

## ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Гуцько Марини Сергіївни

### “Задачі оптимального відновлення полілінійних функціоналів і операторів за лінійною інформацією”,

поданої на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз, 111 – математика

**1. Актуальність теми.** Дисертаційну роботу М. С. Гуцько “Задачі оптимального відновлення полілінійних функціоналів і операторів за лінійною інформацією” присвячено задачам відновлення – одному із найважливіших напрямів сучасної теорії апроксимації. В цих задачах необхідно відновити функцію чи інший математичний об’єкт за деякою неповною інформацією, яка задається, наприклад, значеннями функції або її похідних у фіксованих точках, коефіцієнтами Фур’є тощо. При цьому потрібно побудувати метод її наближення (відновлення), який використовує дану інформацію та дає найменшу похибку відновлення. Такі методи відновлення називають оптимальними для заданої інформації.

У різних постановках задачі оптимального відновлення лінійних функціоналів та операторів розглядалися у роботах А. М. Колмогорова, С. М. Нікольського, А. Сарда, С. Б. Стечкіна, Дж. Кіфера, В. В. Арестова, С. А. Смоляка, М. С. Бахвалова, Ю. М. Субботіна та ін. При цьому важливу роль відіграло те, що задачі відшукування величин найкращого відновлення заданого класу функцій у більшості природних ситуацій зводяться до задач про поперечники, а екстремальні підпростори та конкретні лінійні методи, які реалізують такі поперечники, є також оптимальними методами відновлення. Систематичне викладення результатів задач оптимального відновлення операторів можна знайти, наприклад, в монографіях Дж. Трауба та Х. Вожняковського, М. П. Корнійчука, Дж. Трауба, Е. Новака, О. А. Женсикбаєва; К. Ю. Осипенка та ін. Задачі оптимального відновлення білінійних функціоналів і операторів розглядалися у роботах В. Ф. Бабенка, В. Ф. Бабенка та О. О. Руденка та ін. У дисертаційній роботі продовжується дослідження таких задач, зокрема, розглядаються задачі про оптимальне відновлення  $n$ -лінійних функціоналів і операторів у випадку  $n \geq 2$ . Одержання таких результатів є цікавим, зокрема, з точки зору застосувань, наприклад, для відновлення зображень при різних типах пошкоджень.

**2. Наукова новизна результатів дисертаційної роботи.** Основний зміст дисертаційної роботи М. С. Гуцько складають дослідження задач оптимального відновлення  $n$ -лінійних функціоналів,  $n \geq 2$ , та згорток функцій, а також їх відновлення за інформацією, яка задана з певною похибкою. Основні нові результати



цієї дисертації на думку автора відгуку полягають в наступному:

- знайдено оптимальну лінійну інформацію, оптимальні методи та похибки відновлення скалярних добутків, білінійних та полілінійних функціоналів для різних класів елементів сепарабельного гільбертового простору над полем дійсних або комплексних чисел;

- для важливих класів згорток функцій знайдено оптимальну лінійну інформацію, оптимальні методи та похибки відновлення, а також значення колмогоровських поперечників;

- розв'язано задачу оптимального відновлення підмножин гільбертового простору, які є образом кулі одиничного радіуса відносно дії компактного оператора, за інформацією про наближені значення декількох перших коефіцієнтів Фур'є за деякою, пов'язаною з оператором ортонормованою системою.

Дисертація складається з анотації, змісту, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків, переліку використаних джерел, який містить 110 посилань, а також додатку зі списком публікацій здобувача. Повний обсяг роботи становить 137 сторінок.

У *вступі* висвітлено актуальність обраної теми, вказано мету, завдання та методи дослідження, представлено наукову новизну і цінність отриманих результатів, наведено дані про апробацію результатів та особистий внесок здобувача, а також коротко викладено зміст основної частини дисертації.

*Перший розділ* присвячено огляду літератури за її темою. Зокрема, в ньому наведено необхідні означення та позначення, постановки основних задач дослідження та деякі допоміжні твердження.

У *другому розділі* розглядаються задачі відновлення різних полілінійних функціоналів у сепарабельному гільбертовому просторі над полем дійсних або комплексних чисел. В кожному з двох його підрозділів для відповідних функціоналів знайдена оптимальна на даному класі лінійна інформація та оптимальний метод відновлення, а також обчислено похибку відновлення.

У *третьому розділі* розв'язано задачу відновлення згортки  $n$  функцій на деяких опуклих центрально-симетричних множинах  $2\pi$ -періодичних функцій. Знайдено оптимальний метод відновлення згортки, обчислено оптимальну похибку відновлення та значення колмогоровських поперечників таких множин.

У *четвертому розділі* розв'язано задачу оптимального відновлення підмножин гільбертового простору, які є образом кулі одиничного радіуса відносно дії компактного оператора, за інформацією про значення деяких коефіцієнтів Фур'є елементів підмножини, які задані неточно. Розв'язано також задачу про оптимальне відновлення скалярного добутку на декартовому добутку підмножин гільбертового простору, одна з яких є образом кулі одиничного радіуса відносно дії компа-



ктного оператора, а інша – образом кулі одиничного радіуса відносно дії обмеженого оператора спеціальної структури, за інформацією з похибкою про значення декількох перших коефіцієнтів Фур'є елементів цих підмножин.

**3. Теоретичне та практичне значення одержаних результатів.** Дисертаційна робота має теоретичний характер. Її результати та методика їх отримання можуть бути використані при подальшому вивченні різних питань математичного аналізу, обчислювальної математики та теорії функцій. Деякі з отриманих результатів можуть також бути застосовані до практичних задач, зокрема, для відновлення зображень при різних типах пошкоджень.

**4. Аналіз публікацій та повнота відображення результатів в авторефераті дисертації.** За результатами дисертаційного дослідження М. С. Гунько опубліковано 13 наукових праць. Серед них 7 статей у виданнях, які входять до фахових наукових видань України у галузі фізико-математичних наук (3 статті в Українському математичному журналі, який входить до міжнародних науково-метричних баз Scopus та Web of Science) та 6 тез конференцій різного рівня. Наведений у дисертації перелік публікацій та їх зміст відповідають темі дисертації. Автореферат у повній мірі відображає основні положення та необхідні висновки дисертаційної роботи. Результати дослідження мають широку апробацію і неодноразово доповідалися на наукових конференціях та семінарах в українських університетах та наукових установах.

**5. Відповідність дисертації встановленим вимогам, оцінка змісту дисертації та її завершеності.** Структура дисертації, її обсяг та оформлення відповідають вимогам, що висуваються до кандидатських дисертацій. Дисертаційне дослідження М. С. Гунько є завершеною науковою роботою, виконаною за актуальною темою. Роботу написано чітко, з логічним поданням матеріалу, що характеризує високий рівень здобувача.

**6. Зауваження.** Дисертаційна робота в цілому добре написана, але містить деяку кількість описок, повний список яких ми не наводимо. Вкажемо лише на деякі важливі, на погляд автора відгуку, недоречності.

1. Система позначень основних величин дисертаційної роботи є не зовсім вдалою. Роботу присвячено розв'язанню задач оптимального відновлення полілінійних функціоналів і операторів. Тому, зокрема, в усіх позначеннях (див., наприклад, стор. 50) похибок відновлення  $R(M_1, \dots, M_n; T_1, \dots, T_n; F)$ ,  $R(M_1, \dots, M_n; T_1, \dots, T_n)$ ,  $R_{m_1, \dots, m_n}(M_1, \dots, M_n)$  оператора  $\Omega$  повинен міститися цей оператор:  $R(M_1, \dots, M_n; T_1, \dots, T_n; F; \Omega)$ ,  $R(M_1, \dots, M_n; T_1, \dots, T_n; \Omega)$ ,  $R_{m_1, \dots, m_n}(M_1, \dots, M_n; \Omega)$ . Це дало б змогу, наприклад, уникнути таких випадків, як на стор. 5 (7 та 14 стрічки), де наведено точні рівності для похибок відновлення різних функціоналів, а величини цих похибок позначаються однаково. Також



варто уніфікувати позначення величин  $(x_j, e_k)$ :  $\hat{x}_{jk}$  (див. стор 23<sup>11</sup>) або  $\hat{x}_{j,k}$  (див. стор 30<sub>8</sub>). Не зовсім вдалим є позначення послідовностей чисел  $g^j = \{g_k^j\}_{k=1}^\infty$  (див., наприклад, стор. 5), кращим було б, наприклад, позначення  $g_j = \{g_{jk}\}_{k=1}^\infty$ .

2. В роботі міститься деяка частина русизмів, наприклад, “трудах” (ст. 5), “результати представляють самостійний інтерес” (ст. 4, краще писати “результати мають самостійний інтерес”), “функціоналів виду” (ст. 5, “функціоналів вигляду”), “гільбертова” (ст. 36, “гільбертового”), “можуть бути співпадаючі” (ст. 78, “можуть бути однакові”), “согласовані” (ст. 81, “підібрані”), “якщо ж  $K$  розірвно в нулі” (ст. 91, “якщо ж  $K$  має розрив в нулі”).

3. На стор. 5 означення класів  $W_{p_j}^{g_j}$  варто перенести з десятої стрічки на четверту, де вони згадуються вперше. Крім цього, означення таких класів наводиться в роботі на стор. 5, 29, 30, 69, 78. Було б доречним навести таке означення один раз, додати його в перелік основних позначень і потім у відповідних місцях робити посилання на це означення.

4. На стор. 7<sub>1</sub> замість “С. М. Nikolsky” слід писати “S. M. Nikolsky”.

5. На стор. 37<sup>4</sup> варто було б нагадати означення норми  $\|\cdot\|_{l_p^n}$  простору  $l_p^n$ .

6. На стор. 46<sup>4</sup> замість “в просторі  $X$ ” слід писати “в лінійному нормованому просторі  $X$ ”.

7. На стор. 5 варто зазначити, що  $f_k$  і  $f(e_{k^1}, \dots, e_{k^n})$  – довільні комплексні числа; на стор. 47 (теорема 1.1.1) слід більш чітко дати означення множини  $P$ , на стор. 68<sup>11</sup> вираз  $T_j(x_j) = 0$  варто пояснити.

8. Оскільки в умові теореми 2.1.1 (стор. 70) вимагається, щоб  $\sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j} = 1$ , то твердження наслідків 2.1.1 та 2.1.2 (на стор. 74, у яких покладають  $p_j = 2$ ) мають місце лише у випадку, коли  $n = 2$ .

9. У перелік праць, присвячених задачам найкращого відновлення, варто також включити статтю С. Б. Стечкіна “Наилучшее приближение линейных операторов” (Матем. заметки, 1 (2) (1967), 137-148).

10. На стор. 90<sup>12</sup> посилання [9] слід уточнити.

**7. Висновки.** Наведені зауваження переважно мають редакційний характер, не мають принципового значення і не впливають на загальне цілком позитивне враження від роботи. Одержані в дисертаційній роботі результати та зроблені автором висновки є правильними і обґрунтованими. Основні результати дисертації є новими, отримані її автором особисто і досить повно викладені в опублікованих ним роботах. Порушення наукової доброчесності відсутні. Автореферат правильно відображає зміст дисертації.

Вважаю, що дисертаційна робота Гунько Марини Сергіївни “Задачі оптималь-

ного відновлення полілінійних функціоналів і операторів за лінійною інформацією” задовольняє вимогам п. 9, 11–14 “Порядку присудження наукових ступенів” (Постанова Кабінету Міністрів України № 567 від 24 липня 2013 р.) щодо кандидатських дисертацій, а її автор **Гуцько Марина Сергіївна**, заслуговує присудження їй наукового ступення кандидата фізико–математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз, 111 – математика.

Офіційний опонент  
доктор фізико-математичних наук,  
старший науковий співробітник,  
провідний науковий співробітник  
відділу теорії функцій  
Інституту математики НАН України

