

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Кирчея Івана Ігоровича

*"Узагальнені обернені матриці над тілом кватерніонів
та їх застосування"*,

представленої на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Актуальність теми дисертації. Метою побудови узагальненої оберненої (псевдооберненої) матриці є отримання матриці, яка може служити, в певному сенсі, оберненою для більш широкого класу матриць, ніж оборотні. Узагальнена оборотність існує для довільної матриці, і коли матриця є оборотною, то її псевдообернена співпадає з оберненою. Поняття узагальнених обернених було започатковано Фредгольмом (1903), який сформулював псевдообернення для лінійного інтегрального оператора, що не є оборотним. Гільберт (1904) вивчав узагальнені обернені диференціальні оператори. Клас усіх псевдообернень був охарактеризований Гурвіцем (1912), який використав скінченну розмірність нульового простору операторів Фредгольма, щоб дати їх просту алгебраїчну структуру. Таким чином, узагальнені обернені диференціальні та інтегральні оператори породили узагальнені обернені матриці над полем комплексних чисел, існування яких незалежно один від одного описали Мур (1920), Б'ехаммар (1951) та Пенроуз (1955). Пенроуз на основі сингулярного розкладу виписав необхідні та достатні умови для визначення такої узагальненої оберненої, що є єдиною для довільної матриці. Прямими методами знаходження псевдооберненої матриці Мура-Пенроуза є її сингулярний розклад та визначникове зображення. На відміну від оберненої матриці, визначникове зображення якої однозначно будується засобом алгебричних доповнень, для комплексних узагальнених обернених матриць, зокрема матриці Мура-Пенроуза, були побудовані різні визначникові зображення. І причина такої неоднозначності полягає у пошуку більш простих і застосовних її виразів.

Пізніше розвиток теорії узагальнених обернених збагатився вивченням нових псевдообернених, зокрема узагальненої оберненої Дразіна (1958), групової оберненої, зважених узагальнених обернених матриць Дразіна (1980) та Мура-Пенроуза (1992), тощо. В останнє десятиріччя, сплеск нової активності в теорії узагальнених обернених викликали дослідження серцевинної оберненої та її узагальнень, причому вони вивчаються не тільки як комплексні матриці, але як оператори гільбертового простору чи елементи кільця.

Дисертаційну роботу присвячено вивченню узагальнених обернених

матриць над тілом кватерніонів, побудові їх визначникових зображень та застосуванню отриманих визначникових зображень до покомпонентного розв'язку кватерніонових матричних рівнянь.

Некомутативність елементів Гамільтонової кватерніонової алгебри, яка розглядається у дисертаційній роботі, спричинює появу труднощів навіть, здавалося б, в елементарних питаннях лінійної алгебри над тілом кватерніонів. Зокрема, виникає проблема означення визначника кватерніонової матриці. Але цю задачу І.І. Кирчей розв'язав у своїй кандидатській дисертації (2007), де ним була розвинута теорія стовпцевих і рядкових некомутативних визначників і, як наслідок, було отримане визначникове зображення оберненої матриці. У дослідженнях представлених у докторській дисертаційній роботі, апарат стовпцевих і рядкових визначників застосовується до побудови визначникових зображень кватерніонових узагальнених обернених матриць. Представлені у дисертаційній роботі зображення узагальнених обернених матриць над тілом кватерніонів отримані вперше. Відомо, що псевдообернені матриці мають широкі застосування. Зокрема, розв'язок матричних рівнянь можна подати, використовуючи узагальнені обернені матриці. Застосовуючи побудовані визначникові зображення узагальнених обернених матриць, у дисертаційній роботі одержані аналоги правила Крамера для (псевдо)розв'язків кватерніонових матричних рівнянь типу Сильвестра, їх систем, деяких сингулярних диференціальних матричних рівнянь, а також задач кватерніонно-матричної мінімізації.

На основі викладеного вище аналізу, можна зробити однозначний висновок, що актуальність досліджень проведених І.І. Кирчєем у даній дисертаційній роботі не викликає сумніву як з точки зору вирішених проблем сучасної теорії узагальнених обернених матриць над тілом кватерніонів так і їх застосувань для розв'язку кватерніонових матричних рівнянь. Відзначу, що дисертація виконана в рамках наукових тем №01102U004819 і №01102U004819, які розробляються в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України.

Ступінь обґрунтованості наукових результатів, їх достовірність і новизна. Дисертація складається зі вступу, анотації, 5 розділів, розбитих на підрозділи і пункти, висновків, списку використаних джерел із 318 найменувань та додатку, що містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів. Повний обсяг роботи становить 444 сторінок.

Виклад матеріалу дисертації є добре структурованим, з логічним взаємозв'язком між окремими розділами. Результати дисертаційного дослідження науково обґрунтовані та достовірні, що засвідчується наявністю правильних доведень представлених у роботі тверджень.

У другому розділі дисертації розглядаються основні узагальнені обернені матриці над тілом кватерніонів \mathbb{H} . У першому підрозділі на осно-

ві сингулярного розкладу кватерніонової матриці введено поняття узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза, отримано її граничне зображення та доведено теорему про визначникові зображення матриці Мура-Пенроуза \mathbf{A}^\dagger для довільної $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$. При доведенні цієї теореми застосовується розроблений автором гранично-ранговий метод. У цьому ж підрозділі будуються визначникові зображення проєктивних матриць $\mathbf{Q}_A = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$ та $\mathbf{P}_A = \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger$, а також матриць Мура-Пенроуза для ермітово-спряженої матриці \mathbf{A}^* та η -ермітово-спряженої $\mathbf{A}^{\eta*} := -\eta \mathbf{A}^* \eta$, де $\eta \in \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Другий підрозділ розпочинається з доведення фундаментальної теореми про зважений сингулярний розклад довільної матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$ відносно ваг \mathbf{M} і \mathbf{N} , що є додатноозначеними матрицями порядку m і n , на основі якої дано означення зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза $\mathbf{A}_{M,N}^\dagger$ та отримано її граничні зображення. Одержано також її визначникові зображення у всіх випадках, в залежності від того чи матриці $\mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^* \mathbf{M}$ або $\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^* \mathbf{M} \mathbf{A}$ є ермітовими та повноранговими. У третьому підрозділі розглядається узагальнена обернена матриця Дразіна \mathbf{A}^d для довільної $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n \times n}$. Побудовані її визначникові зображення гранично-ранговим методом, коли \mathbf{A} – ермітова, та використовуючи її представлення через матрицю Мура-Пенроуза, коли матриця \mathbf{A} – довільна. У четвертому підрозділі розглядаються загальні алгебраїчні структури зваженої узагальненої оберненої Дразіна $\mathbf{A}_{d,W}$ для довільної матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$ відносно вагової матриці $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n \times m}$, на основі яких отримані визначникові зображення матриці $\mathbf{A}_{d,W}$. Одержані також інші її визначникові зображення, зокрема, гранично-ранговим методом, коли матриці $\mathbf{V} = \mathbf{A} \mathbf{W}$ і $\mathbf{U} = \mathbf{W} \mathbf{A}$ є ермітовими. Застосовуючи гранично-ранговий метод, автор отримує також нові більш застосовні визначникові зображення комплексних узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза, Дразіна, та їх зважених.

У третьому розділі вивчаються кватерніонові серцевинна обернена матриця та її узагальнення. Ці матриці отримуються за рахунок комбінацій узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза, Дразіна, та зваженої псевдооберненої матриці Дразіна. Застосовуючи їх визначникові зображення, отримані у другому розділі, будуються визначникові зображення для кватерніонових правої та лівої серцевинних обернених, правої та лівої *EP*-серцевинних обернених, *DMP*- та *MPD*-обернених, *SMP*-оберненої, зважених правої та лівої *EP*-обернених, зважених *DMP*- та *MPD*-обернених і зваженої *SMP*-оберненої. Слід відмітити, що у дисертаційній роботі не тільки вперше отримано визначникові зображення кватерніонової серцевинної оберненої та її узагальнень, але й було започатковано їх дослідження для матриць над тілом кватерніонів з врахуванням особливостей кватерніонової матричної алгебри. Застосований підхід дозволив отримати нові визначникові зображення і для комплексних серцевинної оберненої та її узагальнень.

Четвертий розділ присвячується застосуванню визначникових зобра-

жень узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза та її особливих випадків до покомпонентного розв'язку кватерніонового узагальненого матричного рівняння Сильвестра $\mathbf{AXB} + \mathbf{CYD} = \mathbf{E}$, його часткових випадків, коли коефіцієнтні матриці є одиничними, та особливих випадків рівнянь типу Сильвестра з $*$ -ермітовістю і η -ермітовістю. Оскільки, розв'язок узагальненого рівняння Сильвестра можна записати у термінах узагальнених обернених матриць, то, застосовуючи отримані у першому розділі їх визначникові зображення, у дисертаційній роботі будуються аналоги правила Крамера для пошуку його розв'язків. Отриманий результат є новим не тільки для кватерніонових матричних рівнянь, але й для комплексних. Також отримані аналоги правила Крамера для системи кватерніонових двосторонніх матричних рівнянь, усіх її часткових випадків, та особливих випадків для рівнянь з $*$ -ермітовістю і η -ермітовістю.

У п'ятому розділі розглядаються застосування отриманих визначникових зображень узагальнених обернених матриць Дразіна, зважених Мура-Пенроуза та Дразіна до знаходження відповідних псевдообернених розв'язків двосторонніх кватерніонових матричних рівнянь та їх часткових випадків з відповідними для кожного випадку обмеженнями. Окремо, слід відмітити результат, який стосується знаходження покомпонентного розв'язку сингулярних кватерніонових диференціальних матричних рівнянь, $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{B}$ та $\mathbf{X}' = \mathbf{XA} + \mathbf{B}$, де $\mathbf{B}(t)$ – кватерніонно-значна матрична функція з дійсною змінною $t \in \mathbb{R}$. Також у цьому розділі побудовано визначникові зображення розв'язків деяких задач кватерніонно-матричної мінімізації із застосуванням визначникових зображень кватерніонової серцевинної оберненої. Важливо зауважити, що новизна отриманих результатів зберігається і у випадку їх розгляду для матриць над полем комплексних чисел.

Для кращого сприйняття отриманих результатів, будуються алгоритми розв'язків та наводяться чисельні приклади.

Зауваження і побажання. До змісту дисертації є незначні зауваження і побажання. Відмітимо наступне.

1. Для більш строгої завершеності структури дисертаційної роботи, напевно, слід було пункт "5.1.2. *Елементи теорії кватерніонових диференціальних рівнянь*" помістити у першому розділі дисертаційної роботи, де викладено огляд літератури та підґрунтя окреслених напрямків дослідження.
2. Можна зазначити також кілька зауважень щодо стилістичних і граматичних помилок:
 - 1) стор. 55, 11 рядок знизу, замість "її транспонування матриці" має бути "її транспонування";

- 2) стор. 58, 6 рядок зверху, замість "ввівши теорією квазідетермінантів" має бути "ввівши теорію квазідетермінантів";
- 3) стор. 59, 3 рядок зверху, замість "матриці A . замінивши" повинно бути "матриці A , замінивши";
- 4) стор. 62, 3 рядок знизу, залишок англійського тексту "for all";
- 5) стор. 72, 3 рядок знизу, замість "розклад Шура для довільної" мало б бути "розклад Шура для довільної матриці";
- 6) стор. 78, 1 рядок зверху, замість "як $A^{\frac{1}{2}}b$ " має бути як $A^{\frac{1}{2}}$,";
- 7) стор. 88, 2 рядок знизу, замість " $k = \text{Ind}(M)$, існує" повинно бути " $k = \text{Ind}(M)$, тоді існує";
- 8) стор. 93, 9 рядок зверху, напевно, замість "теорії орбіт" мало б бути "теорії механіки обертання";
- 9) стор. 104, 13 рядок знизу, замість "матриці M право-лінійно" має бути "матриці M є право-лінійно";
- 10) стор. 105, 14 рядок знизу, пропущено кому перед "опираючись";
- 11) стор. 109, 5 рядок зверху, замість "За формулою (2.10)б" має бути "За формулою (2.10),";
- 12) стор. 223, 6 рядок знизу, замість "оберненою" має бути "оберненої";
- 13) стор. 233, 9 рядок знизу, пропущено кому перед "коли".

Зроблені зауваження не впливають на загальну високу оцінку дисертації.

Дисертаційну роботу оформлено згідно вимог МОН України. Матеріал дисертації викладено чітко і послідовно. Автореферат правильно відображає структуру, зміст та основні результати дисертації. Посилання на дослідження інших авторів є коректними.

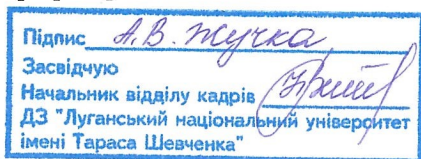
Робота має теоретичний характер. Отримані результати є внеском у теорію матриць над тілом кватерніонів, у теорію узагальнених обернених матриць та їх застосувань. Результати роботи можуть бути використанні у теорії кватерніонових матричних та диференціальних матричних рівнянь, у задачах кватерніонових матричних наближень та апроксимації.

Результати, що включені до дисертації, достатньо повно викладені у 37 публікаціях у фахових наукових виданнях, серед них 30 входять до наукометричних баз Scopus та/або Web of Science. Матеріали дисертаційної роботи доповідалися на 14 міжнародних наукових конференціях, а також на відповідних наукових семінарах, пройшли належну апробацію.

Враховуючи вищесказане, вважаю, що дисертаційна робота *"Узагальнені обернені матриці над тілом кватерніонів та їх застосування"*

подана на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук є завершеним науковим дослідженням високого математичного рівня, що відповідає всім вимогам пп. 9, 10-14 "Порядку присудження наукових ступенів затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №567 від 24.07.2013 зі змінами, які висуваються до докторських дисертацій, а її автор Кирчей Іван Ігорович заслуговує присудження ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел.

Офіційний опонент,
завідувач кафедри алгебри та системного аналізу
ДЗ "Луганський національний
університет імені Тараса Шевченка"
доктор фізико-математичних наук,
професор



А.В. Жучок