НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ВАСИЛИШИН Тарас Васильович

УДК 517.98

АНАЛІЗ НА СПЕКТРАХ АЛГЕБР АНАЛІТИЧНИХ ТА ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ НА БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2021

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано у ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" Міністерства освіти і науки України.

Науковий консультант:

доктор фізико-математичних наук, професор
Загороднюк Андрій Васильович,
ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника",
завідувач кафедри математичного і функціонального аналізу.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Банах Тарас Онуфрійович,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
професор кафедри алгебри, топології та основ математики;

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Качановський Микола Олександрович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу функціонального аналізу;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Проскурін Данило Павлович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
професор кафедри дослідження операцій.

Захист відбудеться 11 травня 2021 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

Автореферат розісланий 1 квітня 2021 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **Романюк А. С.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Перші визначальні кроки у створенні теорії диференціального числення на нескінченновимірних просторах були зроблені В. Вольтерра (1887 р.), Г. фон Кохом (1899 р.), М. Фреше (1899 р.) і Д. Гільбертом (1909 р.). Г. фон Кох запропонував мономіальний підхід для дослідження аналітичних функцій на нескінченновимірних полідисках. Даний підхід було узагальнено Д. Гільбертом. М. Фреше у цей час розробив поняття похідної і полінома на дійсних і на комплексних нескінченновимірних просторах. Р. Гато проаналізував і узагальнив роботи М. Фреше і Д. Гільберта. Він дав означення комплексного полінома, похідної, згодом названої похідною за Гато, узагальнив інтегральну формулу Коші і нерівність Коші, довів теореми збіжності для аналітичних функцій, встановив відповідність між похідними аналітичної функції і однорідними поліномами у розкладі цієї функції у ряд Тейлора, а також отримав різноманітні результати щодо аналітичних продовжень і розкладів у степеневі ряди для нескінченновимірного випадку. Покращена версія означення однорідного полінома була дана В. Богненблустом і Е. Хілле (1931 р.), які займалися дослідженнями рядів Діріхле на нескінченновимірних просторах.

У 1923 році Н. Вінер зауважив, що інтегральну формулу Коші можна узагальнити на випадок аналітичних функцій від однієї комплексної змінної зі значеннями в банаховому просторі і у цьому випадку багато класичних результатів, таких, як теорема Морери, теорема Абеля і теорема про лишки, залишаються істинними.

У 1930-х роках інтенсивне вивчення аналізу і геометрії на абстрактних просторах було здійснено А. Д. Міхалом і його учнями Р. С. Мартіном, А. Х. Кліфордом, І. Е. Хайбергом і А. Е. Тейлором. У 1932 році Р. С. Мартін розробив теорію аналітичних відображень на банахових просторах із використанням степеневих рядів. Фінальний крок до сучасного означення аналітичного відображення був зроблений незалежно А. М. Грейвсом у 1935 році і А. Е. Тейлором у 1937 році. Львівська школа функціонального аналізу, включаючи С. Банаха, С. Мазура і В. Орліча, також зробила значний внесок у розвиток теорії у цей період.

В середині 1940-х років значний вклад у розвиток теорії зробив М. А. Цорн. Ж. Себастьяо е Сілва на початку 1950-х років розробив теорію диференціювання на довільних локально опуклих просторах. В кінці 1950-х — на початку 1960-х років Г. Х. Бремерманом було розпочато вивчення псевдоопуклих областей аналітичності. У 1960-х — 1970-х роках інтенсивний розвиток теорії відбувався завдяки таким математикам, як А. Дуаді, А. Картан, Г. Х. Бремерман, М. Ерве, П. Лелонг, А. Мартіну, Л. Нахбін, К. Стейн та інші.

Аналітичні функції на ядерних просторах і на просторах, спряжених до ядерних, вперше почав досліджувати Ф. Дж. Боланд у 1978 році. Цілковито ядерні простори із базисом вивчалися Ф. Дж. Боландом і Ш. Дініном у зв'язку із вивченням питання існування абсолютного базису простору цілих аналітичних функцій із топологією рівномірної збіжності на компактних множинах. A-ядерні простори було введено Ш. Дініном у 1982 році. Теорія A-ядерних просторів була розвинута у роботах Ф. Дж. Боланда і Ш. Дініна.

Н. В. Куе у 1984 році і Р. Мейсе, Д. Вогт у 1986 році розпочали дослідження властивостей алгебри Фреше $H_b(X)$ цілих аналітичних функцій обмеженого типу із топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах.

Зауважимо, що важливою задачею при дослідженні алгебр Фреше є опис спектра (множини всіх нетривіальних неперервних скалярнозначних гомоморфізмів алгебри або так званих характерів) алгебри. Завдяки перетворенню Гельфанда, елементи алгебри Фреше можна зобразити у вигляді неперервних функцій на спектрі, а саму алгебру Фреше — як підалгебру алгебри всіх неперервних функцій на спектрі. Якщо ж додатково вдається ввести на спектрі структуру аналітичного многовиду, то природно виникає питання про такі додаткові властивості функції на спектрі, яка є результатом перетворення Гельфанда, як диференційовність.

Вивчення спектрів алгебр аналітичних функцій обмеженого типу почалось з робіт Б. Коула, Т. Гамеліна 1986 року і Т. Корна, Б. Коула, Т. Гамеліна 1989 року. В цих роботах досліджено властивості алгебри аналітичних функцій на одиничній кулі спряженого простору, яка породжена $*$-слабко неперервними лінійними функціоналами. Р. Арон, Б. Коул і Т. Гамелін у своїй статті 1991 року займалися досліженням, зокрема, спектра алгебри цілих аналітичних функцій обмеженого типу на банаховому просторі.

Алгебри аналітичних функцій та їхні спектри досліджувались у роботах Ж. Мухіки. Зокрема, у своїй роботі 2001 року Ж. Мухіка досліджував умови, при яких всі характери алгебри аналітичних функцій обмеженого типу на деякій відкритій збалансованій множині банахового простору X породжуються значеннями в деякій точці цієї множини.

У 2006 році А. В. Загороднюком отримано опис спектра алгебри $H_b(X)$ у вигляді множини послідовностей лінійних неперервних функціоналів на тензорних степенях простору X.

Вивчення симетричних поліномів відносно дії групи підстановок на базисних векторах в просторі ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, та відносно дії групи вимірних автоморфізмів множини $[0,1]$ в просторі $L_p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$, було започатковано А. С. Немировським і С. М. Семеновим в їхній статті 1973 року, де, зокрема, показано, що кожен неперервний симетричний поліном на просторі ℓ_p можна єдиним чином подати у вигляді алгебраїчної комбінації (лінійної комбінації добутків) так званих елементарних симетричних поліномів. Аналогічний результат встановлено для неперервних симетричних поліномів на просторі $L_p[0,1]$.

Ці результати було узагальнено М. Гонзалезом, Р. Гонзало і Х. Харамілло в їхній роботі 1999 року для просторів з симетричним базисом та переставно-інваріантних просторів.

Алгебри симетричних аналітичних функцій на просторах ℓ_p почали вивчатися Р. Аленкаром, Р. Ароном, П. Галіндо, А. В. Загороднюком у їхній роботі 2003 року. Зокрема, в цій роботі досліджено алгебру симетричних аналітичних функцій, які є рівномірно неперервними на одиничній кулі простору ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, описано спектр такої алгебри. В серії робіт, П. Галіндо, А. В. Загороднюком та І. В. Чернегою досліджено алгебру $H_{bs}(\ell_p)$ симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторах ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, та алгебру симетричних аналітичних функцій на полідиску простору ℓ_1, досліджено оператори симетричного зсуву алгебри $H_{bs}(\ell_1)$ та показано, що спектр цієї алгебри можна описати у вигляді мультиплікативної підгрупи в алгебрі аналітичних функцій експоненціального типу, розглянуто алгебраїчні структури на спектрі алгебри $H_{bs}(\ell_1)$ та досліджено оператори мультиплікативного зсуву цієї алгебри. Так звані блочно-симетричні поліноми і аналітичні функції на просторах ℓ_p, інваріантні відносно перестановок блоків координат аргументу, досліджувалися в роботах В. В. Кравців.

Загальний підхід до вивчення симетричних аналітичних функцій на банахових просторах було представлено Р. Ароном, П. Галіндо, Д. Пінаско, І. Залдуеньйо в їхній роботі 2016 року, де вивчалися аналітичні функції на банаховому просторі, які є інваріантними відносно дії певної фіксованої групи лінійних операторів на просторі. Спектри алгебр симетричних (інваріантними відносно дії групи операторів) аналітичних функцій на банахових просторах вивчалися Д. Гарсією, М. Маестре, І. Залдуеньйо в їхній роботі 2019 року. Також симетричні аналітичні функції вивчалися Р. Ароном, Д. Гарсією, Х. Фалко і М. Маестре у 2018 році. В тому ж році питання віддільності точок банахового простору симетричними поліномами вивчалися Р. Ароном, Х. Фалко і М. Маестре.

В аналізі природним чином виникають також функції, які не є аналітичними, але є диференційовними у дійсному сенсі. Наприклад, у комплексній версії теореми Стоуна-Вейєрштрасса стверджується, що довільну неперервну комплекснозначну функцію, задану на компакті, можна рівномірно наблизити функціями, отриманими зі змінних скінченною кількістю операцій додавання, множення, взяття комплексного спряження і множення на комплексні скаляри. Такі функції, у загальному випадку, не є аналітичними, проте вони є диференційовними у дійсному сенсі. Прикладами таких функцій у нескінченновимірному нелінійному аналізі є так звані $*$-поліноми, які вперше було введено (без назви) Ж. Мухікою.

У дисертаційній роботі продовжено дослідження спектрів алгебр аналітичних функцій на банахових просторах та інших пов'язаних з ними алгебр.

Зокрема, досліджено алгебри функцій з додатковими властивостями симетричності на банахових просторах з симетричною структурою. Тому тема дисертації є важливою і актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження виконувались у рамках науково-дослідних держбюджетних тем "Розробка аналітичних методів у нескінченновимірному комплексному аналізі та теорії операторів" (номер державної реєстрації 0113U000184), "Гомоморфізми та функціональне числення в алгебрах аналітичних функцій на банахових просторах" (номер державної реєстрації 0115U002305), "Дослідження аналітичних структур у спектрі алгебр голоморфних функцій банахового простору та в обернених спектральних задачах" (номер державної реєстрації 0116U003562) кафедри математичного і функціонального аналізу факультету математики та інформатики ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника", а також, у рамках науково-дослідної роботи "Дослідження симетричних функцій на деяких банахових просторах" (номер державної реєстрації 0119U103204) за підтримки Гранту Президента України для молодих вчених.

Мета і задачі дослідження. Метою дослідження є вивчення властивостей алгебр неперервних поліномів із деякими додатковими властивостями симетрії, визначених на банахових просторах, опис спектрів алгебр Фреше аналітичних та диференційовних функцій, породжених вказаними підалгебрами поліномів, зображення цих алгебр Фреше як алгебр аналітичних та диференційовних функцій на їхніх спектрах.

Об'єктом дослідження є алгебри неперервних поліномів і $*$-поліномів на банахових просторах, симетричні функції на банахових просторах вимірних за Лебегом функцій, симетричні функції на банахових просторах послідовностей, симетричні функції на декартових степенях банахових просторів вимірних за Лебегом функцій, спектри алгебр Фреше функцій із додатковими властивостями симетрії на банахових просторах.

Предметом дослідження є властивості алгебр неперервних поліномів і $*$-поліномів на банахових просторах, структури спектрів алгебр Фреше функцій із додатковими властивостями симетрії на банахових просторах.

Задачі дослідження:

— побудувати алгебраїчний базис алгебри всіх симетричних неперервних комплекснозначних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку;

— описати спектр (множину нетривіальних неперервних комплекснозначних гомоморфізмів) алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку і зобразити дану алгебру Фреше як алгебру аналітичних функцій на спектрі;

— дослідити алгебри симетричних і скінченно-симетричних неперервних поліномів і аналітичних функцій на комплексному банаховому просторі всіх обмежених послідовностей комплексних чисел;

— побудувати алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх послідовностей n-вимірних комплексних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня p, є збіжним, де $1 \leq p < +\infty$;

— дослідити алгебри симетричних і скінченно-симетричних неперервних поліномів і аналітичних функцій на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі;

— побудувати алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі і дослідити алгебру Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цьому просторі;

— побудувати алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на об'єднанні просторів Лебега-Рохліна із неперервними мірами;

— побудувати алгебраїчні базиси алгебр всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартових степенях комплексних банахових просторів всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом у степені p, де $1 \leq p < +\infty$, функцій на відрізку і на півосі, описати спектри алгебр Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цих декартових степенях і зобразити дані алгебри Фреше як алгебри аналітичних функцій на їхніх спектрах;

— побудувати алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому степені комплексного банахового простору всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку, описати спектр алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цьому декартовому степені;

— побудувати алгебраїчний базис алгебри всіх дійснозначних симетричних неперервних поліномів на дійсному банаховому просторі всіх послідовностей дійсних n-вимірних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня p, є збіжним, де $1 \leq p < +\infty$;

— дослідити алгебри симетричних неперервних $*$-поліномів на скінченновимірному комплексному просторі;

— побудувати алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних $*$-поліномів на комплексному банаховому просторі всіх послідовностей n-вимірних дійсних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня p, є збіжним, де $1 \leq p < +\infty$;

— побудувати і дослідити властивості операторів зсуву на алгебрі Фреше, яка є поповненням алгебри всіх неперервних комплекснозначних $*$-поліномів на довільному комплексному банаховому просторі;

— побудувати алгебраїчний базис алгебри всіх дійснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому степені дійсного банахового простору всіх дійснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку;

— описати спектр алгебри Фреше, яка є поповненням алгебри всіх дійснозначних симетричних неперервних поліномів на дійсному банаховому просторі всіх дійснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку.

Методи дослідження. У роботі використано методи теорії алгебр Фреше, теорії випадкових збіжних рядів, теорії ядерних просторів.

Наукова новизна отриманих результатів. Усі результати дисертаційної роботи є новими і полягають у такому:

— побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх симетричних неперервних комплекснозначних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку;

— описано спектр алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку;

— зображено алгебру Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку як алгебру аналітичних функцій на спектрі, який ототожено із сильним спряженим простором до простору Фреше всіх цілих аналітичних функцій від однієї комплексної змінної;

— показано, що кожен комплекснозначний неперервний симетричний поліном на комплексному банаховому просторі ℓ_∞ всіх обмежених послідовностей комплексних чисел обов'язково є сталим відображенням;

— показано, що алгебра Фреше всіх комплекснозначних скінченно-симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному просторі ℓ_∞ є ізоморфною до алгебри Фреше всіх комплекснозначних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на фактор-просторі ℓ_∞/c_0, де c_0 — це комплексний банахів простір всіх збіжних до нуля послідовностей комплексних чисел;

— побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх послідовностей n-вимірних комплексних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня p, є збіжним, де $1 \le p < +\infty$;

— показано, що кожен комплекснозначний неперервний симетричний поліном на комплексному банаховому просторі $L_\infty[0, +\infty)$ всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі обов'язково є сталим відображенням;

— показано, що алгебра Фреше всіх комплекснозначних скінченно-симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному просторі $L_\infty[0, +\infty)$ є ізоморфною до алгебри Фреше всіх комплекснозначних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на фактор-просторі $L_\infty[0, +\infty)/M_0$, де M_0 — це замикання у просторі $L_\infty[0, +\infty)$ підпростору всіх простих вимірних функцій із обмеженими носіями;

— побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі і показано, що алгебра Фреше комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цьому просторі ізоморфна до алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку;

— побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на об'єднанні просторів Лебега-Рохліна із неперервними мірами;

— побудовано скінченні алгебраїчні базиси алгебр всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартових степенях комплексних банахових просторів всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом у степені p, де $1 \le p < +\infty$, функцій на відрізку і на півосі, описано спектри алгебр Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цих декартових степенях і зображено дані алгебри Фреше як алгебри аналітичних функцій від скінченної кількості комплексних змінних;

— побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому степені комплексного банахового простору всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку, описано спектр алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цьому декартовому степені;

— побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх дійснозначних симетричних неперервних поліномів на дійсному банаховому просторі всіх послідовностей n-вимірних дійсних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня p, є збіжним, де $1 \leq p < +\infty$;

— побудовано формули для відновлення (p, q)-поліноміальних компонент $*$-поліномів, які діють між комплексними лінійними просторами, за значеннями $*$-поліномів. Ці формули використано для досліджень симетричних $*$-поліномів, які діють з $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}$. Показано, що кожен такий $*$-поліном можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації деяких "елементарних" симетричних $*$-поліномів;

— побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних $*$-поліномів на комплексному банаховому просторі всіх послідовностей n-вимірних комплексних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня p, є збіжним, де $1 \leq p < +\infty$;

— побудовано і досліджено властивості операторів зсуву на алгебрі Фреше, яка є поповненням алгебри всіх неперервних комплекснозначних $*$-поліномів на довільному комплексному банаховому просторі;

— побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх дійснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому степені дійсного банахового простору всіх дійснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку;

— описано спектр алгебри Фреше, яка є поповненням алгебри всіх дійснозначних симетричних неперервних поліномів на дійсному банаховому просторі всіх дійснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку і показано, що ця алгебра містить неаналітичні функції.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Її результати можуть бути використані в теорії аналітичних функцій на банахових просторах, теорії гладких функцій на банахових просторах, теорії алгебр Фреше, теорії поліномів на банахових просторах.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертації, що виносяться на захист, отримано автором самостійно. У статті [5] М. М. Струтинському належать теорема 1 і наслідок 1. У статті [6] П. Галіндо належать наслідок 4.8 і твердження 5.1, А. В. Загороднюку належать наслідок 5.5, наслідок 6.1 і теорема 6.2. У статті [7] П. Галіндо належить лема 6.2, А. В. Загороднюку належить твердження 4.2. У статті [8] П. Галіндо належить теорема 4.1, А. В. Загороднюку належать твердження 4.2, наслідок 4.3 і наслідок 4.4. У статті [9] А. В. Загороднюку і В. В. Кравців належить теорема 8. У статті [22] А. В. Загороднюку належать твердження 3.1 і твердження 3.3. Крім цього, у статтях [6], [7], [8], [9], [22], [23] А. В. Загороднюку належать постановки задач та аналіз отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на: Дев'ятій літній школі "Алгебра, топологія і аналіз" (Поляниця, 7–18 липня 2014 р.); Четвертій міжнародній ганській конференції, присвяченій 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 30 червня – 5 липня 2014 р.); Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей і математичного аналізу" (Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2015 р.); Всеукраїнській науковій конференції, присвяченій 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу "Прикладні задачі математики" (Івано-Франківськ, 13–15 жовтня 2016 р.); Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.); Міжнародній конференції з функціонального аналізу, присвяченій 125 річниці від дня народження Стефана Банаха (Львів, 18–23 вересня 2017 р.); Конференції із нелінійного функціонального аналізу (Валенсія, Іспанія, 17–20 жовтня 2017 р.); Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми механіки та математики" присвяченій 90-річчю від дня народження академіка НАН України Я. С. Підстригача та 40-річчю створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН України (Львів, 22–25 травня 2018 р.); Шостій всеукраїнській математичній конференції "Нелінійні проблеми аналізу" імені Б. В. Василишина (Микуличин, 26–28 вересня 2018 р.); Міжнародній науковій конференції "Банахові простори та їх застосування", присвяченій 70-річчю проф. А. М. Плічка (Львів, 26–29 червня 2019 р.); Міжнародній конференції "Теорія Морса та її застосування", присвяченій пам'яті і 70 річниці з дня народження Володимира Шарка (Київ, 25–28 вересня 2019 р.); Одинадцятій міжнародній математичній конференції імені В. Скоробогатька (Львів, 26–30 жовтня 2020 р.); а також, на: науковому семінарі із теорії аналітичних функцій Державної школи вищої освіти в Хелмі (Хелм, Республіка Польща); науковому семінарі з функціонального аналізу Жешувського університету (Жешув, Республіка Польща, керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. О. В. Лопушанський); науковому семінарі з функціонального аналізу Краківської політехніки імені Тадеуша Костюшка (Краків, Республіка Польща, керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. А. М. Плічко); науковому семінарі з функціонального аналізу Університету Валенсії (Валенсія, Іспанія); науковому семінарі відділу аналізу, геометрії та топології Інситуту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (Львів); Західноукраїнському математичному семінарі (керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. Т. О. Банах); науковому семінарі факультету математики та інформатики ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"; наукових семінарах кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"; засіданнях Наукового товариства імені Т. Г. Шевченка.

Публікації. Результати дисертації опубліковано у 36 друкованих працях, серед яких: 23 статті у вітчизняних та закордонних фахових наукових виданнях [1–23], решта у матеріалах міжнародних та всеукраїнських наукових конференцій [24–36]; 17 статей опубліковано у виданнях, проіндексованих у базах даних Scopus та/або Web of Science Core Collection [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [21], [22], [23].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків. Повний обсяг роботи становить 309 сторінок друкованого тексту. Список використаних джерел займає 13 сторінок і містить 132 найменування. Додатки займають 5 сторінок і містять список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність дослідження, вказано на зв'язок дисертаційної роботи з науково-дослідними темами, сформульовано мету і завдання дослідження, відзначено наукову новизну, теоретичне і практичне значення отриманих результатів, виокремлено особистий внесок здобувача і вказано установи та організації, де доповідалися і обговорювалися результати дисертації.

У **першому розділі** наведено необхідний теоретичний матеріал і зроблено огляд відомих результатів, що стосуються тематики дисертаційного дослідження.

Позначимо $\mathbb{N}$ множину всіх додатних цілих чисел і $\mathbb{Z}_+$ множину всіх невід'ємних цілих чисел.

Поліноми. Нехай X і Y — це лінійні простори над полями $\mathbb{K}_1$ і $\mathbb{K}_2$ відповідно, такими, що $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2$ і $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2 \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Відображення $A : X^m \to Y$, де $m \in \mathbb{N}$, називають *m-лінійним відображенням*, якщо відображення A є лінійним відносно кожного зі своїх m аргументів (часто використовують терміни "полілінійне відображення", якщо не уточнено число m). Відображення $P : X \to Y$ називають *m-однорідним поліномом*, якщо існує m-лінійне відображення $A : X^m \to Y$ таке, що відображення P є звуженням на діагональ відображення A, тобто $P(x) = A(\underbrace{x, \ldots, x}_{m})$ для кожного $x \in X$. Для зручності визначимо 0-однорідні поліноми, які діють з простору X в простір Y, як сталі відображення.

Відображення $P : X \to Y$ називають *поліномом*, якщо його можна подати у вигляді $P = \sum_{j=0}^{K} P_j$, де $K \in \mathbb{Z}_+$ і P_j є j-однорідним поліномом для кожного $j \in \{0, \ldots, K\}$.

Припустимо, що простори X і Y є нормованими просторами з нормами $\|\cdot\|_X$ і $\|\cdot\|_Y$ відповідно. Відомо, що поліном $P : X \to Y$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли значення $\|P\| = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|P(x)\|_Y$ є скінченним.

$*$-Поліноми. Нехай X і Y — це комплексні лінійні простори. Відображення $A : X^{m+n} \to Y$, де $(m,n) \in \mathbb{Z}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$, називають (m,n)-*лінійним відображенням*, якщо відображення A є лінійним відносно кожного із перших m аргументів і є антилінійним відносно кожного з останніх n аргументів. Відображення $P : X \to Y$ називають (m,n)-*поліномом*, якщо існує (m,n)-лінійне відображення $A_P : X^{m+n} \to Y$ таке, що відображення P є звуженням на діагональ відображення A_P, тобто $P(x) = A_P(\underbrace{x,\ldots,x}_{m+n})$ для кожного $x \in X$. Для зручності визначимо $(0,0)$-поліноми, які діють з X в Y, як сталі відображення.

Відображення $P : X \to Y$ називають $*$-*поліномом*, якщо його можна подати у вигляді $P = \sum_{t=0}^{K} \sum_{j=0}^{t} P_{j,t-j}$, де $K \in \mathbb{Z}_+$ і $P_{j,t-j}$ — це $(j, t-j)$-поліном для кожних $t \in \{0,\ldots,K\}$ і $j \in \{0,\ldots,t\}$.

Припустимо, що X і Y — це комплексні нормовані простори з нормами $\|\cdot\|_X$ і $\|\cdot\|_Y$ відповідно. Тоді $*$-поліном $P : X \to Y$ є неперервним якщо і тільки якщо значення $\|P\| = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|P(x)\|_Y$ є скінченним.

Алгебри та їхні спектри. Нехай $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$. Лінійний простір $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{K}$ називають *алгеброю*, якщо в ньому введено ще одну алгебраїчну операцію — множення, яка задовольняє таким аксіомам:

1. $(xy)z = x(yz)$ для кожних $x, y, z \in \mathcal{A}$.
2. $x(y+z) = xy + xz$; $(y+z)x = yx + zx$ для кожних $x, y, z \in \mathcal{A}$.
3. $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$ для кожних $x, y \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Якщо існує елемент $e \in \mathcal{A}$ такий, що $ex = xe = x$ для кожного $x \in \mathcal{A}$, то елемент e називають *одиницею* алгебри $\mathcal{A}$, а саму алгебру називають *алгеброю з одиницею.*

Топологічний лінійний простір $\mathcal{A}$ називають *топологічною алгеброю*, якщо він є алгеброю з одиницею і множення є сукупно неперервним.

Топологічну алгебру $\mathcal{A}$ називають *локально мультиплікативно опуклою*, якщо топологія на алгебрі $\mathcal{A}$ є породженою деякою сім'єю напівнорм $\{p_j : j \in J\}$, де J — деяка індексна множина, для яких виконуються такі дві умови:

1. $p_j(e) = 1$ для кожного $j \in J$.
2. $p_j(xy) \le p_j(x)p_j(y)$ для кожних $x, y \in \mathcal{A}$, $j \in J$.

Повну метризовну локально мультиплікативно опуклу топологічну алгебру називають *алгеброю Фреше.*

Нехай $\mathcal{A}$ — топологічна алгебра над полем $\mathbb{K}$. Нетривіальний неперервний гомоморфізм $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ називають *характером* алгебри $\mathcal{A}$. Множину всіх характерів алгебри $\mathcal{A}$ називають *спектром* алгебри $\mathcal{A}$ і позначають $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Алгебраїчні комбінації. Нехай T — довільна непорожня множина.

Відображення $f : T \to \mathbb{K}$ називають *алгебраїчною комбінацією* відображень $f_1, \ldots, f_m : T \to \mathbb{K}$ над полем $\mathbb{K}$, якщо існує поліном $Q : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$ такий, що $f(x) = Q(f_1(x), \ldots, f_m(x))$ для кожного $x \in T$.

Множину $\{f_1, \ldots, f_m\}$ відображень $f_1, \ldots, f_m : T \to \mathbb{K}$ називають *алгебраїчно незалежною*, якщо кожен поліном $Q : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$, для якого виконується рівність $Q(f_1(x), \ldots, f_m(x)) = 0$ для кожного $x \in T$, тотожно дорівнює нулю. Нескінченну множину відображень називають *алгебраїчно незалежною*, якщо кожна її скінченна підмножина є алгебраїчно незалежною. Зауважимо, що кожна алгебраїчна комбінація елементів алгебраїчно незалежної множини відображень є єдиною.

Нехай $\mathcal{A}$ — деяка алгебра над полем $\mathbb{K}$ відображень $f : T \to \mathbb{K}$ із поточковими операціями, де T — деяка непорожня множина. Непорожню підмножину $\mathcal{B}$ алгебри $\mathcal{A}$ називають *алгебраїчним базисом* алгебри $\mathcal{A}$, якщо кожен елемент алгебри $\mathcal{A}$ можна єдиним чином подати у вигляді алгебраїчної комбінації деяких елементів підмножини $\mathcal{B}$.

Аналітичні функції на локально опуклих просторах. Підмножину U лінійного простору X називають *скінченно-відкритою*, якщо множина $U \cap F$ є відкритою підмножиною евклідового простору F для кожного скінченновимірного підпростору F простору X.

Комплекснозначну функцію f, визначену на скінченно-відкритій підмножині U комплексного лінійного простору X називають *G-аналітичною*, або *аналітичною за Гато*, якщо для кожних $a \in U, b \in X$ комплекснозначна функція від однієї комплексної змінної $\lambda \mapsto f(a + \lambda b)$ є аналітичною в деякому околі нуля.

Нехай U є скінченно-відкритою підмножиною комплексного лінійного простору X і f є G-аналітичною функцією на множині U. Тоді для кожної точки $a \in U$ існує єдина послідовність однорідних поліномів, які діють з простору X в поле $\mathbb{C}$, $\{f_m^{(a)}\}_{m=0}^{\infty}$, така, що

$$f(a + y) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m^{(a)}(y)$$

для кожного y із деякого скінченно-відкритого околу нуля. Даний ряд називають *рядом Тейлора* функції f у точці a.

Нехай (X, τ) — це комплексний локально опуклий простір і нехай U — це деяка скінченно-відкрита підмножина простору X. Функцію $f : U \to \mathbb{C}$ називають *аналітичною*, якщо вона є G-аналітичною і для кожного $a \in U$ існує τ-окіл нуля V такий, що ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m^{(a)}(y)$$

є збіжним для кожного $y \in V$ і функція

$$V \ni y \mapsto \sum_{m=0}^{\infty} f_m^{(a)}(y) \in \mathbb{C}$$

є неперервною. Алгебру всіх аналітичних функцій, які діють з множини U в поле $\mathbb{C}$, позначають $H(U)$. Функцію, яка є аналітичною на всьому просторі X, називають *цілою*.

Нехай X — це комплексний банахів простір. Нехай $H_b(X)$ — це алгебра Фреше всіх цілих функцій обмеженого типу (обмежених на обмежених множинах) $f : X \to \mathbb{C}$ із топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах. Нехай

$$\|f\|_r = \sup_{\|x\| \le r} |f(x)|$$

для $f \in H_b(X)$ і $r \in (0, +\infty)$. Топологія алгебри Фреше $H_b(X)$ є породженою будь-якою множиною норм $\{\| \cdot \|_r : \ r \in J\}$, де J — це довільна необмежена підмножина множини $(0, +\infty)$.

Зауважимо, що кожна ціла функція на просторі $\mathbb{C}^m$, де $m \in \mathbb{N}$, є функцією обмеженого типу, тому $H_b(\mathbb{C}^m) = H(\mathbb{C}^m)$.

Симетричні функції на просторах вимірних функцій. Нехай Ω — вимірна за Лебегом підмножина множини $\mathbb{R}$, для якої $\mu(\Omega) > 0$, де μ — це лінійна міра Лебега. Нехай Ξ_Ω — це множина всіх бієкцій $\sigma : \Omega \to \Omega$ таких, що для кожної вимірної за Лебегом множини $E \subset \Omega$ множини $\sigma(E)$ і $\sigma^{-1}(E)$ є вимірними за Лебегом і $\mu(\sigma(E)) = \mu(\sigma^{-1}(E)) = \mu(E)$. Зауважимо, що множина Ξ_Ω є множиною всіх вимірних автоморфізмів множини Ω.

Нехай $X(\Omega)$ — довільний лінійний простір класів функцій, заданих на множині Ω, такий, що для кожного класу $\theta \in X(\Omega)$ і для кожної бієкції $\sigma \in \Xi_\Omega$, множина

$$\theta \circ \sigma := \{x \circ \sigma : \ x \in \theta\}$$

є класом, який належить простору $X(\Omega)$.

Функцію f, задану на просторі $X(\Omega)$, називають *симетричною*, якщо для кожних $\theta \in X(\Omega)$ і $\sigma \in \Xi_\Omega$ виконується рівність

$$f(\theta \circ \sigma) = f(\theta).$$

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Функцію f, задану на n-тому декартовому степені простору $X(\Omega)$, називають *симетричною*, якщо для кожних $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in (X(\Omega))^n$ і $\sigma \in \Xi_\Omega$ виконується рівність

$$f((\theta_1 \circ \sigma, \ldots, \theta_n \circ \sigma)) = f((\theta_1, \ldots, \theta_n)).$$

Нехай множина Ω — необмежена. Бієкцію $\sigma \in \Xi_\Omega$ назвемо *скінченною*, якщо для неї існує число $a > 0$ таке, що $\sigma(t) = t$ майже скрізь на множині $\{t \in$

$\Omega : |t| > a\}$. Позначимо Ξ_Ω^0 множину всіх бієкцій $\sigma \in \Xi_\Omega$, які є скінченними. Функцію f, задану на просторі $X(\Omega)$, назвемо *скінченно-симетричною*, якщо $f(\theta \circ \sigma) = f(\theta)$ для кожних $\theta \in X(\Omega)$ і $\sigma \in \Xi_\Omega^0$.

Симетричні функції на просторах послідовностей. Нехай $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$. Нехай Y — лінійний простір над полем $\mathbb{K}$. Нехай X — лінійний простір послідовностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, де $x_1, x_2, \ldots \in Y$, такий, що для кожної послідовності $x = (x_1, x_2, \ldots) \in X$ і для кожної бієкції $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ послідовність $x \circ \sigma := (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots)$ належить простору X. Функцію f, задану на просторі X, називають *симетричною,* якщо $f(x \circ \sigma) = f(x)$ для кожної послідовності $x \in X$ і для кожної бієкції $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Нехай відображення $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ є бієкцією. Назвемо відображення σ *скінченною бієкцією*, якщо існує число $a \in \mathbb{N}$ таке, що звуження відображення σ на множину $\{a, a+1, \ldots\}$ є тотожним відображенням. Функцію f, задану на просторі X називають *скінченно-симетричною,* якщо $f(x \circ \sigma) = f(x)$ для кожної послідовності $x \in X$ і для кожної скінченної бієкції $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Другий розділ дисертації присвячено дослідженням комплекснозначних неперервних симетричних поліномів і цілих аналітичних симетричних функцій на комплексному банаховому просторі $L_\infty[0,1]$ всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку $[0,1]$ із нормою

$$\|x\|_{L_\infty[0,1]} = \operatorname{ess\,sup}_{t\in\Omega}|x(t)|.$$

В підрозділі 2.1 побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх симетричних неперервних комплекснозначних поліномів на комплексному банаховому просторі $L_\infty[0,1]$ і розв'язано задачу побудови елемента простору $L_\infty[0,1]$ за наперед заданими значеннями елементів базису на цьому елементі простору.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ визначимо відображення $R_n : L_\infty[0,1] \to \mathbb{C}$ формулою

$$R_n(x) = \int_{[0,1]} (x(t))^n \, dt,$$

де $x \in L_\infty[0,1]$. Зауважимо, що відображення R_n є n-однорідним симетричним неперервним поліномом таким, що $\|R_n\| = 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Назвемо поліноми R_n *елементарними симетричними поліномами.*

Теорема 2.1. *Для кожної послідовності* $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ *такої, що послідовність* $\left\{\sqrt[n]{|\xi_n|}\right\}_{n=1}^\infty$ *є обмеженою, існує функція* $x_\xi \in L_\infty[0,1]$ *така, що* $R_n\big(x_\xi\big) = \xi_n$ *для кожного* $n \in \mathbb{N}$ *і*

$$\|x_\xi\|_{L_\infty[0,1]} \le \frac{2}{M} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|\xi_n|},$$

де $M = \prod_{k=1}^\infty \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{k+1}\right)$.

Теорема 2.2. *Кожен симетричний неперервний n-однорідний поліном $P : L_\infty[0,1] \to \mathbb{C}$ можна єдиним чином подати у вигляді*

$$P(x) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1}(x)\ldots R_n^{k_n}(x), \qquad (1)$$

де $\alpha_{k_1,\ldots,k_n} \in \mathbb{C}$ і $x \in L_\infty[0,1]$. Іншими словами, множина $\{R_n : n \in \mathbb{N}\}$ є алгебраїчним базисом алгебри всіх симетричних неперервних поліномів на просторі $L_\infty[0,1]$.

Підрозділ 2.2 присвячено вивченню спектра алгебри Фреше $H_{bs}\left(L_\infty[0,1]\right)$, яка є підалгеброю алгебри Фреше $H_b(L_\infty[0,1])$, що складається зі всіх функцій $f \in H_b(L_\infty[0,1])$, які є симетричними. Показано, що кожен характер цієї алгебри є функціоналом обчислення значення в точці. Також показано, що спектр алгебри Фреше $H_{bs}\left(L_\infty[0,1]\right)$ можна ототожнити із множиною всіх послідовностей комплексних чисел $\{c_n\}_{n=1}^\infty$, для яких послідовність $\left\{|c_n|^{1/n}\right\}_{n=1}^\infty$ є обмеженою.

Кожну функцію $f \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$ можна подати у вигляді її ряду Тейлора із неперервних однорідних поліномів, які, у свою чергу, як наслідок інтегральної формули Коші і симетричності функції f, теж є симетричними. Тому, згідно із теоремою 2.2, кожну функцію $f \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$ можна подати у вигляді

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^\infty \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1}(x)\cdots R_n^{k_n}(x)$$

де $\alpha_{k_1k_2\ldots k_n} \in \mathbb{C}$ і ряд збігається рівномірно на обмежених множинах. Для кожного характера $\varphi \in \mathcal{M}(H_{bs}(L_\infty[0,1]))$, де $\mathcal{M}(H_{bs}(L_\infty[0,1]))$ — спектр алгебри Фреше $H_{bs}(L_\infty[0,1])$, внаслідок неперервності, лінійності і мультиплікативності характера φ, маємо

$$\varphi(f) = \alpha_0\varphi(1) + \sum_{n=1}^\infty \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} \varphi(R_1)^{k_1}\cdots\varphi(R_n)^{k_n}.$$

Оскільки характер φ є нетривіальним мультиплікативним функціоналом, то $\varphi(1) = 1$ внаслідок рівності

$$\varphi(1) = \varphi(1\cdot 1) = \varphi(1)^2.$$

Тому для кожного характера $\varphi \in \mathcal{M}(H_{bs}(L_\infty[0,1]))$ виконується рівність

$$\varphi(f) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^\infty \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} \varphi(R_1)^{k_1}\cdots\varphi(R_n)^{k_n}.$$

Таким чином, бачимо, що кожен характер $\varphi \in \mathcal{M}(H_{bs}(L_\infty[0,1]))$ цілком визначено послідовністю його значень на поліномах R_n :

$$(\varphi(R_1), \varphi(R_2), \ldots, \varphi(R_n), \ldots).$$

Твердження 2.6. *Для кожного характера $\varphi \in \mathcal{M}(H_{bs}(L_\infty[0,1]))$ існує число $a > 0$ таке, що $|\varphi(R_n)| \le a^n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.*

Зауважимо, що для довільного фіксованого елемента $x \in L_\infty[0,1]$ функціонал обчислення значення в точці $\delta_x : H_{bs}(L_\infty[0,1]) \to \mathbb{C}$, визначений формулою

$$\delta_x(f) = f(x),$$

де $f \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$, належить до спектра $\mathcal{M}(H_{bs}(L_\infty[0,1]))$. Згідно із теоремою 2.1, для кожної послідовності $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ такої, що послідовність $\big\{\sqrt[n]{|\xi_n|}\big\}_{n=1}^\infty$ є обмеженою, існує функція $x_\xi \in L_\infty[0,1]$ така, що $R_n\big(x_\xi\big) = \xi_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Таким чином, отримуємо наступні наслідки.

Наслідок 2.1. *Кожен характер $\varphi \in \mathcal{M}(H_{bs}(L_\infty[0,1]))$ є функціоналом обчислення значення в точці.*

Наслідок 2.2. *Множина $\mathcal{M}(H_{bs}(L_\infty[0,1]))$ може бути ототожнена з множиною $\Delta \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ всіх послідовностей $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ таких, що послідовність $\big\{\sqrt[n]{|\xi_n|}\big\}_{n=1}^\infty$ є обмеженою.*

В підрозділі 2.3 задано аналітичну структуру на спектрі алгебри Фреше $H_{bs}\,(L_\infty[0,1])$. Розглянуто спектр алгебри $H_{bs}\,(L_\infty[0,1])$ як сильний спряжений простір $H'(\mathbb{C})_\beta$ до простору Фреше $H(\mathbb{C})$ всіх цілих аналітичних функцій від однієї комплексної змінної із топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах і показано, що алгебра Фреше $H_{bs}\,(L_\infty[0,1])$ є ізоморфною до алгебри Фреше $H(H'(\mathbb{C})_\beta)$ всіх комплекснозначних цілих аналітичних функцій на просторі $H'(\mathbb{C})_\beta$.

Наслідок 2.3. *Алгебри Фреше $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ і $H(H'(\mathbb{C})_\beta)$ є ізоморфними.*

Розділ 3 присвячено вивченню симетричних і скінченно-симетричних комплекснозначних неперервних поліномів і аналітичних функцій на деяких просторах послідовностей.

Підрозділ 3.1 присвячено дослідженню комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі ℓ_∞ всіх обмежених послідовностей комплексних чисел. Отримано такі результати:

Теорема 3.1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$. Нехай $P : \ell_\infty \to \mathbb{C}$ — це симетричний неперервний n-однорідний поліном. Тоді поліном P тотожно дорівнює нулю.*

Наслідок 3.1. *Нехай $P : \ell_\infty \to \mathbb{C}$ — це симетричний неперервний поліном. Тоді поліном P є сталим відображенням.*

Підрозділ 3.2 присвячено дослідженням скінченно-симетричних неперервних поліномів і аналітичних цілих функцій обмеженого типу на просторі ℓ_∞. Основними результатами цього підрозділу є:

Теорема 3.2. *Ціла функція $f \in H_b(\ell_\infty)$ є скінченно-симетричною тоді і тільки тоді, коли існує функція $\widetilde{f} \in H_b(\ell_\infty/c_0)$ така, що $f = \widetilde{f} \circ \mathcal{Q}$, де $\mathcal{Q}$ — це фактор-відображення із ℓ_∞ в ℓ_∞/c_0.*

Наслідок 3.2. *Алгебра Фреше скінченно-симетричних цілих функцій обмеженого типу на просторі ℓ_∞ ізоморфна з алгеброю Фреше $H_b(\ell_\infty/c_0)$.*

Підрозділ 3.3 присвячено вивченню алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних поліномів на комплексному банаховому просторі $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ всіх послідовностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, де $x_j = \big(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\big) \in \mathbb{C}^n$ для $j \in \mathbb{N}$ таких, що ряд $\sum_{j=1}^\infty \sum_{s=1}^n \big|x_j^{(s)}\big|^p$ збіжний, із нормою

$$\|x\|_{\ell_p(\mathbb{C}^n)} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{n} \big|x_j^{(s)}\big|^p\right)^{1/p},$$

де $n \in \mathbb{N}$ і $1 \le p < +\infty$.

Позначимо $\mathcal{P}_s(\ell_p(\mathbb{C}^n))$ алгебру всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на просторі $\ell_p(\mathbb{C}^n)$.

Для мультиіндексу $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ покладемо $|k| = k_1 + \ldots + k_n$. Для кожного мультиіндексу $k \in \mathbb{Z}_+^n$ такого, що $|k| \ge \lceil p \rceil$, де $\lceil p \rceil$ — це найменше ціле число, яке є не меншим від p, визначимо відображення $H_k^{(\mathbb{C}^n)} : \ell_p(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}$ формулою

$$H_k^{(\mathbb{C}^n)}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{\substack{s=1 \\ k_s > 0}}^{n} \big(x_j^{(s)}\big)^{k_s}.$$

Зауважимо, що відображення $H_k^{(\mathbb{C}^n)}$ є симетричним $|k|$-однорідним поліномом. В роботі доведено неперервність таких поліномів.

Отримано такий результат:

Наслідок 3.5. *Множина поліномів*

$$\Big\{H_k^{(\mathbb{C}^n)} :\ k \in \mathbb{Z}_+^n,\ |k| \ge \lceil p \rceil\Big\}$$

є алгебраїчним базисом алгебри $\mathcal{P}_s(\ell_p(\mathbb{C}^n))$.

Розділ 4 присвячено вивченню симетричних і скінченно-симетричних комплекснозначних неперервних поліномів і аналітичних функцій на деяких комплексних банахових просторах вимірних за Лебегом функцій на множинах нескінченної міри.

Підрозділ 4.1 присвячено вивченню симетричних неперервних поліномів на комплексному банаховому просторі $L_\infty(\Omega)$ всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на множині нескінченної міри $\Omega \subset \mathbb{R}$.

Теорема 4.1. *Нехай P — це неперервний n-однорідний симетричний поліном на просторі $L_\infty[0, +\infty)$, де $n \in \mathbb{N}$. Тоді поліном P тотожно дорівнює нулю.*

Наслідок 4.2. *Нехай Ω — це вимірна за Лебегом підмножина множини $[0, +\infty)$ така, що $\mu(\Omega) = +\infty$ і нехай P — це неперервний n-однорідний симетричний поліном на просторі $L_\infty(\Omega)$. Тоді $P = 0$.*

Таким чином, єдиними неперервними симетричними поліномами на просторі $L_\infty(\Omega)$, де Ω — це вимірна підмножина множини $[0, +\infty)$ така, що $\mu(\Omega) = +\infty$, є сталі відображення.

В підрозділі 4.2 вивчаються скінченно-симетричні неперервні поліноми і цілі аналітичні функції обмеженого типу на комплексному просторі $L_\infty[0, +\infty)$.

Нехай M_{00} — це простір всіх функцій вигляду

$$x = \sum_{j=1}^{N} a_j \mathbf{1}_{E_j},$$

де $N \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$ і $E_1, \ldots, E_N$ — це попарно неперетинні обмежені вимірні підмножини множини $[0, +\infty)$ ненульової міри. Нехай M_0 — це замикання множини M_{00} в просторі $L_\infty[0, +\infty)$.

Твердження 4.5. *Нехай $P : L_\infty[0, +\infty) \to \mathbb{C}$ — це неперервний скінченно-симетричний n-однорідний поліном. Тоді $P(x+y) = P(x)$ для кожних функцій $x \in L_\infty[0, +\infty)$ і $y \in M_{00}$.*

Нехай $\mathcal{Q}$ — це фактор-відображення, яке діє з простору $L_\infty[0, +\infty)$ в фактор-простір $L_\infty[0, +\infty)/M_0$.

Наслідок 4.4. *Ціла функція $f \in H_b(L_\infty[0, +\infty))$ є скінченно-симетричною, тоді і тільки тоді, коли існує функція $\widetilde{f} \in H_b(L_\infty[0, +\infty)/M_0)$ така, що $f = \widetilde{f} \circ \mathcal{Q}$.*

Наслідок 4.5. *Алгебра Фреше скінченно-симетричних цілих функцій обмеженого типу на комплексному просторі $L_\infty[0, +\infty)$ ізоморфна з алгеброю Фреше $H_b(L_\infty[0, +\infty)/M_0)$.*

В підрозділі 4.3 побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі і показано, що алгебра Фреше комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цьому просторі ізоморфна до алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку.

Розглянемо комплексний банахів простір $(L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty) := L_1[0,+\infty) \cap L_\infty[0,+\infty)$ всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі з нормою

$$\|x\|_{1,\infty} = \max\left\{\|x\|_{L_1[0,+\infty)}, \|x\|_{L_\infty[0,+\infty)}\right\}.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ визначимо відображення $\tilde{R}_n : (L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty) \to \mathbb{C}$ формулою

$$\tilde{R}_n(x) = \int_{[0,+\infty)} (x(t))^n \, dt.$$

Зауважимо, що відображення $\tilde{R}_n$ є симетричним n-однорідним поліномом. В роботі доведено, що $\|\tilde{R}_n\| = 1$.

Теорема 4.2. *Кожен симетричний неперервний n-однорідний поліном $P : (L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty) \to \mathbb{C}$ можна єдиним чином подати у вигляді*

$$P(x) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} \tilde{R}_1^{k_1}(x) \cdots \tilde{R}_n^{k_n}(x),$$

де $\alpha_{k_1,\ldots,k_n} \in \mathbb{C}$.

Наслідок 4.6. *Множина $\{\tilde{R}_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ є алгебраїчним базисом алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на просторі $(L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$.*

Нехай $H_{bs}((L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty))$ — це алгебра Фреше всіх цілих аналітичних симетричних функцій обмеженого типу $f : (L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty) \to \mathbb{C}$ із топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах.

Визначимо відображення $J : H_{bs}(L_\infty[0,1]) \to H_{bs}((L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty))$ наступним чином. Нехай функція f належить алгебрі $H_{bs}(L_\infty[0,1])$, тоді її можна єдиним чином подати у вигляді

$$f = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1} \ldots R_n^{k_n}.$$

Покладемо

$$J(f) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n\\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} \tilde{R}_1^{k_1} \ldots \tilde{R}_n^{k_n}. \tag{2}$$

Теорема 4.3. *Відображення J, визначене формулою* (2), *є ізоморфізмом алгебр Фреше $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ і $H_{bs}((L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty))$.*

В підрозділі 4.4 узагальнено деякі результати підрозділу 4.3 на випадок неперервних симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на довільних об'єднаннях просторів Лебега-Рохліна, а саме, побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри таких поліномів.

Нехай Γ — це довільна непорожня індексна множина. Нехай

$$\big\{(\Omega_\gamma, \mathcal{F}_\gamma, \nu_\gamma) : \ \gamma \in \Gamma\big\} \tag{3}$$

— це множина просторів Лебега-Рохліна із неперервними мірами. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ — це диз'юнктне об'єднання усіх просторів, які належать до множини (3).

Нехай $(L_1 \cap L_\infty)(\Omega)$ — це комплексний банахів простір всіх вимірних інтегровних суттєво обмежених функцій $x : \Omega \to \mathbb{C}$ із нормою

$$\|x\| = \max\left\{ \int_\Omega |x(t)|\, dt, \operatorname{ess\,sup}_{t\in\Omega}|x(t)| \right\},$$

Теорема 4.4. *Кожен симетричний неперервний n-однорідний поліном $P : (L_1 \cap L_\infty)(\Omega) \to \mathbb{C}$ можна єдиним чином подати у вигляді*

$$P(x) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} \left(\tilde{R}_{1,\Omega}(x)\right)^{k_1} \cdots \left(\tilde{R}_{n,\Omega}(x)\right)^{k_n},$$

де $x \in (L_1 \cap L_\infty)(\Omega)$ і $\alpha_{k_1,\ldots,k_n} \in \mathbb{C}$.

Розділ 5 присвячено вивченню симетричних комплекснозначних аналітичних функцій на декартових степенях комплексних банахових просторів $L_p[0,1]$ і $L_p[0,+\infty)$ всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом у степені p функцій на множинах $[0,1]$ і $[0,+\infty)$ відповідно, де $1 \le p < +\infty$.

В підрозділі 5.1 побудовано скінченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних поліномів на декартовому степені простору $L_p[0,1]$ і показано, що алгебра Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій на декартовому степені простору $L_p[0,1]$ ізоморфна до алгебри Фреше $H(\mathbb{C}^m)$ всіх комплекснозначних аналітичних функцій на просторі $\mathbb{C}^m$, де m — це потужність вищезгаданого алгебраїчного базису.

Позначимо $\mathcal{P}_s((L_p[0,1])^n)$ алгебру всіх симетричних неперервних комплекснозначних поліномів на просторі $(L_p[0,1])^n$.

Для кожного мультиіндексу $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ такого, що $1 \le |k| \le \lfloor p \rfloor$, де $|k| = k_1 + \ldots + k_n$ і $\lfloor p \rfloor$ — це ціла частина числа p, визначимо відображення $R_{k,[0,1]} : (L_p[0,1])^n \to \mathbb{C}$ формулою

$$R_{k,[0,1]}(y) = \int_{[0,1]} \prod_{\substack{s=1 \\ k_s>0}}^{n} (y_s(t))^{k_s}\, dt,$$

де $y = (y_1, \ldots, y_n) \in (L_p[0,1])^n$.

Теорема 5.2. *Кожен N-однорідний симетричний неперервний поліном $P : (L_p[0,1])^n \to \mathbb{C}$ можна єдиним чином подати у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів $R_{k,[0,1]}$, де мультиіндекси $k \in \mathbb{Z}_+^n$ такі, що $1 \le |k| \le \min\{\lfloor p \rfloor, N\}$.*

Наслідок 5.1. *Множина поліномів $\left\{R_{k,[0,1]} : \ k \in \mathbb{Z}_+^n, 1 \le |k| \le \lfloor p \rfloor\right\}$ є алгебраїчним базисом алгебри $\mathcal{P}_s((L_p[0,1])^n)$.*

Нехай $H_{bs}\left((L_p[0,1])^n\right)$ — це підалгебра алгебри Фреше $H_b\left((L_p[0,1])^n\right)$, яка складається зі всіх функцій $f \in H_b\left((L_p[0,1])^n\right)$, які є симетричними.

Теорема 5.4. *Алгебра Фреше $H_{bs}((L_p[0,1])^n)$ ізоморфна із алгеброю Фреше $H(\mathbb{C}^m)$, де m — це потужність множини мультиіндексів*

$$M = \left\{k \in \mathbb{Z}_+^n : \ 1 \le |k| \le \lfloor p \rfloor\right\}.$$

Спектр алгебри Фреше $H_{bs}((L_p[0,1])^n)$ збігається із множиною усіх функціоналів обчислення значень в точках простору $(L_p[0,1])^n$.

Підрозділ 5.2 присвячено вивченню симетричних неперервних поліномів і симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на декартовому степені простору $L_p[0,+\infty)$, де $1 \le p < +\infty$.

Якщо $p \in \mathbb{N}$, то для кожного мультиіндексу $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ такого, що $|k| = p$, визначимо відображення $R_{k,[0,+\infty)} : (L_p[0,+\infty))^n \to \mathbb{C}$ формулою

$$R_{k,[0,+\infty)}(y) = \int_{[0,+\infty)} \prod_{\substack{s=1 \\ k_s > 0}}^{n} (y_s(t))^{k_s}\, dt,$$

де $y = (y_1, \ldots, y_n) \in (L_p[0,+\infty))^n$.

Теорема 5.5. *Нехай $N \in \mathbb{N}$. Нехай $P : (L_p[0,+\infty))^n \to \mathbb{C}$ — це симетричний неперервний N-однорідний поліном. Якщо $p \notin \mathbb{N}$ або $N < p$, то $P \equiv 0$. Якщо $p \in \mathbb{N}$ і $N \ge p$, то P можна єдиним чином подати як алгебраїчну комбінацію поліномів $R_{k,[0,+\infty)}$, де мультиіндекси $k \in \mathbb{Z}_+^n$ такі, що $|k| = p$.*

Наслідок 5.2. *Нехай P — це симетричний неперервний поліном на просторі $(L_p[0,+\infty))^n$. Якщо $p \notin \mathbb{N}$, то поліном P є сталим відображенням. Якщо $p \in \mathbb{N}$, то поліном P можна єдиним чином подати як алгебраїчну комбінацію поліномів $R_{k,[0,+\infty)}$, де мультиіндекси $k \in \mathbb{Z}_+^n$ такі, що $|k| = p$.*

Теорема 5.6. *Нехай $p \in \mathbb{N}$. Алгебра Фреше $H_{bs}((L_p[0,+\infty)^n)$ ізоморфна із алгеброю Фреше $H(\mathbb{C}^m)$, де m — це потужність множини мультиіндексів*

$$M = \left\{k \in \mathbb{Z}_+^n : \ |k| = p\right\}.$$

Спектр алгебри Фреше $H_{bs}((L_p[0,+\infty)^n)$ збігається із множиною усіх функціоналів обчислення значень в точках простору $(L_p[0,+\infty))^n$.

Розділ 6 присвячено вивченню комплекснозначних симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на декартовому степені комплексного банахового простору $L_\infty[0,1]$ всіх комплекснозначих вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку $[0,1]$.

В підрозділі 6.1 побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних поліномів на декартовому степені $(L_\infty[0,1])^n$ комплексного банахового простору всіх комплекснозначих вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку із нормою

$$\|x\|_{\infty,n} = \max_{1\le j\le n} \|x_j\|_{L_\infty[0,1]},$$

де $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (L_\infty[0,1])^n$.

Для кожного мультиіндексу $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ такого, що $|k| \ge 1$, де $|k| = k_1 + \ldots + k_n$, визначимо відображення $R_k : (L_\infty[0,1])^n \to \mathbb{C}$ формулою

$$R_k(y) = \int_{[0,1]} \prod_{\substack{s=1\\ k_s>0}}^{n} (y_s(t))^{k_s}\, dt,$$

де $y = (y_1, \ldots, y_n) \in (L_\infty[0,1])^n$. Зауважимо, що відображення R_k є неперервним симетричним $|k|$-однорідним поліномом і $\|R_k\| = 1$.

Для кожної непорожньої скінченної множини $M \subset \mathbb{Z}_+^n$ і для кожного відображення $l : M \to \mathbb{Z}_+$ нехай

$$\varkappa(l, M) = \sum_{k\in M} |k| l(k). \tag{4}$$

Для $N \in \mathbb{N}$ нехай

$$M_N = \left\{k \in \mathbb{Z}_+^n :\ 1 \le |k| \le N\right\}. \tag{5}$$

Теорема 6.1. *Кожен симетричний неперервний N-однорідний поліном $P : (L_\infty[0,1])^n \to \mathbb{C}$ можна єдиним чином подати у вигляді*

$$P(y) = \sum_{\substack{l:M_N\to\mathbb{Z}_+\\ \varkappa(l,M_N)=N}} \alpha_l \prod_{\substack{k\in M_N\\ l(k)>0}} (R_k(y))^{l(k)},$$

де $y \in (L_\infty[0,1])^n$, $\alpha_l \in \mathbb{C}$, множина M_N визначена формулою (5) і відображення $\varkappa$ визначене формулою (4).

Наслідок 6.2. *Множина поліномів $\left\{R_k :\ k \in \mathbb{Z}_+^n, |k| \ge 1\right\}$ є алгебраїчним базисом алгебри всіх неперервних симетричних комплекснозначних поліномів на просторі $(L_\infty[0,1])^n$.*

В підрозділі 6.2 описано спектр алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на декартовому степені комплексного банахового простору $L_\infty[0,1]$ всіх комплекснозначих вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку $[0,1]$. Показано, що кожен елемент спектра є функціоналом обчислення значення в точці.

Теорема 6.2. *Нехай $n \in \mathbb{N}$. Існує стала $K_n > 0$ така, що для кожного відображення $c : \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0,\ldots,0)\} \to \mathbb{C}$ такого, що*

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0,\ldots,0)\}} |c(k)|^{1/|k|} < +\infty,$$

існує елемент $x_c \in (L_\infty[0,1])^n$ такий, що $R_k(x_c) = c(k)$ для кожного $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0,\ldots,0)\}$ і

$$\|x_c\|_{\infty,n} \le K_n \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0,\ldots,0)\}} |c(k)|^{1/|k|}.$$

Нехай $H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)$ — це алгебра Фреше всіх цілих симетричних функцій обмеженого типу $f : (L_\infty[0,1])^n \to \mathbb{C}$ із топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах.

Кожну функцію $f \in H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)$ можна подати у вигляді ряду Тейлора із неперервних однорідних поліномів, які, згідно із інтегральною формулою Коші і згідно із симетричністю функції f, також є симетричними. Тому, згідно із теоремою 6.1, кожну функцію $f \in H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)$ можна зобразити у вигляді

$$f(x) = f(0) + \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{\substack{l : M_N \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l, M_N) = N}} \alpha_l \prod_{\substack{k \in M_N \\ l(k) > 0}} \left(R_k(x)\right)^{l(k)},$$

де $x \in (L_\infty[0,1])^n$, $\alpha_l \in \mathbb{C}$, множина M_N визначена рівністю (5) і відображення $\varkappa$ визначене рівністю (4). Зауважимо, що даний ряд збігається рівномірно на обмежених множинах.

Займемося дослідженням спектра $\mathcal{M}\left(H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)\right)$. Для кожного характера $\varphi \in \mathcal{M}\left(H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)\right)$ із неперервності, лінійності і мультиплікативності, враховуючи рівність $\varphi(1) = 1$, випливає рівність

$$\varphi(f) = f(0) + \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{\substack{l : M_N \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l, M_N) = N}} \alpha_l \prod_{\substack{k \in M_N \\ l(k) > 0}} \left(\varphi(R_k)\right)^{l(k)}.$$

Отже, характер φ повністю визначається своїми значеннями на поліномах R_k, де $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0,\ldots,0)\}$. Отже, кожен характер $\varphi \in \mathcal{M}\left(H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)\right)$ цілком визначається відображенням $c_\varphi : \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0,\ldots,0)\} \to \mathbb{C}$, визначеним рівністю

$$c_\varphi(k) = \varphi(R_k), \tag{6}$$

де $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0,\ldots,0)\}$.

Твердження 6.3. *Для кожного* $\varphi \in \mathcal{M}\left(H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)\right)$,

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0,\ldots,0)\}} \left|\varphi(R_k)\right|^{1/|k|} < \infty.$$

Зауважимо, що для кожного елемента $x \in (L_\infty[0,1])^n$ функціонал обчислення значення в точці δ_x належить до множини $\mathcal{M}\left(H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)\right)$.

Твердження 6.4. *Кожен характер* $\varphi \in \mathcal{M}\left(H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)\right)$ *є функціоналом обчислення значення в точці.*

Нехай Δ — це множина всіх відображень $c : \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0,\ldots,0)\} \to \mathbb{C}$ таких, що

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0,\ldots,0)\}} \left|c(k)\right|^{1/|k|} < \infty.$$

Твердження 6.5. *Відображення*

$$\Phi : \mathcal{M}\left(H_{bs}\left((L_\infty[0,1])^n\right)\right) \ni \varphi \mapsto c_\varphi \in \Delta,$$

де відображення c_φ *визначене рівністю* (6), *є біекцією.*

Розділ 7 присвячено вивченню деяких класів диференційовних у дійсному сенсі функцій на банахових просторах.

Підрозділ 7.1 присвячено вивченню алгебри всіх дійснозначних симетричних неперервних поліномів на дійсному банаховому просторі $\ell_p(\mathbb{R}^n)$ всіх послідовностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, де $x_j = \left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^n$ для $j \in \mathbb{N}$ таких, що ряд $\sum_{j=1}^\infty \sum_{s=1}^n \left|x_j^{(s)}\right|^p$ збіжний, із нормою

$$\|x\|_{\ell_p(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{j=1}^\infty \sum_{s=1}^n \left|x_j^{(s)}\right|^p\right)^{1/p},$$

де $n \in \mathbb{N}$ і $1 \le p < +\infty$.

Доведено, що так звані степеневі симетричні поліноми утворюють зліченний алгебраїчний базис цієї алгебри.

Для кожного мультиіндексу $k \in \mathbb{Z}_+^n$ такого, що $|k| \ge \lceil p \rceil$ визначимо відображення $H_k^{(\mathbb{R}^n)} : \ell_p(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ формулою

$$H_k^{(\mathbb{R}^n)}(x) = \sum_{j=1}^\infty \prod_{\substack{s=1 \\ k_s > 0}}^n \left(x_j^{(s)}\right)^{k_s}. \tag{7}$$

Зауважимо, що відображення $H_k^{(\mathbb{R}^n)}$ є симетричним $|k|$-однорідним неперервним поліномом.

Теорема 7.1. *Нехай $P : \ell_p(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ — це неперервний m-однорідний симетричний поліном. Тоді у випадку $1 \le m < \lceil p \rceil$ поліном P тотожно дорівнює нулю. У випадку $m \ge \lceil p \rceil$ поліном P можна єдиним чином подати у вигляді*

$$P(x) = \sum_{\substack{l:\Gamma_m \to \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l)=m}} \alpha_l \prod_{\substack{k\in\Gamma_m \\ l(k)>0}} \left(H_k^{(\mathbb{R}^n)}(x)\right)^{l(k)},$$

де $x \in \ell_p(\mathbb{R}^n)$, $\alpha_l \in \mathbb{C}$, $\Gamma_m = \left\{k \in \mathbb{Z}_+^n : \lceil p \rceil \le |k| \le m\right\}$ і функція $\varkappa$ від відображення $l : \Gamma_m \to \mathbb{Z}_+$ визначена формулою $\varkappa(l) = \sum_{k\in\Gamma_m} |k| l(k)$.

Зауважимо, що комплекснозначність полінома P в умові попередньої теореми є важливою для застосовності цієї теореми до дослідження симетричних $*$-поліномів в підрозділі 7.3.

Теорема 7.2. *Поліноми $H_k^{(\mathbb{R}^n)}$, де мультиіндекси $k \in \mathbb{Z}_+^n$ такі, що $|k| \ge \lceil p \rceil$, утворюють алгебраїчний базис алгебри всіх симетричних неперервних дійснозначних поліномів на просторі $\ell_p(\mathbb{R}^n)$.*

Підрозділ 7.2 присвячено встановленню деяких властивостей $*$-поліномів і вивченню симетричних $*$-поліномів на просторі $\mathbb{C}^n$.

Для кожного мультиіндексу $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{Z}_+^2$ визначимо (γ_1, γ_2)-поліном $H_\gamma^{(n)} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ формулою

$$H_\gamma^{(n)}(z) = \sum_{m=1}^{n} z_m^{\gamma_1} \bar{z}_m^{\gamma_2},$$

де $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

Теорема 7.3. *Кожен симетричний $*$-поліном $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації $*$-поліномів $H_\gamma^{(n)}$, де $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{Z}_+^2$ такі, що $\gamma_1 + \gamma_2 \le \deg P$, де $\deg P$ — це так званий степінь $*$-полінома P, який визначається як максимальна сума степенів однорідності і антиоднорідності для ненульових компонент $*$-полінома.*

Підрозділ 7.3 присвячено вивченню симетричних $*$-поліномів на просторі $\ell_p(\mathbb{C}^n)$, де $n \in \mathbb{N}$ і $p \in [1, +\infty)$. Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних $*$-поліномів на просторі $\ell_p(\mathbb{C}^n)$.

Визначимо відображення $J : \ell_p(\mathbb{C}^n) \to \ell_p(\mathbb{R}^{2n})$ формулою

$$\begin{aligned} J(z) = \Big(&\big(\operatorname{Re} z_1^{(1)}, \operatorname{Im} z_1^{(1)}, \ldots, \operatorname{Re} z_1^{(n)}, \operatorname{Im} z_1^{(n)}\big), \\ &\qquad \big(\operatorname{Re} z_2^{(1)}, \operatorname{Im} z_2^{(1)}, \ldots, \operatorname{Re} z_2^{(n)}, \operatorname{Im} z_2^{(n)}\big), \ldots\Big), \end{aligned}$$

де $z = \left(\left(z_1^{(1)}, \ldots, z_1^{(n)}\right), \left(z_2^{(1)}, \ldots, z_2^{(n)}\right), \ldots\right) \in \ell_p(\mathbb{C}^n)$. В роботі показано, що відображення J є добре визначеним і бієктивним.

Теорема 7.4. *Множина відображень* $\left\{H_k^{(\mathbb{R}^{2n})} \circ J:\ k \in \mathbb{Z}_+^{2n}, |k| \geq \lceil p \rceil\right\}$ *є алгебраїчним базисом алгебри всіх неперервних симетричних* $*$*-поліномів, які діють з простору* $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ *в* $\mathbb{C}$.

У підрозділі 7.4 встановлено деякі властивості операторів зсуву на алгебрі Фреше функцій на комплексному банаховому просторі, яка є поповненням алгебри всіх неперервних $*$-поліномів. Показано, що оператори зсуву є добре визначеними неперервними лінійними операторами. Також досліджено один спеціальний клас функцій із даної алгебри, побудованих за допомогою композиції неперервних лінійних функціоналів із операторами зсуву. Такі класи функцій відіграють важливу роль в описі спектрів алгебр функцій на банахових просторах.

В підрозділі 7.5 побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх дійснозначних симетричних поліномів на декартовому степені дійсного банахового простору $L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]$ всіх дійснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку $[0,1]$.

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Для кожного мультиіндексу $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ такого, що $|k| \geq 1$, де $|k| = k_1 + \ldots + k_n$, визначимо відображення $R_k^{(\mathbb{R})} : \left(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\right)^n \to \mathbb{R}$ формулою

$$R_k^{(\mathbb{R})}(y) = \int_{[0,1]} \prod_{\substack{s=1 \\ k_s>0}}^{n} (y_s(t))^{k_s}\, dt,$$

де $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \left(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\right)^n$. Зауважимо, що відображення $R_k^{(\mathbb{R})}$ є неперервним симетричним $|k|$-однорідним поліномом і $\left\|R_k^{(\mathbb{R})}\right\| = 1$.

Наслідок 7.2. *Множина поліномів*

$$\left\{R_k^{(\mathbb{R})}:\ k \in \mathbb{Z}_+^n, |k| \geq 1\right\}$$

є алгебраїчним базисом алгебри всіх симетричних неперервних дійснозначних поліномів на просторі $\left(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\right)^n$.

Підрозділ 7.6 присвячено вивченню дійснозначних симетричних функцій на дійсному банаховому просторі $L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]$. Описано спектр алгебри Фреше, яка є поповненням алгебри всіх дійснозначних симетричних неперервних поліномів на просторі $L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]$ відносно сім'ї норм від комплексифікацій поліномів. Показано, що дана алгебра Фреше містить неаналітичні функції.

Нехай G — це множина всіх функцій $g \in L_\infty^{(\mathbb{C})}[0,1]$ таких, що $\overline{g} = g \circ \sigma_g$ для деякої функції $\sigma_g \in \Xi_{[0,1]}$, де $\overline{g}$ — це комплексно спряжена функція до функції g.

Лема 7.2. *Для кожного* $m \in \mathbb{N}$ *і* $g \in G$, *значення* $R_m^{(\mathbb{C})}(g)$ *є дійсним.*

Позначимо $\mathcal{P}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$ алгебру всіх симетричних неперервних поліномів, які діють з простору $L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]$ в множину $\mathbb{R}$.

Наслідок 7.4. *Для кожних $P \in \mathcal{P}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$ і $g \in G$, значення $\widehat{P}(g)$ є дійсним, де $\widehat{P}$ — це комплексифікація полінома P.*

Для кожних $r \in \mathbb{N}$ і $P \in \mathcal{P}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$, нехай

$$\|P\|_r = \sup_{\substack{\|g\|_{L_\infty[0,1]} \le r \\ g \in G}} |\widehat{P}(g)|.$$

Нехай $\mathcal{A}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$ — це поповнення алгебри $\mathcal{P}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$ відносно метрики

$$d(P_1,P_2) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^r} \frac{\|P_1 - P_2\|_r}{1 + \|P_1 - P_2\|_r},$$

де $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)$, породженої зліченною системою норм $\{\|\cdot\|_r : \ r \in \mathbb{N}\}$.

Теорема 7.7. *Для кожного функціонала $\varphi \in \mathcal{M}\left(\mathcal{A}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)\right)$ існує функція $g \in G$ така, що $\varphi = \delta_g$. Крім того, для кожного функціонала $\varphi \in \mathcal{M}\left(\mathcal{A}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)\right)$,*

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \sqrt[m]{\big|\varphi\big(R_m^{(\mathbb{R})}\big)\big|} < +\infty,$$

і, як наслідок, для кожної послідовності $\{\xi_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ такої, що

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \sqrt[m]{|\xi_m|} < +\infty,$$

існує єдиний функціонал $\varphi \in \mathcal{M}\left(\mathcal{A}_s\Big(L_\infty^{(\mathbb{R})}[0,1]\Big)\right)$ такий, що $\varphi\big(R_m^{(\mathbb{R})}\big) = \xi_m$ для кожного $m \in \mathbb{N}$.

Підрозділ 7.7 містить деякі результати стосовно продовжень полілінійних відображень на декартові степені.

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено вивченню властивостей алгебр диференційовних функцій на банахових просторах із додатковими властивостями симетрії. Зокрема, в роботі досліджено властивості алгебр симетричних неперервних поліномів, здійснено опис спектрів алгебр Фреше симетричних аналітичних функцій на банахових просторах, побудовано зображення цих алгебр Фреше як алгебр аналітичних функцій на їхніх спектрах. У роботі отримано такі наукові результати:

1. Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх симетричних неперервних комплекснозначних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку. Описано спектр алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цьому просторі. Зображено дану алгебру Фреше як алгебру аналітичних функцій на спектрі, який ототожено із сильним спряженим простором до простору Фреше всіх цілих аналітичних функцій від однієї комплексної змінної.

2. Показано, що кожен комплекснозначний неперервний симетричний поліном на комплексному банаховому просторі ℓ_∞ всіх обмежених послідовностей комплексних чисел обов'язково є сталим відображенням. Показано, що алгебра Фреше всіх комплекснозначних скінченно-симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному просторі ℓ_∞ є ізоморфною до алгебри Фреше всіх комплекснозначних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на фактор-просторі ℓ_∞/c_0, де c_0 — це комплексний банахів простір всіх збіжних до нуля послідовностей комплексних чисел.

Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх послідовностей n-вимірних комплексних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня p, є збіжним, де $1 \leq p < +\infty$.

3. Показано, що кожен комплекснозначний неперервний симетричний поліном на комплексному банаховому просторі $L_\infty[0, +\infty)$ всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі обов'язково є сталим відображенням. Показано, що алгебра Фреше всіх комплекснозначних скінченно-симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на просторі $L_\infty[0, +\infty)$ є ізоморфною до алгебри Фреше всіх комплекснозначних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на фактор-просторі $L_\infty[0, +\infty)/M_0$, де M_0 — це замикання у просторі $L_\infty[0, +\infty)$ підпростору всіх простих вимірних функцій із обмеженими носіями.

Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі і показано, що алгебра Фреше комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цьому просторі ізоморфна до алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку.

Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на об'єднанні просторів Лебега-Рохліна із неперервними мірами.

4. Побудовано скінченні алгебраїчні базиси алгебр всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартових степенях комплексних банахових просторів всіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом у степені p, де $1 \leq p < +\infty$, функцій на відрізку і на півосі, описано спектри алгебр Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цих декартових степенях і зображено дані алгебри Фреше як алгебри аналітичних функцій від скінченної кількості комплексних змінних.

5. Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому степені комплексного банахового простору всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку, описано спектр алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на цьому просторі.

6. Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх дійснозначних симетричних неперервних поліномів на дійсному банаховому просторі всіх послідовностей n-вимірних дійсних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня p, є збіжним, де $1 \leq p < +\infty$.

Побудовано формули для відновлення за значеннями $*$-поліномів, які діють між комплексними лінійними просторами, (p, q)-поліноміальних компонент цих $*$-поліномів. Ці формули використано для досліджень симетричних $*$-поліномів, які діють з $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}$. Показано, що кожен такий $*$-поліном можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації деяких "елементарних" симетричних $*$-поліномів.

Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх комплекснозначних симетричних неперервних $*$-поліномів на комплексному банаховому просторі всіх послідовностей n-вимірних комплексних векторів таких, що ряд із p-норм цих векторів, піднесених до степеня p, є збіжним, де $1 \leq p < +\infty$.

Побудовано і досліджено властивості операторів зсуву на алгебрі Фреше, яка є поповненням алгебри всіх неперервних комплекснозначних $*$-поліномів на довільному комплексному банаховому просторі.

Побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх дійснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому степені дійсного банахового простору всіх дійснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку.

Описано спектр алгебри Фреше, яка є поповненням алгебри всіх дійснозначних симетричних неперервних поліномів на дійсному банаховому просторі всіх дійснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку і показано, що ця алгебра містить неаналітичні функції.

Результати дисертаційної роботи є внеском в теорію диференційовних функцій на банахових просторах і можуть бути використані при дослідженнях алгебр аналітичних і диференційовних у дійсному сенсі функцій на банахових просторах.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Василишин Т. В. Про простори (p,q)-лінійних і (p,q)-однорідних відображень між комплексними лінійними просторами // Прикарпатський вісник НТШ. Число. — 2015. — № 1(29). — С. 31–34.

2. Василишин Т. В. Операція згортки на просторі, спряженому до алгебри $C(\mathcal{P}_*(X))$ // Прикарпатський вісник НТШ. Число. — 2017. — № 2(38). — С. 23–27.

3. Василишин Т. В. Симетричні поліноми на дійсному банаховому просторі $L_\infty[0,1]$ // Прикарпатський вісник НТШ. Число. — 2018. — № 1(45). — С. 21–25.

4. Василишин Т. В. Деякі властивості елементарних симетричних поліномів на декартовому квадраті комплексного банахового простору $L_\infty[0,1]$ // Прикарпатський вісник НТШ. Число. — 2018. — № 2(46). — С. 9–16.

5. Василишин Т. В., Струтинський М. М. Алгебри симетричних $*$-поліномів на просторі $\mathbb{C}^2$ // Мат. мет. та фіз.-мех. поля. — 2018. — Т. 61, № 2. — С. 38–48.

6. Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. The algebra of symmetric analytic functions on L_∞ // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics — 2017. — Vol. 147, Iss. 4. — P. 743–761.

7. Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. Symmetric and finitely symmetric polynomials on the spaces ℓ_∞ and $L_\infty[0,+\infty)$ // Mathematische Nachrichten. — 2018. — Vol. 291, Iss. 11–12. — P. 1712–1726.

8. Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. Analytic structure on the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions on L_∞ // RACSAM — 2020. — Vol. 114, Article number 56.

9. Kravtsiv V., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. On algebraic basis of the algebra of symmetric polynomials on $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ // Journal of Function Spaces — 2017. — Vol. 2017. — Article ID 4947925, 8 p.

10. Vasylyshyn T. V. Symmetric continuous linear functionals on complex space $L_\infty[0,1]$ // Carpathian Math. Publ. — 2014. — Vol. 6, No. 1. — P. 8–10.

11. Vasylyshyn T. V. Continuous block-symmetric polynomials of degree at most two on the space $(L_\infty)^2$ // Carpathian Math. Publ. — 2016. — Vol. 8, No. 1. — P. 38–43.

12. Vasylyshyn T. V. Extensions of multilinear mappings to powers of linear spaces // Carpathian Math. Publ. — 2016. — Vol. 8, No. 2. — P. 211–214.

13. Vasylyshyn T. V. Some properties of shift operators on algebras generated by $*$-polynomials // Carpathian Math. Publ. — 2018. — Vol. 10, No. 1. — P. 206–212.

14. Vasylyshyn T. V. Symmetric $*$-polynomials on $\mathbb{C}^n$ // Carpathian Math. Publ. — 2018. — Vol. 10, No. 2. — P. 395–401.

15. Vasylyshyn T. V. Point-evaluation functionals on algebras of symmetric functions on $(L_\infty)^2$ // Carpathian Math. Publ. — 2019. — Vol. 11, No. 2. — P. 493–501.

16. Vasylyshyn T. V. Symmetric functions on spaces $\ell_p(\mathbb{R}^n)$ and $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ // Carpathian Math. Publ. — 2020. — Vol. 12, No. 1. — P. 5–16.

17. Vasylyshyn T. Symmetric polynomials on $(L_p)^n$ // Eur. J. Math. — 2020. — Vol. 6, Iss. 1. — P. 164–178.

18. Vasylyshyn T. V. Symmetric polynomials on the Cartesian power of L_p on the semi-axis // Mat. Stud. — 2018. — Vol. 50, Iss. 1. — P. 93–104.

19. Vasylyshyn T. V. The algebra of symmetric polynomials on $(L_\infty)^n$ // Mat. Stud. — 2019. — Vol. 52, Iss. 1. — P. 71–85.

20. Vasylyshyn T. Symmetric polynomials on the space of bounded integrable functions on the semi-axis // International Journal of Pure and Applied Mathematics — 2017. — Vol. 117, Iss. 3. — P. 425–430.

21. Vasylyshyn T. Algebras of entire symmetric functions on spaces of Lebesgue-measurable essentially bounded functions // J. Math. Sci. — 2020. — Vol. 246. — P. 264–276.

22. Vasylyshyn T. V., Zagorodnyuk A. V. Continuous symmetric 3-homogeneous polynomials on spaces of Lebesgue measurable essentially bounded functions // Methods of Functional Analysis and Topology — 2018. — Vol. 24, Iss. 4. — P. 381–398.

23. Vasylyshyn T. V., Zagorodnyuk A. V. Symmetric polynomials on the Cartesian power of the real Banach space $L_\infty[0,1]$ // Mat. Stud. — 2020. — Vol. 53, № 2. — P. 192–205.

24. Василишин Т. В. Симетричні функціонали на просторі $L_\infty[0,1]$ // IX Літня школа "Алгебра, топологія і аналіз" (Поляниця, 7–18 липня 2014 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2014. — С. 21.

25. Василишин Т. В., Загороднюк А. В. Опис спектра алгебри аналітичних симетричних функцій на просторі $L_\infty[0,1]$ // IV Міжнародна ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 30 червня – 5 липня 2014 р.): тези доп. — Чернівці, 2014. — С. 15.

26. Василишин Т. В. Базис алгебри неперервних симетричних поліномів на просторі $L_\infty[0,1]$ // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей і математичного аналізу" (Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2015 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2015. — С. 13.

27. Василишин Т. В., Загороднюк А. В. Симетричні поліноми на просто-

рах $L_\infty[0,1]$ і $L_\infty[0,+\infty)$ // Всеукраїнська наукова конференція, присвячена 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу "Прикладні задачі математики" (Івано-Франківськ, 13–15 жовтня 2016 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2016. — С. 26.

28. Василишин Т. В., Загороднюк А. В., Кравців В. В. Алгебри блочно-симетричних поліномів // Всеукраїнська наукова конференція, присвячена 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу "Прикладні задачі математики" (Івано-Франківськ, 13–15 жовтня 2016 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2016. — с. 27–28.

29. Василишин Т. В., Кравців В. В. Алгебра симетричних поліномів на просторі $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2017. — С. 56.

30. Василишин Т. В. Симетричні поліноми та симетричні аналітичні функції на просторах вимірних за Лебегом функцій // Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики" присвячена 90-річчю від дня народження академіка НАН України Я. С. Підстригача та 40-річчю створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН України (Львів, 22–25 травня 2018 р.): збірник наук. праць у 3-х т. — Львів, 2018. — Т. 3, С. 50.

31. Василишин Т. В. Базиси алгебр симетричних поліномів на деяких банахових просторах // VI Всеукраїнська математична конференція "Нелінійні проблеми аналізу" імені Б. В. Василишина (Микуличин, 26–28 вересня 2018 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2018. — С. 12.

32. Vasylyshyn T. V. Topology on the spectrum of the algebra of entire symmetric functions of bounded type on the complex L_∞ // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach (Lviv, 18–23 September 2017): book of abstracts — Lviv, 2017. — p. 31–33.

33. Vasylyshyn T. V. The spectrum of the algebra of symmetric analytic functions on L_∞ // Conference on NonLinear Functional Analysis (Valencia, Spain, 17–20 October 2017): book of abstracts — Valencia, 2017. — P. 46.

34. Vasylyshyn T. V. Symmetric analytic functions on some Banach spaces of Lebesgue measurable functions // International Scientific Conference "Banach Spaces and their Applications" dedicated to the 70th anniversary of Prof. A. M. Plichko (Lviv, Ukraine, 26–29 June 2019): book of abstracts — Lviv, 2019. — P. 122.

35. Vasylyshyn T. V. Symmetric analytic functions on Banach spaces // International Conference "Morse theory and its applications" dedicated to the memory and 70th anniversary of Volodymyr Sharko (Kyiv, Ukraine, 25–28 September 2019): book of abstracts — Kyiv, 2019. — p. 52–53.

36. Vasylyshyn T. V. Some classes of symmetric functions on Banach spaces

// XI International V. Skorobohatko Mathematical Conference (Lviv, Ukraine, 26–30 October 2020): book of abstracts — Lviv, 2020. — P. 118.

АНОТАЦІЇ

Василишин Т. В. Аналіз на спектрах алгебр аналітичних та гладких функцій на банаховому просторі. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Інститут математики НАН України, Київ, 2021.

Дисертаційну роботу присвячено вивченню спектрів (множин нетривіальних неперервних скалярнозначних гомоморфізмів) топологічних алгебр аналітичних функцій на комплексних банахових просторах і топологічних алгебр гладких функцій на дійсних банахових просторах.

Побудовано зліченні алгебраїчні базиси для алгебр неперервних симетричних скалярнозначних поліномів на комплексних банахових просторах вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку, інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі, комплексному і дійсному банахових просторах послідовностей n-вимірних векторів, для яких ряд із p-норм векторів, піднесених до степеня p, є збіжним, декартовому степені вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку.

Описано спектри алгебр Фреше цілих симетричних аналітичних функцій на комплексному банаховому просторі вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку та на декартовому степені цього простору, а також на декартових степенях інтегровних за Лебегом у степені p, де $1 \leq p < \infty$, функцій на відрізку та на півосі. Зображено дані алгебри Фреше як алгебри аналітичних функцій на їхніх спектрах.

Ключові слова: полілінійне відображення, поліном, однорідний поліном, $*$-поліном, (m, n)-поліном, аналітична функція, гладка функція, симетрична функція, скінченно-симетрична функція, топологічна алгебра, алгебра Фреше, спектр топологічної алгебри, алгебраїчний базис алгебри, функція обмеженого типу, вимірна за Лебегом суттєво обмежена функція, інтегровна за Лебегом функція, простір Лебега-Рохліна.

Vasylyshyn T. V. Analysis on spectra of algebras of analytic and smooth functions on a Banach space. — Qualifying scientific work on rights of manuscript.

The thesis for obtaining the Doctor of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.01 — mathematical analysis. — Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2021.

The thesis is devoted to the study of spectra (sets of nontrivial continuous scalar-valued homomorphisms) of topological algebras of analytic functions on comp-

lex Banach spaces and topological algebras of smooth functions on real Banach spaces.

It is constructed countable algebraic bases of algebras of continuous symmetric (invariant under the composition of its argument with any measurable automorphism of the domain of the argument) scalar-valued polynomials on the complex Banach space of all complex-valued Lebesgue measurable essentially bounded functions on a segment, on the complex Banach space of all complex-valued Lebesgue integrable essentially bounded functions on the semi-axis, on the Cartesian powers of the real and complex Banach spaces of all Lebesgue measurable essentially bounded functions on a segment. Also it is constructed finite algebraic bases of algebras of all complex-valued symmetric continuous polynomials on Cartesian powers of complex Banach spaces of all complex-valued Lebesgue integrable in a power p functions on the segment and on the semi-axis, where $1 \leq p < +\infty$.

It is described spectra of Fréchet algebras of all symmetric entire analytic functions of bounded type on these spaces with the topology of uniform convergence on bounded sets. Also it is represented these Fréchet algebras as Fréchet algebras of entire analytic functions on their spectra. In particular, it is considered the spectrum of the Fréchet algebra of all symmetric entire analytic functions of bounded type on the complex Banach space of all complex-valued Lebesgue measurable essentially bounded functions on a segment as the strong dual space $H'(\mathbb{C})_\beta$ to the Fréchet space $H(\mathbb{C})$ of all entire analytic functions of one complex variable with the topology of the uniform convergence on bounded sets. It is shown that this Fréchet algebra is isomorphic to the Fréchet algebra $H(H'(\mathbb{C})_\beta)$ of all complex-valued entire analytic functions on the space $H'(\mathbb{C})_\beta$.

It is shown that every complex-valued continuous symmetric polynomial on the complex Banach space ℓ_∞ of all bounded sequences of complex numbers is necessarily constant. Also it is shown that the Fréchet algebra of all complex-valued finitely symmetric entire analytic functions of bounded type on the space ℓ_∞ endowed with the topology of uniform convergence on bounded sets is isomorphic to the Fréchet algebra of all complex-valued entire analytic functions of bounded type on the quotient space ℓ_∞/c_0, where c_0 is the complex Banach space of all convergent to zero sequences of complex numbers. Analogical results were established for symmetric continuous polynomials and for finitely symmetric entire analytic functions of bounded type on the complex Banach space of all complex-valued Lebesgue measurable essentially bounded functions on the semi-axis.

Also it is constructed countable algebraic bases of algebras of continuous symmetric (invariant under the action of permutations on its argument) scalar-valued polynomials and $*$-polynomials on Banach spaces of sequences of n-dimensional scalar vectors such that the series of pth powers of p-norms of these vectors is convergent, where $1 \leq p < +\infty$ and $n \in \mathbb{N}$.

Key words: multilinear mapping, polynomial, homogeneous polynomial, analytic function, smooth function, $*$-polynomial, (m, n)-polynomial, symmetric function, finitely symmetric function, topological algebra, Fréchet algebra, spectrum of a topological algebra, algebraic basis of an algebra, function of a bounded type, Lebesgue measurable essentially bounded function, Lebesgue integrable function, Lebesgue-Rohlin measure space.

Підписано до друку 25.03.2021.
Формат $60 \times 84/16$. Папір офсетний. Друк цифровий.
Умовн. друк. арк. 1,74.
Наклад 100 примірників. Зам № 015/03/21

ВИДАВНИЦТВО “НАІР”
76014, м. Івано-Франківськ, вул. Височана, 18, тел. (034) 250-57-82

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виробників і розповсюджувачів видавничої продукції № 4191 від 12.11.2011 р.