексного банахового простору $L_\infty[0,1]$ всіх комплекснозначих вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку $[0,1]$.

6.1. Симетричні поліноми на декартовому степені комплексного банахового простору вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку

В даному підрозділі буде побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому степені комплексного банахового простору всіх комплекснозначих вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку.

Нехай $L_\infty[0,1] := L_\infty^{(\mathbb{C})}([0,1])$ — це комплексний банахів простір всіх вимірних за Лебегом суттєво обмежених комплекснозначих функцій, заданих на відрізку $[0,1]$ (див. приклад 1.1). Норму $\|\cdot\|_{L_\infty^{(\mathbb{C})}[0,1]}$ на цьому просторі, визначену формулою (1.14), в цьому розділі будемо позначати $\|\cdot\|_\infty$.

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Нехай $(L_\infty[0,1])^n$ — це n-тий декартів степінь простору $L_\infty[0,1]$ з нормою

$$\|y\|_{\infty,n} = \max_{1\le s\le n} \|y_s\|_\infty,$$

де $y = (y_1, \ldots, y_n) \in (L_\infty[0,1])^n$.

Згідно із означенням 1.18, функцію $f : (L_\infty[0,1])^n \to \mathbb{C}$ називають симетричною, якщо $f((y_1 \circ \sigma, \ldots, y_n \circ \sigma)) = f((y_1, \ldots, y_n))$ для кожного елемента $(y_1, \ldots, y_n) \in (L_\infty[0,1])^n$ і для кожної бієкції $\sigma \in \Xi_{[0,1]}$, де множина $\Xi_{[0,1]}$ визначена на с. 63.

Із твердження 1.1 випливає наступний наслідок.

Наслідок 6.1. *Нехай* $P : (L_\infty[0,1])^n \to \mathbb{C}$ *— симетричний* N*-однорідний поліном. Тоді*

$$A_P(z_1 \circ \sigma, \ldots, z_N \circ \sigma) = A_P(z_1, \ldots, z_N)$$

для кожних $z_1, \ldots, z_N \in (L_\infty[0,1])^n$ *і* $\sigma \in \Xi_{[0,1]}$, *де* A_P *— це* N*-лінійне симетричне відображення, асоційоване із поліномом* P.

Для кожного мультиіндексу $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ такого, що $|k| \geq 1$, де $|k| = k_1 + \ldots + k_n$, визначимо відображення $R_k : (L_\infty[0,1])^n \to \mathbb{C}$ формулою

$$R_k(y) = \int_{[0,1]} \prod_{\substack{s=1 \\ k_s>0}}^{n} (y_s(t))^{k_s}\, dt, \tag{6.1}$$

де $y = (y_1, \ldots, y_n) \in (L_\infty[0,1])^n$. Зауважимо, що відображення R_k є неперервним симетричним $|k|$-однорідним поліномом і $\|R_k\| = 1$.

Для $m \in \mathbb{N}$, визначимо відображення $J_m : c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n) \to (L_\infty[0,1])^n$ формулою

$$J_m(x) = \left(\sum_{j=1}^{m} x_j^{(1)} \mathbf{1}_{\left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right]}, \ldots, \sum_{j=1}^{m} x_j^{(n)} \mathbf{1}_{\left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right]} \right)$$

для $x = (x_1, \ldots, x_m, \bar{0}, \ldots) \in c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$, де простір $c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$ визначено на с. 110. Зауважимо, що відображення J_m є лінійним ін'єктивним оператором. Можна перевірити, що

$$(R_k \circ J_m)(x) = \frac{1}{m} H_k^{(m)}(x) \tag{6.2}$$

для кожних $m \in \mathbb{N}$ і $x \in c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$, де відображення $H_k^{(m)} : c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}$ визначено формулою (5.4).

Для $r \in \mathbb{N}$, нехай

$$D_r = J_{2^r}\left(c_{00}^{(2^r)}(\mathbb{C}^n) \right).$$

Нехай

$$D = \bigcup_{r=1}^{\infty} D_r. \tag{6.3}$$

Для кожної непорожньої скінченної множини $M \subset \mathbb{Z}_+^n$ і для кожного відображення $l : M \to \mathbb{Z}_+$, нехай

$$\varkappa(l, M) = \sum_{k \in M} |k| l(k). \tag{6.4}$$

Для $N \in \mathbb{N}$, нехай

$$M_N = \big\{ k \in \mathbb{Z}_+^n : \ 1 \le |k| \le N \big\}. \tag{6.5}$$

Твердження 6.1. *Нехай множина* $M = \{k^{(1)}, \ldots, k^{(s)}\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ *така, що* $|k^{(j)}| \ge 1$ *для кожного* $j \in \{1, \ldots, s\}$. *Тоді поліноми* $R_{k^{(1)}}, \ldots, R_{k^{(s)}}$ *є алгебраїчно незалежними на просторі* $(L_\infty[0,1])^n$.

Доведення. Нехай поліном $Q : \mathbb{C}^s \to \mathbb{C}$,

$$Q(z_1, \ldots, z_s) = \sum_{(l_1, \ldots, l_s) \in \Omega} \gamma_{(l_1, \ldots, l_s)} z_1^{l_1} \ldots z_s^{l_s},$$

де Ω — це скінченна підмножина множини $\mathbb{Z}_+^s$ і $\gamma_{(l_1, \ldots, l_s)} \in \mathbb{C}$, такий, що

$$Q\big(R_{k^{(1)}}(y), \ldots, R_{k^{(s)}}(y)\big) = 0 \tag{6.6}$$

для кожного елемента $y \in (L_\infty[0,1])^n$. Покажемо, що поліном Q тотожно дорівнює нулю. Згідно із наслідком 3.4, існує $m \in \mathbb{N}$ таке, що поліноми $H_{k^{(1)}}^{(m)}, \ldots, H_{k^{(s)}}^{(m)}$ є алгебраїчно незалежними на просторі $c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$. Згідно із рівностями (6.2) і (6.6),

$$Q\Big(\frac{1}{m} H_{k^{(1)}}^{(m)}(x), \ldots, \frac{1}{m} H_{k^{(s)}}^{(m)}(x)\Big) = 0$$

для кожної послідовності $x \in c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$, тобто,

$$\tilde{Q}\Big(H_{k^{(1)}}^{(m)}(x), \ldots, H_{k^{(s)}}^{(m)}(x)\Big) = 0$$

для кожної послідовності $x \in c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$, де

$$\tilde{Q}(z_1, \ldots, z_s) = \sum_{(l_1, \ldots, l_s) \in \Omega} \gamma_{(l_1, \ldots, l_s)} \frac{1}{m^{l_1 + \ldots + l_s}} z_1^{l_1} \ldots z_s^{l_s}.$$

Оскільки поліноми $H_{k^{(1)}}^{(m)}, \ldots, H_{k^{(s)}}^{(m)}$ є алгебраїчно незалежними, то поліном $\tilde{Q}$ тотожно дорівнює нулю. Тому $\gamma_{(l_1,\ldots,l_s)} \frac{1}{m^{l_1+\cdots+l_s}} = 0$ і, як наслідок, $\gamma_{(l_1,\ldots,l_s)} = 0$ для кожного мультиіндексу $(l_1, \ldots, l_s) \in \Omega$. Отже, поліном Q тотожно дорівнює нулю. Твердження доведено. □

Твердження 6.2. *Нехай* $P : (L_\infty[0,1])^n \to \mathbb{C}$ *— це симетричний* N*-однорідний поліном. Тоді існують єдині коефіцієнти*

$$\Big\{\alpha_l \in \mathbb{C} : \quad \text{відображення } l : M_N \to \mathbb{Z}_+ \text{ таке, що } \varkappa(l, M_N) = N\Big\}$$

такі, що

$$P(y) = \sum_{\substack{l:M_N\to\mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l,M_N)=N}} \alpha_l \prod_{\substack{k\in M_N \\ l(k)>0}} (R_k(y))^{l(k)}$$

для кожного елемента $y \in D$*, де множина* M_N *визначена формулою* (6.5)*, відображення* $\varkappa$ *визначене формулою* (6.4)*, і множина* D *визначена формулою* (6.3)*.*

Доведення. Зауважимо, що відображення $P \circ J_m$ є симетричним N-однорідним поліномом на просторі $c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$ для кожного $m \in \mathbb{N}$. Тому, згідно із теоремою 3.4, відображення $P \circ J_m$ можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів $\big\{H_k^{(m)} : \ k \in M_N\big\}$, тобто існують коефіцієнти $\beta_l^{(m)} \in \mathbb{C}$ такі, що

$$(P \circ J_m)(x) = \sum_{\substack{l:M_N\to\mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l,M_N)=N}} \beta_l^{(m)} \prod_{\substack{k\in M_N \\ l(k)>0}} \big(H_k^{(m)}(x)\big)^{l(k)} \tag{6.7}$$

для кожної послідовності $x \in c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$. Згідно із наслідком 3.4, існує $m' \in \mathbb{N}$ таке, що поліноми $\big\{H_k^{(m)} : \ k \in M_N\big\}$ є алгебраїчно незалежними для кожного $m \geq m'$. Тому, для $m \geq m'$ зображення (6.7) є єдиним.

Згідно із рівностями (6.2) і (6.7),

$$(P \circ J_m)(x) = \sum_{\substack{l:M_N\to\mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l,M_N)=N}} \alpha_l^{(m)} \prod_{\substack{k\in M_N \\ l(k)>0}} \big((R_k \circ J_m)(x)\big)^{l(k)}$$

для кожної послідовності $x \in c_{00}^{(m)}(\mathbb{C}^n)$, де $\alpha_l^{(m)} = \beta_l^{(m)} m^{\sum_{k \in M_N} l(k)}$. Як наслідок,

$$P(y) = \sum_{\substack{l: M_N \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l, M_N) = N}} \alpha_l^{(2^r)} \prod_{\substack{k \in M_N \\ l(k) > 0}} \big(R_k(y)\big)^{l(k)} \tag{6.8}$$

для кожних $r \in \mathbb{N}$ і $y \in D_r$. Зображення (6.8) є єдиним, якщо $2^r \geq m'$.

Нехай число $r' \in \mathbb{N}$ таке, що $2^{r'} \geq m'$. Оскільки $D_{r'} \subset D_{r'+1} \subset \ldots$, то $\alpha_l^{(2^{r'})} = \alpha_l^{(2^{r'+1})} = \ldots$ Нехай $\alpha_l = \alpha_l^{(2^{r'})}$. Тоді

$$P(y) = \sum_{\substack{l: M_N \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l, M_N) = N}} \alpha_l \prod_{\substack{k \in M_N \\ l(k) > 0}} \big(R_k(y)\big)^{l(k)} \tag{6.9}$$

для кожного $y \in D$, і зображення (6.9) — єдине. Твердження доведено. $\square$

Лема 6.1. *Множина всіх функцій вигляду*

$$\left(\sum_{j=1}^{\iota} h_j^{(1)} \mathbf{1}_{E_j}, \ldots, \sum_{j=1}^{\iota} h_j^{(n)} \mathbf{1}_{E_j} \right), \tag{6.10}$$

де $\iota \in \mathbb{N}$, $\big(h_j^{(1)}, \ldots, h_j^{(n)}\big) \in \mathbb{C}^n$ *для кожного* $j \in \{1, \ldots, \iota\}$, *і* $E_1, \ldots, E_\iota$ *— це попарно неперетинні вимірні за Лебегом підмножини відрізка* $[0,1]$, *є щільною в просторі* $(L_\infty[0,1])^n$.

Доведення. Множина всіх функцій вигляду

$$\sum_{m=1}^{\mu} d_m \mathbf{1}_{F_m},$$

де $\mu \in \mathbb{N}$, $d_m \in \mathbb{C}$ для кожного $m \in \{1, \ldots, \mu\}$, і множини $F_1, \ldots, F_\mu$ є попарно неперетинними вимірними за Лебегом підмножинами відрізка $[0,1]$, є щільною у просторі $L_\infty[0,1]$. Тому щільною в просторі $(L_\infty[0,1])^n$ є множина всіх функцій вигляду

$$\left(\sum_{m_1=1}^{\mu_1} d_{m_1}^{(1)} \mathbf{1}_{F_{m_1}^{(1)}}, \ldots, \sum_{m_n=1}^{\mu_n} d_{m_n}^{(n)} \mathbf{1}_{F_{m_n}^{(n)}} \right), \tag{6.11}$$

де $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{N}$, $d_m^{(s)} \in \mathbb{C}$ для кожних $s \in \{1, \ldots, n\}$, $m \in \{1, \ldots, \mu_s\}$, і множини $F_1^{(s)}, \ldots, F_{\mu_s}^{(s)}$ — це попарно неперетинні вимірні за Лебегом підмножини відрізка $[0,1]$ для кожного $s \in \{1, \ldots, n\}$.

Нехай $y \in (L_\infty[0,1])^n$ — це елемент вигляду (6.11). Нехай

$$\Omega = \{1, \ldots, \mu_1\} \times \ldots \times \{1, \ldots, \mu_n\}.$$

Нехай β — це бієкція між множинами Ω і $\{1, \ldots, \iota\}$, де $\iota = |\Omega|$. Для кожного мультиіндексу $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega$, нехай

$$E_{\beta(\omega)} = \bigcap_{s=1}^{n} F^{(s)}_{\omega_s}.$$

Тоді $E_1, \ldots, E_\iota$ — це попарно неперетинні вимірні за Лебегом підмножини відрізка $[0,1]$. Для кожних $s \in \{1, \ldots, n\}$ і $j \in \{1, \ldots, \iota\}$, визначимо число $h^{(s)}_j \in \mathbb{C}$ наступним чином. Якщо множини E_j і $\bigcup_{m=1}^{\mu_s} F^{(s)}_m$ є неперетинними, тоді покладемо $h^{(s)}_j = 0$. Інакше, існує єдине $m' \in \{1, \ldots, \mu_s\}$ таке, що $E_j \subset F^{(s)}_{m'}$. У цьому випадку покладемо $h^{(s)}_j = d^{(s)}_{m'}$. Тоді

$$y = \left(\sum_{j=1}^{\iota} h^{(1)}_j \mathbf{1}_{E_j}, \ldots, \sum_{j=1}^{\iota} h^{(n)}_j \mathbf{1}_{E_j} \right).$$

Отже, кожна функція вигляду (6.11) належить множині всіх функцій вигляду (6.10). Як наслідок, множина всіх функцій вигляду (6.10) є щільною в просторі $(L_\infty[0,1])^n$. Лему доведено. □

Для $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{C}^n$ і $A \subset [0,1]$, нехай

$$h * \mathbf{1}_A = (h_1 \mathbf{1}_A, \ldots, h_n \mathbf{1}_A).$$

Якщо множина A є вимірною за Лебегом, то $h * \mathbf{1}_A \in (L_\infty[0,1])^n$ і

$$\|h * \mathbf{1}_A\|_{\infty,n} = \max_{1 \le j \le n} \|h_j \mathbf{1}_A\|_\infty = \max_{1 \le j \le n} |h_j|.$$

Лема 6.2. *Нехай $P : (L_\infty[0,1])^n \to \mathbb{C}$ — це неперервний симетричний N-однорідний поліном, де $N \ge 2$. Нехай $1 \le m < N$ і $[a,b]$, $[c_1,d_1]$, $[c_2,d_2] \subset [0,1]$ такі, що $\mu\big([a,b] \cap [c_1,d_1]\big) = 0, \mu\big([a,b] \cap [c_2,d_2]\big) = 0, \mu\big([c_1,d_1] \cap [c_2,d_2]\big) = 0$ і $\mu\big([c_1,d_1] \cup [c_2,d_2]\big) \le \mu\big([a,b]\big)$. Нехай $y_1, \ldots, y_{N-m} \in (L_\infty[0,1])^n$ такі, що звуження $y_1, \ldots, y_{N-m}$ на $[a,b] \cup [c_1,d_1] \cup [c_2,d_2]$ є сталими. Тоді* *існує стала* $C(m,a,b) > 0$ *така, що*

$$\Big|A_P\big(\underbrace{h * \mathbf{1}_{[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]}, \ldots, h * \mathbf{1}_{[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]}}_{m}, y_1, \ldots, y_{N-m}\big)\Big| \leq$$
$$\leq n^N \Big(\max_{1\leq j\leq n}\big|h^{(j)}\big|\Big)^m \mu\big([c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]\big)\|y_1\|_{\infty,n}\ldots\|y_{N-m}\|_{\infty,n}C(m,a,b)$$

для кожного $h = \big(h^{(1)},\ldots,h^{(n)}\big) \in \mathbb{C}^n$.

Доведення. Для $k \in \{1,\ldots,n\}$, визначимо відображення $v_k : L_\infty[0,1] \to (L_\infty[0,1])^n$ формулою

$$v_k(x) = \big(\underbrace{0,\ldots,0}_{k-1}, x, \underbrace{0,\ldots,0}_{n-k}\big),$$

де $x \in L_\infty[0,1]$. Зауважимо, що відображення v_k є неперервним і лінійним.

Для $(k_1,\ldots,k_N) \in \{1,\ldots,n\}^N$, визначимо відображення $B_{(k_1,\ldots,k_N)} : \underbrace{L_\infty[0,1]\times\ldots\times L_\infty[0,1]}_{N} \to \mathbb{C}$ формулою

$$B_{(k_1,\ldots,k_N)}(x_1,\ldots,x_N) = A_P\big(v_{k_1}(x_1),\ldots,v_{k_N}(x_N)\big),$$

де $x_1,\ldots,x_N \in L_\infty[0,1]$. Оскільки відображення v_k є неперервним і лінійним, а відображення A_P є неперервним і N-лінійним, то відображення $B_{(k_1,\ldots,k_N)}$ є неперервним і N-лінійним. Із симетричності відображення A_P випливає симетричність відображення $B_{(k_1,\ldots,k_N)}$. Тому відображення $\widehat{B}_{(k_1,\ldots,k_N)} : L_\infty[0,1] \to \mathbb{C}$, визначене формулою

$$\widehat{B}_{(k_1,\ldots,k_N)}(x) = B_{(k_1,\ldots,k_N)}(x,\ldots,x),$$

де $x \in L_\infty[0,1]$, є неперервним N-однорідним поліномом. Зауважимо, що $v_k(x\circ\sigma) = v_k(x)\circ\sigma$ для кожних $k \in \{1,\ldots,n\}$ і $\sigma \in \Xi_{[0,1]}$. Тому, згідно із наслідком 6.1,

$$B_{(k_1,\ldots,k_N)}(x_1\circ\sigma,\ldots,x_N\circ\sigma) = A_P\big(v_{k_1}(x_1\circ\sigma),\ldots,v_{k_N}(x_N\circ\sigma)\big) =$$
$$= A_P\big(v_{k_1}(x_1)\circ\sigma,\ldots,v_{k_N}(x_N)\circ\sigma\big) = A_P\big(v_{k_1}(x_1),\ldots,v_{k_N}(x_N)\big) =$$
$$= B_{(k_1,\ldots,k_N)}(x_1,\ldots,x_N)$$

для кожних $x_1, \ldots, x_N \in L_\infty[0,1]$ і $\sigma \in \Xi_{[0,1]}$. Як наслідок, $\widehat{B}_{(k_1,\ldots,k_N)}(x\circ\sigma) = \widehat{B}_{(k_1,\ldots,k_N)}(x)$ для кожного $x \in L_\infty[0,1]$ і $\sigma \in \Xi_{[0,1]}$. Отже, поліном $\widehat{B}_{(k_1,\ldots,k_N)}$ є симетричним. Тому, згідно із лемою 2.4, існує стала $C_{(k_1,\ldots,k_N)}(m,a,b) > 0$ така, що

$$\Big|B_{(k_1,\ldots,k_N)}\big(\underbrace{\mathbf{1}_{[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]}, \ldots, \mathbf{1}_{[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]}}_{m}, z_1, \ldots, z_{N-m}\big)\Big| \le \\ \le \mu\big([c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]\big)\|z_1\|_\infty \ldots \|z_{N-m}\|_\infty C_{(k_1,\ldots,k_N)}(m,a,b) \quad (6.12)$$

для кожних $z_1, \ldots, z_{N-m} \in L_\infty[0,1]$ таких, що звуження функцій $z_1, \ldots, z_{N-m}$ на $[a,b]\cup[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]$ є сталими.

Нехай $h = \big(h^{(1)}, \ldots, h^{(n)}\big) \in \mathbb{C}^n$ і функції $y_j = \big(y_j^{(1)}, \ldots, y_j^{(n)}\big) \in (L_\infty)^n$, де $j \in \{1, \ldots, N-m\}$, такі, що звуження функції y_j на $[a,b]\cup[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]$ є сталою для кожного $j \in \{1, \ldots, N-m\}$. Оскільки

$$h * \mathbf{1}_{[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]} = \sum_{k=1}^{n} h^{(k)} v_k(\mathbf{1}_{[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]})$$

і

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} v_k\big(y_j^{(k)}\big)$$

для кожного $j \in \{1, \ldots, N-m\}$, то, згідно із N-лінійністю відображення A_P,

$$A_P\big(\underbrace{h * \mathbf{1}_{[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]}, \ldots, h * \mathbf{1}_{[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]}}_{m}, y_1, \ldots, y_{N-m}\big) = \\ = A_P\Bigg(\sum_{k_1=1}^{n} h^{(k_1)} v_{k_1}(\mathbf{1}_{[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]}), \ldots, \sum_{k_m=1}^{n} h^{(k_m)} v_{k_m}(\mathbf{1}_{[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]}), \\ \sum_{k_{m+1}=1}^{n} v_{k_{m+1}}\big(y_1^{(k_{m+1})}\big), \ldots, \sum_{k_N=1}^{n} v_{k_N}\big(y_{N-m}^{(k_N)}\big)\Bigg) = \\ = \sum_{k_1=1}^{n} \ldots \sum_{k_N=1}^{n} h^{(k_1)} \ldots h^{(k_m)} B_{(k_1,\ldots,k_N)}\Big(\underbrace{\mathbf{1}_{[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]}, \ldots, \mathbf{1}_{[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]}}_{m}, \\ y_1^{(k_{m+1})}, \ldots, y_{N-m}^{(k_N)}\Big).$$

Тому, згідно із нерівністю (6.12),

$$\Big|A_P\big(\underbrace{h*\mathbf{1}_{[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]},\ldots,h*\mathbf{1}_{[c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]}}_{m},y_1,\ldots,y_{N-m}\big)\Big|\le$$

$$\le\sum_{k_1=1}^{n}\cdots\sum_{k_N=1}^{n}\big|h^{(k_1)}\big|\ldots\big|h^{(k_m)}\big|\mu\big([c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]\big)\big\|y_1^{(k_{m+1})}\big\|_\infty\cdots\big\|y_{N-m}^{(k_N)}\big\|_\infty\times$$
$$\times\, C_{(k_1,\ldots,k_N)}(m,a,b).$$

Нехай

$$C(m,a,b)=\max_{(k_1,\ldots,k_N)\in\{1,\ldots,n\}^N}C_{(k_1,\ldots,k_N)}(m,a,b).$$

Оскільки $\big|h^{(k)}\big|\le\max\limits_{1\le j\le n}\big|h^{(j)}\big|$ для кожних $k\in\{1,\ldots,n\}$ і $\big\|y_j^{(k)}\big\|_\infty\le\|y_j\|_{\infty,n}$ для кожних $j\in\{1,\ldots,N-m\}$ і $k\in\{1,\ldots,n\}$, то

$$\sum_{k_1=1}^{n}\cdots\sum_{k_N=1}^{n}\big|h^{(k_1)}\big|\ldots\big|h^{(k_m)}\big|\mu\big([c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]\big)\times$$
$$\times\big\|y_1^{(k_{m+1})}\big\|_\infty\cdots\big\|y_{N-m}^{(k_N)}\big\|_\infty C_{(k_1,\ldots,k_N)}(m,a,b)\le$$
$$\le\sum_{k_1=1}^{n}\cdots\sum_{k_N=1}^{n}\Big(\max_{1\le j\le n}\big|h^{(j)}\big|\Big)^m\mu\big([c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]\big)\times$$
$$\times\|y_1\|_{\infty,n}\cdots\|y_{N-m}\|_{\infty,n}C(m,a,b)=$$
$$=n^N\Big(\max_{1\le j\le n}\big|h^{(j)}\big|\Big)^m\mu\big([c_1,d_1]\cup[c_2,d_2]\big)\|y_1\|_{\infty,n}\cdots\|y_{N-m}\|_{\infty,n}C(m,a,b).$$

Лему доведено. □

Лема 6.3. *Нехай $P:(L_\infty[0,1])^n\to\mathbb{C}$ — це неперервний симетричний N-однорідний поліном, де $N\ge 2$. Тоді існує послідовність $\{s_k\}_{k=1}^\infty\subset[0,1]$ така, що $\lim_{k\to\infty}s_k=0$ і*

$$\big|P\big(h*\mathbf{1}_{[0,r_k]}\big)\big|\le\frac{1}{k}\big(\|P\|+1\big)\Big(\max_{1\le j\le n}\big|h^{(j)}\big|\Big)^N$$

для кожного вектора $h=\big(h^{(1)},\ldots,h^{(n)}\big)\in\mathbb{C}^n$ і для кожної послідовності $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ такої, що $0\le r_k\le s_k$ для кожного $k\in\mathbb{N}$.

Доведення. Нехай $h=\big(h^{(1)},\ldots,h^{(n)}\big)\in\mathbb{C}^n$. Згідно із нерівністю (1.6),

$$\big|P\big(h*\mathbf{1}_{[0,a]}\big)\big|\le\|P\|\big\|h*\mathbf{1}_{[0,a]}\big\|_{\infty,n}^N\le\|P\|\Big(\max_{1\le j\le n}\big|h^{(j)}\big|\Big)^N \tag{6.13}$$

для кожного $a \in [0,1]$.

Покладемо $s_1 = 1$. Згідно із нерівністю (6.13),

$$\big|P\big(h * \mathbf{1}_{[0,r_1]}\big) \leq \|P\| \Big(\max_{1\leq j\leq n}\big|h^{(j)}\big|\Big)^N \leq \big(\|P\|+1\big)\Big(\max_{1\leq j\leq n}\big|h^{(j)}\big|\Big)^N$$

для кожного $r_1 \in [0, s_1]$.

Нехай $k \geq 2$. Нехай $t \geq 0$ таке, що $kt < 1/2$. Оскільки, майже скрізь на відрізку $[0,1]$,

$$h * \mathbf{1}_{[0,kt]} = \sum_{j=1}^{k} h * \mathbf{1}_{[(j-1)t,jt]},$$

то, згідно із формулою (1.2),

$$P\big(h * \mathbf{1}_{[0,kt]}\big) = \sum_{N_1+\ldots+N_k=N} \frac{N!}{N_1!\ldots N_k!} A_P\Big(\underbrace{h * \mathbf{1}_{[0,t]}, \ldots, h * \mathbf{1}_{[0,t]}}_{N_1},$$

$$\underbrace{h * \mathbf{1}_{[t,2t]}, \ldots, h * \mathbf{1}_{[t,2t]}}_{N_2}, \ldots, \underbrace{h * \mathbf{1}_{[(k-1)t,kt]}, \ldots, h * \mathbf{1}_{[(k-1)t,kt]}}_{N_k}\Big),$$

де $N_1, \ldots, N_k \in \mathbb{Z}_+$. Для кожного мультиіндексу $(N_1, \ldots, N_k) \in \mathbb{Z}_+^k$, нехай

$$\mathcal{V}((N_1, \ldots, N_k)) = \big\{j \in \{1, \ldots, k\} : \ N_j > 0\big\}.$$

Тоді

$$P\big(h * \mathbf{1}_{[0,kt]}\big) = \sum_{j=1}^{k} P\big(h * \mathbf{1}_{[(j-1)t,jt]}\big) + \sum_{\substack{N_1+\ldots+N_k=N \\ |\mathcal{V}((N_1,\ldots,N_k))|\geq 2}} \frac{N!}{N_1!\ldots N_k!} \times$$

$$\times A_P\Big(\underbrace{h * \mathbf{1}_{[0,t]}, \ldots, h * \mathbf{1}_{[0,t]}}_{N_1}, \underbrace{h * \mathbf{1}_{[t,2t]}, \ldots, h * \mathbf{1}_{[t,2t]}}_{N_2}, \ldots$$

$$\ldots, \underbrace{h * \mathbf{1}_{[(k-1)t,kt]}, \ldots, h * \mathbf{1}_{[(k-1)t,kt]}}_{N_k}\Big).$$

Оскільки поліном P — симетричний, то

$$P\big(h * \mathbf{1}_{[(j-1)t,jt]}\big) = P\big(h * \mathbf{1}_{[0,t]}\big)$$

для кожного $j \in \{1, \ldots, k\}$. Тому

$$\sum_{j=1}^{k} P\big(h * \mathbf{1}_{[(j-1)t,jt]}\big) = kP\big(h * \mathbf{1}_{[0,t]}\big).$$

Отже,

$$kP\big(h*\mathbf{1}_{[0,t]}\big) = P\big(h*\mathbf{1}_{[0,kt]}\big) - \sum_{\substack{N_1+\ldots+N_k=N\\ |\mathcal{V}((N_1,\ldots,N_k))|\geq 2}} \frac{N!}{N_1!\ldots N_k!}\times$$
$$\times A_P\Big(\underbrace{h*\mathbf{1}_{[0,t]},\ldots,h*\mathbf{1}_{[0,t]}}_{N_1},\underbrace{h*\mathbf{1}_{[t,2t]},\ldots,h*\mathbf{1}_{[t,2t]}}_{N_2},\ldots$$
$$\ldots,\underbrace{h*\mathbf{1}_{[(k-1)t,kt]},\ldots,h*\mathbf{1}_{[(k-1)t,kt]}}_{N_k}\Big). \quad (6.14)$$

Нехай мультиіндекс $(N_1,\ldots,N_k)\in\mathbb{Z}_+^k$ такий, що $N_1+\ldots+N_k=N$ і $|\mathcal{V}((N_1,\ldots,N_k))|\geq 2$. Нехай $\nu=|\mathcal{V}((N_1,\ldots,N_k))|$. Тоді $\mathcal{V}((N_1,\ldots,N_k))=\{l_1,\ldots,l_\nu\}$ для деяких $l_1,\ldots,l_\nu\in\{1,\ldots,k\}$ таких, що $l_1<\ldots<l_\nu$. Згідно із лемою 6.2, у якій візьмемо

$$m=N_{l_1},\ [a,b]=[1/2,1],\ [c_1,d_1]=[(l_1-1)t,l_1t],\ c_2=d_2=0,$$

$$y_1=\ldots=y_{N_{l_2}}=h*\mathbf{1}_{[(l_2-1)t,l_2t]},$$
$$y_{N_{l_2}+1}=\ldots=y_{N_{l_2}+N_{l_3}}=h*\mathbf{1}_{[(l_3-1)t,l_3t]},\ldots,$$
$$y_{N_{l_2}+\ldots+N_{l_{\nu-1}}+1}=\ldots=y_{N_{l_2}+\ldots+N_{l_\nu}}=h*\mathbf{1}_{[(l_\nu-1)t,l_\nu t]},$$

отримаємо нерівність

$$\Big|A_P\Big(\underbrace{h*\mathbf{1}_{[(l_1-1)t,l_1t]},\ldots,h*\mathbf{1}_{[(l_1-1)t,l_1t]}}_{N_{l_1}},\ldots$$
$$\ldots,\underbrace{h*\mathbf{1}_{[(l_\nu-1)t,l_\nu t]},\ldots,h*\mathbf{1}_{[(l_\nu-1)t,l_\nu t]}}_{N_{l_\nu}}\Big)\Big|\leq$$
$$\leq n^N\Big(\max_{1\leq j\leq n}\big|h^{(j)}\big|\Big)^{N_{l_1}}\mu\big([(l_1-1)t,l_1t]\big)\big\|h*\mathbf{1}_{[(l_2-1)t,l_2t]}\big\|_{\infty,n}^{N_{l_2}}\times\ldots\times$$
$$\times\big\|h*\mathbf{1}_{[(l_\nu-1)t,l_\nu t]}\big\|_{\infty,n}^{N_{l_\nu}}C(N_{l_1},1/2,1)\leq$$
$$\leq n^N\Big(\max_{1\leq j\leq n}\big|h^{(j)}\big|\Big)^N tC(N_{l_1},1/2,1)\leq n^N\Big(\max_{1\leq j\leq n}\big|h^{(j)}\big|\Big)^N t\tilde{C},$$

де

$$\tilde{C}=\max_{1\leq j\leq N}C(j,1/2,1).$$

Тому, згідно із рівністю (6.14), враховуючи нерівність (6.13),

$$k\big|P\big(h*\mathbf{1}_{[0,t]}\big)\big| \le \|P\|\Big(\max_{1\le j\le n}\big|h^{(j)}\big|\Big)^N +$$

$$+\, n^N\Big(\max_{1\le j\le n}\big|h^{(j)}\big|\Big)^N t\tilde{C} \sum_{\substack{N_1+\ldots+N_k=N\\ |\mathcal{V}((N_1,\ldots,N_k))|\ge 2}} \frac{N!}{N_1!\ldots N_k!} \le$$

$$\le \|P\|\Big(\max_{1\le j\le n}\big|h^{(j)}\big|\Big)^N + n^N\Big(\max_{1\le j\le n}\big|h^{(j)}\big|\Big)^N t\tilde{C} \sum_{N_1+\ldots+N_k=N} \frac{N!}{N_1!\ldots N_k!} =$$

$$= \big(\|P\| + \tilde{C}n^N k^N t\big)\Big(\max_{1\le j\le n}\big|h^{(j)}\big|\Big)^N.$$

Покладемо $s_k = 1/\big(\tilde{C}n^N k^N\big)$. Тоді, для кожного $r_k \in [0, s_k]$,

$$\tilde{C}n^N k^N r_k \le 1$$

і, як наслідок,

$$k\big|P\big(h*\mathbf{1}_{[0,r_k]}\big)\big| \le (\|P\|+1)\Big(\max_{1\le j\le n}\big|h^{(j)}\big|\Big)^N.$$

Лему доведено. □

Лема 6.4. *Нехай* $P : (L_\infty[0,1])^n \to \mathbb{C}$ *— це неперервний симетричний* N*-однорідний поліном, де* $N \ge 2$. *Нехай*

$$x = \sum_{j=1}^{\iota} h_j * \mathbf{1}_{[a_j,b_j]},$$

де $\iota \in \mathbb{N}, h_j = \big(h_j^{(1)},\ldots,h_j^{(n)}\big) \in \mathbb{C}^n$ *для* $j \in \{1,\ldots,\iota\}$, *і числа* $a_1,\ldots,a_\iota$, $b_1,\ldots,b_\iota \in [0,1]$ *такі, що* $a_1 < b_1 \le a_2 < \ldots < b_\iota$. *Нехай* $l \in \{1,\ldots,\iota\}$ *і*

$$\varepsilon_k = \frac{1}{2}\min\{s_k, b_l - a_l\}$$

для $k \in \mathbb{N}$, *де послідовність* $\{s_k\}_{k=1}^\infty$ *існує згідно із лемою 6.3. Тоді для кожних послідовностей* $\big\{a_l^{(k)}\big\}_{k=1}^\infty, \big\{b_l^{(k)}\big\}_{k=1}^\infty \subset [0,1]$ *таких, що* $a_l^{(k)} \in [a_l, a_l + \varepsilon_k]$ *і* $b_l^{(k)} \in [b_l - \varepsilon_k, b_l]$ *для кожного* $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{k\to\infty} P(x - \delta_k) = P(x),$$

де

$$\delta_k = h_l * \mathbf{1}_{\left[a_l,a_l^{(k)}\right]\cup\left[b_l^{(k)},b_l\right]}.$$

Доведення. Згідно із формулою (1.3),

$$P(x-\delta_k)=P(x)+P(-\delta_k)+\sum_{m=1}^{N-1}\binom{N}{m}A_P\big(\underbrace{-\delta_k,\ldots,-\delta_k}_{m},\underbrace{x,\ldots,x}_{N-m}\big).$$

Оскільки поліном P — симетричний, то

$$P(-\delta_k)=P\Big(-h_l*\mathbf{1}_{\left[0,a_l^{(k)}-a_l+b_l-b_l^{(k)}\right]}\Big).$$

Оскільки $a_l^{(k)}-a_l+b_l-b_l^{(k)}\le 2\varepsilon_k\le s_k$, то, згідно із лемою 6.3,

$$|P(-\delta_k)|\le\frac{1}{k}\big(\|P\|+1\big)\Big(\max_{1\le j\le n}\big|h_l^{(j)}\big|\Big)^N.$$

Для кожного $m\in\{1,\ldots,N-1\}$, згідно із лемою 6.2, у якій покладемо $[a,b]=[a_l,b_l],[c_1,d_1]=\big[a_l,a_l^{(k)}\big],[c_2,d_2]=\big[b_l^{(k)},b_l\big]$ і $y_1=\ldots=y_{N-m}=x$, існує стала $C(m,a_l,b_l)>0$ така, що

$$\Big|A_P\big(\underbrace{-\delta_k,\ldots,-\delta_k}_{m},\underbrace{x,\ldots,x}_{N-m}\big)\Big|\le$$
$$\le n^N\Big(\max_{1\le j\le n}\big|h^{(j)}\big|\Big)^m\mu\big([a_l,a_l^{(k)}]\cup\big[b_l^{(k)},b_l\big]\big)\|x\|_{\infty,n}^{N-m}C(m,a,b)\le$$
$$\le s_kn^N\Big(\max_{1\le j\le n}\big|h^{(j)}\big|\Big)^m\|x\|_{\infty,n}^{N-m}C(m,a_l,b_l).$$

Тому

$$|P(x-\delta_k)-P(x)|\le\frac{1}{k}\big(\|P\|+1\big)\Big(\max_{1\le j\le n}\big|h_l^{(j)}\big|\Big)^N+$$
$$+s_kn^N\sum_{m=1}^{N-1}\binom{N}{m}\Big(\max_{1\le j\le n}\big|h^{(j)}\big|\Big)^m\|x\|_{\infty,n}^{N-m}C(m,a_l,b_l)\to 0$$

при $k\to\infty$, оскільки $\lim_{k\to\infty}s_k=0$. Отже, $\lim_{k\to\infty}P(x-\delta_k)=P(x)$. Лему доведено. ☐

Теорема 6.1. *Кожен симетричний неперервний N-однорідний поліном $P:(L_\infty[0,1])^n\to\mathbb{C}$ можна єдиним чином подати у вигляді*

$$P(y)=\sum_{\substack{l:M_N\to\mathbb{Z}_+\\ \varkappa(l,M_N)=N}}\alpha_l\prod_{\substack{k\in M_N\\ l(k)>0}}(R_k(y))^{l(k)},$$

де $y\in(L_\infty[0,1])^n$, $\alpha_l\in\mathbb{C}$, множина M_N визначена формулою (6.5), *і відображення $\varkappa$ визначене формулою* (6.4).

Доведення. Розглянемо випадок $N = 1$. У цьому випадку, поліном P є неперервним симетричним лінійним функціоналом. Тому, для кожного елемента $y = \big(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\big) \in (L_\infty[0,1])^n$,

$$P(y) = \sum_{j=1}^{n} P\Big(\big(\underbrace{0, \ldots, 0}_{j-1}, y^{(j)}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-j}\big)\Big).$$

Зауважимо, що для кожного $j \in \{1, \ldots, n\}$ відображення

$$L_\infty[0,1] \ni x \mapsto P\Big(\big(\underbrace{0, \ldots, 0}_{j-1}, x, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-j}\big)\Big) \in \mathbb{C}$$

є неперервним симетричним лінійним функціоналом. Згідно із теоремою 2.2, кожен неперервний симетричний лінійний функціонал $f : L_\infty[0,1] \to \mathbb{C}$ можна подати у вигляді

$$f(x) = \alpha \int_{[0,1]} x(t)\, dt,$$

де $x \in L_\infty[0,1]$ і $\alpha \in \mathbb{C}$. Тому існують коефіцієнти $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ такі, що

$$P(y) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_{[0,1]} y^{(j)}(t)\, dt = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j R_{(\underbrace{0,\ldots,0}_{j-1},1,\underbrace{0,\ldots,0}_{n-j})}(y) \tag{6.15}$$

для кожного $y = \big(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\big) \in (L_\infty[0,1])^n$. Згідно із твердженням 6.1, поліноми

$$R_{(1,\underbrace{0,\ldots,0}_{n-1})}, R_{(0,1,\underbrace{0,\ldots,0}_{n-2})}, \ldots, R_{(\underbrace{0,\ldots,0}_{n-1},1)}$$

є алгебраїчно незалежними. Тому зображення (6.15) є єдиним. Доведення теореми для випадку $N = 1$ завершено.

Розглянемо випадок $N \geq 2$. Згідно із твердженням 6.2, існують єдині коефіцієнти

$$\big\{\alpha_l \in \mathbb{C} :\ \text{відображення } l : M_N \to \mathbb{Z}_+ \text{ такі, що } \varkappa(l, M_N) = N\big\}$$

такі, що

$$P(y) = \sum_{\substack{l : M_N \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l, M_N) = N}} \alpha_l \prod_{\substack{k \in M_N \\ l(k) > 0}} (R_k(y))^{l(k)} \tag{6.16}$$

для кожного $y \in D$.

Нехай

$$x = \sum_{j=1}^{\iota} h_j * \mathbf{1}_{[a_j, b_j]}, \tag{6.17}$$

де $\iota \in \mathbb{N}, h_j = \big(h_j^{(1)}, \ldots, h_j^{(n)}\big) \in \mathbb{C}^n$ для $j \in \{1, \ldots, \iota\}$, і числа $a_1, \ldots, a_\iota$, $b_1, \ldots, b_\iota \in [0, 1]$ такі, що $a_1 < b_1 \leq a_2 < \ldots < b_\iota$. Для кожного $l \in \{1, \ldots, \iota\}$, виберемо послідовності

$$\big\{a_l^{(k)}\big\}_{k=1}^{\infty}, \big\{b_l^{(k)}\big\}_{k=1}^{\infty} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \Big\{ \frac{j}{2^m} : \quad j \in \{1, \ldots, 2^m\} \Big\}$$

такі, що

$$a_l \leq a_l^{(k)} \leq a_l + \frac{1}{2} \min\{s_k, b_l - a_l\}$$

і

$$b_l - \frac{1}{2} \min\{s_k, b_l - a_l\} \leq b_l^{(k)} \leq b_l,$$

де послідовність $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ отримана із леми 6.3. Тоді для кожного мультиіндексу $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_\iota) \in \mathbb{N}^\iota$ функція

$$x_\eta = \sum_{j=1}^{\iota} h_j * \mathbf{1}_{\left[a_j^{(\eta_j)}, b_j^{(\eta_j)}\right]}$$

належить множині D. Скориставшись лемою 6.4 ι разів, маємо

$$\begin{aligned} P(x) &= \lim_{\eta_1 \to \infty} \lim_{\eta_2 \to \infty} \ldots \lim_{\eta_\iota \to \infty} P\big(x_{(\eta_1, \ldots, \eta_\iota)}\big) = \\ &= \lim_{\eta_1 \to \infty} \lim_{\eta_2 \to \infty} \ldots \lim_{\eta_\iota \to \infty} \sum_{\substack{l : M_N \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l, M_N) = N}} \alpha_l \prod_{\substack{k \in M_N \\ l(k) > 0}} \big(R_k\big(x_{(\eta_1, \ldots, \eta_\iota)}\big)\big)^{l(k)} = \\ &= \sum_{\substack{l : M_N \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l, M_N) = N}} \alpha_l \prod_{\substack{k \in M_N \\ l(k) > 0}} (R_k(x))^{l(k)}. \end{aligned}$$

Отже, рівність (6.16) виконується для кожної функції $x \in (L_\infty[0, 1])^n$ вигляду (6.17).

Нехай

$$z = \sum_{j=1}^{\iota} h_j * \mathbf{1}_{E_j}, \tag{6.18}$$

де $\iota \in \mathbb{N}$, $h_j = \big(h_j^{(1)}, \ldots, h_j^{(n)}\big) \in \mathbb{C}^n$ для кожного $j \in \{1, \ldots, \iota\}$, і $E_1, \ldots, E_\iota$ — це попарно неперетинні вимірні за Лебегом підмножини відрізка $[0, 1]$. Згідно із твердженням 2.2, існує функція $\sigma_{E_1,\ldots,E_\iota} \in \Xi_{[0,1]}$ така, що

$$\mathbf{1}_{E_j} = \mathbf{1}_{\left[\sum_{m=1}^{j-1} \mu(E_m), \sum_{m=1}^{j} \mu(E_m)\right]} \circ \sigma_{E_1,\ldots,E_\iota}$$

для кожного $j \in \{1, \ldots, \iota\}$ майже скрізь на відрізку $[0, 1]$. Як наслідок,

$$z = \hat{z} \circ \sigma_{E_1,\ldots,E_\iota},$$

де

$$\hat{z} = \sum_{j=1}^{\iota} h_j * \mathbf{1}_{\left[\sum_{m=1}^{j-1} \mu(E_m), \sum_{m=1}^{j} \mu(E_m)\right]}.$$

Тому $P(z) = P(\hat{z})$ згідно із симетричністю полінома P. Оскільки $\hat{z}$ — це функція вигляду (6.17), то

$$P(\hat{z}) = \sum_{\substack{l : M_N \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l, M_N) = N}} \alpha_l \prod_{\substack{k \in M_N \\ l(k) > 0}} (R_k(\hat{z}))^{l(k)}.$$

Оскільки поліноми R_k є симетричними, то $R_k(\hat{z}) = R_k(z)$ для кожного мультиіндексу $k \in M_N$. Отже,

$$P(z) = \sum_{\substack{l : M_N \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l, M_N) = N}} \alpha_l \prod_{\substack{k \in M_N \\ l(k) > 0}} (R_k(z))^{l(k)}.$$

Згідно із лемою 6.1, множина всіх функцій вигляду (6.18) є щільною в просторі $(L_\infty[0, 1])^n$. Тому, згідно із неперервністю полінома P,

$$P(y) = \sum_{\substack{l : M_N \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l, M_N) = N}} \alpha_l \prod_{\substack{k \in M_N \\ l(k) > 0}} (R_k(y))^{l(k)} \tag{6.19}$$

для кожного елемента $y \in (L_\infty[0, 1])^n$. Згідно із твердженням 6.1, поліноми R_k, де $k \in M_N$, є алгебраїчно незалежними. Тому зображення (6.19) — єдине. Теорему доведено. □

Наслідок 6.2. *Множина поліномів* $\big\{R_k : \ k \in \mathbb{Z}_+^n, |k| \geq 1\big\}$ *є алгебраїчним базисом алгебри всіх неперервних симетричних комплекснозначних поліномів на просторі* $(L_\infty[0, 1])^n$.

6.2. Спектр алгебри Фреше цілих симетричних функцій обмеженого типу на декартовому степені комплексного банахового простору вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку

В даному підрозділі буде описано спектр алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на декартовому степені комплексного банахового простору $L_\infty[0,1]$ всіх комплекснозначих вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку $[0,1]$. Буде показано, що кожен елемент спектра є функціоналом обчислення значення в точці.

Доведемо деякі допоміжні результати.

Лема 6.5. *Нехай $q\in\mathbb{N}$. Нехай функції $f,g:[a,b]\to\mathbb{C}$ є вимірними за Лебегом суттєво обмеженими функціями такими, що для кожного $j\in\{1,\dots,q\}$ звуження функції f на інтервал $\left(a+\frac{(j-1)(b-a)}{q}, a+\frac{j(b-a)}{q}\right)$ є сталою функцією і функція g є періодичною функцією із періодом $\frac{b-a}{q}$. Тоді*

$$\int_{[a,b]} f(t)g(t)\,dt = \frac{q}{b-a}\int_{[a,b]} f(t)\,dt \int_{\left[a,a+\frac{b-a}{q}\right]} g(t)\,dt.$$

Доведення. Нехай для кожного $j\in\{1,\dots,q\}$ звуження функції f на інтервал $\left(a+\frac{(j-1)(b-a)}{q}, a+\frac{j(b-a)}{q}\right)$ дорівнює α_j, де $\alpha_j\in\mathbb{C}$. Тоді

$$\int_{[a,b]} f(t)g(t)\,dt = \sum_{j=1}^{q}\int_{\left(a+\frac{(j-1)(b-a)}{q},a+\frac{j(b-a)}{q}\right)} f(t)g(t)\,dt =$$
$$= \sum_{j=1}^{q}\alpha_j\int_{\left(a+\frac{(j-1)(b-a)}{q},a+\frac{j(b-a)}{q}\right)} g(t)\,dt.$$

Оскільки функція g є періодичною з періодом $\frac{b-a}{q}$, то

$$\int_{\left(a+\frac{(j-1)(b-a)}{q},a+\frac{j(b-a)}{q}\right)} g(t)\,dt = \int_{\left(a,a+\frac{b-a}{q}\right)} g(t)\,dt$$

для кожного $j \in \{1, \ldots, q\}$. Тому

$$\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \int_{\left(a+\frac{(j-1)(b-a)}{q}, a+\frac{j(b-a)}{q}\right)} g(t)\, dt = \left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j\right) \int_{\left(a, a+\frac{b-a}{q}\right)} g(t)\, dt.$$

Оскільки

$$\int_{[a,b]} f(t)\, dt = \frac{b-a}{q} \sum_{j=1}^{q} \alpha_j,$$

то

$$\left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j\right) \int_{\left(a, a+\frac{b-a}{q}\right)} g(t)\, dt = \frac{q}{b-a} \int_{[a,b]} f(t)\, dt \int_{\left(a, a+\frac{b-a}{q}\right)} g(t)\, dt.$$

Лему доведено. ☐

Лема 6.6. *Нехай* $N \in \mathbb{N}$ *таке, що* $N \geq 2$, *і* $q_1, \ldots, q_{N-1} \in \mathbb{N}$. *Нехай* $Q_0 = 1$ *і* $Q_j = \prod_{l=1}^{j} q_l$ *для* $j \in \{1, \ldots, N-1\}$. *Нехай функції* $f_1, \ldots, f_N : [a, b] \to \mathbb{C}$ *є вимірними за Лебегом суттєво обмеженими функціями, такими, що для кожного* $l \in \{1, \ldots, N-1\}$ *і для кожного* $j \in \{1, \ldots, Q_l\}$ *звуження функції* f_l *на інтервал* $\left(a + \frac{(j-1)(b-a)}{Q_l}, a + \frac{j(b-a)}{Q_l}\right)$ *є сталою функцією і для кожного* $l \in \{2, \ldots, N\}$ *функція* f_l *є періодичною функцією з періодом* $\frac{b-a}{Q_{l-1}}$. *Тоді*

$$\int_{[a,b]} f_1(t) \ldots f_N(t)\, dt = \frac{Q_1 Q_2 \ldots Q_{N-1}}{(b-a)^{N-1}} \prod_{j=1}^{N} \int_{\left(a, a+\frac{b-a}{Q_{j-1}}\right)} f_j(t)\, dt.$$

Доведення. Скориставшись лемою 6.5 $N-1$ разів, отримуємо потрібний результат. ☐

Наступна теорема є важливою для побудови функціоналів обчислення значення в точках на алгебрі Фреше всіх цілих симетричних комплексно-значних функцій обмеженого типу на просторі $(L_\infty[0,1])^n$.

Теорема 6.2. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$. *Існує стала* $K_n > 0$ *така, що для кожного відображення* $c : \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\} \to \mathbb{C}$ *такого, що*

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0,\ldots,0)\}} |c(k)|^{1/|k|} < +\infty,$$

існує елемент $x_c \in (L_\infty[0,1])^n$ *такий, що* $R_k(x_c) = c(k)$ *для кожного* $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0,\dots,0)\}$ *і*

$$\|x_c\|_{\infty,n} \le K_n \sup_{k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{(0,\dots,0)\}} |c(k)|^{1/|k|}.$$

Доведення. Доведемо методом математичної індукції по n. Результат для випадку $n = 1$ випливає із теореми 2.1. Припустимо, що теорема є правильною для $n-1$, де $n \ge 2$. Доведемо її для n.

Відомо (див. [75, розділ 3] або [16, с. 162]), що ряд $\sum_{q=1}^\infty \varepsilon_q(t)u_q$ збігається майже скрізь на відрізку $[0,1]$ якщо і тільки якщо ряд $\sum_{q=1}^\infty |u_q|^2$ збігається, де $u_q \in \mathbb{R}$ і

$$\varepsilon_q(t) = \operatorname{sign}\sin 2^q\pi t,$$

тобто, функція ε_q — це q-та функція Радемахера. Для $q \in \mathbb{N}$ і $s \in \{1,\dots,n\}$, нехай

$$u_q^{(s)} = \begin{cases} \frac{1}{j+2}, & \text{якщо існує } j \in \mathbb{Z}_+ \text{ таке, що } q = nj+s \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Для кожного $s \in \{1,\dots,n\}$ ряд $\sum_{q=1}^\infty \left|u_q^{(s)}\right|^2 = \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{(j+2)^2}$ є збіжним, тому ряд $\sum_{q=1}^\infty \varepsilon_q(t)u_q^{(s)} = \sum_{j=0}^\infty \frac{\varepsilon_{nj+s}(t)}{j+2}$ є збіжним майже скрізь на відрізку $[0,1]$.

Для $l \in \mathbb{N}$ і $s \in \{1,\dots,n\}$ визначимо функцію $p_{l,s} : [0,1] \to \mathbb{C}$ наступним чином. Для $t \in [0,1]$ такого, що ряд $\sum_{j=0}^\infty \frac{\varepsilon_{nj+s}(t)}{j+2}$ є збіжним, покладемо

$$p_{l,s}(t) = \exp\left(\frac{i\pi}{2l}\sum_{j=0}^\infty \frac{\varepsilon_{nj+s}(t)}{j+2}\right).$$

Для кожного $t \in [0,1]$ такого, що ряд $\sum_{j=0}^\infty \frac{\varepsilon_{nj+s}(t)}{j+2}$ є розбіжним, покладемо $p_{l,s}(t) = 0$.

Для $l \in \mathbb{N}$, $s \in \{1,\dots,n\}$ і $r \in \mathbb{Z}_+$, визначимо функцію $p_{l,s}^{(r)} : [0,1] \to \mathbb{C}$ рівністю

$$p_{l,s}^{(r)}(t) = \exp\left(\frac{i\pi}{2l}\sum_{j=0}^r \frac{\varepsilon_{nj+s}(t)}{j+2}\right). \tag{6.20}$$

Зауважимо, що $p_{l,s}^{(r)} \in L_\infty[0,1]$. Оскільки ряд $\sum_{j=0}^\infty \frac{\varepsilon_{nj+s}(t)}{j+2}$ є збіжним майже скрізь на відрізку $[0,1]$ і $p_{l,s}^{(r)}(t) \to p_{l,s}(t)$ при $r \to \infty$ для кожного $t \in$

$[0,1]$ такого, що ряд $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_{nj+s}(t)}{j+2}$ є збіжним, то функція $p_{l,s}$ є вимірною за Лебегом. Оскільки $|p_{l,s}(t)|=1$ майже скрізь на відрізку $[0,1]$, то функція $p_{l,s}$ є суттєво обмеженою на відрізку $[0,1]$ і $\|p_{l,s}\|_\infty=1$. Отже, $p_{l,s}\in L_\infty[0,1]$.

Для $m=(m_1,\ldots,m_n)\in\mathbb{N}^n$ визначимо функцію $p_m:[0,1]\to\mathbb{C}^n$ рівністю

$$p_m(t)=\big(p_{m_1,1}(t),\ldots,p_{m_n,n}(t)\big).$$

Оскільки для кожних $l\in\mathbb{N}$ і $s\in\{1,\ldots,n\}$ функція $p_{l,s}$ належить простору $L_\infty[0,1]$ і $\|p_{l,s}\|_\infty=1$, то функція p_m належить простору $(L_\infty[0,1])^n$ і $\|p_m\|_{\infty,n}=1$.

Для $m=(m_1,\ldots,m_n)\in\mathbb{N}^n$ і $r\in\mathbb{Z}_+$ визначимо функцію $p_m^{(r)}:[0,1]\to\mathbb{C}^n$ рівністю

$$p_m^{(r)}(t)=\big(p_{m_1,1}^{(r)}(t),\ldots,p_{m_n,n}^{(r)}(t)\big). \tag{6.21}$$

Для $k=(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{(0,\ldots,0)\}$, $l\in\mathbb{N}$ і $r\in\mathbb{Z}_+$ маємо

$$R_k(p_m)=\int_{[0,1]}\prod_{\substack{s=1\\k_s>0}}^{n}\big(p_{m_s,s}(t)\big)^{k_s}\,dt\quad\text{і}\quad R_k\big(p_m^{(r)}\big)=\int_{[0,1]}\prod_{\substack{s=1\\k_s>0}}^{n}\big(p_{m_s,s}^{(r)}(t)\big)^{k_s}\,dt.$$

Оскільки послідовність функцій $\big\{p_{l,s}^{(r)}\big\}_{r=0}^{\infty}$ є поточково збіжною до функції $p_{l,s}$ майже скрізь на відрізку $[0,1]$, то послідовність функцій

$$\Big\{t\mapsto\prod_{\substack{s=1\\k_s>0}}^{n}\big(p_{m_s,s}^{(r)}(t)\big)^{k_s}\Big\}_{r=0}^{\infty}$$

є поточково збіжною до функції

$$t\mapsto\prod_{\substack{s=1\\k_s>0}}^{n}\big(p_{m_s,s}(t)\big)^{k_s}$$

майже скрізь на відрізку $[0,1]$ для кожних $l\in\mathbb{N}$ і $s\in\{1,\ldots,n\}$. Тому, згідно із теоремою Лебега про мажоровану збіжність,

$$\lim_{r\to\infty}\int_{[0,1]}\prod_{\substack{s=1\\k_s>0}}^{n}\big(p_{m_s,s}^{(r)}(t)\big)^{k_s}\,dt=\int_{[0,1]}\prod_{\substack{s=1\\k_s>0}}^{n}\big(p_{m_s,s}(t)\big)^{k_s}\,dt,$$

тобто

$$R_k(p_m) = \lim_{r\to\infty} R_k\big(p_m^{(r)}\big). \tag{6.22}$$

Доведемо, що для кожних $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n, m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ і $r \in \mathbb{Z}_+$ виконується рівність

$$R_k\big(p_m^{(r)}\big) = \prod_{j=0}^{r}\prod_{s=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi k_s}{2m_s}\frac{1}{j+2}\right).$$

Оскільки $k \in \mathbb{N}^n$, то

$$R_k\big(p_m^{(r)}\big) = \int_{[0,1]} \prod_{s=1}^{n} \big(p_{m_s,s}^{(r)}(t)\big)^{k_s}\, dt. \tag{6.23}$$

Згідно із рівностями (6.20), (6.21) і (6.23),

$$R_k\big(p_m^{(r)}\big) = \int_{[0,1]} \prod_{s=1}^{n} \exp\left(\frac{i\pi k_s}{2m_s}\sum_{j=0}^{r}\frac{\varepsilon_{nj+s}(t)}{j+2}\right) dt = \\ = \int_{[0,1]} \prod_{s=1}^{n}\prod_{j=0}^{r} \exp\left(\frac{i\pi k_s}{2m_s}\frac{\varepsilon_{nj+s}(t)}{j+2}\right) dt.$$

Згідно із лемою 6.6, у якій покладемо $[a,b] = [0,1]$, $N = n(r+1)$, $q_1 = \ldots = q_{N-1} = 2$ і

$$f_{nj+s}(t) = \exp\left(\frac{i\pi k_s}{2m_s}\frac{\varepsilon_{nj+s}(t)}{j+2}\right)$$

для $j \in \{0, 1, \ldots, r\}$ і $s \in \{1, \ldots, n\}$, оскільки функція f_l є періодичною з періодом $\frac{1}{2^{l-1}} = \frac{1}{Q_{l-1}}$ для кожного $l \in \{2, \ldots, N\}$, де $Q_0 = 1$ і $Q_l = 2^l$, маємо

$$\int_{[0,1]} \prod_{j=0}^{r}\prod_{s=1}^{n} \exp\left(\frac{i\pi k_s}{2m_s}\frac{\varepsilon_{nj+s}(t)}{j+2}\right) dt = \\ = \frac{Q_1Q_2\ldots Q_{N-1}}{(1-0)^{N-1}} \prod_{j=0}^{r}\prod_{s=1}^{n} \int_{\left(0,\frac{1}{Q_{nj+s-1}}\right)} \exp\left(\frac{i\pi k_s}{2m_s}\frac{\varepsilon_{nj+s}(t)}{j+2}\right) dt = \\ = 2^{(N-1)N/2} \prod_{j=0}^{r}\prod_{s=1}^{n} \int_{\left(0,\frac{1}{2^{nj+s-1}}\right)} \exp\left(\frac{i\pi k_s}{2m_s}\frac{\varepsilon_{nj+s}(t)}{j+2}\right) dt.$$

Зауважимо, що

$$\int_{\left(0,\frac{1}{2^{nj+s-1}}\right)}\exp\left(\frac{i\pi k_s}{2m_s}\frac{\varepsilon_{nj+s}(t)}{j+2}\right)dt=$$

$$=\int_{\left(0,\frac{1}{2^{nj+s}}\right)}\exp\left(\frac{i\pi k_s}{2m_s}\frac{\varepsilon_{nj+s}(t)}{j+2}\right)dt+\int_{\left(\frac{1}{2^{nj+s}},\frac{1}{2^{nj+s-1}}\right)}\exp\left(\frac{i\pi k_s}{2m_s}\frac{\varepsilon_{nj+s}(t)}{j+2}\right)dt=$$

$$=\int_{\left(0,\frac{1}{2^{nj+s}}\right)}\exp\left(\frac{i\pi k_s}{2m_s}\frac{\operatorname{sign}\sin 2^{nj+s}\pi t}{j+2}\right)dt+$$

$$+\int_{\left(\frac{1}{2^{nj+s}},\frac{1}{2^{nj+s-1}}\right)}\exp\left(\frac{i\pi k_s}{2m_s}\frac{\operatorname{sign}\sin 2^{nj+s}\pi t}{j+2}\right)dt=$$

$$=\int_{\left(0,\frac{1}{2^{nj+s}}\right)}\exp\left(\frac{i\pi k_s}{2m_s}\frac{1}{j+2}\right)dt+\int_{\left(\frac{1}{2^{nj+s}},\frac{1}{2^{nj+s-1}}\right)}\exp\left(\frac{i\pi k_s}{2m_s}\frac{-1}{j+2}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2^{nj+s}}\left(\exp\left(\frac{i\pi k_s}{2m_s}\frac{1}{j+2}\right)+\exp\left(\frac{i\pi k_s}{2m_s}\frac{-1}{j+2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2^{nj+s}}\cdot 2\cos\left(\frac{\pi k_s}{2m_s}\frac{1}{j+2}\right)=\frac{1}{2^{nj+s-1}}\cos\left(\frac{\pi k_s}{2m_s}\frac{1}{j+2}\right).$$

Тому

$$R_k\big(p_m^{(r)}\big)=2^{(N-1)N/2}\prod_{j=0}^{r}\prod_{s=1}^{n}\frac{1}{2^{nj+s-1}}\cos\left(\frac{\pi k_s}{2m_s}\frac{1}{j+2}\right).$$

Можна перевірити, що

$$2^{(N-1)N/2}\prod_{j=0}^{r}\prod_{s=1}^{n}\frac{1}{2^{nj+s-1}}=1.$$

Як наслідок,

$$R_k\big(p_m^{(r)}\big)=\prod_{j=0}^{r}\prod_{s=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi k_s}{2m_s}\frac{1}{j+2}\right). \tag{6.24}$$

Згідно із рівностями (6.22) і (6.24),

$$R_k(p_m)=\prod_{j=0}^{\infty}\prod_{s=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi k_s}{2m_s}\frac{1}{j+2}\right). \tag{6.25}$$

Для $l\in\mathbb{N}$ і $j\in\{1,\ldots,l\}$ нехай

$$\alpha_{j,l}=\exp\left(\frac{2\pi ij}{l}\right).$$

Для $l \in \mathbb{N}$ визначимо функцію $S_l : [0,1] \to \mathbb{C}$ рівністю

$$S_l(t) = \begin{cases} \alpha_{j,l}, & \text{якщо існує } j \in \{1, \ldots, l\} \text{ таке, що } t \in \left(\frac{j-1}{l}, \frac{j}{l}\right) \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Зауважимо, що для кожних $l, q \in \mathbb{N}$,

$$\int_{[0,1]} S_l^q(t)\,dt = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{l} a_{j,l}^q = \begin{cases} 1, & \text{якщо } q \text{ є кратним } l \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases} \tag{6.26}$$

Нехай $\mathrm{frac}(t)$ — це дробова частина дійсного числа t. Для кожного $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, визначимо функцію $y_m : [0,1] \to \mathbb{C}^n$ рівністю

$$\begin{aligned} y_m(t) = \Big(& S_{m_1}(t) p_{m_1,1}\big(\mathrm{frac}(m_1 m_2 \ldots m_n t)\big), \\ & S_{m_2}\big(\mathrm{frac}(m_1 t)\big) p_{m_2,2}\big(\mathrm{frac}(m_1 m_2 \ldots m_n t)\big), \ldots \\ & \ldots, S_{m_n}\big(\mathrm{frac}(m_1 m_2 \ldots m_{n-1} t)\big) p_{m_n,n}\big(\mathrm{frac}(m_1 m_2 \ldots m_n t)\big)\Big). \end{aligned}$$

Зауважимо, що $y_m \in (L_\infty[0,1])^n$ і $\|y_m\|_{\infty,n} = 1$. Нехай $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$. Тоді

$$\begin{aligned} R_k(y_m) = \int_{[0,1]} & S_{m_1}^{k_1}(t) p_{m_1,1}^{k_1}\big(\mathrm{frac}(m_1 m_2 \ldots m_n t)\big) \times \\ & \times S_{m_2}^{k_2}\big(\mathrm{frac}(m_1 t)\big) p_{m_2,2}^{k_2}\big(\mathrm{frac}(m_1 m_2 \ldots m_n t)\big) \times \ldots \times \\ & \times S_{m_n}^{k_n}\big(\mathrm{frac}(m_1 m_2 \ldots m_{n-1} t)\big) p_{m_n,n}^{k_n}\big(\mathrm{frac}(m_1 m_2 \ldots m_n t)\big)\,dt. \end{aligned}$$

Застосувавши лему 6.6, у якій покладемо

$$[a,b] = [0,1],\ N = n+1,\ q_1 = m_1,\ q_2 = m_2, \ldots, q_n = m_n,$$

$$f_1(t) = S_{m_1}^{k_1}(t),\ f_2(t) = S_{m_2}^{k_2}\big(\mathrm{frac}(m_1 t)\big), \ldots,$$

$$f_n(t) = S_{m_n}^{k_n}\big(\mathrm{frac}(m_1 m_2 \ldots m_{n-1} t)\big),$$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(t) = p_{m_1,1}^{k_1}\big(\mathrm{frac}(m_1 m_2 \ldots m_n t)\big) p_{m_2,2}^{k_2}\big(\mathrm{frac}(m_1 m_2 \ldots m_n t)\big) \times \ldots \times \\ \times p_{m_n,n}^{k_n}\big(\mathrm{frac}(m_1 m_2 \ldots m_n t)\big), \end{aligned}$$

отримуємо

$$R_k(y_m) = Q_1 Q_2 \dots Q_n \prod_{j=1}^{n+1} \int_{\left(0, \frac{1}{Q_{j-1}}\right)} f_j(t)\, dt,$$

де $Q_0 = 1, Q_1 = m_1, Q_2 = m_1 m_2, \dots, Q_n = m_1 m_2 \dots m_n$. Для кожного $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\int_{\left(0, \frac{1}{Q_{j-1}}\right)} f_j(t)\, dt = \int_{\left(0, \frac{1}{m_1 m_2 \dots m_{j-1}}\right)} S_{m_j}^{k_j}\big(\mathrm{frac}(m_1 m_2 \dots m_{j-1} t)\big)\, dt =$$

$$= \frac{1}{m_1 m_2 \dots m_{j-1}} \int_{(0,1)} S_{m_j}^{k_j}\big(\mathrm{frac}(t)\big)\, dt = \frac{1}{Q_{j-1}} \int_{(0,1)} S_{m_j}^{k_j}(t)\, dt.$$

Також зауважимо, що

$$\int_{\left(0, \frac{1}{Q_n}\right)} f_{n+1}(t)\, dt = \int_{\left(0, \frac{1}{m_1 m_2 \dots m_n}\right)} p_{m_1,1}^{k_1}\big(\mathrm{frac}(m_1 m_2 \dots m_n t)\big) \times$$

$$\times\, p_{m_2,2}^{k_2}\big(\mathrm{frac}(m_1 m_2 \dots m_n t)\big) \times \dots \times p_{m_n,n}^{k_n}\big(\mathrm{frac}(m_1 m_2 \dots m_n t)\big)\, dt =$$

$$= \frac{1}{m_1 m_2 \dots m_n} \int_{(0,1)} p_{m_1,1}^{k_1}\big(\mathrm{frac}(t)\big) p_{m_2,2}^{k_2}\big(\mathrm{frac}(t)\big) \times \dots \times p_{m_n,n}^{k_n}\big(\mathrm{frac}(t)\big)\, dt =$$

$$= \frac{1}{Q_n} \int_{(0,1)} p_{m_1,1}^{k_1}(t) p_{m_2,2}^{k_2}(t) \dots p_{m_n,n}^{k_n}(t)\, dt = \frac{1}{Q_n} R_k(p_m).$$

Тому

$$R_k(y_m) = \int_{(0,1)} S_{m_1}^{k_1}(t)\, dt \times \dots \times \int_{(0,1)} S_{m_n}^{k_n}(t)\, dt \times R_k(p_m). \tag{6.27}$$

Згідно із рівністю (6.26), якщо існує $j \in \{1, \dots, n\}$ таке, що k_j не є кратним m_j, то $\int_{(0,1)} S_{m_j}^{k_j}(t)\, dt = 0$. Тому, у цьому випадку, згідно із рівністю (6.27), $R_k(y_m) = 0$. Нехай $(k_1, \dots, k_n) = (\nu_1 m_1, \dots, nu_n m_n)$ для деяких $\nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{N}$. Тоді, згідно із рівністю (6.26), $\int_{(0,1)} S_{m_j}^{k_j}(t)\, dt = 1$ для кожного $j \in \{1, \dots, n\}$. Як наслідок, у цьому випадку, враховуючи рівність (6.25),

$$R_k(y_m) = R_k(p_m) = \prod_{j=0}^{\infty} \prod_{s=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi k_s}{2 m_s} \frac{1}{j+2}\right) = \prod_{j=0}^{\infty} \prod_{s=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi \nu_s}{2} \frac{1}{j+2}\right).$$

Якщо існує $s \in \{1, \dots, n\}$ таке, що $\nu_s > 1$, тоді один із множників дорівнює

$\cos\frac{\pi}{2}$, і тому $R_k(y_m) = 0$. У випадку $m = k$ маємо

$$R_k(y_k) = \prod_{j=0}^{\infty}\prod_{s=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{j+2}\right) = M^n, \tag{6.28}$$

де стала M визначена рівністю (2.2). Отже, для кожних $k, m \in \mathbb{N}^n$,

$$R_k(y_m) = \begin{cases} M^n, & \text{якщо } k = m \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases} \tag{6.29}$$

Для кожного $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, визначимо функцію $z_m : [0,1] \to \mathbb{C}^n$ рівністю

$$z_m = \frac{1}{\sqrt[|m|]{M^n}} y_m. \tag{6.30}$$

Взявши до уваги рівність $\|y_m\|_{\infty,n} = 1$ і нерівність $0 < M < 1$, отримуємо

$$\|z_m\|_{\infty,n} = \frac{1}{\sqrt[|m|]{M^n}}\|y_m\|_{\infty,n} \le \frac{1}{M^n}. \tag{6.31}$$

Для кожного $k \in \mathbb{N}^n$, зважаючи на те, що поліном R_k є $|k|$-однорідним, згідно із рівностями (6.29) і (6.30),

$$R_k(z_m) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } k = m \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases} \tag{6.32}$$

Для кожного інтервала $(a,b) \subset [0,1]$, визначимо відображення $G_{(a,b)} : (L_\infty[0,1])^n \to (L_\infty[0,1])^n$ рівністю

$$G_{(a,b)}(x)(t) = \begin{cases} x\left(\frac{t-a}{b-a}\right), & \text{якщо } t \in (a,b) \\ (\underbrace{0,\ldots,0}_{n}), & \text{інакше,} \end{cases}$$

де $x \in (L_\infty[0,1])^n$, $t \in [0,1]$. Можна перевірити, що для кожного $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0,\ldots,0)\}$ і для кожного $x \in (L_\infty[0,1])^n$ виконується рівність

$$R_k\big(G_{(a,b)}(x)\big) = (b-a)R_k(x). \tag{6.33}$$

Також зауважимо, що

$$\big\|G_{(a,b)}(x)\big\|_{\infty,n} = \|x\|_{\infty,n} \tag{6.34}$$

для кожного $x \in (L_\infty[0,1])^n$.

Побудуємо функцію $z \in (L_\infty[0,1])^n$ таку, що $z(t) = (\underbrace{0,\ldots,0}_{n})$ для кожного $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ і $R_k(z) = c(k)$ для кожного $k \in \mathbb{N}^n$. Для $w \in \{n, n+1, \ldots\}$ нехай

$$\Lambda_w = \big\{k \in \mathbb{N}^n : \ |k| = w\big\}.$$

Зауважимо, що $|\Lambda_w| = \binom{w-1}{n-1}$. Зафіксуємо лексикографічний порядок на множині Λ_w. Нехай відображення $\varkappa_w : \Lambda_w \to \big\{1, 2, \ldots, \binom{w-1}{n-1}\big\}$ — це бієкція, яка зберігає порядок. Для $w \in \{n, n+1, \ldots\}$ і $j \in \Big\{1, 2, \ldots, \binom{w-1}{n-1}\Big\}$ нехай

$$\Delta_{w,j} = \left(\frac{1}{2^{w-n+1}} + \frac{j-1}{\binom{w-1}{n-1} 2^{w-n+1}}, \frac{1}{2^{w-n+1}} + \frac{j}{\binom{w-1}{n-1} 2^{w-n+1}}\right).$$

Зауважимо, що

$$\mu(\Delta_{w,j}) = \frac{1}{\binom{w-1}{n-1} 2^{w-n+1}}.$$

Визначимо функцію $z : [0,1] \to \mathbb{C}^n$ рівністю

$$z(t) = \sum_{w=n}^{\infty} \sum_{j=1}^{\binom{w-1}{n-1}} \left(\frac{c\big(\varkappa_w^{-1}(j)\big)}{\mu(\Delta_{w,j})}\right)^{1/|\varkappa_w^{-1}(j)|} G_{\Delta_{w,j}}\big(z_{\varkappa_w^{-1}(j)}\big)(t).$$

Оскільки множини $\Delta_{w,j}$, де $w \in \{n, n+1, \ldots\}$ і $j \in \big\{1, 2, \ldots, \binom{w-1}{n-1}\big\}$, є попарно неперетинними, то

$$\|z\|_{\infty,n} = \max_{\substack{w \in \{n, n+1, \ldots\} \\ j \in \left\{1, 2, \ldots, \binom{w-1}{n-1}\right\}}} \left|\frac{c\big(\varkappa_w^{-1}(j)\big)}{\mu(\Delta_{w,j})}\right|^{1/|\varkappa_w^{-1}(j)|} \big\|G_{\Delta_{w,j}}\big(z_{\varkappa_w^{-1}(j)}\big)\big\|_{\infty,n}.$$

Згідно із нерівністю (6.31) і рівністю (6.34),

$$\big\|G_{\Delta_{w,j}}\big(z_{\varkappa_w^{-1}(j)}\big)\big\|_{\infty,n} = \big\|z_{\varkappa_w^{-1}(j)}\big\|_{\infty,n} \le \frac{1}{M^n}.$$

Зауважимо, що для кожних $w \in \{n, n+1, \ldots\}$ і $j \in \big\{1, 2, \ldots, \binom{w-1}{n-1}\big\}$,

$$\big|c\big(\varkappa_w^{-1}(j)\big)\big|^{1/|\varkappa_w^{-1}(j)|} \le \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0,\ldots,0)\}} |c(k)|^{1/|k|}$$

і

$$\left|\frac{1}{\mu(\Delta_{w,j})}\right|^{1/|\varkappa_w^{-1}(j)|} = \left(\binom{w-1}{n-1} 2^{w-n+1}\right)^{1/w}.$$

Враховуючи нерівності $\binom{w-1}{n-1} \leq 2^{w-1}$ і $2^{w-n+1} < 2^{w+1}$, отримуємо

$$\left(\binom{w-1}{n-1} 2^{w-n+1}\right)^{1/w} \leq \left(2^{w-1}2^{w+1}\right)^{1/w} = 4.$$

Отже,

$$\|z\|_{\infty,n} \leq \frac{4}{M^n} \sup_{k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{(0,\ldots,0)\}} |c(k)|^{1/|k|}. \tag{6.35}$$

Для $k \in \mathbb{N}^n$, взявши до уваги рівності (6.32) і (6.33),

$$R_k(z) = \sum_{w=n}^{\infty} \sum_{j=1}^{\binom{w-1}{n-1}} \left(\frac{c\big(\varkappa_w^{-1}(j)\big)}{\mu(\Delta_{w,j})}\right)^{|k|/|\varkappa_w^{-1}(j)|} R_k\Big(G_{\Delta_{w,j}}\big(z_{\varkappa_w^{-1}(j)}\big)\Big) =$$

$$= \sum_{w=n}^{\infty} \sum_{j=1}^{\binom{w-1}{n-1}} \left(\frac{c\big(\varkappa_w^{-1}(j)\big)}{\mu(\Delta_{w,j})}\right)^{|k|/w} \mu(\Delta_{w,j}) R_k\big(z_{\varkappa_w^{-1}(j)}\big) =$$

$$= \left(\frac{c(k)}{\mu\big(\Delta_{|k|,\varkappa_w(k)}\big)}\right)^{|k|/|k|} \mu(\Delta_{|k|,\varkappa_w(k)}) = c(k). \tag{6.36}$$

Також зауважимо, що $z(t) = (\underbrace{0,\ldots,0}_{n})$ для кожного $t \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$, оскільки $\Delta_{w,j} \subset \left(\frac{1}{2},1\right]$ для кожних $w \in \{n,n+1,\ldots\}$ і $j \in \left\{1,2,\ldots,\binom{w-1}{n-1}\right\}$.

Побудуємо функцію $x_c \in (L_\infty[0,1])^n$ таку, що $R_k(x_c) = c(k)$ для кожного $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0,\ldots,0)\}$. Для кожного $s \in \{1,\ldots,n\}$, нехай

$$\Psi_s = \Big\{k = (k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0,\ldots,0)\} : \ k_s = 0\Big\}.$$

Нехай $\Omega_1 = \Psi_1$ і

$$\Omega_s = \Big\{k = (k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0,\ldots,0)\} : \ k_1 \geq 1,\ldots,k_{s-1} \geq 1, k_s = 0\Big\}$$

для кожного $s \in \{2,\ldots,n\}$. Зауважимо, що множини $\Omega_1,\ldots,\Omega_n$ є попарно неперетинними. Також зауважимо, що $\Psi_s \subset \Omega_1 \sqcup \ldots \sqcup \Omega_s$ для кожного $s \in \{1,\ldots,n\}$. Визначимо відображення $d_1 : \Psi_1 \to \mathbb{C}$ рівністю

$$d_1(k) = 2n\big(c(k) - R_k(z)\big), \tag{6.37}$$

де $k \in \Psi_1$. Для $s \in \{2, \dots, n\}$, визначимо відображення $d_s : \Psi_s \to \mathbb{C}$ рівністю

$$d_s(k) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k \in \Psi_s \cap (\Omega_1 \sqcup \ldots \sqcup \Omega_{s-1}) \\ 2n\bigl(c(k) - R_k(z)\bigr), & \text{якщо } k \in \Psi_s \cap \Omega_s, \end{cases} \tag{6.38}$$

де $k \in \Psi_s$. Покажемо, що $\sup_{k\in\Psi_s} |d_s(k)|^{1/|k|} < \infty$ для кожного $s \in \{1, \dots, n\}$. Зауважимо, що для кожного $k \in \Psi_s$,

$$|d_s(k)| \le 2n\bigl(|c(k)| + |R_k(z)|\bigr).$$

Оскільки

$$|c(k)|^{1/|k|} \le \sup_{m\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{(0,\dots,0)\}} |c(m)|^{1/|m|},$$

то

$$|c(k)| \le \left(\sup_{m\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{(0,\dots,0)\}} |c(m)|^{1/|m|}\right)^{|k|}.$$

Згідно з нерівностями (1.6) і (6.35), враховуючи, що $\|R_k\| = 1$,

$$|R_k(z)| \le \|R_k\|\|z\|_{\infty,n}^{|k|} \le \left(\frac{4}{M^n}\sup_{m\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{(0,\dots,0)\}} |c(m)|^{1/|m|}\right)^{|k|}.$$

Тому

$$\begin{aligned} &|c(k)| + |R_k(z)| \le \\ &\le \left(\sup_{m\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{(0,\dots,0)\}} |c(m)|^{1/|m|}\right)^{|k|} + \left(\frac{4}{M^n}\sup_{m\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{(0,\dots,0)\}} |c(m)|^{1/|m|}\right)^{|k|} = \\ &= \left(1 + \left(\frac{4}{M^n}\right)^{|k|}\right)\left(\sup_{m\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{(0,\dots,0)\}} |c(m)|^{1/|m|}\right)^{|k|}. \end{aligned}$$

Отже,

$$|d_s(k)| \le 2n\left(1 + \left(\frac{4}{M^n}\right)^{|k|}\right)\left(\sup_{m\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{(0,\dots,0)\}} |c(m)|^{1/|m|}\right)^{|k|}.$$

Оскільки $2n \le (2n)^{|k|}$ і $1 + \left(\frac{4}{M^n}\right)^{|k|} \le \left(1 + \frac{4}{M^n}\right)^{|k|}$, то

$$|d_s(k)| \le \left(2n\left(1 + \frac{4}{M^n}\right)\sup_{m\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{(0,\dots,0)\}} |c(m)|^{1/|m|}\right)^{|k|},$$

тобто

$$|d_s(k)|^{1/|k|} \le 2n\left(1+\frac{4}{M^n}\right)\sup_{m\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{(0,\dots,0)\}}|c(m)|^{1/|m|}.$$

Отже,

$$\sup_{k\in\Psi_s}|d_s(k)|^{1/|k|} \le 2n\left(1+\frac{4}{M^n}\right)\sup_{m\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{(0,\dots,0)\}}|c(m)|^{1/|m|}<\infty. \tag{6.39}$$

Тому, згідно із припущенням індукції, існує стала $K_{n-1}>0$ така, що для кожного $s\in\{1,\dots,n\}$ існує функція $v^{(s)}=\left(v_1^{(s)},\dots,v_n^{(s)}\right)\in(L_\infty[0,1])^n$ така, що $v_s^{(s)}\equiv 0$,

$$R_k\big(v^{(s)}\big)=d_s(k) \tag{6.40}$$

для кожного $k\in\Psi_s$, і

$$\big\|v^{(s)}\big\|_{\infty,n}\le K_{n-1}\sup_{k\in\Psi_s}|d_s(k)|^{1/|k|}. \tag{6.41}$$

Згідно із нерівностями (6.39) і (6.41),

$$\big\|v^{(s)}\big\|_{\infty,n}\le 2nK_{n-1}\left(1+\frac{4}{M^n}\right)\sup_{m\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{(0,\dots,0)\}}|c(m)|^{1/|m|}. \tag{6.42}$$

Нехай

$$x_c=z+\sum_{j=1}^{n}G_{\Gamma_j}\big(v^{(j)}\big),$$

де

$$\Gamma_j=\left(\frac{j-1}{2n},\frac{j}{2n}\right)$$

для кожного $j\in\{1,\dots,n\}$. Зауважимо, що

$$\|x_c\|_{\infty,n}=\max\left\{\|z\|_{\infty,n},\big\|G_{\Gamma_1}\big(v^{(1)}\big)\big\|_{\infty,n},\dots,\big\|G_{\Gamma_n}\big(v^{(n)}\big)\big\|_{\infty,n}\right\}.$$

Згідно із рівністю (6.34), $\big\|G_{\Gamma_j}\big(v^{(j)}\big)\big\|_{\infty,n}=\big\|v^{(j)}\big\|_{\infty,n}$ для кожного $j\in\{1,\dots,n\}$. Тому, враховуючи нерівності (6.35) і (6.42),

$$\begin{aligned}\|x_c\|_{\infty,n}\le\max\Bigg\{&\frac{4}{M^n}\sup_{k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{(0,\dots,0)\}}|c(k)|^{1/|k|},\\ &2nK_{n-1}\left(1+\frac{4}{M^n}\right)\sup_{k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{(0,\dots,0)\}}|c(k)|^{1/|k|}\Bigg\}=\\ &=\max\left\{\frac{4}{M^n},2nK_{n-1}\left(1+\frac{4}{M^n}\right)\right\}\sup_{k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{(0,\dots,0)\}}|c(k)|^{1/|k|}.\end{aligned}$$

Отже,

$$\|x_c\|_{\infty,n} \le K_n \sup_{k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{(0,\ldots,0)\}} |c(k)|^{1/|k|},$$

де

$$K_n = \max\left\{\frac{4}{M^n}, 2nK_{n-1}\left(1+\frac{4}{M^n}\right)\right\}.$$

Для кожного $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0,\ldots,0)\}$, враховуючи рівність (6.33),

$$R_k(x_c) = R_k(z) + \sum_{j=1}^{n} \mu(\Gamma_j) R_k\big(v^{(j)}\big) = R_k(z) + \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n} R_k\big(v^{(j)}\big).$$

Для $k \in \mathbb{N}^n$, враховуючи, що $v_s^{(s)} \equiv 0$, і, як наслідок, $R_k\big(v_s^{(s)}\big) = 0$ для кожного $s \in \{1,\ldots,n\}$, маємо $R_k(x_c) = R_k(z)$. Тому, згідно із рівністю (6.36), $R_k(x_c) = c(k)$.

Нехай $k = (k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{Z}_+^n \setminus (\{(0,\ldots,0)\} \cup \mathbb{N}^n)$. Зауважимо, що

$$\mathbb{Z}_+^n \setminus (\{(0,\ldots,0)\} \cup \mathbb{N}^n) = \Omega_1 \sqcup \ldots \sqcup \Omega_n.$$

Тому існує $s \in \{1,\ldots,n\}$ таке, що $k \in \Omega_s$. Розглянемо випадок $k \in \Omega_1$. Покажемо, що $R_k(x_c) = c(k)$ у цьому випадку. Нагадаємо, що $\Omega_1 = \Psi_1$. Згідно із рівностями (6.37) і (6.40),

$$R_k\big(v^{(1)}\big) = 2n\big(c(k) - R_k(z)\big).$$

Для $j \in \{2,\ldots,n\}$, якщо $k_j > 0$, то $R_k\big(v^{(j)}\big) = 0$, оскільки $v_j^{(j)} \equiv 0$, і якщо $k_j = 0$, то $k \in \Psi_j$ і, як наслідок, згідно із рівністю (6.38), $R_k\big(v^{(j)}\big) = 0$. Тому

$$R_k(x_c) = R_k(z) + \frac{1}{2n}\cdot 2n\big(c(k) - R_k(z)\big) = c(k).$$

Розглянемо випадок $k \in \Omega_s$, де $s \in \{2,\ldots,n\}$. Покажемо, що $R_k(x_c) = c(k)$ у цьому випадку. Маємо $k_1 \ge 1,\ldots,k_{s-1} \ge 1$ і $k_s = 0$. Тому $R_k\big(v^{(j)}\big) = 0$ для кожного $j \in \{1,\ldots,s-1\}$, оскільки $v_j^{(j)} \equiv 0$. Оскільки $k_s = 0$, то $k \in \Psi_s$. Тому, згідно із рівностями (6.38) і (6.40), враховуючи, що $k \in \Omega_s$, маємо $R_k\big(v^{(s)}\big) = 2n\big(c(k) - R_k(z)\big)$. Для $j \in \{s+1,\ldots,n\}$, якщо $k_j = 0$, то $k \in \Psi_j \cap \Omega_s$, тому, згідно із рівностями (6.38) і (6.40), маємо $R_k\big(v^{(j)}\big) = 0$, інакше, якщо $k_j \geq 1$, то $R_k\big(v^{(j)}\big) = 0$, оскільки $v_j^{(j)} \equiv 0$. Тому, у цьому випадку

$$R_k(x_c) = R_k(z) + \frac{1}{2n} \cdot 2n\big(c(k) - R_k(z)\big) = c(k).$$

Теорему доведено. $\square$

Нехай $H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)$ — це алгебра Фреше всіх цілих симетричних функцій $f : (L_\infty[0,1])^n \to \mathbb{C}$, які є обмеженими на обмежених множинах, із топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах. Нехай

$$\|f\|_r = \sup_{\|x\|_{\infty,n} \leq 1} |f(x)|$$

для $f \in H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)$ і $r > 0$. Топологія алгебри Фреше $H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)$ є породженою кожною сім'єю норм

$$\big\{\|\cdot\|_r : \ r \in U\big\},$$

де U — це довільна необмежена підмножина множини $(0, +\infty)$.

Кожну функцію $f \in H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)$ можна подати у вигляді ряду Тейлора із неперервних однорідних поліномів, які, згідно із інтегральною формулою Коші (1.13) і згідно із симетричністю функції f, також є симетричними. Тому, згідно із теоремою 6.1, кожну функцію $f \in H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)$ можна зобразити у вигляді

$$f(x) = f(0) + \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{\substack{l : M_N \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l, M_N) = N}} \alpha_l \prod_{\substack{k \in M_N \\ l(k) > 0}} \big(R_k(x)\big)^{l(k)},$$

де $x \in (L_\infty[0,1])^n$, $\alpha_l \in \mathbb{C}$, множина M_N визначена рівністю (6.5) і відображення $\varkappa$ визначене рівністю (6.4). Зауважимо, що даний ряд збігається рівномірно на обмежених множинах.

Займемося дослідженням спектра $\mathcal{M}\left(H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)\right)$ алгебри Фреше $H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)$, тобто множини всіх неперервних нетривіальних комплекснозначних гомоморфізмів (характерів) на цій алгебрі. Для кожного характера $\varphi \in \mathcal{M}\left(H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)\right)$, із неперервності, лінійності і мультиплікативності, враховуючи рівність $\varphi(1) = 1$, випливає рівність

$$\varphi(f) = f(0) + \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{\substack{l:M_N\to\mathbb{Z}_+\\ \varkappa(l,M_N)=N}} \alpha_l \prod_{\substack{k\in M_N\\ l(k)>0}} \big(\varphi(R_k)\big)^{l(k)}.$$

Отже, характер φ повністю визначається своїми значеннями на поліномах R_k, де $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0,\ldots,0)\}$. Отже, кожен характер $\varphi \in \mathcal{M}\left(H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)\right)$ цілком визначається відображенням $c_\varphi : \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0,\ldots,0)\} \to \mathbb{C}$, визначеним рівністю

$$c_\varphi(k) = \varphi(R_k), \tag{6.43}$$

для $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0,\ldots,0)\}$.

Твердження 6.3. *Для кожного* $\varphi \in \mathcal{M}\left(H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)\right)$,

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{(0,\ldots,0)\}} \big|\varphi(R_k)\big|^{1/|k|} < \infty.$$

Доведення. Нехай $\varphi \in \mathcal{M}\left(H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)\right)$. Оскільки відображення φ є неперервним лінійним функціоналом, то існує $r > 0$ таке, що відображення φ є неперервним відносно норми $\|\cdot\|_r$. Як наслідок, існує стала $C > 0$ така, що

$$|\varphi(f)| \le C\|f\|_r$$

для кожного $f \in H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)$. Тому, враховуючи, що $\|R_k\|_r = r^{|k|}$, маємо

$$|\varphi(R_k)| \le Cr^{|k|}$$

для кожного $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0,\ldots,0)\}$. Як наслідок,

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{(0,\ldots,0)\}} \big|\varphi(R_k)\big|^{1/|k|} \le r \sup_{k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{(0,\ldots,0)\}} C^{1/|k|} \le r\max\{1, C\} < \infty.$$

Твердження доведено. □

Зауважимо, що для кожного елемента $x \in (L_\infty[0,1])^n$ функціонал обчислення значення в точці δ_x, визначений рівністю

$$\delta_x(f) = f(x),$$

де $f \in H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)$, належить до множини $\mathcal{M}\left(H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)\right)$.

Твердження 6.4. *Кожен характер* $\varphi \in \mathcal{M}\left(H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)\right)$ *є функціоналом обчислення значення в точці.*

Доведення. Нехай $\varphi \in \mathcal{M}\left(H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)\right)$. Згідно із твердженням 6.3,

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{(0,\ldots,0)\}} \left|c_\varphi(k)\right|^{1/|k|} < \infty,$$

де відображення c_φ визначене рівністю (6.43). Тому, згідно із теоремою 6.2, існує функція $x_{c_\varphi} \in (L_\infty[0,1])^n$ така, що $R_k\big(x_{c_\varphi}\big) = c_\varphi(k)$, тобто $\delta_{x_{c_\varphi}}(R_k) = c_\varphi(k)$ для кожного $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0,\ldots,0)\}$. Тому $\delta_{x_{c_\varphi}} = \varphi$. Твердження доведено. $\square$

Нехай Δ — це множина всіх відображень $c : \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0,\ldots,0)\} \to \mathbb{C}$ таких, що

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{(0,\ldots,0)\}} \left|c(k)\right|^{1/|k|} < \infty.$$

Твердження 6.5. *Відображення*

$$\Phi : \mathcal{M}\left(H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)\right) \ni \varphi \mapsto c_\varphi \in \Delta,$$

де відображення c_φ *визначене рівністю* (6.43)*, є бієкцією.*

Доведення. Оскільки кожен характер $\varphi \in \mathcal{M}\left(H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)\right)$ цілком визначається своїми значеннями на поліномах R_k, де $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0,\ldots,0)\}$, то відображення Φ є ін'єктивним.

Для кожного відображення $c \in \Delta$, згідно із теоремою 6.2, існує функція $x_c \in (L_\infty[0,1])^n$ така, що $\Phi(\delta_{x_c}) = c$. Тому відображення Φ є сюр'єктивним. Твердження доведено. $\square$

6.3. Висновки до розділу 6

Цей розділ присвячено дослідженням неперервних симетричних поліномів і цілих аналітичних симетричних функцій на декартовому степені комплексного банахового простору $L_\infty[0,1]$ всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку $[0,1]$.

Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому степені простору $L_\infty[0,1]$.

Описано спектр алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на декартовому степені простору $L_\infty[0,1]$.

Результати, наведені в цьому розділі, опубліковано в таких працях: [4], [107], [113], [114], [124].

РОЗДІЛ 7

ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Даний розділ присвячено вивченню деяких класів диференційовних у дійсному сенсі функцій на банахових просторах.

7.1. Симетричні поліноми на деяких банахових просторах послідовностей дійсних векторів

Даний підрозділ присвячено вивченню алгебри всіх дійснозначних симетричних неперервних поліномів на дійсному банаховому просторі $\ell_p(\mathbb{R}^n)$ (див. приклад 1.3). Буде доведено, що так звані степеневі симетричні поліноми утворюють зліченний алгебраїчний базис цієї алгебри.

Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $p \in [1, +\infty)$. Нехай $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$. Розглянемо банахів простір $\ell_p(\mathbb{K}^n)$ всіх послідовностей векторів

$$x = (x_1, x_2, \ldots),$$

де $x_j = \left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right) \in \mathbb{K}^n$ для $j \in \mathbb{N}$, таких, що ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{n} |x_j^{(s)}|^p$$

збіжний (див. приклад 1.3), із нормою $\|\cdot\|_{\ell_p(\mathbb{K}^n)}$, визначеною формулою (1.16). Згідно із означенням 1.20, функцію f, задану на просторі $\ell_p(\mathbb{K}^n)$ називають симетричною, якщо $f(x \circ \sigma) = f(x)$ для кожної послідовності $x \in \ell_p(\mathbb{K}^n)$ і кожної бієкції $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, де $x \circ \sigma = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots)$.

Для кожного неперервного m-однорідного комплекснозначного (нам потрібне це припущення заради можливості застосування результатів даного підрозділу у підрозділі 7.3) полінома P на просторі $\ell_p(\mathbb{R}^n)$ визначимо m-однорідний поліном $\widehat{P} : \ell_p(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}$ наступним чином. Нехай $A_P^{(s)}$ — це

m-лінійне симетричне відображення, асоційоване з поліномом P. Визначимо відображення $A_{\widehat{P}}^{(s)} : \underbrace{\ell_p(\mathbb{C}^n) \times \ldots \times \ell_p(\mathbb{C}^n)}_{m} \to \mathbb{C}$ формулою

$$A_{\widehat{P}}^{(s)}(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{j_1=0}^{1} \ldots \sum_{j_m=0}^{1} i^{j_1+\ldots+j_m} A_P^{(s)}\Big(w_{j_1}(z_1), \ldots, w_{j_m}(z_m)\Big), \qquad (7.1)$$

де оператори $w_0, w_1 : \ell_p(\mathbb{C}^n) \to \ell_p(\mathbb{R}^n)$ визначені формулами

$$w_0(z) = \big(\big(\operatorname{Re} x_1^{(1)}, \ldots, \operatorname{Re} x_1^{(n)}\big), \big(\operatorname{Re} x_2^{(1)}, \ldots, \operatorname{Re} x_2^{(n)}\big), \ldots\big),$$

$$w_1(z) = \big(\big(\operatorname{Im} x_1^{(1)}, \ldots, \operatorname{Im} x_1^{(n)}\big), \big(\operatorname{Im} x_2^{(1)}, \ldots, \operatorname{Im} x_2^{(n)}\big), \ldots\big)$$

для кожної послідовності $z = \big(\big(x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(n)}\big), \big(x_2^{(1)}, \ldots, x_2^{(n)}\big), \ldots\big) \in \ell_p(\mathbb{C}^n)$. Зауважимо, що оператори w_1 і w_2 є лінійними, неперервними, $\|w_0\| = 1$ і $\|w_1\| = 1$. Можна перевірити, що $A_{\widehat{P}}^{(s)}$ є m-лінійним симетричним відображенням. Згідно із неперервністю відображень $A_p^{(s)}, w_0$ і w_1, відображення $A_{\widehat{P}}^{(s)}$ є неперервним. Згідно із рівністю (7.1), враховуючи, що $\|w_0\| = 1$ і $\|w_1\| = 1$,

$$\big\|A_{\widehat{P}}^{(s)}\big\| \le 2^m \big\|A_P^{(s)}\big\|. \qquad (7.2)$$

Нехай $\widehat{P}$ — це звуження відображення $A_{\widehat{P}}^{(s)}$ на діагональ. Оскільки відображення $A_P^{(s)}$ є неперервним і m-лінійним, то відображення $\widehat{P}$ є неперервним m-однорідним поліномом. Згідно із нерівностями (1.7) і (7.2) та рівністю (7.1),

$$\big\|\widehat{P}\big\| \le \big\|A_{\widehat{P}}^{(s)}\big\| \le 2^m \big\|A_P^{(s)}\big\| \le \frac{(2m)^m}{m!}\|P\|. \qquad (7.3)$$

Можна перевірити, що для кожного m_1-однорідного полінома P_1 і для кожного m_2-однорідного полінома P_2, які діють з простору $\ell_p(\mathbb{R}^n)$ в $\mathbb{C}$, де $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, маємо $\widehat{P_1 P_2} = \widehat{P_1}\widehat{P_2}$.

Для кожного неперервного полінома $P : \ell_p(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ вигляду (1.4) нехай

$$\widehat{P} = P_0 + \widehat{P}_1 + \ldots + \widehat{P}_K.$$

Твердження 7.1. *Нехай* Γ *— це деяка непорожня множина індексів. Для кожного* $\gamma \in \Gamma$, *нехай* $P_\gamma : \ell_p(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ *— це неперервний*

m_γ-однорідний поліном, де $m_\gamma \in \mathbb{N}$. Припустимо, що множина поліномів $\big\{\widehat{P}_\gamma : \ \gamma \in \Gamma\big\}$ є алгебраїчно незалежною. Тоді множина поліномів $\big\{P_\gamma : \gamma \in \Gamma\big\}$ є алгебраїчно незалежною.

Доведення. Нехай Γ_0 — це довільна скінченна непорожня підмножина множини Γ. Покажемо, що множина поліномів $\big\{P_\gamma : \ \gamma \in \Gamma_0\big\}$ є алгебраїчно незалежною. Припустимо, що

$$\alpha_0 + \sum_{\mu=1}^{\mu'} \sum_{\substack{l:\Gamma_0 \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l)=\mu}} \alpha_l \prod_{\substack{\gamma\in\Gamma_0 \\ l(\gamma)>0}} \Big(P_\gamma(x)\Big)^{l(\gamma)} = 0 \tag{7.4}$$

для кожного $x \in \ell_p(\mathbb{R}^n)$, де $\alpha_0, \alpha_l \in \mathbb{C}$, $\mu' \in \mathbb{N}$, $\varkappa(l) = \sum_{\gamma\in\Gamma_0} l(\gamma) m_\gamma$. Для $\mu \in \{1, \ldots, \mu'\}$ визначимо поліном $Q_\mu : \ell_p(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ рівністю

$$Q_\mu(x) = \sum_{\substack{l:\Gamma_0 \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l)=\mu}} \alpha_l \prod_{\substack{\gamma\in\Gamma_0 \\ l(\gamma)>0}} \Big(P_\gamma(x)\Big)^{l(\gamma)},$$

де $x \in \ell_p(\mathbb{R}^n)$. Згідно із твердженням 1.2, взявши до уваги рівність (7.4), отримуємо, що $\alpha_0 = 0$ і для кожного $\mu \in \{1, \ldots, \mu'\}$ поліном Q_μ тотожно дорівнює нулю, тобто $\|Q_\mu\| = 0$. Згідно з нерівністю (7.3),

$$\|\widehat{Q}_\mu\| \le \frac{(2\mu)^\mu}{\mu!} \|Q_\mu\|,$$

тому $\|\widehat{Q}_\mu\| = 0$. Як наслідок, поліном $\widehat{Q}_\mu$ тотожно дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{\substack{l:\Gamma_0 \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l)=\mu}} \alpha_l \prod_{\substack{\gamma\in\Gamma_0 \\ l(\gamma)>0}} \Big(\widehat{P}_\gamma(z)\Big)^{l(\gamma)} = 0$$

для кожної послідовності $z \in \ell_p(\mathbb{C}^n)$. Оскільки множина поліномів $\big\{\widehat{P}_\gamma : \gamma \in \Gamma_0\big\}$ є алгебраїчно незалежною, то кожен коефіцієнт α_l дорівнює нулю. Отже, множина поліномів $\big\{P_\gamma : \ \gamma \in \Gamma_0\big\}$ є алгебраїчно незалежною.

Оскільки кожна скінченна непорожня підмножина множини поліномів $\big\{P_\gamma : \ \gamma \in \Gamma\big\}$ є алгебраїчно незалежною, то множина $\big\{P_\gamma : \ \gamma \in \Gamma\big\}$ є алгебраїчно незалежною. Твердження доведено. □

Для кожного мультиіндексу $k \in \mathbb{Z}_+^n$ такого, що $|k| \geq \lceil p \rceil$ визначимо відображення $H_k^{(\mathbb{R}^n)} : \ell_p(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ формулою

$$H_k^{(\mathbb{R}^n)}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{\substack{s=1 \\ k_s>0}}^{n} \left(x_j^{(s)}\right)^{k_s}. \tag{7.5}$$

Зауважимо, що відображення $H_k^{(\mathbb{R}^n)}$ є симетричним $|k|$-однорідним поліномом. Неперервність цього полінома можна довести аналогічно до твердження 3.3.

Теорема 7.1. *Нехай $P : \ell_p(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ — це неперервний m-однорідний симетричний поліном. Тоді у випадку $1 \leq m < \lceil p \rceil$ поліном P тотожно дорівнює нулю. У випадку $m \geq \lceil p \rceil$ поліном P можна єдиним чином подати у вигляді*

$$P(x) = \sum_{\substack{l:\Gamma_m \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l)=m}} \alpha_l \prod_{\substack{k \in \Gamma_m \\ l(k)>0}} \left(H_k^{(\mathbb{R}^n)}(x)\right)^{l(k)},$$

де $x \in \ell_p(\mathbb{R}^n)$, $\alpha_l \in \mathbb{C}$, $\Gamma_m = \left\{k \in \mathbb{Z}_+^n : \ \lceil p \rceil \leq |k| \leq m\right\}$ і функція $\varkappa$ від відображення $l : \Gamma_m \to \mathbb{Z}_+$ визначена формулою $\varkappa(l) = \sum_{k \in \Gamma_m} |k| l(k)$.

Доведення. Нехай P — це неперервний m-однорідний симетричний комплекснозначний поліном на просторі $\ell_p(\mathbb{R}^n)$, де $m \in \mathbb{N}$. Тоді $\widehat{P}$ є неперервним m-однорідним комплекснозначним поліномом на просторі $\ell_p(\mathbb{C}^n)$. Покажемо, що поліном $\widehat{P}$ є симетричним. Нехай $z \in \ell_p(\mathbb{C}^n)$ і $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — бієкція. Покажемо, що $\widehat{P}(z \circ \sigma) = \widehat{P}(z)$. Згідно із поляризаційною формулою (1.1), взявши до уваги, що поліном P є симетричним,

$$\begin{aligned} &A_P^{(s)}(x_1 \circ \sigma, \ldots, x_m \circ \sigma) = \\ &\quad = \frac{1}{2^m m!} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m=\pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m P(\varepsilon_1 x_1 \circ \sigma + \ldots + \varepsilon_m x_m \circ \sigma) = \\ &\quad = \frac{1}{2^m m!} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m=\pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m P((\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_m x_m) \circ \sigma) = \\ &\quad = \frac{1}{2^m m!} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m=\pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m P(\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_m x_m) = \\ &\quad = A_P^{(s)}(x_1, \ldots, x_m) \end{aligned} \tag{7.6}$$

для кожних $x_1, \ldots, x_m \in \ell_p(\mathbb{R}^n)$. Згідно із рівностями (7.1) і (7.6), взявши до уваги рівності $w_0(z \circ \sigma) = w_0(z)$ і $w_1(z \circ \sigma) = w_1(z)$, отримуємо

$$\begin{aligned}\widehat{P}(z \circ \sigma) &= A_{\widehat{P}}(\underbrace{z \circ \sigma, \ldots, z \circ \sigma}_{m}) = \\ &= \sum_{j_1=0}^{1} \ldots \sum_{j_m=0}^{1} i^{j_1+\ldots+j_m} A_P\Big(w_{j_1}(z \circ \sigma), \ldots, w_{j_m}(z \circ \sigma)\Big) = \\ &= \sum_{j_1=0}^{1} \ldots \sum_{j_m=0}^{1} i^{j_1+\ldots+j_m} A_P\Big(w_{j_1}(z) \circ \sigma, \ldots, w_{j_m}(z) \circ \sigma\Big) = \\ &= \sum_{j_1=0}^{1} \ldots \sum_{j_m=0}^{1} i^{j_1+\ldots+j_m} A_P\Big(w_{j_1}(z), \ldots, w_{j_m}(z)\Big) = \widehat{P}(z).\end{aligned}$$

Отже, поліном $\widehat{P}$ є симетричним. Таким чином, відображення $\widehat{P}$ є комплекснозначним неперервним симетричним m-однорідним поліномом на просторі $\ell_p(\mathbb{C}^n)$. Тому, згідно із наслідком 3.5, поліном $\widehat{P}$ можна єдиним чином подати у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів $H_k^{(\mathbb{C}^n)}$, де мультиіндекси $k \in \mathbb{Z}_+^n$ такі, що $|k| \geq \lceil p \rceil$. Оскільки кожен поліном $H_k^{(\mathbb{C}^n)}$ є $|k|$-однорідним і $|k| \geq \lceil p \rceil$, то, у випадку $m < \lceil p \rceil$, поліном $\widehat{P}$ тотожно дорівнює нулю. У випадку $m \geq \lceil p \rceil$, поліном $\widehat{P}$ є алгебраїчною комбінацією поліномів $H_k^{(\mathbb{C}^n)}$, де $k \in \mathbb{Z}_+^n$ такі, що $m \geq |k| \geq \lceil p \rceil$, тобто

$$\widehat{P}(z) = \sum_{\substack{l:\Gamma_m \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l)=m}} \alpha_l \prod_{\substack{k \in \Gamma_m \\ l(k)>0}} \Big(H_k^{(\mathbb{C}^n)}(z)\Big)^{l(k)}, \tag{7.7}$$

для кожної послідовності $z \in \ell_p(\mathbb{C}^n)$, де $\alpha_l \in \mathbb{C}$, $\Gamma_m = \big\{k \in \mathbb{Z}_+^n : \lceil p \rceil \leq |k| \leq m\big\}$ і $\varkappa(l) = \sum_{k \in \Gamma_m} |k| l(k)$. Оскільки поліноми P і $H_k^{(\mathbb{R}^n)}$ є звуженнями на простір $\ell_p(\mathbb{R}^n)$ поліномів $\widehat{P}$ і $H_k^{(\mathbb{C}^n)}$ відповідно, то, згідно з рівністю (7.7),

$$P(x) = \sum_{\substack{l:\Gamma_m \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l)=m}} \alpha_l \prod_{\substack{k \in \Gamma_m \\ l(k)>0}} \Big(H_k^{(\mathbb{R}^n)}(x)\Big)^{l(k)} \tag{7.8}$$

для кожної послідовності $x \in \ell_p(\mathbb{R}^n)$. Згідно із наслідком 3.5, множина поліномів $\big\{H_k^{(\mathbb{C}^n)} : k \in \Gamma_m\big\}$ є алгебраїчно незалежною. Як наслідок, згідно із твердженням 7.1, взявши до уваги рівність $\widehat{H}_k^{(\mathbb{R}^n)} = H_k^{(\mathbb{C}^n)}$, множина поліномів $\left\{H_k^{(\mathbb{R}^n)} : \ k \in \Gamma_m\right\}$ є алгебраїчно незалежною над полем $\mathbb{C}$. Тому зображення (7.8) є єдиним. Теорему доведено. □

Теорема 7.2. *Поліноми* $H_k^{(\mathbb{R}^n)}$, *де мультиіндекси* $k \in \mathbb{Z}_+^n$ *такі, що* $|k| \geq \lceil p \rceil$, *утворюють алгебраїчний базис алгебри всіх симетричних неперервних дійснозначних поліномів на просторі* $\ell_p(\mathbb{R}^n)$.

Доведення. Нехай P — це неперервний симетричний дійснозначний поліном на просторі $\ell_p(\mathbb{R}^n)$ вигляду (1.4). Покажемо, що поліном P можна єдиним чином подати у вигляді алгебраїчної комбінації деяких елементів множини $\left\{H_k^{(\mathbb{R}^n)} : \ k \in \mathbb{Z}_+^n, |k| \geq \lceil p \rceil\right\}$. Згідно із твердженням 1.2, для кожного $j \in \{1, \ldots, \deg P\}$, j-однорідний поліном P_j є неперервним, симетричним і дійснозначним. Тому, згідно із теоремою 7.1, якщо $1 \leq j < \lceil p \rceil$, то поліном P_j тотожно дорівнює нулю, інакше

$$P_j(x) = \sum_{\substack{l:\Gamma_j \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa_j(l)=j}} \alpha_l \prod_{\substack{k \in \Gamma_j \\ l(k)>0}} \left(H_k^{(\mathbb{R}^n)}(x)\right)^{l(k)}$$

для кожного $x \in \ell_p(\mathbb{R}^n)$, де $\alpha_l \in \mathbb{C}$, $\Gamma_j = \left\{k \in \mathbb{Z}_+^n : \ \lceil p \rceil \leq |k| \leq j\right\}$ і $\varkappa_j(l) = \sum_{k \in \Gamma_j} |k| l(k)$. Покажемо, що всі коефіцієнти α_l є дійсними. Оскільки поліном P_j є дійснозначним, то $P_j(x) - \overline{P_j(x)} = 0$ для кожної послідовності $x \in \ell_p(\mathbb{R}^n)$, тобто

$$2i \sum_{\substack{l:\Gamma_j \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa_j(l)=j}} \operatorname{Im} \alpha_l \prod_{\substack{k \in \Gamma_j \\ l(k)>0}} \left(H_k^{(\mathbb{R}^n)}(x)\right)^{l(k)} = 0 \tag{7.9}$$

для кожної послідовності $x \in \ell_p(\mathbb{R}^n)$. Згідно із твердженням 7.1, множина поліномів $\left\{H_k^{(\mathbb{R}^n)} : \ k \in \mathbb{Z}_+^n, |k| \geq \lceil p \rceil\right\}$ є алгебраїчно незалежною над полем $\mathbb{C}$, тому вона є алгебраїчно незалежною над полем $\mathbb{R}$. Як наслідок, згідно із рівністю (7.9), $\operatorname{Im} \alpha_l = 0$ для кожного коефіцієнта α_l, тобто кожен коефіцієнт α_l є дійсним. Отже, маємо, що для кожної послідовності $x \in$

$\ell_p(\mathbb{R}^n)$, $P(x) = P_0$ у випадку $\deg P < \lceil p \rceil$, і

$$P(x) = P_0 + \sum_{j=\lceil p \rceil}^{\deg P} \sum_{\substack{l:\Gamma_j \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa_j(l)=j}} \alpha_l \prod_{\substack{k \in \Gamma_j \\ l(k)>0}} \left(H_k^{(\mathbb{R}^n)}(x) \right)^{l(k)} \tag{7.10}$$

інакше. Оскільки множина поліномів $\{H_k^{(\mathbb{R}^n)} : \ k \in \mathbb{Z}_+^n, |k| \geq \lceil p \rceil\}$ є алгебраїчно незалежною над полем $\mathbb{R}$, то зображення (7.10) є єдиним. Теорему доведено. $\square$

7.2. Симетричні $*$-поліноми на просторі $\mathbb{C}^n$

Даний підрозділ присвячено встановленню деяких властивостей $*$-поліномів і вивченню симетричних $*$-поліномів на просторі $\mathbb{C}^n$.

Нагадаємо, що відображення $P : X \to Y$, де X, Y — комплексні лінійні простори, називають $*$-поліномом, якщо його можна подати у вигляді

$$P = \sum_{k=0}^{K} \sum_{j=0}^{k} P_{j,k-j}, \tag{7.11}$$

де $K \in \mathbb{Z}_+$ і $P_{j,k-j}$ — це $(j, k-j)$-поліном для кожних $k \in \{0, \dots, K\}$ і $j \in \{0, \dots, k\}$.

Доведемо формули для відновлення (p, q)-поліномів за значеннями $*$-поліномів.

Твердження 7.2. *Нехай $P : X \to Y$ — це $*$-поліном вигляду* (7.11)*, де X і Y — це комплексні лінійні простори. Нехай $\lambda_0, \dots, \lambda_K$ — це попарно різні дійсні числа. Тоді*

$$\sum_{j=0}^{k} P_{j,k-j}(x) = \sum_{s=0}^{K} w_{ks} P(\lambda_s x)$$

для кожних $k \in \{0, \dots, K\}$ і $x \in X$, де w_{ks} — це елементи матриці $W = (w_{ks})_{k,s=\overline{0,K}}$, яка є оберненою матрицею до матриці Вандермонда $V_{\lambda_0,\dots,\lambda_K}$.

Доведення. Нехай $x \in X$. Для кожного $s \in \{0, \dots, K\}$, згідно із рівністю (7.11),

$$P(\lambda_s x) = \sum_{k=0}^{K} \sum_{j=0}^{k} P_{j,k-j}(\lambda_s x).$$

Згідно із рівністю (1.10), взявши до уваги, що число λ_s є дійсним,

$$P_{j,k-j}(\lambda_s x) = \lambda_s^j \bar{\lambda}_s^{k-j} P_{j,k-j}(x) = \lambda_s^j \lambda_s^{k-j} P_{j,k-j}(x) = \lambda_s^k P_{j,k-j}(x).$$

Тому для кожного $s \in \{0, \dots, K\}$,

$$P(\lambda_s x) = \sum_{k=0}^{K} \lambda_s^k \sum_{j=0}^{k} P_{j,k-j}(x).$$

Отже, маємо векторну рівність

$$\big(P(\lambda_0 x), \ldots, P(\lambda_K x)\big)^T = \\ = V_{\lambda_0,\ldots,\lambda_K}\big(P_{0,0}(x), \textstyle\sum_{j=0}^{1} P_{j,1-j}(x), \ldots, \sum_{j=0}^{K} P_{j,K-j}(x)\big)^T.$$

Оскільки числа $\lambda_0, \ldots, \lambda_K$ є попарно різними, то $\det(V_{\lambda_0,\ldots,\lambda_K}) \neq 0$. Як наслідок, матриця $V_{\lambda_0,\ldots,\lambda_K}$ є невиродженою. Нехай

$$W = (w_{ks})_{k,s=\overline{0,K}} := V^{-1}_{\lambda_0,\ldots,\lambda_K}.$$

Тоді

$$\big(P_{0,0}(x), \textstyle\sum_{j=0}^{1} P_{j,1-j}(x), \ldots, \sum_{j=0}^{K} P_{j,K-j}(x)\big)^T = W\big(P(\lambda_0 x), \ldots, P(\lambda_K x)\big)^T.$$

Тому

$$\sum_{j=0}^{k} P_{j,k-j}(x) = \sum_{s=0}^{K} w_{ks} P(\lambda_s x)$$

для кожного $k \in \{0, \ldots, K\}$. Твердження доведено. □

Твердження 7.3. *Нехай $k \in \mathbb{Z}_+$ і $P_{j,k-j} : X \to Y$ — це $(j, k-j)$-поліном для кожного $j \in \{0, \ldots, k\}$, де X і Y — це комплексні лінійні простори. Нехай $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_k$ — це комплексні числа такі, що числа $\varepsilon_0^2, \ldots, \varepsilon_k^2$ є попарно різними і $|\varepsilon_0| = \ldots = |\varepsilon_k| = 1$. Тоді*

$$P_{j,k-j}(x) = \sum_{l=0}^{k} u_{jl}\varepsilon_l^k \sum_{j=0}^{k} P_{j,k-j}(\varepsilon_l x)$$

для кожних $j \in \{0, \ldots, k\}$ і $x \in X$, де u_{jl} — це елементи матриці $U = (u_{jl})_{j,l=\overline{0,K}}$, яка є оберненою матрицею до матриці Вандермонда $V_{\varepsilon_0^2,\ldots,\varepsilon_K^2}$.

Доведення. Нехай $x \in X$. Для кожних $j, l \in \{0, \ldots, k\}$, згідно із рівністю (1.10),

$$P_{j,k-j}(\varepsilon_l x) = \varepsilon_l^j \bar{\varepsilon}_l^{k-j} P_{j,k-j}(x).$$

Оскільки $|\varepsilon_l| = 1$, то $\bar{\varepsilon}_l^{k-j} = \varepsilon_l^{j-k}$. Тому

$$P_{j,k-j}(\varepsilon_l x) = \varepsilon_l^{2j-k} P_{j,k-j}(x).$$

Як наслідок,

$$\varepsilon_l^k \sum_{j=0}^{k} P_{j,k-j}(\varepsilon_l x) = \sum_{j=0}^{k} \varepsilon_l^{2j} P_{j,k-j}(x)$$

для кожного $l \in \{0, \ldots, k\}$. Отже, маємо наступну векторну рівність:

$$\bigl(\varepsilon_0^k \textstyle\sum_{j=0}^k P_{j,k-j}(\varepsilon_0 x), \ldots, \varepsilon_k^k \sum_{j=0}^k P_{j,k-j}(\varepsilon_k x)\bigr)^T = \\ = V_{\varepsilon_0^2,\ldots,\varepsilon_k^2}\bigl(P_{0,k}(x), P_{1,k-1}(x), \ldots, P_{k,0}(x)\bigr)^T.$$

Оскільки числа $\varepsilon_0^2, \ldots, \varepsilon_k^2$ є попарно різними, то $\det(V_{\varepsilon_0^2,\ldots,\varepsilon_k^2}) \neq 0$. Як наслідок, матриця $V_{\varepsilon_0^2,\ldots,\varepsilon_k^2}$ є невиродженою. Нехай

$$U = (u_{jl})_{j,l=\overline{0,k}} := V_{\varepsilon_0^2,\ldots,\varepsilon_k^2}^{-1}.$$

Звідси

$$\bigl(P_{0,k}(x), P_{1,k-1}(x), \ldots, P_{k,0}(x)\bigr)^T = \\ = U\bigl(\varepsilon_0^k \textstyle\sum_{j=0}^k P_{j,k-j}(\varepsilon_0 x), \ldots, \varepsilon_k^k \sum_{j=0}^k P_{j,k-j}(\varepsilon_k x)\bigr)^T.$$

Тому

$$P_{j,k-j}(x) = \sum_{l=0}^{k} u_{jl}\varepsilon_l^k \sum_{j=0}^{k} P_{j,k-j}(\varepsilon_l x)$$

для кожного $j \in \{0, \ldots, k\}$. Твердження доведено. □

Із тверджень 7.2 і 7.3 випливає наступне твердження.

Твердження 7.4. *Нехай $P : X \to Y$ — це $*$-поліном вигляду* (7.11), *де X і Y — це комплексні лінійні простори. Нехай $\lambda_0, \ldots, \lambda_K$ — це попарно різні дійсні числа. Нехай $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_K$ — це комплексні числа такі, що числа $\varepsilon_0^2, \ldots, \varepsilon_K^2$ є попарно різними і $|\varepsilon_0| = \ldots = |\varepsilon_K| = 1$. Тоді*

$$P_{j,t-j}(x) = \sum_{l=0}^{t} u_{jl}\varepsilon_l^t \sum_{s=0}^{K} w_{ts} P(\lambda_s \varepsilon_l x)$$

для кожних $t \in \{0, \ldots, K\}$, $j \in \{0, \ldots, t\}$ і $x \in X$, де w_{ts} — це елементи матриці $W = (w_{ts})_{t,s=\overline{0,K}}$, яка є оберненою матрицею до матриці Вандермонда $V_{\lambda_0,\ldots,\lambda_K}$, і u_{jl} — це елементи матриці $U = (u_{jl})_{j,l=\overline{0,K}}$, яка є оберненою матрицею до матриці Вандермонда $V_{\varepsilon_0^2,\ldots,\varepsilon_K^2}$.

Розглянемо $*$-поліноми на просторі $\mathbb{C}^n$.

Лема 7.1. *Кожен $*$-поліном $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ можна єдиним чином подати у вигляді*

$$P(z) = \sum_{k=0}^{K} \sum_{j=0}^{k} \sum_{\substack{\mu_1+\ldots+\mu_n=j \\ \mu_1,\ldots,\mu_n\in\mathbb{Z}_+}} \sum_{\substack{\nu_1+\ldots+\nu_n=k-j \\ \nu_1,\ldots,\nu_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{\mu_1,\ldots,\mu_n,\nu_1,\ldots,\nu_n} z_1^{\mu_1} \ldots z_n^{\mu_n} \bar{z}_1^{\nu_1} \ldots \bar{z}_n^{\nu_n}, \tag{7.12}$$

де $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $K = \deg P$ і $\alpha_{\mu_1,\ldots,\mu_n,\nu_1,\ldots,\nu_n} \in \mathbb{C}$.

Доведення. Нехай $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ — це $*$-поліном вигляду (7.11). Якщо $K = 0$, то $P = P_{0,0}$, де $P_{0,0} \in \mathbb{C}$. Отже, у цьому випадку маємо зображення полінома P у вигляді (7.12). Розглянемо випадок $K > 0$. Кожен вектор $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ можна подати у вигляді

$$z = \sum_{m=1}^{n} z_m e_m,$$

де

$$e_m = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m})$$

для кожного $m \in \{1, \ldots, n\}$. Тому, згідно із формулою (1.9),

$$\begin{aligned} P(z) = P_{0,0} &+ \\ +\sum_{k=0}^{K} \sum_{j=0}^{k} \sum_{\substack{\mu_1+\ldots+\mu_n=j \\ \mu_1,\ldots,\mu_n\in\mathbb{Z}_+}} &\sum_{\substack{\nu_1+\ldots+\nu_n=k-j \\ \nu_1,\ldots,\nu_n\in\mathbb{Z}_+}} \frac{j!}{\mu_1! \ldots \mu_n!} \frac{(k-j)!}{\nu_1! \ldots \nu_n!} z_1^{\mu_1} \ldots z_n^{\mu_n} \bar{z}_1^{\nu_1} \ldots \bar{z}_n^{\nu_n} \times \\ &\times A_{P_{j,k-j}}(\underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{\mu_1}, \ldots, \underbrace{e_n, \ldots, e_n}_{\mu_n}, \underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{\nu_1}, \ldots, \underbrace{e_n, \ldots, e_n}_{\nu_n}), \end{aligned}$$

де $A_{P_{j,k-j}}$ — це $(j, k-j)$-симетричне $(j, k-j)$-лінійне відображення, асоційоване з $(j, k-j)$-поліномом $P_{j,k-j}$. Нехай $\alpha_{0,\ldots,0} = P_{0,0}$ і

$$\begin{aligned} \alpha_{\mu_1,\ldots,\mu_n,\nu_1,\ldots,\nu_n} = &\frac{j!}{\mu_1! \ldots \mu_n!} \frac{(k-j)!}{\nu_1! \ldots \nu_n!} \times \\ &\times A_{P_{j,k-j}}(\underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{\mu_1}, \ldots, \underbrace{e_n, \ldots, e_n}_{\mu_n}, \underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{\nu_1}, \ldots, \underbrace{e_n, \ldots, e_n}_{\nu_n}) \end{aligned}$$

для $\mu_1,\ldots,\mu_n,\nu_1,\ldots,\nu_n\in\mathbb{Z}_+$ таких, що $1\le\mu_1+\ldots+\mu_n+\nu_1+\ldots+\nu_n\le K$. Тоді

$$P(z)=\sum_{k=0}^{K}\sum_{j=0}^{k}\sum_{\substack{\mu_1+\ldots+\mu_n=j\\ \mu_1,\ldots,\mu_n\in\mathbb{Z}_+}}\sum_{\substack{\nu_1+\ldots+\nu_n=k-j\\ \nu_1,\ldots,\nu_n\in\mathbb{Z}_+}}\alpha_{\mu_1,\ldots,\mu_n,\nu_1,\ldots,\nu_n}z_1^{\mu_1}\ldots z_n^{\mu_n}\bar{z}_1^{\nu_1}\ldots\bar{z}_n^{\nu_n}.$$

Лему доведено. □

$*$-Поліном $P:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$, де $n\in\mathbb{N}$, називають симетричним, якщо

$$P((z_1,\ldots,z_n))=P((z_{\sigma(1)},\ldots,z_{\sigma(n)}))$$

для кожного $(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ і для кожної бієкції $\sigma:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\}$.

Для кожного мультиіндексу $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)\in\mathbb{Z}_+^2$ визначимо (γ_1,γ_2)-поліном $H_\gamma^{(n)}:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ формулою

$$H_\gamma^{(n)}(z)=\sum_{m=1}^{n}z_m^{\gamma_1}\bar{z}_m^{\gamma_2},\tag{7.13}$$

де $z=(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n$. Зауважимо, що поліном $H_\gamma^{(n)}$ є симетричним.

Покажемо, що кожен симетричний $*$-поліном, який діє з $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}$, можна подати у вигляді аглебраїчної комбінації $*$-поліномів $H_\gamma^{(n)}$, визначених формулою (7.13).

Теорема 7.3. *Кожен симетричний $*$-поліном $P:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації $*$-поліномів $H_\gamma^{(n)}$, де $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)\in\mathbb{Z}_+^2$ такі, що $\gamma_1+\gamma_2\le\deg P$.*

Доведення. Доведемо методом математичної індукції по n. У випадку $n=1$ для $z=z_1\in\mathbb{C}$, згідно із лемою 7.1, маємо

$$P(z)=\sum_{k=0}^{\deg P}\sum_{j=0}^{k}\alpha_{j,k-j}z_1^j\bar{z}_1^{k-j}=\sum_{k=0}^{\deg P}\sum_{j=0}^{k}\alpha_{j,k-j}H_{(j,k-j)}^{(1)}(z).$$

Припустимо, що теорема виконується для $n-1$ і доведемо її для n. Нехай $P:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ — це симетричний $*$-поліном і $z=(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n$. Тоді $P(z)$

можна подати у вигляді

$$P(z) = \sum_{k=0}^{K} \sum_{j=0}^{k} z_n^j \bar{z}_n^{k-j} r_{j,k-j}((z_1, \dots, z_{n-1})),$$

де $K = \deg P$ і $r_{j,k-j} : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}$ — це $*$-поліноми. Покажемо, що $*$-поліноми $r_{j,k-j}$ є симетричними. Для фіксованих $z_1, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{C}$, відображення $R : z_n \mapsto P((z_1, \dots, z_n))$ є $*$-поліномом, який діє з $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$. Нехай $\lambda_0, \dots, \lambda_K$ — це попарно різні дійсні числа. Тоді, згідно із твердженням 7.2,

$$\sum_{j=0}^{k} z_n^j \bar{z}_n^{k-j} r_{j,k-j}((z_1, \dots, z_{n-1})) = \sum_{s=0}^{K} w_{ks} R(\lambda_s z_n) \tag{7.14}$$

для кожного $k \in \{0, \dots, K\}$. Для $k \in \{0, \dots, K\}$, нехай $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k$ — це комплексні числа такі, що числа $\varepsilon_0^2, \dots, \varepsilon_k^2$ є попарно різними і $|\varepsilon_0| = \dots = |\varepsilon_k| = 1$. Тоді, згідно із твердженням 7.3,

$$z_n^j \bar{z}_n^{k-j} r_{j,k-j}((z_1, \dots, z_{n-1})) = \sum_{l=0}^{k} u_{jl} \varepsilon_l^k \sum_{j=0}^{k} (\varepsilon_l z_n)^j (\bar{\varepsilon}_l \bar{z}_n)^{k-j} r_{j,k-j}((z_1, \dots, z_{n-1})) \tag{7.15}$$

для кожного $j \in \{0, \dots, k\}$. Згідно із рівностями (7.14) і (7.15),

$$z_n^j \bar{z}_n^{k-j} r_{j,k-j}((z_1, \dots, z_{n-1})) = \sum_{l=0}^{k} u_{jl} \varepsilon_l^k \sum_{s=0}^{K} w_{ks} R(\lambda_s \varepsilon_l z_n)$$

для кожного $k \in \{0, \dots, K\}$ і $j \in \{0, \dots, k\}$. Нехай $z_n = 1$. Тоді

$$\begin{aligned} r_{j,k-j}((z_1, \dots, z_{n-1})) &= \sum_{l=0}^{k} u_{jl} \varepsilon_l^k \sum_{s=0}^{K} w_{ks} R(\lambda_s \varepsilon_l) = \\ &= \sum_{l=0}^{k} u_{jl} \varepsilon_l^k \sum_{s=0}^{K} w_{ks} P((z_1, \dots, z_{n-1}, \lambda_s \varepsilon_l)). \end{aligned} \tag{7.16}$$

Нехай $\sigma : \{1, \dots, n-1\} \to \{1, \dots, n-1\}$ — це бієкція. Тоді, згідно із рівністю (7.16) і згідно із симетричністю P,

$$r_{j,k-j}((z_{\sigma(1)},\dots,z_{\sigma(n-1)}))=\sum_{l=0}^{k}u_{jl}\varepsilon_l^k\sum_{s=0}^{K}w_{ks}P((z_{\sigma(1)},\dots,z_{\sigma(n-1)},\lambda_s\varepsilon_l))=$$

$$=\sum_{l=0}^{k}u_{jl}\varepsilon_l^k\sum_{s=0}^{K}w_{ks}P((z_1,\dots,z_{n-1},\lambda_s\varepsilon_l))=r_{j,k-j}((z_1,\dots,z_{n-1})).$$

Отже, $*$-поліном $r_{j,k-j}$ є симетричним для кожних $k\in\{0,\dots,K\}$ і $j\in\{0,\dots,k\}$. Згідно із припущенням індукції, кожен $*$-поліном $r_{j,k-j}$ можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації $*$-поліномів $H_\gamma^{(n-1)}$. Оскільки

$$H_\gamma^{(n-1)}((z_1,\dots,z_{n-1}))=H_\gamma^{(n)}((z_1,\dots,z_n))-z_n^{\gamma_1}\bar z_n^{\gamma_2}$$

для кожного $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)\in\mathbb{Z}_+^2$, то $*$-поліном P можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації $*$-поліномів $H_\gamma^{(n)}$ і $*$-поліномів, визначених як $\mathbb{C}^n\ni(z_1,\dots,z_n)\mapsto z_n^{\gamma_1}\bar z_n^{\gamma_2}\in\mathbb{C}$, де $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)\in\mathbb{Z}_+^2$. Тому

$$P(z)=\sum_{k=0}^{K}\sum_{j=0}^{k}z_n^j\bar z_n^{k-j}Q_{j,k-j}(z),$$

де $Q_{j,k-j}$ є алгебраїчною комбінацією $*$-поліномів $H_\gamma^{(n)}$ для кожних $k\in\{0,\dots,K\}$ і $j\in\{0,\dots,k\}$. Оскільки $*$-поліноми $H_\gamma^{(n)}$ є симетричними, то $*$-поліноми $Q_{j,k-j}$ також є симетричними. Оскільки $*$-поліноми P і $Q_{j,k-j}$ є симетричними, то

$$P(z)=\sum_{k=0}^{K}\sum_{j=0}^{k}z_m^j\bar z_m^{k-j}Q_{j,k-j}(z)$$

для кожного $m\in\{1,\dots,n\}$. Тому

$$\sum_{m=1}^{n}P(z)=\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{K}\sum_{j=0}^{k}z_m^j\bar z_m^{k-j}Q_{j,k-j}(z),$$

тобто

$$nP(z)=\sum_{k=0}^{K}\sum_{j=0}^{k}\sum_{m=1}^{n}z_m^j\bar z_m^{k-j}Q_{j,k-j}(z).$$

Отже,

$$P(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{K} \sum_{j=0}^{k} H^{(n)}_{(j,k-j)}(z) Q_{j,k-j}(z).$$

Таким чином, $*$-поліном P є алгебраїчною комбінацією $*$-поліномів $H^{(n)}_{\gamma}$. Теорему доведено. $\square$

7.3. Симетричні $*$-поліноми на деяких банахових просторах послідовностей комплексних векторів

Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $p \in [1, +\infty)$. Розглянемо симетричні $*$-поліноми на просторі $\ell_p(\mathbb{C}^n)$. Визначимо відображення $J : \ell_p(\mathbb{C}^n) \to \ell_p(\mathbb{R}^{2n})$ формулою

$$J(z) = \Big(\big(\operatorname{Re} z_1^{(1)}, \operatorname{Im} z_1^{(1)}, \ldots, \operatorname{Re} z_1^{(n)}, \operatorname{Im} z_1^{(n)}\big),\\ \big(\operatorname{Re} z_2^{(1)}, \operatorname{Im} z_2^{(1)}, \ldots, \operatorname{Re} z_2^{(n)}, \operatorname{Im} z_2^{(n)}\big), \ldots\Big),$$

де $z = \Big(\big(z_1^{(1)}, \ldots, z_1^{(n)}\big), \big(z_2^{(1)}, \ldots, z_2^{(n)}\big), \ldots\Big) \in \ell_p(\mathbb{C}^n)$. Покажемо, що відображення J є добре визначеним і бієктивним. Оскільки всі норми на просторі $\mathbb{R}^2$ є еквівалентними, то існують сталі $C > 0$ і $c > 0$ такі, що

$$c\sqrt{|t_1|^2 + |t_2|^2} \le \big(|t_1|^p + |t_2|^p\big)^{1/p} \le C\sqrt{|t_1|^2 + |t_2|^2} \tag{7.17}$$

для кожного $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$. Тому

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{n}\Big(\big|\operatorname{Re} z_j^{(s)}\big|^p + \big|\operatorname{Im} z_j^{(s)}\big|^p\Big) \le C^p \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{n}\bigg(\sqrt{\big|\operatorname{Re} z_j^{(s)}\big|^2 + \big|\operatorname{Im} z_j^{(s)}\big|^2}\bigg)^p = \\ = C^p \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{n}\big|z_j^{(s)}\big|^p = C^p\|z\|^p_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}.$$

Отже, для кожної послідовності $z \in \ell_p(\mathbb{C}^n)$ послідовність $J(z)$ належить простору $\ell_p(\mathbb{R}^{2n})$ і $\|J(z)\|^p_{\ell_p(\mathbb{R}^{2n})} \le C^p\|z\|^p_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}$, тобто

$$\|J(z)\|_{\ell_p(\mathbb{R}^{2n})} \le C\|z\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}. \tag{7.18}$$

Отже, відображення J є добре визначеним. Можна перевірити, що відображення J є ін'єктивним. Покажемо, що відображення J є сюр'єктивним. Нехай

$$x = \Big(\big(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_1^{(2n-1)}, x_1^{(2n)}\big), \big(x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_2^{(2n-1)}, x_2^{(2n)}\big), \ldots\Big) \in \ell_p(\mathbb{R}^{2n}).$$

Побудуємо послідовність $z_x \in \ell_p(\mathbb{C}^n)$ таку, що $J(z_x) = x$. Нехай

$$z_x = \Big(\big(x_1^{(1)} + ix_1^{(2)}, \ldots, x_1^{(2n-1)} + ix_1^{(2n)}\big), \big(x_2^{(1)} + ix_2^{(2)}, \ldots, x_2^{(2n-1)} + ix_2^{(2n)}\big), \ldots\Big).$$

Покажемо, що послідовність z_x належить простору $\ell_p(\mathbb{C}^n)$. Згідно із нерівністю (7.17),

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{n}\left|x_j^{(2s-1)}+ix_j^{(2s)}\right|^p=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{n}\left(\sqrt{\left|x_j^{(2s-1)}\right|^2+\left|x_j^{(2s)}\right|^2}\right)^p\leq$$
$$\leq\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{1}{c}\left(\left|x_j^{(2s-1)}\right|^p+\left|x_j^{(2s)}\right|^p\right)^{1/p}\right)^p=\frac{1}{c^p}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{n}\left(\left|x_j^{(2s-1)}\right|^p+\left|x_j^{(2s)}\right|^p\right)=$$
$$=\frac{1}{c^p}\|x\|^p_{\ell_p(\mathbb{R}^{2n})}.$$

Отже, послідовність z_x належить простору $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ і $\|z_x\|^p_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}\leq\frac{1}{c^p}\|x\|^p_{\ell_p(\mathbb{R}^{2n})}$, тобто, взявши до уваги рівність $J(z_x)=x$,

$$\|J^{-1}(x)\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}\leq\frac{1}{c}\|x\|_{\ell_p(\mathbb{R}^{2n})}\qquad(7.19)$$

для кожної послідовності $x\in\ell_p(\mathbb{R}^{2n})$. Отже, відображення J є бієктивним. Зауважимо, що відображення J є адитивним і $J(\lambda z)=\lambda J(z)$ для кожних $\lambda\in\mathbb{R}$ і $z\in\ell_p(\mathbb{C}^n)$. Згідно із нерівностями (7.18) і (7.19), обидва відображення J і J^{-1} є неперервними.

Твердження 7.5. *Для кожного неперервного симетричного (m_1,m_2)-полінома $P:\ell_p(\mathbb{C}^n)\to\mathbb{C}$ відображення $P\circ J^{-1}$ є неперервним симетричним (m_1+m_2)-однорідним поліномом, який діє з простору $\ell_p(\mathbb{R}^{2n})$ в $\mathbb{C}$.*

Доведення. Нехай $P:\ell_p(\mathbb{C}^n)\to\mathbb{C}$ — це неперервний симетричний (m_1,m_2)-поліном. Нехай $A_P^{(s)}$ — це (m_1,m_2)-симетричне (m_1,m_2)-лінійне відображення, асоційоване із (m_1,m_2)-поліномом P. Визначимо відображення $B_{\widetilde{P}}:\left(\ell_p(\mathbb{R}^{2n})\right)^{m_1+m_2}\to\mathbb{C}$ формулою

$$B_{\widetilde{P}}(x_1,\ldots,x_{m_1+m_2})=A_P(J^{-1}(x_1),\ldots,J^{-1}(x_{m_1+m_2})),$$

де $x_1,\ldots,x_{m_1+m_2}\in\ell_p(\mathbb{R}^{2n})$. Оскільки відображення J^{-1} є адитивним і однорідним відносно дійсних скалярів і відображення A_P є (m_1,m_2)-лінійним, то відображення $B_{\widetilde{P}}$ є (m_1+m_2)-лінійним відображенням. Згідно з нерівностями (1.12) і (7.19),

$$
\begin{aligned}
\|B_{\widetilde{P}}\| &= \sup_{\|x_1\|_{\ell_p(\mathbb{R}^{2n})}\le 1,\dots,\|x_{m_1+m_2}\|_{\ell_p(\mathbb{R}^{2n})}\le 1} |B_{\widetilde{P}}(x_1,\dots,x_{m_1+m_2})| = \\
&= \sup_{\|x_1\|_{\ell_p(\mathbb{R}^{2n})}\le 1,\dots,\|x_{m_1+m_2}\|_{\ell_p(\mathbb{R}^{2n})}\le 1} |A_P(J^{-1}(x_1),\dots,J^{-1}(x_{m_1+m_2}))| \le \\
&\le \sup_{\|x_1\|_{\ell_p(\mathbb{R}^{2n})}\le 1,\dots,\|x_{m_1+m_2}\|_{\ell_p(\mathbb{R}^{2n})}\le 1} \Big(\|A_P\|\times \\
&\qquad\qquad \times \|J^{-1}(x_1)\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}\dots\|J^{-1}(x_{m_1+m_2})\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)}\Big) \le \\
&\le \frac{\|A_P\|}{c^{m_1+m_2}} \sup_{\|x_1\|_{\ell_p(\mathbb{R}^{2n})}\le 1,\dots,\|x_{m_1+m_2}\|_{\ell_p(\mathbb{R}^{2n})}\le 1} \|x_1\|_{\ell_p(\mathbb{R}^{2n})}\dots\|x_{m_1+m_2}\|_{\ell_p(\mathbb{R}^{2n})} = \\
&\qquad\qquad = \frac{\|A_P\|}{c^{m_1+m_2}} \le \frac{(m_1+m_2)^{m_1+m_2}\|P\|}{m_1!m_2!c^{m_1+m_2}}.
\end{aligned}
$$

Отже, норма $\|B_{\widetilde{P}}\|$ є скінченною і, як наслідок, відображення $B_{\widetilde{P}}$ є неперервним. Нехай $\widetilde{P}$ — це звуження на діагональ відображення $B_{\widetilde{P}}$. Тоді відображення $\widetilde{P}$ є (m_1+m_2)-однорідним поліномом. Оскільки $\|\widetilde{P}\| \le \|B_{\widetilde{P}}\|$, то поліном $\widetilde{P}$ є неперервним. Зауважимо, що $\widetilde{P} = P\circ J^{-1}$. Покажемо, що поліном $\widetilde{P}$ є симетричним. Нехай $x \in \ell_p(\mathbb{R}^{2n})$ і $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — це бієкція. Зауважимо, що $J^{-1}(x\circ\sigma) = J^{-1}(x)\circ\sigma$. Тому, оскільки (m_1, m_2)-поліном P є симетричним, то

$$\widetilde{P}(x\circ\sigma) = P(J^{-1}(x\circ\sigma)) = P(J^{-1}(x)\circ\sigma) = P(J^{-1}(x)) = \widetilde{P}(x).$$

Отже, поліном $\widetilde{P}$ є симетричним. Твердження доведено. □

Теорема 7.4. *Множина відображень*

$$\left\{H_k^{(\mathbb{R}^{2n})}\circ J:\ k\in\mathbb{Z}_+^{2n}, |k|\ge\lceil p\rceil\right\}$$

є алгебраїчним базисом алгебри всіх неперервних симетричних $*$-поліномів, які діють з простору $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ в $\mathbb{C}$.

Доведення. Нехай $P : \ell_p(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}$ — це неперервний симетричний $*$-поліном вигляду (7.11). Згідно із твердженням 7.4, взявши до уваги неперервність і симетричність $*$-полінома P, для кожних $t\in\{0,\dots,K\}$ і

$j \in \{0, \ldots, t\}$, $(j, t-j)$-поліном $P_{j,t-j}$ є неперервним і симетричним. Тому, згідно із твердженням 7.5, відображення $P_{j,t-j} \circ J^{-1}$ є неперервним симетричним t-однорідним поліномом, який діє з $\ell_p(\mathbb{R}^{2n})$ в $\mathbb{C}$. Як наслідок, згідно із теоремою 7.1, поліном $P_{j,t-j} \circ J^{-1}$ тотожно дорівнює нулю у випадку $1 \leq t < \lceil p \rceil$, , інакше, поліном $P_{j,t-j} \circ J^{-1}$ можна єдиним чином подати у вигляді

$$(P_{j,t-j} \circ J^{-1})(x) = \sum_{\substack{l : \Gamma_t \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa_t(l) = t}} \alpha_l^{(j,t-j)} \prod_{\substack{k \in \Gamma_t \\ l(k) > 0}} \Big(H_k^{(\mathbb{R}^{2n})}(x) \Big)^{l(k)},$$

де $x \in \ell_p(\mathbb{R}^{2n})$, $\alpha_l^{(j,t-j)} \in \mathbb{C}$, $\Gamma_t = \big\{ k \in \mathbb{Z}_+^{2n} : \ \lceil p \rceil \leq |k| \leq t \big\}$ і $\varkappa_t(l) = \sum_{k \in \Gamma_t} |k| l(k)$. Тому, взявши до уваги, що відображення J є бієкцією, відображення $P_{j,t-j}$ тотожно дорівнює нулю у випадку $1 \leq t < \lceil p \rceil$, і

$$P_{j,t-j}(z) = \sum_{\substack{l : \Gamma_t \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa_t(l) = t}} \alpha_l^{(j,t-j)} \prod_{\substack{k \in \Gamma_t \\ l(k) > 0}} \Big(\big(H_k^{(\mathbb{R}^{2n})} \circ J \big)(z) \Big)^{l(k)}$$

для кожної послідовності $z \in \ell_p(\mathbb{C}^n)$ в іншому випадку. Як наслідок, $P = P_0$ у випадку $\deg P < \lceil p \rceil$, і

$$P(z) = P_0 + \sum_{t = \lceil p \rceil}^{\deg P} \sum_{j=0}^{t} \sum_{\substack{l : \Gamma_t \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa_t(l) = t}} \alpha_l^{(j,t-j)} \prod_{\substack{k \in \Gamma_t \\ l(k) > 0}} \Big(\big(H_k^{(\mathbb{R}^{2n})} \circ J \big)(z) \Big)^{l(k)} \tag{7.20}$$

для кожної послідовності $z \in \ell_p(\mathbb{C}^n)$ в іншому випадку. Згідно із твердженням 7.1, множина поліномів $\big\{ H_k^{(\mathbb{R}^{2n})} : \ k \in \mathbb{Z}_+^{2n}, |k| \geq \lceil p \rceil \big\}$ є алгебраїчно незалежною. Оскільки відображення J є бієкцією, то множина $*$-поліномів $\big\{ H_k^{(\mathbb{R}^{2n})} \circ J : \ k \in \mathbb{Z}_+^{2n}, |k| \geq \lceil p \rceil \big\}$ є алгебраїчно незалежною. Тому зображення (7.20) є єдиним. Теорему доведено. □

7.4. Деякі властивості операторів зсуву на алгебрах функцій, породжених $*$-поліномами

Відомо, що поповненням алгебри всіх неперервних поліномів на комплексному банаховому просторі відносно топології рівномірної збіжності на обмежених підмножинах простору є алгебра Фреше цілих аналітичних функцій обмеженого типу. З іншого боку, аналогічне поповнення алгебри всіх неперервних $*$-поліномів може містити ширший клас функцій. Окрім аналітичних функцій, поповнення, наприклад, може містити функції, які є комплексно спряжені до аналітичних. Також, як було показано М. А. Митрифановим у роботі [90], такі алгебри неперервних $*$-поліномів можуть містити функції, які неможливо подати у вигляді лінійної комбінації добутків аналітичних функцій і комплексно спряжених функцій до аналітичних. Таким чином, поповнення таких алгебр можуть містити достатньо широкий клас неперервних функцій на комплексному банаховому просторі. Алгебраїчна структура дає можливість розглядати елементи алгебри, як неперервні функції на спектрі алгебри. Для опису спектрів алгебр функцій на банахових просторах важливу роль відіграє так звана операція згортки на спектрі. У свою чергу, операцію згортки на спектрі визначають за допомогою так званих операторів зсуву, визначених на алгебрі. Оператори зсуву для алгебр аналітичних функцій на банахових просторах і застосування цих операторів до опису спектрів досліджувалися в роботах [22], [26], [127], [128].

У даному підрозділі буде встановлено деякі властивості операторів зсуву на алгебрі Фреше функцій на комплексному банаховому просторі, яка є поповненням алгебри всіх неперервних $*$-поліномів відносно зліченної множини норм, які є еквівалентними до норм рівномірної збіжності на замкнених кулях із раціональними радіусами, із центрами в нулі. Буде показано, що оператори зсуву є добре визначеними неперервними лінійними операторами. Також буде досліджено один спеціальний клас функцій із даної алгебри, побудованих за допомогою композиції неперервних лінійних функціоналів із операторами зсуву. Такі класи функцій відіграють важливу роль в описі спектрів алгебр функцій на банахових просторах.

Нехай $\mathbb{Q}_+$ — це множина всіх додатних раціональних чисел. Нехай X — це комплексний банахів простір.

Зауважимо, що із рівності (1.9) випливає наступний аналог біноміальної формули для (p, q)-поліномів:

$$P(x+y) = \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=0}^{q} \frac{p!q!}{j!(p-j)!k!(q-k)!} A_P(x^j, y^{p-j}, x^k, y^{q-k}), \tag{7.21}$$

де

$$A_P(x^j, y^{p-j}, x^k, y^{q-k}) = A_P(\underbrace{x, \ldots, x}_{j}, \underbrace{y, \ldots, y}_{p-j}, \underbrace{x, \ldots, x}_{k}, \underbrace{y, \ldots, y}_{q-k})$$

для кожних $x, y \in X$. Позначимо $\mathcal{P}({}^{pq}X)$ банахів простір всіх неперервних (p, q)-поліномів із нормою

$$\|P\| = \sup_{\|x\| \le 1} |P(x)|.$$

Також, для зручності, покладемо $\mathcal{P}({}^{00}X) = \mathbb{C}$.

Нагадаємо, що відображення $P : X \to \mathbb{C}$ називають $*$-поліномом, якщо його можна подати у вигляді

$$P = \sum_{p=0}^{M} \sum_{q=0}^{N} P_{pq},$$

де $M, N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ і $P_{pq} \in \mathcal{P}({}^{pq}X)$. Позначимо $\mathcal{P}_*(X)$ алгебру всіх неперервних $*$-поліномів на просторі X.

Нехай

$$\{\| \cdot \|_r : \ r \in (0, +\infty)\} \tag{7.22}$$

— це множина норм на алгебрі $\mathcal{P}_*(X)$ така, що

1. $\|PQ\|_r \le \|P\|_r \|Q\|_r$ для кожних $P, Q \in \mathcal{P}_*(X)$ і $r \in (0, +\infty)$.

2. Існують функції

$$(0, +\infty) \ni t \mapsto c_t \in (0, +\infty)$$

і

$$(0,+\infty) \ni t \mapsto C_t \in (0,+\infty)$$

такі, що $\inf_{t\in[a,b]} c_t > 0$ і $\sup_{t\in[a,b]} C_t < +\infty$ для кожних $b > a > 0$, і

$$c_r \sup_{\|x\|\le r} |P(x)| \le \|P\|_r \le C_r \sup_{\|x\|\le r} |P(x)|$$

для кожних $r \in (0,+\infty)$ і $P \in \mathcal{P}_*(X)$.

Нехай

$$\{\|\cdot\|_r :\ r \in \mathbb{Q}_+\} \tag{7.23}$$

— це підмножина множини норм (7.22). Зауважимо, що множина (7.23) є зліченною. Нехай $\tilde{\mathcal{P}}_*(X)$ — це поповнення алгебри $\mathcal{P}_*(X)$ відносно метрики, породженої множиною норм (7.23). Можна перевірити, що $\tilde{\mathcal{P}}_*(X)$ є алгеброю Фреше функцій на просторі X. Згідно із неперервністю норм із множини (7.23),

$$c_r \sup_{\|x\|\le r} |f(x)| \le \|f\|_r \le C_r \sup_{\|x\|\le r} |f(x)| \tag{7.24}$$

для кожних $r \in \mathbb{Q}_+$ і $f \in \tilde{\mathcal{P}}_*(X)$.

Теорема 7.5. *(i). Для кожного $x \in X$ оператор $T_x : \tilde{\mathcal{P}}_*(X) \to \tilde{\mathcal{P}}_*(X)$, визначений рівністю*

$$(T_x f)(y) = f(x+y),$$

де $f \in \tilde{\mathcal{P}}_*(X)$ і $y \in X$, є добре визначеним неперервним лінійним оператором і при цьому виконується нерівність

$$\|T_x f\|_r \le C_r c_{r+\|x\|}^{-1} \|f\|_{r+\|x\|}$$

для кожних $f \in \tilde{\mathcal{P}}_*(X)$ і $r \in \mathbb{Q}_+$.

(ii). Для кожної функції $f \in \tilde{\mathcal{P}}_*(X)$ і для кожного неперервного лінійного функціонала $\phi : \tilde{\mathcal{P}}_*(X) \to \mathbb{C}$ функція $h_{\phi,f} : X \to \mathbb{C}$, визначена рівністю

$$h_{\phi,f}(x) = \phi(T_x f),$$

належить до алгебри $\tilde{\mathcal{P}}_*(X)$, *і при цьому виконується нерівність*

$$|h_{\phi,f}(x)| \leq KC_s c_{s+\|x\|}^{-1}\|f\|_{s+\|x\|}$$

для кожного елемента $x \in X$ *і для кожного числа* $s \in \mathbb{Q}_+$ *такого, що функціонал* ϕ *є неперервним відносно норми* $\|\cdot\|_s$, *де*

$$K = \sup_{\|f\|_s \leq 1} |\phi(f)|.$$

Доведення. (i). Нехай $x \in X$. Для кожної функції $f \in \tilde{\mathcal{P}}_*(X)$, оскільки виконується рівність $(T_x f)(y) = f(x+y)$ для кожного $y \in Y$ і оскільки функція f є добре визначеною на елементі $x+y$, то функція $T_x f$ є добре визначеною на елементі y. Також зауважимо, що для кожного числа $r \in \mathbb{Q}_+$ виконується нерівність

$$\sup_{\|y\| \leq r} |f(x+y)| \leq \sup_{\|z\| \leq r+\|x\|} |f(z)| \leq c_{r+\|x\|}^{-1}\|f\|_{r+\|x\|},$$

тобто,

$$\sup_{\|y\| \leq r} |(T_x f)(y)| \leq c_{r+\|x\|}^{-1}\|f\|_{r+\|x\|}. \tag{7.25}$$

Нехай $P \in \mathcal{P}_*(X)$. Покажемо, що $T_x P \in \mathcal{P}_*(X)$. Нехай

$$P = \sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{N} P_{pq},$$

де $P_{pq} \in \mathcal{P}({}^{pq}X)$. Згідно із рівністю (7.21),

$$(T_x P)(y) = \sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{N}\sum_{j=0}^{p}\sum_{k=0}^{q} \frac{p!q!}{j!(p-j)!k!(q-k)!} A_{P_{pq}}(x^j, y^{p-j}, x^k, y^{q-k}),$$

де $A_{P_{pq}}$ — це симетричне (p,q)-лінійне відображення, асоційоване із (p,q)-поліномом P_{pq} для кожних $p \in \{0,\dots,M\}$ і $q \in \{0,\dots,N\}$. Зауважимо, що для фіксованого елемента $x \in X$ функція $A_{P_{pq}}(x^j, y^{p-j}, x^k, y^{q-k})$ є неперервним $(p-j, q-k)$-поліномом відносно змінної y. Тому функція $T_x P$ є неперервним $*$-поліномом.

Нехай $f \in \tilde{\mathcal{P}}_*(X)$. Покажемо, що $T_x f \in \tilde{\mathcal{P}}_*(X)$. Оскільки алгебра $\mathcal{P}_*(X)$ є щільною в алгебрі $\tilde{\mathcal{P}}_*(X)$, то існує послідовність $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}_*(X)$, збіжна до функції f відносно кожної норми із множини (7.23). Розглянемо послідовність $\{T_x f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Оскільки $f_n \in \mathcal{P}_*(X)$, то $T_x f_n \in \mathcal{P}_*(X)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Отже, маємо включення $\{T_x f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}_*(X) \subset \tilde{\mathcal{P}}_*(X)$. Покажемо, що послідовність $\{T_x f_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною в алгебрі Фреше $\tilde{\mathcal{P}}_*(X)$. Нехай $r \in \mathbb{Q}_+$. Для $m, n \in \mathbb{N}$, згідно із нерівністю (7.24), виконується нерівність

$$\|T_x f_m - T_x f_n\|_r \leq C_r \sup_{\|y\| \leq r} |(T_x f_m)(y) - (T_x f_n)(y)|.$$

Згідно із нерівністю (7.25),

$$\sup_{\|y\| \leq r} |(T_x f_m)(y) - (T_x f_n)(y)| \leq c_{r+\|x\|}^{-1} \|f_m - f_n\|_{r+\|x\|}.$$

Отже,

$$\|T_x f_m - T_x f_n\|_r \leq C_r c_{r+\|x\|}^{-1} \|f_m - f_n\|_{r+\|x\|}.$$

Оскільки послідовність $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною, то, згідно із останньою нерівністю, послідовність $\{T_x f_n\}_{n=1}^{\infty}$ також є фундаментальною. Оскільки алгебра $\tilde{\mathcal{P}}_*(X)$ є повною, то існує функція $g \in \tilde{\mathcal{P}}_*(X)$ така, що послідовність $\{T_x f_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до функції g. Нехай $y \in X$. Покажемо, що $(T_x f)(y) = g(y)$. Нехай число $\rho \in \mathbb{Q}_+$ таке, що $\rho > \|y\|$. Оскільки послідовність $\{T_x f_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до функції g, то числова послідовність $\{\|T_x f_n - g\|_\rho\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до нуля. Згідно із нерівністю (7.24), виконується нерівність

$$\sup_{\|z\| \leq \rho} |(T_x f_n)(z) - g(z)| \leq c_\rho^{-1} \|T_x f_n - g\|_\rho.$$

Тому

$$|(T_x f_n)(y) - g(y)| \leq c_\rho^{-1} \|T_x f_n - g\|_\rho.$$

Як наслідок, числова послідовність $\{(T_x f_n)(y)\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до значення $g(y)$. З іншого боку, згідно із нерівністю (7.25),

$$\sup_{\|z\| \leq \rho} |(T_x f)(z) - (T_x f_n)(z)| \leq c_{\rho+\|x\|}^{-1} \|f - f_n\|_{\rho+\|x\|}.$$

Тому

$$|(T_x f)(y) - (T_x f_n)(y)| \le c^{-1}_{\rho+\|x\|}\|f - f_n\|_{\rho+\|x\|}.$$

Оскільки $\|f - f_n\|_{\rho+\|x\|} \to 0$ при $n \to \infty$, то послідовність $\{(T_x f_n)(y)\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до значення $(T_x f)(y)$. Тому виконується рівність $(T_x f)(y) = g(y)$. Отже, $T_x f = g$ і, як наслідок, $T_x f \in \tilde{\mathcal{P}}_*(X)$.

Згідно із нерівностями (7.24) і (7.25),

$$\|T_x f\|_r \le C_r \sup_{\|y\|\le r} |(T_x f)(y)| \le C_r c^{-1}_{r+\|x\|}\|f\|_{r+\|x\|} \tag{7.26}$$

для кожного $r \in \mathbb{Q}_+$.

(ii). Нехай $f \in \tilde{\mathcal{P}}_*(X)$ і $\phi \in \tilde{\mathcal{P}}_*(X)'$. Зауважимо, що функція

$$h_{\phi,f}(x) = \phi(T_x f)$$

є добре визначеною у кожній точці $x \in X$, оскільки функція $T_x f$ належить алгебрі $\tilde{\mathcal{P}}_*(X)$, а функціонал ϕ є добре визначеним на алгебрі $\tilde{\mathcal{P}}_*(X)$.

Оскільки ϕ є неперервним лінійним функціоналом на алгебрі $\tilde{\mathcal{P}}_*(X)$, то існує число $s \in \mathbb{Q}_+$ таке, що функціонал ϕ є неперервним відносно норми $\|\cdot\|_s$. Тому, для кожної функції $f \in \tilde{\mathcal{P}}_*(X)$,

$$|\phi(f)| \le K\|f\|_s, \tag{7.27}$$

де $K = \sup_{\|f\|_s\le 1}|\phi(f)|$. Згідно із нерівностями (7.27) і (7.26), виконується нерівність

$$|\phi(T_x f)| \le K\|T_x f\|_s \le K C_s c^{-1}_{s+\|x\|}\|f\|_{s+\|x\|},$$

тобто,

$$|h_{\phi,f}(x)| \le K C_s c^{-1}_{s+\|x\|}\|f\|_{s+\|x\|}. \tag{7.28}$$

Нехай $P = \sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{N} P_{pq}$ — це неперервний $*$-поліном. Покажемо, що функція $h_{\phi,P}(x) = \varphi(T_x P)$ є неперервним $*$-поліномом. Згідно із рівністю (7.21), взявши до уваги лінійність функціонала φ, отримуємо рівність

$$h_{\phi,P}(x) = \sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{N}\sum_{j=0}^{p}\sum_{k=0}^{q}\frac{p!q!}{j!(p-j)!k!(q-k)!}\varphi(y \mapsto A_{P_{pq}}(x^j, y^{p-j}, x^k, y^{q-k})).$$

Зауважимо, що функція

$$w_{p,q,j,k}(x) = \varphi(y \mapsto A_{P_{pq}}(x^j, y^{p-j}, x^k, y^{q-k}))$$

є звуженням на діагональ (j,k)-лінійного симетричного відображення

$$B(x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}) = \\ = \varphi(y \mapsto A_{P_{pq}}(x_1, \ldots, x_j, y^{p-j}, x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}, y^{q-k})),$$

тому функція $w_{p,q,j,k}$ є неперервним (j,k)-поліномом. Отже, функція $h_{\phi,P}$ є неперервним $*$-поліномом.

Покажемо, що $h_{\phi,f} \in \tilde{\mathcal{P}}_*(X)$ для кожної функції $f \in \tilde{\mathcal{P}}_*(X)$. Оскільки $f \in \tilde{\mathcal{P}}_*(X)$ і алгебра $\mathcal{P}_*(X)$ є щільною в алгебрі $\tilde{\mathcal{P}}_*(X)$, то існує послідовність $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}_*(X)$, збіжна до функції f. Оскільки $f_n \in \mathcal{P}_*(X)$, то $h_{\phi,f_n} \in \mathcal{P}_*(X)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тому послідовність $\{h_{\phi,f_n}\}_{n=1}^{\infty}$ міститься в алгебрі $\mathcal{P}_*(X)$. Покажемо, що ця послідовність є фундаментальною в алгебрі $\tilde{\mathcal{P}}_*(X)$. Нехай $r \in \mathbb{Q}_+$. Для $m, n \in \mathbb{N}$, згідно із нерівністю (7.28), виконується нерівність

$$|h_{\phi,f_m}(x) - h_{\phi,f_n}(x)| = |h_{\phi,f_m - f_n}(x)| \le K C_s c_{s+\|x\|}^{-1} \|f_m - f_n\|_{s+\|x\|}.$$

Тому

$$\|h_{\phi,f_m} - h_{\phi,f_n}\|_r \le C_r \sup_{\|x\| \le r} |h_{\phi,f_m}(x) - h_{\phi,f_n}(x)| \le \\ \le K C_r C_s \sup_{\|x\| \le r} c_{s+\|x\|}^{-1} \|f_m - f_n\|_{s+\|x\|}.$$

Зауважимо, що

$$\sup_{\|x\| \le r} c_{s+\|x\|}^{-1} \|f_m - f_n\|_{s+\|x\|} \le \left(\sup_{\|x\| \le r} c_{s+\|x\|}^{-1} \right) \left(\sup_{\|x\| \le r} \|f_m - f_n\|_{s+\|x\|} \right)$$

і

$$\sup_{\|x\| \le r} c_{s+\|x\|}^{-1} = \left(\inf_{\|x\| \le r} c_{s+\|x\|} \right)^{-1} = \left(\inf_{t \in [s, s+r]} c_t \right)^{-1}$$

(це значення є скінченним, оскільки $\inf_{t\in[s,s+r]} c_t > 0$). Згідно із нерівністю (7.24), отримуємо нерівність

$$\sup_{\|x\|\le r} \|f_m - f_n\|_{s+\|x\|} \le \sup_{\|x\|\le r} C_{s+\|x\|} \sup_{\|y\|\le s+\|x\|} |f_m(y) - f_n(y)| \le$$
$$\le \sup_{\|x\|\le r} C_{s+\|x\|} \sup_{\|y\|\le s+r} |f_m(y) - f_n(y)| = \Big(\sup_{t\in[s,s+r]} C_t\Big)\|f_m - f_n\|_{s+r}.$$

Отже,

$$\|h_{\phi,f_m} - h_{\phi,f_n}\|_r \le KC_rC_s\Big(\inf_{t\in[s,s+r]} c_t\Big)^{-1}\Big(\sup_{t\in[s,s+r]} C_t\Big)\|f_m - f_n\|_{s+r}.$$

Із цієї нерівності і із фундаментальності послідовності $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ випливає фундаментальність послідовності $\{h_{\phi,f_n}\}_{n=1}^\infty$. Оскільки алгебра $\tilde{\mathcal{P}}_*(X)$ є повною, то існує функція $v \in \tilde{\mathcal{P}}_*(X)$ така, що послідовність $\{h_{\phi,f_n}\}_{n=1}^\infty$ збігається до функції v. Покажемо, що $h_{\phi,f} = v$. Нехай $x \in X$. Нехай число $\rho \in \mathbb{Q}_+$ таке, що $\rho > \|x\|$. Згідно із нерівністю (7.24),

$$\sup_{\|z\|\le\rho} |h_{\phi,f_n}(z) - v(z)| \le c_\rho^{-1}\|h_{\phi,f_n} - v\|_\rho.$$

Тому

$$|h_{\phi,f_n}(x) - v(x)| \le c_\rho^{-1}\|h_{\phi,f_n} - v\|_\rho.$$

Оскільки $\|h_{\phi,f_n} - v\|_\rho \to 0$ при $n \to \infty$, то послідовність $\{h_{\phi,f_n}(x)\}_{n=1}^\infty$ збігається до значення $v(x)$. З іншого боку, за неперервністю функціонала ϕ і оператора T_x, оскільки $f_n \to f$ при $n \to \infty$, то $\phi(T_x(f_n)) \to \phi(T_x(f))$ при $n \to \infty$, тобто, $h_{\phi,f_n}(x) \to h_{\phi,f}(x)$ при $n \to \infty$. Тому $h_{\phi,f}(x) = v(x)$. Отже, $h_{\phi,f} = v$ і, як наслідок, $h_{\phi,f} \in \tilde{\mathcal{P}}_*(X)$. Теорему доведено. $\square$

7.5. Симетричні поліноми на декартовому степені дійсного банахового простору вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку

В даному підрозділі буде побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх дійснозначних симетричних поліномів на декартовому степені дійсного банахового простору всіх дійснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку.

Нехай $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$. Нехай $L_\infty^{(\mathbb{K})}[0,1] := L_\infty^{(\mathbb{K})}([0,1])$ — це комплексний банахів простір всіх вимірних за Лебегом суттєво обмежених $\mathbb{K}$-значих функцій, заданих на відрізку $[0,1]$ (див. приклад 1.1). Норму $\|\cdot\|_{L_\infty^{(\mathbb{K})}[0,1]}$ на цьому просторі, визначену формулою (1.14), в цьому розділі будемо позначати $\|\cdot\|_\infty$.

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Нехай $\left(L_\infty^{(\mathbb{K})}[0,1]\right)^n$ — це n-тий декартів степінь простору $L_\infty^{(\mathbb{K})}[0,1]$ з нормою

$$\|y\|_{\infty,n} = \max_{1\le s\le n} \|y_s\|_\infty,$$

де $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \left(L_\infty^{(\mathbb{K})}[0,1]\right)^n$.

Згідно із означенням 1.18, функцію $f : \left(L_\infty^{(\mathbb{K})}[0,1]\right)^n \to \mathbb{K}$ називають *симетричною*, якщо $f((y_1\circ\sigma, \ldots, y_n\circ\sigma)) = f((y_1, \ldots, y_n))$ для кожного елемента $(y_1, \ldots, y_n) \in \left(L_\infty^{(\mathbb{K})}[0,1]\right)^n$ і для кожної бієкції $\sigma \in \Xi_{[0,1]}$, де множина $\Xi_{[0,1]}$ визначена на с. 63.

Із твердження 1.1 випливає наступний наслідок.

Наслідок 7.1. *Нехай* $P : \left(L_\infty^{(\mathbb{K})}[0,1]\right)^n \to \mathbb{K}$ *— симетричний* N*-однорідний поліном. Тоді*

$$A_P(z_1\circ\sigma, \ldots, z_N\circ\sigma) = A_P(z_1, \ldots, z_N)$$

для кожних $z_1, \ldots, z_N \in \left(L_\infty^{(\mathbb{K})}[0,1]\right)^n$ *і* $\sigma \in \Xi_{[0,1]}$.

Для кожного мультиіндексу $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ такого, що $|k| \ge 1$, де $|k| = k_1 + \ldots + k_n$, визначимо відображення $R_k^{(\mathbb{K})} : \left(L_\infty^{(\mathbb{K})}[0,1]\right)^n \to \mathbb{K}$

формулою

$$R_k^{(\mathbb{K})}(y) = \int_{[0,1]} \prod_{\substack{s=1\\ k_s>0}}^{n} (y_s(t))^{k_s}\, dt,$$

де $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \Big(L_\infty^{(\mathbb{K})}[0,1]\Big)^n$. Зауважимо, що відображення $R_k^{(\mathbb{K})}$ є неперервним симетричним $|k|$-однорідним поліномом і $\big\|R_k^{(\mathbb{K})}\big\| = 1$.

Для кожного N-однорідного полінома $P : \Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)^n \to \mathbb{R}$, визначимо N-однорідний поліном $\widehat{P} : \Big(L_\infty^{(\mathbb{C})}[0,1]\Big)^n \to \mathbb{C}$ наступним чином. Нехай A_P — це N-лінійне симетричне відображення, асоційоване із поліномом P. Визначимо відображення $A_{\widehat{P}} : \underbrace{\Big(L_\infty^{(\mathbb{C})}[0,1]\Big)^n \times \ldots \times \Big(L_\infty^{(\mathbb{C})}[0,1]\Big)^n}_{N} \to \mathbb{C}$ формулою

$$A_{\widehat{P}}(y_1, \ldots, y_N) = \sum_{j_1=0}^{1} \cdots \sum_{j_N=0}^{1} i^{j_1+\ldots+j_N} A_P\Big(y_1^{(j_1)}, \ldots, y_N^{(j_N)}\Big), \tag{7.29}$$

де елементи $y^{(0)}$ і $y^{(1)}$ для кожного $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \Big(L_\infty^{(\mathbb{C})}[0,1]\Big)^n$ визначені формулами

$$y^{(0)}(t) = \big(\operatorname{Re} y_1(t), \ldots, \operatorname{Re} y_n(t)\big),$$
$$y^{(1)}(t) = \big(\operatorname{Im} y_1(t), \ldots, \operatorname{Im} y_n(t)\big)$$

для $t \in [0,1]$. Можна перевірити, що відображення $A_{\widehat{P}}$ є N-лінійним і симетричним. Нехай

$$\widehat{P}(y) = A_{\widehat{P}}(\underbrace{y, \ldots, y}_{N}) \tag{7.30}$$

для кожного $y \in \Big(L_\infty^{(\mathbb{C})}[0,1]\Big)^n$. Зауважимо, що поліном $\widehat{P}$ зазвичай називають комплексифікацією полінома P. Можна перевірити, що для кожного N_1-однорідного полінома P_1 і для кожного N_2-однорідного полінома P_2, які діють з простору $\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)^n$ в множину $\mathbb{R}$, де $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, маємо $\widehat{P_1 P_2} = \widehat{P_1}\widehat{P_2}$.

Для кожного полінома $P : \Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)^n \to \mathbb{R}$ вигляду

$$P = P_0 + P_1 + \ldots + P_N,$$

де $P_0 \in \mathbb{R}$ і $P_j : \left(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\right)^n \to \mathbb{R}$ — це j-однорідний поліном для кожного $j \in \{1, \ldots, N\}$, нехай

$$\widehat{P} = P_0 + \widehat{P}_1 + \ldots + \widehat{P}_N. \tag{7.31}$$

Твердження 7.6. *Для кожного симетричного неперервного N-однорідного полінома P, який діє з простору $\left(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\right)^n$ в множину $\mathbb{R}$, N-однорідний поліном $\widehat{P} : \left(L_\infty^{(\mathbb{C})}[0,1]\right)^n \to \mathbb{C}$, визначений формулою (7.30), є симетричним, неперервним і*

$$\|\widehat{P}\| \leq \frac{(2N)^N}{N!}\|P\|.$$

Доведення. Нехай $P : \left(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\right)^n \to \mathbb{R}$ — це симетричний неперервний N-однорідний поліном. Нехай A_P — це N-лінійне симетричне відображення, асоційоване із поліномом P.

Згідно із [33, с. 82, формула 2],

$$\|\widehat{P}\| \leq \frac{(2N)^N}{N!}\|P\|.$$

Тому із неперервності полінома P випливає неперервність полінома $\widehat{P}$.

Оскільки поліном P є симетричним, то, згідно із наслідком 7.1,

$$A_P(y_1 \circ \sigma, \ldots, y_N \circ \sigma) = A_P(y_1, \ldots, y_N)$$

для кожних $y_1, \ldots, y_N \in \left(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\right)^n$ і $\sigma \in \Xi_{[0,1]}$. Тому, згідно із рівністю (7.29),

$$A_{\widehat{P}}(z_1 \circ \sigma, \ldots, z_N \circ \sigma) = A_{\widehat{P}}(z_1, \ldots, z_N)$$

для кожних $z_1, \ldots, z_N \in \left(L_\infty^{(\mathbb{C})}[0,1]\right)^n$ і $\sigma \in \Xi_{[0,1]}$. Як наслідок, згідно із рівністю (7.30),

$$\widehat{P}(z \circ \sigma) = A_{\widehat{P}}(\underbrace{z \circ \sigma, \ldots, z \circ \sigma}_{N}) = A_{\widehat{P}}(\underbrace{z, \ldots, z}_{N}) = \widehat{P}(z)$$

для кожних $z \in \left(L_\infty^{(\mathbb{C})}[0,1]\right)^n$ і $\sigma \in \Xi_{[0,1]}$. Отже, поліном $\widehat{P}$ є симетричним. Твердження доведено. □

Твердження 7.7. *Множина поліномів* $\left\{R_k^{(\mathbb{R})}\ :\ k\in\mathbb{Z}_+^n, |k|\geq 1\right\}$ *є алгебраїчно незалежною.*

Доведення. Нехай $N\in\mathbb{N}$. Покажемо, що множина $\left\{R_k^{(\mathbb{R})}\ :\ k\in M_N\right\}$ є алгебраїчно незалежною, де множина M_N визначена формулою (6.5). Припустимо, що

$$\alpha_0+\sum_{\mu=1}^{\mu'}\sum_{\substack{l:M_N\to\mathbb{Z}_+\\ \varkappa(l,M_N)=\mu}}\alpha_l\prod_{\substack{k\in M_N\\ l(k)>0}}\left(R_k^{(\mathbb{R})}(y)\right)^{l(k)}=0 \tag{7.32}$$

для кожного $y\in\left(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\right)^n$, де $\alpha_0,\alpha_l\in\mathbb{R}$ і $\mu'\in\mathbb{N}$. Покажемо, що всі коефіцієнти α_0,α_l дорівнюють нулю. Для $\mu\in\{1,\ldots,\mu'\}$, нехай

$$Q_\mu(y)=\sum_{\substack{l:M_N\to\mathbb{Z}_+\\ \varkappa(l,M_N)=\mu}}\alpha_l\prod_{\substack{k\in M_N\\ l(k)>0}}\left(R_k^{(\mathbb{R})}(y)\right)^{l(k)}$$

для $y\in\left(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\right)^n$. Зауважимо, що відображення Q_μ є μ-однорідним поліномом. Згідно із рівністю (7.32),

$$\alpha_0+\sum_{\mu=1}^{\mu'}Q_\mu(y)=0 \tag{7.33}$$

для кожного $y\in\left(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\right)^n$. Тому, згідно із твердженням 1.2 і рівністю (7.33), $\alpha_0=0$ і $Q_\mu(y)=0$ для кожних $y\in\left(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\right)^n$ і $\mu\in\{1,\ldots,\mu'\}$. Як наслідок, $\|Q_\mu\|=0$ для кожного $\mu\in\{1,\ldots,\mu'\}$. Тому, згідно із твердженням 7.6, $\|\widehat{Q}_\mu\|=0$ і, як наслідок, поліном $\widehat{Q}_\mu$ тотожно дорівнює нулю. Враховуючи рівність $\widehat{R_k^{(\mathbb{R})}}=R_k^{(\mathbb{C})}$, маємо

$$\widehat{Q}_\mu(y)=\sum_{\substack{l:M_N\to\mathbb{Z}_+\\ \varkappa(l,M_N)=\mu}}\alpha_l\prod_{\substack{k\in M_N\\ l(k)>0}}\left(R_k^{(\mathbb{C})}(y)\right)^{l(k)} \tag{7.34}$$

для $y\in\left(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\right)^n$ і $\mu\in\{1,\ldots,\mu'\}$. Оскільки $\widehat{Q}_\mu$ — це симетричний неперервний μ-однорідний поліном на просторі $\left(L_\infty^{(\mathbb{C})}[0,1]\right)^n$, то, згідно із теоремою 6.1, зображення (7.34) є єдиним і, як наслідок, $\alpha_l = 0$ для кожного відображення $l : M_N \to \mathbb{Z}_+$ такого, що $\varkappa(l, M_N) = \mu$. Отже, множина поліномів $\left\{R_k^{(\mathbb{R})} : \ k \in M_N\right\}$ є алгебраїчно незалежною.

Оскільки кожна скінченна підмножина множини $\{k \in \mathbb{Z}_+^n : \ |k| \geq 1\}$ є підмножиною множини M_N для деякого $N \in \mathbb{N}$, то множина поліномів $\left\{R_k^{(\mathbb{R})} : \ k \in \mathbb{Z}_+^n, |k| \geq 1\right\}$ є алгебраїчно незалежною. Твердження доведено. □

Доведемо наступний аналог теореми 6.1.

Теорема 7.6. *Кожен симетричний неперервний N-однорідний поліном $P : \left(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\right)^n \to \mathbb{R}$ можна єдиним чином подати у вигляді*

$$P(y) = \sum_{\substack{l: M_N \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l, M_N) = N}} \alpha_l \prod_{\substack{k \in M_N \\ l(k) > 0}} \left(R_k^{(\mathbb{R})}(y)\right)^{l(k)},$$

де $y \in \left(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\right)^n$, $\alpha_l \in \mathbb{R}$, множина M_N визначена формулою (6.5), *відображення $\varkappa$ визначене формулою* (6.4).

Доведення. Нехай $P : \left(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\right)^n \to \mathbb{R}$ — це симетричний неперервний N-однорідний поліном. Нехай $\widehat{P} : \left(L_\infty^{(\mathbb{C})}[0,1]\right)^n \to \mathbb{C}$ — це N-однорідний поліном, визначений формулою (7.30). Згідно із твердженням 7.6, поліном $\widehat{P}$ є симетричним і неперервним. Тому, згідно із теоремою 6.1, поліном $\widehat{P}$ можна єдиним чином подати у вигляді

$$\widehat{P}(y) = \sum_{\substack{l: M_N \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l, M_N) = N}} \alpha_l \prod_{\substack{k \in M_N \\ l(k) > 0}} \left(R_k^{(\mathbb{C})}(y)\right)^{l(k)},$$

де $y \in \left(L_\infty^{(\mathbb{C})}[0,1]\right)^n$, α_l — це, у загальному випадку, комплексні числа, множина M_N визначена формулою (6.5), відображення $\varkappa$ визначене формулою (6.4). Для кожного $y \in \left(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\right)^n$ маємо $\widehat{P}(y) = P(y)$ і $R_k^{(\mathbb{C})}(y) = R_k^{(\mathbb{R})}(y)$ для $k \in M_N$. Тому

$$P(y) = \sum_{\substack{l: M_N \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l, M_N) = N}} \alpha_l \prod_{\substack{k \in M_N \\ l(k) > 0}} \left(R_k^{(\mathbb{R})}(y)\right)^{l(k)} \tag{7.35}$$

для кожного $y \in \left(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\right)^n$. Покажемо, що всі коефіцієнти α_l є дійсними числами. Оскільки $P(y) \in \mathbb{R}$, то $P(y) - \overline{P(y)} = 0$, тобто

$$2 \sum_{\substack{l:M_N \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l,M_N)=N}} \operatorname{Im} \alpha_l \prod_{\substack{k \in M_N \\ l(k)>0}} \left(R_k^{(\mathbb{R})}(y)\right)^{l(k)} = 0 \tag{7.36}$$

для кожного $y \in \left(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\right)^n$. Згідно із твердженням 7.7, множина поліномів $\left\{R_k^{(\mathbb{R})} : k \in M_N\right\}$ є алгебраїчно незалежною. Тому, згідно із рівністю (7.36), $\operatorname{Im} \alpha_l = 0$ для кожного коефіцієнта α_l. Крім того, оскільки множина поліномів $\left\{R_k^{(\mathbb{R})} : k \in M_N\right\}$ є алгебраїчно незалежною, то зображення (7.35) є єдиним. Теорему доведено. □

Наслідок 7.2. *Множина поліномів*

$$\left\{R_k^{(\mathbb{R})} : k \in \mathbb{Z}_+^n, |k| \geq 1\right\} \tag{7.37}$$

є алгебраїчним базисом алгебри всіх симетричних неперервних дійснозначних поліномів на просторі $\left(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\right)^n$.

Доведення. Нехай $P : \left(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\right)^n \to \mathbb{R}$ — це симетричний неперервний поліном. Тоді його можна подати у вигляді

$$P = P_0 + P_1 + \ldots + P_{N'},$$

де $N' \in \mathbb{N}, P_0 \in \mathbb{R}$ і P_j — це j-однорідний поліном для $j \in \{1, \ldots, N'\}$. Для кожного $j \in \{1, \ldots, N'\}$, згідно із твердженням 1.2, поліном P_j є симетричним і неперервним. Тому, згідно із теоремою 7.6, поліном P_j можна подати, як алгебраїчну комбінацію елементів множини (7.37). Як наслідок, поліном P можна подати, як алгебраїчну комбінацію елементів множини (7.37). Згідно із твердженням 7.7, множина (7.37) є алгебраїчно незалежною. Як наслідок, зображення полінома P, як алгебраїчної комбінації елементів множини (7.37) є єдиним. Наслідок доведено. □

7.6. Поповнення алгебри симетричних поліномів на дійсному банаховому просторі вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку

Даний підрозділ присвячено вивченню дійснозначних симетричних функцій на дійсному банаховому просторі $L_\infty[0,1]$. Описано спектр алгебри Фреше, яка є поповненням алгебри всіх дійснозначних симетричних неперервних поліномів на просторі $L_\infty[0,1]$ відносно сім'ї норм від комплексифікацій поліномів. Показано, що дана алгебра Фреше містить неаналітичні функції.

Із теореми 7.6 і наслідку 7.2 випливає наступний наслідок.

Наслідок 7.3. *Нехай $N' \in \mathbb{N}$. Кожен симетричний неперервний поліном $P : L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1] \to \mathbb{R}$ степеня щонайбільше N' можна єдиним чином подати у вигляді*

$$P(y) = \alpha_0 + \sum_{N=1}^{N'} \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_N \in \mathbb{Z}_+ \\ l_1+2l_2+\ldots+Nl_N=N}} \alpha_{l_1,\ldots,l_N} \prod_{\substack{k\in\{1,\ldots,N\} \\ l_k>0}} \Big(R_k^{(\mathbb{R})}(y)\Big)^{l_k}, \qquad (7.38)$$

де $y \in L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]$ і $\alpha_{l_1,\ldots,l_N} \in \mathbb{R}$. Як наслідок,

$$\widehat{P}(y) = \alpha_0 + \sum_{N=1}^{N'} \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_N \in \mathbb{Z}_+ \\ l_1+2l_2+\ldots+Nl_N=N}} \alpha_{l_1,\ldots,l_N} \prod_{\substack{k\in\{1,\ldots,N\} \\ l_k>0}} \Big(R_k^{(\mathbb{C})}(y)\Big)^{l_k},$$

де $y \in L_\infty^{(\mathbb{C})}[0,1]$.

Нехай G — це множина всіх функцій $g \in L_\infty^{(\mathbb{C})}[0,1]$ таких, що $\overline{g} = g \circ \sigma_g$ для деякої функції $\sigma_g \in \Xi_{[0,1]}$, де $\overline{g}$ — це комплексно спряжена функція до функції g.

Лема 7.2. *Для кожного $m \in \mathbb{N}$ і $g \in G$, значення $R_m^{(\mathbb{C})}(g)$ є дійсним.*

Доведення. Нехай $m \in \mathbb{N}$ і $g \in G$. Тоді існує функція $\sigma_g \in \Xi_{[0,1]}$ така, що $\overline{g} = g \circ \sigma_g$. Оскільки поліном $R_m^{(\mathbb{C})}$ є симетричним, то

$$R_m^{(\mathbb{C})}(\overline{g}) = R_m^{(\mathbb{C})}(g \circ \sigma_g) = R_m^{(\mathbb{C})}(g).$$

З іншого боку,

$$R_m^{(\mathbb{C})}(\overline{g}) = \overline{R_m^{(\mathbb{C})}(g)}.$$

Тому $\overline{R_m^{(\mathbb{C})}(g)} = R_m^{(\mathbb{C})}(g)$. Отже, число $R_m^{(\mathbb{C})}(g)$ є дійсним. Лему доведено. □

Позначимо $\mathcal{P}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$ алгебру всіх симетричних неперервних поліномів, які діють з простору $L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]$ в множину $\mathbb{R}$.

Наслідок 7.4. *Для кожних $P \in \mathcal{P}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$ і $g \in G$, значення $\widehat{P}(g)$ є дійсним.*

Доведення. Даний наслідок випливає із наслідку 7.3 і леми 7.2. □

Для кожних $r \in \mathbb{N}$ і $P \in \mathcal{P}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$, нехай

$$\|P\|_r = \sup_{\substack{\|g\|_\infty \le r \\ g \in G}} |\widehat{P}(g)|.$$

Нехай $\mathcal{A}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$ — це поповнення алгебри $\mathcal{P}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$ відносно метрики

$$d(P_1, P_2) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^r} \frac{\|P_1 - P_2\|_r}{1 + \|P_1 - P_2\|_r},$$

де $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$, породженої зліченною системою норм $\{\|\cdot\|_r : r \in \mathbb{N}\}$.

Для кожної функції $f \in \mathcal{A}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$, визначимо функцію $\widehat{f} : G \to \mathbb{R}$ наступним чином. Нехай $\{P_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathcal{P}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$ — це послідовність поліномів, яка збігається до функції f. Для $g \in G$, нехай

$$\widehat{f}(g) = \lim_{m\to\infty} \widehat{P}_m(g).$$

Можна перевірити, що значення $\widehat{f}(g)$ не залежить від вибору послідовності $\{P_m\}_{m=1}^\infty$. Згідно із наслідком 7.4, $\widehat{P}_m(g) \in \mathbb{R}$, тому $\widehat{f}(g) \in \mathbb{R}$.

Для кожних $r \in \mathbb{N}$ і $f \in \mathcal{A}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$, нехай

$$\|f\|_r = \sup_{\substack{\|g\|_\infty \le r \\ g \in G}} |\widehat{f}(g)|.$$

Зауважимо, що $\mathcal{A}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$ — це алгебра Фреше функцій, які діють з простору $L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]$ в множину $\mathbb{R}$, відносно метрики

$$d(f_1, f_2) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^r} \frac{\|f_1 - f_2\|_r}{1 + \|f_1 - f_2\|_r}, \tag{7.39}$$

де $f_1, f_2 \in \mathcal{A}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$. Зауважимо, що послідовність елементів алгебри $\mathcal{A}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$ є збіжною (фундаментальною) відносно метрики (7.39) якщо і тільки якщо вона є збіжною (фундаментальною) відносно кожної з норм $\|\cdot\|_r$, $r \in \mathbb{N}$.

Твердження 7.8. *Нехай $f : L_\infty^{(\mathbb{C})}[0,1] \to \mathbb{C}$ — це симетрична аналітична функція, яка є обмеженою на кожній обмеженій підмножині простору $L_\infty^{(\mathbb{C})}[0,1]$, вигляду*

$$f(y) = \alpha_0 + \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_N \in \mathbb{Z}_+ \\ l_1+2l_2+\ldots+Nl_N=N}} \alpha_{l_1,\ldots,l_N} \prod_{\substack{k\in\{1,\ldots,N\} \\ l_k>0}} \Big(R_k^{(\mathbb{C})}(y)\Big)^{l_k},$$

де $y \in L_\infty^{(\mathbb{C})}[0,1]$ і всі коефіцієнти $\alpha_{l_1,\ldots,l_N}$ є дійсними. Тоді звуження функції f на простір $L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]$ належить алгебрі $\mathcal{A}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$.

Доведення. Для $m \in \mathbb{N}$, визначимо функцію $f_m : L_\infty^{(\mathbb{C})}[0,1] \to \mathbb{C}$ формулою

$$f_m(y) = \alpha_0 + \sum_{N=1}^{m} \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_N \in \mathbb{Z}_+ \\ l_1+2l_2+\ldots+Nl_N=N}} \alpha_{l_1,\ldots,l_N} \prod_{\substack{k\in\{1,\ldots,N\} \\ l_k>0}} \Big(R_k^{(\mathbb{C})}(y)\Big)^{l_k},$$

де $y \in L_\infty^{(\mathbb{C})}[0,1]$. Оскільки функція f є аналітичною і обмеженою на кожній обмеженій підмножині простору $L_\infty^{(\mathbb{C})}[0,1]$, то для кожного $r \in \mathbb{N}$

$$\sup_{\substack{\|y\|_\infty \le r \\ y\in L_\infty^{(\mathbb{C})}[0,1]}} |f(y) - f_m(y)| \to 0 \qquad \text{при} \quad m \to \infty \tag{7.40}$$

і

$$\sup_{\substack{\|y\|_\infty \le r \\ y\in L_\infty^{(\mathbb{C})}[0,1]}} |f_{m'}(y) - f_{m''}(y)| \to 0 \qquad \text{при} \quad \min\{m', m''\} \to \infty. \tag{7.41}$$

Для $m \in \mathbb{N}$, нехай h_m — це звуження функції f_m на простір $L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]$, тобто

$$h_m(y) = \alpha_0 + \sum_{N=1}^{m} \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_N \in \mathbb{Z}_+ \\ l_1+2l_2+\ldots+Nl_N=N}} \alpha_{l_1,\ldots,l_N} \prod_{\substack{k\in\{1,\ldots,N\} \\ l_k>0}} \Big(R_k^{(\mathbb{R})}(y)\Big)^{l_k},$$

де $y \in L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]$. Зауважимо, що $\{h_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathcal{P}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$. Для кожного $r \in \mathbb{N}$, згідно із (7.41),

$$\|h_{m'} - h_{m''}\|_r = \sup_{\substack{\|g\|_\infty \le r \\ g\in G}} |\widehat{h}_{m'}(g) - \widehat{h}_{m''}(g)| = \sup_{\substack{\|g\|_\infty \le r \\ g\in G}} |f_{m'}(g) - f_{m''}(g)| \le$$

$$\le \sup_{\substack{\|y\|_\infty \le r \\ y\in L_\infty^{(\mathbb{C})}[0,1]}} |f_{m'}(y) - f_{m''}(y)| \to 0$$

при $\min\{m', m''\} \to \infty$. Як наслідок, послідовність $\{h_m\}_{m=1}^\infty$ є фундаментальною відносно метрики (7.39). Оскільки алгебра $\mathcal{A}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$ є повною, то існує функція $h \in \mathcal{A}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$ така, що послідовність $\{h_m\}_{m=1}^\infty$ збігається до h. Покажемо, що функція h є звуженням функції f на простір $L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]$. Нехай $y \in L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]$. Нехай число $r \in \mathbb{N}$ таке, що $r \ge \|y\|_\infty$. Тоді $\|h - h_m\|_r \to 0$ при $m \to \infty$ і, як наслідок, послідовність $\{h_m(y)\}_{m=1}^\infty$ збігається до $h(y)$. З іншого боку, згідно із (7.40), враховуючи, що $f_m(y) = h_m(y)$, послідовність $\{h_m(y)\}_{m=1}^\infty$ збігається до $f(y)$. Отже, $h(y) = f(y)$. Твердження доведено. □

Наступне твердження показує, що алгебра $\mathcal{A}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$ містить функції, які не є аналітичними.

Твердження 7.9. *Функція*

$$L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1] \ni y \mapsto \Big|R_1^{(\mathbb{R})}(y)\Big| \in \mathbb{R} \tag{7.42}$$

належить алгебрі $\mathcal{A}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$.

Доведення. Згідно із теоремою Стоуна-Вейєрштрасса, для кожного $r \in \mathbb{N}$, існує послідовність дійснозначних поліномів від однієї дійсної змінної $\{p_m^{(r)}\}_{m=1}^\infty$, яка рівномірно збігається до функції

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto |t| \in \mathbb{R} \tag{7.43}$$

на відрізку $[-r,r]$. Нехай $q_m = p_m^{(m)}$ для кожного $m \in \mathbb{N}$. Тоді послідовність $\{q_m^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ рівномірно збігається до функції (7.43) на кожному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Для кожного $m \in \mathbb{N}$, визначимо відображення $Q_m : L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1] \to \mathbb{R}$ формулою

$$Q_m(y) = q_m\big(R_1^{(\mathbb{R})}(y)\big), \tag{7.44}$$

де $y \in L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]$. Зауважимо, що відображення Q_m є симетричним неперервним поліномом на просторі $L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]$ для кожного $m \in \mathbb{N}$. Покажемо, що послідовність $\{Q_m\}_{m=1}^{\infty}$ є фундаментальною в алгебрі $\mathcal{A}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$. Для $r, m', m'' \in \mathbb{N}$,

$$\|Q_{m'} - Q_{m''}\|_r = \sup_{\substack{\|g\|_\infty \le r \\ g \in G}} \Big|\widehat{Q}_{m'}(g) - \widehat{Q}_{m''}(g)\Big| = \sup_{\substack{\|g\|_\infty \le r \\ g \in G}} \Big|q_{m'}\big(R_1^{(\mathbb{C})}(g)\big) - q_{m''}\big(R_1^{(\mathbb{C})}(g)\big)\Big|. \tag{7.45}$$

Для кожної функції $g \in G$ такої, що $\|g\|_\infty \le r$, маємо $R_1^{(\mathbb{C})}(g) \in \mathbb{R}$ і

$$\big|R_1^{(\mathbb{C})}(g)\big| \le \int_{[0,1]} |g(t)|\, dt \le \|g\|_\infty \le r,$$

тобто $R_1^{(\mathbb{C})}(g) \in [-r,r]$. Як наслідок,

$$\sup_{\substack{\|g\|_\infty \le r \\ g \in G}} \Big|q_{m'}\big(R_1^{(\mathbb{C})}(g)\big) - q_{m''}\big(R_1^{(\mathbb{C})}(g)\big)\Big| \le \sup_{t \in [-r,r]} |q_{m'}(t) - q_{m''}(t)|. \tag{7.46}$$

Оскільки послідовність $\{q_m\}_{m=1}^{\infty}$ є рівномірно збіжною на відрізку $[-r,r]$, то

$$\sup_{t \in [-r,r]} |q_{m'}(t) - q_{m''}(t)| \to 0 \qquad \text{при} \quad \min\{m', m''\} \to \infty. \tag{7.47}$$

Згідно із (7.45), (7.46) і (7.47), $\|Q_{m'} - Q_{m''}\|_r \to 0$ при $\min\{m', m''\} \to \infty$. Отже, послідовність $\{Q_m\}_{m=1}^{\infty}$ є фундаментальною відносно норми $\|\cdot\|_r$ для кожного $r \in \mathbb{N}$. Як наслідок, послідовність $\{Q_m\}_{m=1}^{\infty}$ є фундаментальною відносно метрики (7.39). Оскільки алгебра $\mathcal{A}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$ є повною, то існує функція $f \in \mathcal{A}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$ така, що послідовність $\{Q_m\}_{m=1}^{\infty}$ збігається до функції f. Покажемо, що $f(y) = \big|R_1^{(\mathbb{R})}(y)\big|$ для кожної функції $y \in L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]$. Нехай $y_0 \in L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]$. Нехай число $r \in \mathbb{N}$ таке, що $r \ge \|y_0\|_\infty$.

Оскільки послідовність $\{Q_m\}_{m=1}^\infty$ збігається до функції f відносно норми $\|\cdot\|_r$, то послідовність $\{Q_m(y_0)\}_{m=1}^\infty$ збігається до $f(y_0)$. Згідно із рівністю (7.44), $Q_m(y_0) = q_m(t_0)$, де $t_0 = R_1^{(\mathbb{R})}(y_0)$. Тоді послідовність $\{q_m(t_0)\}_{m=1}^\infty$ збігається до $f(y_0)$. Нехай число $r_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $t_0 \in [-r_0, r_0]$. Оскільки послідовність $\{q_m\}_{m=1}^\infty$ рівномірно збігається до функції (7.43) на відрізку $[-r_0, r_0]$, то послідовність $\{q_m(t_0)\}_{m=1}^\infty$ збігається до $|t_0|$. Згідно із єдиністю границі, $f(y_0) = |t_0|$, тобто $f(y_0) = \left|R_1^{(\mathbb{R})}(y_0)\right|$. Отже, $f(y) = \left|R_1^{(\mathbb{R})}(y)\right|$ для кожної функції $y \in L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]$, тобто функція (7.42) збігається з функцією f. Як наслідок, функція (7.42) належить алгебрі $\mathcal{A}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$. Твердження доведено. □

Нехай $\mathcal{M}$ — це множина всіх неперервних мультиплікативних лінійних функціоналів $\varphi : \mathcal{A}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big) \to \mathbb{R}$. Іншими словами, $\mathcal{M}$ — це спектр алгебри $\mathcal{A}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$. Опишемо множину $\mathcal{M}$.

Нехай $g \in G$. Можна перевірити, що відображення $\delta_g : \mathcal{A}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big) \to \mathbb{R}$, визначене формулою $\delta_g(f) = \widehat{f}(g)$, є мультиплікативним лінійним функціоналом. Також зауважимо, що відображення δ_g є неперервним відносно кожної норми $\|\cdot\|_r$, де $r \in \mathbb{N}$ і $r \geq \|g\|_\infty$. Отже, $\delta_g \in \mathcal{M}$.

Твердження 7.10. *Для кожної послідовності $\xi = \{\xi_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ такої, що $\sup_{m\in\mathbb{N}} \sqrt[m]{|\xi_m|} < +\infty$, існує функція $g_\xi \in G$ така, що $R_m^{(\mathbb{C})}(g_\xi) = \xi_m$ для кожного $m \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Нехай послідовність $\xi = \{\xi_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ така, що

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \sqrt[m]{|\xi_m|} < +\infty.$$

Згідно із теоремою 2.1, існує функція $y_\xi \in L_\infty^{(\mathbb{C})}[0,1]$ така, що $R_m^{(\mathbb{C})}(y_\xi) = \xi_m$ для кожного $m \in \mathbb{N}$. Визначимо функцію $g_\xi : [0,1] \to \mathbb{C}$ формулою

$$g_\xi(t) = \begin{cases} \overline{y_\xi(2t)}, & \text{якщо } t \in [0, \frac{1}{2}) \\ y_\xi(2t-1), & \text{якщо } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Оскільки $\overline{g}_\xi = g \circ \sigma$, де відображення $\sigma : [0,1] \to [0,1]$ визначене формулою

$$\sigma(t) = \begin{cases} t + \frac{1}{2}, & \text{якщо } t \in [0, \frac{1}{2}) \\ t - \frac{1}{2}, & \text{якщо } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

то $g_\xi \in G$. Для кожного $m \in \mathbb{N}$,

$$R_m^{(\mathbb{C})}(g_\xi) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\overline{y_\xi(2t)}\right)^m dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(y_\xi(2t-1)\right)^m dt = \frac{1}{2}\overline{\xi}_m + \frac{1}{2}\xi_m = \xi_m.$$

Твердження доведено. □

Твердження 7.11. *Для кожного* $\varphi \in \mathcal{M}$,

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \sqrt[m]{\left|\varphi\left(R_m^{(\mathbb{R})}\right)\right|} < +\infty.$$

Доведення. Оскільки функціонал φ є неперервним, то існує число $r \in \mathbb{N}$ таке, що φ є неперервним відносно норми $\|\cdot\|_r$. Тому існує стала $C > 0$ така, що

$$|\varphi(f)| \le C\|f\|_r$$

для кожної функції $f \in \mathcal{A}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$. Оскільки

$$\left\|R_m^{(\mathbb{R})}\right\|_r = \sup_{\substack{\|g\|_\infty \le r \\ g \in G}} \left|\widehat{R}_m^{(\mathbb{R})}(g)\right| = \sup_{\substack{\|g\|_\infty \le r \\ g \in G}} \left|R_m^{(\mathbb{C})}(g)\right| \le \sup_{\substack{\|g\|_\infty \le r \\ g \in G}} \int_0^1 |g(t)|^m\, dt \le r^m,$$

то

$$\left|\varphi\left(R_m^{(\mathbb{R})}\right)\right| \le Cr^m$$

для кожного $m \in \mathbb{N}$. Тому

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \sqrt[m]{\left|\varphi\left(R_m^{(\mathbb{R})}\right)\right|} < +\infty.$$

□

Твердження 7.12. *Нехай функціонали* $\varphi, \psi \in \mathcal{M}$ *такі, що* $\varphi\left(R_m^{(\mathbb{R})}\right) = \psi\left(R_m^{(\mathbb{R})}\right)$ *для кожного* $m \in \mathbb{N}$. *Тоді* $\varphi = \psi$.

Доведення. Згідно із наслідком 7.3, кожен поліном $P \in \mathcal{P}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$ можна єдиним чином подати у вигляді (7.3). Тому, оскільки функціонали φ і ψ є мультиплікативними і лінійними, то

$$\varphi(P) = \alpha_0 + \sum_{N=1}^{N'} \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_N \in \mathbb{Z}_+ \\ l_1+2l_2+\ldots+Nl_N=N}} \alpha_{l_1,\ldots,l_N} \prod_{\substack{k\in\{1,\ldots,N\} \\ l_k>0}} \Big(\varphi\big(R_k^{(\mathbb{R})}\big)\Big)^{l_k} =$$

$$= \alpha_0 + \sum_{N=1}^{N'} \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_N \in \mathbb{Z}_+ \\ l_1+2l_2+\ldots+Nl_N=N}} \alpha_{l_1,\ldots,l_N} \prod_{\substack{k\in\{1,\ldots,N\} \\ l_k>0}} \Big(\psi\big(R_k^{(\mathbb{R})}\big)\Big)^{l_k} = \psi(P)$$

для кожного полінома $P \in \mathcal{P}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$. Оскільки функціонали φ і ψ є неперервними і функціонал φ збігається з функціоналом ψ на підалгебрі $\mathcal{P}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$, яка є щільною в алгебрі $\mathcal{A}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$, то $\varphi(f) = \psi(f)$ для кожної функції $f \in \mathcal{A}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$. Твердження доведено. □

Нехай $\varphi \in \mathcal{M}$. Згідно із твердженням 7.11, послідовність $\big\{\varphi\big(R_m^{(\mathbb{R})}\big)\big\}_{m=1}^\infty$ така, що

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \sqrt[m]{\big|\varphi\big(R_m^{(\mathbb{R})}\big)\big|} < +\infty.$$

Тому, згідно із твердженням 7.10, існує функція $g \in G$ така, що $R_m^{(\mathbb{C})}(g) = \varphi\big(R_m^{(\mathbb{R})}\big)$ для кожного $m \in \mathbb{N}$. Оскільки $R_m^{(\mathbb{C})}(g) = \widehat{R}_m^{(\mathbb{R})}(g) = \delta_g\big(R_m^{(\mathbb{R})}\big)$, то $\varphi\big(R_m^{(\mathbb{R})}\big) = \delta_g\big(R_m^{(\mathbb{R})}\big)$ для кожного $m \in \mathbb{N}$. Тому, згідно із твердженням 7.12, $\varphi = \delta_g$. Отже, доведено наступну теорему.

Теорема 7.7. *Для кожного функціонала $\varphi \in \mathcal{M}$ існує функція $g \in G$ така, що $\varphi = \delta_g$. Крім того, для кожного функціонала $\varphi \in \mathcal{M}$,*

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \sqrt[m]{\big|\varphi\big(R_m^{(\mathbb{R})}\big)\big|} < +\infty,$$

і, як наслідок, для кожної послідовності $\{\xi_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ такої, що

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \sqrt[m]{|\xi_m|} < +\infty,$$

існує єдиний функціонал $\varphi \in \mathcal{M}$ такий, що $\varphi\big(R_m^{(\mathbb{R})}\big) = \xi_m$ для кожного $m \in \mathbb{N}$.

7.7. Продовження полілінійних відображень на декартові степені лінійних просторів

Даний підрозділ містить деякі результати стосовно продовжень полілінійних відображень на декартові степені.

Нехай X і Y — це лінійні простори над тим самим полем $\mathbb{K}$. Кожне симетричне n-лінійне відображення $A : X^n \to Y$ можна відновити із звуження цього відображення на діагональ $\widehat{A} : X \to Y$, $\widehat{A}(x) = A(x, \ldots, x)$, за допомогою поляризаційної формули (1.1). Але, в загальному випадку, якщо відображення A не обов'язково є симетричним, його неможливо відновити за відображенням $\widehat{A}$. Наприклад, якщо відображення A є кососиметричним і $n \geq 2$, то відображення $\widehat{A}$ тотожно дорівнює нулю. Нагадаємо, що відображення A називають *кососиметричним*, якщо виконується рівність $A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = (-1)^\sigma A(x_1, \ldots, x_n)$ для кожних $x_1, \ldots, x_n \in X$ і $\sigma \in \mathcal{S}_n$, де $\mathcal{S}_n$ — множина всіх перестановок на множині $\{1, \ldots, n\}$ і $(-1)^\sigma$ — це знак перестановки σ.

Зауважимо, що (m, n)-лінійне (m, n)-симетричне відображення (див. означення на с. 51) можна відновити за його звуженням на діагональ за допомогою поляризаційної формули (1.8), хоча симетрія відображення передбачена лише окремо між "лінійними" і окремо "антилінійними" аргументами і не передбачено симетрії між аргументами цих двох груп. У деяких випадках для полілінійних відображень виникає схожа ситуація, коли полілінійне відображення, яке не обов'язково є симетричним відносно усіх перестановок своїх аргументів, можна відновити за його звуженням на діагональ. Розглянемо приклад. Нехай $A : X^n \to Y$ є n-лінійним відображенням. Відображення $\widetilde{A} : (X^n)^n \to Y$, визначене рівністю

$$\widetilde{A}(x_1, \ldots, x_n) = A\big(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(n)}\big),$$

де $x_j = \big(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\big) \in X^n$ для $j \in \{1, \ldots, n\}$, є n-лінійним відображенням (у загальному випадку, несиметричним) і його звуження на діагональ $\widehat{\widetilde{A}}(x)$ дорівнює $A\big(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\big)$ для $x = \big(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\big) \in X^n$. Тому відображення A і, як наслідок, відображення $\widetilde{A}$, можна відновити зі звуження відображення $\widetilde{A}$ на діагональ.

У даному підрозділі розглянуто питання можливості відновлення полілінійного відображення зі звуження на діагональ його продовження на декартів степінь простору.

Нехай $M = (m_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — це матриця скалярів із поля $\mathbb{K}$. Тоді для кожного n-лінійного відображення $A : X^n \to Y$ відображення $E_M(A) : (X^n)^n \to Y$, визначене формулою

$$E_M(A)(x_1, \ldots, x_n) = A\bigl(m_{11}x_1^{(1)} + \ldots + m_{1n}x_1^{(n)}, \cdots, m_{n1}x_n^{(1)} + \ldots + m_{nn}x_n^{(n)}\bigr),$$

де $x_1, \ldots, x_n \in X^n$, є n-лінійним відображенням. Звуження на діагональ цього відображення дорівнює

$$\widehat{E_M(A)}(x) = \sum_{k_1=1}^{n} \ldots \sum_{k_n=1}^{n} m_{1k_1} \ldots m_{nk_n} A\bigl(x^{(k_1)}, \ldots, x^{(k_n)}\bigr). \tag{7.48}$$

Зауважимо, що якщо $m_{ij} = 1$, $i = 1, \ldots, n$, для фіксованого $j \in \{1, \ldots, n\}$, то відображення $E_M(A)$ є продовженням відображення A.

Твердження 7.13. *Для кожного n-лінійного кососиметричного відображення $A : X^n \to Y$,*

$$\widehat{E_M(A)}(x) = \det(M) A\bigl(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\bigr),$$

де $x = \bigl(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\bigr) \in X^n$.

Доведення. Оскільки відображення A є кососиметричним, то

$$A\bigl(x^{(k_1)}, \ldots, x^{(k_n)}\bigr) = 0,$$

якщо $k_l = k_s$ для деяких $l \neq s$. Тому, згідно із рівністю (7.48),

$$\widehat{E_M(A)}(x) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} m_{1\sigma(k_1)} \ldots m_{n\sigma(k_n)} A\bigl(x^{(\sigma(1))}, \ldots, x^{(\sigma(n))}\bigr).$$

Оскільки $A\bigl(x^{(\sigma(1))}, \ldots, x^{(\sigma(n))}\bigr) = (-1)^{\sigma} A\bigl(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\bigr)$, то

$$\widehat{E_M(A)}(x) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{\sigma} m_{1\sigma(k_1)} \ldots m_{n\sigma(k_n)} A\bigl(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\bigr) =$$

$$= \det(M) A\bigl(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\bigr).$$

Твердження доведено. $\square$

Розглянемо питання відновлення полілінійних відображень, які в загальному випадку не є ні симетричними, ні кососиметричними. Можна перевірити, що якщо M є діагональною матрицею, то

$$\widehat{E_M(A)}(x) = m_{11} \dots m_{nn} A\big(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\big)$$

для кожного n-лінійного відображення A. Побудуємо недіагональну матрицю M' таку, що кожне n-лінійне відображення A можна відновити із відображення $\widehat{E_{M'}(A)}$. Нехай

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

Для $k \in \{1, \dots, n\}$ визначимо відображення $i_k : X \to X^n$ рівністю

$$i_k(x) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, x, 0, \dots, 0).$$

Теорема 7.8. *n-Лінійне відображення A можна відновити із відображення $\widehat{E_{M'}(A)}$ за допомогою формули:*

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{j_2, \dots, j_n = 0}^{1} (-1)^{j_2 + \dots + j_n} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n \times \\ \times \widehat{E_{M'}(A)}\Big(\varepsilon_1 i_1(x_1) + \varepsilon_2 p_{j_2}^{(2)}(x_2) + \dots + \varepsilon_n p_{j_n}^{(n)}(x_n)\Big), \quad (7.49) \end{aligned}$$

де

$$p_{j_k}^{(k)}(x) = \begin{cases} i_1(x), & \textit{якщо } j_k = 0 \\ i_k(x), & \textit{якщо } j_k = 1 \end{cases}$$

для $k \in \{2, \dots, n\}$.

Доведення. Нехай $y_1 = i_1(x_1), y_2 = p^{(2)}_{j_2}(x_2), \ldots, y_n = p^{(n)}_{j_n}(x_n)$. Зауважимо, що

$$\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \widehat{E_{M'}(A)}(\varepsilon_1 y_1 + \ldots + \varepsilon_n y_n) =$$

$$= \sum_{k_1,\ldots,k_n=1}^{n} E_{M'}(A)(y_{k_1}, \ldots, y_{k_n}) \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \varepsilon_{k_1} \ldots \varepsilon_{k_n}$$

і

$$\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \varepsilon_{k_1} \ldots \varepsilon_{k_n} = \begin{cases} 2^n, & \text{якщо } k_1 \neq \ldots \neq k_n \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Тому

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \widehat{E_{M'}(A)}(\varepsilon_1 y_1 + \ldots + \varepsilon_n y_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} E_{M'}(A)\big(y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n)}\big).$$

Для $\sigma \in \mathcal{S}_n$ такого, що $\sigma(n) = n$, маємо

$$\sum_{j_n=0}^{1} (-1)^{j_n} E_{M'}(A)\big(y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n-1)}, y_{\sigma(n)}\big) =$$

$$= \sum_{j_n=0}^{1} (-1)^{j_n} E_{M'}(A)\Big(y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n-1)}, p^{(n)}_{j_n}(x_n)\Big) =$$

$$= E_{M'}(A)\big(y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n-1)}, i_1(x_n)\big) - E_{M'}(A)\big(y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n-1)}, i_n(x_n)\big) =$$

$$= 2E_{M'}(A)\big(y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n-1)}, i_1(x_n)\big).$$

Для $\sigma \in \mathcal{S}_n$ такого, що $\sigma(n) \neq n$ маємо

$$\sum_{j_n=0}^{1} (-1)^{j_n} E_{M'}(A)\big(y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n)}\big) =$$

$$= \sum_{j_n=0}^{1} (-1)^{j_n} E_{M'}(A)\Big(y_{\sigma(1)}, \ldots, p^{(n)}_{j_n}(x_n), \ldots, y_{\sigma(n)}\Big) =$$

$$= E_{M'}(A)(y_{\sigma(1)}, \ldots, i_1(x_n), \ldots, y_{\sigma(n)}) -$$

$$- E_{M'}(A)(y_{\sigma(1)}, \ldots, i_n(x_n), \ldots, y_{\sigma(n)}) = 0.$$

Тому права частина рівності (7.49) дорівнює

$$\frac{1}{2^{n-2}} \sum_{j_2,\ldots,j_{n-1}=0}^{1} (-1)^{j_2+\ldots+j_{n-1}} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n,\ \sigma(n)=n} E_{M'}(A)(y_{\sigma(1)},\ldots,y_{\sigma(n-1)},i_1(x_n)).$$

Після застосування цього методу $n-1$ разів, отримуємо, що права частина рівності (7.49) дорівнює $E_{M'}(A)(i_1(x_1),i_1(x_2),\ldots,i_1(x_n))$, що дорівнює $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Теорему доведено. $\square$

7.8. Висновки до розділу 7

Цей розділ присвячено дослідженням деяких класів диференційовних функцій на дійсних банахових просторах і диференційовних у дійсному сенсі функцій на комплексних банахових просторах, а також дослідженням поповнень алгебр таких функцій.

Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх дійснозначних симетричних неперервних поліномів на дійсному банаховому просторі всіх послідовностей n-вимірних дійсних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня p, є збіжним, де $1 \leq p < +\infty$.

Побудовано формули для відновлення (p, q)-поліноміальних компонент $*$-поліномів, які діють між комплексними лінійними просторами, за значеннями $*$-поліномів. Ці формули використано для досліджень симетричних $*$-поліномів, які діють з $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}$. Показано, що кожен такий $*$-поліном можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації деяких "елементарних" симетричних $*$-поліномів.

Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних $*$-поліномів на комплексному банаховому просторі всіх послідовностей n-вимірних комплексних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня p, є збіжним, де $1 \leq p < +\infty$.

Побудовано і досліджено властивості операторів зсуву на алгебрі Фреше функцій, яка є поповненням алгебри всіх неперервних комплекснозначних $*$-поліномів на довільному комплексному банаховому просторі.

Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх дійснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому степені дійсного банахового простору всіх дійснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку.

Описано спектр алгебри Фреше, яка є поповненням алгебри всіх дійснозначних симетричних неперервних поліномів на дійсному банаховому просторі всіх дійснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку і показано, що ця алгебра містить неаналітичні функції.

Результати, наведені в цьому розділі, опубліковано в таких працях: [1], [2], [3], [5], [108], [110], [111], [115], [125].

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено вивченню властивостей алгебр диференційовних функцій на банахових просторах із додатковими властивостями симетрії. Зокрема, в роботі досліджено властивості алгебр симетричних неперервних поліномів, здійснено опис спектрів алгебр Фреше симетричних аналітичних функцій на банахових просторах, побудовано зображення цих алгебр Фреше як алгебр аналітичних функцій на їхніх спектрах. У роботі отримано такі наукові результати:

1. Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх симетричних неперервних комплекснозначних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку. Описано спектр алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цьому просторі. Зображено дану алгебру Фреше як алгебру аналітичних функцій на спектрі, який ототожено із сильним спряженим простором до простору Фреше всіх цілих аналітичних функцій від однієї комплексної змінної.

2. Показано, що кожен комплекснозначний неперервний симетричний поліном на комплексному банаховому просторі ℓ_∞ всіх обмежених послідовностей комплексних чисел обов'язково є сталим відображенням. Показано, що алгебра Фреше всіх комплекснозначних скінченно-симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному просторі ℓ_∞ є ізоморфною до алгебри Фреше всіх комплекснозначних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на фактор-просторі ℓ_∞/c_0, де c_0 — це комплексний банахів простір всіх збіжних до нуля послідовностей комплексних чисел.

Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх послідовностей n-вимірних комплексних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня p, є збіжним, де $1 \leq p < +\infty$.

3. Показано, що кожен комплекснозначний неперервний симетричний поліном на комплексному банаховому просторі $L_\infty[0,+\infty)$ всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі обов'язково є сталим відображенням. Показано, що алгебра Фреше всіх комплекснозначних скінченно-симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на просторі $L_\infty[0,+\infty)$ є ізоморфною до алгебри Фреше всіх комплекснозначних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на фактор-просторі $L_\infty[0,+\infty)/M_0$, де M_0 — це замикання у просторі $L_\infty[0,+\infty)$ підпростору всіх простих вимірних функцій із обмеженими носіями.

Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі і показано, що алгебра Фреше комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цьому просторі ізоморфна до алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку.

Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на об'єднанні просторів Лебега-Рохліна із неперервними мірами.

4. Побудовано скінченні алгебраїчні базиси алгебр всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартових степенях комплексних банахових просторів всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом у степені p функцій на відрізку і на півосі, описано спектри алгебр Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цих декартових степенях і зображено дані алгебри Фреше як алгебри аналітичних функцій від скінченної кількості комплексних змін-

них.

5. Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому степені комплексного банахового простору всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку, описано спектр алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цьому декартовому степені.

6. Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх дійснозначних симетричних неперервних поліномів на дійсному банаховому просторі всіх послідовностей n-вимірних дійсних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня p, є збіжним, де $1 \leq p < +\infty$.

Побудовано формули для відновлення (p, q)-поліноміальних компонент $*$-поліномів, які діють між комплексними лінійними просторами, за значеннями $*$-поліномів. Ці формули використано для досліджень симетричних $*$-поліномів, які діють з $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}$. Показано, що кожен такий $*$-поліном можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації деяких "елементарних" симетричних $*$-поліномів.

Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних $*$-поліномів на комплексному банаховому просторі всіх послідовностей n-вимірних комплексних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня p, є збіжним, де $1 \leq p < +\infty$.

Побудовано і досліджено властивості операторів зсуву на алгебрі Фреше функцій, яка є поповненням алгебри всіх неперервних комплекснозначних $*$-поліномів на довільному комплексному банаховому просторі.

Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх дійснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому степені дійсного банахового простору всіх дійснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку.

Описано спектр алгебри Фреше, яка є поповненням алгебри всіх дійснозначних симетричних неперервних поліномів на дійсному банаховому просторі всіх дійснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку і показано, що ця алгебра містить неаналітичні функції.

Результати дисертаційної роботи є внеском в теорію диференційовних функцій на банахових просторах і можуть бути використані при дослідженнях алгебр аналітичних і диференційовних у дійсному сенсі функцій на банахових просторах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Василишин Т. В. Про простори (p, q)-лінійних і (p, q)-однорідних відображень між комплексними лінійними просторами // Прикарпатський вісник НТШ. Число. — 2015. — № 1(29). — С. 31–34.
2. Василишин Т. В. Операція згортки на просторі, спряженому до алгебри $C(\mathcal{P}_*(X))$ // Прикарпатський вісник НТШ. Число. — 2017. — № 2(38). — С. 23–27.
3. Василишин Т. В. Симетричні поліноми на дійсному банаховому просторі $L_\infty[0, 1]$ // Прикарпатський вісник НТШ. Число. — 2018. — № 1(45). — С. 21–25.
4. Василишин Т. В. Деякі властивості елементарних симетричних поліномів на декартовому квадраті комплексного банахового простору $L_\infty[0, 1]$ // Прикарпатський вісник НТШ. Число. — 2018. — № 2(46). — С. 9–16.
5. Василишин Т. В., Струтинський М. М. Алгебри симетричних $*$-поліномів на просторі $\mathbb{C}^2$ // Мат. мет. та фіз.-мех. поля. — 2018. — Т. 61, № 2. — С. 38–48.
6. Василишин Т. В. Симетричні функціонали на просторі $L_\infty[0, 1]$ // IX Літня школа “Алгебра, топологія і аналіз” (Поляниця, 7–18 липня 2014 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2014. — С. 21.
7. Василишин Т. В., Загороднюк А. В. Опис спектра алгебри аналітичних симетричних функцій на просторі $L_\infty[0, 1]$ // IV Міжнародна ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 30 червня – 5 липня 2014 р.): тези доп. — Чернівці, 2014. — С. 15.
8. Василишин Т. В. Базис алгебри неперервних симетричних поліномів на просторі $L_\infty[0, 1]$ // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей і математичного аналізу” (Ворохта, 25

лютого – 1 березня 2015 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2015. — С. 13.

9. Василишин Т. В., Загороднюк А. В. Симетричні поліноми на просторах $L_\infty[0,1]$ і $L_\infty[0,+\infty)$ // Всеукраїнська наукова конференція, присвячена 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу “Прикладні задачі математики” (Івано-Франківськ, 13–15 жовтня 2016 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2016. — С. 26.
10. Василишин Т. В., Загороднюк А. В., Кравців В. В. Алгебри блочно-симетричних поліномів // Всеукраїнська наукова конференція, присвячена 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу “Прикладні задачі математики” (Івано-Франківськ, 13–15 жовтня 2016 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2016. — с. 27–28.
11. Василишин Т. В., Кравців В. В. Алгебра симетричних поліномів на просторі $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2017. — С. 56.
12. Василишин Т. В. Симетричні поліноми та симетричні аналітичні функції на просторах вимірних за Лебегом функцій // Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики” присвячена 90-річчю від дня народження академіка НАН України Я.С. Підстригача та 40-річчю створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН України (Львів, 22–25 травня 2018 р.): збірник наук. праць у 3-х т. — Львів, 2018. — Т. 3, С. 50.
13. Василишин Т. В. Базиси алгебр симетричних поліномів на деяких банахових просторах // VI Всеукраїнська математична конференція “Нелінійні проблеми аналізу” імені Б.В. Василишина (Микуличин, 26–28 вересня 2018 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2018. — С. 12.

14. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — Москва: Наука, 1976.
15. Aczél J. Lectures on Functional Equations and their Applications. — Dover, 2006.
16. Albiac F., Kalton N. Topics in Banach space theory. — Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2006.
17. Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A. Algebras of symmetric holomorphic functions on ℓ_p // Bull. London Math. Soc. — 2003. — Vol. 35, Iss. 2. — P. 55–64.
18. Arens R. The adjoint of a bilinear operation // Proc. Amer. Math. Soc. — 1951. — Vol. 2. — P. 839–848.
19. Aron R. An introduction to polynomials on Banach spaces // Extracta Mathematics — 2002. — Vol. 17, Iss. 3. — P. 303–329.
20. Aron R. M., Berner P. D. A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings // Bull. Soc. Math. France — 1978. — Vol. 106. — P. 3–24.
21. Aron R. M., Boyd C., Choi Y.S. Unique Hahn-Banach Theorem for spaces of homogeneous polynomials // J. Austral. Math. Soc. — 2001. — Vol. 70. — P. 387–400.
22. Aron R. M., Cole B. J., Gamelin T. W. Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space // J. Reine Angew. Math. — 1991. — Vol. 415. — P. 51–93.
23. Aron R. M., Cole B. J., Gamelin T. W. Weak-star continuous analytic functions // Can. J. Math. — 1995. — Vol. 47. — P. 673–683.
24. Aron R., Falcó J., García D., Maestre M. Algebras of symmetric holomorphic functions of several complex variables // Revista Matemática Complutense — 2018. — Vol. 31, Iss. 3. — P. 651–672.
25. Aron R., Falcó J., Maestre M. Separation theorems for group invariant polynomials // The Journal of Geometric Analysis — 2018. — Vol. 28, Iss. 1. — P. 393–404.

26. Aron R., Galindo P., García D., Maestre M. Regularity and algebras of analytic functions in infinite dimensions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1996. — Vol. 348, Iss. 2. — P. 543–559.
27. Aron R., Galindo P., Pinasco D., Zalduendo I. Group-symmetric holomorphic functions on a Banach space // Bull. Lond. Math. Soc. — 2016. — Vol. 48, Iss. 5. — P. 779–796.
28. Aron R. M., Prolla J. B. Polynomial approximation of differentiable functions on Banach spaces // J. Reine Angew. Math. — 1980. — Vol. 313. — P. 195–216.
29. Basener R. A generalised Shilov boundary and analytic structure // Proc. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 47. — P. 98–104.
30. Bennet C., Sharpley R. Interpolation of Operators. — Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.
31. Biström P., Jaramillo J. A., Lindström M. Polynomial compactness in Banach spaces // Rocky Mont. J. Math. — 1998. — Vol. 28. — P. 1203–1225.
32. Bohnenblust H. F., Hille E. On the absolute convergence of Dirichlet series // Ann. of Math. — 1931. — Vol. 32, Iss. 2. — P. 600–622.
33. Boiso M., Hajek P. Analytic approximations of uniformly continuous functions in real Banach spaces // Journal of Mathematical Analysis and Applications — 2001. — Vol. 256. — P. 80–98.
34. Boland P. J. Holomorphic functions on nuclear spaces // Trans. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 209. — P. 275-281.
35. Boland P. J., Dineen S. Fonctions holomorphes sur des espaces pleinement nucléaires // C. R. Acad. Sci. Paris: Sér. A — 1978. — Vol. 286. — P. 1235–1237.
36. Boland P. J., Dineen S. Holomorphic functions on fully nuclear spaces // Bull. Soc. Math. France — 1978. — Vol. 106. — P. 311-336.

37. Boland P. J., Dineen S. Duality theory for spaces of germs and holomorphic functions on nuclear spaces // Ed. J. A. Barroso, North-Holland Math. Stud. — 1979. — Vol. 34. — P. 179-207.
38. Boland P. J., Dineen S. Holomorphy on spaces of distributions // Pacific J. Math. — 1981. — Vol. 92, Iss. 1. — P. 27-34.
39. Bong Chae S. Holomorphy and calculus in normed spaces. — Pure and Applied Mathematics, A Series of Monographs and Textbooks, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1985, 421 p.
40. Carne T. K., Cole B., Gamelin T. W. A uniform algebra of analytic functions on a Banach space // Trans. Amer. Math. Soc. — 1989. — Vol. 314. — P. 639–659.
41. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 2012. — Vol. 55, Iss. 1. — P. 125-142.
42. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions // J. of Math. Anal. Appl. — 2012. — Vol. 395, Iss. 2. — P. 569–577.
43. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. A multiplicative convolution on the spectra of algebras of symmetric analytic functions // Revista Matemática Complutense — 2014. — Vol. 27, Iss. 2. — P. 575–585.
44. Chernega I., Symmetric polynomials and holomorphic functions on infinite dimensional spaces // Journal of Vasyl Stefanyk Precarpathian National University — 2015. — Vol. 2, Iss. 4. — P. 23–49.
45. Cole B., Gamelin T. W. Representing measures and Hardy spaces for the infinite polydisk algebra // Proc. London Math. Soc. — 1986. — Vol. 53. — P. 112–142.
46. Davie A. M., Gamelin T. W. A theorem on polynomial-star approximation // Proc. Amer. Math. Soc. — 1989. — Vol. 106. — P. 351–356.
47. Dineen S. Complex analysis in locally convex spaces. — North Holland, 1981.

48. Dineen S. Complex analysis on infinite dimensional spaces. — Monographs in Mathematics, Springer, New York, 1999.
49. Dineen S. Topological properties inherited by certain subsets of holomorphic functions // Mathematical Analysis and Applications, Part A, Adv. in Math. Supp. Stud. — 1981. — Vol. 7A. — P. 317–326.
50. Dineen S. Analytic functionals on fully nuclear spaces // Studia Math. — 1982. — Vol. 73. — P. 11–32.
51. Dixon P., Esterle J. Michael's problem and the Poincaré-Fatou-Bieberbach phenomenon // Bull. Amer. Math. Soc. — 1986. — Vol. 15. — P. 127–187.
52. Douady A. Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné // Ann. Inst. Fourier (Grenoble) — 1966. — Vol. 16, Iss. 1. — P. 1–95.
53. Edwards R. E. Functional analysis: theory and applications. — New-York: Holt, Renihart and Winston, 1965.
54. Fréchet M. Une définition fontionnelle des polynômes // Nouv. Ann. Math. — 1909. — Vol. 9. — P. 145–162.
55. Fréchet M. Sur les fonctionnelles continues // Ann. Sci. École Norm. Sup. — 1910. — Vol. 27, Iss. 3. — P. 193–216.
56. Galindo P., García D., Maestre M. Entire functions of bounded type on Fréchet spaces // Mathematische Nachrichten. — 1993. — Vol. 161. — P. 185–198.
57. Galindo P., García D., Maestre M., Mujica J. Extension of multilinear mappings on Banach spaces // Studia Math. — 1994. — Vol. 108. — P. 55–76.
58. Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. The algebra of symmetric analytic functions on L_∞ // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics — 2017. — Vol. 147, Iss. 4. — P. 743–761.

59. Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. Symmetric and finitely symmetric polynomials on the spaces ℓ_∞ and $L_\infty[0, +\infty)$ // Mathematische Nachrichten. — 2018. — Vol. 291, Iss. 11–12. — P. 1712–1726.
60. Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. Analytic structure on the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions on L_∞ // RACSAM — 2020. — Vol. 114, Article number 56.
61. Gamelin T. W. Analytic functions on Banach spaces // Complex Potential Theory, Ed. Gauthier and Sabidussi, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam — 1994. — P. 187–223.
62. García D., Maestre M., Zalduendo I. The spectra of algebras of group-symmetric functions // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 2019. — Vol. 62, Iss. 3. — P. 609–623.
63. Gâteaux R. Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytiques // C. R. Acad. Sci. Paris: Sér. A — 1913. — Vol. 157. — P. 325–327.
64. Gâteaux R. Fonctions d'une infinité des variables indépendantes // Bull. Soc. Math. France — 1919. — Vol. 47. — P. 70–96.
65. Gâteaux R. Sur diverses questions de calcul functionnel // Bull. Soc. Math. France — 1922. — Vol. 50. — P. 1–37.
66. Godefroy M., Iochum B. Arens regularity of Banach algebras and the geometry of Banach spaces // J. Funct. Anal. — 1988. — Vol. 80. — P. 47–59.
67. González M., Gonzalo R., Jaramillo J. A. Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces // J. London Math. Soc. — 1999. — Vol. 59, Iss. 2. — P. 681–697.
68. Gonzalo R. Multilinear forms, subsymmetric polynomials, and spreading models on Banach spaces // J. Math. Anal. Appl. — 1996. — Vol. 202. — P. 379–397.
69. Graves L. M. Topics in the functional calculus, Part 1, The theory of functionals // Bull. Amer. Math. Soc. — 1935. — Vol. 41. — P. 641–662.

70. Gutiérez J. M., Jaramillo J. A., Llavona J. G. Polynomials and geometry of Banach spaces // Extracta Math. — 1995. — Vol. 10. — P. 79–114.
71. Hervé M. Analyticity in infinite dimensional spaces. — de Gruyter Stud. in Math., vol. 10, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1989.
72. Husain T. Multiplicative functionals on topological algebras. — Boston-London-Melbourne: Pitman, 1983.
73. Jarchow H. Locally Convex Spaces. — Teubner, 1981.
74. Josefson B. Weak sequential convergence in the dual of a Banach space does not imply norm convergence // Ark. Mat. — 1975. — Vol. 13. — P. 79–89.
75. Kahane J.-P. Some random series of functions. — 2nd ed. — Cambridge University Press, 1985.
76. Khue N. V. On the extension of holomorphic functions on locally convex spaces with values in Fréchet spaces // Ann. Polon. Math. — 1984. — Vol. 44, Iss. 2. — P. 163–175.
77. von Koch H. Sur les système d'ordre infinie d'equations différentielles // Öfversigt af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Forhandlinger — 1899. — Vol. 61. — P. 395–411.
78. Kramm B. Nuclearity (resp. Schwartzity) helps to embed holomorphic structure into spectra — a survey // Contemporary Math. — 1984. — Vol. 32. — P. 143–162.
79. Kravtsiv V. The analogue of Newton's formula for block-symmetric polynomials // International Journal of Mathematical Analysis — 2016. — Vol. 10, Iss. 7. — P. 323–327.
80. Kravtsiv V. Algebraic basis of the algebra of block-symmetric polynomials on $\ell_1 \oplus \ell_\infty$ // Carpathian Math. Publ. — 2019. — Vol. 11, Iss. 1. — P. 89–95.
81. Kravtsiv V. Zeros of block-symmetric polynomials on Banach spaces // Mat. Stud. — 2020. — Vol. 53, Iss. 2. — P. 206–211.

82. Kravtsiv V., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. On algebraic basis of the algebra of symmetric polynomials on $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ // Journal of Function Spaces — 2017. — Vol. 2017. — Article ID 4947925, 8 p.
83. Kravtsiv V., Zagorodnyuk A. On algebraic bases of algebras of block-symmetric polynomials on Banach spaces // Matematychni Studii — 2012. — Vol. 37, Iss. 1. — P. 109–112.
84. Kravtsiv V. V., Zagorodnyuk A. V. Representation of spectra of algebras of block-symmetric analytic functions of bounded type // Carpathian Math. Publ. — 2016. — Vol. 8, Iss. 2. — P. 263–271.
85. Macdonald I. G. Symmetric Functions and Hall Polynomials. — Oxford university press, 1998.
86. Martin R. S. Contributions to the theory of functionals. Ph. D. Thesis. — University of California, 1932.
87. Mazet P. Analytic sets in locally convex spaces. — Mathematics Studies, vol. 89, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1984.
88. Meise R., Vogt D. Holomorphic functions of uniformly bounded type on nuclear Fréchet spaces // Studia Math. — 1986. — Vol. 83. — P. 147–166.
89. Michael E. Locally multiplicatively convex topological algebras. — Mem. Amer. Math. Soc., vol. 11, Providence, 1952.
90. Mitrofanov M. A. Approximation of continuous functions on complex Banach spaces // Math. Notes — 2009. — Vol. 86, Iss. 3–4. — P. 530–541.
91. Moraes L. A., Extension of holomorphic mappings from E to E''. // Proc. Amer. Math. Soc. — 1993. — Vol. 118. — P. 455–461.
92. Mujica J. Complex analysis in Banach spaces. — North Holland, 1986.
93. Mujica J. Linearization of bounded holomorphic mappings on Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc. — 1991. — Vol. 324. — P. 867–887.
94. Mujica J. Ideals of holomorphic functions on Tsirelson's space // Archiv der Mathematik — 2001. — Vol. 76. — P. 292–298.

95. Nemirovskii A. S., Semenov S. M. On polynomial approximation of functions on Hilbert space // Mat. USSR Sbornik — 1973. — Vol. 21, Iss. 2. — P. 255–277.
96. Rohlin V. A. On the fundamental ideas of measure theory // Amer. Math. Soc. Transl. — 1952. — Vol. 71. — P. 1–54.
97. Шефер Х. Топологические векторные пространства. — Москва: Мир, 1971.
98. Sebastião e Silva J. As funções analiticas e. a análise functional // Portugal. Math. — 1950. — Vol. 9. — P. 1–130.
99. Sebastião e Silva J. Sui fondamenti della teoria dei funzionali analitici // Portugal. Math. — 1953. — Vol. 12. — P. 1–46.
100. Stanley R. P. Enumerative Combinatorics Volume 2 // Cambridge university press, 1999.
101. Stout E. L. The Theory of Uniform Algebras. — Bogden and Quigley, 1971.
102. Taylor A. E. Analytic functions in general analysis // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. — 1937. — Vol. 6, Iss. 2. — P. 277–292.
103. Taylor A. E. On the properties of analytic functions in abstract spaces // Math. Ann. — 1938. — Vol. 115. — P. 466–484.
104. Tsirelson B. Not every Banach space contains an imbedding of ℓ_p or c_0 // Functional Anal. Appl. — 1974. — Vol. 8. — P. 138–141.
105. Ülger A. Weakly compact bilinear forms and Arens regularity // Proc. Amer. Math. Soc. — 1987. — Vol. 101. — P. 697–704.
106. Vasylyshyn T. V. Symmetric continuous linear functionals on complex space $L_\infty[0,1]$ // Carpathian Math. Publ. — 2014. — Vol. 6, No. 1. — P. 8–10.
107. Vasylyshyn T. V. Continuous block-symmetric polynomials of degree at most two on the space $(L_\infty)^2$ // Carpathian Math. Publ. — 2016. — Vol. 8, No. 1. — P. 38–43.

108. Vasylyshyn T. V. Extensions of multilinear mappings to powers of linear spaces // Carpathian Math. Publ. — 2016. — Vol. 8, No. 2. — P. 211–214.
109. Vasylyshyn T. Symmetric polynomials on the space of bounded integrable functions on the semi-axis // International Journal of Pure and Applied Mathematics — 2017. — Vol. 117, Iss. 3. — P. 425–430.
110. Vasylyshyn T. V. Some properties of shift operators on algebras generated by $*$-polynomials // Carpathian Math. Publ. — 2018. — Vol. 10, No. 1. — P. 206–212.
111. Vasylyshyn T. V. Symmetric $*$-polynomials on $\mathbb{C}^n$ // Carpathian Math. Publ. — 2018. — Vol. 10, No. 2. — P. 395–401.
112. Vasylyshyn T. V. Symmetric polynomials on the Cartesian power of L_p on the semi-axis // Mat. Stud. — 2018. — Vol. 50, Iss. 1. — P. 93–104.
113. Vasylyshyn T. V. Point-evaluation functionals on algebras of symmetric functions on $(L_\infty)^2$ // Carpathian Math. Publ. — 2019. — Vol. 11, No. 2. — P. 493–501.
114. Vasylyshyn T. V. The algebra of symmetric polynomials on $(L_\infty)^n$ // Mat. Stud. — 2019. — Vol. 52, Iss. 1. — P. 71–85.
115. Vasylyshyn T. V. Symmetric functions on spaces $\ell_p(\mathbb{R}^n)$ and $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ // Carpathian Math. Publ. — 2020. — Vol. 12, No. 1. — P. 5–16.
116. Vasylyshyn T. Symmetric polynomials on $(L_p)^n$ // Eur. J. Math. — 2020. — Vol. 6, Iss. 1. — P. 164–178.
117. Vasylyshyn T. Algebras of entire symmetric functions on spaces of Lebesgue-measurable essentially bounded functions // J. Math. Sci. — 2020. — Vol. 246. — P. 264–276.
118. Vasylyshyn T. V. Topology on the spectrum of the algebra of entire symmetric functions of bounded type on the complex L_∞ // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach (Lviv, 18–23 September 2017): book of abstracts — Lviv, 2017. — p. 31–33.

119. Vasylyshyn T. V. The spectrum of the algebra of symmetric analytic functions on L_∞ // Conference on NonLinear Functional Analysis (Valencia, Spain, 17–20 October 2017): book of abstracts — Valencia, 2017. — P. 46.
120. Vasylyshyn T. V. Symmetric analytic functions on some Banach spaces of Lebesgue measurable functions // International Scientific Conference "Banach Spaces and their Applications" dedicated to the 70th anniversary of Prof. A.M. Plichko (Lviv, Ukraine, 26–29 June 2019): book of abstracts — Lviv, 2019. — P. 122.
121. Vasylyshyn T. V. Symmetric analytic functions on Banach spaces // International Conference "Morse theory and its applications" dedicated to the memory and 70th anniversary of Volodymyr Sharko (Kyiv, Ukraine, 25–28 September 2019): book of abstracts — Kyiv, 2019. — p. 52–53.
122. Vasylyshyn T. V. Some classes of symmetric functions on Banach spaces // XI International V. Skorobohatko Mathematical Conference (Lviv, Ukraine, 26–30 October 2020): book of abstracts — Lviv, 2020. — P. 118.
123. Vasylyshyn T. V., Zagorodnyuk A. V. Polarization formula for (p, q)-polynomials on a complex normed space // Methods of Functional Analysis and Topology — 2011. — Vol. 17, Iss. 1. — P. 75–83.
124. Vasylyshyn T. V., Zagorodnyuk A. V. Continuous symmetric 3-homogeneous polynomials on spaces of Lebesgue measurable essentially bounded functions // Methods of Functional Analysis and Topology — 2018. — Vol. 24, Iss. 4. — P. 381–398.
125. Vasylyshyn T. V., Zagorodnyuk A. V. Symmetric polynomials on the Cartesian power of the real Banach space $L_\infty[0, 1]$ // Mat. Stud. — 2020. — Vol. 53, № 2. — P. 192–205.
126. Wiener N. Note on a paper of M. Banach // Fund. Math. — 1923. — Vol. 4. — P. 136–143.
127. Zagorodnyuk A. Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. — 2006. — Vol. 134, Iss. 9. — P. 2559–2569.

128. Zagorodnyuk A. Spectra of algebras of analytic functions and polynomials on Banach spaces // Function spaces, Contemp. Math. — 2007. — Vol. 435. — P. 381–394.
129. Zalduendo I. A canonical extension for analytic functions on Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc. — 1990. — Vol. 320. — P. 747–763.
130. Zorn M. A. Gâteaux differentiability and essential boundedness // Duke Math. J. — 1945. — Vol. 12. — P. 579–583.
131. Zorn M. A. Characterization of analytic functions in Banach spaces // Ann. of Math. — 1945. — Vol. 46. — P. 585–593.
132. Zorn M. A. Derivatives and Fréchet differentials // Bull. Amer. Math. Soc. — 1946. — Vol. 52. — P. 133–137.

ДОДАТКИ

Список публікацій за темою дисертації

1. Василишин Т. В. Про простори (p,q)-лінійних і (p,q)-однорідних відображень між комплексними лінійними просторами // Прикарпатський вісник НТШ. Число. — 2015. — № 1(29). — С. 31–34.
2. Василишин Т. В. Операція згортки на просторі, спряженому до алгебри $C(\mathcal{P}_*(X))$ // Прикарпатський вісник НТШ. Число. — 2017. — № 2(38). — С. 23–27.
3. Василишин Т. В. Симетричні поліноми на дійсному банаховому просторі $L_\infty[0,1]$ // Прикарпатський вісник НТШ. Число. — 2018. — № 1(45). — С. 21–25.
4. Василишин Т. В. Деякі властивості елементарних симетричних поліномів на декартовому квадраті комплексного банахового простору $L_\infty[0,1]$ // Прикарпатський вісник НТШ. Число. — 2018. — № 2(46). — С. 9–16.
5. Василишин Т. В., Струтинський М. М. Алгебри симетричних $*$-поліномів на просторі $\mathbb{C}^2$ // Мат. мет. та фіз.-мех. поля. — 2018. — Т. 61, № 2. — С. 38–48.
6. Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. The algebra of symmetric analytic functions on L_∞ // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics — 2017. — Vol. 147, Iss. 4. — P. 743–761.
7. Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. Symmetric and finitely symmetric polynomials on the spaces ℓ_∞ and $L_\infty[0,+\infty)$ // Mathematische Nachrichten. — 2018. — Vol. 291, Iss. 11–12. — P. 1712–1726.
8. Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. Analytic structure on the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions on L_∞ // RACSAM — 2020. — Vol. 114, Article number 56.
9. Kravtsiv V., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. On algebraic basis of the algebra of symmetric polynomials on $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ // Journal of Function Spaces — 2017. — Vol. 2017. — Article ID 4947925, 8 p.

10. Vasylyshyn T. V. Symmetric continuous linear functionals on complex space $L_\infty[0, 1]$ // Carpathian Math. Publ. — 2014. — Vol. 6, No. 1. — P. 8–10.
11. Vasylyshyn T. V. Continuous block-symmetric polynomials of degree at most two on the space $(L_\infty)^2$ // Carpathian Math. Publ. — 2016. — Vol. 8, No. 1. — P. 38–43.
12. Vasylyshyn T. V. Extensions of multilinear mappings to powers of linear spaces // Carpathian Math. Publ. — 2016. — Vol. 8, No. 2. — P. 211–214.
13. Vasylyshyn T. V. Some properties of shift operators on algebras generated by $*$-polynomials // Carpathian Math. Publ. — 2018. — Vol. 10, No. 1. — P. 206–212.
14. Vasylyshyn T. V. Symmetric $*$-polynomials on $\mathbb{C}^n$ // Carpathian Math. Publ. — 2018. — Vol. 10, No. 2. — P. 395–401.
15. Vasylyshyn T. V. Point-evaluation functionals on algebras of symmetric functions on $(L_\infty)^2$ // Carpathian Math. Publ. — 2019. — Vol. 11, No. 2. — P. 493–501.
16. Vasylyshyn T. V. Symmetric functions on spaces $\ell_p(\mathbb{R}^n)$ and $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ // Carpathian Math. Publ. — 2020. — Vol. 12, No. 1. — P. 5–16.
17. Vasylyshyn T. Symmetric polynomials on $(L_p)^n$ // Eur. J. Math. — 2020. — Vol. 6, Iss. 1. — P. 164–178.
18. Vasylyshyn T. V. Symmetric polynomials on the Cartesian power of L_p on the semi-axis // Mat. Stud. — 2018. — Vol. 50, Iss. 1. — P. 93–104.
19. Vasylyshyn T. V. The algebra of symmetric polynomials on $(L_\infty)^n$ // Mat. Stud. — 2019. — Vol. 52, Iss. 1. — P. 71–85.
20. Vasylyshyn T. Algebras of entire symmetric functions on spaces of Lebesgue-measurable essentially bounded functions // J. Math. Sci. — 2020. — Vol. 246. — P. 264–276.
21. Vasylyshyn T. Symmetric polynomials on the space of bounded integrable functions on the semi-axis // International Journal of Pure and Applied Mathematics — 2017. — Vol. 117, Iss. 3. — P. 425–430.

22. Vasylyshyn T. V., Zagorodnyuk A. V. Continuous symmetric 3-homogeneous polynomials on spaces of Lebesgue measurable essentially bounded functions // Methods of Functional Analysis and Topology — 2018. — Vol. 24, Iss. 4. — P. 381–398.
23. Vasylyshyn T. V., Zagorodnyuk A. V. Symmetric polynomials on the Cartesian power of the real Banach space $L_\infty[0, 1]$ // Mat. Stud. — 2020. — Vol. 53, № 2. — P. 192–205.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на таких конференціях і наукових семінарах:

1. Дев'ята літня школа "Алгебра, топологія і аналіз" (Поляниця, 7–18 липня 2014 р.);
2. Четверта міжнародна ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 30 червня – 5 липня 2014 р.);
3. Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей і математичного аналізу" (Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2015 р.);
4. Всеукраїнська наукова конференція, присвячена 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу "Прикладні задачі математики" (Івано-Франківськ, 13–15 жовтня 2016 р.);
5. Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.);
6. Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики", присвячена 90-річчю від дня народження академіка НАН України Я. С. Підстригача та 40-річчю створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН України (Львів, 22–25 травня 2018 р.);
7. Шоста всеукраїнська математична конференція "Нелінійні проблеми аналізу" імені Б. В. Василишина (Микуличин, 26–28 вересня 2018 р.);

8. Міжнародна конференція з функціонального аналізу, присвячена 125 річниці від дня народження Стефана Банаха (Львів, 18–23 вересня 2017 р.);
9. Конференція із нелінійного функціонального аналізу (Валенсія, Іспанія, 17–20 жовтня 2017 р.);
10. Міжнародна наукова конференція “Банахові простори та їх застосування”, присвячена 70-річчю проф. А. М. Плічка (Львів, 26–29 червня 2019 р.);
11. Міжнародна конференція “Теорія Морса та її застосування”, присвячена пам’яті і 70 річниці з дня народження Володимира Шарка (Київ, 25–28 вересня 2019 р.);
12. Одинадцята міжнародна математична конференція імені В. Скоробогатька (Львів, 26–30 жовтня 2020 р.);
13. Науковий семінар із теорії аналітичних функцій Державної школи вищої освіти в Хелмі (Хелм, Республіка Польща);
14. Науковий семінар з функціонального аналізу Жешувського університету (Жешув, Республіка Польща, керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. О. В. Лопушанський);
15. Науковий семінар з функціонального аналізу Краківської політехніки імені Тадеуша Костюшка (Краків, Республіка Польща, керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. А. М. Плічко);
16. Науковий семінар з функціонального аналізу Університету Валенсії (Валенсія, Іспанія);
17. Науковий семінар відділу аналізу, геометрії та топології Інситуту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (Львів);
18. Західноукраїнський математичний семінар (керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. Т. О. Банах);
19. Науковий семінар факультету математики та інформатики ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”;

20. Наукові семінари кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”;
21. Засідання Наукового товариства імені Т. Г. Шевченка.