Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

МИСЛО Юлія Михайлівна

УДК 517.9

Асимптотично майже періодичні розв'язки рівнянь із запізненням та імпульсною дією

01.01.02 — диференціальні рівняння
111 — математика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.
___________ Ю. М. Мисло

Науковий керівник
доктор фізико-математичних наук, професор
Ткаченко Віктор Іванович

Київ — 2021

АНОТАЦІЯ

Мисло Ю. М. Асимптотично майже періодичні розв'язки рівнянь із запізненням та імпульсною дією. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — «Диференціальні рівняння» (111 — Математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2021.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню існування та стійкості кусково-неперервних асимптотично майже періодичних, майже періодичних та періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь із запізненням та імпульсною дією як у фіксовані, так і нефіксовані моменти часу.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання й методи дослідження, зазначено наукову новизну отриманих результатів, їхнє практичне значення, зв'язок роботи з науковими темами й особистий внесок здобувача, наведено перелік публікацій за темою дисертації.

У розділі 1 розглянуто систему рівнянь із запізненням та імпульсною дією у фіксовані моменти часу вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-h)),\ t \neq t_k,$$

$$x(t_k + 0) = x(t_k) + I_k(x(t_k)),\ k \in \mathbb{Z},$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $h = \text{const} > 0$. Послідовність дійсних чисел t_k, $k \in \mathbb{Z}$, рівномірно відділених одне від іншого, має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, функція $f(t, x, y)$ є w-майже періодичною по t й ліпшицевою по x і y рівномірно відносно x, y із компактних множин, множиною розривів функції f є послідовність $\{t_k\}$, послідовність $\{I_k(x)\}$

майже періодична рівномірно відносно x із компактних множин, функції $I_k(x)$ ліпшицеві по x.

Доведено теореми існування й асимптотичної стійкості кусково-неперервних майже періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із запізненням та фіксованими моментами імпульсів. Для доведення використовуємо властивості кусково-неперервних асимптотично майже періодичних розв'язків. Отримано умови існування рівномірно асимптотично стійкого асимптотично w-майже періодичного розв'язку, з чого випливає існування асимптотично стійкого w-майже періодичного розв'язку.

Використовуючи отримані результати, досліджено існування і стійкість майже періодичних розв'язків моделі біологічної популяції з імпульсною дією та віковою структурою, яка проходить дві стадії — незрілу і зрілу:

$$\dot{x}_i(t) = \alpha(t)x_m(t) - \gamma(t)x_i(t) - \alpha(t-h)e^{-\int_{t-h}^{t}\gamma(s)ds}x_m(t-h),$$

$$\dot{x}_m(t) = \alpha(t-h)e^{-\int_{t-h}^{t}\gamma(s)ds}x_m(t-h) - \beta(t)x_m^2(t)$$

для $t \neq t_k$ та імпульсним впливом

$$x_m(t_k+0) = (1+d_k)x_m(t_k)$$

в момент часу t_k, $k \in \mathbb{Z}$. Послідовність $\{t_k\}$ моментів імпульсного впливу має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, послідовність $\{d_k\}$ майже періодична, $d_k \in (-1, d]$, $d > 0$, функції $\alpha(t)$, $\beta(t)$ і $\gamma(t)$ кусково-неперервні, додатні й w-майже періодичні. Точками розривів цих функцій є t_k, $k \in \mathbb{Z}$.

Тут $x_i(t)$ і $x_m(t)$ — це щільності (тобто кількість особин, що припадає на одиницю площі) відповідно незрілих і зрілих особин біологічної популяції в момент часу t. Народжуваність незрілої популяції в час $t > 0$ пропорційна до існуючої зрілої популяції з показником народжуваності $\alpha(t)$, функція $\gamma(t)$ є показником смертності незрілих, $\beta(t)$ — показник смертності й перенаселення зрілих, h — час дозрівання. Умова $\alpha(t-h)e^{\int_{t-h}^{t}\gamma(s)ds}x_m(t-h)$ визначає перехід від незрілих до зрілих.

Отримано достатні умови існування додатного w-майже періодичного розв'язку, який є глобальним атрактором.

Також досліджено рівняння типу Маккі – Гласса з майже періодичними коефіцієнтами та імпульсною дією вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha(t)x(t) + \frac{\beta(t)x(t-h)}{1+\gamma(t)x^p(t-h)},$$

$$x(t_k+0) - x(t_k) = a_k x(t_k) + b_k,$$

де $x \geq 0$, p і h — додатні сталі, кусково-неперервні функції $\alpha(t), \beta(t)$ та $\gamma(t)$ додатнозначні та w-майже періодичні, послідовності $\{a_k\}$ та $\{b_k\}$ майже періодичні й $a_k > -1$, $b_k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, послідовність $\{t_k\}$ точок імпульсної дії має рівномірно майже періодичні послідовності різниць.

Отримано умови перманентності та існування кусково-неперервного додатного майже періодичного розв'язку рівняння типу Маккі – Гласса з майже періодичними коефіцієнтами та імпульсною дією. Спочатку доведено існування додатнозначного асимптотично w-майже періодичного розв'язку, з чого випливає існування додатнозначного асимптотично стійкого w-майже періодичного розв'язку.

В розділі 2 розглянуто систему диференціальних рівнянь із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії вигляду

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \quad t \neq \tau_k(x(t)),$$

$$x(t+0) = x(t) + I_k(x(t)), \quad t = \tau_k(x(t)), \quad k \in \mathbb{Z},$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$. Імпульсна дія відбувається при досягненні розв'язками поверхонь

$$\Gamma_k = \{(t,x): \ t = \tau_k(x)\}, \ k \in \mathbb{Z},$$

які рівномірно відділені одна від іншої.

У системах рівнянь із нефіксованими моментами імпульсної дії розв'язки, які мають різні початкові значення, можуть мати різні точки розривів. Це вимагає іншого підходу при дослідженні асимптотично майже періодичних розв'язків. Ця відмінність точок розриву різних розв'язків системи враховується також і при визначенні стійкості та асимптотичної стійкості розв'язків.

У таких системах може з'являтися так званий феномен биття, тобто розв'язок може перетинати поверхню $t = \tau_k(x)$ кілька чи навіть нескінченну кількість разів.

Використовуючи властивості асимптотично майже періодичних розв'язків, доведено теореми існування асимптотично стійкого кусково-неперервного майже періодичного розв'язку системи диференціальних рівнянь із запізненням і нефіксованими моментами імпульсів.

Розглянуто також майже періодичне логістичне рівняння з запізненням та імпульсною дією

$$\dot{x}(t) = x(t)\left(a(t) - b(t)x(t) - c(t)x(t-h)\right), \quad t \neq \tau_k(x(t)),$$

$$x(t+0) = (1+d_k)x(t) + q_k, \quad t = \tau_k(x(t)), \quad k \in \mathbb{Z},$$

де $x \in \mathbb{R},\ h > 0$. Імпульсна дія відбувається, коли розв'язки досягають ліній $\Gamma_k = \{(t,x):\ t = \tau_k(x)\},\ k \in \mathbb{Z}$, які рівномірно відділені одна від іншої.

Рівняння описує еволюцію біологічного виду з короткостроковими зовнішніми впливами, які моделюються відповідними імпульсними співвідношеннями. Виходячи з біологічної інтерпретації, розглянуто розв'язки, які набувають невід'ємних значень.

Доведено існування додатнозначного асимптотично w-майже періодичного розв'язку рівняння, з чого випливає існування додатнозначного асимптотично стійкого w-майже періодичного розв'язку.

В розділі 3 розглянуто систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x}_1 = a_1(t)x_2 - b_1(t)x_1 - c_1(t)x_1^2 - \frac{h_1(t)x_1y}{k_1(t) + m_1(t)x_1 + n_1(t)y},$$

$$\dot{x}_2 = a_2(t)x_1 - b_2(t)x_2 - c_2(t)x_2^2 - \frac{h_2(t)x_2y}{k_2(t)+m_2(t)x_2+n_2(t)y},$$

$$\dot{y} = y\left(-q(t) - g(t)y(t) + \frac{h_3(t)x_1}{k_1(t)+m_1(t)x_1+n_1(t)y} + \right.$$

$$\left. + \frac{h_4(t)x_2}{k_2(t)+m_2(t)x_2+n_2(t)y}\right)$$

при $t \neq t_k$ та з імпульсною дією

$$x_1(t_k+0) = (1+d_{1k})x_1(t_k),$$

$$x_2(t_k+0) = (1+d_{2k})x_2(t_k),$$

$$y(t_k+0) = (1+d_{3k})y(t_k),$$

у моменти часу t_k, $k \in \mathbb{Z}$.

Функції $a_j(t)$, $b_j(t)$, $c_j(t)$, $k_j(t)$, $m_j(t)$, $n_j(t)$, $q(t)$, $g(t)$, $j = 1,2$, $h_k(t)$, $k = 1,...,4$, кусково-неперервні, T-періодичні та додатнозначні, послідовність точок імпульсної дії $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ задовольняє умову періодичності $t_{k+p} - t_k = T$, $k \in \mathbb{Z}$, з деяким натуральним числом p, $d_{j,k+p} = d_{jk}$, $d_{jk} \in (-1, d]$ для всіх $j = 1,2,3$, $k \in \mathbb{Z}$. Вважаємо, що розв'язки системи неперервні зліва.

Система рівнянь описує еволюцію біологічної системи хижак-жертва з віковою структурою жертви. Тут через $y(t)$ позначено щільність популяції хижаків (тобто кількість особин, що припадає на одиницю площі) в момент часу t.

Популяція жертв складається з незрілих особин зі щільністю $x_1(t)$ та зрілих зі щільністю $x_2(t)$. Періодичні функції в системі мають наступне біологічне значення. Народжуваність у популяції незрілих жертв задається $a_1(t)x_2$, тобто приймається пропорційною до існуючої популяції зрілих жертв із коефіцієнтом пропорційності $a_1(t)$. Інтенсивність переходів від незрілих до зрілих індивідів припускається пропорційною до існуючої популяції незрілих жертв із коефіцієнтом пропорційності $a_2(t)$.

Показники смертності незрілої та зрілої популяцій задаються виразами $b_1(t)x_1 + c_1(t)x_1^2$ і $b_2(t)x_2 + c_2(t)x_2^2$ відповідно.

Отримано умови перманентності періодичної системи, яка описує еволюцію біологічної моделі хижак-жертва з віковою структурою жертви, імпульсною дією й функцією впливу у вигляді Беддінгтона–Деанжеліса.

Також розглянуто систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x}_1(t) = a_1(t)x_2(t) - a_1(t-h_1)e^{-\int_{t-h_1}^{t} d_1(s)ds}x_2(t-h_1) - \\ - d_1(t)x_1(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = a_1(t-h_1)e^{-\int_{t-h_1}^{t} d_1(s)ds}x_2(t-h_1) - b_{11}(t)x_2(t) - \\ - b_{12}(t)x_2^2(t) - c_1(t)x_2(t)y_2(t),$$

$$\dot{y}_1(t) = a_2(t)y_2(t) - a_2(t-h_2)e^{-\int_{t-h_2}^{t} d_2(s)ds}y_2(t-h_2) - \\ - d_2(t)y_1(t),$$

$$\dot{y}_2(t) = a_2(t-h_2)e^{-\int_{t-h_2}^{t} d_2(s)ds}y_2(t-h_2) - b_{21}(t)x_2(t) - \\ - b_{22}(t)y_2^2(t) - c_2(t)x_2(t)y_2(t)$$

при $t \neq t_k$ з імпульсною дією

$$x_2(t_k+0) = (1+d_k)x_2(t_k), \quad y_2(t_k+0) = (1+g_k)y_2(t_k),$$

у моменти часу t_k, $k \in \mathbb{Z}$.

Функції $a_i(t)$, $d_i(t)$, $b_{ij}(t)$, $c_i(t)$, $i,j = 1,2$, кусково-неперервні, T-періодичні та додатнозначні, h_1 і h_2 — додатні сталі, послідовність точок імпульсної дії $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ строго зростає й задовольняє умову періодичності $t_{k+p} - t_k = T$, $k \in \mathbb{Z}$, з деяким натуральним числом p, $d_{k+p} = d_k$, $d_k \in (-1,d]$, $g_{k+p} = g_k$, $g_k \in (-1,d]$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$, $d > 0$.

Система рівнянь описує еволюцію двох конкуруючих біологічних видів із віковою структурою та імпульсною дією. Тут через $x_1(t)$ і $x_2(t)$ позначено щільність незрілих та зрілих особин першого виду, через $y_1(t)$ і $y_2(t)$ — щільність незрілих та зрілих особин другого виду в момент часу t. Виходячи з біологічної інтерпретації, розглянуто розв'язки системи, які набувають невід'ємних значень.

Отримано умови перманентності та існування додатних асимптотично стійких періодичних розв'язків системи рівнянь із запізненням та імпульсною дією, яка моделює динаміку двох конкуруючих видів із віковою структурою.

Отже, в роботі отримано нові наукові результати:

- знайдено умови існування кусково-неперервних асимптотично майже періодичних та майже періодичних розв'язків систем із запізненням та фіксованими моментами імпульсних впливів. Отримані результати застосовано для знаходження умов існування і стійкості додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків імпульсного рівняння Маккі – Гласса й моделі біологічної популяції з віковою структурою та імпульсною дією;
- знайдено умови існування кусково-неперервних асимптотично майже періодичних та майже періодичних розв'язків систем із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії;
- знайдено умови існування і стійкості додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків імпульсного логістичного рівняння з запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії;
- отримано умови перманентності періодичної системи «хижак–жертва» з віковою структурою жертви та імпульсною дією, а також умови перманентності й існування додатних асимптотично стійких періодичних розв'язків імпульсної системи рівнянь із запізненням, яка моделює динаміку двох конкуруючих видів із віковою структурою.

Практичне значення одержаних результатів.

Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати й методика їхнього отримання можуть бути використані для дослідження асимптотично майже періодичних та майже періодичних розв'язків системи рівнянь із запізненням та імпульсної дією й отримання умов існування, єдиності та стійкості кусково-неперервних майже періодичних та періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсним впливом. Також ці результати можуть бути застосовані для вивчення задач математичної біології та розвивають відповідні їм математичні методи, які представляються відповідними математичними моделями.

Ключові слова: стійкість, майже періодичність, система із запізненням, імпульсний вплив, асимптотично майже періодичні розв'язки, перманентність.

ABSTRACT

Myslo Y. M. Asymptotically almost periodic solutions of differential equations with delay and impulses. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of a Candidate of Physical and Mathematical Sciences (Doctor of Philosophy) in specialty 01.01.02 “Differential equations” (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2021.

The thesis is devoted to the study of the existence and stability of piecewise continuous asymptotically almost periodic, almost periodic and periodic solutions for systems of differential equations with delay and impulse action in both fixed and non-fixed moments of time.

The introduction substantiates the relevance of the research topic, formulates the purpose, object, subject, tasks and methods of the research, outlines the scientific novelty of the results obtained, their practical significance, the connection of the work with scientific projects and the personal contribution of the applicant, lists the publications on the thesis topic.

In Chapter 1 we consider the system with delay and impulsive action

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-h)), \quad t \neq t_k,$$

$$x(t_k + 0) = x(t_k) + I_k(x(t_k)), \quad k \in \mathbb{Z},$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, $h = \text{const} > 0$. The sequence of real numbers t_k, $k \in \mathbb{Z}$, has uniformly almost periodic sequences of differences, the function $f(t, x, y)$ is almost periodic in t and Lipschitz in x and y uniformly for x, y from compact sets, the set of discontinuities of f is sequence $\{t_k\}$, the sequence $\{I_k(x)\}$ is almost periodic uniformly with respect to x from compact sets, functions $I_k(x)$ are Lipschitz in x.

The theorem of the existence of piecewise continuous almost periodic solutions for differential equations with delay and impulses is proved. For the proof we use the properties of asymptotically almost periodic solutions.

This result is used to study almost periodic solutions for the system of differential equations with impulsive action, which describes the behaviour of biological species with two stages, immature and mature

$$\dot{x}_i(t) = \alpha(t)x_m(t) - \gamma(t)x_i(t) - \alpha(t-h)e^{-\int_{t-h}^{t}\gamma(s)ds}x_m(t-h),$$

$$\dot{x}_m(t) = \alpha(t-h)e^{-\int_{t-h}^{t}\gamma(s)ds}x_m(t-h) - \beta(t)x_m^2(t),$$

for $t \neq t_k$ and impulsive action

$$x_m(t_k+0) = (1+d_k)x_m(t_k),$$

at moments t_k, $k \in \mathbb{Z}$. The sequence $\{t_k\}$ of moments of impulsive action has uniformly almost periodic sequences of differences, the sequence $\{d_k\}$ is almost periodic, $d_k \in (-1, d]$, $d > 0$, functions $\alpha(t)$, $\beta(t)$ and $\gamma(t)$ is piecewise continuous positive and w-almost periodic. For the sake of simplicity, we assume that points discontinuities of functions $\alpha(t)$, $\beta(t)$ and $\gamma(t)$ are t_k, $k \in \mathbb{Z}$.

Here, $x_i(t)$ and $x_m(t)$ denote the density of immature and mature populations respectively. The birth of immature population at time $t > 0$ is proportional to the existing mature population with birth rate $\alpha(t)$, $\gamma(t)$ is the immature death rate, $\beta(t)$ is the mature death and overcrowding rate, h in the time to maturity. The term $\alpha(t-h)e^{\int_{t-h}^{t}\gamma(s)ds}x_m(t-h)$ represents the transformation of immatures to matures.

Sufficient conditions for the existence and global attractivity of positive piecewise continuous almost periodic solution are obtained.

Also, we consider an equation of the Mackey – Glass type with almost periodic coefficients and pulse action

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha(t)x(t) + \frac{\beta(t)x(t-h)}{1+\gamma(t)x^p(t-h)},$$

$$x(t_k + 0) - x(t_k) = a_k x(t_k) + b_k,$$

where $x \geq 0$, p and h are positive constants, the piecewise-continuous functions $\alpha(t)$, $\beta(t)$ and $\gamma(t)$ are positive definite and almost periodic, the sequences $\{a_k\}$ and $\{b_k\}$ are almost periodic, $a_k > -1$, $b_k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, and the sequence $\{t_k\}$ of points of pulse action has uniformly almost periodic sequences of differences.

We obtain conditions for the permanence and the existence of a positive, asymptotically stable, piecewise continuous almost periodic solution of the Mackey – Glass equation with almost periodic coefficients and pulse action. We prove the existence of a positive piecewise continuous asymptotically almost periodic solution, which implies the existence of a positive piecewise continuous asymptotically stable almost periodic solution.

In Chapter 2 we consider a system of differential equations with delay and nonfixed times of pulse action

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \quad t \neq \tau_k(x(t)),$$

$$x(t+0) = x(t) + I_k(x(t)), \quad t = \tau_k(x(t)), \quad k \in \mathbb{Z},$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$. The pulse actions occur at times when the solutions reach the surfaces $\Gamma_k = \{(t, x) : \ t = \tau_k(x)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, uniformly separated from each other.

In the systems of equations with nonfixed times of pulse action, the solutions corresponding to different initial values also have different points of discontinuity. This requires the use of another approach to the investigation of asymptotically almost periodic solutions. The presence of different points of discontinuity for different solutions of the system with nonfixed times of pulse action is also taken into account in the analysis of the stability of solutions. Systems of this kind may also be characterized by the so-called phenomenon of beating, i.e., the solutions may intersect the surface $t = \tau_k(x)$ several times or even infinitely many times.

We proof theorems on the existence of an asymptotically stable piecewise continuous almost periodic solution of the system of differential equations with delay and nonfixed times of pulse action using the properties of asymptotically almost periodic solutions.

These results are applied to study the almost periodic logistic equation with delay and impulse action

$$\dot{x}(t) = x(t)\left(a(t) - b(t)x(t) - c(t)x(t-h)\right), \quad t \neq \tau_k(x(t)),$$

$$x(t+0) = (1+d_k)x(t) + q_k, \quad t = \tau_k(x(t)),\ k \in \mathbb{Z},$$

where $x \in \mathbb{R},\ h > 0$. The pulse actions occur at times when the solutions reach the surfaces $\Gamma_k = \{(t,x) :\ t = \tau_k(x)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, uniformly separated from each other.

The equation describes the evolution of a species with short-term external influences, which are modeled by the corresponding impulse ratios.

Using properties of piecewise continuous asymptotically almost periodic functions, we establish conditions for the existence of a positive uniformly separated from zero asymptotically stable piecewise continuous almost periodic solution of the equation.

In Chapter 3, we obtain conditions for permanence of a periodic predator-prey system with a stage structure for the prey, an impulsive effect, and a Beddington – DeAngelis functional response

$$\dot{x}_1 = a_1(t)x_2 - b_1(t)x_1 - c_1(t)x_1^2 - \frac{h_1(t)x_1y}{k_1(t)+m_1(t)x_1+n_1(t)y},$$

$$\dot{x}_2 = a_2(t)x_1 - b_2(t)x_2 - c_2(t)x_2^2 - \frac{h_2(t)x_2y}{k_2(t)+m_2(t)x_2+n_2(t)y},$$

$$\dot{y} = y\left(-q(t) - g(t)y(t) + \frac{h_3(t)x_1}{k_1(t)+m_1(t)x_1+n_1(t)y} + \right.$$

$$\left. + \frac{h_4(t)x_2}{k_2(t)+m_2(t)x_2+n_2(t)y}\right)$$

by $t \neq t_k$ and impulsive action

$$x_1(t_k+0) \;=\; (1+d_{1k})x_1(t_k),$$

$$x_2(t_k+0) = (1+d_{2k})x_2(t_k),$$

$$y(t_k+0) = (1+d_{3k})y(t_k),$$

at $t_k,\ k\in\mathbb{Z}$. Functions $a_j(t)$,$b_j(t)$, $c_j(t)$, $k_j(t)$, $m_j(t)$, $n_j(t)$, $q(t)$, $g(t)$, $j=1,2,\ h_k(t),\ k=1,...,4$, are piecewise continuous T-periodic and positive definite, the sequence of points of pulse action $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ satisfies the periodicity condition $t_{k+p}-t_k=T$, $k\in\mathbb{Z}$, with a certain natural number p, $d_{j,k+p}=d_{jk}$, $d_{jk}\in(-1,d]$, for all $j=1,2,3,\ k\in\mathbb{Z}$.

The system describes the evolution of the predator-prey biological system with stage structure of the prey. Here, $y(t)$ denotes the population density of predators (i.e., the number of individuals per unit area) at time t. The population of prey consists of immature individuals with a density of $x_1(t)$ and mature individuals with a density of $x_2(t)$.

It is proved that by positive uniformly separated from zero functions $c_1(t)$, $c_2(t)$ and $g(t)$ all positive-valued solutions are uniformly finally bounded. Conditions are found when all positive-valued solutions are uniformly separated from zero.

Also, we consider the system of differential equations

$$\dot{x}_1(t) = a_1(t)x_2(t) - a_1(t-h_1)e^{-\int_{t-h_1}^{t} d_1(s)ds}x_2(t-h_1) - d_1(t)x_1(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = a_1(t-h_1)e^{-\int_{t-h_1}^{t} d_1(s)ds}x_2(t-h_1) - b_{11}(t)x_2(t) - \\ -b_{12}(t)x_2^2(t) - c_1(t)x_2(t)y_2(t),$$

$$\dot{y}_1(t) = a_2(t)y_2(t) - a_2(t-h_2)e^{-\int_{t-h_2}^{t} d_2(s)ds}y_2(t-h_2) - d_2(t)y_1(t),$$

$$\dot{y}_2(t) = a_2(t-h_2)e^{-\int_{t-h_2}^{t} d_2(s)ds}y_2(t-h_2) - b_{21}(t)x_2(t) - \\ -b_{22}(t)y_2^2(t) - c_2(t)x_2(t)y_2(t)$$

for $t\neq t_k$ with pulse action

$$x_2(t_k+0) = (1+d_k)x_2(t_k), \quad y_2(t_k+0) = (1+g_k)y_2(t_k),$$

at times t_k, $k\in Z$.

The functions $a_i(t)$, $d_i(t)$, $b_{ij}(t)$, $c_i(t)$, $i, j = 1, 2$, are piecewise continuous, T-periodic, and positive definite, h_1 and h_2 are positive constants, the sequence of points of pulse action $\{t_k\}_{k \in Z}$ is strictly increasing and satisfies the periodicity condition $t_{k+p} - t_k = T$, $k \in Z$ with a certain natural number p, $d_{k+p} = d_k$, $d_k \in (-1, d]$, $g_{k+p} = g_k$, $g_k \in (-1, d]$ for all $p = 1, 2$, $k \in Z$, $d > 0$.

The system describes the evolution of two competitive biological species with stage structure and pulse action. Here, $x_1(t)$ and $x_2(t)$ are the densities of immature and mature individuals of the first species, and $y_1(t)$ and $y_2(t)$ are the densities of immature and mature individuals of the second species at time t. We obtain sufficient conditions for the permanence and existence of positive asymptotically stable periodic solution of the system.

Consequently, the work contains the following new scientific results:

- We found the conditions for the existence of piecewise continuous asymptotically almost periodic and almost periodic solutions of systems with delay and fixed moments of impulse influences. The obtained results were applied to find conditions of the existence and stability of positive piecewise continuous almost periodic solutions of the Mackey – Glass impulse equation and model of biological population with age structure and impulse action.

- We found the conditions for the existence of piecewise continuous asymptotically almost periodic and almost periodic solutions of systems with delays and unfixed moments of impulse action.

- Conditions are obtained for the existence and stability of positive piecewise continuous almost periodic solutions of the pulse logistic equation with delay and with non-fixed moments of impulse action.

- We established conditions for the permanence of the predator-prey system with age structure and impulse action as well as conditions for the permanence and the existence of positive asymptotically stable periodic solutions of a system of delayed equations that simulates the dynamics of two competing species with age structure and impulse action.

The practical value of the results obtained.

The thesis is theoretical. The obtained results and the method of their obtaining can be used to study the asymptotic almost periodic and almost periodic solutions of a system of equations with delay and impulse action and obtaining the conditions of existence, unity and stability of piecewise continuous almost periodic and periodic solutions of differential equations with impulse action.

Also, these results can be used to study the problems of mathematical biology and development of corresponding mathematical methods, which are represented by appropriate mathematical models.

Key words: stability, almost periodicity, system with delay, impulsive action, asymptotically almost periodic solutions, permanence.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті в наукових фахових виданнях

1. *Мисло Ю. М., Ткаченко В. І.* Про перманентність періодичних систем хижак–жертва з віковою структурою та імпульсною дією // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 4. — С. 527–540.

   (English translation: *Myslo Y. M., Tkachenko V. I.* On the permanence of periodic predator–prey systems with stage structure and pulse action // Nonlinear Oscillations. — 2009. — **12**, № 4. — P. 543–558. DOI: 10.1007/s11072-010-0093-1, Scopus, Web of Science.)

2. *Мисло Ю. М., Ткаченко В. І.* Перманентність та періодичні розв'язки в моделях із віковою структурою, запізненням та імпульсною дією // Нелінійні коливання. — 2010. — **13**, № 4. — С. 546–555.

   (English translation: *Myslo Y. M., Tkachenko V. I.* Permanence and periodic solutions in models with stage structure, delay and pulse action // Nonlinear Oscillations. — 2011. — **13**, № 4. — P. 584–594. DOI: 10.1007/s11072-011-0133-5, Scopus, Web of Science.)

3. *Myslo Yu. M., Tkachenko V. I.* Global attractivity in almost periodic single species models // Funct. Different. Equat. — 2011. — 18, № 3–4. — P. 269–278.

4. *Мисло Ю. М., Ткаченко В. І.* Майже періодичні розв'язки рівнянь Маккі – Гласса з імпульсною дією // Нелінійні коливання. — 2011. — **14**, № 4. — С. 507–515.

   (English translation: *Myslo Y. M., Tkachenko V. I.* Almost periodic solutions of Mackey – Glass equations with pulse action // Nonlinear Oscillations. — 2012. — **14**, № 4. — P. 537–546. DOI: 10.1007/s11072-012-0175-3, Scopus.)

5. *Мисло Ю. М., Ткаченко В. І.* Асимптотично майже періодичні розв'язки рівнянь із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії // Нелінійні коливання. — 2016. — **19**, № 4. — С. 533–546.

   (English translation: *Myslo Yu. M., Tkachenko V. I.* Asymptotically almost periodic solutions of equations with delays and nonfixed times of pulse action // Journal of Mathematical Sciences (United States). — 2018. — **228**, № 3. — P. 290–305. DOI: 10.1007/s10958-017-3621-z, Scopus.)

6. *Мисло Ю. М., Ткаченко В. І.* Майже періодичне логістичне рівняння із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії // Нелінійні коливання. — 2019. — **22**, № 4. — С. 497–509.

   (English translation: *Myslo Yu. M., Tkachenko V. I.* Almost Periodic Logistic Equation with Delay and Nonfixed Times of Impulsive Action // Journal of Mathematical Sciences (United States). — 2021. — **254**, № 2. — P. 246–260. DOI: 10.1007/s10958-021-05301-w, Scopus.)

Тези конференцій

1. *Мисло Ю. М.* Перманентність та періодичні розв'зки в моделі з віковою структурою, запізненням та імпульсною дією. Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька. 19–23 вересня 2011 р., Дрогобич, Україна: тези доповідей. — Львів, 2011. — С. 136.
2. *Myslo Y. M., Tkachenko V. I.* On almost periodic solutions of impulsive systems with delay. Международная конференция "Актуальные проблемы современной матиматики, информатики и механики – II", посвященная 100-летию академика АН КазССР О. А. Жаутыкова, 100-летию члена-корреспондента АН КазССР Е. И. Кима и 75-летию академика НАН РК У. М. Султангазина. Алматы 28–30 сентября 2011 г.: тезисы докладов. — Алматы, 2011. — С. 88.

3. *Мисло Ю. М.* Про майже періодичні розв'язки імпльсної системи із запізненням. Міжнародна конференція молодих математиків (Україна, Київ, 3–6 червня 2015 р.): тези доповідей. — Київ, 2015. — С. 158.

4. *Myslo Y. M., Tkachenko V. I.* Existence and attractivity poperties of piecewise continuous almost periodic solutions of system with delay and impulsive action. 5th International conference for young scientists on differentional equations and applications deducated to Yaroslav Lopatynsky. 9–11 November, 2016, Kyiv, Ukraine: book of abstracts. — Vinnytsia, 2016. — P. 104.

5. *Мисло Ю. М.* Імпульсна система диференціальних рівнянь із запізненням. Міжнародна наукова конференція "Методика викладання та методи дослідження в математиці" / Матеріали міжнародної наукової математичної конференції у м. Берегове, 21–23 квітня 2016 р. — С. 74.

6. *Мисло Ю. М.* Дослідження розв'язків системи диференціальних рівнянь з імпульсним впливом та запізненням. Диференціальні рівняння та їх застосування: тези доповідей Міжнародної наукової конференції, присвяченої 70-річчю академіка НАН України М. О. Перестюка, Ужгород, 19–21 травня 2016 р. — Ужгород: Вид-во УжНУ "Говерла", 2016 р. — С. 101.

7. *Мисло Ю. М., Ткаченко В. І.* Про асимптотично майже періодичні розв'язки рівнянь із запізненням. Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007). 28 травня – 3 червня 2017 року, Слов'янськ, Україна. Тези доповідей. — Слов'янськ, 2017. — С. 73.

8. *Мисло Ю. М., Ткаченко В. І.* Асимптотично майже періодичні розв'язки рівнянь з імпульсним впливом та запізненням. Міжна-

родна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917–2008) (Україна, Київ, 7–10 червня 2017 р.): тези доповідей. — Київ, 2017. — С. 94.

ЗМІСТ

Вступ

Актуальність теми.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню існування і стійкості кусково-неперервних асимптотично майже періодичних, майже періодичних та періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь із запізненням та імпульсною дією як у фіксовані, так і нефіксовані моменти часу.

У зв'язку з дослідженнями коливних процесів у системах із короткотривалими ударними зовнішніми впливами останнім часом активно розвивається теорія майже періодичних імпульсних систем. Відмітимо роботи М. У. Ахмета, Д. Векслера, М. О. Перестюка, М. Пінто, А. М. Самойленка, В. Ю. Слюсарчука, Г. Т. Стамова, В. І. Ткаченка, С. І. Трофимчука. Дослідження таких систем має важливе практичне значення в математичній біології, екології, зокрема при моделюванні еволюції біологічних видів, які зазнають короткотривалих зовнішніх впливів. Розривність і непродовжуваність на від'ємну піввісь розв'язків імпульсних систем із запізненням потребує специфічних підходів до дослідження. Додаткові труднощі виникають у системах із нефіксованими моментами імпульсної дії, в яких різні розв'язки можуть мати різні точки розривів.

Асимптотично майже періодичні функції при дослідженні різних класів диференціальних рівнянь і динамічних систем активно застосовували багато авторів, зокрема М. Фреше, Д. Селл, А. М. Фінк, Т. Йошізава, Д. Чебан. Кусково-неперервні асимптотично майже періодичні функції виявилися ефективними при вивчені асимптотичної поведінки імпульсних систем.

Важливою проблемою математичної біології є моделювання еволюції біологічних видів і відшукання умов, які забезпечують довготривале співіснування співтовариства видів. Однією з характеристик такого довготривалого співіснування є перманентність системи (коли у відкритому додатному конусі фазового простору системи існує компактна множина K, така, що кожен розв'язок із додатними початковими значеннями через деякий час входить і залишається в K). Дослідженню перманентності, а також існуванню і стійкості періодичних розв'язків різних типів систем присвячено роботи К. Гопалсамі, В. Гутсона, Х. Сміта, К. Шмітта. Перманентність системи спрощує задачу відшукання майже періодичних чи періодичних розв'язків, для цього досить досліджувати систему на множині K.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України згідно з темами «Аналітичні та якісні методи теорії нелінійних диференціальних рівнянь» (номер держреєстрації 0105U007978), «Якісний та асимптотичний аналіз систем диференціальних, функціонально-диференціальних та імпульсних рівнянь» (номер держреєстрації 0111U002035), «Конструктивні та якісні методи аналізу систем диференціальних, функціонально-диференціальних, імпульсних та різницевих рівнянь» (номери держреєстрації 0116U003121, 0119U001721).

Мета й завдання дослідження.

Об'єкт дослідження — системи диференціальних рівнянь із запізненням та імпульсною дією як у фіксовані, так і нефіксовані моменти часу.

Предмет дослідження — питання існування асимптотично майже періодичних і майже періодичних розв'язків системи диференціальних рівнянь із запізненням та імпульсної дією й отримання умов існування, єдиності та стійкості кусково-неперервних майже періодичних та періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсним впливом, зокрема з нефіксованими моментами імпульсної дії.

Мета дисертації — знаходження умов існування асимптотично майже періодичних та майже періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь із запізненням та імпульсної дією й отримання умов існування, єдиності та стійкості кусково-неперервних майже періодичних та періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсним впливом.

Завдання дослідження:

- Знайти умови існування кусково-неперервних асимптотично майже періодичних і майже періодичних розв'язків систем із запізненням та фіксованими моментами імпульсних впливів.
- Знайти умови існування кусково-неперервних асимптотично майже періодичних і майже періодичних розв'язків систем із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії. Знайти умови існування і стійкості додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків імпульсного логістичного рівняння з нефіксованими моментами імпульсної дії.
- Отримати умови перманентності та існування додатних асимптотично стійких періодичних розв'язків системи хижак-жертва з віковою структурою та імпульсною дією, а також системи рівнянь із запізненням та імпульсною дією, яка моделює динаміку двох конкуруючих видів із віковою структурою.

Методи дослідження.

У роботі використано методи теорії імпульсних і функціонально-диференціальних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів.

Основні результати, які визначають наукову новизну й виносяться на захист:

- Знайдено умови існування кусково-неперервних асимптотично майже періодичних та майже періодичних розв'язків систем із запізненням та фіксованими моментами імпульсних впливів. Отримані результати застосовано для знаходження умов існування і стійкості додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків імпульсного рівняння Маккі – Гласса та моделі біологічної популяції з віковою структурою та імпульсною дією.

- Знайдено умови існування кусково-неперервних асимптотично майже періодичних та майже періодичних розв'язків систем із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії. Знайдено умови існування і стійкості додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків імпульсного логістичного рівняння з нефіксованими моментами імпульсної дії.

- Отримано умови перманентності та існування додатних асимптотично стійких періодичних розв'язків системи хижак-жертва з віковою структурою та імпульсною дією, а також системи рівнянь із запізненням та імпульсною дією, яка моделює динаміку двох конкуруючих видів із віковою структурою.

Практичне значення одержаних результатів.

Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати й методика їхнього отримання можуть бути використані для дослідження асимптотично майже періодичних і майже періодичних розв'язків системи рівнянь із запізненням та імпульсною дією й отримання умов існування, єдиності та стійкості кусково-неперервних майже періодичних і періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсним впливом.

Також ці результати можуть бути застосовані для вивчення задач математичної біології та розвивають відповідні їм математичні методи, які представляються відповідними математичними моделями.

Особистий внесок здобувача.

Результати, включені до дисертації, отримані автором особисто. Постановка задач, визначення загальної схеми дослідження, аналіз отриманих результатів належить науковому керівнику В. І. Ткаченку.

Апробація результатів дисертації.

Результати дисертації доповідалися й обговорювалися на засіданні семінару відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник семінару — доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАН України О. А. Бойчук), а також на міжнародних наукових конференціях.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 6 роботах (див. Додаток на с. 145 – 148), роботи відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук. 4 з них перекладено в закордонних виданнях видавництва Springer, переклади присутні в наукометричній базі даних Scopus, 2 із них — у Web of Science Core Collection (Science Citation Index Expanded).

Структура й обсяг дисертації.

Дисертація складається зі змісту, переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, списку використаних джерел, що містить 182 найменування, і додатку. Загальний обсяг дисертації налічує 148 сторінок (із них основної частини — 102 сторінки).

Подяки. Автор висловлює щиру вдячність науковому керівникові доктору фізико-математичних наук, професору Віктору Івановичу Ткаченку за постановку задач, співпрацю й підтримку.

РОЗДІЛ 1

Асимптотично майже періодичні розв'язки у системах з фіксованими моментами імпульсів

Результати даного розділу опубліковані в статті ([125], [9]).

1.1. Основні поняття та означення майже періодичних розв'язків

Досліджуються умови існування кусково-неперервних майже періодичних розв'язків системи диференціальних рівнянь із запізненням та імпульсною дією. Оскільки розв'язки імпульсної системи мають розриви, то майже періодичність можна розуміти по-різному. В роботі використовуємо концепцію розривних майже періодичних функцій, запропоновану в [79] і потім досліджену в [12, 142, 143, 145, 146] та в інших роботах.

Використовуючи ідеї [175], спочатку доводимо теорему існування кусково-неперервного асимптотично майже періодичного розв'язку імпульсної системи. Далі доводиться, що з існування кусково-неперервного асимптотично майже періодичного розв'язку випливає існування кусково-неперервного майже періодичного розв'язку.

Нехай $\mathbb{R}$ і $\mathbb{Z}$ — множини дійсних і цілих чисел відповідно. Позначимо через $\|.\|$ норму в $\mathbb{R}^n$ чи відповідну норму в просторі матриць.

Розглядається простір $\mathcal{PC}^k(J, \mathbb{R}^n)$, $J \subset \mathbb{R}$, для всіх кусково-неперервних функцій $x : J \to \mathbb{R}^n$, таких, що

i) множина $T = \{t_j \in J,\ t_{j+1} > t_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$ розривів функції x не має скінченних граничних точок;

ii) функції неперервні зліва: $x(t_j - 0) = x(t_j)$, і існує

$$\lim_{t \to t_j + 0} x(t) = x(t_j + 0);$$

iii) функція $x(t)$ є C^k-гладкою на множині $J \setminus T$.

Означення 1.1. Ціле число p називається ε-майже періодом послідовності $\{x_k\}, x_k \in \mathbb{R}^n$, якщо $\|x_{k+p} - x_k\| < \varepsilon$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$.

Означення 1.2. Послідовність $\{x_k\}$ називається майже періодичною, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина її ε-майже періодів.

Множина $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ відносно щільна, якщо існує додатне число l, таке, що кожний відрізок дійсної осі довжини l містить принаймні одне число, яке належить $\mathcal{A}$.

Означення 1.3. [142] Послідовність дійсних чисел $\{t_k\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина ε-майже періодів, спільних для всіх послідовностей $\{t_k^j\}$, де $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $j \in \mathbb{Z}$.

Як показано у [14, с. 1411], послідовність $\{\tau_k\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць тоді й тільки тоді, коли $\tau_k = ak + c_k$, де $\{c_k\}$ — майже періодична послідовність, a — додатне число.

Означення 1.4. [142] Функцію $\varphi(t) \in \mathcal{PC}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ називають w-майже періодичною, якщо:

i) послідовність $\{t_k\}$ точок розривів функції $\varphi(t)$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць;

ii) для будь–якого $\varepsilon > 0$ існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що якщо точки t' і t'' належать одному й тому ж інтервалу неперервності й $|t' - t''| < \delta$, тоді $\|\varphi(t') - \varphi(t'')\| < \varepsilon$;

iii) для будь–якого $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина Γ ε-майже періодів, таких, що якщо $\tau \in \Gamma$, тоді $\|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, що задовольняють умову $|t - t_k| \geq \varepsilon$, $k \in \mathbb{Z}$.

Означення 1.5. Неперервна функція $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ майже періодична за Бором, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина Γ ε-майже періодів, таких, що якщо $\tau \in \Gamma$, то $\|\psi(t+\tau) - \psi(t)\| < \varepsilon$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

У роботі [12] доведено, що функція $\varphi(t) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ w-майже періодична тоді й тільки тоді, коли з довільної послідовності дійсних чисел $\{\theta_n\}$, $\theta_n > \theta_{n-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n = \infty$, можна виділити таку підпослідовність $\{\theta_{n_k}\}$, що послідовність $\varphi(t + \theta_{n_k})$ збігається на осі у w-топології.

Означення 1.6. [12] кусково-неперервна функція $\varphi_1(t) \in \mathcal{PC}(J, \mathbb{R}^n)$ розміщена в ε-околі функції $\varphi_2(t) \in \mathcal{PC}(J, \mathbb{R}^n)$, якщо $\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| < \varepsilon$ для всіх таких $t \in J$, що $|t - \tau_i^1| > \varepsilon$, $|t - \tau_i^2| > \varepsilon$, і $|\tau_i^1 - \tau_i^2| < \varepsilon$, $i \in \mathbb{Z}$, де $\{\tau_i^1\}$ і $\{\tau_i^2\}$ — послідовності розривів $\varphi_1(t)$ і $\varphi_2(t)$. У цьому випадку запишемо $\rho(\varphi_1, \varphi_2) < \varepsilon$.

Означення 1.7. Послідовність $\{f_k(t)\}$ функцій $f_k \in \mathcal{PC}^k(J, \mathbb{R}^n)$, $J \subset \mathbb{R}$, збігається в w-топології до функції $f \in \mathcal{PC}^k(J, \mathbb{R}^n)$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке додатне ціле число $N = N(\varepsilon)$, що $\|f_k(t) - f(t)\| < \varepsilon$ для всіх $k \geq N$ і $|t - \tau_i| > \varepsilon$ (τ_i є точками розривів функції f на множині J) і точки розривів функцій $f_k(t)$, які містяться в J, збігаються до точок τ_i рівномірно відносно i.

Через x_t будемо позначати функцію $x(t+\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, де $x(t) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Для обмеженої на осі функції $a(t)$ будемо позначати

$$a^L = \inf_{t\in\mathbb{R}} a(t), \;\; a^M = \sup_{t\in\mathbb{R}} a(t).$$

Аналогічно для обмеженої послідовності $\{h_k\}$ позначимо

$$h^L = \inf_k h_k, \quad h^M = \sup_k h_k.$$

1.2. Теорема про існування майже періодичних розв'язків

Розглядаємо систему рівнянь із запізненням та імпульсною дією

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-h)),\ t \neq t_k, \tag{1.1}$$

$$x(t_k + 0) = x(t_k) + I_k(x(t_k)),\ k \in \mathbb{Z}, \tag{1.2}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $h = \mathrm{const} > 0$.

Припускаємо, що

1) послідовність дійсних чисел $t_k,\ k = 1, 2, \ldots$ (які рівномірно відділені одне від іншого) має рівномірно майже періодичні послідовності різниць;

2) функція $f(t, x, y)$ w-майже періодична по t й ліпшицева по x і y рівномірно відносно x, y із компактних множин, множиною розривів f є послідовність $\{t_k\}$;

3) послідовність $\{I_k(x)\}$ є майже періодичною рівномірною відносно x із компактних множин, функції $I_k(x)$ є ліпшицевими по x.

Означення 1.8. Визначена на $[0, \infty)$ кусково-неперервна функція $a(t)$ з послідовністю точок розривів, яка має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, називається асимптотично w-майже періодичною, якщо вона є сумою w-майже періодичної функції $p(t)$ і функції $q(t) \in \mathcal{PC}$, такої, що $q(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Твердження 1.9. *Кусково-неперервна функція $\xi(t)$ є асимптотично w-майже періодичною тоді й тільки тоді, коли для будь-якої послідовності дійсних чисел $\{\tau_k\}$, такої, що $\tau_k \to \infty$ при $k \to \infty$, існує підпослідовність $\{\tau_{k_j}\}$, для якої $\xi(t + \tau_{k_j})$ збіжна на $0 \leq t < \infty$ у w-топології.*

Доведення. Необхідність. Нехай $\xi(t)$ асимптотично w-майже періодична, тоді

$$\xi(t) = p(t) + q(t),$$

де $p(t)$ є w-майже періодичною і $q(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Із [12] кусково-неперервна функція $p(t)$ є w-майже періодичною тоді й тільки тоді, коли кожна нескінченна множина зміщень $\{\varphi(t+\tau_n)\}$ є компактом відносно w-топології.

Отже, $q(t+\tau_k) \to 0$ при $\tau_k \to \infty$ для всіх $t \geq 0$, тоді існує підмножина $\{\tau_{k_j}\}$, для якої $\xi(t+\tau_{k_j})$ збіжна на $0 \leq t < \infty$ в w-топології.

Достатність. Оскільки послідовність $\{t_k\}$ точок імпульсів має рівномірні майже періодичні послідовності різниць, тоді з [145,146] для будь-якої послідовності $\{\tau_k\}$, існує підпослідовність (яку ми позначимо через $\{\tau_k\}$ знову), послідовність $\{p_k\}$ з рівномірними майже періодичними різницями і послідовність $\{\alpha(k)\}$, що

$$\lim_{k\to\infty}(t_{n+\alpha(k)} - \tau_k) = p_n \tag{1.3}$$

рівномірна в $n \in \mathbb{Z}$.

Взявши до уваги (1.3) і w-збіжність $\xi(t+\tau_k)$, отримаємо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке додатне ціле число $N = N(\varepsilon)$, що

$$|t_{n+\alpha(k)} - \tau_k - p_n| < \varepsilon$$

для всіх $k \geq N$ і $n \in \mathbb{Z}$ та

$$\|\xi(t+\tau_k) - \xi(t+\tau_m)\| < \varepsilon$$

для всіх $k, m \geq N$ і $t \in [0,\infty)$, $|t+\tau_k - t_n| > \varepsilon$, $|t+\tau_m - t_n| > \varepsilon$.

Спочатку покажемо, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $T = T(\varepsilon)$, що множина

$$\{\tau | \sup_{t\geq T(\varepsilon)} \|\xi(t+\tau) - \xi(t)\| < \varepsilon,\ |t - t_k| > \varepsilon\} \tag{1.4}$$

є відносно щільною в $\mathbb{R}$. Доведемо від супротивного. Припустимо, що існує таке $\varepsilon_0 > 0$, що множина (1.4) не є відносно щільною. Тоді для цього ε_0 і будь-якого $T(\varepsilon_0)$ існує така послідовність інтервалів $[h_n - l_n, h_n + l_n]$, що

$$\sup_{t\geq T(\varepsilon_0), |t-t_k|\geq\varepsilon_0} \|\xi(t+\tau) - \xi(t)\| \geq \varepsilon_0$$

для всіх точок $\tau \in [h_n - l_n, h_n + l_n]$. Нехай l_1 є довільною і $l_n > \max\limits_{m<n} l_m$, тоді $h_n - h_m \in [h_n - l_n, h_n + l_n]$, якщо $m < n$. Отже,

$$\sup_{t \geq h_n, |t+h_n-t_k| \geq \varepsilon_0} \|\xi(t+h_n) - \xi(t+h_m)\| =$$

$$\sup_{t \geq 0, |t-t_k| \geq \varepsilon_0} \|\xi(t) - \xi(t+h_n-h_m)\| \geq \varepsilon_0.$$

Це суперечить тому, що $\{\xi(t+h_n)\}$ є w-збіжною.

Припустимо, що послідовність $\{\xi(t+\tau_k)\}$ збігається на $[0,\infty)$ в w-топології до функції $p(t)$ з послідовністю розривів $\{p_n\}$. Як границя зсувів послідовності $\{t_n\}$ послідовність $\{p_n\}$ має рівномірні майже періодичні різниці.

Вибираючи підпослідовність $\{\tau_k\}$, якщо потрібно, ми можемо побудувати функцію $p(t)$ на всій осі так, що $\xi(t+\tau_k)$ збігається до $p(t)$ в w-топології на компактних підмножинах $\mathbb{R}$.

Тепер покажемо, що $p(t)$ w-майже періодична. Треба довести, що якщо $\varepsilon > 0$ таке, що існує $T(\varepsilon)$ і відносно щільна множина чисел τ, що $\|\xi(t+\tau) - \xi(t)\| < \varepsilon$, якщо $t \geq T(\varepsilon)$, $t+\tau \geq T(\varepsilon)$ і $|t-t_k| > \varepsilon$.

Введемо τ_n з достатньо великим n, тоді отримаємо

$$\|\xi(t+\tau_n+\tau) - \xi(t+\tau_n)\| < \varepsilon,$$

якщо $t \geq T(\varepsilon) - \tau_n$, $t+\tau \geq T(\varepsilon) - \tau_n$ і $|t+\tau_n-t_k| > \varepsilon$. Зафіксуємо t і τ й виберемо n достатньо великим так, що остання нерівність є правильною. Тоді, взявши границю $n \to \infty$, маємо $\|p(t+\tau) - p(t)\| < \varepsilon$. Це виконується для $t \in \mathbb{R}, |t-p_k| > \varepsilon$ і відносно щільної множини ε-майже періодів τ. Отже, $p(t)$ є w-майже періодичною.

Аналогічно до [63, с. 158] можна показати, що $\xi(t) - p^*(t) \to 0$ при $t \to \infty$, де w-майже періодична функція $p^*(t)$ є деяким зсувом асимптотично w-майже періодичної функції $p(t)$. □

Теорема 1.10. *Припустимо, що система (1.1), (1.2) має розв'язок* $\xi(t)$, *визначений на* $I = [0,\infty)$ *і такий, що* $\|\xi(t)\| \leq B$ *для всіх* $t \geq 0$. *Якщо*

$\xi(t)$ асимптотично w-майже періодичний, тоді система (1.1), (1.2) має w-майже періодичний розв'язок $p(t)$.

Доведення. асимптотично w-майже періодичний розв'язок $\xi(t)$ має вигляд

$$\xi(t) = p(t) + q(t),$$

де $p(t)$ w-майже періодична й $q(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Нехай $\{\tau_k\}$ є такою послідовністю, що існує послідовність $\{\alpha(k)\}$ і N, що $|t_{n+\alpha(k)} - \tau_k - t_n| < \varepsilon$ і $\rho(p(t+\tau_k), p(t)) < \varepsilon$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$ і $k \geq N$. Очевидно, $q(t+\tau_k) \to 0$ при $k \to \infty$.

Функція $\xi(t+\tau_m)$ задовольняє рівняння

$$\dot{x}(t) = f(t+\tau_m, x(t), x(t-h)), \tag{1.5}$$

$$x(t_n - \tau_m + 0) = x(t_n - \tau_m) + I_n(x(t_n - \tau_m)),\ n = 0, 1, ... \tag{1.6}$$

Позначимо $t_n - \tau_m = t'_{n-\alpha(m)}$. Нехай $n - \alpha(m) = j$, тоді $n = j + \alpha(m)$, і рівняння (1.5), (1.6) перепишемо у вигляді

$$\dot{x}(t) = f(t+\tau_m, x(t), x(t-h)), \tag{1.7}$$

$$x(t'_j + 0) = x(t'_j) + I_{j+\alpha(m)}(x(t'_j)),\ j = 0, 1, ... \tag{1.8}$$

Для $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що

$$\|f(t+\tau_m, \xi(t+\tau_m), \xi(t+\tau_m-h)) - f(t+\tau_m, p(t+\tau_m), p(t+\tau_m-h))\| < \varepsilon,$$

$$\|I_{j+\alpha(m)}(\xi(t'_j)) - I_{j+\alpha(m)}(p(t'_j))\| < \varepsilon,$$

якщо $\|\xi(t+\tau_m) - p(t+\tau_m)\| = \|q(t+\tau_m)\| < \delta$ і $\|\xi(t'_j) - p(t'_j)\| = \|q(t'_j)\| < \delta$.

Нехай $[\bar{t}_1, \bar{t}_2]$ — деякий підінтервал із $\mathbb{R}$. Для $\delta(\varepsilon)$ існує додатне ціле число N, таке, що $\rho(p(t), p(t+\tau_m)) < \delta$ для всіх $[\bar{t}_1, \bar{t}_2]$ і $m \geq N$.

Запишем систему (1.7), (1.8) в інтегральній формі

$$\xi(t+\tau_m) = \xi(\bar{t}_1 + \tau_m) +$$
$$+ \int_{\bar{t}_1}^{t} f(s+\tau_m, \xi(s+\tau_m), \xi(s+\tau_m-h))ds +$$

$$+ \sum_{\bar{t}_1 \le t'_j < t} I_{j+\alpha(m)}(\xi(t'_j + \alpha_m).$$

Перейшовши до границі $\tau_m \to \infty$, отримаємо

$$p(t) = p(\bar{t}_1) + \int_{\bar{t}_1}^{t} f(s, p(s), p(s-h))ds + \sum_{\bar{t}_1 \le t_j < t} I_j(p(t_j).$$

Отже, w-майже періодична функція $p(t)$ є розв'язком системи рівнянь(1.1), (1.2). $\square$

Теорема 1.11. *Нехай обмежений розв'язок $\xi(t)$ системи (1.1), (1.2) є рівномірно асимптотично стійким для $t \ge 0$.*

Тоді $\xi(t)$ асимптотично w-майже періодичний, і система (1.1), (1.2) має w-майже періодичний розв'язок, який є рівномірно асимптотично стійким для $t \ge 0$.

Доведення. Оскільки $\xi(t)$ є рівномірно асимптотично стійким, то для кожного $\varepsilon > 0$ існують такі $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ і $T(\varepsilon) > 0$, що якщо $x(t)$ є розв'язком (1.1), (1.2) з $\rho(\xi_0, x_0) < \delta$, то $\|\xi(t) - x(t)\| < \varepsilon/2$ при $t \ge 0$ і $\|\xi(t) - x(t)\| < \delta_1/2$ для всіх $t \ge T(\varepsilon)$, $\delta_1 = \min(\varepsilon, \delta)$.

Нехай $\{\tau_m\}$ — така послідовність, що $\tau_{m+1} > \tau_m, \tau_m \to \infty$ при $m \to \infty$.

Позначимо $\xi^m(t) = \xi(t + \tau_m)$. Тоді $\xi^m(t)$ є розв'язком системи (1.7), (1.8), і $\xi^m(t)$ є рівномірно асимптотично стійким із такими же $\delta(\varepsilon)$ і $T(\varepsilon)$, що й для $\xi(t)$.

Існує підпослідовність із $\{\tau_m\}$ (яку знову позначимо $\{\tau_m\}$), така, що існують послідовність $\{p_n\}$ з рівномірно майже періодичними різницями і послідовність $\alpha(m)$, така, що

$$\lim_{m \to \infty} (t_{i+\alpha(m)} - \tau_m) = p_i,$$
$$\lim_{m \to \infty} (I_{i+\alpha(m)}(x) = J_i(x)$$

рівномірна відносно $i \in \mathbb{Z}$ і $\|x\| \le K$,

$f(t + \tau_m, x, y)$ прямує до $g(t, x, y)$ в w-топології рівномірно відносно x, y, $\|x\| \le K$, $\|y\| \le K$,

$\xi_0^m = \{\xi^m(\theta), \theta \in [-h, 0]\}$ збіжна в w-топології до ζ_0.

Отже, для деякого $\delta_2 > 0$ існує таке додатне ціле число $k_0(\varepsilon)$, що якщо $k \geq m \geq k_0(\varepsilon)$, то

$$\|f(t + \tau_k, x, y) - f(t + \tau_m, x, y)\| < \delta_2(\varepsilon)$$

для всіх $\|x\| \leq K, \|y\| \leq K$ і всіх $t \in \mathbb{R}$, $|t + \tau_k - t_j| > \delta_2$, $|t + \tau_m - t_j| > \delta_2$, $j \in \mathbb{Z}$, і

$$\|\xi(\theta + \tau_k) - \xi(\theta + \tau_m)\| < \delta_1(\varepsilon)$$

для всіх $\theta \in [-h, 0]$, $|\theta + \tau_k - t_j| > \delta$, $|\theta + \tau_m - t_j| > \delta$, $j \in \mathbb{Z}$.

Нехай $\eta(t)$ є розв'язком системи (1.7), (1.8) з початковими функціями $\eta_0 = \xi_0^k$.

Оскільки система (1.7), (1.8) є рівномірно асимптотично стійкою, то $\|\xi^m(t) - \eta(t)\| < \varepsilon/2$ для всіх $t \geq 0$ і $\|\xi^m(t) - \eta(t)\| < \delta_1/2$ для всіх $t \geq T(\varepsilon)$.

Оцінимо різницю $\eta(t) - \xi^k(t)$, якщо $t \in [0, T(\varepsilon) + h]$.

Функція $\xi^k(t)$ задовольняє рівняння

$$\begin{aligned}
&\dot{\xi}^k(t) = f(t + \tau_k, \xi^k(t), \xi^k(t - h)),\\
&\xi^k(t_j'' + 0) = \xi^k(t_j'') + I_{j+\alpha(k)}(\xi^k(t_j'')),\ j = 0, 1, ...,
\end{aligned}$$

де $t_j'' = t_{j+\alpha(k)} - \tau_k$.

Різниця $\eta(t) - \xi^k(t)$ задовольняє наступне інтегральне рівняння

$$\begin{aligned}
\eta(t) - \xi^k(t) = &\eta(0) - \xi^k(0) + \int_0^t \big(f(s + \tau_m, \eta(s), \eta(s - h)) - \\
&- f(s + \tau_k, \xi^k(s), \xi^k(s - h))\big)\, ds + \\
&+ \sum_{0 \leq t_j' < t} I_{j+\alpha(m)}(\eta(t_j')) - \sum_{0 \leq t_j'' < t} I_{j+\alpha(k)}(\eta(t_j'')).
\end{aligned}$$

За [142, с. 191] існують такі число $l > 0$ й додатне ціле число q, що будь-який інтервал часу на осі довжиною l містить не більш ніж q членів послідовності $\{p_n\}$.

Оскільки $t'_n = t_{n+\alpha(m)} - \tau_m$, $t''_n = t_{n+\alpha(k)} - \tau_k$, і $t'_n \to p_n$, $t''_n \to p_n$ при $m \to \infty$, $k \to \infty$, тоді інтервал $[0, T(\varepsilon) + h)$ містить скінченне число точок із послідовності $\{p_n\}$ і таке ж число точок t'_n і t''_n (якщо k і m є достатньо великими).

Аналогічно до [56, Теорема 5] оцінимо різницю $\eta(t) - \xi^k(t)$ в послідовності на інтервалі $[0, \min(t'_1, t''_1)]$, у точках $\max(t'_1, t''_1)$, на інтервалі $[\max(t'_1, t''_1), \min(t'_2, t''_2)]$ і так далі.

Для $\delta_1/2$ існує $\delta_2(\varepsilon)$, що якщо $|t'_j - t''_j| < \delta_2$, $\|I_{j+q(k)} - I_{j+q(m)}\| < \delta_2$, $\|f(t + \tau_k, x, y) - f(t + \tau_m, x, y)\| < \delta_2$, тоді $|\xi^k(t) - \eta(t)| < \delta_1/2$ для всіх $t \in [0, T(\varepsilon) + h]$, $|t + \tau_k - t_j| > \delta/2$, $|t + \tau_m - t_j| > \delta/2$, $j \in \mathbb{Z}$.

Отже, ми маємо нерівність $\rho(\xi^k, \xi^m) < \varepsilon$ на інтервалі $t \in [0, T(\varepsilon) + h]$ і $\rho(\xi^k, \xi^m) < \delta_1 \le \delta$ на інтервалі $t \in [T(\varepsilon), T(\varepsilon) + h]$.

Аналогічно доведенню вище можемо бачити, що якщо $m \ge k \ge k_0(\varepsilon)$, тоді

$$\rho(\xi^k_t, \xi^m_t) < \varepsilon \quad \text{для} \quad t \in [T(\varepsilon), 2T(\varepsilon)]$$

і, в загальному випадку,

$$\rho(\xi^k_t, \xi^m_t) < \varepsilon \quad \text{для} \quad t \in [qT(\varepsilon), (q+1)T(\varepsilon)], \quad q = 1, 2, ...$$

Отже, ξ є асимптотично w-майже періодичним, і рівняння має w-майже періодичний розв'язок. □

1.3. Майже періодичні розв'язки моделі біологічної популяції з віковою структурою

Модель із віковою структурою з запізненням було запропоновано В. Г. Аєлло і Х. І. Фрідманом у роботі [17], у подальшому багато авторів вивчали різні види біологічних моделей із віковою структурою (див., наприклад, [7, 41, 45, 170]).

Використовуючи результати попереднього параграфа, отримаємо достатні умови існування розривного майже періодичного розв'язку одновидової моделі з віковою структурою й імпульсами.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь із імпульсною дією, яка описує поведінку біологічних видів на двох стадіях — незрілій та зрілій:

$$\dot{x}_i(t) = \alpha(t)x_m(t) - \gamma(t)x_i(t) - \alpha(t-h)e^{-\int\limits_{t-h}^{t}\gamma(s)ds}x_m(t-h), \quad (1.9)$$

$$\dot{x}_m(t) = \alpha(t-h)e^{-\int\limits_{t-h}^{t}\gamma(s)ds}x_m(t-h) - \beta(t)x_m^2(t) \quad (1.10)$$

для $t \neq t_k$ із імпульсним впливом

$$x_m(t_k+0) = (1+d_k)x_m(t_k), \quad (1.11)$$

в моменти часу t_k, $k \in \mathbb{Z}$. Припускаємо, що послідовність $\{t_k\}$ моментів імпульсного впливу має рівномірно майже періодичні різниці, послідовність $\{d_k\}$ майже періодична, $d_k \in (-1, d]$, $d > 0$, функції $\alpha(t)$, $\beta(t)$ й $\gamma(t)$ кусково-неперервні, додатні й w-майже періодичні.

Для спрощення припустимо, що точками розривів $\alpha(t)$, $\beta(t)$ й $\gamma(t)$ є t_k, $k \in \mathbb{Z}$.

Тут $x_i(t)$ і $x_m(t)$ задають щільність незрілих і зрілих популяцій відповідно. Народжуваність незрілої популяції в час $t > 0$ пропорційна до існуючої зрілої популяції з показником народжуваності $\alpha(t)$, $\gamma(t)$ є показником смертності незрілих, $\beta(t)$ — показник смертності й перенаселення зрілих, h — час дозрівання. Вираз $\alpha(t-h)e^{-\int\limits_{t-h}^{t}\gamma(s)ds}x_m(t-h)$ визначає перехід від незрілих до зрілих.

Із біологічної точки зору припускаємо невід'ємність розв'язків (1.9)–(1.11) із початковими умовами

$$x_i(0) = \varphi_i > 0, \quad (1.12)$$

$$x_m(\theta) = \psi_m(\theta) \geq 0,\ \theta \in [-h, 0],\ \psi_m(0) > 0. \quad (1.13)$$

Для майже періодичної послідовності $\{d_n\}$ існує

$$\sigma = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{0 \leq t_k < T} \ln(1+d_k).$$

Припустимо, що функція

$$\omega(t) = \prod_{0 \leq t_k < t} (1+d_k)e^{-\sigma t}$$

є w-майже періодичною. Тоді функції

$$A(t) = \prod_{t-h \le t_k < t} (1+d_k)^{-1} \alpha(t) \exp\left(\sigma h + \int\limits_{t-h}^{t} \gamma(s)ds\right)$$

і

$$C(t) = \prod_{0 \le t_k < t} (1+d_k) e^{-\sigma t} \beta(t)$$

є також w-майже періодичними.

Теорема 1.12. *Припустимо, що виконується нерівність*

$$\sigma + \sup_t \left(\alpha(t-h) e^{\sigma + \int\limits_{t-h}^{t} \gamma(s)ds} \prod_{t-h \le t_k < t} (1+d_k)^{-1}\right) > 0.$$

Тоді система (1.9) – (1.11) є перманентною, тобто існують такі додатні сталі m_0 і M_0, що всі її розв'язки з початковими умовами (1.12), (1.13) задовольняють нерівності

$$\liminf_{t\to\infty} x_i(t) \ge m_0, \;\; \limsup_{t\to\infty} x_i(t) \le M_0,$$

$$\liminf_{t\to\infty} x_m(t) \ge m_0, \;\; \limsup_{t\to\infty} x_m(t) \le M_0.$$

Якщо також виконується нерівність

$$(A^M + \sigma) C^M < 2C^L (A^L + \sigma), \tag{1.14}$$

тоді система (1.9) – (1.11) має єдиний додатний w-майже періодичний розв'язок, який є глобальним атрактором.

Доведення. Спочатку доведемо, що $x_m(t,\varphi) > 0$, $t > 0$, якщо $\psi_m(\theta) \ge 0$, $\theta \in [-h, 0]$, $\psi_m(0) > 0$.

Дійсно, якщо $t \in [0, h]$, тоді рівняння (1.10), (1.11) має розв'язок, який знаходиться з рівняння

$$\dot{x}_m(t) = \alpha(t-h) e^{-\int\limits_{t-h}^{t} \gamma(s)ds} \psi_m(t-h) - \beta(t) x_m^2(t), \tag{1.15}$$

$$x_m(t_k + 0) = (1+d_k) x_m(t_k), \tag{1.16}$$

Розв'язок рівняння (1.15)–(1.16) із початковою умовою $x_m(0) = \psi_m(0) > 0$ є оцінкою знизу для розв'язку рівняння

$$\dot{u}(t) = -\beta(t)u^2(t),\ t \neq t_k,$$
$$u(t_k + 0) = (1 + d_k)u(t_k).$$

Розв'язок останнього рівняння є строго додатним для $t \in (0, h]$, оскільки $\varphi(0) > 0$ і $(1 + d_k) > 0$.

Аналогічно, розглянувши рівняння на інтервалах $[h, 2h]$, $[2h, 3h], ...$, отримаємо додатність для всіх $t > 0$.

Для того, щоб довести, що $x_i(t) > 0$, $t > 0$, використаємо наступні міркування. Число незрілих, які народилися в час s і вижили в час t, отримується з $\alpha(s)x_m(s)e^{-\int_s^t \gamma(\xi)d\xi}$.

Оскільки $t - s \leq h$, тоді

$$x_i(t) = \int\limits_{t-h}^{t} \alpha(s)x_m(s)e^{-\int\limits_s^t \gamma(\xi)d\xi} ds. \tag{1.17}$$

Із (1.17) отримаємо $x_i(t) > 0$ для всіх $t \geq 0$, отже, $x_m(s) > 0$.

Зробимо заміну змінних

$$x_m(t) = \omega(t)v(t) = \prod_{0 \leq t_k < t} (1 + d_k)e^{-\sigma t}v(t)$$

у рівнянні (1.10)—(1.11) і отримаємо рівняння без імпульсів

$$\dot{v}(t) = A(t)v(t - h) + \sigma v(t) - C(t)v^2(t). \tag{1.18}$$

Розв'язки рівняння (1.18) є неперервними з лівими неперервними похідними.

Паралельно (1.18) розглянемо два рівняння:

$$\dot{v}_L(t) = A^L v_L(t - h) + \sigma v_L(t) - C^M v_L^2(t), \tag{1.19}$$

$$\dot{v}_M(t) = A^M v_M(t - h) + \sigma v_M(t) - C^L v_M^2(t). \tag{1.20}$$

Нехай $v(t, \varphi)$, $v_L(t, \varphi)$ і $v_M(t, \varphi)$ є розв'язками рівнянь (1.18), (1.19) і (1.20) відповідно з такими ж початковими функціями. За [90, с. 79] вони задовольняють нерівності

$$\dot{v}_L(t,\varphi) \leqslant v(t,\varphi) \leqslant \dot{v}_M(t,\varphi), \quad t \geqslant 0.$$

За [95] рівняння (1.19) має єдиний додатний асимптотично стійкий стан рівноваги

$$\bar{m_0} = (A^L + \sigma)/C^M,$$

якщо $A^L > -\sigma$.

Аналогічно рівняння (1.20) має єдиний додатний асимптотично стійкий стан рівноваги $\bar{M_0} = (A^M + \sigma)/C^L$.

Тому

$$\liminf_{t\to\infty} v(t,\varphi) \geqslant \frac{A^L+\sigma}{C^M}, \quad \limsup_{t\to\infty} v(t,\varphi) \geqslant \frac{A^M+\sigma}{C^L}. \tag{1.21}$$

Перманентність рівняння (1.9) випливає з (1.17) безпосередньо.

Тепер доведемо рівномірну асимптотичну стійкість розв'язків із (1.18). Розглянемо два розв'язки $x(t)$ і $y(t)$, такі, що $x(t) \geqslant m_0 - \delta$ і $y(t) \geqslant \bar{m_0} - \delta$ для всіх $t \geqslant 0$, де δ — деяка мала додатна стала. Різниця $\omega(t) = x(t) - y(t)$ задовольняє лінійне рівняння

$$\frac{d}{dt} = A(t)\omega(t-h) - \omega(t)(C(t)(x(t)+y(t)) - \sigma). \tag{1.22}$$

За [79, с. 111] рівняння (1.22) є рівномірно асимптотично стійким, якщо

$$A^M < \inf_t \left(C(t)(x(t)+y(t)) - \sigma\right).$$

Використовуючи (1.21), отримаємо (1.14). За теоремою 1.11 (Теоремою 2 в [125]) рівняння (1.10), (1.11) має єдиний додатний кусково-неперервний майже періодичний розв'язок, який є глобальним атрактором.

Із (1.17) доводимо w-майже періодичність $x_i(t)$, якщо $x_m(t)$ є w-майже періодичним.

□

1.4. Майже періодичні розв'язки в рівняннях типу Маккі – Гласса з імпульсною дією

Розглянемо рівняння типу Маккі – Гласса з майже періодичними коефіцієнтами та імпульсною дією

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha(t)x(t) + \frac{\beta(t)x(t-h)}{1+\gamma(t)x^p(t-h)}, \tag{1.23}$$

$$x(t_k+0) - x(t_k) = a_k x(t_k) + b_k, \tag{1.24}$$

де $x \geq 0$, p й h — додатні сталі, кусково-неперервні функції $\alpha(t), \beta(t)$ та $\gamma(t)$ додатнозначні та w-майже періодичні, послідовності $\{a_k\}$ та $\{b_k\}$ майже періодичні й $a_k > -1$, $b_k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, послідовність $\{t_k\}$ точок імпульсної дії має рівномірно майже періодичні різниці.

Рівняння (1.23) зі сталими коефіцієнтами було запропоноване Маккі та Глассом у роботі [108] як модель гематопоезу (відтворення клітин крові). Його дослідженню присвячено багато робіт, відмітимо наступні: [22, 30, 72, 76, 105, 125].

Виходячи з біологічної інтерпретації, будемо розглядати невід'ємні розв'язки рівняння (1.23), (1.24), а початкові умови розв'язків представляються так:

$$x(\theta) = \psi(\theta) \geq 0, \ \theta \in [-h, 0], \ \psi(0) > 0. \tag{1.25}$$

Використовуючи метод кроків, можна перевірити, що розв'язки початкових задач (1.25) для рівняння (1.23), (1.24) існують при всіх $t > 0$.

Спочатку знайдемо умови перманентності рівняння (1.23), (1.24). Це дозволяє при відшуканні додатнозначного асимптотично w-майже періодичного розв'язку досліджувати тільки інтервал перманентності. З існування асимптотично w-майже періодичного розв'язку за теоремою 1.11 випливає існування додатнозначного асимптотично стійкого w-майже періодичного розв'язку.

1.4.1. Дослідження перманентності рівняння Маккі – Гласса з імпульсною дією.

Означення 1.13. Рівняння (1.23), (1.24) називається перманентним, якщо існують такі додатні сталі m_0 і M_0, що для кожного розв'язку $x(t)$ з додатними початковими значеннями (1.25)

$$\liminf_{t\to+\infty} x(t) \geq m_0, \quad \limsup_{t\to+\infty} x(t) \leq M_0. \tag{1.26}$$

Для майже періодичної послідовності $\{a_k\}$ завжди існує границя

$$\sigma = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{0\leq t_k<T} \ln(1+a_k).$$

Припускаємо, що функція

$$\omega(t) = \prod_{0\leq t_k<t} (1+a_k)e^{-\sigma t}$$

w-майже періодична.

Теорема 1.14. *Припустимо, що функція $\omega(t)$ w-майже періодична й виконуються нерівності*

$$\alpha(t) - \sigma \geq \sigma_1 > 0, \quad \inf_t \omega(t) > 0, \tag{1.27}$$

$$\inf_t \{\beta(t) \prod_{t-h\leq t_k<t} (1+a_k)^{-1} - \alpha(t) + \sigma\} > 0. \tag{1.28}$$

Тоді рівняння (1.23), (1.24) перманентне, тобто існують такі додатні сталі m_0 і M_0, що для кожного розв'язку $x(t)$ з додатними початковими значеннями (1.25) виконуються нерівності (1.26).

Доведення. Якщо функція $\omega(t)$ w-майже періодична, то й функції

$$A(t) = \alpha(t) - \sigma, \ C(t) = \gamma(t)\omega^p(t)$$

і

$$B(t) = \frac{\beta(t)\omega(t-h)}{\omega(t)} = \beta(t) \prod_{t-h\leq t_k<t} (1+a_k)^{-1}$$

w-майже періодичні. У рівнянні (1.23)–(1.24) виконаємо заміну змінних

$$x(t) = \omega(t)y(t) = \prod_{0\leq t_k<t} (1+a_k)e^{-\sigma t}y(t)$$

і отримаємо наступне рівняння з майже періодичними коефіцієнтами:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -A(t)x(t) + \frac{B(t)y(t-h)}{1+C(t)y^p(t-h)},\ t \neq t_k, \tag{1.29}$$

$$\Delta y(t_k) = y(t_k+0) - y(t_k) = b_k^* = \frac{b_k}{\omega(t_k+0)},\ k \in \mathbb{N}. \tag{1.30}$$

Враховуючи обмеженість і відділеність від нуля w-майже періодичної функції $\omega(t)$, достатньо довести перманентність рівняння (1.29) – (1.30).

Покажемо, що існують такі додатні сталі $\tilde{m}_0$ і $\tilde{M}_0$, що для кожного розв'язку $y(t)$ з додатними початковими значеннями виконуються нерівності

$$\liminf_{t\to+\infty} y(t) \geq \tilde{m}_0, \quad \limsup_{t\to+\infty} y(t) \leq \tilde{M}_0.$$

1. Позначимо через $y(t,\varphi)$ розв'язок рівняння (1.29), (1.30) з початковою функцією φ. Якщо φ задовольняє умову (1.25), то розв'язок строго додатний: $y(t,\varphi) > 0$ при $t > 0$. Дійсно, функція

$$z(t) = y(t,\varphi)\exp\Big\{\int\limits_0^t A(s)ds\Big\}, t > 0, \quad z(t) = \varphi(t), \quad t \leq 0,$$

задовольняє рівняння

$$\dot{z}(t) = \frac{B(t)z(t-h)\exp\Big\{\int\limits_{t-h}^{t} A(s)ds\Big\}}{1 + C(t)z^p(t-h)\exp\Big\{-p\int\limits_0^{t-h} A(s)ds\Big\}},\ t \neq t_k,$$

$$z(t_k+0) = z(t_k) + b_k^* \exp\Big\{\int\limits_0^{t_k} A(s)ds\Big\}.$$

За умови (1.25) виконується $\dot{z}(t) \geq 0$. Враховуючи $b_k^* \geq 0$, робимо висновок, що функція $z(t)$ неспадна. Оскільки $\varphi(0) > 0$, отримуємо строгу додатність $z(t)$, а отже, й $y(t)$.

2. Покажемо, що розв'язки рівняння (1.29), (1.30) фінально рівномірно обмежені, а саме існує таке $\tilde{M}_0 > 0$, що

$$\limsup_{t\to\infty} y(t,\varphi) \le \tilde{M}_0$$

для всіх невід'ємних початкових функцій φ.

Якщо $p \ge 1$, то

$$\frac{B(t)y(t-h)}{1+C(t)y^p(t-h)} \le \frac{(p-1)^{\frac{p-1}{p}}}{p} \sup_t \frac{B(t)}{C^{1/p}(t)} = M_1.$$

Розв'язок рівняння (1.29), (1.30) задовольняє рівність

$$y(t,\varphi) = e^{-\int\limits_0^t A(u)du}\varphi(0) + \int_0^t e^{-\int\limits_s^t A(u)du} \frac{B(s)y(s-h)}{1+C(c)y^p(s-h)}ds +$$
$$+ \sum_{0\le t_k<t} e^{-\int\limits_0^{t_k} A(u)du} b_k^*.$$

Позначимо через N_0 максимальне число точок послідовності $\{t_k\}$ на інтервалі одиничної довжини.

За лемою 26 зі [142, с. 197] таке число для послідовності з рівномірно майже періодичними різницями завжди існує.

Тоді виконуються нерівності

$$\sum_{0\le t_k<t} e^{-\int_0^{t_k} A(u)du} b_k^* \le b^* \sum_{n=0}^{[t]} \sum_{n\le t_k<n+1} N_0 e^{-\sigma_1 n} \le b^* N_0 \frac{1-e^{-\sigma_1([t]+1)}}{1-e^{-\sigma_1}},$$

де $b^* = \sup_k b_k^*$.

Тепер можемо оцінити розв'язок $y(t,\varphi)$:

$$\limsup_{t\to\infty} y(t,\varphi) \le \frac{M_1}{\sigma_1} + \frac{N_0 b^*}{1-e^{-\sigma_1}} = M_{01}. \tag{1.31}$$

Нехай тепер $p < 1$. Зробимо оцінки аналогічно роботі [30, с. 5].

Оскільки $y'(t) \ge -A(t)y(t)$, то

$$y(t) \ge y(t-h)\exp\left(-\int_{t-h}^t A(s)ds\right),$$

$$y(t-h) \le y(t) \exp\left(\int_{t-h}^{t} A(s)ds\right).$$

Тому

$$y'(t) \le -A(t)y(t) + \frac{B(t)}{C(t)} y^{1-p}(t-h) \le -A(t)y(t) + B_1(t)y^{1-p}(t),$$

де

$$B_1(t) = \frac{B(t)}{C(t)} \exp\left((1-p)\int_{t-h}^{t} A(s)ds\right).$$

Отже, розв'язки рівняння (1.29), (1.30) оцінюються зверху розв'язками імпульсної нерівності

$$y'(t) \le -A(t)y(t) + B_1(t)y^{1-p}(t),$$

$$y(t_k+0) - y(t_k) = b_k^*, \ k \in \mathbb{N}.$$

Заміною змінних $y^p = z$ отримуємо

$$z' \le -pA(t)z + pB_1(t), \ t \ne t_k,$$

$$z(t_k+0) = z(t_k) + c_k(z(t_k)),$$

де $c_k(z) = (z^{1/p} + b_k^*)^p - z$.

Оскільки

$$\frac{dc_k(z)}{dz} = (z^{1/p} + b_k^*)^{p-1} z^{-1+1/p} - 1 \le 0$$

для $z \ge 0$ і $p < 1$, то

$$0 < c_k(z) < (b_k^*)^p, \ z \ge 0.$$

Тому

$$z(t,\psi) \le e^{-p\int_0^t A(\xi)d\xi}\varphi(0) + \int_0^t e^{-p\int_s^t A(\xi)d\xi} pB_1(s)ds +$$

$$+ \sum_{0 \le t_k < t} e^{-p\int_{t_k}^t A(\xi)d\xi} c(z(t_k)),$$

і аналогічно до (1.31) отримуємо

$$\limsup_{t\to\infty} z(t,\varphi) \le \frac{1}{\sigma_1} \sup_t B_1(t) + (b^*)^p \frac{N_0}{1-e^{-p\sigma_1}} = M_{02},$$

де N_0 — максимальне число точок послідовності $\{t_k\}$ на інтервалі одиничної довжини.

Отже, в якості верхньої оцінки $\tilde{M}_0$ для розв'язків рівняння (1.29), (1.30) можна вибрати M_{01} при $p \geq 1$ і M_{02} при $p < 1$.

Відповідно, в якості верхньої оцінки M_0 для розв'язків рівняння (1.23), (1.24) можна вибрати $M_{01}\omega^M$ при $p \geq 1$ і $M_{02}\omega^M$ при $p < 1$.

3. Доведемо існування такого $\tilde{m}_0 > 0$, що

$$\liminf_{t\to\infty} y(t,\varphi) \geq \tilde{m}_0 \tag{1.32}$$

для всіх початкових функцій (1.25).

Враховуючи додатність імпульсних збурень, за теоремами порівняння достатньо розглянути рівняння (1.29) без імпульсної дії.

Припустимо, що (1.32) не виконується. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий розв'язок $y(t,\varphi_1)$, що $\liminf\limits_{t\to\infty} y(t,\varphi_1) < \varepsilon$.

Якщо $y'(t,\varphi_1) \geq 0$ для всіх $t \geq 0$, то розв'язок монотонний і обмежений (у точках, де не існує звичайна похідна, розглядаємо лівосторонню похідну).

Тому існує $\lim\limits_{t\to\infty} y(t,\varphi_1) = y_0$ і $\lim\limits_{t\to\infty} y'(t,\varphi_1) = 0$.

Отже,

$$\lim_{t\to\infty}\left(A(t)y_0 + \frac{B(t)y_0}{1+C(t)y_0^p}\right) = 0.$$

Рівність $y_0 = 0$ неможлива при виконанні умови (1.28). Тому $y_0 > 0$.

У цьому випадку рівняння має додатну асимптотично стійку нерухому точку

$$y_0 = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{B(t)-A(t)}{C(t)B(t)}\right)^{1/p}.$$

Припустимо тепер, що розв'язок немонотонний. Тоді існує така послідовність точок $\{\tau_k\}$, що $y(\tau_k,\varphi_1) < \varepsilon$ і $y'(\tau_k,\varphi_1) = 0$, якщо τ_k не співпадає з точками імпульсної дії, і $y'(\tau_k - 0,\varphi_1) \leq 0$, якщо $\tau_k = t_j$ для деякого j. Звідси випливає, що

$$-A(\tau_n)y(\tau_n) + \frac{B(\tau_n)y(\tau_n - h)}{1+C(\tau_n)y^p(\tau_n - h)} \leq 0,$$

тому

$$\frac{y(\tau_n - h)}{1 + C(\tau_n) y^p(\tau_n - h)} \leq \frac{A(\tau_n)}{B(\tau_n)}\varepsilon. \tag{1.33}$$

Спочатку припустимо, що $p \leq 1$.

У цьому випадку функція $x/(1+cx^p)$ монотонно зростаюча відносно $x \geq 0$.

Знайдемо розв'язок рівняння

$$\frac{y}{1 + Cy^p} = \frac{A}{B}\varepsilon \tag{1.34}$$

вигляду $y = z\varepsilon$. Тоді z задовольняє рівняння

$$\frac{z}{1 + Cz^p\varepsilon^p} = \frac{A}{B}.$$

Легко перевірити, що корінь z приймає значення менше 1, якщо

$$\varepsilon < \left(\frac{B - A}{BC}\right)^{1/p}.$$

Тому при

$$\varepsilon < \varepsilon_* = \inf_t \left(\frac{B(t) - A(t)}{B(t)C(t)}\right)^{1/p}$$

існує таке $\nu \in (0, 1)$, що розв'язок нерівності (1.33) задовольняє оцінку

$$y(\tau_n - h) < \nu\varepsilon.$$

Якщо $y'(\tau_n - h) \leq 0$, то

$$\frac{y(\tau_n - 2h)}{1 + C(\tau_n - h) y^p(\tau_n - 2h)} \leq \frac{A(\tau_n - h)}{B(\tau_n - h)}\nu\varepsilon$$

і $y(\tau_n - 2h) < \nu^2\varepsilon$.

Якщо $y'(\tau_n - h) > 0$, виберемо першу зліва від $\tau_n - h$ точку θ_1, де $y'(\theta_1, \varphi_1) \leq 0$.

Продовжуючи аналогічно, отримуємо послідовність точок θ_k, таку, що $y(\theta_k, \varphi_1) \leq \nu^k\varepsilon$.

Нехай $\tilde{\varphi}_1 = \inf\limits_{\theta \in [-h(0),0]} \varphi_1(\theta)$. Виберемо k_1 так, що $\gamma^{k_1}\varepsilon < \tilde{\varphi}_1$. Вибираючи досить велике τ_n за початкове з нескінченної послідовності $\{\tau_n\}$, отримуємо, що існує таке θ_k, що $y(\theta_k, \varphi_1) \leq \nu^k \varepsilon < \tilde{\varphi}_1$. Суперечність. Якщо початкова функція $\varphi_1(\theta)$ не відділена від нуля, тоді в якості початкової функції розглядаємо розв'язок $y(t, \varphi_1)$, $t \in [0, h]$. За першою частиною доведення теореми він строго додатний і $\inf\limits_{\theta \in [0,h]} y(\theta, \varphi_1) > 0$.

Якщо $p > 1$, то функція $x/(1+cx^p)$ має максимум у точці $x_M = (c(p-1))^{-1/p}$.

При фіксованому $\varepsilon > 0$ рівняння (1.34) має два додатні розв'язки y_1 і y_2.

Якщо
$$\frac{A}{B}\varepsilon < \frac{\tilde{M}_0}{1 + C\tilde{M}_0^p},$$
корінь y_2 задовольняє оцінку $y_2 > \tilde{M}_0$.

Оскільки всі розв'язки рівняння (1.29), (1.30) фінально рівномірно обмежені зверху сталою $\tilde{M}_0$, будемо вважати, що розв'язки обмежені сталою $\tilde{M}_0$ при всіх $t \geq t_0$. Тому корінь y_2 рівняння (1.34) відкидаємо.

Отже, при
$$\varepsilon < \varepsilon^* = \min\left\{ \inf_t \left(\frac{B(t) - A(t)}{B(t)C(t)} \right)^{1/p},\ \inf_t \left(\frac{B(t)\tilde{M}_0}{A(t)(1 + C(t)\tilde{M}_0^p)} \right) \right\}$$
розв'язок нерівності (1.33) задовольняє оцінку $y(\tau_n - h) < \nu\varepsilon$ з деяким $\nu \in (0, 1)$.

Далі доведення аналогічне випадку $p \leq 1$.

Отже, в якості $\tilde{m}_0$ для розв'язків рівняння (1.29), (1.30) можна вибрати число ε_*, якщо $p \leq 1$, і число ε^* при $p > 1$.

Відповідно в якості m_0 для розв'язків рівняння (1.23), (1.24) можна вибрати число $\omega^L \varepsilon_*$, якщо $p \leq 1$, і число $\omega^L \varepsilon^*$ при $p > 1$.

Теорему доведено.

$\square$

1.4.2. Існування додатного майже періодичного розв'язку.

Теорема 1.15. *Нехай виконуються умови (1.27) і (1.28) із теореми 1.14, а також*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{y\in[\tilde{m}_0,\tilde{M}_0]} \frac{B(t)(1+C(t)(1-p)y^p)}{(1+C(t)y^p)^2} < \sigma_1.$$

Тоді рівняння (1.23), (1.24) має єдиний додатний асимптотично стійкий w-майже періодичний розв'язок.

Доведення. З доведення теореми 1.14 випливає, що якщо початкова функція розв'язку належить області перманентності рівняння, то розв'язок залишається в цій області при всіх $t > 0$.

Розглянемо два такі розв'язки $y_1(t)$ і $y_2(t)$ рівняння (1.29), (1.30), тобто розв'язки, які задовольняють умови

$$\tilde{m}_0 \le y_i(t) \le \tilde{M}_0,\ i = 1, 2.$$

Їх різниця $w(t) = y_1(t) - y_2(t)$ задовольняє рівняння без імпульсів

$$w'(t) = -A(t)w(t) + B_2(t)w(t-h), \tag{1.35}$$

де

$$B_2(t) = \frac{B(t)(1+(1-p)C(t)\tilde{y}^p(t-h))}{(1+C(t)\tilde{y}^p(t-h))^2},$$

$\tilde{y}(t) = y_1(t)+\xi(t)(y_1(t)-y_2(t))$, функція $\xi(t)$ приймає значення з відрізку $[0, 1]$ при всіх t.

Рівняння (1.35) рівномірно асимптотично стійке, якщо $\sup_t |B_2(t)| < \inf_t A(t)$ (див. [79, с. 154]).

Отже, рівномірно асимптотично стійким є й кожний розв'язок рівняння (1.29), (1.30), який належить області перманентності. Всі ці розв'язки асимптотично w-майже періодичні.

Тому рівняння (1.29), (1.30) має єдиний w-майже періодичний розв'язок, а значить і рівняння (1.23), (1.24)) має єдиний w-майже періодичний розв'язок, додатнозначний і асимптотично стійкий при $t \to +\infty$. □

Зауваження 1.16. Нехай виконуються умови (1.27) і (1.28), а також
$$\frac{B^M}{1 + C^L \varepsilon_*^p} < \sigma_1,$$
якщо $p \leq 1$, або
$$\frac{B^M p}{1 + C^L (\varepsilon^*)^p} < \sigma_1,$$
якщо $p > 1$. Тоді рівняння (1.23), (1.24) має єдиний додатний асимптотично стійкий w-майже періодичний розв'язок.

Висновки до розділу 1

У даному розділі розглянуто систему рівнянь із запізненням та імпульсною дією

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-h)),\ t \neq t_k,$$
$$x(t_k+0) = x(t_k) + I_k(x(t_k)),\ k = 1, 2, ...,$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $h = \text{const} > 0$.

Послідовність дійсних чисел $t_k,\ k = 1, 2, \ldots$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, функція $f(t, x, y)$ є w-майже періодичною по t і Ліпшицевою по x і y рівномірно відносно x, y із компактних множин, множиною розривів f є послідовність $\{t_k\}$, послідовність $\{I_k(x)\}$ є майже періодичною рівномірною відносно x із компактних множин, функції $I_k(x)$ є Ліпшицевими по x.

Доведено теорему існування кусково-неперервних майже періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із запізненням та фіксованими моментами імпульсів. Для доведення використовуємо властивості асимптотично майже періодичних розв'язків.

Використовуючи отримані результати, досліджено існування і стійкість майже періодичних розв'язків моделі біологічної популяції з імпульсною дією та віковою структурою, яка проходить дві стадії — незрілу і зрілу:

$$\dot{x}_i(t) = \alpha(t)x_m(t) - \gamma(t)x_i(t) - \alpha(t)e^{-\int_{t-h}^{t}\gamma(s)ds}x_m(t-h),$$
$$\dot{x}_m(t) = \alpha(t)e^{-\int_{t-h}^{t}\gamma(s)ds}x_m(t-h) - \beta(t)x_m^2(t),$$

для $t \neq t_k$ із імпульсним впливом

$$x_m(t_k+0) = (1+d_k)x_m(t_k),$$

у момент часу t_k, $k \in \mathbb{Z}$. Послідовність $\{t_k\}$ моментів імпульсного впливу має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, послідовність $\{d_k\}$ є майже періодичною, $d_k \in (-1, d]$, $d > 0$, функції $\alpha(t)$, $\beta(t)$ й $\gamma(t)$ є кусково-неперервними, додатними q w-майже періодичними.

Отримано достатні умови існування додатного w-майже періодичного розв'язку, який є глобальним атрактором.

Також досліджено рівняння типу Маккі – Гласса з майже періодичними коефіцієнтами та імпульсною дією вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha(t)x(t) + \frac{\beta(t)x(t-h)}{1+\gamma(t)x^p(t-h)},$$
$$x(t_k+0) - x(t_k) = a_k x(t_k) + b_k,$$

де $x \geq 0$, p і h — додатні сталі, кусково-неперервні функції $\alpha(t)$, $\beta(t)$ та $\gamma(t)$ додатнозначні та w-майже періодичні, послідовності $\{a_k\}$ та $\{b_k\}$ майже періодичні, й $a_k > -1$, $b_k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, послідовність $\{t_k\}$ точок імпульсної дії має рівномірно майже періодичні послідовності різниць.

Отримано умови перманентності та існування кусково-неперервного додатного майже періодичного розв'язку рівняння типу Маккі – Гласса з майже періодичними коефіцієнтами та імпульсною дією. Доводимо існування додатнозначного асимптотичного w-майже періодичного розв'язку, з чого випливає існування додатньозначного асимптотично стійкого w-майже періодичного розв'язку.

Основний результат:

– знайдено умови існування кусково-неперервного майже періодичного розв'язку системи з запізненням і фіксованими моментами імпульсів, доведено теорему існування кусково-неперервних розв'язків такого рівняння; використовуючи цей результат, досліджено майже періодичні розв'язки моделі біологічної популяції з віковою структурою та отримано умови перманентності й існування кусково-неперервного додатного майже періодичного розв'язку рівняння типу Маккі – Гласса з майже періодичними коефіцієнтами та імпульсною дією.

РОЗДІЛ 2

Асимптотично майже періодичні розв'язки у системах з нефіксованими моментами імпульсів

Результати даного розділу опубліковано у статтях [10, 11].

2.1. Умови існування майже періодичних розв'язків рівнянь із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії

Розглянемо систему диференціальних рівнянь із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \quad t \neq \tau_k(x(t)), \tag{2.1}$$

$$x(t+0) = x(t) + I_k(x(t)), \quad t = \tau_k(x(t)), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{2.2}$$

де $x \in \mathbb{R}^n,\ h > 0$.

Імпульсна дія відбувається при досягненні розв'язками поверхонь $\Gamma_k = \{(t, x) :\ t = \tau_k(x)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, які рівномірно відділені одна від іншої.

У системах із нефіксованими моментами імпульсів може з'являтися так званий феномен биття, тобто розв'язок може перетинати поверхню $t = \tau_k(x)$ кілька разів чи навіть нескінченну кількість разів [98, 144].

Оскільки розв'язки рівнянь із запізненням однозначно задаються значеннями на початковому інтервалі й через кожну точку $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

проходить нескінченна кількість розв'язків, які не обов'язково продовжуються вліво, до систем із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії не застосовується метод зведення до систем із фіксованими моментами імпульсної дії, запропонований в [21] для систем звичайних диференціальних рівнянь без запізнення.

Будемо розглядати систему (2.1), (2.2) з такими умовами:

(**H1**) Позначимо

$$U_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| \le \rho\},$$

де ρ — деяке додатне число.

Припустимо, що послідовність $\{\tau_k\}$ функцій імпульсної дії $\tau_k : \ U_\rho \to \mathbb{R}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць рівномірно відносно $x \in U_\rho$ і існують такі $\theta > 0$ і $\Theta > 0$, що

$$\inf_x \tau_{k+1}(x) - \sup_x \tau_k(x) \ge \theta$$

і

$$\sup_x \tau_{k+1}(x) - \inf_x \tau_k(x) \le \Theta$$

для всіх $x \in U_\rho$ і $k \in \mathbb{Z}$.

(**H2**) Функція $f(t,x,y)$ майже періодична по t й ліпшицева по $x, y \in U_\rho$ зі сталою

$$L_1 > 0 : \ \|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)\| \le L_1(\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|).$$

(**H3**) Вектор-функції $I_j : \ U_\rho \to \mathbb{R}^n$ ліпшицеві по $x \in U_\rho$ зі сталою $L_1 > 0$.

Послідовность $\{I_j(x)\}$ майже періодична рівномірно відносно $x \in U_\rho$.

Означення 2.1. Функція $x(t) \in \mathcal{PC}([t_0 - h, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^n)$, де $\alpha > 0$, є розв'язком системи (2.1), (2.2), якщо виконуються такі умови:

(i) множина $T = \{t \in [t_0, t_0 + \alpha] : \ \ t = \tau_k(x(t))$ для деякого $k\}$ точок імпульсної дії скінченна (можливо, порожня);

(ii) $x(t)$ неперервна при всіх $t \in (t_0, t_0 + \alpha] \setminus T$;

(iii) $x(t)$ неперервно диференційовна при всіх $t \in (t_0, t_0 + \alpha] \setminus T$ за винятком скінченної множини точок;

(iv) похідна зліва функції $x(t)$ існує й задовольняє систему (2.1) для всіх $t \in (t_0, t_0 + \alpha] \setminus T$;

(v) для $t \in T$ функція $x(t)$ задовольняє умову (2.2).

Якщо додатково функція $x(t)$ задовольняє умову

$$x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta),\ \theta \in [-h, 0], \quad \varphi \in \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n), \tag{2.3}$$

то вона є розв'язком початкової задачі (2.1) – (2.3).

Функція $x(t)$ є розв'язком системи (2.1), (2.2) на нескінченному інтервалі, якщо вона є розв'язком на кожному обмеженому підінтервалі.

Отже, припускаємо, що розв'язки системи (2.1), (2.2) неперервні зліва, а також що у множині U_ρ розв'язки системи (2.1), (2.2) не мають биття з поверхнями $t = \tau_j(x)$, тобто розв'язки перетинають кожну поверхню не більше одного разу.

Достатні умови відсутності биття наведено в [98].

Для розв'язку $x(t)$ через x_t будемо позначати його звуження на інтервал $[t - h, t]$, тобто

$$x_t = \{x(t + \theta), \theta \in [-h, 0]\}.$$

Означення 2.2. Розв'язок $\xi(t)$ системи (2.1), (2.2), який при всіх $t \geq t_0 - h$, належить U_ρ і $\tau_j(x_0(t_0)) \neq t_0$, $j \in \mathbb{Z}$, називається стійким за Ляпуновим, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$, що для довільного іншого розв'язку $x(t)$ з початковими значеннями з U_ρ і

$$\|\xi(\theta) - x(\theta)\| < \delta,\ \theta \in [t_0 - h, t_0],\ |\theta - \tau_j^0| > \delta,$$

виконується $\|\xi(t) - x(t)\| < \varepsilon$ для всіх $t \geq t_0$ таких, що $|t - \tau_j^0| > \varepsilon$, де τ_j^0 — це моменти часу, при яких розв'язок $\xi(t)$ перетинає поверхні $t = \tau_j(x)$, $j \in \mathbb{Z}$.

Означення 2.3. Розв'язок $\xi(t)$ рівномірно стійкий за Ляпуновим, якщо δ не залежить від початкових моментів t_0, які задовольняють нерівності $|t_0 - \tau_j^0| > \delta$, $j \in \mathbb{Z}$.

Означення 2.4. Розв'язок $\xi(t)$ називається асимптотично стійким, якщо він стійкий і існує таке $\delta_0 > 0$, що для $t_0 \in \mathbb{R}$ і кожного $\varepsilon > 0$ існує $T = T(t_0, \varepsilon) > 0$ таке, що для будь-якого іншого розв'язку $x(t)$ системи з початковими значеннями з $[0, \rho]$ і

$$|\xi(\theta) - x(\theta)| < \delta_0,\ \theta \in [t_0 - h, t_0],\ |\theta - \tau_j^0| > \delta_0,$$

виконується $|\xi(t) - x(t)| < \varepsilon$ для $t \geq t_0 + T$ і $|t - \tau_j^0| > \varepsilon$.

Означення 2.5. Розв'язок $\xi(t)$ рівномірно асимптотично стійкий, якщо наведені вище нерівності виконуються для всіх $t_0 \in \mathbb{R}$, $|t_0 - \tau_j^0| > \delta_0$, $j \in \mathbb{Z}$, з незалежними від t_0 моментами часу T.

При вивченні майже періодичних систем із фіксованими моментами імпульсної дії послідовність точок імпульсів $\{\tau_k\}$ не залежить від x й має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, тому достатньо розглядати асимптотично майже періодичні функції з розривами в наперед заданих точках τ_k. У цьому випадку асимптотично майже періодична функція є сумою w-майже періодичної функції й функції, яка прямує до нуля при $t \to \infty$ [125].

У загальному випадку систем із нефіксованими моментами імпульсної дії послідовності розривів розв'язків не обов'язково мають рівномірно майже періодичні послідовності різниць. Тому використовуємо інше означення.

Ці два означення еквівалентні у випадку систем із фіксованими моментами імпульсної дії.

Означення 2.6. Кусково-неперервна функція $\xi(t)$ називається асимптотично w-майже періодичною, якщо для будь-якої послідовності дійсних чисел $\{\tau_k\}$, такої, що $\tau_k \to \infty$ при $k \to \infty$, існує підпослідовність $\{\tau_{k_j}\}$, для якої $\xi(t + \tau_{k_j})$ збіжна на $0 \leq t < \infty$ в w-топології.

Нехай функція $\xi(t)$ асимптотично w-майже періодична і $\theta_k \to \infty, k \to \infty$.

Припустимо, що послідовність $\{\xi(t+\theta_k)\}$ збігається на $[0,\infty)$ в w-топології до функції $p(t)$ з послідовністю розривів $\{p_k\}$. Використовуючи стандартний діагональний метод і вибираючи, якщо необхідно, підпослідовність послідовності $\{\theta_k\}$, продовжуємо функцію $p(t)$ з послідовністю розривів $\{p_k\}$ на всю вісь. Послідовність $\{\xi(t+\theta_k)\}$ збігається в w-топології до функції $p(t)$ на компактних підмножинах $\mathbb{R}$.

Позначимо через $H(\xi)$ замикання множини всіх таких граничних функцій $p(t)$ в w-топології на компактних підмножинах.

Лема 2.7. *Множина $H(\xi)$ для асимптотично w-майже періодичної функції $\xi(t)$ з послідовністю розривів $\{t_k\}$ є компактною в w-топології на осі і складається з w-майже періодичних функцій.*

Доведення. Спочатку доведемо, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $T = T(\varepsilon)$, що множина

$$\{\tau : \sup_{t \geq T(\varepsilon)} \|\xi(t+\tau) - \xi(t)\| < \varepsilon, \ |t - t_k| > \varepsilon\} \tag{2.4}$$

відносно щільна в $\mathbb{R}$. Доведемо від супротивного, що множина (2.4) не є відносно щільною для деякого $\varepsilon_0 > 0$. Тоді для довільного $T(\varepsilon_0)$ існує послідовність інтервалів $[h_n - l_n, h_n + l_n]$, таких, що

$$\sup_{t \geq T(\varepsilon_0), \ |t-t_k| \geq \varepsilon_0} \|\xi(t+\tau) - \xi(t)\| \geq \varepsilon_0$$

для всіх $\tau \in [h_n - l_n, h_n + l_n]$.

Виберемо довільне l_n і $l_n > \max_{m<n} h_m$, тоді $h_n - h_m \in [h_n - l_n, h_n + l_n]$, якщо $m < n$. Тому

$$\sup_{t \geq 0, |t+h_m-t_k| \geq \varepsilon_0} \|\xi(t+h_n) - \xi(t+h_m)\| =$$

$$= \sup_{t \geq h_m, |t-t_k| \geq \varepsilon_0} \|\xi(t) - \xi(t+h_n-h_m)\| \geq \varepsilon_0.$$

Це суперечить w-збіжності послідовності функцій $\{\xi(t+h_n)\}$.

Нехай $\{\theta_k\}$ — деяка послідовність дійсних чисел, така, що $\theta_{k+1} > \theta_k$ і $\theta_k \to \infty$, $k \to \infty$, і $p(t)$ — побудована за цією послідовністю гранична функція.

Доведемо, що функція $p(t)$ w-майже періодична.

Спочатку покажемо, що гранична функція $p(t)$ задовольняє нерівність $\|p(t+\tau) - p(t)\| < \varepsilon$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, $|t - p_k| > \varepsilon$.

Вибиремо θ_n з достатньо великим n, тоді отримаємо нерівність $\|\xi(t+\theta_n+\tau) - \xi(t+\theta_n)\| < \varepsilon$ для $t \geq T(\varepsilon) - \theta_n$, $t+\tau \geq T(\varepsilon) - \theta_n$ і $|t+\theta_n - t_k| > \varepsilon$.

Зафіксуємо t і τ та виберемо достатньо велике n так, що виконуються останні нерівності. Переходячи до границі при $n \to \infty$, отримуємо $\|p(t+\tau) - p(t)\| < \varepsilon$. Ця нерівність виконується для $t \in \mathbb{R}$, $|t - p_k| > \varepsilon$ і відносно щільної множини ε-майже періодів τ.

Тепер доведемо, що послідовність розривів $\{p_k\}$ при $k \in \mathbb{Z}$ функції $p(t)$ має рівномірно майже періодичні різниці.

Розглянемо функції

$$F(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \phi(t - t_j),\ P(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \phi(t - p_j),$$

де $\phi(t) = \max\{0, 1 - 4|t|/\theta\}$. Відмітимо, що при кожному фіксованому t кожна з цих сум містить тільки один ненульовий член.

Оскільки $\xi(t + \theta_k)$ збігається в w-топології до $p(t)$, то це означає, що існує послідовність цілих чисел $\alpha(k)$, така, що

$$\lim_{k \to \infty} (t_{n+\alpha(k)} - \theta_k) = p_n$$

рівномірно відносно $n \in \mathbb{Z}_+$. Якщо $\left|t_{n+\alpha(k)} - \theta_k - p_n\right| < \varepsilon$, то

$$|\phi(t - t_{n+\alpha(k)} + \theta_k) - \phi(t - p_n)| = \left| \int_{t - t_{n+\alpha(k)} + \theta_k}^{t - p_n} \phi'(s) ds \right| < \frac{4\varepsilon}{\theta}.$$

Для кожного $t \geq 0$ тільки одна така різниця відмінна від нуля.

Отже, послідовність $\{F(t + \theta_j)\}$ рівномірно збігається на півосі $t \geq 0$. Тому неперервна функція $F(t)$ є асимптотично майже періодичною.

Аналогічно до попереднього отримуємо, що гранична функція $P(t)$ майже періодична за Бором ([63, с. 154]).

Для $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина ε-майже періодів ω функції $P(t)$.

Зокрема, $|P(p_n + \omega) - P(p_n)| < \varepsilon$. Враховуючи форму функції $P(t)$, отримуємо, що для $p_n + \omega$ існує така точка $p_{n+\alpha(\omega)}$, що

$$|p_n + \omega - p_{n+\alpha(\omega)}| < \frac{\theta\varepsilon}{4}. \tag{2.5}$$

За лемою 2 зі [145] послідовність $\{t_n\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць тоді й тільки тоді, коли для кожного $\varepsilon > 0$ множина Ω_ε всіх чисел ω, таких, що

$$|t_n^{h_\omega} - \omega| < \varepsilon$$

для деякого $h_\omega \in \mathbb{Z}$ і всіх $n \in \mathbb{Z}$, відносно щільна на $\mathbb{R}$.

Тому за (2.5) послідовність $\{p_n\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць. Лему доведено. □

Теорема 2.8. *Припустимо, що система (2.1), (2.2) має розв'язок $\xi(t)$, визначений на $I = [0, \infty)$ і такий, що $\|\xi(t)\| \leq \rho < \infty$ для всіх $t \geq 0$. Якщо розв'язок $\xi(t)$ асимптотично w-майже періодичний, то система (2.1), (2.2) має w-майже періодичний розв'язок $p(t)$.*

Доведення. Нехай послідовність $\{\theta_m\}$ така, що $\theta_m \to \infty$ і

$$f(t + \theta_m, x, y) \to f(t, x, y)$$

при $m \to \infty$ рівномірно відносно $t \in \mathbb{R}$ і $x, y \in U_\rho$, а також існує послідовність цілих чисел $\{\alpha(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, така, що

$$\lim_{m\to\infty} (\tau_{n+\alpha(m)}(x) - \theta_m) = \tau_n(x), \ \lim_{m\to\infty} I_{n+\alpha(m)}(x) = I_n(x) \tag{2.6}$$

рівномірно відносно $n \in \mathbb{Z}$, $x \in U_\rho$.

Оскільки розв'язок $\xi(t)$ асимптотично w-майже періодичний, то існує підпослідовність послідовності $\{\theta_m\}$ (яку ми знову позначимо $\{\theta_m\}$), така, що $\xi(t + \theta_m) \to p(t)$ на півосі $t \geq 0$ у w-топології.

Функцію $p(t)$ можна однозначно продовжити до w-майже періодичної функції на осі.

Покажемо, що $p(t)$ задовольняє систему рівнянь (2.1), (2.2).

Функція $\xi(t+\theta_m)$ задовольняє систему

$$\dot{x}(t) = f(t+\theta_m, x(t), x(t-h)),\ t \neq \tau_k(x(t)) - \theta_m, \tag{2.7}$$

$$x(t+0) = x(t) + I_k(x(t)), \quad t = \tau_k(x(t)) - \theta_m, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.8}$$

З урахуванням (2.6) перепишемо (2.8) у вигляді

$$\begin{aligned} &x(t+0) = x(t) + I_{k+\alpha(m)}(x(t)),\\ &\ t = \tau_{k+\alpha(m)}(x(t)) - \theta_m,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Послідовність $\xi(t+\theta_m)$ при $m \to \infty$ збігається на компактах у w-топології до w-майже періодичної функції $p(t)$.

Позначимо через τ_j^m числа, які задовольняють рівності

$$\tau_j^m = \tau_{j+\alpha(m)}(\xi(\tau_j^m + \theta_m)) - \theta_m, \tag{2.10}$$

тобто $\tau_j^m + \theta_m$ — це моменти перетину розв'язку $\xi(t+\theta_m)$ з поверхнями

$$t = \tau_{j+\alpha(m)}(x) - \theta_m.$$

При $m \to \infty$ виконується

$$\tau_j^m = \tau_{j+\alpha(m)}(\xi(\tau_j^m + \theta_m)) - \theta_m \to p_j = \tau_j(p(p_j)),\ j \in \mathbb{Z}.$$

Нехай $[\bar{t}_1, \bar{t}_2]$ — деякий підінтервал $\mathbb{R}$.

Перепишемо систему (2.7), (2.9) у інтегральній формі

$$\begin{aligned} x(t) = x(\bar{t}_1) + \int_{\bar{t}_1}^{t} f(s+\theta_m, x(s), x(s-h))ds +\\ + \sum_{\bar{t}_1 < \tilde{\tau}_j < t} I_{j+\alpha(m)}(x(\tilde{\tau}_j)), \end{aligned}$$

де $\tilde{\tau}_j$ задовольняє рівність

$$\tau_{j+\alpha(m)}(x(\tilde{\tau}_j)) - \theta_m = \tilde{\tau}_j.$$

Функція $\xi(t+\theta_m)$ задовольняє це рівняння:

$$\xi(t+\theta_m) = \xi(\bar{t}_1+\theta_m) + \\ + \int_{\bar{t}_1}^{t} f(s+\theta_m, \xi(s+\theta_m), \xi(s+\theta_m-h))ds + \\ + \sum_{\bar{t}_1<\tau_j^m<t} I_{j+\alpha(m)}(\xi(\tau_j^m+\theta_m)).$$

Переходячи до границі $\theta_m \to \infty$, отримуємо

$$p(t) = p(\bar{t}_1) + \int_{\bar{t}_1}^{t} f(s, p(s), p(s-h))ds + \sum_{\bar{t}_1<p_j<t} I_j(p(p_j)).$$

Отже, w-майже періодична функція $p(t)$ є розв'язком системи (2.1), (2.2). Теорему доведено. $\square$

Теорема 2.9. *Припустимо, що*

$$M_0N_1 + N_1 < 1,$$

де

$$M_0 = \sup_{t\in\mathbb{R},\ x,y\in U_\rho} \|f(t,x,y)\|,$$

а N_1 *є сталою Ліпшиця для поверхонь імпульсів:*

$$|\tau_j(x) - \tau_j(y)| \le N_1\|x-y\|,\ j\in\mathbb{Z},\ x,y\in U_\rho.$$

Нехай розв'язок $\xi(t)$ *системи (2.1), (2.2) при всіх* $t\in[0,\infty)$ *належить* U_ρ *і є рівномірно асимптотично стійким при* $t\ge 0$. *Тоді* $\xi(t)$ *асимптотично* w*-майже періодичний, а система (2.1), (2.2) має* w*-майже періодичний розв'язок, який є асимптотично стійким при* $t\ge 0$.

Доведення. Використавши ідею, описану в роботі [175], отримаємо:

1. Оскільки розв'язок $\xi(t)$ рівномірно асимптотично стійкий, то існує таке $\delta_0>0$, що для довільного $\varepsilon>0$ існують $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, $\delta\le\delta_0$,

і $T(\varepsilon) > h$, такі, що для іншого розв'язку $x(t)$ рівняння (2.1), (2.2) з $\rho(\xi_0, x_0) < \delta$ випливає

$$\|\xi(t) - x(t)\| < \varepsilon/2$$

для $t \geq 0,\ |t - \tau_j^0| > \varepsilon/2$, і

$$\|\xi(t) - x(t)\| < \delta_1/2$$

для всіх $t \geq T(\varepsilon) - h,\ |t - \tau_j^0| > \delta_1/2$, де $\delta_1 = \min(\varepsilon, \delta)$, а τ_j^0 — точки перетину розв'язку $\xi(t)$ з поверхнями $t = \tau_j(x)$. Як і раніше, ми позначаємо $x_t = \{x(t+\theta),\ -h \leq \theta \leq 0\}$ для розв'язку $x(t)$.

Візьмемо довільну послідовність $\{\theta_m\}$, таку, що $\theta_{m+1} > \theta_m, \theta_m \to \infty$ при $m \to \infty$. Покажемо, що існує така підпослідовність $\{\theta_{m_k}\}$, що послідовність функцій $\xi(t + \theta_{m_k})$ збігається в w-топології на півосі $t \geq 0$.

Позначимо $\xi^m(t) = \xi(t + \theta_m)$. Тоді $\xi^m(t)$ є розв'язком системи (2.7), (2.9), і він асимптотично стійкий із тими ж сталими $\delta_0, \delta(\varepsilon)$ і $T(\varepsilon)$, що й у розв'язку $\xi(t)$.

У послідовності $\{\theta_m\}$ існує підпослідовність (яку знову позначимо $\{\theta_m\}$), така, що виконуються умови:

а) рівномірно відносно $i \in \mathbb{Z}$ і $x \in U_\rho$ існує границя

$$\lim_{m\to\infty} (\tau_{i+\alpha(m)}(x) - \theta_m) = p_i(x), \tag{2.11}$$

де $\{\alpha(m)\}$ — це деяка послідовність цілих чисел, а послідовність $\{p_i(x)\}$ має рівномірно майже періодичні різниці для $x \in U_\rho$;

б) $f(t+\theta_m, x, y)$ збігається до $g(t, x, y)$ на осі в w-топології рівномірно відносно $x, y \in U_\rho$;

в) послідовність функцій $\xi_0^m = \{\xi^m(\theta), \theta \in [-h, 0]\}$ збігається в w-топології при $m \to \infty$ до деякої функції ζ_0. Існування граничної функції показано в лемі 1 з [12].

Кожна з функцій ξ_0^m має скінченну множину Ξ_m точок розривів, які відповідають точкам перетину $\xi(t + \theta_m)$ з поверхнями $t = \tau_j(x)$ на відрізках $[\theta_m - h, \theta_m]$.

Припускаємо, що граничні точки об'єднання множин Ξ_m рівномірно відділені від нуля.

Якщо таке припущення не виконується, то замість послідовності функцій ξ_0^m можна взяти послідовність функцій ξ_ν^m з деяким $\nu > 0$.

Тому для δ_1 і додатного $\delta_2 \leq \theta/4$ існує натуральне число $k_0 = k_0(\delta_2)$, таке, що для $k \geq m \geq k_0$ виконується

$$\rho(\xi_0^k, \xi_0^m) \leq \delta_1, \|I_{i+\alpha(k)}(x) - I_{i+\alpha(m)}(x)\| < \delta_2$$

і

$$\|f(t+\theta_k, x, y) - f(t+\theta_m, x, y)\| < \delta_2,$$
$$|\tau_{i+\alpha(k)}(x) - \theta_k - \tau_{i+\alpha(m)}(x) + \theta_m| < \delta_2$$

для всіх $x, y \in U_\rho$, $t \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$.

Позначимо через $\eta(t)$ розв'язок системи (2.7), (2.9) з початковою функцією $\eta_0 = \xi_0^k$.

Оскільки система (2.7), (2.9) рівномірно асимптотично стійка, то

$$\|\xi^m(t) - \eta(t)\| < \delta_1/2 \tag{2.12}$$

для всіх $t \geq 0$, $|t - \tau_j^m| > \varepsilon/2$ і

$$\|\xi^m(t) - \eta(t)\| < \delta_1/2 \tag{2.13}$$

для всіх $t \geq T(\varepsilon) - h$, $|t - \tau_j^m| > \delta_1/2$, де τ_j^m, як і раніше, задовольняє (2.10).

Оцінимо різницю $\eta(t) - \xi^k(t)$ на інтервалі $t \in [0, T(\varepsilon)]$.

Функція $\xi^k(t)$ задовольняє систему рівнянь

$$\dot{y}(t) = f(t+\theta_k, y(t), y(t-h)),$$
$$y(\tau_j^k + 0) = y(\tau_j^k) + I_{j+\alpha(k)}(y(\tau_j^k)),\ j \in \mathbb{Z},$$

де τ_j^k визначається з рівності $\tau_j^k = \tau_{j+\alpha(k)}(\xi^k(\tau_j^k)) - \theta_k,\ j \in \mathbb{Z}$.

Різниця $\eta(t)-\xi^k(t)$ задовольняє інтегральне рівняння

$$\eta(t)-\xi^k(t)=\eta(0)-\xi^k(0)+\int_0^t \big(f(s+\theta_m,\eta(s),\eta(s-h))-$$

$$-f(s+\theta_k,\xi^k(s),\xi^k(s-h))\big)\,ds+ \tag{2.14}$$

$$+\sum_{0<\tau_j^m<t} I_{j+\alpha(m)}(\eta(\tau_j^m))-\sum_{0<\tau_j^k<t} I_{j+\alpha(k)}(\xi^k(\tau_j^k)),$$

де τ_j^m визначається з рівності $\tau_j^m=\tau_{j+\alpha(m)}(\eta(\tau_j^m))-\theta_m,\ j\in\mathbb{Z}$.

Позначимо $\tau_j'=\min\{\tau_j^m,\tau_j^k\},\ \tau_j''=\max\{\tau_j^m,\tau_j^k\}$ і розглянемо множини на прямій

$$\mathcal{J}=\cup_j\mathcal{J}_j,\ \mathcal{J}_j=(\tau_j'',\tau_{j+1}'],\quad \mathcal{I}=\cup_j\mathcal{I}_j,\ \mathcal{I}_j=(\tau_j',\tau_j''].$$

З (2.11) випливають оцінки

$$|\tau_j^m-p_j(\eta(\tau_j^m))|\le\delta_2,\quad |\tau_j^k-p_j(\xi^k(\tau_j^k))|\le\delta_2$$

для $k\ge m\ge k_0$ і $j=1,2,\ldots.$ Тому

$$|\tau_j^m-\tau_j^k|\le|\tau_j^m-p_j(\eta(\tau_j^m))|+|p_j(\eta(\tau_j^m))-p_j(\xi^k(\tau_j^k))|+$$

$$+|\tau_j^k-p_j(\xi^k(\tau_j^k))|\le 2\delta_2+N_1\|\eta(\tau_j^m)-\xi^k(\tau_j^k)\|.$$

Виконуються нерівності

$$\|\eta(\tau_j^m)-\xi^k(\tau_j^k)\|\le\frac{2M_0\delta_2+\|\eta(\tau_j')-\xi^k(\tau_j')\|}{1-M_0N_1}, \tag{2.15}$$

$$|\tau_j^m-\tau_j^k|\le\frac{2\delta_2+N_1\|\eta(\tau_j')-\xi^k(\tau_j')\|}{1-M_0N_1}. \tag{2.16}$$

Дійсно, якщо $\tau_j^m<\tau_j^k$, то

$$\|\eta(\tau_j^m)-\xi^k(\tau_j^k)\|\le\|\eta(\tau_j^m)-\xi^k(\tau_j^m)\|+\|\xi^k(\tau_j^m)-\xi^k(\tau_j^k)\|\le$$

$$\le\|\eta(\tau_j^m)-\xi^k(\tau_j^m)\|+\int_{\tau_j^m}^{\tau_j^k}\|f(s,\xi^k(s),\xi^k(s-h))\|ds\le$$

$$\le\|\eta(\tau_j^m)-\xi^k(\tau_j^m)\|+M_0(2\delta_2+N_1\|\eta(\tau_j^m)-\xi^k(\tau_j^k)\|),$$

звідки отримуємо (2.15) і (2.16). Відмітимо, що при наших припущеннях і досить малому δ_2 на відрізку $[\tau_j^m, \tau_j^k)$ розв'язок $\xi(t)$ не має перетинів із поверхнями $\tau_j(x)$.

При $\tau_j^m > \tau_j^k$ доведення аналогічне.

Враховуючи рівність початкових функцій $\eta(0) = \xi^k(0)$, з (2.14) отримуємо

$$\begin{aligned}
&\|\eta(t) - \xi^k(t)\| \leq \\
&\leq \int_0^t \|f(s+\theta_m, \eta(s), \eta(s-h)) - f(s+\theta_m, \xi^k(s), \eta(s-h))\| ds + \\
&+ \int_0^t \|f(s+\theta_m, \xi^k(s), \eta(s-h)) - f(s+\theta_m, \xi^k(s), \xi^k(s-h))\| ds + \\
&+ \int_0^t \|f(s+\theta_m, \xi^k(s), \xi^k(s-h)) - f(s+\theta_k, \xi^k(s), \xi^k(s-h))\| ds + \\
&+ \| \sum_{0<\tau_j^m<t} I_{j+\alpha(m)}(\eta(\tau_j^m)) - \sum_{0<\tau_j^k<t} I_{j+\alpha(k)}(\xi^k(\tau_j^k))\| = \\
&= i_1 + i_2 + i_3 + s_1. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Оцінимо інтеграли й суми у (2.17) при $t \in \mathcal{J}$.

$$i_1 = \int_{[0,t]\cap\mathcal{J}} \|f(s+\theta_m, \eta(s), \eta(s-h)) - f(s+\theta_m, \xi^k(s), \eta(s-h))\| ds +$$

$$+ \int_{[0,t]\cap\mathcal{I}} \|f(s+\theta_m, \eta(s), \eta(s-h)) - f(s+\theta_m, \xi^k(s), \eta(s-h))\| ds \leq$$

$$\leq L_1 \int_{[0,t]\cap\mathcal{J}} \|\eta(s) - \xi^k(s)\| ds + 2M_0 \sum_{\tau'_j, \tau'_j \in (0,t)} |\tau''_j - \tau'_j|,$$

$$i_2 = \int\limits_{-h}^{t-h} \|f(s+h+\theta_m, \xi^k(s+h), \eta(s)) -$$

$$- f(s+h+\theta_m, \xi^k(s+h), \xi^k(s))\| ds \leq$$

$$\leq L_1 \int_{[0,t-h]\cap\mathcal{J}} \|\eta(s) - \xi^k(s)\| ds + 2M_0 \sum_{0<\tau'_j<t-h} |\tau''_j - \tau'_j| +$$

$$+ L_1 \int_{-h}^{0} \|\eta_0 - \xi^k_0\| ds,$$

$$i_3 \leq \int_0^t \delta_2 ds.$$

Виконуються нерівності

$$\|I_{j+\alpha(m)}(\eta(\tau^m_j)) - I_{j+\alpha(k)}(\xi^k(\tau^k_j))\| \leq$$

$$\leq \|I_{j+\alpha(m)}(\eta(\tau^m_j)) - I_{j+\alpha(m)}(\xi^k(\tau^k_j))\| +$$

$$+ \|I_{j+\alpha(m)}(\xi^k(\tau^k_j)) - I_{j+\alpha(k)}(\xi^k(\tau^k_j))\| \leq$$

$$\leq L_1 \|\eta(\tau^m_j) - \xi^k(\tau^k_j)\| + \delta_2,$$

тому з урахуванням (2.15)

$$s_1 \leq \sum_{0<\tau'_j<t} \frac{L_1}{1-M_0N_1} \|\eta(\tau'_j) - \xi^k(\tau'_j)\| +$$

$$+ \delta_2 \left(\frac{2L_1M_0}{1-M_0N_1} + 1\right)\left(\frac{T(\varepsilon)}{\theta} + 1\right).$$

Як результат отримуємо для $t \in \mathcal{J}$

$$\|\eta(t) - \xi^k(t)\| \le 2L_1 \int_0^t \|\eta(s) - \xi^k(s)\| ds + \delta_2 M_1 + \\ + \sum_{0<\tau_j'<t} \frac{L_1 + 4M_0N_1}{1 - M_0N_1} \|\eta(\tau_j') - \xi^k(\tau_j')\|,$$

де

$$M_1 = \left(\frac{8M_0 + 2M_0L_1}{1 - M_0N_1} + 1 \right) \left(\frac{T(\varepsilon)}{\theta} + 1 \right) + T(\varepsilon).$$

Використовуючи лему Гронуолла для імпульсних систем [142, с. 12], отримуємо

$$\|\eta(t) - \xi^k(t)\| \le \delta_2 M_1 \left(1 + \frac{L_1 + 4M_0N_1}{1 - M_0N_1} \right)^{\frac{T(\varepsilon)}{\theta} + 1} e^{2L_1 T(\varepsilon)} \tag{2.18}$$

для $t \in [0, T(\varepsilon)]$, $t \notin (\tau_j', \tau_j'']$.

Виберемо δ_2 так, щоб права частина (2.18) була меншою $\delta_1/2$. Отже,

$$\|\eta(t) - \xi^k(t)\| < \frac{\delta_1}{2},\ t \in [0, T(\varepsilon)],\ t \notin (\tau_j', \tau_j'']. \tag{2.19}$$

Також будемо вимагати виконання нерівності $|\tau_j' - \tau_j''| < \delta_1/2$, що досягається вибором δ_2, яке за (2.16) задовольняє умову

$$\frac{2\delta_2 + N_1 \|\eta(\tau_j') - \xi^k(\tau_j')\|}{1 - M_0N_1} \le \frac{\delta_1}{2}$$

або $\delta_2 \le \delta_1(1 - N_1 - N_1M_0)/4$.

З (2.12) і (2.19) отримуємо

$$\|\xi^m(t) - \xi^k(t)\| \le \|\xi^m(t) - \eta(t)\| + \|\eta(t) - \xi^k(t)\| < \delta_1,$$

для $t \in [0, T(\varepsilon)]$, $|t - \tau_j^k| > \varepsilon/2$, $|t - \tau_j^m| > \varepsilon/2$.

Із умов (2.12), (2.15) і (2.19) випливає, що $|\tau_j^k - \tau_j^m| < \varepsilon$.

Отже, з (2.13) і (2.19) отримуємо

$$\rho(\xi^m_{T(\varepsilon)}, \xi^k_{T(\varepsilon)}) < \delta_1.$$

Повторюючи наведені вище аргументи, доводимо, що при $k \geq m \geq k_0$ виконується

$$\|\xi^m(t) - \xi^k(t)\| < \varepsilon$$

для $t \in [T(\varepsilon), 2T(\varepsilon)],\ |t - \tau_j^k| > \varepsilon/2,\ |t - \tau_j^m| > \varepsilon/2$

і далі

$$\|\xi^m(t) - \xi^k(t)\| < \varepsilon$$

для $t \in [qT(\varepsilon), (q+1)T(\varepsilon)]$, $|t - \tau_j^k| > \varepsilon/2$, $|t - \tau_j^m| > \varepsilon/2$.

Отже, ми довели нерівність

$$\|\xi^m(t) - \xi^k(t)\| < \varepsilon$$

для всіх $t \geq 0,\ |t - \tau_j^k| > \varepsilon/2,\ |t - \tau_j^m| > \varepsilon/2$, причому $|\tau_j^k - \tau_j^m| < \varepsilon$.

Функція $\xi(t)$ асимптотично майже періодична.

За теоремою 2.8 система (2.1), (2.2) має w-майже періодичний розв'язок $p(t)$.

2. Доведемо, що w-майже періодичний розв'язок $p(t)$ асимптотично стійкий при $t \geq 0$.

Як показано в теоремі 2.8, існує така послідовність $\{\theta_m\}$, що $\xi(t + \theta_m) \to p(t)$ рівномірно по $t \geq 0$ у w-топології.

Для послідовності $\{\theta_m\}$ виконується умова

$$f(t + \theta_m, x, y) \to f(t, x, y)$$

рівномірно по $t \in \mathbb{R}$ і $x, y \in U_\rho$, а також існує послідовність цілих чисел $\{\alpha(m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$, така, що

$$\lim_{m \to \infty} (\tau_{n+\alpha(m)}(x) - \theta_m) = \tau_n(x)$$

рівномірно по $n \in \mathbb{Z}$, $x \in U_\rho$.

Оскільки розв'язок $\xi(t)$ системи (2.1), (2.2) рівномірно стійкий, то розв'язок $\xi^m(t) = \xi(t + \theta_m)$ системи (2.7), (2.9) із початковою функцією $\xi_{t_0}^m = \xi t_0 + \theta_m$ рівномірно стійкий із тими ж параметрами $(\varepsilon, \delta(\varepsilon))$, що й $\xi(t)$.

Для фіксованого $t_0 \in \mathbb{R}$, якщо m досить велике, то

$$\rho(\xi^m_{t_0}, p_{t_0}) < \frac{1}{2}\delta(\varepsilon/2).$$

Нехай φ таке, що

$$\rho(\varphi, p_{t_0}) < \frac{1}{2}\delta(\varepsilon/2), \tag{2.20}$$

і нехай $x(t)$ — розв'язок системи (2.1), (2.2), такий, що

$$x(t_0 + \theta_m) = \varphi.$$

Відповідно $x^m(t) = x(t + \theta_m)$ — це розв'язок системи (2.7), (2.9) з початковою умовою $x^m_{t_0} = \varphi$.

Оскільки $\xi^m(t)$ рівномірно стійкий і

$$\rho(\xi^m_{t_0}, x^m_{t_0}) \leq \rho(\xi^m_{t_0}, p_{t_0}) + \rho(p_{t_0}, \varphi) < \delta(\varepsilon/2),$$

то

$$\|\xi^m(t) - x^m(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad t \geq t_0, |t - \tau^m_j| > \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.21}$$

де τ^m_j, як і раніше, визначається рівністю (2.10).

Виберемо довільне $T_1 > 0$. Існує підпослідовність послідовності $\{\theta_m\}$ (яку ми знову позначимо $\{\theta_m\}$), така, що $x^m(t)$ збігається на інтервалі $[t_0, t_0 + T_1]$ у w-топології до розв'язку $y(t)$ системи (2.1), (2.2) з початковими значеннями (t_0, φ). Тоді при досить великих m виконується

$$\begin{aligned} &\|x^m(t) - y(t)\| < \varepsilon/4, \quad t \in [t_0, t_0 + T_1], \quad |t - \tau^y_j| > \varepsilon/4, \\ &\|\xi^m(t) - p(t)\| < \varepsilon/4, \quad t \in [t_0, t_0 + T_1], \quad |t - p_j| > \varepsilon/4, \end{aligned} \tag{2.22}$$

де τ^y_j — точки перетину розв'язку $y(t)$ з поверхнями $t = \tau_j(x)$.

З нерівностей (2.21), (2.22) отримуємо

$$\|p(t) - y(t)\| \leq \|p(t) - \xi^m(t)\| + \|\xi^m(t) - x^m(t)\| + \|x^m(t) - y(t)\| < \varepsilon$$

для $t \in [t_0, t_0 + T_1],\ |t - p_j| > \varepsilon$.

Оскільки T_1 довільне, отримуємо нерівність

$$\|p(t) - y(t)\| < \varepsilon, \quad t \in [t_0, \infty), \ |t - p_j| > \varepsilon$$

для розв‘язку $y(t)$ з початковою умовою $y(\theta) = \varphi(\theta), \ t_0 - h \le \theta \le t_0$, яка задовольняє (2.20).

Цим доводиться рівномірна стійкість розв'язку $p(t)$.

Доведемо тепер рівномірну асимптотичну стійкість $p(t)$. Якщо розв'язок $\xi(t)$ рівномірно асимптотично стійкий, то $\xi^m(t)$ теж рівномірно асимптотично стійкий розв'язок системи (2.7), (2.9) із тими ж параметрами $(\delta_0, \varepsilon, T(\varepsilon))$, що й $\xi(t)$.

При досить великих m маємо

$$\rho(\xi^m_{t_0}, p_{t_0}) < \delta_0/2.$$

Розглянемо розв'язок $x(t)$ системи (2.1), (2.2), такий, що $x(t_0+\theta_m) = \varphi$, де початкова функція φ задовольняє $\rho(\varphi, p_{t_0}) < \delta_0/2$. Тоді $x^m(t) = x(t+\theta_m)$ є розв'язком системи (2.7), (2.9) з початковою функцією $x^m_{t_0} = \varphi$.

Оскільки

$$\rho(\xi^m_{t_0}, \varphi) \le \rho(\xi^m_{t_0}, p_{t_0}) + \rho(p_{t_0}, \varphi) < \delta_0,$$

а розв'язок $\xi^m(t)$ рівномірно асимптотично стійкий, то

$$\|\xi^m(t) - x^m(t)\| < \varepsilon/2, \quad t \ge t_0 + T(\varepsilon/2), \ |t - \tau^m_j| > \varepsilon/2. \tag{2.23}$$

Зафіксуємо довільне $T_1 > 0$. Існує підпослідовність послідовності $x^m(t)$ (її знову позначимо $x^m(t)$), яка збігається в w-топології на інтервалі $[t_0 + T(\varepsilon/2), t_0 + T(\varepsilon/2) + T_1]$ до розв'язку $y(t)$ системи (2.1), (2.2) з початковою умовою $y(\theta) = \varphi(\theta), \ t_0 - h \le \theta \le t_0$.

Тому при досить великих m виконується

$$\begin{aligned}
&\|x^m(t) - y(t)\| < \varepsilon/4, \quad t \in [t_0 + T(\varepsilon/2), t_0 + T(\varepsilon/2) + T_1],\\
&|t - \tau^y_j| > \varepsilon/4,\\
&\|\xi^m(t) - p(t)\| < \varepsilon/4, \quad t \in [t_0 + T(\varepsilon/2), t_0 + T(\varepsilon/2) + T_1],\\
&|t - p_j| > \varepsilon/4.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

З нерівностей (2.23), (2.24) отримуємо

$$\|p(t)-y(t)\| \le \|p(t)-\xi^m(t)\| + \\ + \|\xi^m(t)-x^m(t)\| + \|x^m(t)-y(t)\| < \varepsilon,$$

для $t \in [t_0+T(\varepsilon/2), t_0+T(\varepsilon/2)+T_1],\ |t-p_j| > \varepsilon.$

Оскільки T_1 довільне, отримуємо нерівність

$$\|p(t)-y(t)\| \le \varepsilon,\ t \in [t_0+T(\varepsilon/2), \infty),\ |t-p_j| > \varepsilon.$$

Звідси випливає рівномірна асимптотична стійкість майже періодичного розв'язку $p(t)$. Теорему доведено. □

2.2. Майже періодичне логістичне рівняння з запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії

Розглянемо майже періодичне логістичне рівняння з запізненням та імпульсною дією

$$\dot{x}(t) = x(t)\left(a(t)-b(t)x(t)-c(t)x(t-h)\right), \quad t \ne \tau_k(x(t)), \tag{2.25}$$

$$x(t+0) = (1+d_k)x(t)+q_k, \quad t=\tau_k(x(t)), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{2.26}$$

де $x \in \mathbb{R},\ h > 0.$

Імпульсна дія відбувається при досягненні розв'язками ліній

$$\Gamma_k = \{(t,x):\ t=\tau_k(x)\},\ k \in \mathbb{Z},$$

які рівномірно відділені одна від іншої.

Рівняння (2.25) описує еволюцію біологічного виду з короткостроковими зовнішніми впливами (див. [95]), які моделюються імпульсними співвідношеннями (2.26).

Виходячи з біологічної інтерпретації, будемо розглядати розв'язки рівняння, які набувають невід'ємних значень.

Спочатку доведемо існування додатнозначного асимптотично w-майже періодичного розв'язку рівняння (2.25) – (2.26), з чого за результатами попереднього параграфа випливає існування додатнозначного асимптотично стійкого w-майже періодичного розв'язку.

Будемо розглядати систему (2.25), (2.26) із такими умовами:

(**H1**) Позначимо

$$U_\rho = \{x \in \mathbb{R}: \ 0 \le x \le \rho\},$$

де ρ — деяке додатне число.

Послідовність $\{\tau_k\}$ неперервно диференційовних функцій $\tau_k : \ [0, \rho] \to \mathbb{R}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць рівномірно відносно $x \in [0, \rho]$, й існують додатні сталі θ і Θ, такі, що

$$\inf_{x \in [0,\rho]} \tau_{k+1}(x) - \sup_{x \in [0,\rho]} \tau_k(x) \ge \theta, \tag{2.27}$$

$$\sup_{x \in [0,\rho]} \tau_{k+1}(x) - \inf_{x \in [0,\rho]} \tau_k(x) \le \Theta \tag{2.28}$$

для $k \in \mathbb{Z}$. Також функції τ_k задовольняють умову Ліпшиця

$$|\tau_k(x) - \tau_k(y)| \le N_1|x - y|, \quad x, y \in [0, \rho], \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{2.29}$$

з деякою додатною сталою N_1.

(**H2**) Функції $a(t), b(t)$ і $c(t)$ майже періодичні за Бором і

$$a^L > 0, \ b^L \ge 0, \ c^L > 0,$$

(**H3**) Послідовності $\{d_k\}$ і $\{q_k\}$ майже періодичні й

$$d^L > -1, \ q^L \ge 0.$$

Припускаємо, що розв'язки рівняння (2.25), (2.26) неперервні зліва.

Також припускаємо, що у множині $x \in [0, \rho]$ розв'язки рівняння (2.25), (2.26) не мають биття з лініями імпульсів $t = \tau_j(x)$, іншими словами, розв'язки перетинають кожну лінію імпульсів не більше одного разу.

Ми перевіримо виконання для нашого рівняння умов відсутності биття з [98].

У роботі нам буде потрібний такий допоміжний результат [5, 20].

Розглянемо логістичне рівняння без запізнення та з імпульсною дією у фіксовані моменти

$$\dot{z} = z(a - bz), \; t \neq t_k, \tag{2.30}$$

$$z(t_k + 0) - z(t_k) = dz(t_k)) + q, \; k \in \mathbb{Z}, \tag{2.31}$$

де $z \geq 0$, a й b — додатні сталі, $d > -1$, $q \geq 0$, строго зростаюча послідовність $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ задовольняє умову $t_{k+1} - t_k \geq \theta > 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Лема 2.10. *Усі розв'язки $z(t)$, $z(0) = z_0 > 0$ рівняння (2.30), (2.31) задовольняють оцінки*

$$0 < z(t) \leq \max\{A, A(1+d) + q\}, \; A = \frac{a}{b(1 - e^{-a\theta})}$$

для $t \geq 2\theta$.

2.2.1. Обмеженість та відділеність від нуля додатних розв'язків.

Виходячи з біологічної інтерпретації, будемо розглядати невід'ємні розв'язки рівняння (2.25), (2.26), а початкові умови розв'язків задаються таким чином:

$$x(\theta) = \psi(\theta), \; 0 \leq \psi(\theta) \leq \rho, \; \theta \in [-h, 0], \; \psi(0) > 0. \tag{2.32}$$

Теорема 2.11. *Припустимо, що на інтервалі $x \in [0, \rho]$ рівняння (2.25), (2.26) задовольняє умови* (**H1**) –(**H3**) *і виконуються нерівності*

$$\frac{\partial \tau_k(x)}{\partial x} x \left(a^M - b^L x - c^L y)\right) < 1,$$

$$\tau_k((1 + d_k)x + q_k) \leq \tau_k(x), \quad x, y \in [0, \rho], \; k \in \mathbb{Z}, \tag{2.33}$$

$$\rho \geq M_0,$$

де

$$M_0 = \frac{a_1 e^{a^M \theta}(1 + d^M)^{2+h/\theta}}{1 - e^{-a_1\theta}} + q^M \tag{2.34}$$

при $d^M \geq 0$ *і*

$$M_0 = \max\left\{\frac{a_2 e^{a^M\theta}}{1-e^{-a_2\theta}}, \frac{a_2 e^{a_2\theta}(1+d^M)}{1-e^{-a_2\theta}} + q^M\right\} \tag{2.35}$$

при $d^M < 0$. *Тут використано позначення*

$$a_1 = a^M + \frac{q^M}{e^{a^M\theta}(1+d)-1}, \quad a_2 = a^M + \frac{q^M}{e^{a^M\theta}-1}.$$

Тоді на інтервалі $x \in [0,\rho]$*:*

– кожен розв'язок перетинає кожну поверхню $t = \tau_k(x)$ *не більш ніж один раз;*

– кожен розв'язок із додатними початковими значеннями (1.12) задовольняє нерівність

$$x(t) \leq M_0, \quad t \geq 2\theta. \tag{2.36}$$

Доведення. 1. Розв'язок $x(t)$ рівняння (2.25) з початковою функцією (1.12) задовольняє рівність

$$x(t,\psi) = \psi(0) e^{\int_0^t (a(s)-b(s)x(s)-c(s)x(s-h))ds}.$$

Враховуючи останню рівність і додатність імпульсної дії, отримуємо додатність розв'язку імпульсного рівняння (2.25), (2.26) з початковою функцією $\psi(\theta)$.

2. Якщо виконуються нерівності (2.33), то з теореми 3.3 роботи [98] випливає, що в області $x \in [0,\rho]$ кожен розв'язок перетинає криву $t = \tau_k(x)$ не більш ніж один раз.

3. Покажемо, що в області $x \in [0,\rho]$ розв'язки рівняння (2.25), (2.26) фінально рівномірно обмежені й задовольняють нерівність (2.36).

Розглянемо довільний розв'язок $x(t)$ рівняння (2.25), (2.26) із початковою функцією (2.32). Позначимо через $\tilde{\tau}_j$ точки перетину $x(t)$ з поверхнями $\tau_j(x)$. Додатний розв'язок рівняння (2.25) задовольняє нерівність $\dot{x}(t) \leq a^M x(t)$. Використовуючи формулу варіації сталої для імпульсного рівняння [142, с. 12], отримуємо

$$x(t) \leq X_1(t, t-h+0)x(t-h) + \sum_{t-h \leq \tilde{\tau}_j < t} X_1(t, \tau_j + 0)q_j,$$

де

$$X_1(t,s) = e^{a^M(t-s)} \prod_{s \leq \tilde{\tau}_j < t} (1+d_j)$$

— фундаментальний розв'язок лінійного імпульсного рівняння

$$\dot{x} = a^M x, \quad x(\tilde{\tau}_j + 0) = (1+d_j)x(\tilde{\tau}_j), \ j \in \mathbb{Z}.$$

Припустимо, що $d^M > 0$. Поки розв'язок $x(t)$ належить інтервалу $[0, \rho]$, виконуються нерівності (2.27) і

$$X_1(t,s) \leq e^{a^M(t-s)}(1+d^M)^{[(t-s)/\theta]+1},$$

де $[z]$ — це ціла частина числа z. Тому

$$\begin{aligned} x(t) &\leq e^{a^M h} \prod_{t-h \leq \tilde{\tau}_j < t} (1+d_j)x(t-h) + \\ &+ \sum_{t-h \leq \tilde{\tau}_j < t} e^{a^M(t-\tilde{\tau}_j)} q_j \prod_{\tilde{\tau}_j < \tilde{\tau}_i < t} (1+d_i) \leq \\ &\leq e^{a^M h}(1+d^M)^{[h/\theta]+1} x(t-h) + q^M \sum_{j=0}^{[h/\theta]} e^{j a^M \theta}(1+d^M)^j = \\ &= e^{a^M h}(1+d^M)^{[h/\theta]+1} \left(x(t-h) + \frac{q^M}{e^{a^M\theta}(1+d^M)-1} \right). \end{aligned}$$

З останньої нерівності отримуємо

$$x(t-h) \geq e^{-a^M h}(1+d^M)^{-[h/\theta]-1} x(t) - \frac{q^M}{e^{a^M\theta}(1+d^M)-1}. \tag{2.37}$$

Підставляючи (2.37) у рівняння (2.25), отримуємо

$$\dot{x}(t) \leq x(t) \left(a^M + \frac{q^M}{e^{a^M\theta}(1+d^M)-1} - e^{-a^M h}(1+d^M)^{-[h/\theta]-1} x(t) \right).$$

Отже, додатний розв'язок $x(t)$ рівняння (2.25), (2.26) оцінюється зверху відповідним розв'язком рівняння без запізнення

$$\dot{y}(t) = y(t)\left(a^M + \frac{q^M}{e^{a^M\theta}(1+d^M)-1} - e^{-a^M h}(1+d^M)^{-[h/\theta]-1}y(t)\right),$$
$$y(\tilde{\tau}_k+0) = (1+d_k)y(\tilde{\tau}_k) + q_k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

Застосовуючи до останнього лему 2.10, отримуємо оцінку

$$x(t) \le M_0,\ t \ge 2\theta$$

при $q^M \ge 0$, де M_0 задовольняє (2.34).

Якщо $d^M < 0$, то $X(t,s) \le e^{a^M(t-s)}$ і

$$x(t) \le e^{a^M h}x(t-h) + \sum_{t-h\le\tilde{\tau}_j<t} e^{a^M(t-\tilde{\tau}_j)}q_j.$$

Повторюючи оцінки для $d^M \ge 0$, отримуємо оцінку

$$x(t) \le M_0,\ t \ge 2\theta$$

при $d^M < 0$, де M_0 задовольняє (2.35). Теорему доведено. □

Теорема 2.12. *Нехай виконується одна з нерівностей*

$$a^L + \theta\ln(1+d^L) > 0, \tag{2.38}$$

або

$$q^L = \inf_j q_j > 0. \tag{2.39}$$

Тоді існує таке $m_0 > 0$, що для кожного розв'язку рівняння (2.25), (2.26) із невід'ємними початковими функціями (2.32) існує $\bar{t} = \bar{t}(\psi)$, таке, що

$$x(t) \ge m_0,\ t \ge \bar{t}.$$

Доведення. Нехай виконується нерівність (2.38). Оскільки $x(t) \le M_0$ при $t \ge 2\theta$, то з рівняння (2.25) отримуємо

$$\dot{x} \ge x(a^L - b^M M_0 - c^M M_0).$$

Тоді з урахуванням нерівностей (2.27) розв'язок рівняння (2.25), (2.26) оцінюється таким чином:

$$x(t) \geq x(t_0) \prod_{t_0 \leq \tilde{\tau}_k < t} (1+d_k) e^{(a^L - b^M M_0 - c^M M_0)(t-t_0)},$$

де, як і раніше, $\tilde{\tau}_k$ — точки перетину розв'язку $x(t)$ з лініями імпульсів $\tau_k(x)$.

Тому

$$x(t-h) \leq x(t) \prod_{t-h \leq \tilde{\tau}_k < t} (1+d_k)^{-1} e^{-(a^L - b^M M_0 - c^M M_0)h} \leq x(t)\tilde{c}, \qquad (2.40)$$

де

$$\tilde{c} = (1+d^L)^{-[h/\Theta]} e^{-(a^L - b^M M_0 - c^M M_0)h},$$

якщо $d^L > 0$, і

$$\tilde{c} = e^{-(a^L - b^M M_0 - c^M M_0)h},$$

якщо $d^L \leq 0$.

Підставивши нерівність (2.40) у (2.25), отримаємо

$$\dot{x}(t) \geq x(t) \left(a^L - b^M x(t) - c^M \tilde{c} x(t) \right).$$

Враховуючи невід'ємність q_k, розв'язок $x(t)$ оцінюється знизу розв'язком логістичного рівняння з імпульсами

$$\frac{du}{dt} = u(a^L - b^M u - c^M \tilde{c} u), \quad u(\tilde{\tau}_k + 0) - u(\tilde{\tau}_k) = d_k u(\tilde{\tau}_k). \qquad (2.41)$$

Зробивши в рівнянні (2.41) заміну змінних $u = 1/z$, отримаємо

$$\frac{dz}{dt} = -a^L z + b^M + c^M \tilde{c}, \; z(\tilde{\tau}_k + 0) = (1+d_k)^{-1} z(\tilde{\tau}_k). \qquad (2.42)$$

Фундаментальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд

$$X_2(t,s) = \prod_{s \leq \tilde{\tau}_j < t} \frac{1}{1+d_j} e^{-a^L(t-s)} = \exp\{-a^L(t-s) - \sum_{s \leq \tau_j < t} \ln(1+d_j)\}.$$

При виконанні (2.38) для $X_2(t,s)$ виконується оцінка

$$|X_2(t,s)| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}, \; t \geq s,$$

з деякими додатними сталими K_1 і α_1, а рівняння (2.42) має єдиний асимптотично стійкий обмежений на осі розв'язок

$$z_0(t) = \int_{-\infty}^{t} X_2(t,s)(b^M + c^M \tilde{c})ds \le \frac{K_1(b^M + c^M \tilde{c})}{\alpha_1}.$$

Кожен інший розв'язок рівняння з додатними початковими значеннями задовольняє оцінку

$$u(t) \le 2K_1(b_1^M + c^M \tilde{c})/\alpha_1$$

починаючи з деякого моменту часу, який залежить від розв'язку.

Відповідно кожен розв'язок рівняння (2.41) оцінюється знизу сталою

$$\alpha_1/(2K_1(b_1^M + c^M \tilde{c}))$$

починаючи з деякого моменту часу.

Нехай тепер виконується нерівність (2.39). Скористаємося підходом роботи [4].

Оскільки розв'язки рівняння невід'ємні, а значення розв'язку при $t = \tilde{\tau}_k + 0$ не менше q^L, то при $a^L < c^M M_0$ на відрізку $t \in (\tilde{\tau}_k, \tilde{\tau}_{k+1}]$, $k \ge 1$, розв'язок оцінюється знизу величиною

$$z(t) \ge \frac{(c^M M_0 - a^L)q^L}{q^L b^M (e^{(c^M M_0 - a^L)(t-\tilde{\tau}_k)} - 1) + (c^M M_0 - a^L)e^{(c^M M_0 - a^L)(t-\tilde{\tau}_k)}}.$$

При $a^L = c^M M_0$ отримуємо

$$z(t) \ge \frac{q^L}{1 + q^L b^M (t - \tilde{\tau}_k)},\ t \in (\tilde{\tau}_k, \tilde{\tau}_{k+1}].$$

Аналогічно доводимо при $a^L > c^M M_0$.

Теорему доведено. □

Зауваження 2.13. [4] Якщо $d_j = 0$, $j \in \mathbb{Z}$, і $a^L > c^M M_0$, то лінійне рівняння (3.16) має додатний асимптотично стійкий сталий розв'язок

$$z_* = b^M/(a^L - c^M M_0).$$

Кожен інший роз'язок рівняння з додатними початковими значеннями задовольняє оцінку

$$z(t) < 2b^M/(a^L - c^M M_0)$$

починаючи з деякого моменту часу, який залежить від розв'язку. Тому, розв'язок $x(t)$ з невід'ємною не рівною тотожно нулю початковою функцією задовольняє оцінку

$$u(t) \geq \frac{a^L - c^M M_0}{2b^M}$$

починаючи з деякого моменту часу t_1.

2.2.2. Існування майже періодичних розв'язків

Для знаходження умов існування w-майже періодичних розв'язків рівняння (2.25), (2.26) скористаємося результатами попереднього параграфа.

Теорема 2.14. *[10] Припустимо, що*

$$\tilde{K}_1 N_1 + N_1 < 1,$$

де

$$\tilde{K}_1 = \sup_{t \in \mathbb{R}, x, y \in [0,\rho]} |x\,(a(t) - b(t)x - c(t)y)\,|, \tag{2.43}$$

а N_1 є сталою Ліпшиця для ліній імпульсів (2.29). Нехай розв'язок $\xi(t)$ рівняння (2.25), (2.26) при всіх $t \in [0, \infty)$ належить відрізку $[0, \rho]$ і є рівномірно асимптотично стійким при $t \geq 0$. Тоді $\xi(t)$ асимптотично w-майже періодичний, а рівняння (2.25), (2.26) має w-майже періодичний розв'язок, який є асимптотично стійким при $t \geq 0$.

Виходячи з вищенаведених результатів, можна сформулювати теорему про існування додатного асимптотично стійкого w-майже періодичного розв'язку.

Теорема 2.15. *Нехай виконуються умови теореми 2.14 і*

$$\alpha_2 + K_2 c^M M_0 e^{-\alpha_2 h} < 0, \tag{2.44}$$

де

$$\alpha_2 = \left(a^M - (2b^L + c^L)m_0 + \frac{1}{\theta}\ln(1 + d^M)\right),\ K_2 = 1 + d^M,$$

якщо $d^M \geq 0$,

$$\alpha_2 = \left(a^M - (2b^L + c^L)m_0 + \frac{1}{\Theta}\ln(1 + d^M)\right),\ K_2 = (1 + d^M)^{-1},$$

якщо $d^M < 0$.

Тоді рівняння (2.25), (2.26) при достатньо малому коефіцієнті Ліпшиця N_1 має єдиний додатний асимптотично стійкий w-майже періодичний розв'язок.

Доведення. З доведення теорем 2.11 і 2.12 випливає, що якщо початкова функція φ розв'язку $x_0(t)$ рівняння (2.25), (2.26) задовольняє умову $m_0 \leq \varphi(\theta) \leq M_0$, $\theta \in [t_0 - h, t_0]$, то розв'язок залишається в цій області при всіх $t \geq t_0$.

Доведемо, що розв'язок $x_0(t)$ рівномірно асимптотично стійкий. Перевіримо виконання умов означення рівномірно асимптотичної стійкості. Нехай δ_0 — деяке мале додатне число. Розглянемо інший розв'язок $y_0(t)$ з початковою функцією ψ, $m_0 \leq \psi(\theta) \leq M_0$, $\theta \in [t_0 - h, t_0]$, яка задовольняє оцінки

$$|\varphi(\theta) - \psi(\theta)| \leq \delta_0,\ \theta \in [t_0 - h, t_0],\ |\theta - \tau_j^1| \geq \delta_0, \tag{2.45}$$

де τ_j^1 — точки перетину розв'язку $x_0(t)$ з кривими $\tau_j(x)$.

Різниця розв'язків $x_0(t) - y_0(t)$ задовольняє рівняння

$$\dot{x}(t) - \dot{y}(t) = \Big(a(t) - b(t)(x_0(t) + y_0(t)) - c(t)y_0(t-h)\Big)(x(t) - y(t)) -$$
$$-c(t)x_0(t)(x(t-h) - y(t-h))$$

та імпульсні умови

$$x(\tau_j^1 + 0) - y(\tau_j^1 + 0) = (1 + d_j)(x(\tau_j^1) - y(\tau_j^1)) + d_j y(\tau_j^1) + q_j,$$

$$x(\tau_j^2+0)-y(\tau_j^2+0)=(x(\tau_j^2)-y(\tau_j^2))-d_jy(\tau_j^2)-q_j.$$

Тут τ_j^2 — точки перетину розв'язку $y(t)$ з лініями $\tau_j(x),\ j\in\mathbb{Z}$.

Позначимо

$$U(t,s)=\exp\int_s^t (a(s_1)-b(s_1)(x_0(s_1)+y_0(s_1))-$$
$$-c(s_1)y_0(s_1-h))\,ds_1\prod_{s\le\tau_j'<t}(1+d_j)$$

і запишемо відповідне інтегральне рівняння

$$w(t)=U(t,t_0)w_0+\int\limits_{t_0}^{t}U(t,s)c(s)x_0(s)w(s-h)ds+$$
$$+\sum_{t_0\le\tau_j^1<t}U(t,\tau_j^1+0)(d_jy(\tau_j^1)+q_j)-$$
$$-\sum_{t_0\le\tau_j^2<t}U(t,\tau_j^2+0)(d_jy(\tau_j^2)+q_j). \tag{2.46}$$

Функція $U(t,s)$ задовольняє оцінку

$$|U(t,s)|\le K_2e^{\alpha_2(t-s)},\ t\ge s. \tag{2.47}$$

Позначимо $w(t)=x(t)-y(t)$, $\tau_j'=\min\{\tau_j^1,\tau_j^2\},\ \tau_j''=\max\{\tau_j^1,\tau_j^2\}$.

Спочатку оцінимо $|\tau_j^1-\tau_j^2|$ через різницю $|x(\tau_j')-y(\tau_j')|$.

Нехай $\tau_j^2\ge\tau_j^1=\tau_j'$. Тоді

$$|\tau_j^1-\tau_j^2|\le N_1|y(\tau_j'')-x(\tau_j')|\le$$
$$\le N_1|y(\tau_j'')-y(\tau_j')|+N_1|y(\tau_j')-x(\tau_j')|\le$$
$$\le N_1|y(\tau_j')-x(\tau_j')|+$$
$$+N_1\int\limits_{\tau_j'}^{\tau_j''}|y(s)(a(s)-b(s)y(s)-c(s)y(s-h))|ds\le$$
$$\le N_1|y(\tau_j')-x(\tau_j')|+N_1\tilde{K}_1|\tau_j^1-\tau_j^2|,$$

де $\tilde{K}_1$ визначається формулою (2.43). Випадок $\tau_j^2 \le \tau_j^1$ розглядається аналогічно. Тоді

$$|\tau_j^1 - \tau_j^2| \le \frac{N_1}{1 - N_1\tilde{K}_1}|x(\tau_j') - y(\tau_j')|. \tag{2.48}$$

Припустимо $\tau_j^1 > \tau_j^2$ і розглянемо різницю

$$\begin{aligned} &|U(t, \tau_j^1 + 0)(d_j y(\tau_j^1) + q_j) - U(t, \tau_j^2 + 0)(d_j y(\tau_j^2) + q_j)| = \\ &= |U(t, \tau_j^1 + 0)\left(d_j y(\tau_j^1) - d_j y(\tau_j^2 + 0) + \right. \\ &\left. +(1 + d_j)(1 - U(\tau_j^1, \tau_j^2))(d_j y(\tau_j^2) + q_j)\right)|. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Оскільки $|\tau_j^1 - \tau_j^2| \le N_1 M_0$, то існує незалежна від $j \in \mathbb{Z}$ додатна стала $\tilde{K}_2$, така, що

$$\left|U(\tau_j^1, \tau_j^2) - 1\right| \le \tilde{K}_2|\tau_j^1 - \tau_j^2|.$$

Також

$$|y(\tau_j^1) - y(\tau_j^2 + 0) = \left|\int_{\tau_j^2}^{\tau_j^1} \frac{dy(\xi)}{d\xi} d\xi\right| =$$

$$= \left|\int_{\tau_j^2}^{\tau_j^1} y(s)(a(s) - b(s)y(s) - c(s)y(s-h))ds\right| \le$$

$$\le \tilde{K}_1|\tau_j^1 - \tau_j^2|.$$

Підставляючи останні нерівності в (2.49) і враховуючи (2.47) і (2.48), отримаємо

$$\begin{aligned} &|U(t, \tau_j^1 + 0)(d_j y(\tau_j^1) + q_j) - U(t, \tau_j^2 + 0)(d_j y(\tau_j^2) + q_j)| = \\ &\le N_1 K_2 e^{\alpha_2(t - \tau_j'')} \frac{\left(d\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2(1 + d)(dM_0 + q)\right)}{1 - N_1\tilde{K}_1}|x(\tau_j') - y(\tau_j')| = \\ &= \tilde{K}_3 N_1 e^{\alpha_2(t - \tau_j'')}|x(\tau_j') - y(\tau_j')|. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Якщо $\tau_j^1 < \tau_j^2$, то

$$U(t, \tau_j^1 + 0)(d_j y(\tau_j^1) + q_j) - U(t, \tau_j^2 + 0)(d_j y(\tau_j^2) + q_j) =$$

$$= U(t, \tau_j^2 + 0)\left(d_j y(\tau_j^1) - d_j y(\tau_j^2) + (U(\tau_j^2, \tau_j^1 + 0) - 1)(d_j y(\tau_j^1) + q_j)\right).$$

Повторюючи вищенаведені оцінки, отримуємо нерівність (2.50) при $\tau_j^1 < \tau_j^2$.

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $t_0 \in (\tau_0^1 + \delta_0, \tau_1^1]$. З (2.46), (2.47) і (2.50) випливає нерівність для $|w(t)| = |x(t) - y(t)|$ при $t \in (\tau''_m, \tau'_{m+1}]$:

$$\begin{aligned}
&|w(t)| \le K_2 e^{\alpha_2(t-t_0)} |\varphi(t_0) - \psi(t_0)| + \\
&+ \int\limits_{t_0-h}^{t_0} K_2 e^{\alpha_2(t-s-h)} c^M M_0 |\varphi(s) - \psi(s)| ds + \\
&+ \sum_{j=0}^{m-1} \int\limits_{\tau''_j}^{\tau'_{j+1}} K_2 e^{\alpha_2(t-s-h)} c^M M_0 |w(s)| ds + \\
&+ \sum_{j=0}^{m-1} \int\limits_{\tau'_{j+1}}^{\tau''_{j+1}} K_2 e^{\alpha_2(t-s-h)} c^M M_0 |w(s)| ds + \\
&+ \int\limits_{\tau''_m}^{t} K_2 e^{\alpha_2(t-s-h)} c^M M_0 |w(s)| ds + \\
&+ \sum_{t_0 < \tau'_j < t} \tilde{K}_3 N_1 e^{\alpha_2(t-\tau''_j)} |w(\tau'_j)|.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

На інтервалі $[t_0 - h, t_0]$ не більш ніж $[h/\theta] + 1$ точка імпульсів. У δ_0-околах точок імпульсів функція $|\varphi(s) - \psi(s)|$ оцінюється зверху величиною $M_0 - m_0$, в інших точках — величиною δ_0. Тому з умови (2.27) отримуємо

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{t_0-h}^{t_0} |\varphi(s) - \psi(s)| ds \le 2\delta_0 \left([h/\theta] + 1\right) (M_0 - m_0) + \\
&+ \left(h - 2\delta_0 \left([h/\theta] + 1\right)\right) \delta_0 = M_1 \delta_0.
\end{aligned}$$

Позначимо $\alpha_3 = -\alpha_2 (M_0 - m_0)/(1 - N_1 \tilde{K}_1)$, тоді

$$e^{\alpha_2(\tau'_j - \tau''_j))} \le \exp\left(-\alpha_2 \frac{N_1 |x(\tau'_j) - y(\tau'_j)|}{1 - N_1 \tilde{K}_1}\right) \le e^{N_1 \alpha_3}.$$

Враховуючи останні оцінки, в нерівності (2.51) зробимо перетворення

$$|w(t)| \leq \delta_0 \tilde{K}_4 e^{\alpha_2(t-t_0)} + \int\limits_{t_0}^{t} K_2 e^{\alpha_2(t-s)} M_0 e^{-\alpha_2 h} |w(s)| ds +$$

$$+ \sum_{t_0<\tau'_j<t} N_1 \tilde{K}_5 e^{\alpha_2(t-\tau'_j)} |w(\tau'_j)|,$$

де

$$\tilde{K}_4 = K_2 \left(1 + e^{-\alpha_2 h} c^M M_0 M_1 h\right), \ \tilde{K}_5 = \left(\tilde{K}_3 + \frac{K_2 c^M M_0^2}{1 - N_1 \tilde{K}_1}\right) e^{-\alpha_2 h + N_1 \alpha_3}.$$

Застосувавши до останньої нерівності узагальнену лему Гронуолла, отримаємо

$$|x(t) - y(t)| \leq e^{(\alpha_2 + K_2 c^M M_0 e^{-\alpha_2 h})(t-t_0)} \tilde{K}_4 \delta_0 \prod_{t_0<\tau'_j<t} (1 + N_1 \tilde{K}_5).$$

При виконанні нерівності (2.44) й при досить малому N_1 різниця $|x(t) - y(t)|$ експоненціально прямує до нуля при $t \to \infty$ і $t \notin (\tau'_j, \tau''_j]$, $j \in \mathbb{Z}$. Виконуються умови рівномірної асимптотичної стійкості розв'язку $x_0(t)$. За теоремою 2.14 рівняння (2.25), (2.26) має w-майже періодичний розв'язок зі значеннями в інтервалі $[m_0, M_0]$. Теорему доведено. $\square$

Висновки до розділу 2

У цьому розділі розглянуто систему диференціальних рівнянь із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії вигляду

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \quad t \neq \tau_k(x(t)),$$

$$x(t+0) = x(t) + I_k(x(t)), \quad t = \tau_k(x(t)), \quad k \in \mathbb{Z},$$

де $x \in \mathbb{R}^n,\ h > 0$. Імпульсна дія відбувається при досягненні розв'язками поверхонь $\Gamma_k = \{(t,x):\ t = \tau_k(x)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, які рівномірно відділені одна від іншої.

В таких системах може з'являтися так званий феномен биття, тобто розв'язок може перетинати поврхню $t = \tau_k(x)$ кілька чи навіть нескінченну кількість разів.

Доведено теореми існування асимптотично стійкого кусково-неперервного майже періодичного розв'язку системи диференціальних рівнянь із запізненням і нефіксованими моментами імпульсів, використовуючи властивості асимптотично майже періодичних розв'язків.

Розглянуто також майже періодичне логістичне рівняння із запізненням та імпульсною дією

$$\dot{x}(t) = x(t)\left(a(t) - b(t)x(t) - c(t)x(t-h)\right), \quad t \neq \tau_k(x(t)),$$

$$x(t+0) = (1+d_k)x(t) + q_k, \quad t = \tau_k(x(t)),\ k \in \mathbb{Z},$$

де $x \in \mathbb{R},\ h > 0$. Імпульсна дія відбувається, коли розв'язки досягають ліній $\Gamma_k = \{(t,x):\ t = \tau_k(x)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, які рівномірно відділені одна від іншої.

Рівняння описує еволюцію біологічного виду з короткостроковими зовнішніми впливами, які моделюються відповідними імпульсними співвідношеннями. Виходячи з біологічної інтерпретації, розглянуто розв'язки рівняння, які набувають невід'ємних значень.

Доведено теорему про існування додатнозначного асимптотично w-майже періодичного розв'язку рівняння, з чого випливає існування додатнозначного асимптотично стійкого w-майже періодичного розв'язку.

Основний результат:

– знайдено умови існування асимптотично стійкого кусково-неперервного майже періодичного розв'язку системи диференціальних рівнянь із запізненням і нефіксованими моментами імпульсів; використовуючи цей результат, отримано умови існування додатнозначного асимптотично стійкого кусково-неперервного майже періодичного розв'язку логістичного рівняння з майже періодичними коефіцієнтами та нефіксованими моментами імпульсів.

РОЗДІЛ 3

Перманентність та періодичні розв'язки

Важливою проблемою математичної біології є моделювання еволюції біологічних видів і відшукання умов, які забезпечують довготривале співіснування співтовариства видів [13, 35, 124]. Однією з характеристик такого довготривалого співіснування є перманентність системи (коли у відкритому додатному конусі фазового простору системи існує компактна множина K така, що кожен розв'язок із додатними початковими значеннями через деякий час входить і залишається в K). Дослідженню перманентності, а також існуванню, єдиності та стійкості періодичних розв'язків різних типів систем присвячено багато робіт, відмітимо [71], [88, 90].

3.1. Перманентність періодичних систем хижак-жертва з віковою структурою та імпульсною дією

Системи хижак-жертва з віковою структурою починаючи з роботи [17] досліджувалися багатьма авторами [45, 50–52, 104, 173]. У роботах [51, 52, 173] вивчалася наступна система хижак-жертва з віковою структурою

$$\dot{x}_1 = a_1(t)x_2 - b_1(t)x_1 - c_1(t)x_1^2 - p(t)\phi(t, x_1)x_1y, \tag{3.1}$$

$$\dot{x}_2 = a_2(t)x_1 - c_2(t)x_2^2, \tag{3.2}$$

$$\dot{y} = y(-q(t) - h(t)\phi(t, x_1)x_1) \tag{3.3}$$

з додатними неперервними T-періодичними функціями в правій частині й різними видами функції впливу $\phi(t, x_1)$.

У роботі [50] доведено, що система (3.4), (3.5) при $y \equiv 0$ має єдиний додатний періодичний розв'язок $(x_1^*(t), x_2^*(t))$, який є глобально асимптотично стійкий відносно квадранта

$$R_+^2 = \{(x_1, x_2) : \ x_1 > 0, \ x_2 > 0\}.$$

Очевидно, що така система є перманентною. Такий результат дозволив отримати необхідну та достатню умову перманентності системи хижак-жертва (3.1) – (3.3): цією умовою є додатність середнього значення

$$\int_0^T (-g(t) + h(t)\phi(t, x_1^*(t))x_1^*(t)dt > 0.$$

Ми будемо вивчати систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x}_1 = a_1(t)x_2 - b_1(t)x_1 - c_1(t)x_1^2 - \frac{h_1(t)x_1 y}{k_1(t) + m_1(t)x_1 + n_1(t)y}, \tag{3.4}$$

$$\dot{x}_2 = a_2(t)x_1 - b_2(t)x_2 - c_2(t)x_2^2 - \frac{h_2(t)x_2 y}{k_2(t) + m_2(t)x_2 + n_2(t)y}, \tag{3.5}$$

$$\dot{y} = y\Bigg(-q(t) - g(t)y(t) + \frac{h_3(t)x_1}{k_1(t) + m_1(t)x_1 + n_1(t)y} + \\ + \frac{h_4(t)x_2}{k_2(t) + m_2(t)x_2 + n_2(t)y}\Bigg) \tag{3.6}$$

при $t \neq t_k$ та з імпульсною дією

$$x_1(t_k + 0) = (1 + d_{1k})x_1(t_k), \tag{3.7}$$

$$x_2(t_k + 0) = (1 + d_{2k})x_2(t_k), \tag{3.8}$$

$$y(t_k + 0) = (1 + d_{3k})y(t_k), \tag{3.9}$$

у моменти часу $t_k, \ k \in \mathbb{Z}$.

Припускаємо, що виконуються наступні умови:

C1. Функції $a_j(t)$, $b_j(t)$, $c_j(t)$, $k_j(t)$, $m_j(t)$, $n_j(t)$, $q(t)$, $g(t)$, $j = 1, 2$, $h_k(t)$, $k = 1, ..., 4$, кусково-неперервні, T-періодичні та додатнозначні.

C2. Послідовність точок імпульсної дії $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ задовольняє умову періодичності $t_{k+p} - t_k = T$, $k \in \mathbb{Z}$ з деяким натуральним числом p.

C3. $d_{j,k+p} = d_{jk}$, $d_{jk} \in (-1, d]$ для всіх $j = 1, 2, 3$, $k \in \mathbb{Z}$.

Система рівнянь (3.4) – (3.9) описує еволюцію біологічної системи хижак-жертва з віковою структурою жертви. Тут через $y(t)$ позначено щільність популяції хижаків (тобто кількість особин, що припадає на одиницю площі) в момент часу t.

Популяція жертв складається з незрілих особин зі щільністю $x_1(t)$ та зрілих зі щільністю $x_2(t)$. Періодичні функції в системі мають наступне біологічне значення. Народжуваність у популяції незрілих жертв задається $a_1(t)x_2$, тобто приймається пропорційною до існуючої популяції зрілих жертв із коефіцієнтом пропорційності $a_1(t)$. Інтенсивність переходів від незрілих до зрілих індивідів припускається пропорційною до існуючої популяції незрілих жертв із коефіцієнтом пропорційності $a_2(t)$.

Показники смертності незрілої та зрілої популяцій задаються виразами $b_1(t)x_1 + c_1(t)x_1^2$ і $b_2(t)x_2 + c_2(t)x_2^2$ відповідно. Припускаємо, що функції впливу мають форму Беддінгтона – Деанжеліса [62, 91]. Якщо популяції зазнають короткотривалих змін із певною періодичністю, наприклад, збір урожаю чи риболовля, то ці зміни моделюються у формі імпульсів (3.7)-(3.9).

Означення 3.1. Система рівнянь (3.4) – (3.9) називається перманентною, якщо існують такі додатні сталі m і M, що для кожного розв'язку $(x_1(t), x_2(t), y(t))$ з додатними початковими значеннями існує момент часу t_1, такий, що

$$m \leqslant x_1(t) \leqslant M,\ m \leqslant x_2(t) \leqslant M,\ m \leqslant y(t) \leqslant M$$

для всіх $t \geqslant t_1$.

Виконується лема:

Лема 3.2. *Додатний конус $\mathcal{K} = \{x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ є додатно-інваріантним відносно системи (3.4) – (3.9).*

Доведення. На межі конуса $\mathcal{K}$ векторне поле, утворене системою, направлене всередину конуса. Тому в точках неперервності траєкторія системи не може вийти за межі конуса. Оскільки величини $(1 + d_{jk})$ додатні, в точках імпульсної дії невід'ємні траєкторії системи також залишаються в конусі. Лему доведено. □

3.1.1. Логістичне рівняння з імпульсною дією.

Логістичне рівняння, яке відоме ще як рівняння Ферхюльста, спочатку з'явилося при розгляді моделі зростання чисельності населення.

Вихідні дані для виведення рівняння при розгляді популяційної динаміки враховували такі моменти:

- Швидкість розмноження популяції пропорційна її поточної чисельності за інших рівних умов.
- Швидкість розмноження популяції пропорційна кількості доступних ресурсів за інших рівних умов. Таким чином, другий член рівняння відображає конкуренцію за ресурси, яка обмежує зростання популяції.

Позначаючи через r чисельність популяції, а час — t, модель можна звести до диференціального рівняння:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right),$$

де параметр r характеризує швидкість росту (розмноження), а K підтримує ємність середовища (тобто максимально можливу чисельність популяції).

Розглянемо логістичне рівняння з імпульсною дією

$$\dot{z} = az(b - z),\ \ t \neq t_k, \tag{3.10}$$

$$z(t_k + 0) = z(t_k)\lambda_k(z(t_k)),\ \ k \in \mathbb{Z}, \tag{3.11}$$

де $z \in \mathbb{R}_+$, a і b — додатні сталі, строго зростаюча послідовність $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ задовольняє умову $t_{k+1} - t_k \geqslant \theta > 0$. Позначимо

$$A = \frac{b}{1 - e^{-ab\theta}},\ B = \max_{k\in\mathbb{Z}} \max_{z\in[0,A]} \lambda_k(z),\ C = \max(A, B).$$

Лема 3.3. *[20] Усі розв'язки $z(t), z(0) = z_0 > 0$ рівняння (3.10), (3.11) задовольняють оцінки $0 < z(t) \leqslant C$ при $t \geqslant \theta$.*

Розглянемо тепер логістичне рівняння з періодичними коефіцієнтами та імпульсами [102]:

$$\dot{x} = \alpha(t)x - \beta(t)x^2,\ t \neq t_k, \tag{3.12}$$

$$x(t_k + 0) = (1 + b_k)x(t_k), \tag{3.13}$$

де $\alpha(t) = \alpha(t + T)$, $\beta(t) = \beta(t + T)$, $\beta(t) > 0$, $t_{k+p} = t_k + T$, $1 + b_k > 0$, $b_k = b_{k+p},\ k \in \mathbb{Z}$.

Лема 3.4. *Припустимо, що виконується нерівність*

$$\prod_{k=1}^{p} \frac{1}{(1 + b_k)} e^{-\int_0^T \alpha(\xi)d\xi} < 1. \tag{3.14}$$

Тоді рівняння (3.12), (3.13) має єдиний кусково-неперервний T-періодичний розв'язок $x_*(t)$, який глобально асимптотично стійкий:

$$\lim_{t\to\infty} |x(t, x_0) - x_*(t)| = 0, \quad x(0, x_0) = x_0 > 0.$$

Доведення. Після заміни змінних $x = 1/y$ у рівнянні (3.12), (3.13) отримаємо наступне лінійне неоднорідне рівняння

$$\dot{y} = -\alpha(t)y + \beta(t),\ t \neq t_k, \tag{3.15}$$

$$y(t_k + 0) = \frac{1}{(1 + b_k)} y(t_k). \tag{3.16}$$

Згідно з результатами робіт [6, 142] єдиний періодичний розв'язок рівняння (3.15), (3.16) має вигляд

$$y_*(t) = \int_0^T G(t, s)\beta(s)ds, \tag{3.17}$$

де

$$G(t,s) = X(t+T)(I - X(T))^{-1}X^{-1}(s),$$
$$X(t) = \prod_{0\leqslant t_k<t} \frac{1}{(1+b_k)} e^{-\int_0^t \alpha(\xi)d\xi}$$

— фундаментальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Легко перевірити, що $G_L \leqslant |G(t,s)| \leqslant G_M$ з деякими додатними сталими G_L та G_M. Тоді з (3.17) отримаємо

$$TG_L\beta^L \leqslant |y_*(t)| \leqslant TG_M\beta^M.$$

Лему доведено. □

Наслідок 3.5. *Додатнозначний періодичний розв'язок рівняння (3.12), (3.13) задовольняє оцінки*

$$\frac{1}{TG_M\beta^M} \leqslant |x_*(t)| \leqslant \frac{1}{TG_L\beta^L}. \tag{3.18}$$

3.1.2. Дослідження системи двох рівнянь із імпульсним впливом

У випадку системи з імпульсною дією підсистема, яка описує динаміку жертви (рівняння (3.4),(3.5),(3.7),(3.8) при $y \equiv 0$), може мати значно складнішу поведінку. Тому спочатку ми дослідимо наступну двовимірну систему з імпульсами і знайдемо умови її перманентності та умови існування єдиного додатного глобально стійкого періодичного розв'язку.

Розглянемо систему двох рівнянь із імпульсами

$$\dot{x}_1 = a_1(t)x_2 - b_1(t)x_1 - c_1(t)x_1^2, \tag{3.19}$$
$$\dot{x}_2 = a_2(t)x_1 - b_2(t)x_2 - c_2(t)x_2^2,\ t \neq t_k, \tag{3.20}$$
$$x_1(t_k+0) = (1+d_{1k})x_1(t_k), \tag{3.21}$$
$$x_2(t_k+0) = (1+d_{2k})x_2(t_k), \tag{3.22}$$

де $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, праві частини системи задовольняють умови:

C1. Функції $a_j(t)$, $b_j(t)$, $c_j(t)$, $j = 1, 2$, кусково-неперервні, T-періодичні та додатнозначні.

C2. Послідовність точок імпульсної дії $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ задовольняє умову періодичності $t_{k+p} - t_k = T$, $k \in \mathbb{Z}$ з деяким натуральним числом p.

C3. $d_{j,k+p} = d_{jk}$, $d_{jk} \in (-1, d]$ для всіх $j = 1, 2$, $k \in \mathbb{Z}$.

Аналогічно лемі 3.2 отримуємо наступне твердження:

Лема 3.6. *Додатний квадрант $\{x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\}$ додатно-інваріантний відносно системи (3.19) – (3.22).*

Лема 3.7. *За виконання умов $c_1^L > 0$, $c_2^L > 0$ всі додатнозначні розв'язки системи фінально рівномірно обмежені, тобто існує така додатна стала M, що*

$$\limsup_{t\to\infty} x_1(t) \leqslant M,\ \limsup_{t\to\infty} x_2(t) \leqslant M$$

для всіх додатнозначних розв'язків.

Доведення. Використовуючи нерівності

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 \leqslant a_1^M x_2 - b_1^L x_1 - c_1^L x_1^2, \\ &\dot{x}_2 \leqslant a_2^M x_1 - b_2^L x_2 - c_2^L x_2^2,\ t \neq t_k. \end{aligned}$$

отримаємо

$$\begin{aligned} &\frac{d(x_1 + x_2)}{dt} \leqslant a(x_1 + x_2) - \frac{c}{2}(x_1 + x_2)^2, \\ &(x_1 + x_2)(t_k + 0) \leqslant [\max\{1 + d_{1k}, 1 + d_{2k}\}](x_1 + x_2)(t_k), \end{aligned}$$

де $c = \min\{c_1^L, c_2^L\}$, $a = \max\{a_2^M - b_1^L, a_1^M - b_2^L\}$.

За лемою 3.3 всі розв'язки системи фінально рівномірно обмежені. Лему доведено. □

Лема 3.8. *За виконання умов*

$$\int_0^T A(\xi)d\xi + \sum_{k=1}^{p} \ln(1 + p_k) > 0, \tag{3.23}$$

де

$$A(t) \leqslant \min\{(a_2(t) - b_1(t)), (a_1(t) - b_2(t))\},$$

$$B(t) \geqslant \max\{c_1(t), c_2(t)\},$$

$$p_k \geqslant \min\{d_{1k}, d_{2k}\},$$

всі додатнозначні розв'язки системи (3.19) – (3.22) фінально рівномірно відокремлені від нуля:

$$\liminf_{t\to\infty} x_1(t) \geqslant \delta > 0,$$

$$\liminf_{t\to\infty} x_2(t) \geqslant \delta > 0.$$

Доведення. Розглянемо суму рівнянь (3.19) і (3.20):

$$\begin{aligned}\frac{d(x_1+x_2)}{dt} =&(a_2(t)-b_1(t))x_1+\\ &+(a_1(t)-b_2(t))x_2 - c_1(t)x_1^2 - c_2(t)x_2^2.\end{aligned}$$

Тоді отримаємо нерівність $x_1 + x_2 \geqslant z$, де

$$\dot{z} = A(t)z - B(t)z^2, \tag{3.24}$$

$$z(t_k+0) = (1+p_k)z(t_k). \tag{3.25}$$

За лемою 3.3 за виконання умови

$$\prod_{k=1}^{p} \frac{1}{(1+p_k)} e^{-\int\limits_0^T A(\xi)d\xi} < 1$$

(що еквівалентно (3.23)) рівняння (3.24), (3.25) має єдиний додатнозначний глобально асимптотично стійкий періодичний розв'язок $z_*(t)$, який задовольняє оцінки

$$\frac{1}{T\bar{G}_M B^M} \leqslant |z_*(t)| \leqslant \frac{1}{T\bar{G}_L B^L},$$

де

$$\bar{G}(t,s) = \left(1 - e^{-\int\limits_0^T A(\xi)d\xi} \prod_{0\leqslant t_k<T} (1+p_k)^{-1}\right)^{-1} \times$$

$$\times\ e^{-\int\limits_{s}^{t+T} A(\xi)d\xi} \prod_{s\leqslant t_k<t+T} (1+p_k)^{-1},$$

$$\bar{G}_L \leqslant |\bar{G}(t,s)| \leqslant \bar{G}_M.$$

Звідси випливає, що для кожного додатного розв'язку $(x_1(t), x_2(t))$ системи (3.19) – (3.22) починаючи з деякого моменту часу справджується оцінка

$$x_1(t)+x_2(t) \geqslant \delta = \frac{1}{2T\bar{G}_M B^M}.$$

Підставивши $x_2(t) \geqslant \delta - x_1(t)$ у рівняння (3.19), отримаємо

$$\dot{x_1} = a_1(t)\delta - a_1(t)x_1 - b_1(t)x_1 - c_1(t)x_1^2,$$

$$x_1(t_i+0) = (1+d_{1k})x_1(t_k).$$

Позначимо

$$a = \min_t\{a_1(t)\delta\},$$

$$b = \max_t\{a_1(t)+b_1(t)\},$$

$$c = \max_t\{c_1(t)\},$$

тоді $x_1(t) \geqslant x(t)$, де $x(t)$ — розв'язок рівняння

$$\dot{x} = a - bx - cx^2, \tag{3.26}$$

$$x(t_k+0) = (1+d_{1k})x(t_k), \tag{3.27}$$

Рівняння (3.26) має розв'язок

$$x(t,x_0) = \frac{x_0(x_{10}-x_{20}E(t)) - x_{10}x_{20}(1-E(t))}{x_0(1-E(t)) - (x_{20}-x_{10}E(t))},\ x(0,x_0) = x_0,$$

де

$$E(t) = \exp(-t\sqrt{b^2+4ac}),$$

$$x_{10} = \frac{1}{2c}(-b+\sqrt{b^2+4ac}),\ x_{20} = \frac{1}{2c}(-b-\sqrt{b^2+4ac}).$$

Оскільки $x_{10} > 0$, $x_{20} < 0$, $E(t) > 0$, $t > 0$, то

$$x(t,x_0) = \frac{x_0(x_{10}-x_{20}E(t)) - x_{10}x_{20}(1-E(t))}{x_0(1-E(t)) - (x_{20}-x_{10}E(t))} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{-x_{10}x_{20}(1-E(t))}{-x_{20}+x_{10}E(t)} = \frac{a(1-E(t))}{\sqrt{b^2+4ac}}.$$

Тому при $t \geqslant \theta/2$ виконується оцінка

$$x(t, x_0) \geqslant \frac{a(1-E(\theta/2))}{\sqrt{b^2+4ac}} = \delta_1 > 0.$$

Враховуючи розділеність імпульсів $t_k - t_{k-1} \geqslant \theta$, отримуємо

$$x(t_k, x_0) \geqslant \delta_1$$

і

$$x(t_k+0, x_0) \geqslant \delta_1(1+\bar{d})$$

для всіх $x_0 > 0$ і $k \geqslant 1$, де $\bar{d} = \min_k d_{1k}$.

Підставивши $x_1(t) \geqslant \delta - x_2(t)$ у рівняння (3.20), аналогічно отримуємо відділеність від нуля розв'язку $x_2(t)$. Лему доведено. $\square$

Лема 3.9. *Припустимо, що*

i) система (3.19) – (3.22) перманентна: існують додатні сталі m і N, такі, що для кожного додатного розв'язку $(x_1(t), x_2(t))$ системи починаючи з деякого моменту часу виконуються оцінки

$$m \leqslant x_1(t) \leqslant N, \quad m \leqslant x_2(t) \leqslant N;$$

ii) виконується нерівність

$$T\lambda_M + \sum_{k=1}^{p} \ln(1+p_k) < 0,$$

де λ_M — найбільше власне значення матриці

$$\begin{pmatrix} -2b_1^L - 4c_1^L m & a_1^M + a_2^M \\ a_1^M + a_2^M & -2b_2^L - 4c_2^L m \end{pmatrix}.$$

Тоді система (3.19) – (3.22) має єдиний глобально асимптотично стійкий строго додатний кусково неперервний T-періодичний розв'язок.

Доведення. Розглянемо два додатнозначних розв'язки $(x(t), y(t))$ і $(x_0(t), y_0(t))$ системи (3.19)–(3.22) та функцію

$$V(t) = (x(t) - x_0(t))^2 + (y(t) - y_0(t))^2.$$

Її похідна в силу системи дорівнює

$$\begin{aligned}
\frac{dV(t)}{dt} &= 2(x - x_0)(a_1 y - b_1 x - c_1 x^2 - a_1 y_0 + b_1 x_0 + c_1 x_0^2) + \\
&+ 2(y - y_0)(a_2 x - b_2 y - c_2 y^2 - a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 y_0^2) \leqslant \\
&\leqslant 2\left((x - x_0)^2(-b_1^L - 2c_1^L m) + \right. \\
&+ \left. (y - y_0)^2(-b_2^L - 2c_2^L m) + |x - x_0||y - y_0|(a_1^M + a_2^M)\right) \leqslant \\
&\leqslant \lambda_M \left((x(t) - x_0(t))^2 + (y(t) - y_0(t))^2\right) = \lambda_M V(t).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Використовуючи нерівністі

$$V(t_{k+1}) \leqslant V(t_k + 0)\exp(\lambda_M(t_{k+1} - t_k))$$

і

$$\begin{aligned}
V(t_k + 0) = (1 + d_{1k})^2(x(t_k) - x_0(t_k))^2 &+ \\
+ (1 + d_{2k})^2(y(t_k) - y_0(t_k))^2 &\leqslant \\
\leqslant (1 + d_k)^2 V(t_k)&,
\end{aligned}$$

оцінюємо зміну функції на періоді

$$V(t + T) \leqslant K_* V(t) \leqslant e^{T\lambda_M} \prod_{k=1}^{p} (1 + p_k) V(t).$$

З умови *ii*) випливає $K_* < 1$, а тому $V(t) \to 0,\ t \to \infty$. Лему доведено. □

3.1.3. Умови перманентності системи рівнянь

Лема 3.10. *При виконанні умов $c_1^L > 0$, $c_2^L > 0$, $g^L > 0$ всі додатнозначні розв'язки системи (3.4)–(3.9) фінально рівномірно обмежені:*

$$\limsup_{t\to\infty} x_1(t) \leqslant M,\ \limsup_{t\to\infty} x_2(t) \leqslant M,\ \limsup_{t\to\infty} y(t) \leqslant M.$$

Доведення. Спочатку розглянемо два перших рівняння системи. Скористаємося нерівностями

$$\dot{x}_1 \leqslant a_1^M x_2 - b_1^L x_1 - c_1^L x_1^2, \tag{3.29}$$

$$\dot{x}_2 = a_2^M x_1 - b_2^L x_2 - c_2^L x_2^2, \ t \neq t_k. \tag{3.30}$$

За лемою 3.7 всі невід'ємні розв'язки (x_1, x_2) системи (3.29) – (3.30) з імпульсною дією (3.21) – (3.22) фінально рівномірно обмежені.

Для $y(t)$ виконується оцінка $y(t) \leqslant z(t)$, де $z(t)$ — розв'язок рівняння

$$\begin{gathered} \dot{z} = z(-q^L + \frac{h_3^M}{m_1^L} + \frac{h_4^M}{m_2^L} - g^L y), \\ z(t_k + 0) = (1 + d_{3k}) z(t_k). \end{gathered} \tag{3.31}$$

За лемою 3.3 всі розв'язки останнього рівняння фінально рівномірно обмежені. Лему доведено. □

Теорема 3.11. *При виконанні умови*

$$\int_0^T A_1(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^{p} \ln(1 + p_k) > 0, \tag{3.32}$$

де

$$A_1(t) = \min\{a_2(t) - b_1(t) - \frac{h_1(t)}{n_1(t)}, \ a_1(t) - b_2(t) - \frac{h_2(t)}{n_2(t)}\},$$

$$p_k = \min\{d_{1k}, d_{2k}\},$$

існує таке $\delta_1 > 0$, що для всіх додатнозначних розв'язків $(x_1(t), x_2(t), y(t))$ виконується

$$\liminf_{t\to\infty} x_1(t) \geqslant \delta_1, \ \liminf_{t\to\infty} x_2(t) \geqslant \delta_1. \tag{3.33}$$

Якщо, крім того, виконується нерівність

$$\begin{aligned} \int_0^T \Big(-q(t) + \frac{h_3(t)\delta_1}{k_1(t) + m_1(t)\delta_1} + \frac{h_4(t)\delta_1}{k_2(t) + m_2(t)\delta_1}\Big) dt \, + \\ + \sum_{k=1}^{p} \ln(1 + d_{3k}) > 0, \end{aligned} \tag{3.34}$$

то існує таке $\delta_2 > 0$, що для кожного додатного розв'язку $y(t)$ виконується оцінка

$$\liminf_{t\to\infty} y(t) \geqslant \delta_2.$$

Доведення. Оскільки для додатних $x_1,\ x_2,\ y$ виконується

$$\frac{h_i x_i y}{k_i + m_i x_i + n_i y} \leqslant \frac{h_i x_i}{n_i},\ i = 1,2,$$

то додатнозначні розв'язки системи (3.4) – (3.9) задовольняють нерівності

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 \geqslant a_1(t)x_2 - \left(b_1(t) + \frac{h_1(t)}{n_1(t)}\right)x_1 - c_1(t)x_1^2,\\
&\dot{x}_2 = a_2(t)x_1 - \left(b_2(t) + \frac{h_2(t)}{n_2(t)}\right)x_2 - c_2(t)x_2^2,\ t \neq t_k,\\
&x_1(t_k + 0) = (1 + d_{1k})x_1(t_k),\\
&x_2(t_k + 0) = (1 + d_{2k})x_2(t_k).
\end{aligned}$$

Тому виконання нерівностей (3.33) при умові (3.32) доводиться аналогічно лемі 3.8.

Враховуючи нерівності $x_1(t) \geqslant \delta_1$, $x_2(t) \geqslant \delta_1$ і рівності

$$\frac{h_3\delta_1}{k_1 + m_1\delta_1 + n_1 y} = \frac{h_3\delta_1}{k_1 + m_1\delta_1} - \frac{h_3\delta_1 n_1 y}{(k_1 + m_1\delta_1 + n_1 y)(k_1 + m_1\delta_1)},$$
$$\frac{h_4\delta_1}{k_2 + m_2\delta_1 + n_2 y} = \frac{h_4\delta_1}{k_2 + m_2\delta_1} - \frac{h_4\delta_1 n_2 y}{(k_2 + m_2\delta_1 + n_2 y)(k_2 + m_2\delta_1)},$$

отримуємо оцінку $y(t) \geqslant z(t)$, де $z(t)$ — розв'язок рівняння

$$\begin{aligned}
\dot{z} = z\Bigg(&-q(t) + \frac{h_3\delta_1}{k_1 + m_1\delta_1} + \frac{h_4\delta_1}{k_2 + m_2\delta_1} -\\
&- z\left(g(t) + \frac{\delta_1 n_1 h_3}{(k_1 + m_1\delta_1)^2} + \frac{\delta_1 n_2 h_4}{(k_2 + m_2\delta_1)^2}\right)\Bigg),\\
&z(t_k + 0) = (1 + d_{3k})z(t_k).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

За лемою 3.4 рівняння 3.35 за виконання умови леми має єдиний додатний асимптотично стійкий періодичний розв'язок.

Теорему доведено. $\square$

Якщо підсистема (3.4),(3.5),(3.7),(3.8) при $y \equiv 0$ має глобально стійкий періодичний розв'язок, отримуємо необхідну та достатню умову перманентності системи (3.4) – (3.9), аналогічну наведеній вище умові для системи без імпульсів.

Теорема 3.12. *Нехай підсистема (3.4),(3.5),(3.7),(3.8) (при $y \equiv 0$) має єдиний додатнозначний глобально експоненціально стійкий T-періодичний розв'язок $(x_1^*(t), x_2^*(t))$.*

Тоді система (3.4) – (3.9) перманентна тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$\int_0^T \left(-q + \frac{h_3 x_1^*}{k_1 + m_1 x_1^*} + \frac{h_4 x_2^*}{k_2 + m_2 x_2^*}\right) dt + \sum_{k=1}^{p} \ln(1 + d_{3k}) > 0. \tag{3.36}$$

Доведення. Скористаємося ідеями роботи [51]. Розіб'ємо доведення теореми на декілька кроків.

1. Доведемо, що існує таке Δ_y, що

$$\limsup_{t \to +\infty} y(t) \geqslant \Delta_y \tag{3.37}$$

для кожного розв'язку $(x_1(t), x_2(t), y(t))$ з додатними початковими даними.

Позначимо

$$\psi_\varepsilon(t) = -q(t) + \frac{h_3(x_1^* - \varepsilon)}{k_1 + m_1(x_1^* - \varepsilon) + n_1\varepsilon} +$$

$$+ \frac{h_4(x_2^* - \varepsilon)}{k_2 + m_2(x_2^* - \varepsilon) + n_2\varepsilon} - \varepsilon g(t). \tag{3.38}$$

За умовою (3.36) існує таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$

$$\int_0^T \psi_\varepsilon(t) dt + \sum_{k=1}^{p} \ln(1 + d_{3k}) > 0. \tag{3.39}$$

Оскільки за умовою теореми періодичний розв'язок $(x_1^*(t), x_2^*(t))$ експоненціально стійкий, то існує таке $\varepsilon_1 > 0$, що при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ система

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= a_1(t)z_2 - b_1(t)z_1 - c_1(t)z_1^2 - \frac{h_1(t)\varepsilon}{k_1(t)}z_1, \\ \dot{z}_2 &= a_2(t)z_1 - b_2(t)z_2 - c_2(t)z_2^2 - \frac{h_2(t)\varepsilon}{k_2(t)}z_2, \end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned} z_1(t_k+0) &= (1+d_{1k})z_1(t_k), \\ z_2(t_k+0) &= (1+d_{2k})z_2(t_k) \end{aligned} \tag{3.41}$$

має єдиний експоненціально стійкий періодичний розв'язок $(x_{1\varepsilon}^*(t), x_{2\varepsilon}^*(t))$, такий, що

$$(x_{1\varepsilon}^*(t), x_{2\varepsilon}^*(t)) \to (x_1^*(t), x_2^*(t)),\ \varepsilon \to 0.$$

Тому для $\varepsilon_0/2$ існує таке $\varepsilon_2 > 0$, що при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_2$ виконується

$$|(x_{1\varepsilon}^*(t) - x_1^*(t))| + |(x_{2\varepsilon}^*(t) - x_2^*(t))| \leqslant \varepsilon_0/2,\ t \in \mathbb{R}. \tag{3.42}$$

Припустимо, що умова (3.37) не виконується. Тоді для

$$\varepsilon \leqslant \min(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_* \tag{3.43}$$

існують розв'язок $(x_1(t), x_2(t), y(t))$ системи (3.4) – (3.9) та момент часу $T_1 > 0$, такі, що при $t \geqslant T_1$

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 \geqslant a_1(t)x_2 - b_1(t)x_1 - c_1(t)x_1^2 - \frac{h_1(t)\varepsilon}{k_1(t)}x_1, \\ &\dot{x}_2 \geqslant a_2(t)x_1 - b_2(t)x_2 - c_2(t)x_2^2 - \frac{h_2(t)\varepsilon}{k_2(t)}x_2, \\ &y(t) \leqslant \varepsilon,\ y(t_k+0) = (1+d_{3k})y(t_k), \\ &x_1(t_k+0) = (1+d_{1k})x_1(t_k), \\ &x_2(t_k+0) = (1+d_{2k})x_2(t_k). \end{aligned}$$

Розглянемо розв'язок системи (3.40) – (3.41) з початковими умовами

$$z_1(T_1) = x_1(T_1),$$

$$z_2(T_1) = x_2(T_1).$$

Система квазімонотонна, тому $x_1(t) \geqslant z_1(t),\ x_2(t) \geqslant z_2(t)$ при $t \geqslant T_1$.

Оскільки періодичний розв'язок $(x^*_{1\varepsilon}(t), x^*_{2\varepsilon}(t))$ асимптотично стійкий, то для $\varepsilon_0/2$ існує таке $T_2 > 0$, що

$$z_1(t) \geqslant x^*_{1\varepsilon}(t) - \frac{\varepsilon_0}{2},\quad z_2(t) \geqslant x^*_{2\varepsilon}(t) - \frac{\varepsilon_0}{2},\quad t \geqslant T_2.$$

З урахуванням (3.42) отримуємо

$$x_1(t) \geqslant x^*_1(t) - \varepsilon_0,\quad x_2(t) \geqslant x^*_2(t) - \varepsilon_0,\quad t \geqslant T_2.$$

З останніх нерівностей випливає оцінка для $y(t)$:

$$\begin{aligned}
&\dot{y} \geqslant y\left(-q(t) + \frac{h_3(x^*_1 - \varepsilon_0)}{k_1 + m_1(x^*_1 - \varepsilon_0) + n_1\varepsilon_0} + \right. \\
&\left. + \frac{h_4(x^*_2 - \varepsilon_0)}{k_2 + m_2(x^*_2 - \varepsilon_0) + n_2\varepsilon_0} - \varepsilon_0 g(t)\right), \\
&y(t_k + 0) = (1 + d_{3k})y(t_k).
\end{aligned}$$

З огляду на (3.39) робимо висновок, що $y(t) \to \infty$.

Отримали суперечність із припущенням $y(t) \leqslant \varepsilon$.

2. Доведемо, що існує додатна така стала δ_y, що для кожного додатного розв'язку $(x_1(t), x_2(t), y(t))$ системи (3.4) – (3.9) виконується

$$\liminf_{t\to\infty} y(t) \geqslant \delta_y. \tag{3.44}$$

Припустимо, що (3.44) не виконується. Тоді для кожного m існує розв'язок $y(t, z_m)$, $y(0, z_m) = z_m$, такий, що

$$\liminf_{t\to\infty} y(t, z_m) < \frac{\Delta_y}{(1+m)^2}.$$

Оскільки за першим кроком доведення $\limsup\limits_{t\to\infty} y(t, z_m) \geqslant \Delta_y$, то існують дві послідовності чисел $s^{(m)}_n$ та $t^{(m)}_n$, які задовольняють умови

$$\begin{aligned}
&0 < s^{(m)}_1 < t^{(m)}_1 < s^{(m)}_2 < t^{(m)}_2 < \ldots < s^{(m)}_n < t^{(m)}_n < \ldots, \\
&s^{(m)}_n \to \infty,\quad t^{(m)}_n \to \infty,\quad n \to \infty,
\end{aligned}$$

$$y(s_n^{(m)}, z_m) > \frac{\Delta_y}{m+1}, \quad y(t_n^{(m)}, z_m) < \frac{\Delta_y}{(m+1)^2},$$
$$y(t_n^{(m)}, z_m) \leqslant y(t, z_m) \leqslant y(s_n^{(m)}, z_m), \quad t \in (s_n^{(m)}, t_n^{(m)}).$$

За лемою 3.10 для розв'язку $y(t, z_m)$ існує таке $T_1^{(m)} > 0$, що $y(t, z_m) \leqslant M$ для $t \geqslant T_1^{(m)}$. Тому розв'язок $y(t, z_m)$ задовольняє нерівність із імпульсною дією

$$\dot{y} \geqslant y(-q(t) - g(t)M),$$
$$y(t_k + 0) = (1 + d_{3k})y(t_k).$$

Звідси отримуємо

$$y(t_n^{(m)}, z_m) \geqslant$$
$$\geqslant y(s_n^{(m)}, z_m) \exp\left(\int\limits_{s_n^{(m)}}^{t_n^{(m)}} (-q(t) - g(t)M)dt\right) \prod_{s_n^{(m)} \leqslant t_j < t_n^{(m)}} (1 + d_{3j}),$$
$$\exp\left(\int\limits_{s_n^{(m)}}^{t_n^{(m)}} (q(t) + g(t)M)dt\right) \prod_{s_n^{(m)} \leqslant t_j < t_n^{(m)}} (1 + d_{3j})^{-1} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{y(s_n^{(m)}, z_m)}{y(t_n^{(m)}, z_m)} \geqslant (m+1).$$

Оскільки функція $(q(t) + g(t)M)$ обмежена, точки імпульсної дії розділені, а коефіцієнти $(1 + d_{3j})$ рівномірно відділені від нуля, то $t_n^{(m)} - s_n^{(m)} \to \infty, \ m \to \infty$.

Виберемо таке m, що

$$\frac{\Delta_y}{m+1} < \varepsilon_*,$$

де ε_* задається умовою (3.43).

Тоді для $t \in [s_n^{(m)}, t_n^{(m)}]$ виконується

$$y(t, z_m) < \varepsilon_*$$

і

$$x_1(t, z_m) \geqslant z_1(t),$$

$$x_2(t, z_m) \geqslant z_2(t),$$

де $z_1(t)$, $z_2(t)$ — розв'язки системи (3.40) – (3.41) при $\varepsilon = \varepsilon_*$ і $z_i(s_n^{(m)}, z_m) = x_i(s_n^{(m)}, z_m)$, $i = 1, 2$.

Система (3.40) – (3.41) має єдиний періодичний розв'язок $(x^*_{1\varepsilon_*}(t), x^*_{2\varepsilon_*}(t))$, рівномірно асимптотично стійкий відносно області перманентності для цієї системи.

Тому для ε_0 існує таке $T_0 > 0$, що

$$z_1(t) \geqslant x^*_{1\varepsilon_*}(t) - \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad z_2(t) \geqslant z^*_{2\varepsilon_*}(t) - \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad t \geqslant T_0 + s_n^{(m)}.$$

З урахуванням неперервної залежності періодичних розв'язків

$$x^*_{1\varepsilon}(t) \to x^*_1(t), \; x^*_{2\varepsilon}(t) \to x^*_2(t)$$

отримаємо

$$z_1(t) \geqslant x^*_1(t) - \varepsilon_0, \quad z_2(t) \geqslant x^*_2(t) - \varepsilon_0, \quad t \geqslant T_0 + s_n^{(m)}$$

і відповідно

$$x_1(t) \geqslant x^*_1(t) - \varepsilon_0, \quad x_2(t) \geqslant x^*_2(t) - \varepsilon_0, \quad t \geqslant T_0 + s_n^{(m)}$$

З останніх оцінок випливає нерівність для $y(t)$:

$$\dot{y}(t, z_m) \geqslant \psi_{\varepsilon_0}(t) y(t, z_m),$$
$$y(t_k + 0, z_m) = (1 + d_{3k}) y(t_k, z_m).$$

Інтегруючи, одержуємо оцінку

$$y(t_n^{(m)}, z_m) \geqslant$$
$$\geqslant y(s_n^{(m)} + T', z_m) \exp\left(\int\limits_{s_n^{(m)}+T'}^{t_n^{(m)}} \psi_{\varepsilon_0}(t) dt \right) \prod_{s_n^{(m)} \leqslant t_k < t_n^{(m)}} (1 + d_{3k}).$$

Тому для деякого $T' \geqslant T_0$

$$\frac{\Delta_y}{(m+1)^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\Delta_y}{(m+1)^2} \exp\left(\int\limits_{s_n^{(m)}+T'}^{t_n^{(m)}} \psi_{\varepsilon_0}(t)dt \right) \prod_{s_n^{(m)} \leqslant t_k < t_n^{(m)}} (1+d_{3k}) >$$

$$> \frac{\Delta_y}{(m+1)^2}.$$

Прийшли до суперечності.

3. Доведемо необхідність умови теореми.

Припустимо, що

$$\int\limits_0^T \left(-q(t) + \frac{h_3 x_1^*}{k_1 + m_1 x_1^*} + \frac{h_4 x_2^*}{k_2 + m_2 x_2^*} \right) dt + \sum_{k=1}^{p} \ln(1+d_{3k}) \leqslant 0.$$

Перевіримо, що тоді $\liminf\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$ для кожного додатного розв'язку $(x_1(t), x_2(t), y(t))$ системи (3.4)–(3.9).

Для цього достатньо показати, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує послідовність точок $t_{\varepsilon n} \to \infty$, $n \to \infty$, таких, що $y(t_{\varepsilon n}) < \varepsilon$.

Для $\varepsilon > 0$ існують такі $\varepsilon_1 > 0$ і $\varepsilon_2 > 0$, що

$$\int\limits_0^T \tilde{\psi}(t, \varepsilon_1, \varepsilon) dt + \sum_{k=1}^{p} \ln(1+d_{3k}) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^T \frac{h_3(k_1\varepsilon_1 - x_1^* n_1 \varepsilon)dt}{(k_1 + m_1(x_1^* + \varepsilon_1) + n_1\varepsilon)(k_1 + m_1 x_1^*)} +$$

$$+ \int\limits_0^T \frac{h_4(k_2\varepsilon_1 - x_2^* n_2 \varepsilon)dt}{(k_2 + m_2(x_2^* + \varepsilon_1) + n_2\varepsilon)(k_2 + m_2 x_2^*)} - \varepsilon \int\limits_0^T g(t)dt \leqslant -\varepsilon_2.$$

де

$$\tilde{\psi}(t, \varepsilon_1, \varepsilon) = -q(t) + \frac{h_3(x_1^* + \varepsilon_1)}{k_1 + m_1(x_1^* + \varepsilon_1) + n_1\varepsilon} + \frac{h_4(x_2^* + \varepsilon_1)}{k_2 + m_2(x_2^* + \varepsilon_1) + n_2\varepsilon} - \varepsilon g(t).$$

Розв'язок $(x_1(t), x_2(t))$ задовольняє нерівності (3.29), (3.30).

Тому для ε_1 існує таке $T_3 > 0$, що

$$x_1(t) \leqslant x_1^*(t) + \varepsilon_1,\ x_2(t) \leqslant x_2^*(t) + \varepsilon_1$$

при $t \geqslant T_3$.

Припустимо, що $y(t) \geqslant \varepsilon$ при $t \geqslant T_3$. Тоді

$$\varepsilon \leqslant y(t) \leqslant \exp\left(\int\limits_{T_3}^{t} \tilde{\psi}(s, \varepsilon_1, \varepsilon) ds\right) \prod_{T_3 \leqslant t_k < t} (1 + d_{3k}) \to 0,\ t \to \infty.$$

Прийшли до суперечності.

Теорему доведено. □

3.2. Динаміка двох конкуруючих видів із віковою структурою

У цьому параграфі вивчимо періодичну систему рівнянь із запізненням та імпульсною дією, яка моделює динаміку двох конкуруючих видів із віковою структурою

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) = a_1(t)x_2(t) - a_1(t-h_1)e^{-\int\limits_{t-h_1}^{t} d_1(s)ds} x_2(t-h_1) - \\ - d_1(t)x_1(t),\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t) = a_1(t-h_1)e^{-\int\limits_{t-h_1}^{t} d_1(s)ds} x_2(t-h_1) - b_{11}(t)x_2(t) - \\ - b_{12}(t)x_2^2(t) - c_1(t)x_2(t)y_2(t),\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) = a_2(t)y_2(t) - a_2(t-h_2)e^{-\int\limits_{t-h_2}^{t} d_2(s)ds} y_2(t-h_2) - \\ - d_2(t)y_1(t),\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}\dot{y}_2(t) = a_2(t-h_2)e^{-\int\limits_{t-h_2}^{t} d_2(s)ds} y_2(t-h_2) - b_{21}(t)x_2(t) - \\ - b_{22}(t)y_2^2(t) - c_2(t)x_2(t)y_2(t)\end{aligned} \tag{3.48}$$

при $t \neq t_k$ з імпульсною дією

$$x_2(t_k+0) = (1+d_k)x_2(t_k), \quad y_2(t_k+0) = (1+g_k)y_2(t_k) \tag{3.49}$$

у моменти часу t_k, $k \in \mathbb{Z}$. Тут через $x_1(t)$ і $x_2(t)$ позначено щільність незрілих та зрілих особин першого виду, через $y_1(t)$ і $y_2(t)$ — щільність незрілих та зрілих особин другого виду в момент часу t.

Ця модель будується на основі математичної моделі еволюції одного біологічного виду з віковою структурою, яка була запропонована В. Г. Аєлло та Х. І. Фрідманом у 1990 р. у роботі [17]. Після появи цієї роботи різного виду моделі з віковою структурою досліджувались у багатьох роботах [7, 45, 99, 100, 128, 157, 170].

3.2.1. Перманентність та періодичні розв'язки системи.

Спочатку розглянемо періодичну систему рівнянь, яка моделює еволюцію одного біологічного виду з віковою структурою

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \alpha(t)x_m(t) - \delta(t)x_i(t) - \\ &\quad - \alpha(t-h)e^{-\int\limits_{t-h}^{t}\delta(s)ds}x_m(t-h), \end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned} \dot{x_m}(t) &= \alpha(t-h)e^{-\int\limits_{t-h}^{t}\delta(s)ds}x_m(t-h) - \\ &\quad - \beta(t)x_m(t) - \gamma(t)x_m^2(t), \end{aligned} \tag{3.51}$$

де $x_i(t)$ — щільність незрілих особин біологічної популяції (тобто кількість особин, що припадає на одиницю площі), $x_m(t)$ — щільність зрілих особин біологічної популяції в момент часу t.

Функції $\alpha(t)$ та $\delta(t)$ задають коефіцієнти народжуваності та смертності незрілих особин, вираз $-\beta(t)x_m(t) - \gamma(t)x_m^2(t)$ задає смертність зрілих особин, h — час дозрівання.

Вираз

$$\alpha(t-h)e^{-\int_{t-h}^{t}\delta(s)ds}x_m(t-h)$$

визначає число особин, які народилися в момент часу $(t-h)$, вижили і в момент часу t стали дорослими.

У роботі ми дослідимо модель із віковою структурою (3.50), (3.51) та імпульсною дією

$$x_m(t_k+0) = (1+d_k)x_m(t_k), \quad i = 1,2, \tag{3.52}$$

у моменти часу t_k, $k \in \mathbb{Z}$. Формули (3.52) моделюють короткотривалі зовнішні впливи на біологічну систему.

Будемо припускати, що виконуються наступні умови:

C1. Функції $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ і $\delta(t)$ кусково-неперервні, T-періодичні та додатнозначні. h — додатна стала.

C2. Послідовність точок імпульсної дії $\{t_k\}_{k\in Z}$ строго зростає й задовольняє умову періодичності $t_{k+p} - t_k = T$, $k \in \mathbb{Z}$, з деяким натуральним числом p.

C3. $d_{k+p} = d_k$, $d_k \in (-1, d\,]$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$, $d > 0$.

Вважаємо, що розв'язки системи неперервні зліва.

Виходячи з біологічної інтерпретації, будемо розглядати розв'язки системи (3.50) – (3.52), які набувають невід'ємних значень. Тому початкові умови розв'язків задаються таким чином:

$$x_i(0) = \varphi_i > 0,$$
$$x_m(\theta) = \psi_m(\varphi) \geqslant 0, \quad \theta \in [-h, 0], \quad \psi_m(0) > 0.$$

Систему рівнянь (3.50) – (3.52) будемо називати перманентною, якщо існують такі додатні сталі m_0 і M_0, що для кожного розв'язку $(x_i(t), x_m(t))$ з додатними початковими значеннями (3.50), (3.51) виконується

$$\liminf_{t\to\infty} x_i(t) \geqslant m_0, \quad \limsup_{t\to\infty} x_i(t) \leqslant M_0,$$

$$\liminf_{t\to\infty} x_m(t) \geqslant m_0, \quad \limsup_{t\to\infty} x_m(t) \leqslant M_0.$$

Означимо число $\sigma = \frac{1}{T}\sum\limits_{0\leqslant t_k<T} \ln(l+d_k)$. Тоді функція $\omega(t) = \prod\limits_{0\leqslant t_k<t}(1+d_k)e^{-\sigma t}$ є додатнозначною й T-періодичною.

Теорема 3.13. *Нехай виконується нерівність*

$$\inf_t \left(\sigma - \beta(t) + \alpha(t-h)e^{\sigma h - \int\limits_{t-h}^{t} \delta(s)ds} \prod_{t-h\leqslant t_k<t} (1+d_k)^{-1} \right) > 0. \tag{3.53}$$

Тоді система (3.50) – (3.52) перманентна.

Якщо додатково виконується нерівність

$$\sup_t S(t) < 2\inf_t S(t), \tag{3.54}$$

де

$$S(t) = \frac{\sigma - \beta(t) + \alpha(t-h)e^{\sigma h - \int\limits_{t-h}^{t} \sigma(s)ds} \prod\limits_{t-h\leqslant t_k<t}(1+d_k)^{-1}}{\gamma(t)\prod\limits_{0\leqslant t_k<t}(1+d_k)e^{\sigma t}},$$

то система (3.50) – (3.52) має єдиний додатнозначний T-періодичний розв'язок.

Доведення. 1. Доведемо додатну інваріантність системи (3.50) – (3.52). Позначимо через $x_m(t,\varphi)$ розв'язок із початковою функцією φ. Спочатку доведемо, що $x_m(t,\varphi) > 0$, $t > 0$, якщо $\varphi(\theta) \geqslant 0$, $\theta \in [-h, 0]$, $\varphi(0) > 0$. Дійсно, при $t \in [0, h]$ рівняння (3.51), (3.52) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t) = \alpha(t-h)e^{-\int\limits_{t-h}^{t}\delta(s)ds}\varphi(t-h) - \beta(t)x_m(t) - \\ - \gamma(t)x_m^2(t), \end{aligned} \tag{3.55}$$

$$x_m(t_k+0) = (1+d_k)x_m(t_k). \tag{3.56}$$

Розв'язок рівнянь (3.55), (3.56) із початковою умовою $x_m(0) = \varphi(0) > 0$ оцінюється знизу розв'язком рівняння

$$\dot{u}(t) = -\beta(t)u(t) - \gamma(t)u^2(t), \ t \neq t_k,$$

$$u(t_k+0) = (1+d_k)u(t_k).$$

Розв'язок останнього рівняння строго додатний при $t \in (0, h]$, оскільки $\varphi(0) > 0$ і $(1+d_k) > 0$. Аналогічно, розглядаючи рівняння на інтервалах $[h, 2h]$, $[2h, 3h]$ і т. д., показуємо додатність розв'язку при всіх $t > 0$.

Для доведення додатності розв'язків $x_i(t)$ скористаємося наступними міркуваннями. В момент часу s з'являється $\alpha(s)x_m(s)$ незрілих індивідів. Враховуючи коефіцієнт смертності $\delta(s)$, із початкової кількості $\alpha(s)x_m(s)$ у момент часу t залишиться $\alpha(s)x_m(s)e^{-\int\limits_s^t \delta(\xi)d\xi}$ індивідів. За припущенням $t - s \leqslant h$, тому

$$x_i(t) = \int\limits_{t-h}^{t} \alpha(s)x_m(s)e^{-\delta(\xi)d\xi}ds. \tag{3.57}$$

Оскільки $x_m(s) > 0$, з останньої рівності випливає додатність популяції $x_i(t)$.

Виконавши в рівняннях (3.51), (3.52) заміну змінних

$$x_m(t) = \omega(t)v(t) = \prod_{0 \leqslant t_k < t} (1+d_k)e^{-\sigma t}v(t),$$

отримуємо рівняння без імпульсів

$$\dot{v}(t) = A(t)v(t-h) - B(t)v(t) - C(t)v^2(t), \tag{3.58}$$

де

$$A(t) = \prod_{t-h \leqslant t_k < t} (1+d_k)^{-1}\alpha(t-h)\exp\left(\sigma h - \int\limits_{t-h}^{t} \delta(s)ds\right),$$

$$B(t) = \beta(t) - \sigma,$$

$$C(t) = \prod_{0 \leqslant t_k < t} (1+d_k)e^{-\sigma t}\gamma(t).$$

Розв'язки рівняння (3.58) неперервні з неперервними зліва похідними.

Виберемо $M_0 > 0$ і $\Gamma > 1$ так, що

$$\frac{B(t) + C(t)M_0}{A(t)} \geqslant \Gamma$$

для всіх $t > 0$.

2. Покажемо, що розв'язки рівняння (3.58) є фінально рівномірно обмеженими, а саме:

$$\limsup_{t\to\infty} v(t,\varphi) \leqslant M_0$$

для всіх невід'ємних початкових функцій φ.

Припустимо від супротивного, що для деякого φ виконується

$$\limsup_{t\to\infty} v(t,\varphi) = M_1 > M_0.$$

Якщо розв'язок монотонний, то $\lim\limits_{t\to\infty} v(t,\varphi) < \infty$. Дійсно, якщо $v(t,\varphi) \to \infty$, то з (3.58) випливає, що починаючи з деякого моменту часу $v'(t,\varphi) < 0$, що суперечить припущенню $v(t,\varphi) \to \infty$. Отже, існує $A_0 = \lim\limits_{t\to\infty} v(t,\varphi)$. При цьому $\lim\limits_{t\to\infty} v'(t,\varphi) = 0$ (інакше $v(t,\varphi) \to \pm\infty$, що неможливо). Тому

$$\lim_{t\to\infty}(A(t)A_0 - B(t)A_0 - C(t)A_0^2) = 0$$

і $A_0 = 0$ або $A_0 = (A(t) - B(t))/C(t)$.

При виконанні (3.53) рівність $A_0 = 0$ неможлива, тому $(A(t) - B(t))/C(t) = \mathrm{const} > 0$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. У цьому випадку рівняння має додатну асимптотично стійку нерухому точку $x(t) = A_0$ [95].

Якщо розв'язок немонотонний, то існує така послідовність $\xi_k \to \infty$, що $v(\xi_k,\varphi) > M_0$, $\dot v(\xi_k,\varphi) = 0$, якщо ξ_k не збігається з точками імпульсної дії, й $\dot v(\xi_k,\varphi) > 0$, якщо $\xi_k = t_j$ для деякого j. Тому

$$v(\xi_k - h,\varphi) \geqslant \frac{B(\xi_k)v(\xi_k,\varphi) + C(\xi_k)v^2(\xi_k,\varphi)}{A(\xi_k)} \geqslant \Gamma M_0.$$

Якщо $\dot v(\xi_k - h,\varphi) > 0$, то з (3.58) отримуємо

$$\begin{aligned} &v(\xi_k - 2h,\varphi) \geqslant \\ &\geqslant \frac{B(\xi_k - h)v(\xi_k - h,\varphi) + C(\xi_k - h)v^2(\xi_k - h,\varphi)}{A(\xi_k - h)} \geqslant \Gamma^2 M_0. \end{aligned}$$

Якщо $\dot{v}(\xi_k - h, \varphi) < 0$, то вибираємо першу зліва від $\xi_k - h$ точку ζ_1, де $\dot{v}(\zeta_1, \varphi) > 0$. За побудовою

$$v(\zeta_1, \varphi) > v(\xi_k - h, \varphi) > \Gamma M_0.$$

Аналогічно до попереднього $v(\zeta_1 - h, \varphi) \geqslant \Gamma^2 M_0$. Продовжуючи, отримуємо послідовність точок ζ_m, таку, що

$$v(\zeta_m, \varphi) \geqslant \Gamma_m M_0.$$

Нехай $\varphi^M = \sup\limits_{\theta \in [-h,0]} \varphi(\theta)$. Виберемо k_0 так, що $\Gamma^{k_0} M_0 > \varphi^M$. Тоді $v(\zeta_k, \varphi) > \varphi^M$ при $k \geqslant k_0$. Вибираючи $\bar{k} \geqslant k_0$ так, щоб точка $\zeta_{\bar{k}}$ належала $[-h, 0]$, приходимо до суперечності. З нескінченності послідовності ξ_k випливає, що таке $\bar{k}$ завжди існує.

Оскільки $\Gamma > 1$ довільне, в якості M_0 можна вибрати число

$$M_0 = \sup_t \frac{A(t) - B(t)}{C(t)}.$$

3. Доведемо, що при виконанні (3.53) існує таке $m_0 > 0$, що

$$\liminf_{t \to \infty} v(t, \varphi) > m_0 \tag{3.59}$$

для всіх початкових функцій $\varphi(\theta) > 0$, $\theta \in [-h, 0]$, $\varphi(0) > 0$.

Припустимо, що (3.59) не виконується. Тоді для кожного $\epsilon > 0$ існує розв'язок $v(t, \varphi)$ такий, що

$$\liminf_{t \to \infty} v(t, \varphi) < \epsilon.$$

Існує така послідовність точок τ_k, що $v(\tau_k, \varphi) < \epsilon$ і $v'(\tau_k, \varphi) = 0$, якщо τ_k не збігається з точками імпульсної дії, і $v'(\tau_k - 0, \varphi) < 0$, якщо $\tau_k = t_j$ для деякого j. Звідси випливає, що

$$A(\tau_n) v(\tau_n - h) - B(\tau_n) v(\tau_n) - C(\tau_n) v^2(\tau_n) \leqslant 0,$$

тому

$$v(\tau_n - h) \leqslant \frac{B(\tau_n) + C(\tau_n) v(\tau_n)}{A(\tau_n)} v(\tau_n).$$

Оскільки $v(\tau_n) < \epsilon$, з умови

$$\frac{B(t) + C(t)\epsilon}{A(t)} \leqslant \gamma < 1, \ t \geqslant 0,$$

випливає $v(\tau_n - h) < \gamma\epsilon$ (враховуючи (3.53), вибираємо γ так, щоб $\gamma A(t) - B(t) > 0$ для всіх t).

Якщо $v'(\tau_n - h) \leqslant 0$, то

$$v(\tau_n - 2h) \leqslant \frac{B(\tau_n - h) + C(\tau_n - h)v(\tau_n - h)}{A(\tau_n - h)}\gamma\epsilon \leqslant \gamma^2\epsilon.$$

Якщо $v'(\tau_n - h) > 0$, то вибираємо першу зліва від $\tau_n - h$ точку θ_1, де $v'(\theta_1, \varphi) \leqslant 0$.

Продовжуючи аналогічно, отримуємо таку послідовність точок θ_k, що

$$v(\theta_k, \varphi) \leqslant \gamma^k\epsilon.$$

Нехай

$$\varphi^L = \inf_{\theta \in [-h,0]} \varphi(\theta) > 0.$$

Виберемо k_1 так, що $\gamma^{k_1}\epsilon < \varphi^L$. Вибираючи досить велике τ_n за початкове з нескінченної послідовності τ_n, переконуємося, що існує таке $\theta_k \in [-h, 0]$, що $v(\theta_k, \varphi) \leqslant \gamma^k\epsilon < \varphi^L$. Суперечність.

Якщо початкова функція $\varphi(\theta)$ не відділена від нуля, то в якості початкової функції розглядаємо розв'язок $v(t, \varphi)$, $t \in [0, h]$. За першою частиною доведення теореми він строго додатний і

$$\inf_{\theta \in [0,h]} v(\theta, \varphi) > 0.$$

Отже, в якості m_0 можна вибрати число

$$m_0 = \inf_t \frac{A(t) - B(t)}{C(t)}.$$

За виконання умови (3.53) рівняння (3.51), (3.52) перманентні. При обмеженому й відділеному від нуля розв'язку $x_m(t)$ за формулою (3.57) легко отримати перманентність розв'язку $x_i(t)$.

4. Доведемо існування та єдиність періодичного розв'язку рівняння (3.58) при виконанні нерівності (3.54).

Розглянемо два розв'язки $x(t)$ і $y(t)$, такі, що

$$x(t) \geqslant m_0 - \rho,$$

$$y(t) \geqslant m_0 - \rho$$

для $t \geqslant 0$ з деяким малим $\rho > 0$. Їх різниця $\omega(t) = x(t) - y(t)$ задовольняє лінійне рівняння

$$\frac{d}{dt}\omega(t) = A(t)\omega(t-h) - \omega(t)(B(t) + C(t)(x(t) + y(t))). \tag{3.60}$$

За теоремою Разуміхіна ([79, с. 154]) рівняння (3.60) є рівномірно асимптотично стійким, якщо

$$A(t) \leqslant \gamma_1(B(t) + C(t)(x(t) + y(t))),\ t \in \mathbb{R},$$

із довільною сталою $\gamma_1 < 1$.

Оскільки $x(t)+y(t) \geqslant 2(m_0-\delta)$, то достатня умова для асимптотичної стійкості рівняння (3.60) має вигляд

$$\sup_t \frac{A(t) - B(t)}{C(t)} \leqslant 2 \inf_t \frac{A(t) - B(t)}{C(t)}. \tag{3.61}$$

Аналізуючи доведення теореми Разуміхіна ([79, с. 153]), можна зробити висновок, що рівняння (3.60) є асимптотично стійким рівномірно для всіх функцій $x(t)$ і $y(t)$, які задовольняють оцінки $x(t),\ y(t) \in [m_0, M_0]$ для всіх $t \geqslant 0$. А це й означає рівномірну асимптотичну стійкість розв'язків рівняння (3.58), які набувають значень у інтервалі $[m_0, M_0]$.

З рівномірної асимптотичної стійкості випливає, що для $\epsilon > 0$ існує таке $\bar{t} = \bar{t}(\epsilon)$, що для всіх розв'язків $v(t,\varphi_1), v(t,\varphi_2)$ рівняння (3.58) з початковими функціями $m_0 \leqslant \varphi_i(\theta) \leqslant M_0,\ \theta \in [t_0 - h, t_0],\ i = 1, 2$, виконується

$$|v(t,\varphi_1) - v(t,\varphi_2)| < \epsilon,\ t \geqslant t_0 + \bar{t}(\epsilon).$$

Отже, множина неперервних функцій

$$P = \{\varphi(\theta) : m_0 < \varphi_i(\theta) \leqslant M_0,\ \theta \in [-h, 0]\}$$

під дією відображення $\varphi \to v_{kT}(\varphi)$, $v_{kT}(\varphi) = \{v(kT+\theta,\varphi) : -h \leqslant \theta \leqslant 0\}$ з деяким натуральним k переходить у себе, й це відображення є відображенням стиску. Тому існує kT-періодичний розв'язок $\bar{v}(t)$ рівняння (3.58). Оскільки $\bar{v}(t+T)$ також розв'язок T-періодичного рівняння (3.58) і $\bar{v}(t+T) - \bar{v}(t) \to 0$, $t \to \infty$, то $v(t)$ є єдиним T-періодичним розв'язком рівняння (3.58).

Відповідно рівняння (3.51), (3.52) мають єдиний додатнозначний періодичний розв'язок $\bar{x}_m(t) = \omega(t)\bar{v}(t)$. Існування додатнозначного періодичного розв'язку рівняння (3.50) безпосередньо випливає з формули (3.50). Теорему доведено. $\square$

3.2.2. Динаміка двох конкуруючих видів із віковою структурою.

Повернемося до вивчення системи рівнянь (3.45) – (3.49), яка описує еволюцію двох конкуруючих біологічних видів.

Будемо припускати, що виконуються наступні умови:

C1. Функції $a_i(t)$, $d_i(t)$, $b_{ij}(t)$, $c_i(t)$, $i,j = 1,2$, кусково-неперервні, T-періодичні та додатнозначні, h_1 і h_2 — додатні сталі.

C2. Послідовність точок імпульсної дії $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ строго зростає й задовольняє умову періодичності $t_{k+p} - t_k = T$, $k \in \mathbb{Z}$, з деяким натуральним числом p.

C3. $d_{k+p} = d_k$, $d_k \in (-1, d]$, $g_{k+p} = g_k$, $g_k \in (-1, d]$, $k \in \mathbb{Z}$, $d > 0$.

Виходячи з біологічної інтерпретації, будемо розглядати розв'язки системи (3.45) – (3.49), які набувають невід'ємних значень. Тому початкові умови розв'язків задаються таким чином:

$$x_1(0) > 0,\ x_2(\theta) = \varphi(\theta) \geqslant 0,\ \theta \in [-h_1, 0],\ \varphi(0) > 0, \tag{3.62}$$

$$y_1(0) > 0,\ y_2(\theta) = \varphi(\theta) > 0,\ \theta \in [-h_2, 0],\ \psi(0) > 0. \tag{3.63}$$

Як і раніше, будемо називати систему рівнянь (3.45) – (3.49) перманентною, якщо існують такі додатні сталі m_0 і M_0, що для кожного розв'язку $(x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t))$ з додатними початковими значеннями (3.62), (3.63) виконується

$$\liminf_{t\to\infty} x_i(t) > m_0,\ \limsup_{t\to\infty} x_i(t) < M_0, \tag{3.64}$$

$$\liminf_{t\to\infty} y_i(t) > m_0,\ \limsup_{t\to\infty} y_i(t) < M_0,\ i = 1, 2. \tag{3.65}$$

Введемо позначення

$$A_1(t) = a_1(t-h_1) \prod_{t-h_1\leqslant t_k<t} (1+d_k)^{-1} e^{\sigma_1 h_1 - \int\limits_{t-h_1}^{t} d_1(s)ds},$$

$$B_1(t) = b_{11}(t) - \sigma_1,$$

$$C_1 = b_{12}(t) \prod_{0\leqslant\leqslant t_k<t} (1+d_k) e^{-\sigma_1 t},\ D_1(t) = c_1(t) \prod_{0\leqslant t_k<t} (1+g_k) e^{-\sigma_2 t},$$

$$A_2(t) = a_2(t-h_2) \prod_{t-h_2\leqslant t_k<t} (1+g_k)^{-1} e^{\sigma_2 h_2 - \int\limits_{t-h_2}^{t} d_2(s)ds},$$

$$B_2(t) = b_{21}(t) - \sigma_2,$$

$$C_2 = b_{22}(t) \prod_{0\leqslant t_k<t} (1+g_k) e^{-\sigma_2 t},\ D_2(t) = c_2(t) \prod_{0\leqslant t_k<t} (1+g_k) e^{-\sigma_2 t},$$

$$\sigma_1(t) = \frac{1}{T} \sum_{0\leqslant t_k<t} \ln(1+d_k),\ \sigma_2(t) = \frac{1}{T} \sum_{0\leqslant t_k<t} \ln(1+g_k)$$

$$\omega_1(t) = \prod_{0\leqslant t_k<t} (1+d_k) e^{-\sigma_1 t},\ \omega_2(t) = \prod_{0\leqslant t_k<t} (1+g_k) e^{-\sigma_2 t}.$$

Внаслідок періодичності системи (3.45) – (3.49) функції $\omega_1(t)$ і $\omega_2(t)$ додатнозначні й T-періодичні.

Теорема 3.14. *Система (3.45) – (3.49) перманентна, якщо*

$$\begin{gathered}\inf_t \frac{A_1(t) - B_1(t)}{D_1(t)} > \sup_t \frac{A_2(t) - B_2(t)}{D_2(t)},\\ \inf_t \frac{A_2(t) - B_2(t)}{D_2(t)} > \sup_t \frac{A_1(t) - B_1(t)}{D_1(t)}.\end{gathered} \tag{3.66}$$

Доведення. В системі рівнянь (3.45) – (3.48) з імпульсною дією (3.49) рівняння (3.46) і (3.48) не залежать від інших. Виконавши в цій двовимірній системі заміну змінних $x_2(t) = \omega_1(t)u(t)$, $y_2(t) = \omega_2(t)v(t)$, отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = A_1(t)u(t-h_1) - B_1(t)u(t) - C_1(t)u^2(t) - \\ - D_1(t)u(t)v(t), \end{aligned} \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) = A_2(t)v(t-h_2) - B_2(t)v(t) - C_2(t)v^2(t) - \\ - D_2(t)u(t)v(t). \end{aligned} \tag{3.68}$$

Як і при доведенні теореми 1 у [8], отримуємо для розв'язків $u(t)$ і $v(t)$ з невід'ємними початковими умовами оцінки зверху

$$\limsup_{t\to\infty} u(t) \leqslant M_{10} = \sup_{t\geqslant 0} \frac{A_1(t) - B_1(t)}{C_1(t)},$$

$$\limsup_{t\to\infty} v(t) \leqslant M_{20} = \sup_{t\geqslant 0} \frac{A_2(t) - B_2(t)}{C_2(t)}$$

і знизу

$$\liminf_{t\to\infty} u(t) \geqslant m_{10} = \inf_{t\geqslant 0} \frac{A_1(t) - B_1(t) - D_1(t)M_{20}}{C_1(t)},$$

$$\liminf_{t\to\infty} v(t) \geqslant m_{20} = \inf_{t\geqslant 0} \frac{A_2(t) - B_2(t) - D_2(t)M_{10}}{C_2(t)}.$$

Розв'язки $x_2(t)$ і $y_2(t)$ задовольняють інтегральні рівності

$$x_1(t) = \int\limits_{t-h_1}^{t} a_1(s)x_2(s)e^{-\int_s^t d_1(\xi)d\xi}ds,$$

$$y_1(t) = \int\limits_{t-h_2}^{t} a_2(s)y_2(s)e^{-\int_s^t d_2(\xi)d\xi}ds.$$

З цих рівностей випливають оцінки для для розв'язків $x_1(t)$ і $y_1(t)$ з невід'ємними початковими умовами:

$$\limsup_{t\to\infty} x_1(t) \leqslant M_{10}\omega_1^M \sup_{t\geqslant 0} \int\limits_{t-h_1}^{t} a_1(s)e^{-\int\limits_s^t d_1(\xi)d\xi ds},$$

$$\limsup_{t\to\infty} y_1(t) \leqslant M_{20}\omega_2^M \sup_{t\geqslant 0} \int\limits_{t-h_2}^{t} a_2(s) e^{-\int\limits_s^t d_2(\xi)d\xi ds},$$

$$\liminf_{t\to\infty} x_1(t) \geqslant m_{10}\omega_1^L \inf_{t\geqslant 0} \int\limits_{t-h_1}^{t} a_1(s) e^{-\int\limits_s^t d_1(\xi)d\xi ds},$$

$$\liminf_{t\to\infty} y_1(t) \geqslant m_{20}\omega_2^L \inf_{t\geqslant 0} \int\limits_{t-h_2}^{t} a_2(s) e^{-\int\limits_s^t d_2(\xi)d\xi ds}.$$

Отже, розв'язки системи рівнянь (3.67), (3.68), а також $x_2(t)$ і $y_2(t)$ (враховуючи обмеженість і додатність періодичних функцій $\omega_1(t)$ і $\omega_2(t)$) перманентні, якщо $m_{10} > 0$, $m_{20} > 0$, що досягається при виконанні (3.66). Теорему доведено. □

Теорема 3.15. *Нехай система (3.45) – (3.49) перманентна, а саме, її розв'язки з невід'ємними початковими даними задовольняють умови (3.64), (3.65) і додатково виконується нерівність*

$$\min_t \lambda(t) - \max_t (A_1(t), A_2(t)) > 0,$$

де $\lambda(t)$ *— найменше власне значення матриці* $(\Phi_2(t) + \Phi_2^T(t))/2$*,*

$$\Phi_2(t) = \begin{pmatrix} B_1 + C_1(u_1 + u_1) + D_1 v_1 & D_1 u_2 \\ D_2 v_1 & B_2 + C_2(v_1 + v_1) + D_2 u_2 \end{pmatrix},$$

а функції $u_i(t)$*,* $v_i(t)$ *задовольняють нерівності*

$$m_{10} \leqslant u_i(t) \leqslant M_{10},\ m_{20} \leqslant v_i(t) \leqslant M_{20},\ i = 1, 2,\ t \in \mathbb{R}.$$

Тоді система має єдиний додатнозначний кусково-неперервний асимптотично стійкий T*-періодичний розв'язок.*

Доведення. Покажемо, що система (3.67), (3.68) є рівномірно асимптотично стійкою. Розглянемо два розв'язки $(u_1(t), v_1(t))$ і $(u_2(t), v_2(t))$. Їх різниці $\omega_1(t) = u_1(t) - u_2(t)$ і $\omega_2(t) = v_1(t) - v_2(t)$ задовольняють систему рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1(t) = A_1(t)\omega(t-h_1) - (B_1(t) + C_1(t)(u_1(t) + u_2(t)) + \\ + D_1(t)v(t))\,\omega_1(t) - D_1(t)u_2(t)\omega_2(t), \end{aligned} \tag{3.69}$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_2(t) = A_2(t)\omega_2(t-h_1) - (B_2(t) + C_2(t)(v_1(t) + v_2(t)) + \\ + D_2(t)u_2(t))\,\omega_2(t) - D_2(t)v_1(t)\omega_1(t). \end{aligned} \tag{3.70}$$

Система (3.69), (3.70) лінійна й однорідна відносно ω_1, ω_2. Перепишемо її у вигляді

$$\dot{W}(t) = \Phi_1(t)W(t-h) - \Phi_2(t)W(t), \tag{3.71}$$

де $W(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t))$, $\Phi_1(t) = \operatorname{diag}\{A_1(t), A_2(t)\}$. Для дослідження її стійкості розглянемо функцію Ляпунова $V(t) = (\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t))/2 = (W, W)/2$, де $(.,.)$ — скалярний добуток у $\mathbb{R}^2$. Її похідна в силу системи дорівнює

$$\frac{dV(t)}{dt} = (\Phi_1(t)W(t-h), W(t)) - (\Phi_2(t)W(t), W(t)).$$

Оцінимо похідну вздовж траєкторій, які задовольняють умову $V(\xi) < q^2V(t)$, або, що еквівалентно, $\|W(\xi)\| < q||W(t)||$ для $t - h \leqslant \xi \leqslant t$, $q > 1$. Для цих t виконується оцінка

$$\frac{dV(t)}{dt} \leqslant (q \max(A_1(t), A_2(t))) - \lambda(t)||W(t)||^2.$$

При виконанні умов теореми похідна $dV(t)/dt$ в цій точці t є від'ємно визначеною. За теоремою Разуміхіна [79] система (3.71) є рівномірно асимптотично стійкою. Вона має єдиний додатнозначний асимптотично стійкий періодичний розв'язок.

Теорему доведено. $\square$

Висновки до розділу 3

В даному розділі розглянуто систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x}_1 = a_1(t)x_2 - b_1(t)x_1 - c_1(t)x_1^2 - \frac{h_1(t)x_1y}{k_1(t)+m_1(t)x_1+n_1(t)y},$$

$$\dot{x}_2 = a_2(t)x_1 - b_2(t)x_2 - c_2(t)x_2^2 - \frac{h_2(t)x_2y}{k_2(t)+m_2(t)x_2+n_2(t)y},$$

$$\dot{y} = y\biggl(-q(t) - g(t)y(t) + \frac{h_3(t)x_1}{k_1(t)+m_1(t)x_1+n_1(t)y} + \\ + \frac{h_4(t)x_2}{k_2(t)+m_2(t)x_2+n_2(t)y}\biggr)$$

при $t \neq t_k$ та з імпульсною дією

$$\begin{aligned} x_1(t_k+0) &= (1+d_{1k})x_1(t_k), \\ x_2(t_k+0) &= (1+d_{2k})x_2(t_k), \\ y(t_k+0) &= (1+d_{3k})y(t_k), \end{aligned}$$

у моменти часу $t_k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Функції $a_j(t)$, $b_j(t)$, $c_j(t)$, $k_j(t)$, $m_j(t)$, $n_j(t)$, $q(t)$, $g(t)$, $j=1,2$, $h_k(t)$, $k=1,...,4$, кусково-неперервні, T-періодичні та додатнозначні, послідовність точок імпульсної дії $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ задовольняє умову періодичності $t_{k+p}-t_k=T$, $k\in\mathbb{Z}$, із деяким натуральним числом p, $d_{j,k+p}=d_{jk}$, $d_{jk}\in(-1,d]$ для всіх $j=1,2,3$, $k\in\mathbb{Z}$. Вважаємо, що розв'язки системи неперервні зліва.

Отримано умови перманентності періодичної системи, яка описує еволюцію біологічної моделі хижак–жертва з віковою структурою жертви, імпульсною дією й функцією впливу у вигляді Беддінгтона – Деанжеліса.

Також розглянуто систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x}_1(t) = a_1(t)x_2(t) - a_1(t-h_1)e^{-\int_{t-h_1}^{t} d_1(s)ds}x_2(t-h_1) - \\ - d_1(t)x_1(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = a_1(t-h_1)e^{-\int_{t-h_1}^{t} d_1(s)ds}x_2(t-h_1) - b_{11}(t)x_2(t) - \\ - b_{12}(t)x_2^2(t) - c_1(t)x_2(t)y_2(t),$$

$$\dot{y}_1(t) = a_2(t)y_2(t) - a_2(t-h_2)e^{-\int_{t-h_2}^{t} d_2(s)ds}y_2(t-h_2) - \\ - d_2(t)y_1(t),$$
$$\dot{y}_2(t) = a_2(t-h_2)e^{-\int_{t-h_2}^{t} d_2(s)ds}y_2(t-h_2) - b_{21}(t)x_2(t) - \\ - b_{22}(t)y_2^2(t) - c_2(t)x_2(t)y_2(t)$$

при $t \neq t_k$ з імпульсною дією

$$x_2(t_k+0) = (1+d_k)x_2(t_k), \quad y_2(t_k+0) = (1+g_k)y_2(t_k)$$

у моменти часу t_k, $k \in \mathbb{Z}$.

Функції $a_i(t)$, $d_i(t)$, $b_{ij}(t)$, $c_i(t)$, $i, j = 1, 2$, кусково-неперервні, T-періодичні та додатнозначні, h_1 і h_2 — додатні сталі, послідовність точок імпульсної дії $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ строго зростає й задовольняє умову періодичності $t_{k+p} - t_k = T$, $k \in \mathbb{Z}$ з деяким натуральним числом p, $d_{k+p} = d_k$, $d_k \in (-1, d]$, $g_{k+p} = g_k$, $g_k \in (-1, d]$ для всіх $p = 1, 2$, $k \in \mathbb{Z}$, $d > 0$.

Система рівнянь описує еволюцію двох конкуруючих біологічних видів із віковою структурою та імпульсною дією. Тут через $x_1(t)$ і $x_2(t)$ позначено щільність незрілих і зрілих особин першого виду, через $y_1(t)$ і $y_2(t)$ — щільність незрілих і зрілих особин другого виду в момент часу t.

Виходячи з біологічної інтерпретації, розглянуто розв'язки системи, які приймають невід'ємних значень.

Отримано умови перманентності та існування асимптотично стійкого періодичного розв'язку для системи рівнянь із запізненням та імпульсним впливом, яка моделює динаміку двох конкуруючих видів із віковою структурою.

Основний результат:

– отримано умови перманентності періодичної системи з віковою структурою та імпульсною дією й умови перманентності та існування асимптотично стійких періодичних розв'язків у системі рівнянь із запізненням та імпульсною дією, яка моделює динаміку двох конкуруючих видів із віковою структурою.

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню умов існування та стійкості кусково-неперервних асимптотично майже періодичних, майже періодичних та періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь із запізнененням та імпульсною дією як у фіксовані, так і нефіксовані моменти часу.

У роботі отримано такі наукові результати:

– Знайдено умови існування кусково-неперервних асимптотично майже періодичних і майже періодичних розв'язків систем із запізненням та фіксованими моментами імпульсних впливів. Отримані результати застосовано для знаходження умов існування і стійкості додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків імпульсного рівняння Маккі – Гласса та моделі біологічної популяції з віковою структурою та імпульсною дією.

– Знайдено умови існування кусково-неперервних асимптотично майже періодичних і майже періодичних розв'язків систем із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії. Знайдено умови існування і стійкості додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків імпульсного логістичного рівняння з запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії.

– Отримано умови перманентності періодичної системи «хижак–жертва» з віковою структурою жертви та імпульсною дією, а також умови перманентності й існування додатних асимптотично стійких періодичних розв'язків імпульсної системи рівнянь із запізненням, яка моделює динаміку двох конкуруючих видів із віковою структурою.

Одержані в дисертаційній роботі результати й методика їхнього отримання можуть бути використані для дослідження асимптотично майже періодичних та майже періодичних розв'язків системи рівнянь із запізненням та імпульсної дією й отримання умов існування, єдиності та стійкості кусково-неперервних майже періодичних та періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсним впливом.

Також ці результати можуть бути застосовані для вивчення задач математичної біології та розвивають відповідні їм математичні методи, які представляються відповідними математичними моделями.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Ахметов М.У., Перестюк Н.А.* О почти периодических решениях импульсных систем // Укр. мат. журнал. – 1987. – **39**, № 1. – С. 74 – 80.

2. *Ахметов М.У., Перестюк Н.А.* Почти периодические решения класса систем с импульсным воздействием // Укр. мат. журнал – 1984. – **36**, № 4. – С. 486—490.

3. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Чуйко С.М.* Периодические решения нелинейных автономных систем в критическом случае // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 9. – С.1180–1187.

4. *Дворник А. В., Струк О. О., Ткаченко В. І.* Майже періодичні розв'язки систем Лотки – Вольтерра з дифузією та імпульсною дією // Укр. мат. журн. — 2018. — **70**, № 2. — С. 177 – 192.

5. *Дворник А. В., Ткаченко В. І.* Майже періодичні розв'язки систем Лотки — Вольтерра з дифузією та нефіксованими моментами імпульсної дії // Нелінійні коливання. – 2018. – **21**, № 3. – С. 305 – 322.

6. *Кочерга О. І., Неня О.І., Ткаченко В.І.* Про додатні періодичні розв'язки нелінійних функціонально-диференціальних рівнянь з імпульсною дією // Нелінійні коливання. – 2008. – **11**, № 4. – P. 501–511.

7. *Мисло Ю.М., Ткаченко В.І.* Про перманентність періодичних систем хижак–жертва з віковою структурою та імпульсною дією // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 4. – P. 527–540. TRANSLATED IN: *Myslo Y.M., Tkachenko V.I.* On the permanence of periodic predator–prey systems with stage structure and pulse action // Nonlinear Oscillations. – 2009. – **12**, № 4. – P. 543–558. DOI: 10.1007/s11072-010-0093-1

8. *Мисло Ю.М., Ткаченко В.І.* Перманентність та періодичні розв'язки в моделях із віковою структурою, запізненням та імпульсною дією // Нелінійні коливання. – 2010. – **13**, № 4. – С. 546–555. Translated in: *Myslo Y.M., Tkachenko V.I.* Permanence and periodic solutions in models with stage structure, delay and pulse action // Nonlinear Oscillations. – 2011. – **13**, № 4. – p. 584–594. DOI: 10.1007/s11072-011-0133-5

9. *Мисло Ю.М., Ткаченко В.І.* Майже періодичні розв'язки рівнянь Маккі–Гласса з імпульсною дією // Нелінійні коливання. – 2011. – **14**, № 4. – С. 507–515. Translated in: *Myslo Y. M., Tkachenko V. I.* Almost periodic solutions of Mackey–Glass equations with pulse action // Nonlinear Oscillations. – 2012. – **14**, № 4. – p. 537–546. DOI: 10.1007/s11072-012-0175-3

10. *Мисло Ю.М., Ткаченко В.І.* Асимптотично майже періодичні розв'язки рівнянь із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії // Нелінійні коливання. — 2016. — **19**, № 4. — С. 533–546. Translated in: *Myslo Yu. M., Tkachenko V. I.* Asymptotically Almost Periodic Solutions of Equations with Delays and Nonfixed Times of Pulse Action // Journal of Mathematical Sciences (United States). — 2018. — **228**, № 3. — P. 290–305. DOI: 10.1007/s10958-017-3621-z

11. *Мисло Ю.М., Ткаченко В.І.* Майже періодичне логістичне рівняння із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії // Нелінійні коливання. — 2019. — **22**, № 4. — С. 497–509.

12. *Перестюк Н.А., Ахметов М.У.* О почти периодических решениях импульсных систем // Укр. мат. журнал – 1987. – **39**, № 1. – С. 74–80.

13. *Самойленко А.М., Кенжебаєв К.К., Станжицький О.М., Таран Є.Ю.* Математичне моделювання. – К.: «Наукова думка», 2015. – 327 с.

14. *Самойленко А.М., Трофимчук С.И.* Неограниченные функции с почти периодическими разностями // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1409–1413.

15. *Станжицький О.М., Місяць О.О.* Асимптотична еквівалентність імпульсних систем. Укр. мат. журнал – 2007. – **59**, № 4. – С. 514–521; translation in Ukrainian Math. J. 59 (2007), no. 4, 577–587

16. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. // Москва: Мир, 1971. – 310 с.

17. *Aiello W.G., Freedman H.I.* A time-delay model of single-species growth with stage structure // Math. Biosci. – 1990. – 101. – P.139–153.

18. *Akhmet M.* Almost periodicity, chaos, and asymptotic equivalence. – Nonlinear Systems and Complexity, 27. – Springer, Cham, 2020. — XVII+360 pp.

19. *Akhmet M.* Principles of discontinuous dynamical systems. — New York: Springer, 2010. — xii + 176 pp.

20. *Akhmet M. U., Beklioglu M., Ergenc T., Tkachenko V.I.* An impulsive ratio-dependent predator-prey system with diffusion // Nonlinear Anal. Real World Appl. – 2006. – **7**, № 5. – P.1255–1267.

21. *Akhmetov M. U., Perestyuk N. A.* Periodic and almost periodic solutions of strongly nonlinear impulse systems // J. Appl. Math. Mech. – 1992. – **56**, № 6. – P. 829 – 837.

22. *Alzabut J.O., Nieto J.J., Stamov G.T.* Existence and exponentioal stability of positive almost periodic solutions for a model of hematopoiesis // Boundary Value problems. – 2009. – ID 127510. – 10 p.

23. *Antonishin I. O.* Linear integral equations with asymptotically almost-periodic solutions. // in Some Problems in the Theory of Asymptotic Methods in Nonlinear Mechanics. – 1989. – P. 21–25. Akad. Nauk Ukrain. SSR Inst. Mat. Kiev, Ukraine, 1986.

24. *Ararktsyan B. G.* Asymptotically almost periodic solutions of some linear evolution equations. // Matematicheski Sbornik. – 1987. – vol. 133(175), no. 1 – P. 3–10.

25. *Arditi R., Ginzburg L.R.* Coupling in predator-prey dynamics: Ratio-dependence. // J. Teoret. Biol. – 1989 – 139 – P. 311–326.

26. *Arendt W. and Batty C. J. K.* Asymptotically almost periodic solutions of inhomogeneous Cauchy problems on the half-line // The Bulletin of the London Mathematical Society. – 1999. – vol. 31, no. 3. – P. 291–304.

27. *Barac D.* Asymptotically almost periodic solutions of the systems of differential equations // Mathematica – 1977. – vol. 19 (42), no. 2. – P. 123–127.

28. *Barbalat I.* Solutions presque-periodiques de l'equation de Riccati // Communica rile Academiei Republicii Populare Romne – 1961 – vol. 11. – P. 161–165.

29. *Beddington J.R.* Mutual interference between parasites or predators and its effect on seaching efficiency. // J.Animal Ecol. – 1975. – 44. – P. 331–341.

30. *Berezansky L., Braverman E.* Mackey–Glass equation with variable coefficients // Computers and Mathematics with Applications. – 2006. – 51. – P. 1–16.

31. *Bhatia N. P.* Asymptotic recurrence and dynamical flow near a compact minimal set, in Seminar on Differential Equations and Dynamical Systems, II (Univ. Maryland, College Park, Md., 1969), vol. 144 of Lecture Notes in Mathematics, P. 22–29, Springer, Berlin, Germany, 1970.

32. *Bhatia N.P., Chow S.-N.* Weak attraction, minimality, recurrence, and almost periodicity in semi-systems // Funkcialaj Ekvacioj. – 1972. – vol. 15. – P. 39–59.

33. *Bogdanowicz W.* On the existence of almost periodic solutions for systems of ordinary nonlinear differential equations in Banach spaces // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1963. – vol. 13, no. 1. – P. 364–370.

34. *Boreli G.* De motu animalium // Bernabo, Rome. – 1680 – vol. 1.

35. *Britton N.* Essential mathematical biology. Springer Science and Business Media. 2005.

36. *Bronshteyn I. U., Cernii V. F.* Extensions of dynamical systems with uniformly asymptotically stable points // Differential Equations. – 1974. – vol. 10. – P. 1225–1230.

37. *Buse C.* A spectral mapping theorem for evolution semigroups on asymptotically almost periodic functions defined on the half line // Electronic Journal of Differential Equations. – 2002. – vol. 2002, no. 70. – P. 1–11, 2002.

38. *Cantrell R.S., Cosner C.* On the dynamics of predotor-prey models with Beddington-DeAngelis functional response. // J. Math. Anal. Appl. – 2001 – 257 – P. 206–222.

39. *Cantrell R.S., Cosner C., Ruan S.G.* Intraspecific interference and consumer-resource dynamics. // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B – 2004 – 4 – P. 527– 546.

40. *Casarino V.* Spectral properties of weakly asymptotically almost periodic semigroups in the sense of Stepanov // Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Serie IX. Matematica e Applicazioni – 1997 – vol. 8, no. 3 – P. 167–181.

41. *Chen F.* Almost periodic solution of the non-autonomous two-species competitive model with stage structure // Applied Mathematics and Computation. – 2006. – 181 – P. 685–693.

42. *Chen X.-Y., Matano H.* Convergence, asymptotic periodicity, and finite-point blow-up in one-dimensional semilinear heat equations // Journal of Differential Equations 1989. – vol. 78, no. 1. – P. 160–190,

43. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Attractors for Equations of Mathematical Physics, vol. 49 of American Mathematical Society Colloquium Publications, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 2002.

44. *Cioranescu I.* Asymptotically almost periodic distributions. Applicable Analysis. – 1989. – vol. 34, no. 3-4. – P. 251–259.

45. *Ciu S., Chen L., Agarwal R.* Recent progress on stage-structured population dynamics // Math. Comput. Modelling. – 2002.– 36, № 11-13. – P. 1319–1360.

46. *Coppel W. A.* Almost periodic properties of ordinary differential equations // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 1967. – vol. 76, no. 1. – P. 27–49.

47. *Corduneanu C.* Solutions asymptotiquement presque-periodiques des equations differentielles non-lineaires du second ordre // Studii si Cercetari Stiintifice – Academia R.P. Romane, Filiala Iasi. Seria I. – 1955. – vol. 6, no. 3-4. – P. 1–4.

48. *Cosner C., DeAngelis D.L., Ault J.S.* Effects of spatial grouping on the functional response of predators. // Theoret.Popul.Biol. – 1999 – 56 – P. 65 – 75.

49. *Crowly P.H., Martin E.F.* Functional response and interference within and between year classes of the dragonfly population // J. N. Am. Benthol. Soc.–1989 – 8 – P. 211–221.

50. *Cui J., Chen L., Wang W.* The effect of dispersal on population growth with stage-structure // Comput. Math. Appl. – 2000. – 39. – P. 91–102.

51. *Cui J., Song X.* Permanence of predator-prey system with stage structure // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B – 2004. – 4, № 3.– P. 547–554.

52. *Cui J., Takeuchi Y.* A predator-prey system with a stage structure for the prey. // Math. Comput. Modelling – 2006. – 44, № 11-12. – P. 1126–1132.

53. *David N. Cheban* Asymptotically almost periodic solutions of differential equations, *Hindawi Publishing Corporation*, 2009.

54. *D'Arcy W. Thompson,* 1917, On growth and form. Cambridge University Press, Cambridge.

55. *DeAngelis D.L., Goldsten R. A., Neil R.* A model for trophic interaction. // Ecology. – 1975. – 56. – P. 881-892.

56. *Dishliev A.B., Bainov D.D.* Continuous dependence of the solution of a system of differential equations with impulses on the initial condition // Z. Anal. Anwendungen. – 1989. – 8. – P. 183–196.

57. *Dontvi I. K.* Asymptotically almost periodic solutions of linear systems of differential equations with generalized perturbations. // Matematicheskie Issledovaniya. – 1989. – no. 106. – P. 72–78.

58. *Dontvi I. K.* Bounded, almost periodic and asymptotically almost periodic solutions of linear differential equations with generalized perturbations // Ph. D. thesis, Odessa, Odessa, Ukraine. – 1988.

59. *Dontvi I. K.* Weakly asymptotic almost periodic solutions of differential equations // Matematicheskie Issledovaniya. – 1990. – no. 112. – P. 83–92.

60. *Draghichi M.* Trajectoires R^{+}-presque-periodiques et asymptotiquement-presque-periodiques pour certains semi-groupes de classe (C_0) // Annales des Sciences Mathematiques du Quebec. – 1984. – vol. 8, no. 2. – P. 127–133.

61. *Fan K.* Les fonctions asymptotiquement presque-periodiques d'une variable entie're et leur application a' l'etude de l'iteration des transformations continues // Mathematische Zeitschrift. – 1943. – vol. 48, no. 4-5. – P. 685–711.

62. *Fan M., Kuang Y.* Dynamics of a nonautonomous predator–prey system with the Beddington–DeAngelis functional response // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – 295. – P.15–39.

63. *Fink A.M.* Almost periodic differential equations // Lecture Notes in Mathematics, Springer-Virlag. – 1974. – 377. – 336 p.

64. *Fink A. M.* Semi-separated conditions for almost periodic solutions // Journal of Differential Equations. – 1972. – vol. 11, no. 2. – P. 245–251.

65. *Fisher R. A.* 1930, The genetical theory of natural selection, Clarandon Press, Oxford; 1949, The theory of inbreeding, Oliver and Boyd, Edinburgh.

66. *Fréchet M.* Les fonctions asymptotiquement presque-periodiques continues // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. – 1941. – vol. 213. – P. 520–522. .

67. *Fréchet M.* Les fonctions asymptotiquement presque-periodiques // Revue Scientifique. – 1941. – vol. 79, no. 7-8. – P. 341–354.

68. *Gerko A. I.* Asymptotic recurrence in correspondences with memory // Izvestiya Akademii Nauk Moldavsko SSR. Matematika. – 1997. – no. 2 – P. 55–68, 127–128.

69. *Gerko A. I.* Asymptotically recurrent solutions of β-differential equations // Matematicheskie Zametki. – 2000. – vol. 67, no. 6. – P. 837–851.

70. *Gheorghiu N.* Solutions presque-periodiques et asymptotiquement presque-periodiques de quelques equations differentielles non lineaires du premier ordre // Analele Stiintifice ale Universitatii “Al.I.Cuza” din Iasi. – 1955. – vol. 1, no. 1. – P. 17–20.

71. *Gopalsamy K.* Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. Vol. 74. Springer Science and Business Media, 2013.

72. *Gopalsamy K., Trofimchuk S.I., Bantsur N.R.* A note on global attractivity in modems of hematopoiesis // Ukrain. Math. J. – 1998. – 50. – P. 5-12.

73. *Gourley S. A., Kuang Y.* A stage-structured predator-prey model and its dependence on through-stage delay and death rate // J. Math. Biol. – 2004. – 49. – P. 188–200.

74. *Grimmer R. C.* Asymptotically almost periodic solutions of differential equations // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1969. – vol. 17, no. 1. – P. 109–115.

75. *Guryanov A. E.* On sufficient conditions for the regularity of second order systems of linear ordinary differential equations with uniform asymptotically almost periodic coefficients // Vestnik Leningrad University. Mathematics. – 1970. – vol. 25, no. 19. – P. 23–27.

76. *Gyori I., Ladas G.* Oscillation theory of delay differential equations // Clarendon press. Oxford. – 1991. – 368 p.

77. *Hakl R., Pinto M., Tkachenko V., Trofimchuk S.* Almost periodic evolution systems with impulse action at state-dependent moments // J. Math. Anal. Appl. – 2017. – **446**. – P. 1030–1045.

78. *Haldane J. B. S.* 1924, A mathematical theory of natural and artificial selection. Cambridge University Press, Cambridge.

79. *Hale J.K., Lunel S.M.V.* Introduction to functional differential equations // Springer-Verlag. – 1993. – 447 p.

80. *Hassell M.P., Varley C.C.* New inductive population model for insect parasites and its bearing on biological control // Nature. – 1969. – 223. – P. 1133. – 1137.

81. *Henriquez H.R.* Asymptotically almost-periodic solutions of abstract differential equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1991. – vol. 160, no. 1. – P. 157–175.

82. *Henriquez H. R., De Andrade B., Rabelo M.* Existence of almost periodic solutions for a class of abstract impulsive differential equations // SRN Math. Anal. – 2011. – Article ID 632687. – 21 p.

83. *Hino Y. , Murakami S., Yoshizawa T.* Existence of almost periodic solutions of some functional-differential equations with infinite delay in a Banach space // The Tohoku Mathematical Journal. – 1997. – vol. 49, no. 1. – P. 133–147.

84. *Hino Y., Murakami S.* Almost periodic processes and the existence of almost periodic solutions // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. – 1998 – no. 3. – P. 1–19.

85. *Hino Y., Murakami S.* Limiting equations and some stability properties for asymptotically almost periodic functional differential equations with infinite delay // The Tohoku Mathematical Journal. – 2002. – vol. 54, no. 2. – P. 239–257.

86. *Holling C.S.* The components of predation as revealed by a study of small mammal predation of the European pine sawfly. // Canad. Entomologist. – 1959. – 91. – P. 293–320.

87. *Holling C.S.* Some characteristics of simple types of predation and parasitism. // Canad. Entomologist. – 1959. – 91. – P. 385–395.

88. *Hou, Juan, Zhidong Teng, and Shujing Gao.* Permanence and global stability for nonautonomous N-species Lotka–Valterra competitive system with impulses. Nonlinear Analysis: Real World Applications 11.3 (2010): 1882–1896.

89. *Hsu S.B., Hubbell S.P., Waltman P.* Competing predators. // SIAM J. Appl. Math. – 1978. – 35. – P. 617–625.

90. *Hutson V., Schmitt K.* Permanence and the dynamics of biological systems // Mathematical biosciences. – 1992. – 111.1. – P. 1–71.

91. *Hwang T.W.* Global analysis of the predator–prey system with Beddington–DeAngelis functional response // J. Math. Anal. Appl. – 2003. – 281. – P. 395–401.

92. *Hwang Z.W.* Uniqueness of limit cycles of the predotor-prey system with Beddington–DeAngelis functional response // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – 290. – P. 113–122.

93. *Jordan G.S., Wheeler R.L.* Linear integral equations with asymptotically almost periodic solutions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1975. – vol. 52, no. 3. – P. 454–464.

94. *Jordan G. S., Madych W. R., Wheeler R. L.* Linear convolution integral equations with asymptotically almost periodic solutions // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1980. – vol. 78, no. 3. – P. 337–341.

95. *Kuang Ya.* Delay differential equations with applications in population dynamics // Academic Press. – 1993.

96. *Kuang Y., Beretta E.* Global qualitative analysis of a ratio-dependent predotor-prey system // J. Math. Biol. – 1998 – 36 – P. 389–406.

97. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simenov P. S.* Theory of impulsive differential equations // Singapore: World Scientific Publishing, 1989. – XII + 273 p.

98. *Liu X., Ballinger G.* Existence and continuability of solutions for differential equations with delays and state-dependent impulses // Nonlinear Analysis: TMA. – 2002. – **51**, № 4. – P. 633 – 647.

99. *Liu B., Beretta E.* Competitive systems with stage structure of distributed-delay type // J. Math. Anal. and Appl. –2006.– 323. № 1. – P. 331 –343.

100. *Liu S., Chen L., Luo G., Jiang Y.* Asymptotic behaviors of competitive Lotka-Volterra system with stage structure // Ibid. – 2002. – 271, № 1. – P. 124 –138.

101. *Liu S., Yuan R.* Stability and bifurcation in a delayed predator-prey system with Beddington-DeAngelis functional respnse // J. Math. Anal.Appl. – 2004 – 296 – P.521–537.

102. *Liu X., Chen L.* Global dynamics of the periodic logistic system with periodic impulsive perturbations // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – 289. – P.279-–291.

103. *Liu S., Beretta E.* A stage-structured predator-prey model of Beddington-DeAngelis type. // SIAM J. Appl. Math. – 2006. – 66. – P. 1101–1129.

104. *Liu K., Chen L.* On a periodic time-dependent model of population dynamics with stage structure and impulsive effects // Discrete Dyn. Nat. Soc. – 2008. – Article ID 389727. – 15 P.

105. *Liz E., Pinto M., Tkachenko V., Trofimchuk S.* A global stability criterion for a family of delayed population models // Quarterly of Applied Mathematics. – 2005. – 63. – P. 56–70.

106. *Lovicar V.* Theorem of Fréchet and asymptotically almost periodic solutions of some nonlinear equations of hyperbolic type // Nonlinear Evolution Equations and Potential Theory (Proceedings of Summer School, Podhradí, Czech Republic, 1973), P. 107–115, Academia,Prague, Czech Republic, 1975.

107. *Ma Z., Li Z., Wang S., Li T., Zhang F.* Permanence of a predator-prey system with stage structure and time delay // Applied Mathematics and Computation. – 2008. – vol. 201, no. 1–2. – P. 65–71.

108. *Mackey M.C., Glass L.* Oscillation and chaos in physiological control systems // Science. – 1977. – 197. – P. 287–289.

109. *Manfredi B.* Asperiodicite globale en $+\infty$ et solutions periodiques, in Actes de la Conference Internationale "Equa-Diff. 73", P. 480–487, Brussels, Belgium, Septembre 1973.

110. *Manfredi B.* Su le funzioni asperiodichein $+\infty$—II // Rivistadi Matematica della Universita‘di Parma. – 1974. – vol. 3, no. 3. – P. 367–373.

111. *Manfredi B.* Asperiodicity and asquasiperiodicity. // Rivista di Matematica della Universita‘ di Parma. – 1978. – vol. 4, no. 4. – P. 395–402.

112. *Manfredi B.* On certain asymptotic almost periodic motions // Rivista di Matematica della Universita‘ di Parma – 1979. – vol. 5, part 2. – P. 885–899.

113. *Manfredi B.* Almost periodic constrained oscillations in almost periodic dynamical systems // Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Universita‘ di Modena. – 1989. – vol. 37, no. 1 – P. 249–256.

114. *Manfredi B.* More on the quasiperiodic solutions of quasiperiodic dynamical systems // Rivista di Matematica della Universita‘ di Parma. – 1990. – vol. 16, no. 1-2. – P. 97–103.

115. *Mambriani A., Manfredi B.* Sur le funzioni asperiodichein $+\infty^{-}I$. // Rivistadi Matematica dell' Universita di Parma. – 1971. – vol. 12. – P. 281–308.

116. *Marchi S.* Some properties concerning sets of asymptotically almost periodic functions Rivista di Matematica della Universita‘ di Parma. – 1980. – vol. 6. – P. 65–71.

117. *Marchi S.* Necessary conditions for equi-asymptotically-almost periodicity. // Rivista di Matematica della Universita‘ di Parma. – 1982. – vol. 8. – P. 501–508.

118. *Miller R. K.* Almost periodic differential equations as dynamical systems with applications to the existence of A. P. solutions // Journal of Differential Equations. – 1965. – vol. 1, no. 3. – P. 337–345.

119. *Miller R. K.* Asymptotically almost periodic solutions of a nonlinear Volterra system // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1971. – vol. 2, no. 3. – P. 435–444.

120. *Millionshchikov V. M.* Recurrent and almost periodic limit trajectories of non-autonomous systems of differential equations // Doklady Academy of Sciences of USSR. – 1965. – vol. 161, no. 1. – P. 43–44.

121. *Millionshchikov V. M.* Recurrent and almost periodic limit solutions of non-autonomous systems // Differential'nye Uravneniya. – 1968. – vol. 4, no. 9. – P. 1555–1559.

122. *Muntean I.* Exponential convergence of solutions of differential equations // Revue Roumaine de Mathematiques Pures et Appliquees. – 1972. – vol. 17. – P. 1411–1417.

123. *Muntean I.* Almost periodic solutions by exponential convergence // Analele Ştiintifice ale Universitatii Al.I.Cuza" din Iaşi. – 1972. – vol. 18. – P. 319–323.

124. *Murray J.D.* Mathematical biology: I. An introduction (Vol. 17). Springer Science and Business Media. 2007.

125. *Myslo Yu. M., Tkachenko V. I.* Global attractivity in almost periodic single species models // Funct. Different. Equat. – 2011. – 18, № 3 – 4. – P. 269 – 278.

126. *Nemytskii V. V.* On some methods of qualitative investigation in the large for many-dimensional autonomous systems // Works of Moscow Mathematical Society. – 1956. – vol. 5. – P. 455–482.

127. *Nemytskii V.V.* Oscillatory regimes of higher-dimensional dynamical systems, in Qualitative Methods in the Theory of Non-Linear Vibrations (Proceedings of the International Symposium on Non-linear Vibrations, Vol. II, 1961), P. 308–314, Akademii Nauk Ukrainian SSR, Kiev, Ukraine, 1963.

128. *Pang G., Wang F., Chen L.* Extinction and permanence in delayed stage-structure predator-prey system with impulsive effects // Chaos Solitons Fractals. – 2009. – 39, № 5. - P. 2216–2224.

129. *Pinto M., Robledo G.* Existence and stability of almost periodic solutions in impulsive neural network models // Appl. Math. Comput. – 2010. – 217, № 8. – P. 4167 – 4177.

130. *Precupanu A.* Fonctions et suites asymptotiquement presque-periodiques avec des valeurs dans un espace de Banach // Analele Stiintifice ale Universitatii Alexandru Ioan Cuza din Iasi, Sectiunea I a, Matematica. – 1969. – vol. 15. – P. 29–38.

131. *Puljaev V. F., Caljuk Z. B.* Asymptotically almost periodic solutions of a Volterra integral equation // Mathematical Analysis. – 1974. – vol. 180, no. 2. – P. 127–131.

132. *Puljaev V. F. and Caljuk Z. B.* The asymptotically ω-periodic solutions of Volterra integral equations // Differential'nye Uravneniya. – 1974. – vol. 10. – P. 1103–1110.

133. *Qui Z.P., Yu J., Zou Y.* The asymptotic behavior of a chemostat model with the Beddington-DeAngelis functional response. // Math.Biosci. – 2004. – 187. – P. 175–187.

134. *Risito C.* Existence theorems for almost periodic solutions of periodic systems // Bollettino della Unione Matematica Italiana A – 1979 – vol. 16, no. 2 – P. 412–417.

135. *Ruess W.M., Phong V.Q.* Asymptotically almost periodic solutions of evolution equations in Banach spaces // Journal of Differential Equations. – 1995. – vol. 122, no. 2. – P. 282–301.

136. *Ruess W. M., Summers W. H.* Asymptotic almost periodicity and motions of semigroups of operators // Linear Algebra and Its Applications. – 1986. – vol. 84. – P. 335–351.

137. *Ruess W. M., Summers W. H.* Compactness in spaces of vector valued continuous functions and asymptotic almost periodicity // Mathematische Nachrichten. – 1988. – vol. 135. – P. 7–33.

138. *Ruess W. M., Summers W. H.* Positive limit sets consisting of a single periodic motion // Journal of Differential Equations. – 1988. – vol. 71, no. 2. – P. 261–269.

139. *Ruess W. M., Summers W. H.* Integration of asymptotically almost periodic functions and weak asymptotic almost periodicity. // Dissertationes Mathematicae. – 1989. – vol. 279. – p. 38.

140. *Ruess W. M., Summers W. H.* Weak asymptotic almost periodicity for semigroups of operators. // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1992. – vol. 164, no. 1. – P. 242–262.

141. *Ruxton G., Gurney W.S.C., Deroos A.* Interference and generation cycles. // Theoret. Popul. Biol. – 1992. – 42. – P. 235–253.

142. *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A.* Impulsive differential equations. // Singapore: World Sci.– 1995. – 462 p.

143. *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A., Akhmetov M.U.* Almost periodic solutions of differential equations with impulse action // Akad. Nauk Ukrain. SSR Inst. Mat. Preprint. – 1983. – no. 26. – 49 P.

144. *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A., Trofimchuk S.I.* Generalized solutions of impulse systems and the phenomenon of pulsations // Ukr. Math. J. – 1991. – 43. – P. 610–615.

145. *Samoilenko A.M., Trofimchuk S.I.* Spaces of piecewise-continuous almost-periodic functions and almost-periodic sets on the line. I // Ukrain. Math. J. – 1991. – 43. – P. 1501–1506.

146. *Samoilenko A.M., Trofimchuk S.I.* Almost periodic impulsive systems // Different. Equat. – 1993. – 29. – P. 684–691.

147. *Sandberg I. W., G. J. J. van Zyl.* The spectral coefficients of the response of nonlinear systems to asymptotically almost periodic inputs // IEEE Transactions on Circuits and Systems I. – 2001. – vol. 48, no. 2. – P. 170–176.

148. *Seifert G.* Almost periodic solutions for almost periodic systems of ordinary differential equations // Journal of Differential Equations. – 1966. – vol. 2. – P. 305–319.

149. *Seifert G.* Nonlinear evolution equations with almost periodic time dependence // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1987. – vol. 18, no. 2. – P. 387–392.

150. *Seifert G.* Almost periodicity in semiflows // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1995. – vol. 123, no. 9. – P. 2895–2899.

151. *Seifert G.* Asymptotic recurrence in semiflows with an application to delay-differential equations // Mathematical and Computer Modelling. – 2000. – vol. 32, no. 5–6. – P. 621–624.

152. *Shen W. X., Yi Y. F.* Asymptotic almost periodicity of scalar parabolic equations with almost periodic time dependence // Journal of Differential Equations. – 1995. – vol. 122, no. 2. – P. 373–397.

153. *Shen J.H.* Global existence and uniqueness, oscillation and nonoscillation of impulse delay differential equations // Acta Math. Sinica. – 1997. – 40, № 1. – P. 53–57.

154. *Sibirsky K. S.* Introduction to Topological Dynamics, Kishinev, RIA AN MSSR, 1970, English translation: Introduction to Topological Dynamics, Noordhoff, Leyden, The Netherlands, 1975.

155. *Skalski G.T., Gilliam J.F.* Functional responses with predator interference: Viable alternatives to the Holling type II model. // Ecology. – 2001. – 82. – P. 3038–3092.

156. *Smith H.L.* Monotone dynamical systems // American Math. Society, Providence, 1995.

157. *Song X., Cai L., Neumann A. U.* Ratio-dependent predator-prey system with stage structure for prey // Discrete Contin. Dynam. Syst. Ser. B. – 2004. – 4, № 3. – P. 747–758.

158. *Staffans O. J.* On asymptotically almost periodic solutions of a convolution equation // Transactions of the American Mathematical Society. – 1981. – vol. 266, no. 2. – P. 603–616.

159. *Stamov G. T.* Almost periodic solutions of impulsive differential equations // Lect. Notes Math. – Heidelberg: Springer, 2012. – 2047. – XX + 217 p.

160. *Struk O. O., Tkachenko V. I.* On impulsive Lotka – Volterra systems with diffusion // Ukrain. Math. J. — 2002. — **54**, № 4. — P. 629 – 646.

161. *Taam C. T.* Asymptotically periodic and almost periodic solutions of nonlinear differential equations in Banach spaces // Tech. Rep., Georgetown University, Washington, DC, USA, 1966.

162. *Tkachenko V. I.* Almost periodic solutions of parabolic type equations with impulsive action // Funct. Different. Equat. – 2014. – 21, № 3 – 4. – P. 155 – 169.

163. *Tkachenko V. I.* Exponential dichotomy and existence of almost periodic solutions of impulsive differential equations // J. Math. Sci. – 2016. – 212, № 4. – P. 490 – 502.

164. *Tkachenko V. I.* Almost Periodic Solutions of Evolution Differential Equations with Impulsive Action // Mathematical Modeling and Applications in Nonlinear Dynamics. – New York: Springer, 2016. – P. 161–205.

165. *Tudor M.* Asymptotically almost periodic Itô equations and stability // Mathematical Reports. – 1999. – vol. 1 (51), no. 3. – P. 445–461.

166. *Utz W. R., Waltman P.* Asymptotic almost periodicity of solutions of a system of differential equations // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1967. – vol. 18, no. 4. – P. 597–601.

167. *Vesentini E.* Spectral properties of weakly asymptotically almost periodic semigroups. // Advances in Mathematics. – 1997. – vol. 128, no. 2. – P. 217–241.

168. *Vuillermot P.-A.* Almost-periodic attractors for a class of nonautonomous reaction-diffusion equations on $\mathbb{R}^N$. I. Global stabilization processes // Journal of Differential Equations. – 1991. – vol. 94, no. 2. – P. 228–253.

169. *Wang Q., Zhang H., Ding M., Wang Z.* Global attractivity of the almost periodic solution of a delay logistic population model with impulses // Nonlinear analysis. – 2010. – 73. – P. 3688–3697.

170. *Xu R., Chaplain M.A.J., Davidson F.A.* Permanence and periodicity of a delayed ratio-dependent predator-prey model with stage structure // J. Math. Anal. Appl. – 2005. – 303. – P. 602–621.

171. *Yamaguchi M.* Time-decaying solutions and asymptotically almost periodic solutions of nonlinear evolution equations // Funkcialaj Ekvacioj. – 1981. – vol. 24, no. 3. – P. 281–306.

172. *Yamaguchi M., Nishihara K.* Almost periodic and asymptotically almost periodic solutions of some wave equations with quasiperiodic coefficients // Proceedings of the Faculty of Science of Tokai University. – 1982. – vol. 17. – P. 45–59.

173. *Yang W., Li X., Bai Z.* Permanence of periodic Holling type-IV predator-prey system with stage structure for prey // Math. Comput. Modelling – 2008. – 48, № 5-6. – P. 677–684.

174. *Yao H. L., Zhang C. Y. and Wu C. X.* The existence of asymptotically almost periodic solutions for a class of differential equations with piecewise constant argument // Natural Science Journal of Harbin Normal University. – 2000. – vol. 16, no. 6. – P. 1–6.

175. *Yoshizawa T.* Asymptotically almost periodic solutions of an almost periodic system // Funkcialaj Ekvacioj. – 1969. – vol. 12. – P. 23–40.

176. *Yu J. S., Zhang B.G.* Stability theorem for delay differential equations with impulses // J. Math. Anal. Appl. – 1996. – 199. – P. 162–175.

177. *Yuan R.* The existence of almost periodic solutions of retarded differential equations with piecewise constant argument // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. – 2002. – vol. 48, no. 7. – P. 1013–1032.

178. *Zaidman S.* Almost-Periodic Functions in Abstract Spaces // vol. 126 of Research Notes in Mathematics, Pitman, Boston, Mass, USA, 1985.

179. *Zaidman S.* Existence of asymptotically almost-periodic and of almost-automorphic solutions for some classes of abstract differential equations // Annales des Sciences Mathematiques du Quebec – 1989 – vol. 13, no. 1 – P. 79–88.

180. *Zhang C.* Ergodicity and asymptotically almost periodic solutions of some differential equations // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. – 2001. – vol. 25, no. 12. – P. 787–800.

181. *Zhang B., Lui Y.* Global attractivity for certain impulse delay differential equations // Nonlinear Analisys. – 2002. – 52, № 3. – P. 725–736.

182. *Zhang X.S., Yan J.Y.* Global attractivity in impulsive functional differential equation // Indian J.Pure Appl. Math. – 1998. – 29 , №5. – P. 871–878.

ДОДАТОК

Цей додаток містить перелік публікацій здобувача за темою дисертації й відомості про апробацію результатів дисертації.

Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації:

1. *Мисло Ю. М., Ткаченко В. І.* Про перманентність періодичних систем хижак–жертва з віковою структурою та імпульсною дією // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 4. — С. 527–540.

   (English translation: *Myslo Y. M., Tkachenko V. I.* On the permanence of periodic predator–prey systems with stage structure and pulse action // Nonlinear Oscillations. — 2009. — **12**, № 4. — P. 543–558. DOI: 10.1007/s11072-010-0093-1, Scopus, Web of Science.)

2. *Мисло Ю. М., Ткаченко В. І.* Перманентність та періодичні розв'язки в моделях із віковою структурою, запізненням та імпульсною дією // Нелінійні коливання. — 2010. — **13**, № 4. — С. 546–555.

   (English translation: *Myslo Y. M., Tkachenko V. I.* Permanence and periodic solutions in models with stage structure, delay and pulse action // Nonlinear Oscillations. — 2011. — **13**, № 4. — P. 584–594. DOI: 10.1007/s11072-011-0133-5, Scopus, Web of Science.)

3. *Myslo Yu. M., Tkachenko V. I.* Global attractivity in almost periodic single species models // Funct. Different. Equat. — 2011. — 18, № 3–4. — P. 269–278.

4. *Мисло Ю. М., Ткаченко В. І.* Майже періодичні розв'язки рівнянь Маккі–Гласса з імпульсною дією // Нелінійні коливання. — 2011. — **14**, № 4. — С. 507–515.

(English translation: *Myslo Y. M., Tkachenko V. I.* Almost periodic solutions of Mackey – Glass equations with pulse action // Nonlinear Oscillations. — 2012. — **14**, № 4. — P. 537–546. DOI: 10.1007/s11072-012-0175-3, Scopus.)

5. *Мисло Ю. М., Ткаченко В. І.* Асимптотично майже періодичні розв'язки рівнянь із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії // Нелінійні коливання. — 2016. — **19**, № 4. — С. 533–546.

   (English translation: *Myslo Yu. M., Tkachenko V. I.* Asymptotically almost periodic solutions of equations with delays and nonfixed times of pulse action // Journal of Mathematical Sciences (United States). — 2018. — **228**, № 3. — P. 290–305. DOI: 10.1007/s10958-017-3621-z, Scopus.)

6. *Мисло Ю. М., Ткаченко В. І.* Майже періодичне логістичне рівняння із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії // Нелінійні коливання. — 2019. — **22**, № 4. — С. 497–509.

   (English translation: *Myslo Yu. M., Tkachenko V. I.* Almost Periodic Logistic Equation with Delay and Nonfixed Times of Impulsive Action // Journal of Mathematical Sciences (United States). — 2021. — **254**, № 2. — P. 246–260. DOI: 10.1007/s10958-021-05301-w, Scopus.)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. *Мисло Ю. М.* Перманентність та періодичні розв'зки в моделі з віковою структурою, запізненням та імпульсною дією. Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька. 19–23 вересня 2011 р., Дрогобич, Україна: тези доповідей. — Львів, 2011. — С. 136.

2. *Myslo Y. M., Tkachenko V. I.* On almost periodic solutions of impulsive systems with delay. Международная конференция "Актуальные

проблемы современной матиматики, информатики и механики – II", посвященная 100-летию академика АН КазССР О. А. Жаутыкова, 100-летию члена-корреспондента АН КазССР Е. И. Кима и 75-летию академика НАН РК У. М. Султангазина. Алматы 28–30 сентября 2011 г.: тезисы докладов. — Алматы, 2011. — С. 88.

3. *Мисло Ю. М.* Про майже періодичні розв'язки імпльсної системи із запізненням. Міжнародна конференція молодих математиків (Україна, Київ, 3–6 червня 2015 р.): тези доповідей. — Київ, 2015. — С. 158.

4. *Myslo Y. M., Tkachenko V. I.* Existence and attractivity poperties of piecewise continuous almost periodic solutions of system with delay and impulsive action. 5th International conference for young scientists on differentional equations and applications deducated to Yaroslav Lopatynsky. 9–11 November, 2016, Kyiv, Ukraine: book of abstracts. — Vinnytsia, 2016. — P. 104.

5. *Мисло Ю. М.* Імпульсна система диференціальних рівнянь із запізненням. Міжнародна наукова конференція "Методика викладання та методи дослідження в математиці" / Матеріали міжнародної наукової математичної конференції у м. Берегове, 21–23 квітня 2016 р. — С. 74.

6. *Мисло Ю. М.* Дослідження розв'язків системи диференціальних рівнянь з імпульсним впливом та запізненням. Диференціальні рівняння та їх застосування: тези доповідей Міжнародної наукової конференції, присвяченої 70-річчю академіка НАН України М. О. Перестюка, Ужгород, 19–21 травня 2016 р. — Ужгород: Вид-во УжНУ "Говерла", 2016 р. — С. 101.

7. *Мисло Ю. М., Ткаченко В. І.* Про асимптотично майже періодичні розв'язки рівнянь із запізненням. Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 75-річчю

з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007). 28 травня – 3 червня 2017 року, Слов'янськ, Україна. Тези доповідей. — Слов'янськ, 2017. — С. 73.

8. *Мисло Ю. М., Ткаченко В. І.* Асимптотично майже періодичні розв'язки рівнянь з імпульсним впливом та запізненням. Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917–2008) (Україна, Київ, 7–10 червня 2017 р.): тези доповідей. — Київ, 2017. — С. 94.