

ВІДГУК

офіційного опонента доктора фізико-математичних наук, професора
Журавльова Валерія Пилиповича
на дисертаційну роботу Мисло Юлії Михайлівни
**«Асимптотично майже періодичні розв'язки рівнянь
із запізненням та імпульсною дією»**,
подану на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння, 111 – математика

Актуальність теми дослідження. Дисертаційна робота присвячена важливій і актуальній темі – дослідженню майже періодичних та періодичних систем диференціальних рівнянь із запізненням та імпульсною дією як у фіксовані, так і нефіксовані моменти часу.

Теорія майже періодичних імпульсних систем активно розвивається у різних країнах, зокрема глибокі і систематичні дослідження проведені у работах представників Київської школи нелінійної механіки. Це пов'язане з багатьма застосуваннями при моделюванні коливних процесів у системах, які зазнають короткотривалих зовнішніх впливів з певною повторюваністю.

У майже періодичних диференціальних рівняннях з імпульсною дією та запізненням проявляються властивості майже періодичних диференціальних і різницевих рівнянь, що створює складнощі, пов'язані з непродовжуваністю на від'ємну піввісь і розривністю розв'язків. У системах із нефіксованими моментами імпульсів, у яких різні розв'язки можуть мати різні точки розривів, виникають додаткові труднощі. Це потребує специфічних підходів до дослідження.

У дисертації Мисло Ю.М. для дослідження майже періодичних імпульсних систем застосовується концепція асимптотично майже періодичних функцій. Асимптотично майже періодичні функції активно застосовувалися багатьма авторами при дослідженні різних класів диференціальних рівнянь і динамічних систем. Кусково-неперервні асимптотично майже періодичні функції виявилися ефективними і при дослідженні асимптотичної поведінки імпульсних систем. З їх використанням у дисертації отримано умови існування і стійкості майже періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь із запізненням та імпульсною дією.

Результати застосовано до вивчення математичних моделей еволюції біологічних видів, які зазнають короткотривалих зовнішніх впливів. При аналізі еволюційних моделей спочатку досліджуються умови перманентності системи, яка характеризує довготривале співіснування біологічних видів.

Перманентність системи спрощує задачу відшукування майже періодичних чи періоди-

чних розв'язків, для цього досить досліджувати систему на деякій обмеженій множині фазового простору, множині перманентності.

У дисертації вивчаються кілька моделей математичної біології, які мають важливе значення, Для них встановлено умови перманентності і доведено існування додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків чи періодичних розв'язків.

Зміст дисертації. Основний зміст дисертації викладено у трьох розділах.

У *першому розділі* досліджено системи диференціальних рівнянь із запізненням та імпульсною дією у фіксовані моменти часу. Вводиться означення кусково-неперервної асимптотично майже періодичної функції як суми майже періодичної функції та функції, яка прямує до нуля на нескінченності і доводиться теорема про її характеристичні властивості, сформульовані в термінах так званої w -збіжності у просторі кусково-неперервних функцій. Далі доводяться основні теореми розділу: рівномірно асимптотично стійкі розв'язки імпульсної системи мають властивість асимптотично майже періодичності, з існування асимптотично майже періодичного розв'язку випливає існування кусково-неперервного майже періодичного розв'язку.

Використовуючи отримані результати, досліджено систему рівнянь із запізненням і імпульсною дією, яка моделює еволюцію біологічної популяції, особини якої проходять дві стадії – незрілу і зрілу. Отримано достатні умови існування додатного w -майже періодичного розв'язку, який є глобальним атрактором. Також досліджено умови перманентності системи та умови існування і стійкості додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків узагальненого рівняння Маккі – Гласса з майже періодичними коефіцієнтами та імпульсною дією.

У *другому розділі* досліджується існування кусково-неперервних асимптотично майже періодичних і майже періодичних розв'язків систем із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії. На відміну від систем з фіксованими моментами імпульсної дії для систем з нефіксованими моментами імпульсів не можна використовувати означення кусково-неперервної асимптотично майже періодичної функції як суми майже періодичної функції та функції, яка прямує до нуля на нескінченності. Означення асимптотично майже періодичності формулюється в термінах w -збіжності у просторі кусково-неперервних функцій. Використовуючи властивості асимптотично майже періодичних розв'язків, доведено теореми існування асимптотично стійкого кусково-неперервного майже періодичного розв'язку системи.

Як застосування, досліджено умови існування і стійкості додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків логістичного рівняння із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії.

У *третьому розділі* отримано умови перманентності періодичної системи, яка описує еволюцію біологічної моделі хижак-жертва з віковою структурою жертви, імпульсною дією й функцією впливу у вигляді Беддінгтона – Деанжеліса. Також досліджено систему

рівнянь із запізненням та імпульсною дією, яка моделює динаміку двох конкуруючих видів із віковою структурою. Отримано умови перманентності та існування додатних асимптотично стійких періодичних розв'язків такої системи.

Відмітимо наступні наукові результати дисертації:

- вивчено властивості кусково-неперервних асимптотично майже періодичних функцій з наперед заданою послідовністю точок розривів. Знайдено умови існування кусково-неперервних асимптотично майже періодичних і майже періодичних розв'язків систем із запізненням та фіксованими моментами імпульсних впливів,

- знайдено умови існування кусково-неперервних асимптотично майже періодичних і майже періодичних розв'язків систем із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії,

- досліджено моделі математичної біології: імпульсне рівняння Маккі – Гласса, модель біологічної популяції з віковою структурою та імпульсною дією, імпульсне логістичне рівняння з нефіксованими моментами імпульсної дії, періодичну систему хижак–жертва з віковою структурою жертви та імпульсною дією, систему рівнянь із запізненням, яка моделює динаміку двох конкуруючих видів із віковою структурою. Отримано умови перманентності, а також умови існування і стійкості додатних майже періодичних чи періодичних розв'язків.

Зауваження та побажання.

- на сторінках 38–39 і 43 w -майже періодичні функції $\omega(t)$, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ означаються відповідними формулами при $t > 0$. Варто пояснити, як ці функції означаються при $t \leq 0$,

- на стор. 31 вводиться означення w -асимптотично майже періодичних функцій. Далі для цих же функцій використовується також термін асимптотично w -майже періодичні функції (наприклад, в теоремі 2.8). Потрібно уникати такого різночитання,

- на стор. 33 бажано не тільки вказати "аналогічно до роботи Фінка [61] можна показати, що $\xi - p^* \rightarrow 0$ ", а і привести відповідні оцінки з урахуванням специфіки імпульсних впливів.

Вказані зауваження не впливають на загальну позитивну оцінку дисертаційної роботи.

Висновки.

Дисертаційне дослідження Мисло Ю. М. є завершеною науковою роботою з теорії диференціальних рівнянь. Предмет, мета й завдання дослідження логічно пов'язані між собою. Усі результати, винесені на захист, є новими та достовірними. Вони чітко сформульовані та строго доведені.

Результати дисертації опубліковано в 6 наукових працях, серед яких 5 статей у журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз даних, та 8 тез доповідей.

Дисертаційну роботу написано грамотною мовою, а оформлення рукопису відповідає чинним вимогам. Автореферат відповідає змісту дисертації й відображає її основні положення.

Вважаю, що дисертаційна робота Мисло Юлії Михайлівни «Асимптотично майже періодичні розв'язки рівнянь із запізненням та імпульсною дією» за актуальністю й одержаними науковими результатами відповідає сучасному рівню розвитку математики та задовольняє всі вимоги до кандидатських дисертацій із математики, зокрема, пп. 9, 11–14 чинного «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого постановою Кабінету міністрів України № 567 від 24 липня 2013 року зі змінами, внесеними згідно з постановами Кабінету міністрів № 656 від 19 серпня 2015 року, № 1159 від 30 грудня 2015 року, № 567 від 27 липня 2016 року, № 943 від 20 листопада 2019 року, щодо дисертаційних робіт на здобуття наукового ступеня кандидата наук, а її автор, Мисло Юлія Михайлівна, заслуговує присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння.

Офіційний опонент

доктор фізико-математичних наук, професор
завідувач кафедри вищої
та прикладної математики
Поліського національного університету

В. П. Журавльов

