НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Мисло Юлія Михайлівна

УДК 517.9

Асимптотично майже періодичні розв'язки рівнянь із запізненням та імпульсною дією

01.01.02 — диференціальні рівняння
111 — математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2021

Дисертацією є рукопис.
Роботу виконано в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник

доктор фізико-математичних наук, професор
Ткаченко Віктор Іванович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Журавльов Валерій Пилипович,
Поліський національний університет,
завідувач кафедри вищої та прикладної математики;

доктор фізико-математичних наук, професор
Станжицький Олександр Миколайович
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри загальної математики.

Захист відбудеться *7 травня 2021 р. о 15 годині* на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий *5 квітня 2021 р.*

Вчений секретар

спеціалізованої вченої ради **В. Б. Василик**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена дослідженню існування і стійкості кусково-неперервних асимптотично майже періодичних, майже періодичних та періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь із запізненням та імпульсною дією як у фіксовані, так і нефіксовані моменти часу.

У зв'язку з дослідженнями коливних процесів у системах із короткотривалими ударними зовнішніми впливами останнім часом активно розвивається теорія майже періодичних імпульсних систем. Відмітимо роботи М. У. Ахмета, Д. Векслера, М. О. Перестюка, М. Пінто, А. М. Самойленка, В. Ю. Слюсарчука, Г. Т. Стамова, В. І. Ткаченка, С. І. Трофимчука. Дослідження таких систем має важливе практичне значення в математичній біології, екології, зокрема при моделюванні еволюції біологічних видів, які зазнають короткотривалих зовнішніх впливів. Розривність і непродовжуваність на від'ємну піввісь розв'язків імпульсних систем із запізненням потребує специфічних підходів до дослідження. Додаткові труднощі виникають у системах із нефіксованими моментами імпульсної дії, в яких різні розв'язки можуть мати різні точки розривів.

Асимптотично майже періодичні функції при дослідженні різних класів диференціальних рівнянь і динамічних систем активно застосовували багато авторів, зокрема М. Фреше, Д. Селл, А. М. Фінк, Т. Йошізава, Д. Чебан. Кусково-неперервні асимптотично майже періодичні функції виявилися ефективними при вивчені асимптотичної поведінки імпульсних систем.

Важливою проблемою математичної біології є моделювання еволюції біологічних видів і відшукання умов, які забезпечують довготривале співіснування співтовариства видів. Однією з характеристик такого довготривалого співіснування є перманентність системи (коли у відкритому додатному конусі фазового простору системи існує компактна множина K, така, що кожен розв'язок із додатними початковими значеннями через деякий час входить і залишається в K). Дослідженню перманентності, а також існуванню і стійкості періодичних розв'язків різних типів систем присвячено роботи К. Гопалсамі, В. Гутсона, Х. Сміта, К. Шмітта. Перманентність системи спрощує задачу відшукання майже періодичних чи періодичних розв'язків, для цього досить досліджувати систему на множині K.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України згідно з темами «Аналітичні та якісні методи теорії нелінійних диференціальних рівнянь» (номер держреєстрації 0105U007978), «Якісний та асимптотичний аналіз систем диференціальних, функціонально-диференціальних та імпульсних рівнянь» (номер держреєстрації 0111U002035), «Конструктивні та якісні методи аналізу систем диференціальних, функціонально-диференціальних, імпульсних та різницевих рівнянь» (номери держреєстрації 0116U003121, 0119U001721).

Мета й завдання дослідження. *Мета* дисертації — знаходження умов існування асимптотично майже періодичних та майже періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь із запізненням та імпульсної дією й отримання умов існування, єдиності та стійкості кусково-неперервних майже періодичних та періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсним впливом.

Об'єкт дослідження — системи диференціальних рівнянь із запізненням та імпульсною дією як у фіксовані, так і нефіксовані моменти часу.

Предмет дослідження — питання існування асимптотично майже періодичних і майже періодичних розв'язків системи диференціальних рівнянь із запізненням та імпульсної дією й отримання умов існування, єдиності та стійкості кусково-неперервних майже періодичних та періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсним впливом, зокрема з нефіксованими моментами імпульсної дії.

Методи дослідження. В роботі використано методи теорії імпульсних і функціонально-диференціальних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну й виносяться на захист, такі:

1. Знайдено умови існування кусково-неперервних асимптотично майже періодичних і майже періодичних розв'язків систем із запізненням та фіксованими моментами імпульсних впливів. Отримані результати застосовано для знаходження умов

існування і стійкості додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків імпульсного рівняння Маккі – Гласса й моделі біологічної популяції з віковою структурою та імпульсною дією.

2. Знайдено умови існування кусково-неперервних асимптотично майже періодичних і майже періодичних розв'язків систем із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії. Знайдено умови існування і стійкості додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків імпульсного логістичного рівняння з нефіксованими моментами імпульсної дії.
3. Отримано умови перманентності періодичної системи «хижак–жертва» з віковою структурою жертви та імпульсною дією, а також умови перманентності й існування додатних асимптотично стійких періодичних розв'язків імпульсної системи рівнянь із запізненням, яка моделює динаміку двох конкуруючих видів із віковою структурою.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати й методика їхнього отримання можуть бути використані для дослідження асимптотично майже періодичних і майже періодичних розв'язків системи рівнянь із запізненням та імпульсною дією й отримання умов існування, єдиності та стійкості кусково-неперервних майже періодичних і періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсним впливом.

Також ці результати можуть бути застосовані для вивчення задач математичної біології та розвивають відповідні їм математичні методи, які представляються відповідними математичними моделями.

Особистий внесок здобувача. Результати, включені до дисертації, отримані автором особисто. Постановка задач, визначення загальної схеми дослідження, аналіз отриманих результатів належить науковому керівнику В. І. Ткаченку.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися й обговорювалися на засіданні семінару відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник семінару — доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАН України О. А. Бойчук), а також на міжнародних наукових конференціях.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 6 роботах, які відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук. 4 з них перекладено в закордонних виданнях видавництва Springer, переклади присутні в наукометричній базі даних Scopus, 2 із них — у Web of Science Core Collection (Science Citation Index Expanded).

Структура й обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 182 найменування, й додатку. Загальний обсяг дисертації налічує 148 сторінок (з них основної частини — 102 сторінки).

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання й методи дослідження, зазначено наукову новизну отриманих результатів, їхнє практичне значення, зв'язок роботи з науковими темами й особистий внесок здобувача.

У **першому розділі** досліджено існування асимптотично майже періодичних і майже періодичних розв'язків системи диференціальних рівнянь із запізненням та імпульсною дією у фіксовані моменти часу

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-h)),\ t \neq t_k, \tag{1}$$

$$x(t_k + 0) = x(t_k) + I_k(x(t_k)),\ k \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

де $x \in \mathbb{R}^n, h = const > 0$, $\{t_k\}, k \in \mathbb{Z}$, — строго зростаюча послідовність дійсних чисел, рівномірно відділених одне від іншого.

Розглядається простір $\mathcal{PC}^k(J, \mathbb{R}^n),\ J \subset \mathbb{R}$, кусково–неперервних функцій $x : J \to \mathbb{R}^n$, таких, що

i) множина $T = \{t_j \in J, t_{j+1} > t_j, j \in \mathbb{Z}\}$ розривів функції x не має скінченних граничних точок;

ii) функції неперервні зліва $x(t_j - 0) = x(t_j)$ та існує $\lim\limits_{t \to t_j + 0} x(t) = x(t_j + 0)$;

iii) функція $x(t)$ є C^k-гладкою на множині $J \setminus T$.

Для обмеженої функції $\varphi(t)$ позначимо $\varphi^L = \inf_t \varphi(t)$, $\varphi^M = \sup_t \varphi(t)$. Аналогічні позначення вводимо для обмежених послідовностей.

Означення. Функція $\varphi(t) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ називається w-майже періодичною, якщо

i) послідовність $\{t_k\}$ точок розривів функції $\varphi(t)$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина ε-майже періодів, спільних для всіх послідовностей $\{t_k^j\}$, де $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $j \in \mathbb{Z}$;

ii) для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що якщо точки t' і t'' належать до одного інтервалу неперервності й $|t' - t''| < \delta$, то $\|\varphi(t') - \varphi(t'')\| < \varepsilon$;

iii) для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина Γ ε-майже періодів, таких, що якщо $\tau \in \Gamma$, то $\|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, які задовольняють умову $|t - t_k| > \varepsilon$, $k \in \mathbb{Z}$.

Означення. Функція $\varphi_1(t) \in \mathcal{PC}(J, \mathbb{R}^n)$ знаходиться у ε-околі функції $\varphi_2(t) \in \mathcal{PC}(J, \mathbb{R}^n)$, якщо $\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| < \varepsilon$ для всіх таких $t \in J$, що $|t - \tau_i^1| > \varepsilon$, $|t - \tau_i^2| > \varepsilon$, і $|\tau_i^1 - \tau_i^2| < \varepsilon$, $i \in \mathbb{Z}$, де $\{\tau_i^1\}$ і $\{\tau_i^2\}$ — послідовності розривів функцій $\varphi_1(t)$ і $\varphi_2(t)$ відповідно.

Послідовність $\{f_k(t)\}$ функцій $f_k \in \mathcal{PC}(J, \mathbb{R}^n)$, $J \subset \mathbb{R}$, збігається в w-топології до функції $f \in \mathcal{PC}(J, \mathbb{R}^n)$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число $N = N(\varepsilon)$, що $\|f_k(t) - f(t)\| < \varepsilon$ для всіх $k \geq N$ і $|t - \tau_i| > \varepsilon$ (τ_i — це точки розривів функції f на множині J) і точки розривів функцій $f_k(t)$, які лежать у J, збігаються до точок τ_i рівномірно відносно i.

Припускаємо, що система рівнянь (1), (2) задовольняє умови:

1) послідовність дійсних чисел t_k, $k \in \mathbb{Z}$, рівномірно відділених одне від одного, має рівномірно майже періодичні послідовності різниць;

2) функція $f(t, x, y)$ w-майже періодична за t й ліпшицева за x і y рівномірно відносно x, y із компактних множин, множиною розривів функції f є послідовність $\{t_k\}$;

3) послідовність $\{I_k(x)\}$ майже періодична рівномірно відносно x із компактних множин, функції $I_k(x)$ ліпшицеві за x рівномірно

відносно k.

Означення. Визначена на $[0, \infty)$ кусково-неперервна функція $a(t)$ з послідовністю точок розривів, яка має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, називається w-асимптотично майже періодичною, якщо вона є сумою w-майже періодичної функції $p(t)$ і функції $q(t) \in \mathcal{PC}$, такої, що $q(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Теорема 1.9. Кусково-неперервна функція $\xi(t)$ є w-асимптотично майже періодичною тоді й тільки тоді, коли для будь-якої послідовності дійсних чисел $\{\tau_k\}$, такої, що $\tau_k \to \infty$ при $k \to \infty$, існує підпослідовність $\{\tau_{k_j}\}$, для якої $\xi(t + \tau_{k_j})$ збіжна на $0 \le t < \infty$ в w-топології.

Теорема 1.10. Припустимо, що система (1), (2) має розв'язок $\xi(t)$, визначений на $I = [0, \infty)$ і такий, що $\|\xi(t)\| \le B$ для всіх $t \ge 0$. Якщо $\xi(t)$ w-асимпотично майже періодичний, тоді система (1), (2) має w-майже періодичний розв'язок $p(t)$.

Теорема 1.11. Нехай обмежений розв'язок $\xi(t)$ системи (1), (2) є рівномірно асимптотично стійким для $t \ge 0$. Тоді $\xi(t)$ w-асимптотично майже періодичний, і система (1), (2) має w-майже періодичний розв'язок, який є рівномірно асимптотично стійким для $t \ge 0$.

У **підрозділі 1.3**, використовуючи отримані результати, досліджено існування і стійкість майже періодичних розв'язків моделі біологічної популяції з імпульсною дією та віковою структурою, яка проходить дві стадії — незрілу і зрілу:

$$\dot{x}_i(t) = \alpha(t)x_m(t) - \gamma(t)x_i(t) - \alpha(t-h)e^{\int_{t-h}^{t}\gamma(s)ds}x_m(t-h), \quad (3)$$

$$\dot{x}_m(t) = \alpha(t-h)e^{\int_{t-h}^{t}\gamma(s)ds}x_m(t-h) - \beta(t)x_m^2(t) \quad (4)$$

для $t \ne t_k$ і

$$x_m(t_k + 0) = (1 + d_k)x_m(t_k) \quad (5)$$

в моменти часу $t_k, k \in \mathbb{Z}$. $x_i(t)$ і $x_m(t)$ — це щільності (тобто кількість особин, що припадає на одиницю площі) відповідно незрілих і зрілих особин біологічної популяції в момент часу t. Послідовність $\{t_k\}$ моментів імпульсного впливу має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, послідовність $\{d_k\}$ майже періодична, $d_k \in (-1, d], d > 0$, функції $\alpha(t), \beta(t)$ й $\gamma(t)$ кусково-неперервні, додатні й w-майже періодичні.

Розглядаються невід'ємні розв'язки з початковими умовами

$$x_i(0) = \varphi_i > 0, \quad x_m(\theta) = \psi_m(\theta) \geq 0, \ \theta \in [-h, 0], \ \psi_m(0) > 0. \quad (6)$$

Теорема 1.12. Припустимо, що функція

$$\omega(t) = \prod_{0 \leq t_k < t} (1 + d_k) e^{-\sigma t}, \quad \sigma = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{0 \leq t_k < T} \ln(1 + d_k),$$

є w-майже періодичною і виконується нерівність

$$\sigma + \sup_t \left(\alpha(t-h) e^{\sigma + \int_{t-h}^t \gamma(s) ds} \prod_{t-h \leq t_k < t} (1 + d_k)^{-1} \right) > 0.$$

Тоді система (3)–(5) є перманентною, тобто існують такі додатні сталі m_0 і M_0, що всі її розв'язки з початковими умовами (6) задовольняють нерівності

$$\liminf_{t \to \infty} x_i(t) \geq m_0, \ \limsup_{t \to \infty} x_i(t) \leq M_0,$$
$$\liminf_{t \to \infty} x_m(t) \geq m_0, \ \limsup_{t \to \infty} x_m(t) \leq M_0.$$

Якщо також виконується нерівність $(A^M + \sigma) C^M < 2 C^L (A^L + \sigma)$, де

$$A(t) = \prod_{t-h \leq t_k < t} (1 + d_k)^{-1} \alpha(t-h) \exp\left(\sigma h + \int_{t-h}^t \gamma(s) ds \right),$$
$$C(t) = \prod_{0 \leq t_k < t} (1 + d_k) e^{-\sigma t} \beta(t),$$

тоді система (3)–(5) має єдиний додатний w-майже періодичний розв'язок, який є глобальним атрактором.

У **підрозділі 1.4** досліджено існування і стійкість додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків імпульсного рівняння Маккі–Гласса вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha(t) x(t) + \frac{\beta(t) x(t-h)}{1 + \gamma(t) x^p(t-h)}, \quad (7)$$

$$x(t_k + 0) - x(t_k) = a_k x(t_k) + b_k, \quad (8)$$

де $x \geq 0$, p і h — додатні сталі, кусково-неперервні функції $\alpha(t), \beta(t)$ та $\gamma(t)$ додатнозначні й w-майже періодичні, послідовності $\{a_k\}$ та $\{b_k\}$ майже періодичні й $a_k > -1$, $b_k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, послідовність $\{t_k\}$ точок імпульсної дії має рівномірно майже періодичні послідовності різниць.

Виходячи з біологічної інтерпретації, розглядаються невід'ємні розв'язки рівняння (7), (8) із початковими умовами

$$x(\theta) = \psi(\theta) \geq 0, \theta \in [-h, 0], \ \psi(0) > 0. \tag{9}$$

Теорема 1.13. Припустимо, що функція

$$\omega(t) = \prod_{0 \leq t_k < t} (1 + a_k) e^{-\sigma t}, \ \sigma = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{0 \leq t_k < T} \ln(1 + a_k),$$

w-майже періодична й виконуються нерівності

$$\alpha(t) - \sigma \geq \sigma_1 > 0, \quad \inf_t \omega(t) > 0,$$

$$\inf_t \{\beta(t) \prod_{t-h \leq t_k < t} (1 + a_k)^{-1} - \alpha(t) + \sigma\} > 0.$$

Тоді рівняння (7), (8) перманентне, тобто існують такі додатні сталі m_0 і M_0, що для кожного розв'язку $x(t)$ з невід'ємними початковими значеннями (9) виконуються нерівності

$$\liminf_{t \to +\infty} x(t) \geq m_0, \quad \limsup_{t \to +\infty} x(t) \leq M_0.$$

Теорема 1.14. Якщо додатково до умов теореми 1.13 виконується нерівність

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{y \in [m_0, M_0]} \frac{B(t)(1 + C(t)(1-p)y^p)}{(1 + C(t)y^p)^2} < \sigma_1,$$

де

$$A(t) = \alpha(t) - \sigma, \ C(t) = \gamma(t)\omega^p(t),$$

$$B(t) = \frac{\beta(t)\omega(t-h)}{\omega(t)} = \beta(t) \prod_{t-h \leq t_k < t} (1 + a_k)^{-1},$$

то рівняння (7), (8) має єдиний додатний асимптотично стійкий w-майже періодичний розв'язок.

У **другому розділі** досліджується існування кусково-неперервних асимптотично майже періодичних і майже періодичних розв'язків систем із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \quad t \neq \tau_k(x(t)), \tag{10}$$

$$x(t+0) = x(t) + I_k(x(t)), \quad t = \tau_k(x(t)), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

де $x \in \mathbb{R}^n,\ h > 0$. Імпульсна дія відбувається при досягненні розв'язками поверхонь $\Gamma_k = \{(t,x) :\ t = \tau_k(x)\}, k \in \mathbb{Z}$, які рівномірно відділені одна від іншої.

Розглядається система (10), (11) із такими умовами:

1. Позначимо $U_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \|x\| \le \rho\}$, де ρ — деяке додатне число. Припустимо, що послідовність $\{\tau_k\}$ функцій імпульсної дії $\tau_k :\ U_\rho \to \mathbb{R}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць рівномірно відносно $x \in U_\rho$ й існують такі $\theta > 0$ і $\Theta > 0$, що $\inf_x \tau_{k+1}(x) - \sup_x \tau_k(x) \ge \theta$ і $\sup_x \tau_{k+1}(x) - \inf_x \tau_k(x) \le \Theta$ для всіх $x \in U_\rho$ і $k \in \mathbb{Z}$.

2. Функція $f(t,x,y)$ майже періодична за t й ліпшицева за $x, y \in U_\rho$ зі сталою $L_1 > 0 :\ \|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)\| \le L_1(\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|)$.

3. Вектор-функції $I_j :\ U_\rho \to \mathbb{R}^n$ ліпшицеві за $x \in U_\rho$ зі сталою $L_1 > 0$. Послідовность $\{I_j(x)\}$ майже періодична рівномірно відносно $x \in U_\rho$.

Розв'язки системи рівнянь із нефіксованими моментами імпульсної дії, які мають різні початкові значення, можуть мати й різні точки розривів. Це вимагає іншого підходу при дослідженні асимптотично майже періодичних розв'язків. Відмінність точок розриву різних розв'язків системи враховується також і при визначенні стійкості розв'язків.

Означення. Кусково-неперервна функція $\xi(t)$ називається w-асимптотично майже періодичною, якщо для будь-якої послідовності дійсних чисел $\{\tau_k\}$, такої, що $\tau_k \to \infty$ при $k \to \infty$, існує підпослідовність $\{\tau_{k_j}\}$, для якої послідовність функцій $\xi(t + \tau_{k_j})$ збіжна на $0 \le t < \infty$ в w-топології.

Означення. Розв'язок $\xi(t)$ системи (10), (11), який при всіх $t \geq t_0 - h$ належить U_ρ і для якого $\tau_j(\xi(t_0)) \neq t_0$, $j \in \mathbb{Z}$, називається стійким за Ляпуновим, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$, що для довільного іншого розв'язку $x(t)$ з початковими значеннями з U_ρ і

$$\|\xi(\theta) - x(\theta)\| < \delta, \ \theta \in [t_0 - h, t_0], \ |\theta - \tau_j^0| > \delta,$$

виконується $\|\xi(t) - x(t)\| < \varepsilon$ для всіх таких $t \geq t_0$, що $|t - \tau_j^0| > \varepsilon$, де τ_j^0 — моменти часу, при яких розв'язок $\xi(t)$ перетинає поверхні $t = \tau_j(x)$, $j \in \mathbb{Z}$.

Розв'язок $\xi(t)$ рівномірно стійкий за Ляпуновим, якщо δ не залежить від початкових моментів t_0, які задовольняють нерівності $|t_0 - \tau_j^0| > \delta$, $j \in \mathbb{Z}$.

Розв'язок $\xi(t)$ називається асимптотично стійким, якщо він стійкий і існує таке $\delta_0 > 0$, що для $t_0 \in \mathbb{R}$ і кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $T = T(t_0, \varepsilon) > 0$, що для будь-якого іншого розв'язку $x(t)$ системи з початковими значеннями з $[0, \rho]$ і

$$|\xi(\theta) - x(\theta)| < \delta_0, \ \theta \in [t_0 - h, t_0], \ |\theta - \tau_j^0| > \delta_0,$$

виконується $|\xi(t) - x(t)| < \varepsilon$ для $t \geq t_0 + T$ і $|t - \tau_j^0| > \varepsilon$.

Розв'язок $\xi(t)$ рівномірно асимптотично стійкий, якщо наведені вище нерівності виконуються для всіх $t_0 \in \mathbb{R}$, $|t_0 - \tau_j^0| > \delta_0, j \in \mathbb{Z}$, із незалежними від t_0 моментами часу T.

Теорема 2.8. Припустимо, що система (10), (11) має розв'язок $\xi(t)$, визначений на $I = [0, \infty)$ і такий, що $\|\xi(t)\| \leq \rho < \infty$ для всіх $t \geq 0$. Якщо розв'язок $\xi(t)$ асимптотично w-майже періодичний, то система (10), (11) має w-майже періодичний розв'язок $p(t)$.

Теорема 2.9. Припустимо, що $M_0 N_1 + N_1 < 1$, де $M_0 = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}, x, y \in U_\rho} \|f(t, x, y)\|$, а N_1 — стала Ліпшиця для поверхонь імпульсів:

$$|\tau_j(x) - \tau_j(y)| \leq N_1 \|x - y\|, \ j \in \mathbb{Z}, \ x, y \in U_\rho.$$

Нехай розв'язок $\xi(t)$ системи (10), (11) при всіх $t \in [0, \infty)$ належить U_ρ і є рівномірно асимптотично стійким при $t \geq 0$. Тоді $\xi(t)$ асимптотично w-майже періодичний, а система (10), (11) має w-майже періодичний розв'язок, який є асимптотично стійким при $t \geq 0$.

У **підрозділі 2.2** досліджено умови існування і стійкості додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків логістичного рівняння із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії

$$\dot{x}(t) = x(t)\left(a(t) - b(t)x(t) - c(t)x(t-h)\right), \quad t \neq \tau_k(x(t)), \tag{12}$$

$$x(t+0) = (1+d_k)x(t) + q_k, \quad t = \tau_k(x(t)), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{13}$$

де $x \in \mathbb{R},\ h > 0$. Імпульсна дія відбувається, коли розв'язки досягають ліній $\Gamma_k = \{(t,x):\ t = \tau_k(x)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, які рівномірно відділені одна від іншої.

Рівняння (12) описує еволюцію біологічного виду з короткостроковими зовнішніми впливами, які моделюються відповідним імпульсними співвідношеннями (13).

Рівняння (12), (13) задовольняє умови:

(**A1**) існує відрізок дійсної осі $[0,\rho]$ з деяким додатним числом ρ, такий, що послідовність $\{\tau_k\}$ неперервно диференційовних функцій $\tau_k:\ [0,\rho] \to \mathbb{R}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць рівномірно відносно $x \in [0,\rho]$ й існують такі додатні сталі θ і Θ, що

$$\inf_{x\in[0,\rho]} \tau_{k+1}(x) - \sup_{x\in[0,\rho]} \tau_k(x) \geq \theta,\ \sup_{x\in[0,\rho]} \tau_{k+1}(x) - \inf_{x\in[0,\rho]} \tau_k(x) \leq \Theta$$

для $k \in \mathbb{Z}$. Також функції τ_k задовольняють умову Ліпшиця

$$|\tau_k(x) - \tau_k(y)| \leq N_1|x-y|, \quad x, y \in [0,\rho], \quad k \in \mathbb{Z},$$

з деякою додатною сталою N_1,

(**A2**) функції $a(t)$, $b(t)$ й $c(t)$ майже періодичні за Бором і $a^L > 0,\ b^L \geq 0,\ c^L > 0$,

(**A3**) послідовності $\{d_k\}$ і $\{q_k\}$ майже періодичні, $d^L > -1,\ q^L \geq 0$.

Виходячи з біологічної інтерпретації, будемо розглядати невід'ємні розв'язки рівняння (12), (13), а початкові умови розв'язків задаються так:

$$x(\theta) = \psi(\theta),\ 0 \leq \psi(\theta) \leq \rho,\ \theta \in [-h,0],\ \psi(0) > 0. \tag{14}$$

Теорема 2.11. Припустимо, що на інтервалі $x \in [0, \rho]$ рівняння (12), (13) задовольняє умови (**A1**) – (**A3**) й виконуються нерівності

$$\frac{\partial \tau_k(x)}{\partial x} x\left(a^M - b^L x - c^L y\right) < 1, \quad \rho \geq M_0,$$

$$\tau_k((1+d_k)x + q_k) \leq \tau_k(x), \quad x, y \in [0, \rho], \ k \in \mathbb{Z},$$

де

$$M_0 = \frac{a_1 e^{a^M \theta}(1+d^M)^{2+h/\theta}}{1-e^{-a_1\theta}} + q^M \quad \text{при} \quad d^M \geq 0,$$

$$M_0 = \max\left\{\frac{a_2 e^{a^M\theta}}{1-e^{-a_2\theta}}, \frac{a_2 e^{a_2\theta}(1+d^M)}{1-e^{-a_2\theta}} + q^M\right\} \quad \text{при} \quad d^M < 0.$$

Тут використано позначення

$$a_1 = a^M + \frac{q^M}{e^{a^M\theta}(1+d)-1}, \quad a_2 = a^M + \frac{q^M}{e^{a^M\theta}-1}.$$

Тоді на інтервалі $x \in [0, \rho]$:

– кожен розв'язок перетинає кожну поверхню $t = \tau_k(x)$ не більш ніж один раз;

– кожен розв'язок із додатними початковими значеннями (6) задовольняє нерівність $x(t) \leq M_0, \ t \geq 2\theta$.

Теорема 2.12. Нехай виконується одна з нерівностей: $4a^L + \theta\ln(1+d^L) > 0$ або $q^L = \inf_j q_j > 0$.

Тоді існує таке $m_0 > 0$, що для кожного розв'язку рівняння (12), (13) з невід'ємними початковими функціями (14) існує таке $\bar{t} = \bar{t}(\psi)$, що $x(t) \geq m_0$ при $t \geq \bar{t}$.

Теорема 2.13. Нехай виконуються умови теорем 2.11, 2.12 і

$$\alpha_2 + K_2 c^M M_0 e^{-\alpha_2 h} < 0, \tag{15}$$

де $\alpha_2 = \left(a^M - (2b^L + c^L)m_0 + \frac{1}{\theta}\ln(1+d^M)\right), K_2 = 1 + d^M,$ якщо $d^M \geq 0$,

$\alpha_2 = \left(a^M - (2b^L + c^L)m_0 + \frac{1}{\Theta}\ln(1+d^M)\right), K_2 = (1+d^M)^{-1},$ якщо $d^M < 0$, Тоді рівняння (12), (13) для достатньо малого коефіцієнта Ліпшиця N_1 має єдиний додатний асимптотично стійкий w-майже періодичний розв'язок.

У **третьому розділі** досліджено перманентність системи диференціальних рівнянь, яка описує еволюцію біологічної системи «хижак–жертва» з віковою структурою жертви й функцією впливу у вигляді Беддінгтона–Деанжеліса

$$\dot{x}_1 = a_1(t)x_2 - b_1(t)x_1 - c_1(t)x_1^2 - \frac{h_1(t)x_1y}{k_1(t) + m_1(t)x_1 + n_1(t)y}, \quad (16)$$

$$\dot{x}_2 = a_2(t)x_1 - b_2(t)x_2 - c_2(t)x_2^2 - \frac{h_2(t)x_2y}{k_2(t) + m_2(t)x_2 + n_2(t)y}, \quad (17)$$

$$\dot{y} = y\Bigg(-q(t) - g(t)y(t) + \frac{h_3(t)x_1}{k_1(t) + m_1(t)x_1 + n_1(t)y} + \\ + \frac{h_4(t)x_2}{k_2(t) + m_2(t)x_2 + n_2(t)y}\Bigg) \quad (18)$$

при $t \neq t_k$ та з імпульсною дією

$$x_1(t_k + 0) = (1 + d_{1k})x_1(t_k), \quad (19)$$

$$x_2(t_k + 0) = (1 + d_{2k})x_2(t_k), \quad (20)$$

$$y(t_k + 0) = (1 + d_{3k})y(t_k) \quad (21)$$

у моменти часу t_k, $k \in \mathbb{Z}$.

Функції $a_j(t), b_j(t), c_j(t), k_j(t), m_j(t), n_j(t), q(t), g(t)$, $j = 1, 2$, $h_k(t)$, $k = 1, ..., 4$, кусково–неперервні, T-періодичні та додатнозначні, послідовність точок імпульсної дії $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ задовольняє умову періодичності $t_{k+p} - t_k = T$, $k \in \mathbb{Z}$, із деяким натуральним числом p, $d_{j,k+p} = d_{jk}$, $d_{jk} \in (-1, d]$, для всіх $j = 1, 2, 3$, $k \in \mathbb{Z}$.

Система рівнянь описує еволюцію біологічної системи «хижак–жертва» з віковою структурою жертви. Тут через $y(t)$ позначено щільність популяції хижаків у момент часу t. Популяція жертв складається з незрілих особин зі щільністю $x_1(t)$ і зрілих зі щільністю $x_2(t)$.

Лема 3.10. За виконання умов $c_1^L > 0$, $c_2^L > 0$, $g^L > 0$ всі додатнозначні розв'язки системи (16) – (21) фінально рівномірно обмежені:

$$\limsup_{t\to\infty} x_1(t) \leqslant M,\ \limsup_{t\to\infty} x_2(t) \leqslant M,\ \limsup_{t\to\infty} y(t) \leqslant M.$$

Теорема 3.11. За виконання умови

$$\int_0^T A_1(\xi)d\xi + \sum_{k=1}^{p} \ln(1+p_k) > 0,$$

де $A_1(t) = \min\{a_2(t) - b_1(t) - \frac{h_1(t)}{n_1(t)},\ a_1(t) - b_2(t) - \frac{h_2(t)}{n_2(t)}\}$, $p_k = \min\{d_{1k}, d_{2k}\}$, існує таке $\delta_1 > 0$, що для всіх додатнозначних розв'язків $(x_1(t), x_2(t), y(t))$ виконується

$$\liminf_{t\to\infty} x_1(t) \geqslant \delta_1,\ \liminf_{t\to\infty} x_2(t) \geqslant \delta_1.$$

Якщо, крім того, виконується нерівність

$$\int\limits_0^T \Big(-q(t) + \frac{h_3(t)\delta_1}{k_1(t)+m_1(t)\delta_1} + \frac{h_4(t)\delta_1}{k_2(t)+m_2(t)\delta_1}\Big)dt + \sum_{k=1}^{p} \ln(1+d_{3k}) > 0,$$

то існує таке $\delta_2 > 0$, що для кожного додатного розв'язку $y(t)$ виконується оцінка

$$\liminf_{t\to\infty} y(t) \geqslant \delta_2.$$

Теорема 3.12. Нехай підсистема (16),(17),(19),(20) (при $y \equiv 0$) має єдиний додатнозначний глобально експоненціально стійкий T-періодичний розв'язок $(x_1^*(t), x_2^*(t))$.

Тоді система (16) – (21) перманентна тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$\int\limits_0^T \left(-q + \frac{h_3 x_1^*}{k_1 + m_1 x_1^*} + \frac{h_4 x_2^*}{k_2 + m_2 x_2^*}\right) dt + \sum_{k=1}^{p} \ln(1+d_{3k}) > 0.$$

У **підрозділі 3.2** досліджено умови перманентності та існування додатних асимптотично стійких періодичних розв'язків системи рівнянь із запізненням та імпульсною дією, яка моделює динаміку двох конкуруючих видів із віковою структурою:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) =& a_1(t)x_2(t) - a_1(t-h_1)e^{-\int_{t-h_1}^{t} d_1(s)ds}x_2(t-h_1)-\\ &- d_1(t)x_1(t),\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t) =& a_1(t-h_1)e^{-\int_{t-h_1}^{t} d_1(s)ds}x_2(t-h_1) - b_{11}(t)x_2(t)-\\ &- b_{12}(t)x_2^2(t) - c_1(t)x_2(t)y_2(t),\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) =& a_2(t)y_2(t) - a_2(t-h_2)e^{-\int_{t-h_1}^{t} d_1(s)ds}y_2(t-h_2)-\\ &- d_2(t)y_1(t),\\ \dot{y}_2(t) =& a_2(t-h_2)e^{-\int_{t-h_1}^{t} d_1(s)ds}y_2(t-h_2) - b_{21}(t)x_2(t)-\\ &- b_{22}(t)y_2^2(t) - c_2(t)x_2(t)y_2(t)\end{aligned} \tag{24}$$

при $t \neq t_k$ з імпульсною дією

$$x_2(t_k+0) = (1+d_k)x_2(t_k), \quad y_2(t_k+0) = (1+g_k)y_2(t_k), \tag{25}$$

у моменти часу t_k, $k \in Z$.

Наприкінці дисертації наведено основні результати й висновки.

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню умов існування і стійкості кусково-неперервних асимптотично майже періодичних, майже періодичних і періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь із запізненнням та імпульсною дією як у фіксовані, так і нефіксовані моменти часу.

Знайдено умови існування кусково-неперервних асимптотично майже періодичних і майже періодичних розв'язків систем із запізненням та фіксованими моментами імпульсних впливів. Отримані результати застосовано для знаходження умов існування і стійкості додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків імпульсного рівняння Маккі – Гласса та моделі біологічної популяції з віковою структурою та імпульсною дією.

Знайдено умови існування кусково-неперервних асимптотично майже періодичних і майже періодичних розв'язків систем із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії. Знайдено умови існування і стійкості додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків імпульсного логістичного рівняння з запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії.

Отримано умови перманентності періодичної системи «хижак–жертва» з віковою структурою жертви та імпульсною дією, а також умови перманентності й існування додатних асимптотично стійких періодичних розв'язків імпульсної системи рівнянь із запізненням, яка моделює динаміку двох конкуруючих видів із віковою структурою.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. *Мисло Ю. М., Ткаченко В. І.* Про перманентність періодичних систем хижак–жертва з віковою структурою та імпульсною дією // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 4. — С. 527–540. (Englsh translation: *Myslo Y. M., Tkachenko V. I.* On the permanence of periodic predator–prey systems with stage structure and pulse action // Nonlinear Oscillations. — 2009. — **12**, № 4. — P. 543–558. DOI: 10.1007/s11072-010-0093-1, Scopus, Web of Science.)
2. *Мисло Ю. М., Ткаченко В. І.* Перманентність та періодичні розв'язки в моделях із віковою структурою, запізненням та імпульсною дією // Нелінійні коливання. — 2010. — **13**, № 4. — С. 546–555. (Englsh translation: *Myslo Y. M., Tkachenko V. I.* Permanence and periodic solutions in models with stage structure, delay and pulse action // Nonlinear Oscillations. — 2011. — **13**, № 4. — P. 584–594. DOI: 10.1007/s11072-011-0133-5, Scopus, Web of Science.)
3. *Myslo Yu. M., Tkachenko V. I.* Global attractivity in almost periodic single species models // Funct. Different. Equat. — 2011. — 18, № 3 – 4. — P. 269 – 278.
4. *Мисло Ю. М., Ткаченко В. І.* Майже періодичні розв'язки рівнянь Маккі – Гласса з імпульсною дією // Нелінійні коливання. — 2011. — **14**, № 4. — С. 507–515. (Englsh translation: *Myslo Y. M., Tkachenko V. I.* Almost periodic solutions of Mackey – Glass equati-

ons with pulse action // Nonlinear Oscillations. — 2012. — **14**, № 4. — P. 537–546. DOI: 10.1007/s11072-012-0175-3, Scopus.)

5. *Мисло Ю. М., Ткаченко В. І.* Асимптотично майже періодичні розв'язки рівнянь із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії // Нелінійні коливання. — 2016. — **19**, № 4. — С. 533–546. (Englsh translation: *Myslo Yu. M., Tkachenko V. I.* Asymptotically almost periodic solutions of equations with delays and nonfixed times of pulse action // Journal of Mathematical Sciences (United States). — 2018. — **228**, № 3. — P. 290–305. DOI: 10.1007/s10958-017-3621-z, Scopus.)
6. *Мисло Ю. М., Ткаченко В. І.* Майже періодичне логістичне рівняння із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії // Нелінійні коливання. — 2019. — **22**, № 4. — С. 497–509.
7. *Мисло Ю. М.* Перманентність та періодичні розв'зки в моделі з віковою структурою, запізненням та імпульсною дією. Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька. 19–23 вересня 2011 р., Дрогобич, Україна: тези доповідей. — Львів, 2011. — С. 136.
8. *Myslo Y. M., Tkachenko V. I.* On almost periodic solutions of impulsive systems with delay. Международная конференция "Актуальные проблемы современной матиматики, информатики и механики – II", посвященная 100-летию академика АН КазССР О. А. Жаутыкова, 100-летию члена-корреспондента АН КазССР Е. И. Кима и 75-летию академика НАН РК У. М. Султангазина. Алматы 28–30 сентября 2011 г.: тезисы докладов. — Алматы, 2011. — С. 88.
9. *Мисло Ю. М.* Про майже періодичні розв'язки імпльсної системи із запізненням. Міжнародна конференція молодих математиків (Україна, Київ, 3–6 червня 2015 р.): тези доповідей. — Київ, 2015. — С. 158.
10. *Myslo Y. M., Tkachenko V. I.* Existence and attractivity poperties of piecewise continuous almost periodic solutions of system with delay and impulsive action. 5th International conference for young scientists on differentional equations and applications deducated to Yaroslav Lopatynsky. 9–11 November, 2016, Kyiv, Ukraine: book of

abstracts. — Vinnytsia, 2016. — P. 104.

11. *Мисло Ю. М.* Імпульсна система диференціальних рівнянь із запізненням. Міжнародна наукова конференція "Методика викладання та методи дослідження в математиці"/ матеріали міжнародної наукової математичної конференції у м. Берегове, 21–23 квітня 2016 р. – С. 74.
12. *Мисло Ю. М.* Дослідження розв'язків системи диференціальних рівнянь з імпульсним впливом та запізненням. Диференціальні рівняння та їх застосування: тези доповідей Міжнародної наукової конференції, присвяченої 70-річчю академіка НАН України М. О. Перестюка, Ужгород, 19–21 травня 2016 р. — Ужгород: Вид-во УжНУ "Говерла", 2016 р. — С. 101.
13. *Мисло Ю. М., Ткаченко В. І.* Про асимптотично майже періодичні розв'язки рівнянь із запізненням. Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007). 28 травня – 3 червня 2017 року, Слов'янськ, Україна. Тези доповідей. — Слов'янськ, 2017. — С. 73.
14. *Мисло Ю. М., Таченко В. І.* Асимптотично майже періодичні розв'язки рівнянь з імпульсним впливом та запізненням. Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917-2008) (Україна, Київ, 7–10 червня 2017 р.): тези доповідей. — Київ, 2017. — С. 94.

АНОТАЦІЇ

Мисло Ю. М. Асимптотично майже періодичні розв'язки рівнянь із запізненням та імпульсною дією. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 «Диференціальні рівняння» (111 — Математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2021.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню кусково-неперервних асимптотично майже періодичних, майже періодичних

та періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь із запізненнням та імпульсною дією як у фіксовані, так і нефіксовані моменти часу.

У дисертації знайдено умови існування кусково-неперервних асимптотично майже періодичних і майже періодичних розв'язків систем із запізненням та фіксованими моментами імпульсних впливів. Отримані результати застосовано для знаходження умов існування і стійкості додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків імпульсного рівняння Маккі – Гласса та моделі біологічної популяції з віковою структурою та імпульсною дією. Знайдено умови існування кусково-неперервних асимптотично майже періодичних та майже періодичних розв'язків систем із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії. Знайдено умови існування і стійкості додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків імпульсного логістичного рівняння із запізненням та з нефіксованими моментами імпульсної дії.

Отримано умови перманентності періодичної системи «хижак–жертва» з віковою структурою жертви та імпульсною дією, а також умови перманентності й існування додатних асимптотично стійких періодичних розв'язків імпульсної системи рівнянь із запізненням, яка моделює динаміку двох конкуруючих видів із віковою структурою.

Ключові слова: стійкість, майже періодичність, система з запізненням, імпульсний вплив, асимптотично майже періодичні розв'язки, перманентність.

Мысло Ю. М. Асимптотически почти периодические решения уравнений с запаздыванием и импульсным воздействием. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 “Дифференциальные уравнения” (111 — математика). — Институт математики НАН Украины, Киев, 2021.

Диссертационная работа посвящена исследованию кусочно–непрерывных асимптотически почти периодических и почти периодических решений систем с запаздыванием и фиксированными моментами импульсных воздействий. Полученые результаты использованы для нахождения условий существования и устойчивости положительных кусочно-непрерывных почти периодических решений импульсного уравнения Макки – Гласса и модели биологической популяции с возрастной структурой и импульсным воздействием. Найдены условия существования кусочно–непрерывных асимптотически почти периодических и почти периодических решений систем с запаздыванием и нефиксированными моментами импульсного воздействия. Найдены условия существования и устойчивости положительных кусочно-непрерывных почти периодических решений импульсного логистического уравнения с запаздыванием и нефиксированными моментами импульсного действия.

Получены условия перманентности периодической системы «хищник–жертва» с возрастной структурой и импульсным воздействием, а также условия перманентности и существования положительных асимптотически устойчивых периодических решений системы уравнений, моделирующей динамику двух конкурирующих видов с возрастной структурой и импульсным воздействием.

Ключевые слова: устойчивость, почти периодичность, система с запаздыванием, импульсное воздействие, асимптотически почти периодические решения, перманентность.

Myslo Y. M. Asymptotically almost periodic solutions of differential equations with delay and impulses. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of a Candidate of Physical and Mathematical Sciences (Doctor of Philosophy) in speciality 01.01.02 "Differential equations" (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2021.

The thesis is devoted to the study of piecewise continuous asymptotically almost periodic, almost periodic and periodic solutions for systems of differential equations with delay and impulsive action in fixed and non-fixed moments of time.

We consider the system with delay and impulsive action

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-h)),\ t \neq t_k,$$
$$x(t_k + 0) = x(t_k) + I_k(x(t_k)),\ k \in \mathbb{Z},$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, $h = \mathrm{const} > 0$, the sequence of real numbers $t_k,\ k \in \mathbb{Z}$, has uniformly almost periodic differences, the function $f(t,x,y)$ is w-almost periodic in t and Lipschitz in x and y uniformly for x, y from compact sets, the sequence $\{I_k(x)\}$ is almost periodic uniformly with respect to x from compact sets, functions $I_k(x)$ are Lipschitz in x. Conditions for the existence and stability of piecewise continuous asymptotically almost periodic and almost periodic solutions are obtained. These results are applied to investigate piecewise continuous positive almost periodic solutions for the equation of the Mackey – Glass type with almost periodic coefficients and pulse action and for a system of differential equations with impulsive action and delay, which describes the behaviour of biological spices with two stages, immature and mature.

Piecewise continuous asymptotically almost periodic and almost periodic solutions are studied for a system of differential equations with delay and nonfixed times of pulse action

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \quad t \neq \tau_k(x(t)), \\ &x(t+0) = x(t) + I_k(x(t)), \quad t = \tau_k(x(t)), \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

where $x \in \mathbb{R}^n,\ h > 0$. The pulse actions occur at times when the solutions reach the surfaces $\Gamma_k = \{(t,x) : \ t = \tau_k(x)\},\ k \in \mathbb{Z}$, uniformly separated from each other. In the investigated systems of equations with nonfixed times of pulse action, the solutions corresponding to different initial values also have different points of discontinuity. This requires the use of another approach to the investigation of asymptotically almost periodic solutions. The presence of different points of discontinuity for different solutions of the system with nonfixed times of pulse action is also taken into account in the analysis of the stability of solutions.

Of the proved in results conditions of the existence and stability of piecewise continuous positive almost periodic solutions are obtained for a almost periodic logistic equation with delay and impulse action at nonfixed moments of times

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = x(t)\left(a(t) - b(t)x(t) - c(t)x(t-h)\right), \quad t \neq \tau_k(x(t)), \\ &x(t+0) = (1+d_k)x(t) + q_k, \quad t = \tau_k(x(t)), \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

where $x \in \mathbb{R},\ h > 0$. The equation describes the evolution of a species with short-term external influences, which are modelled by the corresponding impulse relations.

The thesis includes study of the permanence in a system of impulsive differential equations, which describes the evolution of the predator-prey biological system with stage structure of the prey, and study of the permanence and the existence of periodic solutions in a system of differential equations which describes the evolution of two competitive biological species with stage structure and pulse action.
Key words: stability, almost periodicity, system with delay, impulsive action, asymptotically almost periodic solutions, permanence.

Підписано до друку ___.___._____. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1,25. Умов. друк. арк. 1,16.
Наклад 100 пр. Зам. 30.

Видавництво “Гражда”
Свідоцтво про державну реєстрацію видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції.
Серія 3т № 22 від 1 вересня 2005 р.
88000, м. Ужгород, вул. Орлина, 1, т./факс (0312) 61-51-81