

## ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Кирчея Івана Ігоровича

"Узагальнені обернені матриці над тілом кватерніонів та їх застосування",  
представленої на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних  
наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Дисертаційну роботу присвячено вивченню узагальнених обернених (псевдообернених) матриць над тілом кватерніонів, у першу чергу побудові їх визначникових зображень, а також застосуванню отриманих визначникових зображень до покомпонентного розв'язку кватерніонових матричних рівнянь.

Вивчення векторних просторів над некомутативними тілами має суттєві відмінності від комутативного випадку. Для скінченно вимірних просторів над полями існує глибоко розвинений матричний апарат. Природним є його застосування і для скінченно вимірних просторів над некомутативними тілами. Але для цього випадку він уже не є таким розвиненим. Природним виглядає створення такого апарату для некомутативних тіл, що є досить вивченими. Таким є найбільш відоме некомутативне тіло – тіло кватерніонів.

Одним з суттєвих інструментів теорії матриць над полями чи комутативними кільцями є поняття визначника. У випадку матриць над некомутативними тілами природно виникає питання про його розширення. Найбільш відомими для матриць з кватерніонними коефіцієнтами є визначники Дьйодонне і Стаді, які визначаються шляхом перетворення кватерніонової матриці в еквівалентну їй комплексну чи дійсну. Але при цьому, не є кватерніоном значення такого визначникового функціоналу і втрачаються деякі його функціональні властивості, наприклад, розклад вздовж будь – якого рядка чи стовпця матриці. Інші побудовані некомутативні визначникові функціонали, зокрема квазідетермінанти Гельфанда – Ретаха, хоча й приймають своє значення у тілі кватерніонів, але є важкими для використання.

У дисертаційній роботі використовуються стовпцеві і рядкові некомутативні визначники, теорія яких була розвинута І.І. Кирчеєм у кандидатській дисертації, де зокрема було отримане визначникове зображення оберненої матриці. У дослідженнях представлених у докторській дисертаційній роботі, розвиток теорії стовпцевих і рядкових визначників розширюється до вивчення узагальнених обернених кватерніонових матриць.

Визначникове зображення узагальненої оберненої матриці є прямим методом її побудови. На відміну від оберненої матриці, яка має однозначне визначникове представлення засобом алгебричних доповнень, для комплексних узагальнених обернених, зокрема псевдооберненої матриці



Мура – Пенроуза, були побудовані різні визначникові зображення. Визначникові зображення узагальнених обернених матриць над тілом кватерніонів отримані вперше у дисертаційній роботі. Запропонований підхід дозволив отримати нові визначникові зображення і для комплексних псевдообернених матриць.

Узагальнені обернені матриці мають широкі застосування, зокрема, вони є ефективним інструментом розв'язку матричних рівнянь. Отримані у дисертації визначникові зображення дали можливість побудувати аналоги правила Крамера для розв'язків чи псевдорозв'язків кватерніонових матричних рівнянь типу Сильвестра та їх систем, деяких сингулярних диференціальних матричних рівнянь, а також задач кватерніонно – матричної мінімізації.

Безсумовно, тема даної дисертаційної роботи є актуальною і перспективною.

Перший розділ дисертації містить огляд основних результатів, отриманих в рамках цієї тематики, а також містить деякі попередні результати. З другого розділу дисертації починається викладання результатів, отриманих автором.

У першому підрозділі введено поняття узагальненої оберненої матриці Мура – Пенроуза на основі сингулярного розкладу кватерніонової матриці, одержано її граничне зображення та доведено допоміжні леми про ранг деяких матриць та аналоги характеристичних многочленів. Ці леми та граничне зображення матриці Мура – Пенроуза сформували гранично-ранговий метод, за допомогою якого отримано визначникові зображення матриці Мура-Пенроуза  $A^\dagger$  для довільної  $A \in \mathbb{H}^{m \times n}$ , індукованих нею проекторів  $Q_A = A^\dagger A$  та  $P_A = AA^\dagger$ , а також для її ермітово – спряженої матриці  $A^*$  та  $\eta$ -ермітово – спряженої  $A^{\eta*} = -\eta A^* \eta$ ,  $\eta \in \{i, j, k\}$ .

У другому підрозділі доведено теорему про зважений сингулярний розклад довільної  $A \in \mathbb{H}^{m \times n}$  з вагами  $M$  і  $N$ , що є додатно – означеними матрицями порядку  $m$  і  $n$ , на основі якого дано означення зваженої узагальненої оберненої матриці Мура – Пенроуза  $A_{M,N}^\dagger$ , її граничні та визначникові зображення.

У третьому підрозділі будуються визначникові зображення узагальненої оберненої матриці Дразіна  $A^d$  для довільної  $A \in \mathbb{H}^{n \times n}$ , гранично – ранговим методом, коли  $A$  – ермітова, та використовуючи її представлення через матрицю Мура – Пенроуза, коли  $A$  не є ермітовою.

У четвертому підрозділі одержано загальні алгебраїчні структури зваженої узагальненої оберненої матриці Дразіна  $A_{d,w}$  для довільної  $A \in \mathbb{H}^{m \times n}$  з вагою  $W \in \mathbb{H}^{n \times m}$ , на основі яких отримані її визначникові зображення. Інші визначникові зображення одержані з використанням визначникових зображень матриць Дразіна для матриць  $V = AW$  і  $U = WA$ ,



та гранично-ранговим методом, коли матриці  $V$  або  $U$  – ермітові. Використовуючи гранично-ранговий метод одержано нові визначникові зображення комплексних узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза, Дразіна, та їх зважених.

Третій розділ присвячений вивченню кватерніонових серцевинної оберненої матриці та їх узагальнень, що є відповідними комбінаціями узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза, Дразіна, та зваженої псевдооберненої матриці Дразіна. Серцевинна обернена та її узагальнення, в якості комплексних матриць, елементів кільця чи операторів гільбертового простору є об'єктом досліджень, що активно проводяться в останні десять років. У дисертаційній роботі кватерніонові серцевинна обернена та її узагальнення досліджувалися вперше. Отримано їх представлення, характеристика і властивості з врахуванням особливостей кватерніонової матричної алгебри, а також побудовано їх визначникові зображення. Новизна отриманих визначникових зображень зберігається і у випадку їх локалізації на комплексні матриці.

У четвертому розділі, як наслідок застосування визначникового зображення псевдооберненої матриці Мура-Пенроуза, отримано аналоги правила Крамера для узагальненого кватерніонового матричного рівняння Сильвестра, усіх його часткових випадків, та особливих випадків рівнянь типу Сильвестра з  $*$ -ермітовістю і  $\eta$ -ермітовістю. Також отримані аналоги правила Крамера для системи кватерніонових двосторонніх матричних рівнянь, усіх її часткових випадків, та особливих випадків для рівнянь з  $*$ -ермітовістю і  $\eta$ -ермітовістю.

У п'ятому розділі, побудовані визначникові зображення Дразіна псевдообернених розв'язків, а також зважених псевдообернених розв'язків Мура-Пенроуза та Дразіна двосторонніх кватерніоновоїх матричних рівнянь та їх часткових випадків з відповідними для кожного випадку обмеженнями. Отримано також визначникові зображення розв'язку деяких сингулярних кватерніонових диференціальних матричних рівнянь. Як застосування визначникових зображень кватерніонової серцевинної оберненої та її узагальнень, отримано визначникові зображення розв'язків деяких задач кватерніонно-матричної мінімізації. Слід відмітити, що новизна отриманих результатів зберігається і у випадку їх розгляду для матриць над полем комплексних чисел. У всіх випадках побудовані алгоритми розв'язку, отримані результати підтверджуються численними прикладами.

До змісту дисертації є незначні зауваження і побажання. Відмітимо наступне. Доведення Теорем 2.7, 2.10 та 2.18 про визначникові зображення зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза, матриці Дразіна та її зваженої у випадках, коли відповідні матриці є ермітовими, є аналогічні доведенню Теорема 2.2 про визначникове зображення узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза. З метою оптимізації тексту дисертації,



напевно краще було би уніфікувати ці теореми однією допоміжною лемою, з якої твердження вказаних теорем випливали б як наслідок.

У дисертаційній роботі є ряд стилістичних і граматичних помилок. Але позаяк з контексту завжди зрозуміло, про що йдеться, то список цих неточностей наводити не будемо.

Вказані зауваження і побажання не впливають на загальну високу оцінку дисертаційної роботи.

Робота має теоретичний характер. Отримані результати є вагомим внеском у теорію некомутативних визначників, зокрема у теорію стовпцевих і рядкових визначників, у теорію матриць над тілом кватерніонів, у теорію узагальнених обернених матриць та їх застосувань. Результати роботи можуть бути використані для вивчення структури алгебри матриць над тілом кватерніонів, а також її підалгебр, також вони можуть бути використані в теорії матричних рівнянь типу Сильвестра та їх систем, як над тілом кватерніонів, так і над полем комплексних (дійсних) чисел, в теорії кватерніонових диференціальних матричних рівнянь з дійсною змінною, у задачах кватерніонових матричних наближень та апроксимації.

Усі основні результати, які виносяться на захист, одержані І.І. Кирчеем самостійно, є цікавими, новими результатами високого математичного рівня. Виклад матеріалів досліджень є чітким, цілісним, послідовним, логічним і завершеним, що забезпечує доступність сприйняття. Результати, що включені до дисертації, достатньо повно викладені у 37 публікаціях у фахових наукових виданнях, серед них 30 входять до наукометричних баз Scopus та/або Web of Science. Матеріали дисертаційної роботи доповідалися на 14 міжнародних наукових конференціях та наукових семінарах, що дозволяє вважати апробацію результатів дисертаційної роботи достатньою.

Вважаю, що дисертаційна робота "Узагальнені обернені матриці над тілом кватерніонів та їх застосування" є актуальним дослідженням високого математичного рівня, що відповідає всім вимогам пп. 9, 10, 12, 13 та 14 "Порядку присудження наукових ступенів" (Постанова Кабінету Міністрів України №567 від 24.07.2013 зі змінами), які висуваються до докторських дисертацій, а її автор Кирчей Іван Ігорович заслуговує присвоєння ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 алгебра і теорія чисел.

Офіційний опонент,  
професор кафедри геометрії і алгебри  
Дніпровського національного  
університету імені Олеся Гончара  
доктор фізико-математичних наук, професор



Л. В. Турдаченко