

## ВІДГУК

*офіційного опонента на дисертаційну роботу  
Кирчя Івана Ігоровича  
“Узагальнені обернені матриці над тілом  
кватерніонів та їх застосування”  
представленої на здобуття наукового ступеня  
доктора фізико-математичних наук  
за спеціальністю 01.01.06 - алгебра та теорія чисел*

Дисертаційну роботу присвячено вивченню узагальнених обернених матриць над тілом кватерніонів, а також застосуванню отриманих результатів до розв'язку кватерніонових матричних рівнянь.

Алгебра кватерніонів вивчалася і продовжується вивчатися в різних науках (алгебра, геометрична алгебра і топологія, аналіз, тощо), відповідні результати знаходять застосування у багатьох прикладних галузях (обробка сигналів та кольорових зображень, теорія управління, орбітальна механіка, інформатика, тощо).

Вивчення некомутативних визначників розпочинаються від роботи А. Келі 1845 року і продовжується й досі. Найбільш відомі некомутативні визначники Дьйодонне і Стаді, але, означені шляхом перетворення кватерніонової матриці в еквівалентну їй комплексну чи дійсну матрицю, вони втратили можливість ефективного використання їх для визначникового зображення кватерніонової оберненої або узагальненої оберненої матриці.

Узагальнену обернену матрицю описали Мур (1920 р.), Б'ехаммар (1951 р.) і Пенроуз (1955 р.). Пенроуз виписав рівняння, як необхідні та достатні умови для визначення такої узагальненої оберненої матриці, до того ж єдиної. На відміну від оберненої матриці, яка має однозначне визначникове зображення через алгебричні доповнення її елементів, для узагальнених обернених матриць, зокрема матриці Мура-Пенроуза, існують різні визначникові зображення. У подальших дослідженнях Прасад і Балат отримали зважену узагальнену обернену матрицю Мура-Пенроуза. Визначникові зображення комплексної зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза були отримані різними математиками через понорангову факторизацію, методом

обчислення визначників та через граничне зображення. У 1958 році Дразін дав означення нової узагальненої оберненої матриці для комплексної квадратної матриці. Станіміровіч і Джорджсвіч отримали визначникове зображення комплексної узагальненої оберненої матриці Дразіна. Клайн і Гревїлл розширили поняття узагальненої оберненої комплексної матриці Дразіна з квадратних матриць до прямокутних.

Введення Баксаларі та Тренклерем у 2010 році поняття серцевинної оберненої для комплексних матриць викликало сплеск нової активності у розвитку теорії узагальнених обернених матриць. У наступні роки були введені та досліджені такі її узагальнення, як EP-серцевинна обернена – Прасадом і Мохана у 2014 р., DMP-обернена - Малик і Томе у 2014 р., SMP-обернена – Мехдіпур і Салемі у 2017 р., та їх зважені, тощо. Досліджувалися зображення, властивості та застосування цих нових узагальнених обернених не тільки для комплексних матриць, але і для операторів у гільбертовому просторі чи елементів кільця. Були отримані, зокрема, визначникові зображення комплексної серцевинної оберненої і EP-серцевинної оберненої.

Узагальнені обернені матриці є важливими інструментом розв'язку матричних рівнянь. У 1979 році, Баксаларі та Кала встановили необхідну та достатню умову сумісності та подали розв'язок у термінах узагальнених обернених матриць для двостороннього узагальненого матричного рівняння Сильвестра над полем комплексних чисел. За останні двадцять років інтерес до матричних рівнянь типу Сильвестра розширився до матриць над алгеброю кватерніонів.

Отже, тематика дисертації є актуальною.

Тематика дисертаційної роботи пов'язана з науковими дослідженнями в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України: “Алгебро-геометричні методи дослідження інваріантних структур на многовидах та релятивістських рівнянь математичної та теоретичної фізики” (номер державної реєстрації 01102U004819), “Розвиток методів дослід-

ження структур на многовидах, асоційованих з групами, алгебрами і графами та розвиток геометричного аналізу стосовно релятивістських полів і часток” (номер державної реєстрації 01102U004819).

Основні результати дисертації викладено в розділах 2 – 5.

Проаналізуємо отримані результати по розділам, включаючи в огляд, в першу чергу, ті результати, які, на мою думку, найбільш важливі.

У другому розділі досліджуються узагальнені обернені матриці над тілом кватерніонів. Отримано визначникові зображення узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза та Дразіна. Для побудови таких зображень у випадку матриць Мура-Пенроуза розроблено метод, який базується на граничних зображеннях і стовпцевих та рядкових аналогах характеристичних многочленів. При цьому доведена теорема про зважений сингулярний розклад кватерніонової матриці. Отримано визначникові зображення кватерніонової зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза для довільних кватерніонових матриць. Отримано також визначникові зображення узагальненої оберненої матриці Дразіна та її зваженої.

У третьому розділі отримано визначникові зображення для серцевинної оберненої матриці та її узагальнень. Побудовано нові визначникові зображення комплексних серцевинної оберненої матриці та її узагальнень.

У четвертому розділі вивчаються кватерніонове двостороннє матричне рівняння і узагальнене кватерніонове матричне рівняння Сильвестра. Побудовано визначникові зображення для нормального,  $*$ -ермітового і  $\nu$ -ермітового розв’язків кватерніонового двостороннього матричного рівняння. Побудовані аналоги правила Крамера для  $*$ -ермітового і  $\nu$ -ермітового розв’язків узагальненого матричного рівняння Сильвестра.

У п’ятому розділі досліджуються узагальнені обернені розв’язки з використанням узагальненої оберненої матриці Дразіна, зважених узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза та Дразіна. Побудовано визначникові зображення Дразіна оберненого розв’язку кватерніонового двостороннього

матричного рівняння з обмеженнями. Побудовані аналоги правила Крамера для Мура-Пенроуза зваженого оберненого розв'язку кватерніонового двостороннього матричного рівняння з деякими обмеженнями. Побудовані розв'язки деяких задач кватерніоно-матричної мінімізації та отримано правило Крамера для їх знаходження.

Якщо ж говорити в цілому і більш повно, то новими є такі результати.

1. Отримано визначникові зображення узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза, Дразіна та їх зважених для матриць над тілом кватерніонів, використовуючи раніше введені здобувачем стовпцеві і рядкові некомутативні визначники. Досліджені нові властивості стовпцевих і рядкових визначників, тим самим внесено значний вклад в розвиток їх теорії.
2. Доведено нові теореми в теорії матриць над тілом кватерніонів, такі як теорема про зважений сингулярний розклад матриці, про граничне зображення зваженої матриці Мура-Пенроуза, теорему про загальну алгебричну структуру зваженої матриці Дразіна.
3. Розроблено новий гранично-ранговий метод, який застосовується для побудови визначникового зображення кватерніонової узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза матриць. Для кватерніонової узагальненої оберненої матриці Дразіна, зважених узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза та Дразіна це метод застосовується в особливих випадках, пов'язаних з ермітовістю відповідних матриць.
4. За допомогою гранично-рангового методу отримані нові визначникові зображення комплексних узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза, Дразіна та їх зважених.
5. Поняття та властивості серцевинної оберненої матриці та її узагальнень розширено до кватерніонової матриць. Доведені теореми про характе-

- ризацію лівої  $W$ -зваженої  $EP$ -серцевинної оберненої матриці, зваженої  $MPD$ -оберненої матриці.
6. Побудовані визначникові зображення кватерніонових правої та лівої серцевинних обернених, правої та лівої  $EP$ -серцевинних обернених,  $DMP$ - та  $MPD$ -обернених,  $SMP$ -оберненої, зважених правої та лівої  $EP$ -обернених, зважених  $DMP$ - та  $MPD$ -обернених і зваженої  $SMP$ -оберненої.
  7. Показано, що новизна отриманих визначникових зображень серцевинної оберненої матриці та її узагальнень зберігається і у випадку їх побудови для комплексних матриць.
  8. Побудовані аналоги правила Крамера для кватерніонових двостороннього матричного рівняння, узагальненого матричного рівняння Сильвестра, усіх його часткових випадків, та особливих випадків з  $*$ -ермітовістю і  $\eta$ -ермітовістю. Отримане правило Крамера зберігає свою новизну як прямого методу знаходження розв'язку комплексного узагальненого матричного рівняння Сильвестра.
  9. Одержані визначникові зображення загального розв'язків системи кватерніонових двосторонніх матричних рівнянь та усіх його часткових випадків, а також загального, ермітового,  $\eta$ -(косо-)ермітового розв'язків системи з, відповідно,  $*$ -ермітовістю чи  $\eta$ -ермітовістю.
  10. Одержані визначникові зображення Дразіна оберненого розв'язку кватерніонового двостороннього матричного рівняння з обмеженнями, а також розв'язку деяких сингулярних кватерніонових диференціальних матричних рівнянь.
  11. Одержані визначникові зображення Мура-Пенроуза зваженого оберненого розв'язку кватерніонового двостороннього матричного рівняння з відповідними обмеженнями, а також його часткових випадків.

12. Одержані визначникові зображення Дразіна зваженого оберненого розв'язку кватерніонового двостороннього матричного рівняння та його часткових випадків з відповідними обмеженнями.
13. Одержано розв'язки деяких задач кватернінно-матричної мінімізації та побудовано правило Крамера для їх знаходження.

Всі результати дисертації опубліковано. Із 37 статей у фахових виданнях 30 входять до міжнародних наукометричних баз даних Scopus та Web of Science. Автореферат правильно відображає структуру, зміст та основні результати дисертації.

Отримані в дисертації результати оприлюднені на багатьох міжнародних конференціях і, зокрема:

- Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька, м. Львів, Україна, 26-30 жовтня 2020р.
- Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька, м. Дрогобич, Україна, 25-28 серпня 2020р.
- XII Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена 215-й річниці з дня народження В. Буняковського, м. Вінниця, Україна, 02-06 липня, 2019р.
- XI Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні присвячена 75-річчю В. В. Кириченка, м. Київ, Україна, 3-7 липня 2017 р.
- X Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена 70-й річниці з дня народження Ю. А. Дрозда, м. Одеса, Україна, 20-27 серпня, 2015р.
- IX Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, м. Львів, Україна, 8-13 липня, 2013р.
- Міжнародна конференція з алгебри, присвячена 100-й річниці С. М. Чернікова, м. Київ, Україна, 23-27 червня, 2012р.
- VIII Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, м. Луганськ, Україна, 5-12 липня, 2011р.
- XIII Міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука, м. Київ, Україна, 13-15 травня, 2010р.

- VII Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, м.Харків, Україна, 18-23 серпня, 2009р
- XII Міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука, м.Київ, Україна, 15-17 травня, 2008р.
- Міжнародний симпозіум "Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXIII)", м. Ялта, Україна, 23–28 вересня, 2007р.

Результати дисертації можуть бути корисні аспірантам та співробітникам Інституту математики НАН України, Київського, Дніпровського, Луганського, Львівського національних університетів, а також інших навчальних закладів і наукових інститутів України, дослідження яких пов'язані з тематикою дисертації.

Враховуючи сказане вище, вважаю, що дисертаційна робота Кирчєя Івана Ігоровича "Узагальнені обернені матриці над тілом кватерніонів та їх застосування" є актуальним дослідженням високого математичного рівня, містить важливі наукові результати з теоретико-матричної тематики, відповідає всім вимогам пп. 9, 10, 12, 13, 14 "Порядку присудження наукових ступенів" (Постанова Кабінету Міністрів України № 567 від 24 липня 2013 року, зі змінами) щодо докторських дисертацій, а її автор заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел.

*Офіційний опонент*

*доктор фіз-мат. наук, професор,*

*провідний науковий співробітник*

*відділу алгебри і топології*

*Інституту математики НАН України*

19 квітня 2021 р.

