Національна академія наук України

Інститут математики

Кваліфікаційна наукова

праця на правах рукопису

Гунько Марина Сергіївна

УДК 517.5

Дисертація

ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО ВІДНОВЛЕННЯ ПОЛІЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ І ОПЕРАТОРІВ ЗА ЛІНІЙНОЮ ІНФОРМАЦІЄЮ

спеціальність 01.01.01 – математичний аналіз

Подається на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

____________________М. С. Гунько

Науковий керівник: **Бабенко Владислав Федорович**,

доктор фізико-математичних наук, професор

Київ – 2021

АНОТАЦІЯ

Гунько М. С. Задачі оптимального відновлення полілінійних функціоналів і операторів за лінійною інформацією. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 "Математичний аналіз". - Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара.– Інститут математики НАН України, Київ, 2021.

Дисертаційна робота присвячена задачам оптимального відновлення білінійних, n-лінійних функціоналів та згорток n функцій і відновленню за інформацією, що задана з похибкою.

Однією з основних задач математики є відновлення тих чи інших математичних об'єктів по неповній інформації. Так при відновленні функцій ми часто маємо неповну інформацію про функцію, наприклад, деяку кількість її коефіцієнтів Фур'є, чи її значення в деякій системі точок. Треба побудувати метод її наближення (відновлення), який використовує доступну інформацію, та дає найменшу похибку відновлення. Такі методи відновлення називають оптимальними для заданої інформації. Пошук найкращої інформації також відноситься до задач відновлення.

В теорії апроксимації і теорії оптимальних алгоритмів добре дослідженою є задача оптимального відновлення функцій, лінійних функціоналів, та лінійних операторів на різних класах функцій.

Задачі найкращого відновлення операторів виникають в трудах А. М. Колмогорова, А. Сарда, С. М. Нікольського, Дж. Кіферав середині XX сторіччя, а їх дослідження як окремого класу задач, починається в 1970-і роки в теорії наближення та в теорії інформаційної складності в роботах С. А. Смоляка, М. С. Бахвалова, О. Г. Марчука і К. Ю. Оси-

пенка, М. Голомба і Х. Ф. Вайнбергера, С. А. Міккеллі та Т. Дж. Рівліна, А. А. Мелкмена і С. А. Міккеллі. Систематичне викладення результатів задач оптимального відновлення операторів можна знайти, наприклад, в монографіях Дж. Трауба та Х. Вожьняковського; М. П. Корнійчука, Дж. Трауба, Г. Васильковського і Х. Вожьняковського; Е. Новака; А. Г. Вершульца; Л. Пласкоти; О. А. Женсикбаєва; К. Ю. Осипенка.

Подальші результати, а також результати по відновленню за неточною інформацією можна знайти в роботах В. В. Арестова; І. Бабушка та С. Л. Соболева; Б. Д. Боянова; В. Л. Велікіна, В. Н. Габушина; І. М. Гельфанда та Н. Я. Віленкіна; А. І. Гребенникова та В. О. Морозова; В. В. Іванова; В. П. Моторного, А. О. Лігуна та В. Г. Дороніна; Г. Г. Магаріл-Ільяєва та К. Ю. Осипенка; Ю. М. Субботіна; В. М. Тіхомирова та інших математиків.

Систематичне дослідження задач оптимального відновлення білінійних функціоналів і операторів розпочав В. Ф. Бабенко у 1979, 1988, 1989 рр., ним був помічений тісний звязок між задачами обчислення n-поперечників за Колмогоровим, лінійних n-поперечників та задачами оптимального відновлення білінійних функціоналів та згорток функцій. Продовжив роботу в цьому напрямку В. Ф. Бабенко разом з О. О. Руденком. Результати опубліковано в 1991, 1992 роках.

Отже, задачі оптимального відновлення лінійних і білінійних функціоналів і операторів дослідженні досить повно. Разом з тим до недавнього часу не було результатів по оптимальному відновленню n-лінійних функціоналів і операторів у випадку $n > 2$. Одержання таких результатів є цікавим з точки зору застосувань - вони можуть бути, наприклад, використані при відновленні зображень при різних типах пошкоджень.

Дисертація має теоретичний характер. Результати дисертації можна використати для розв'язку теоретичних та прикладних задач, які потребують наближення білінійних, n-лінійних функціоналів або згорток n функцій за точною та неточною лінійною інформацією.

Отримані результати представляють самостійний науковий інтерес і можуть бути використані для подальших досліджень в теорії наближення.

Дисертаційна робота складається з анотацій українською й англійською мовами, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, загальних висновків і списку використаних джерел, які містять 110 найменувань.

Об'єктом дослідження є білінійні та полілінійні функціонали, згортки двох та більшої кількості фунцкій; інформаційні оператори та фунціонали, за допомогою яких відновлюються функціонали та згортки; методи відновлення, які є функціями від інформаційних функціоналів.

У вступі обгрунтовано актуальність дослідження, визначено об'єкт, предмет, мету і задачі, зазначено наукову новизну одержаних результатів і особистий внесок здобувача.

В першому розділі наводяться постановки задач та огляд відомих результатів за тематикою роботи, а також наводяться необхідні відомості та означення.

У другому, третьому і четвертому розділах наводяться нові результати.

Другий розділ присвячено розв'язанню задач відновлення білінійних, n-лінійних функціоналів у сепарабельному гільбертовому посторі над полем дійсних або комплексних чисел. В кожному з двох підрозділів для конкретних класів елементів знайдена оптимальна лінійна інформація та оптимальній метод відновлення, а також обчислено оптимальну похибку відновлення.

В підрозділі 2.1 отримано декілька результатів по відновленню n-лінійних функціоналів виду

$$\Omega(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, \hat{x}_{1,k} ... \hat{x}_{n,k}$$

на класах $W^{g^j}_{p_j}$, що задаються неспадними за модулем послідовностями $g^j = \{g^j_k\}_{k=1}^{\infty}$. Наступна формула є прикладом знайденої похибки відновлення

$$R_{m_1,...,m_n}(W^{g^1}_{p_1}, ..., W^{g^n}_{p_n}) = \frac{|f_{M+1}|}{|g^1_{M+1}|^{\frac{1}{p_1}} \cdot ... \cdot |g^n_{M+1}|^{\frac{1}{p_n}}}.$$

В підрозділі 2.2 розв'язана задача відновлення на класах елементів простору H:

$$W^{g^s}_{p_s} = \left\{ x \in H : \sum_{k=1}^{\infty} |g^s_k| \; |\hat{x}_k|^{p_s} \leq 1 \right\}, \; p_s \geq 1$$

для функціоналів виду

$$\Omega(x_1, ..., x_n) = \sum_{k^1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k^n=1}^{\infty} f(e_{k^1}, ..., e_{k^n}) \; \hat{x}_{k^1} ... \hat{x}_{k^n}.$$

Похибка відновлення, яку знайдено, має вид:

$$R_{m_1,...,m_n}(W^{g^1}_{p_1}, ..., W^{g^n}_{p_n}) = \max_{(q_j(1), q_j(2), ..., q_j(n)) \notin V_u} \frac{|f(e_{q_j(1)}, e_{q_j(2)}, ..., e_{q_j(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_j(s)}|^{1/p_s}} =$$

$$= \frac{|f(e_{q_{u+1}(1)}, e_{q_{u+1}(2)}, ..., e_{q_{u+1}(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_{u+1}(s)}|^{1/p_s}}.$$

У третьому розділі розв'язані задачі відновлення згорток n–функцій x_j виду

$$(x_1 * x_2 * ... * x_n)(\tau) = (x_1 * (x_2 * ... * x_n))(\tau) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} x_1(\tau - t_1 - ... - t_{n-1}) x_2(t_1) ... x_n(t_{n-1}) dt_1 dt_2 ... dt_{n-1}$$

за лінійною інформацією. А саме, знайдено оптимальну лінійну інформацію, оптимальний метод її використання, оптимальну похибку відновлення на класах періодичних функцій $M_j = K_j * F_{p_j}$, що задаються згорткою ядра $K_j \in L_1$, яке не збільшує осциляцію, із функціями з F_{p_j} – одиничної кулі в L_{p_j}, $j = 1, ..., n$. Тобто розв'язано задачу відновлення згортки n функцій на опуклих центрально - симетричних множинах 2π - періодичних функцій виду $x = a\mu + K * \psi$, де $a \in \mathbb{R}$, $\psi \in F_p$, $\psi \perp \mu$, де $\mu = 1$, якщо $\int\limits_0^{2\pi} K dt = 0$ і $\mu = 0$, якщо $\int\limits_0^{2\pi} K dt \neq 0$.

Похибка відновлення має вид

$$R_{n(2s-1)}(K_1 * F_1, K_2 * F_1, ..., K_n * F_1; L_1) =$$

$$= R_{2s-1,...,2s-1}(K_1 * F_1, K_2 * F_1, ..., K_n * F_1; L_1) =$$

$$= d_{2s-1}(K_1 * K_2 * ... * K_n * F_\infty, C) = \|K_1 * K_2 * ... * K_n * \varphi_s\|_C.$$

В четвертому розділі узагальнені результати роботи К. Ю Осипенка та Г.Г.Магаріл-Ілляєва 2002 року як на випадок більш загальних класів, так і на випадок більш загальних множин, що задають похибку інформаційного оператора.

У четвертому розділі розв'язана задача оптимального відновлення підмножин гільбертового простору, які є образом кулі одиничного радіуса відносно дії компактного оператора, за інформацією про значення декількох коефіцієнтів Фур'є елементів підмножини, які задані неточно. Також, розв'язана задача про оптимальне відновлення скалярного добутку на декартовому добутку підмножин гільбертового простору, одна з яких є образом кулі одиничного радіуса відносно дії компактного оператора, а інша - образом кулі одиничного радіуса відносно дії обмеженого оператора спеціальної структури, за інформацією з похибкою про значення декількох перших коефіцієнтів Фур'є елементів цих підмножин.

Ключові слова: відновлення, скалярний добуток, білінійний функціонал, n-лінійний функціонал, згортка n-функцій, лінійна інформація, необмежені оператори, лінійний нормований простір, норма, лінійні оболонки множин, метод відновлення, оптимальна похибка.

ABSTRACT

Gunko M. S. Problems of optimal recovery of polylinear functionals and operators on linear information. - Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for a Candidate Degree in Physical and Mathematical Sciences in speciality 01.01.01 — mathematical analysis – Oles Honchar Dnipro National University — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2021.

The dissertation work is devoted to the problems of optimal restoration of bilinear, n-linear functionals and convolutions of n functions and recovery on the information given with an error.

One of the main tasks of mathematics is the restoration of certain mathematical objects on incomplete information. Thus, when restoring functions, we often have incomplete information about the function, for example, some of its Fourier coefficients, or its value in some system of points. It is necessary to build a method of its approximation (recovery), which uses the available information and gives the lowest error of recovery.

Such recovery methods are called optimal for the given information. Search for the best information also relates to recovery tasks.

The problem of optimal restoration of functions, linear functionals, and linear operators on different classes of functions is thoroughly studied in the theory of approximation and the theory of optimal algorithms.

The problems of the best recovery of operators arise in the works of A. M. Kolmogorov, A. Sard, C. M. Nikolsky, J. Kiefer in the middle of the

twentieth century. Their study as a separate class of problems begins in the 1970s years in the theory of approximation and in the theory of information complexity in the works by S. A. Smolyak, M. S. Bakhvalov, O. G. Marchuk and K. Yu. Osipenko, M. Golomb and H. F. Weinberger, C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, A. A. Melkman and C. A. Micchelli.

Systematic presenting the results of problems of optimal recovery of operators can be found, for example, in the monographs by J. Traub and H. Woz'niakowski; M. P. Korniychuk, J. Traub, G. Wasilkowski and H. Woz'niakowski; E. Novak; A. G. Werschulz; L. Plaskota; O. A. Zhensikbayev; K. Yu. Osipenko.

Further results, as well as the results of the recovery according to inaccurate information, can be found in the works by V. V. Arestov; I. Babushko and S. L. Sobolev; B. D. Boyanov; V. L. Velikin, V. N. Gabushin; I. M. Gelfand and N. J. Vilenkin; A. I. Grebennikov and V. O. Morozov; V. V. Ivanov; V. P. Motorny, A. O. Ligun and V. G. Doronin; G. G. Magaril-Ilyaev and K. Yu. Osipenko; Yu. M. Subbotin; V. M. Tikhomirov and other mathematicians.

V. F. Babenko started the systematic study of problems of optimal restoration of bilinear functionals and operators in 1979, 1988, 1989. He noticed a close connection between the problems of calculating n -diameters according to Kolmogorov, linear n -diversions and the problems of optimal restoration of bilinear functionals and convolutions of functions.

V. F. Babenko, together with O. O. Rudenko, continued to work in this direction. The results were published in 1991, 1992.

Therefore, the problems of optimal recovery of linear and bilinear functionals and operators are studied quite completely. However, until recently there were no results on the optimal recovery of n -linear functionals and operators in the case of $n > 2$. Obtaining of such results is interesting from the point of view of applications - they can be used, for example, in the restoration of images with different types of damage.

The dissertation has a theoretical character. The results of the dissertation can be used to solve theoretical and applied problems that require the approximation of bilinear, n -linear functionals or convolutions of n functions for accurate and inaccurate linear information.

The obtained results are of independent scientific interest and can be used for further research in approximation theory.

The dissertation consists of annotations in Ukrainian and English, a list of symbols, an introduction, four sections divided into subsections, general conclusions and, a list of sources used, which contains 110 items.

The study object is bilinear and polylinear functionals, convolutions of two or more functions; information operators and functionalities, with the help of which functionalities and convolutions are restored; recovery methods, which are functions of information functionalities.

The introduction substantiates the relevance of the research, defines the object, subject, purpose and objectives, indicates the scientific novelty of the results and the personal contribution of the applicant.

The first section provides problem statements and an overview of known results on the subject of work work and the necessary information and definitions.

The second, third and fourth sections present new results.

The second section is devoted to solving problems of restoration of bilinear, n -linear functionals in a separable Hilbert space over a field of real or complex numbers. In each of the two sections for specific classes of elements, the optimal linear information and the optimal recovery method are found, and the optimal recovery error is calculated.

In Section 2.1, we obtain several results on the restoration of n -linear functionals of the form

$$\Omega(x_1, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, \hat{x}_{1,k} ... \hat{x}_{n,k}$$

on the classes $W_{p_j}^{g^j}$, specified by non-decreasing ones according to module by sequences $g^j = \{g_k^j\}_{k=1}^{\infty}$.

The following formula is an example of the recovery error that was found

$$R_{m_1,...,m_n}(W_{p_1}^{g^1}, ..., W_{p_n}^{g^n}) = \frac{|f_{M+1}|}{|g_{M+1}^1|^{\frac{1}{p_1}} \cdot ... \cdot |g_{M+1}^n|^{\frac{1}{p_n}}}.$$

Subsection 2.2 solves the recovery problem for functionals of the following form

$$\Omega(x_1, ..., x_n) = \sum_{k^1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k^n=1}^{\infty} f(e_{k^1}, .., e_{k^n}) \, \hat{x}_{k^1} ... \hat{x}_{k^n}$$

on the classes of elements in Hilbert space H:

$$W_{p_s}^{g^s} = \left\{ x \in H : \sum_{k=1}^{\infty} |g_k^s| \, |\hat{x}_k|^{p_s} \leq 1 \right\}, \; p_s \geq 1.$$

The recovery error that was found is:

$$R_{m_1,...,m_n}(W_{p_1}^{g^1}, ..., W_{p_n}^{g^n}) = \max_{(q_j(1),...,q_j(n)) \notin V_u} \frac{|f(e_{q_j(1)}, ..., e_{q_j(n)})|}{\prod_{s=1}^{n} |g_{q_j(s)}^s|^{1/p_s}} =$$

$$= \frac{|f(e_{q_{u+1}(1)}, ..., e_{q_{u+1}(n)})|}{\prod_{s=1}^{n} |g_{q_{u+1}(s)}^s|^{1/p_s}}.$$

The third section solves the problem of restoring convolutions of n - functions x_j of the form

$$(x_1 * x_2 * ... * x_n)(\tau) = (x_1 * (x_2 * ... * x_n))(\tau) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} x_1(\tau - t_1 - ... - t_{n-1}) x_2(t_1) ... x_n(t_{n-1}) dt_1 dt_2 ... dt_{n-1}$$

according to linear information. Namely, the optimal linear information, the optimal method of its use, the optimal recovery error on the classes of periodic functions $M_j = K_j * F_{p_j}$ are found , set by the convolution of the kernel $K_j \in L_1$, which does not increase the oscillation, with functions with F_{p_j} – single ball in L_{p_j}, $j = 1, ..., n$. That is, it is solved the problem of restoring the convolution n functions on convex centrally symmetric sets 2π - periodic functions of the form $x = a\mu + K * \psi$, where $a \in \mathbb{R}$, $\psi \in F_p$, $\psi \perp \mu$, where $\mu = 1$, if $\int\limits_0^{2\pi} K dt = 0$ i $\mu = 0$, if $\int\limits_0^{2\pi} K dt \neq 0$.

The recovery error has the form

$$R_{n(2s-1)}(K_1 * F_1, ..., K_n * F_1; L_1) = R_{2s-1,...,2s-1}(K_1 * F_1, .., K_n * F_1; L_1) =$$

$$= d_{2s-1}(K_1 * ... * K_n * F_\infty, C) = \|K_1 * ... * K_n * \varphi_s\|_C.$$

The fourth section summarizes the results of the work of K. Yu. Osipenko and G.G. Magaril-Illyaev in 2002 as in the case of more general classes, and in the case of more general sets that specify the error of the information operator.

The fourth section solves the problem of optimal reconstruction of subsets of Hilbert space, which are the image of a sphere of unit radius concerning a compact operator's action, based on information about the values of several Fourier coefficients of subset elements that are given inaccurately. The problem of optimal restoration of a scalar product on a Cartesian product of subsets of Hilbert space is solved. One of them is the image of a sphere of unit radius for a compact operator's action. The other is the image of a sphere of unit radius concerning a limited operator of special structure according to the information with the error about value of the first few coefficients of Fourier elements of these subsets.

Key words: recovery, scalar product, bilinear functional, n-linear functional, convolution of n-functions, linear information, unboundered

operators, linear normed space, norm, linear spans of the sets, method for the recovery, optimal error.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ НАУКОВИХ ПРАЦЬ ЗДОБУВАЧА НА ТЕМУ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Бабенко В. Ф.* Оптимальне відновлення елементів гільбертового простору та їхніх скалярних добутків за коефіцієнтами Фур'є, які відомі з похибкою / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, Н. В. Парфінович // Укр. мат. журнал. – 2020. – Т.72, №6. – С. 736-750.

2. *Гунько М. С.* Об оптимальном восстановлении n-линейных функционалов по линейной информации на множествах, которые задаются неограниченными операторами / М. С. Гунько, А. А. Руденко // Вісник дніпропетровського університету. Серія: Математика. – Дніпро. – 2017. – вип. 22 – С. 33-40.

3. *Гунько М. С.* Оптимальное восстановление свертки n-функций из различных классов по линейной информации / М. С. Гунько // Вісник дніпропетровського університету. Серія: Математика. – Дніпропетровськ. – 2016. – вип. 21. – С. 27-34.

4. *Бабенко В. Ф.* Об оптимальном восстановлении свертки n функций по линейной информации / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько // Укр. мат. журнал. – 2016. – Т. 68, №5. – С. 579-585.

5. *Бабенко В. Ф.* Оптимальное восстановление n-линейных функционалов по линейной информации / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, А. А. Руденко // Укр. мат. журнал. – 2014. – Т. 66, №7. – С. 884-890.

6. *Бабенко В. Ф.* Об оптимальном восстановлении n-линейных функционалов по линейной информации / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, А. А. Руденко // Вісник дніпропетровського університету. Серія: Матема-

тика. – Дніпропетровськ. – 2013. – вип. 18. – С. 16-25.

7. *Бабенко В. Ф.* Об оптимальном восстановлении билинейных функционалов по линейной информации / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, А. А. Руденко // Вісник дніпропетровського університету. Серія: Математика. – Дніпропетровськ. – 2012. – вип. 17. – С. 11-17.

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ НА КОНФЕРЕНЦІЯХ

1. *Бабенко В. Ф.* Оптимальне відновлення елементів класу за інформацією, що задана коефіцієнтами Фур'є з похибкою / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, Н. В. Парфінович // Тези доповідей всеукраїнської наукової конференції «Теорія наближень і її застосування», присвячену 70-річчю професора В. Ф. Бабенка. – Україна, Дніпро. – 3-5 жовт. 2019 р. – С. 26.

2.*Гунько М. С.* Про оптимальне відновлення n-лінійних функціоналів за лінійною інформацією / М. С. Гунько, О. О. Руденко // Тези доповідей міжн. конференції «Теорія наближення функцій та її застосування», присвяченої 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця. – Україна, Слов'янськ. – 28 трав. - 3 черв. 2017 р. – С. 54.

3. *Бабенко В. Ф.* Об оптимальном восстановлении свертки n функций по линейной информации / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько // Тези доповідей міжн. наукової конференції «Теорія наближень і її застосування», присвяченої 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора В. П. Моторного. – Україна, Дніпропетровськ. – 8-11 жовт. 2015 р. – С. 6.

4. *Гунько М. С.* Оптимальное восстановление n-линейных функционалов по линейной информации / М. С. Гунько // Тез. IX междунар.

научной конф. студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2014». – Казахстан, Астана. – 11 апр. 2014 г. – С. 2098-2101.

5. *Бабенко В. Ф.* Задачи оптимального восстановления n-линейных функционалов по линейной информации / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, А. А. Руденко // Тез. крымской междунар. матем. конф. «КММК-2013 КРОМШ». – Украина, Автономная республика Крым, Судак. – 22 сент.- 4 окт. 2013 р. – С. 83-84.

6. *Гунько М. С.* Об оптимальном восстановлении n-линейных функционалов по линейной информации / М. С. Гунько, А. А. Руденко // Тези доповідей міжн. матем. конференції «Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування», присвяченої 75-річчю з дня народження академіка А. М. Самойленка. – Україна, Севастополь. – 23-30 червня 2013 р. – С. 230.

Зміст

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел.

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел.

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел.

$\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел.

$\mathbb{R}^n$ – n-вимірний евклідів простір.

C – простір неперервних 2π-періодичних функцій f з нормою $||f||_C = \max\limits_t |f(t)|$.

H - сепарабельний дійсний або комплексний гільбертовий простір зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$.

L_p $(1 \le p < \infty)$ – простір 2π-періодичних, сумовних на періоді в p-му степені функцій f з нормою $||f||_p = ||f||_{L_p} := \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$.

L_∞ – простір 2π-періодичних істотно обмежених функцій f з нормою $||f||_\infty = ||f||_{L_\infty} := vrai\sup\limits_t |f(t)|$.

$KerA$ – ядро оператора A.

span(W) – лінійна оболонка множини W.

$T_j(x_j) = (T_{j,1}(x_j), ..., T_{j,m_j}(x_j)),\ x_j \in M_j,\ j = 1, ..., n$ – лінійна інформація про x_1, x_2,..., x_n типу $(m_1, ..., m_n)$ (або $(m_1, ..., m_n)$-інформація.

$R(W_1, ..., W_n; T_1, ..., T_n; F)$ – похибка метода F відновлення Ω на множинах $W_1, ..., W_n$ за інформацією $T_1, ..., T_n$.

$R_{m_1,...,m_n}(W_1, ..., W_n)$ – оптимальна похибка відновлення Ω на $W_1, ..., W_n$ за $(m_1, ..., m_n)$ – інформацією.

$R_N(W_1, ..., W_n)$ – оптимальна похибка відновлення Ω на $W_1, ..., W_n$ за інформацією сумарного об'єму N.

$d_n(\mathcal{M}, X)$ – n-поперечник за Колмогоровим класу $\mathcal{M}$ в просторі X.

$\lambda_n(M, X)$ – лінійний n-поперечник центрально - симетричної множини M в просторі X, де A – лінійний оператор з областю значень в лінійному підпросторі $A_n \subset X$, $dim(A_n) \leq n$.

A^* – оператор, спряжений до лінійного неперервного оператора A.

F_p – одинична куля в L_p $(1 \leq p \leq \infty)$.

$\nu(g)$– число змін знаку на періоді у 2π-періодичній функції g.

$(x_1 * x_2)(\tau) = \int\limits_0^{2\pi} x_1(\tau - t)x_2(t)dt$ – згортка двох функцій x_1 і x_2.

$(x_1 * x_2 * ... * x_n)(\tau) = (x_1 * (x_2 * ... * x_n))(\tau) =$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} x_1(\tau - t_1 - ... - t_{n-1})x_2(t_1)...x_n(t_{n-1})dt_1dt_2...dt_{n-1}$$

– згортка n функцій $x_1, x_2, ..., x_n$.

$K * F_p$ – клас функцій виду $x = a\mu + K * \psi$, де $a \in \mathbb{R}$, $\psi \in F_p$, $\psi \perp \mu$.

H^T_{2s-1}, $s \in \mathbb{N}$ – множина тригонометричних поліномів порядку не вище $s - 1$.

$\varphi_s(t) = \operatorname{sign} \sin st$, σ - точка абсолютного максимума або абсолютного мінімума функції $K * \varphi_s$.

$a_j(x)$, $b_j(x)$ – коефіцієнти Фур'є функції $x \in L_1$.

$E(W, I, \Phi) = \sup_{\substack{x \in W \\ y \in I(x)}} \|x - \Phi(y)\|_X$ –похибка методу відновлення Φ елементів класу W за інформацією I.

$E(W, I) = \inf_{\Phi} E(W, I, \Phi)$– оптимальна похибка відновлення елементів класу W за інформацією I.

$\mathcal{E}(W_1, W_2, I, \Phi) = \sup\limits_{\substack{x \in W_1, y \in W_2 \\ (\overline{a}, \overline{b}) \in I(x,y)}} |\langle x, y\rangle_H - \Phi(\overline{a}, \overline{b})|$– похибка методу відновлення Φ скалярного добутку на класах W_1 і W_2 за інформацією, що дається оператором I.

$\mathcal{E}(W_1, W_2, I) = \inf\limits_{\Phi} \mathcal{E}(W_1, W_2, I, \Phi)$–оптимальна похибка відновлення скалярного добутку на класах W_1 і W_2 за інформацією, що дається оператором I.

ВСТУП

Актуальність теми. Однією з основних задач математики є відновлення тих чи інших математичних об'єктів по неповній інформації. Так при відновленні функцій ми часто маємо неповну інформацію про функцію, наприклад, деяку кількість її коефіцієнтів Фур'є, чи її значення в деякій системі точок. Треба побудувати метод її наближення (відновлення), який використовує доступну інформацію, та дає найменшу похибку відновлення. Такі методи відновлення називають оптимальними для заданої інформації. Пошук найкращої інформації також відноситься до задач відновлення.

В теорії апроксимації і теорії оптимальних алгоритмів добре дослідженою є задача оптимального відновлення функцій, лінійних функціоналів, та лінійних операторів на різних класах функцій.

Задачі найкращого відновлення операторів виникають в трудах А. М. Колмогорова, А. Сарда [96], С. М. Нікольського [52], Дж. Кіфера [68] в середині XX сторіччя, а їх дослідження як окремого класу задач, починається в 1970-і роки в теорії наближення та в теорії інформаційної складності в роботах С. А. Смоляка [58], М. С. Бахвалова [22, 23, 24], О. Г. Марчука і К. Ю. Осипенка [47], М. Голомба і Х. Ф. Вайнбергера [65], С. А. Міккеллі та Т. Дж. Рівліна [73], А. А. Мелкмена і С. А. Міккеллі [76]. Систематичне викладення результатів задач оптимального відновлення операторів можна знайти, наприклад, в монографіях Дж. Трауба та Х. Вожьняковського [62],[104]; М. П. Корнійчука [39], Дж. Трауба, Г. Васильковського і Х. Вожьняковського [105]; Е. Новака [87]; А. Г. Вершульца [108]; Л. Пласкоти [90]; О. А. Женсикбаєва [36]; К. Ю. Осипенка [88].

Подальші результати, а також результати по відновленню за неточною інформацією можна знайти в [1, 2], [21], [25]-[30], [37, 38], [40], [42],

[43], [44], [45]-[51], [53]-[55], [60], [61], [63]-[64], [69]-[71], [74]-[88], [91]-[103], [106]-[110], та ін.

Систематичне дослідження задач оптимального відновлення білінійних функціоналів і операторів розпочав В. Ф. Бабенко в роботах [4, 6, 7, 8] у 1979, 1988, 1989 рр., ним був помічений тісний звязок між задачами обчислення n-поперечників за Колмогоровим, лінійних n-поперечників та задачами оптимального відновлення білінійних функціоналів та згорток функцій. Продовжив роботу в цьому напрямку В. Ф. Бабенко разом з О. О. Руденком. Результати опубліковано в 1991, 1992 роках у [9, 10, 11, 56].

Як видно, задачі оптимального відновлення лінійних і білінійних функціоналів і операторів дослідженні досить повно. Разом з тим до недавнього часу не було результатів по оптимальному відновленню n-лінійних функціоналів і операторів у випадку $n > 2$. Одержання таких результатів є цікавим з точки зору застосувань - вони можуть бути, наприклад, використані при відновленні зображень при різних типах пошкоджень. Тому тема дисертації є актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась відповідно загального плану досліджень кафедри математичного аналізу і теорії функцій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара та науково-дослідних тем ММФ-78-13 "Нерівності для похідних і екстремальні задачі в різних нормованих просторах" (номер держреєстрації 0114U000193); №1-221-10 «Оптимальне відновлення операторів на класах функцій однієї та багатьох змінних» (номер держреєстрації 0110U001282).

Мета і задачі дослідження. *Метою роботи* є знаходження найкращої лінійної інформації, яка задана точно або з похибкою, та найкращого методу її використання для відновлення лінійних, полілінійних функціоналів на різних класах функцій та множинах в гільбертових просторах, обчислення похибок відновлення та встановлення їх точності (неможливості покращення на заданих класах) при різних обмеженнях на об'єм інформації. *Метою роботи* також є знаходження найкращої лінійної інформації та найкращого методу її використання для відновлення згорток двох та більшої кількості функцій.

Об'єктом дослідження є білінійні та полілінійні функціонали, згортки двох та більшої кількості фунцкій; інформаційні оператори та фунціонали, за допомогою яких відновлюються функціонали та згортки; методи відновлення, які є функціями від інформаційних функціоналів.

Предметом дослідження є питання, пов'язані з:

1)пошуком оптимальної лінійної інформації, яка задана точно, для відновлення білінійних та полілінійних функціоналів, згорток двох та більшої кількості фунцкій;

2)пошуком оптимальних методів використання наявної інформації точної або неточної для відновлення елементів гільбертового простору, або їх скалярних добутків.

3)оцінкою похибки відновлення на різних класах і встановлення її точності.

Задачами дослідження є знаходження оптимальної лінійної інформації, оптимального методу її використання та обчислення похибки наближення білінійних та полілінійних функціоналів, згорток двох та більшої кількості фунцкій на різних класах функцій та множинах в конкретних та загальних гільбертових просторах. Розглядалися задачі відновлення за точною та заданою з похибкою інформацією.

Методи дослідження. В роботі використовуються загальні методи розв'язання екстремальних задач теорії наближення, загальні факти функціонального аналізу, теорії функцій, а також методи апроксимації індивідуальних функцій та функціональних класів.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати дисертації є новими і полягають в наступному.

Нехай H - сепарабельний дійсний або комплексний гільбертовий простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і ортонормованим базисом $e_1, e_2, ...$, $\hat{x}_k = (x, e_k)$. Для $j = 1, ..., n$ задамо послідовності комплексних чисел $g^j = \{g_k^j\}_{k=1}^{\infty}$.

Розв'язана задача оптимального відновлення полілінійних функціоналів виду

$$\Omega(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \; \hat{x}_{1k} ... \hat{x}_{nk}, \tag{1}$$

де $\{|f_k|\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно спадають, за оптимальною лінійною інформацією на класах, які задаються наступним чином

$$W_{p_j}^{g^j} = \left\{ x \in H : \sum_{k=1}^{\infty} |g_k^j| \; |\hat{x}_k|^{p_j} \leq 1 \right\}, \tag{2}$$

де $p_j \geq 1$ та послідовності $\{|g_k^j|\}_{k=1}^{\infty}$ не спадають.

У задачі по відновленню згортки n функцій за лінійною інформацією знайдено оптимальну лінійну інформацію, оптимальний метод її використання, оптимальну похибку відновлення на класах періодичних функцій $M_j = K_j * F_{p_j}$, що задаються згорткою ядра $K_j \in L_1$, яке не збільшує осциляцію, із функціями з F_{p_j} – одиничної кулі в L_{p_j}. Функції з класу M_j мають вигляд $x_j = a_j \mu_j + K_j * \psi_j$, де $a_j \in \mathbb{R}$, $\psi_j \in F_{p_j}$, $\psi_j \perp \mu_j$, $\mu_j = \mu_j(K_j) = 1$, якщо $\int\limits_0^{2\pi} K_j dt = 0$ і $\mu_j = \mu_j(K_j) = 0$, якщо $\int\limits_0^{2\pi} K_j dt \neq 0$, $j = 1, ..., n$. Відновлюються згортки n–функцій $x_j \in M_j$ виду

$$(x_1 * x_2 * ... * x_n)(\tau) = (x_1 * (x_2 * ... * x_n))(\tau) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} x_1(\tau - t_1 - ... - t_{n-1}) x_2(t_1) ... x_n(t_{n-1}) dt_1 dt_2 ... dt_{n-1}.$$

Нехай H_1 и H_2 – комплексні гільбертові простори, A – компактний оператор, $A : H_1 \to H_2$.

Розв'язана задача оптимального відновлення елементів класу $W^A = \{Ah \ : \ h \in H_1, \ \|h\|_{H_1} \leq 1\}$ в ситуації, коли інформація про перші n членів послідовності коефіцієнтів Фур'є елемента $x \in W^A$, відома з деякою похибкою.

Розв'язана задача оптимального відновлення скалярних добутків елементів $\langle x, y \rangle_{H_2}$ за неточною інформацією про співмножники, а саме, за неточно заданими наборами перших n коефіцієнтів Фур'є елементів $x \in W^A$ та $y \in W^B$.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертація має теоретичний характер. Результати дисертації можна використати для розв'язку теоретичних та прикладних задач, які потребують наближення білінійних, n-лінійних функціоналів або згорток n функцій за точною та неточною лінійною інформацією.

Отримані результати представляють самостійний науковий інтерес і можуть бути використані для подальших досліджень з теорії наближення, які проводяться у Інституті математики НАН України, Інституті прикладної математики і механіки НАН України, Київському, Дніпровському, Донецькому, Львівському, Одеському національних університетах.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку досліджень і постановки всіх задач, що розглядаються у дисертації, належать науковому керівникові професору В. Ф. Бабенку.

Результати, викладені у підрозділах 1.2, 3.2 отримано здобувачем одноосібно.

Для результатів, викладених у підрозділі 3.1, ідеї доведення належать професору В. Ф. Бабенку. Докладні доведення належать здобувачеві.

Результати, викладені у підрозділах 2.1 отримано здобувачем разом з В. Ф. Бабенком та О. О. Руденком (внесок кожного з співавторів складає 33%).

Результати, викладені у підрозділі 2.2 отримано здобувачем разом з О. О. Руденком (внесок кожного з співавторів складає 50%).

Результати, викладені у підрозділах 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 отримано здобувачем разом з В. Ф. Бабенком та Н. В. Парфінович (внесок кожного з співавторів складає 33%).

Апробація результатів дисертації. Результати, отримані у дисертації, були представлені на конференціях і наукових семінарах:

- Міжнародна математична конференція «Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування». Україна, Севастополь, 23 - 30 червня 2013 р.;
- Кримська міжнародна математична конференція «КММК-2013 КРОМШ». Україна, Автономна республіка Крим, Судак, 22 вересня - 4 жовтня 2013 р.;
- IX Міжнародна наукова конференція студентів і молодих вчених «Наука и образование - 2014». Казахстан, Астана, 11 квітня 2014 р.;
- Міжнародна наукова математична конференція «Теорія наближень і її застосування». Україна, Дніпропетровськ, 8 -11 жовтня 2015 р.;
- Міжнародна математична конференція «Теорія наближення функцій та її застосування». Україна, Слов'янськ. – 28 трав.-3 черв. 2017 р.;
- Всеукраїнська наукова математична конференція «Теорія наближень

і її застосування». Україна, Дніпро. – 3-5 жовтня 2019 р.;

- наукових семінарах з математичного аналізу та теорії функції на механіко-математичному факультеті Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара (керівник – доктор фізико-математичних наук, проф. В. П. Моторний);

- науковому семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник – доктор фізико-математичних наук, проф. А. С. Романюк).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано:

- у наукових журналах - 7 статтей [13, 14, 16, 18, 33, 35, 20], всі вони опубліковані у наукових фахових виданнях України, три статті [16, 18, 20] у науковому журналі, що входить до міжнародної наукометричної бази даних Scopus та на момент виходу публікацій відносився до видань з другого(Q2) або третього(Q3) квартилів;

- у збірниках тез доповідей всеукраїнських та міжнародних наукових конференцій - 6 тез [31, 15, 32, 17, 34, 19].

Структура і обсяг роботи. Дисертація загальним обсягом 137 сторінок машинописного тексту складається з анотації, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів основної частини, висновків і списку використаних джерел, який містить 110 найменувань. Кожний з її розділів розбитий на підрозділи, що нумеруються в межах розділу. Нумерація означень, лем, зауважень, теорем здійснюється у межах підрозділів, причому вони нумеруються незалежно.

Зміст роботи. У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету і задачі дослідження, визначено об'єкт та предмет дослідження, вказано методи, використані при проведенні досліджень, описано наукову новизну отриманих результатів, їх практичне значення, подано інформацію про апробацію результатів дисертації та публікації, описано структуру та зміст роботи.

В дисертаційній роботі задачі відновлення білінійних, n-лінійних функціоналів та згорток двох та n функцій розглядаються з загальної точки зору.

Нехай W_j - деякі множини. Кількість таких множин дорівнює 2 для білінійного випадку та n для n-лінійного. На їх декартовому добутку заданий оператор Ω, $\Omega : W_1 ... \times W_n \to Y$. Оператор Ω може бути білінійним чи n-лінійним функціоналом, тоді $Y = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$.

Нехай на лінійних оболонках $\mathrm{span(W_j)}$ множин W_j задані набори $T_j = (T_1, ..., T_{n_j})$ неперервних функціоналів

$$T_{i_j} : \mathrm{span(W_j)} \to \mathrm{K},$$

де $K = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$. Такі набори T_j будемо називати лінійною інформацію про $x \in W_j$. Кількість функціоналів в наборах може бути різною для різних множин W_j. Через N позначиму сумарну кількість функціоналів для відновлення Ω. Для білінійного випадку $N = n_1 + n_2$, де n_1 - кількість функціоналів в лінійній інформації про перший аргумент, n_2 - відповідно про другий.

Довільну функцію $F : K^N \to Y$ будемо називати методом відновлення Ω. Зауважимо, що ніяких припущень (наприклад, лінійності) відносно F не вимагається.

Якщо Ω - функціонал, тоді

$$R(x_1, ..., x_n; T_1, ..., T_n; F) = |\Omega(x_1, ..., x_n) - F(T_1(x_1), ..., T_n(x_n))| \,,$$

Якщо Ω - згортка функцій, тоді

$$R(x_1, ..., x_n; T_1, ..., T_n; F) = R(x_1, ..., x_n; T_1, ..., T_n; F; X) =$$

$$= ||(x_1 * ... * x_n)(t) - F(T_1(x_1), ..., T_n(x_n))(t)||_X,$$

де $||f||_X$ - норма в деякому просторі X.

$$R(W_1, ..., W_n; T_1, ..., T_n; F) = \sup_{\substack{x_j \in W_j, \\ j=1,...,n}} R(x_1, ..., x_n; T_1, ..., T_n; F), \qquad (3)$$

$$R_{m_1,...,m_n}(W_1, ..., W_n) = \inf_{T_1,...,T_n} \inf_F R(W_1, ..., W_n; T_1, ..., T_n; F) \qquad (4)$$

($\inf\limits_F$ береться по всім можливим функціям від N змінних, а $\inf\limits_{T_1,...,T_n}$ по всім можливим наборам функціоналів, які дають $(m_1, ..., m_n)$ інформацію про $x_1, ..., x_n$);

$$R_N(W_1, ..., W_n) = \inf_{m_1+m_2+...+m_n=N} R_{m_1,m_2,...,m_n}(W_1, ..., W_n). \qquad (5)$$

Величину (3) назвемо похибкою метода F відновлення Ω на множинах $W_1, ..., W_n$ за інформацією $T_1, ..., T_n$, величину (4) – оптимальною похибкою відновлення Ω на $W_1, ..., W_n$ за $(m_1, ..., m_n)$ – інформацією, і, нарешті, величину (5) – оптимальною похибкою відновлення Ω на $W_1, ..., W_n$ за інформацією сумарного об'єму N. Якщо існують $T_1, ..., T_n$ и F, які реалізують нижні межі в правій частині (4), тоді будемо їх називати оптимальною $(m_1, ..., m_n)$ інформацією і оптимальним методом її використання для відновлення Ω на $W_1, ..., W_n$.

Потрібно для заданих Ω, $W_1, ..., W_n$ і N або $m_1, ..., m_n$ знайти величини (5)(або (4)) , а також оптимальну інформацію об'єму N (або $(m_1, ..., m_n)$–інформацію) і оптимальний метод її використання.

Перший розділ дисертації присвячено постановкам основних задач дослідження та короткому огляду відомих результатів.

Другий розділ дисертації присвячено відновленню білінійних, полілінійних функціоналів за лінійною інформацією в лінійних нормованих та в конкретних функціональних просторах; знаходженню оптимальної лінійної інформації і найкращого метода її використання для відновлення білінійних, n-лінійних функціоналів; обчисленню похибки наближення на різних множинах.

Підрозділ 2.1 присвячено питанням відновлення n-лінійних функціоналів на множинах, у якості таких множин розглядаються класи елементів

$$W_{p_j}^{g^j} = \left\{ x \in H : \sum_{k=1}^{\infty} |g_k^j| \; |\hat{x}_k|^{p_j} \leq 1 \right\}, \; p_j \geq 1,$$

з сепарабельного гільбертового простору H над полем комплексних чисел з ортонормованим базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\hat{x}_k = (x, e_k)$, послідовності g^j, $j = 1, ..., n$, комплексних чисел $g^j = \{g_k^j\}_{k=1}^{\infty}$ такі, що послідовності $\{|g_k^j|\}_{k=1}^{\infty}$ не спадають. Будемо розглядати n-лінійні функціонали, які мають наступну властивість

$$\Omega(e_{k_1}, ..., e_{k_n}) =$$
$$= \begin{cases} f_k \in \mathbb{C} & \text{, якщо } k_1 = ... = k_n = k, \, k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{, в іншому випадку.} \end{cases} \tag{6}$$

Зрозуміло, що такі функціонали мають вид

$$\Omega(x_1, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \; \hat{x}_{1k} ... \hat{x}_{nk}.$$

Задача про оптимальне відновлення білінійних функціоналів за лінійною інформацією була поставлена у [4] В.Ф.Бабенком. Там також наведені перші результати по її розв'язанню. З приводу подальших результатів в цьому напрямку див. [7],[9],[10],[11],[12],[13].

Визначимо множини $M_j(T_j)$ так

$$M_j(T_j) = \left\{ x_j \in M_j : T_j(x_j) = 0 \right\}, j = 1, ..., n,$$

і нехай

$$M(T_j) := M_1 \times ... \times M_{j-1} \times M_j(T_j) \times M_{j+1} \times ... \times M_n, j = 1, ..., n,$$

де позначка $\times$ означає декартовий добуток.

Оцінку знизу для похибки методу F відновлення функционала Ω за інформацією $T_1, ..., T_n$ дає наступна лема.

Лема 2.1.1. *Для будь-яких* $T_1, ..., T_n$ *і методу відновлення* F

$$R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n; F) \geq$$
$$\geq \max\left\{ \sup_{(x_1,...,x_n)\in M(T_1)} |\Omega(x_1, ..., x_n)|, ..., \sup_{(x_1,...,x_n)\in M(T_n)} |\Omega(x_1, ..., x_n)| \right\}.$$

Для білінійного випадку лема 2.1.1 доведена В.Ф.Бабенком в [4].

Теорема 2.1.1. *Нехай задано* n*-лінійний функціонал* Ω*, який має властивість* (6)*, для якого послідовність* $\{|f_k|\}_{k=1}^{\infty}$ *монотонно спадає, і числа* $m_1, ..., m_n$*. Нехай також* $p_j \geq 1$ *і* $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j} = 1$*, тоді*

$$R_{m_1,...,m_n}(W_{p_1}^{g^1}, ..., W_{p_n}^{g^n}) = \frac{|f_{M+1}|}{|g_{M+1}^1|^{\frac{1}{p_1}} \cdot ... \cdot |g_{M+1}^n|^{\frac{1}{p_n}}},$$

де $M = \min\{m_1, ..., m_n\}$*. При цьому інформація про елементи* $x_j \in W_{p_j}^{g^j}$*,* $j = 1, ..., n$ *виду*

$$T_j(x_j) = ((x_j, e_1), ..., (x_j, e_{m_j})) = (\hat{x}_{j,1}, ..., \hat{x}_{j,m_j})$$

і метод

$$\widetilde{F}(x_{1,1}, ..., x_{1,m_1}, ..., x_{n,1} ..., x_{n,m_n}) = \sum_{k=1}^{M} f_k \, x_{1,k} ... x_{n,k}$$

її використання будуть оптимальними.

Підрозділ 2.2 присвячено питанням відновлення n-лінійних функціоналів на множинах $W_{p_s}^{g^s} = \left\{x \in H : \sum_{k=1}^{\infty} |g_k^s| \, |\hat{x}_k|^{p_s} \leq 1\right\}$, $p_s \geq 1$, $g^s, s = 1, ..., n,$ - послідовності комплексних чисел $g^s = \{g_k^s\}_{k=1}^{\infty}$.

Розглянемо n-лінійні функціонали наступного вигляду

$$\Omega(x_1, ..., x_n) = \sum_{k^1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k^n=1}^{\infty} f(e_{k^1}, ..., e_{k^n}) \, \hat{x}_{k^1} ... \hat{x}_{k^n} =$$

$$= \sum_{k^1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k^n=1}^{\infty} \frac{f(e_{k^1}, ..., e_{k^n})}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{k^s}|^{1/p_s}} \prod_{s=1}^{n} |g^s_{k^s}|^{1/p_s} \ \hat{x}_{k^1}...\hat{x}_{k^n} \tag{7}$$

Впорядкуємо числа $\frac{|f(e_{k^1},...,e_{k^n})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{k^s}|^{1/p_s}}$ за спаданням (вважаємо, що базиси e_{k^s} і послідовності g^s_k такі, що це можливо). Позначимо через $v_k \in \mathbb{N}^n$ їх індекси, а через $q_k(s) \in \mathbb{N}$ s-ту координату v_k. Таким чином $\frac{|f(e_{q_k(1)}...,e_{q_k(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_k(s)}|^{1/p_s}}$ не зростають при зростанні k. Нехай також $V_u := \bigcup\limits_{k=1}^{u} v_k$. Через $N(V_u, s)$ будемо позначати кількість різних елементів $q_k(s)$ при фіксованих u і s.

Основним результатом цього підрозділу є наступне твердження.

Теорема 2.2.1. *Нехай задано n-лінійний функціонал Ω виду* (2.10), $u \in \mathbb{N}$, $Q = 1, 2, ..., n$, $N = N(V_u, Q) - 1 \in \mathbb{N}$. *Нехай також* $p_j \geq 1$ *і* $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j} = 1$, *тоді*

$$R_{m_1,...,m_n}(W^{g^1}_{p_1}, ..., W^{g^n}_{p_n}) = \max_{(q_j(1),...,q_j(n)) \notin V_u} \frac{|f(e_{q_j(1)}, ..., e_{q_j(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_j(s)}|^{1/p_s}} =$$

$$= \frac{|f(e_{q_{u+1}(1)}, ..., e_{q_{u+1}(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_{u+1}(s)}|^{1/p_s}}.$$

При цьому інформація про елементи $x_j \in W^{g^j}_{p_j}$, $j = 1, ..., n$ *виду*

$$\widetilde{T}_j(x_j) = ((x_j, e_{q_1(j)}), ..., (x_j, e_{q_u(j)})) = (\hat{x}_{j,q_1(j)}, ..., \hat{x}_{j,q_u(j)})$$

і метод

$$\widetilde{F}(\hat{x}_{1,q_1(1)}, ..., \hat{x}_{1,q_u(1)}, ..., \hat{x}_{n,q_1(n)}..., \hat{x}_{n,q_u(n)}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{u} |f(e_{q_k(1)}, ..., e_{q_k(n)})| \ \hat{x}_{q_k(1)}...\hat{x}_{q_k(n)}$$

її використання буде оптимальним.

Третій розділ дисертації присвячено відновленню операторів типу згортки за лінійною інформацією в лінійних нормованих та в конкретних функціональних просторах; знаходженню оптимальної лінійної інформації і найкращого метода її використання для відновлення операторів типу згортки; обчисленню точного значення похибки на різних множинах.

Підрозділ 3.1 присвячено питанням відновлення згорткок на множинах, у якості таких множин розглядаються класи періодичних функцій $M_j = K_j * F_{p_j}$, що задаються згорткою ядра $K_j \in L_1$, із функціями з F_{p_j} – одиничної кулі в L_{p_j}. Функції з класу M_j мають вигляд $x_j = a_j\mu_j + K_j * \psi_j$, де $a_j \in \mathbb{R}$, $\psi_j \in F_{p_j}$, $\psi_j \perp \mu_j$, $j = 1, ..., n$.

Відновлюються згортки n–функцій $x_j \in M_j$

$$(x_1 * x_2 * ... * x_n)(\tau) = (x_1 * (x_2 * ... * x_n))(\tau) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} x_1(\tau - t_1 - ... - t_{n-1})x_2(t_1)...x_n(t_{n-1})dt_1dt_2...dt_{n-1}.$$

Задача про оптимальне відновлення згортки двох функцій з різних функціональних класів була розглянута у [8]. Там також наведені перші результати по її розв'язанню. Щодо подальших результатів в цьому напрямку див. [9].

Визначимо множини $M_j(T_j)$ так

$$M_j(T_j) = \{x_j \in M_j : T_j(x_j) = 0\}, j = 1, ..., n,$$

і нехай

$$M(T_j) := M_1 \times ... \times M_{j-1} \times M_j(T_j) \times M_{j+1} \times ... \times M_n, \quad j = 1, ..., n.$$

Відповідні результати містяться в наступних твердженнях. Нехай $p \in [1, \infty]$. Оцінку знизу для величини $R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n; \Phi; L_p)$, а, звідси, і величини $R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n; L_p)$, дає наступна лема.

Лема 3.1.1. *Нехай множини $M_1, \ldots, M_n$ опуклі і центрально-симетричні. Тоді для будь-яких наборів функціоналів $T_1, ..., T_n$ і будь-*

якого методу відновлення Φ

$$R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n; \Phi; L_p) \geq \max_{j=1,...,n} \sup_{(x_1,...,x_n) \in M(T_j)} \|(x_1 * ... * x_n)(\cdot)\|_{L_p}.$$

Нехай $d_N(M, C)$ позначає n-поперечник за Колмогоровим множини M у просторі C.

Теорема 3.1.1. *Нехай* $K_1, ..., K_n \in L_1$. *Тоді для будь-яких наборів функціоналів* $T_j = (T_{j,1}, ..., T_{j,m_j})$, $j = 1, ..., n$, $T_{j,l} : \mathrm{span}\,(K_j * F_1) \to \mathbb{R}$, $l = 1, ..., m_j$ *і будь-якого методу відновлення* Φ

$$R(K_1 * F_1, ..., K_n * F_1; T_1, ..., T_n; \Phi; L_1) \geq$$

$$\geq d_{\min\{m_1,...,m_n\}}((K_1 * ... * K_n)(-\cdot) * F_\infty, C).$$

Підрозділ 3.2 присвячено отриманню оцінок зверху відновлення згортки n функцій за лінійною інформацією на множинах 2π - періодичних функцій виду $x = a\mu + K * \psi$, де $K \in L_1$ і не збільшує осциляцію. Під ядрами, які не збільшують осциляцію будемо розуміти функції такі, що: K є CVD- ядро (і писати $K \in CVD$), якщо для довільних $a \in \mathbb{R}$, $\psi \in C$, $\psi \perp \mu(K)$, буде виконуватись нерівність $\nu(a\mu + K * \psi) \leq \nu(\psi)$, де $\nu(g)$– число змін знаку g на періоді.

Нехай

$$T_l{}^*(x_l) = (a_0(x_l), a_1(x_l), ..., a_{N-1}(x_l), b_1(x_l), ..., b_{N-1}(x_l)), l = 1, ..., n. \quad (8)$$

$$\Phi^*(T_1{}^*(x_1), ..., T_n{}^*(x_n))(t) = \sum_{j=-(s-1)}^{s-1} \alpha_j c_j(x_1)...c_j(x_n) e^{ijt}. \quad (9)$$

Основний результат міститься в наступній теоремі.

Теорема 3.2.1. *Нехай ядра* $K_1, ..., K_n$ *такі, що* $K_1 * ... * K_n \in CVD$, *нехай* $s \in \mathbb{N}$ *і нехай* $N = n(2s-1)$. *Тоді*

$$R_{n(2s-1)}(K_1 * F_1, ..., K_n * F_1; L_1) = R_{2s-1,...,2s-1}(K_1 * F_1, ..., K_n * F_1; L_1) =$$

$$= d_{2s-1}(K_1 * ... * K_n * F_\infty, C) = \|K_1 * ... * K_n * \varphi_s\|_C.$$

При цьому оптимальна інформація визначається рівністю (8), *а оптимальний метод її використання – рівністю* (9).

В *четвертому розділі* дисертації за допомогою компактного оператора A, $A : H_1 \to H_2$, і обмеженого оператора B, $B : H_1 \to H_2$, визначаються класи

$$W^A = \{Ag \ : \ \|g\|_{H_1} \le 1\}, \qquad W^B = \{Bh \ : \ \|h\|_{H_1} \le 1\},$$

розглядаються задачі оптимального відновлення елементів класу W^A за неточною інформацією та задачі відновлення скалярних добутків елементів класів W^A і W^B гільбертового простору H за неточною інформацією про співмножники.

У підрозділі 4.1 наводиться постановка задач відновлення за неточною інформацією.

Нехай задано банахів простір X, клас елементів $W \subset X$ і деяку (інформаційну) множину Y. Нехай також задано (інформаційне) відображення $I : W \to \mathcal{P}_0(Y)$, де $\mathcal{P}_0(Y)$ сукупність непорожніх підмножин множини Y. Будемо вважати, що, бажаючи отримати інформацію про елемент x, ми отримуємо деякий елемент множини $I(x)$.

Довільне відображення $\Phi : Y \to X$ будемо називати методом відновлення елементів множини W за заданою інформацією. Похибкою методу відновлення Φ на класі W за інформацією I називається величина

$$E(W, I, \Phi) = \sup_{\substack{x \in W \\ y \in I(x)}} \|x - \Phi(y)\|_X. \tag{10}$$

Величина

$$E(W, I) = \inf_{\Phi} E(W, I, \Phi) \tag{11}$$

називається похибкою оптимального відновлення елементів класу W за інформацією I. При цьому метод Φ^*, який реалізує точну нижню межу у (11) , називається оптимальним.

Нехай H - гільбертовий простір зі скалярним добутком $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Нехай W_1 і W_2 - два класи елементів простору H. Нехай також $I : H \times H \to \mathcal{P}_0(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)$ - деяке інформаційне відображення. Довільне відображення $\Phi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ будемо називати методом відновлення скалярного добутку. Величину

$$\mathcal{E}(W_1, W_2, I, \Phi) = \sup_{\substack{x \in W_1, y \in W_2 \\ (\overline{a}, \overline{b}) \in I(x,y)}} |\langle x, y \rangle_H - \Phi(\overline{a}, \overline{b})|$$

будемо називати похибкою методу відновлення Φ скалярного добутку на класах W_1 і W_2 за інформацією, що дається оператором I. Величину

$$\mathcal{E}(W_1, W_2, I) = \inf_{\Phi} \mathcal{E}(W_1, W_2, I, \Phi) \tag{12}$$

будемо називати оптимальною похибкою відновлення скалярного добутку на класах W_1 і W_2 за інформацією, що дається оператором I, а метод Φ^*, який реалізує inf у правій частині (12), оптимальним методом відновлення.

Задачу відновлення лінійних операторів у гільбертових просторах, коли інформація задана точно, було розглянуто в роботі С. А. Міккеллі та Т. Дж. Рівліна у 1977 р. У випадку, коли інформаційне відображення I має вигляд $Ix = i(x) + B$, де i є лінійний оператор, а B – куля деякого радіуса (яка задає похибку), відповідну задачу відновлення було розглянуто у роботі А. А. Мелкмена і С. А. Міккеллі 1979 р. Інший підхід до вивчення таких задач, який базується на стандартних принципах опуклої оптимізації, використовувався у роботі Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко 2002 р. При цьому у роботі А. А. Мелкмена і С. А. Міккеллі 1979 р. доведено, що серед оптимальних методів відновлення існує лінійний, а у роботі Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко у 2002 р. знайдені оптимальні методи відновлення у випадках, коли похибка задається у рівномірній метриці.

У підрозділі 4.2 отримано загальні оцінки знизу похибок оптимального відновлення. Основними результатом є наступні леми.

Лема 4.2.1. Припустимо, що знайдеться елемент $\tilde{x} \in W$ такий, що $-\tilde{x} \in W$ і $\theta_Y \in I(\tilde{x}) \cap I(-\tilde{x})$. Тоді для будь-якого метода Φ

$$E(W, I, \Phi) \geq \|\tilde{x}\|_X$$

і, отже,

$$E(W, I) \geq \|\tilde{x}\|_X.$$

Лема 4.2.2. Нехай задано класи W_1 і W_2 елементів гільбертова простору H та довільне інформаційне відображення $I : H \times H \to \mathcal{P}_0(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)$. Припустимо, що знайдуться елементи $\tilde{x} \in W_1$ і $\tilde{y} \in W_2$ такі, що

$$-\tilde{x} \in W_1 \quad \text{і} \quad (\theta, \theta) \in I(\tilde{x}, \tilde{y}) \cap I(-\tilde{x}, \tilde{y})$$

або

$$-\tilde{y} \in W_2 \quad \text{і} \quad (\theta, \theta) \in I(\tilde{x}, \tilde{y}) \cap I(\tilde{x}, -\tilde{y}).$$

Тоді для будь-якого методу відновлення $\Phi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

$$\mathcal{E}(W_1, W_2, I, \Phi) \geq |\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle_H|.$$

В підрозділі 4.3 наводиться необхідне канонічне представлення компактного оператора у гільбертовому просторі. Означається $s_n = \sqrt{\lambda_n}$, де λ_n власні числа оператора A^*A.

В підрозділі 4.4 доведено чотири теореми про відновлення за неточно заданою інформацією, які відрізняються способом задання інформації.

Розглянемо задачу відновлення класу W^A в ситуації, коли інформація про перші n членів послідовності $\{x_k\}$ коефіцієнтів Фур'є, відома з деякою похибкою, тобто замість значень $x_k,\ \ k = 1,\dots,n$, задано набір чисел a_k, які відрізняються від x_k на малу величину в тій або іншій метриці.

Як звичайно, через $l_p^n,\ (n \geq 1, 1 \leq p \leq \infty)$ будемо позначати лінійний простір векторів $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ з відповідною нормою $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{l_p^n}$.

Для невід'ємного ε через $B[\varepsilon, l_p^n]$ позначимо замкнену кулю у просторі l_p^n з центром у нулі та радіусом ε. У випадку, коли $n = 1$, замість $B[\varepsilon, l_p^n]$ будемо писати $B[\varepsilon]$.

Теорема 4.4.1.1. Нехай $A : H_1 \to H_2$ – компактний оператор і $n \in \mathbb{N}, I(x) = I_{\overline{\varepsilon}}^n(x) = (x_1,\dots,x_n) + B[\varepsilon_1]\times\dots\times B[\varepsilon_n], \overline{\varepsilon} = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Нехай s_k - $s-$числа оператора A. Якщо

$$1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k^2}{s_k^2} \geq 0,$$

то покладемо $m = n$. У протилежному випадку виберемо $m \in \mathbb{Z}_+,\ m \leq n$, так, щоб

$$1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k^2}{s_k^2} \geq 0 \quad \text{і} \quad 1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k^2}{s_k^2} - \frac{\varepsilon_{m+1}^2}{s_{m+1}^2} < 0. \tag{13}$$

Тоді

$$E(W^A; I_{\overline{\varepsilon}}^n)^2 = s_{m+1}^2 + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k^2 \left(1 - \frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}\right). \tag{14}$$

При цьому оптимальним методом відновлення є метод

$$\Phi_m^*(\overline{a}) = \sum_{k=1}^{m} a_k \left(1 - \frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}\right)\psi_k, \quad \overline{a} = (a_1, ..., a_m).$$

Теорема 4.4.1.2. Нехай $A : H_1 \to H_2$ – компактний оператор, $I(x) = I_{\varepsilon,2}^n(x) = (x_1,\dots,x_n) + B[\varepsilon; l_2^n]$. Тоді, якщо $\varepsilon < s_1$, то

$$E(W^A, I_{\varepsilon,2}^n) = \sqrt{s_{n+1}^2 + \varepsilon^2 \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_1^2}\right)}.$$

При цьому оптимальним методом відновлення є

$$\Phi_n^*(\overline{a}) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_k^2}\right)\psi_k.$$

Якщо $\varepsilon \geq s_1$, то $E(W^A, I^n_{\varepsilon,2}) = s_1$ і оптимальним методом відновлення є $\Phi^*_0(\overline{a}) = \theta$.

Теорема 4.4.3.1. Нехай $A : H_1 \to H_2$ – компактний оператор, $I(x) = I^n_{\varepsilon,\infty}(x) = (x_1, \ldots, x_n) + B[\varepsilon; l^n_\infty]$ і число $m \in \mathbb{Z}_+$, $m \leq n$, вибране як в теоремі 4.4.1.1. Тоді

$$E(W^A, I^n_{\varepsilon,\infty}) = \sqrt{s_n^2 + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{s^2_{m+1}}{s_k^2}\right)}.$$

При цьому оптимальним методом відновлення є метод

$$\Phi^*_m(\overline{a}) = \sum_{k=1}^{m} a_k \left(1 - \frac{s^2_{m+1}}{s_k^2}\right)\psi_k.$$

Введемо наступні позначення:

$$c_k^2 = \frac{\left(1 - \frac{s^2_{n+1}}{s^2_k}\right)^{\frac{p}{p-2}-1}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{s^2_{n+1}}{s^2_j}\right)^{\frac{p}{p-2}}\right)^{\frac{2}{p}}}, \qquad b_k^2 = \varepsilon^2 c_k^2, \ \ k = 1, ..., n.$$

Теорема 4.4.4.1. Нехай $I(x) = I^n_{\varepsilon,p}(x) = (x_1, \ldots, x_n) + B[\varepsilon; l^n_p]$, $2 < p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ і

$$\Phi^*_n(\overline{a}) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(1 - \frac{s^2_{m+1}}{s_k^2}\right)\psi_k, \quad \overline{a} = (a_1, ..., a_m).$$

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ і довільного $2 < p < \infty$

$$E(W^A; I^n_{\varepsilon,p})^2 \leq s^2_{n+1} + \varepsilon^2 \left(\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{s^2_{n+1}}{s^2_k}\right)^{\frac{p}{p-2}}\right)^{\frac{p-2}{p}}.$$

Якщо $\varepsilon > 0$ таке, що виконана наступна умова

$$\varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k^2}{s_k^2} \leq 1, \tag{15}$$

то

$$E(W^A; I^n_{\varepsilon,p})^2 = s^2_{n+1} + \varepsilon^2 \left(\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{s^2_{n+1}}{s^2_k}\right)^{\frac{p}{p-2}}\right)^{\frac{p-2}{p}}.$$

В підрозділі 4.5 розглянуто задачі відновлення скалярних добутків. Основними результатами є наступні чотири теореми.

Нехай $A : H_1 \to H_2$ – компактний оператор з канонічним зображенням:

$$Ag = \sum_k s_k \langle g, \phi_k \rangle_{H_1} \psi_k = \sum_k s_k g_k \psi_k,$$

де ϕ_n – власні вектори оператора A^*A, $\psi_k = \frac{1}{s_k} A\phi_k$.

Нехай також задано обмежений оператор $B : H_1 \to H_2$ виду

$$Bh = \sum_k q_k \langle h, \phi_k \rangle_{H_1} \psi_k = \sum_k q_k h_k \psi_k,$$

де $\{q_k\}$ - незростаюча послідовність додатних чисел. За допомогою цих операторів визначимо класи

$$W^A = \{Ag \ : \ \|g\|_{H_1} \le 1\}, \qquad W^B = \{Bh \ : \ \|h\|_{H_1} \le 1\}.$$

Розглянемо задачу оптимального відновлення скалярного добутку $\langle x, y \rangle_{H_2}$ на класах W^A і W^B за неточно заданими наборами перших n коефіцієнтів Фур'є елементів $x \in W^A$ та $y \in W^B$ за системою $\{\psi_k\}$, тобто за неточно заданими наборами чисел $\{s_k g_k\}_{k=1}^n$ та $\{q_k h_k\}_{k=1}^n$. Будемо розглядати цю задачу для інформаційних відображень наступного виду:

$$I_{\overline{\varepsilon}}^n(x, y) = \{(a, b) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : \ \ \forall k = 1, ..., n, \quad |x_k y_k - a_k b_k| \le \varepsilon_k\} \qquad i$$

$$I_{\varepsilon,p}^n(x, y) = \{(a, b) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : \|(x_1 y_1, ..., x_n y_n) - (a_1 b_1, ..., a_n b_n)\|_{l_p^n} \le \varepsilon\}.$$

Тут $\varepsilon, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ - невід'ємні числа та $1 \le p \le \infty$.

Теорема 4.5.1.1. Нехай $I_{\overline{\varepsilon}}^n(x, y)$. Для заданого $n \in \mathbb{N}$ покладемо $m = n$, якщо

$$1 - \sum_{k=1}^m \frac{\varepsilon_k}{s_k q_k} \ge 0.$$

У протилежному випадку виберемо $m \in \mathbb{Z}_+$ $(m \le n)$, виходячи з умов

$$1 - \sum_{k=1}^m \frac{\varepsilon_k}{s_k q_k} \ge 0 \quad \text{і} \quad 1 - \sum_{k=1}^m \frac{\varepsilon_k}{s_k q_k} - \frac{\varepsilon_{m+1}}{s_{m+1} q_{m+1}} < 0. \tag{16}$$

Тоді
$$E(W^A, W^B, I_{\overline{\varepsilon}}^n) = s_{m+1}q_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \left(1 - \frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_k q_k}\right).$$
При цьому оптимальним методом відновлення є
$$\Phi_m^*(\overline{a}, \overline{b}) = \sum_{k=1}^{m} a_k b_k \left(1 - \frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_k q_k}\right).$$

Теорема 4.5.2.1. Нехай $I_{\varepsilon,1}^n$. Якщо $\varepsilon < s_1 q_1$, то
$$E(W^A, W^B, I_{\varepsilon,1}^n) = s_{n+1}q_{n+1} + \varepsilon \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_1 q_1}\right).$$
При цьому оптимальним методом відновлення є
$$\Phi_n^*(\overline{a}, \overline{b}) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_1 q_1}\right).$$
Якщо ж $\varepsilon \geq s_1 q_1$, то
$$E(W^A, W^B, I_{\varepsilon,1}^n) = s_1 q_1 \quad \text{і} \quad \Phi_0^*(\overline{a}, \overline{b}) = \theta \quad \text{- оптимальний метод.}$$

Теорема 4.5.3.1. Нехай $I_{\varepsilon,\infty}^n$. Для заданого $n \in \mathbb{N}$ число $m \in \mathbb{Z}_+$, $m \leq n$, виберемо як в теоремі 4.5.1.1. Тоді
$$E(W^A, W^B, I_{\varepsilon,\infty}^n) = s_{m+1}q_{m+1} + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_k q_k}\right).$$
При цьому оптимальним методом відновлення є метод
$$\Phi_m^*(\overline{a}, \overline{b}) = \sum_{k=1}^{m} a_k b_k \left(1 - \frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_k q_k}\right).$$

Нехай $q = p/(p-1)$ і
$$c_k = \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_k q_k}\right)^{q-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_j q_j}\right)^q\right)^{\frac{1-q}{q}}.$$

Теорема 4.5.4.1. Нехай $I_{\varepsilon,p}^n$, $1 < p < \infty$,
$$\Phi_n^*(\overline{a}, \overline{b}) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_k q_k}\right),$$

тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$E(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,p}) \le \mathcal{E}(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,p}, \Phi^*_n) \le$$

$$\le s_{n+1}q_{n+1} + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_k q_k} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Якщо ε таке, що виконується умова

$$\varepsilon \sum_{k=1}^{n} (s_k q_k)^{-1} c_k \le 1, \tag{17}$$

то

$$E(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,p}) = \mathcal{E}(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,p}, \Phi^*_n) =$$

$$= s_{n+1}q_{n+1} + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_k q_k} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

і метод $\Phi^*_n(\overline{a}, \overline{b})$ є оптимальним.

Користуючись нагодою, висловлюю щиру подяку моєму науковому керівникові професору Владиславу Федоровичу Бабенку за поставлені задачі, цінні обговорення, за допомогу, постійну підтримку та плідну співпрацю під час роботи над дисертацією. Я також вдячна співавторам Наталії Вікторівні Парфінович та Олександру Олексійовичу Руденку за корисні поради та увагу до даної роботи.

Розділ 1

Задачі дослідження та огляд відомих результатів

1.1 Оптимальне відновлення білінійних функціоналів за лінійною інформацією

Нехай X, Y – лінійні простори над полем дійсних чисел, $M_1 \subset X$, $M_2 \subset Y$ – задані множини. Розглянемо білінійний (тобто лінійний по кожній змінній) оператор $\Omega(x, y)$ визначений на декартовому добутку лінійних оболонок $\mathrm{span}(M_i)$ множин M_i, $i = 1, 2$,

$$\Omega : \mathrm{span}(M_1) \times \mathrm{span}(M_2) \to \mathcal{T},$$

де $\mathcal{T}$– лінійний нормований простір над полем дійсних чисел. Нехай, далі, на лінійних оболонках множин M_i, задані лінійні інформаційні оператори

$$T_1 : \mathrm{span}(M_1) \to \mathcal{T}_1, \quad T_2 : \mathrm{span}(M_2) \to \mathcal{T}_2, \tag{1.1}$$

де $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ – деякі задані простори. Елементи $T_1(x)$ та $T_2(y)$ називаються інформацією про $x \in M_1$, $y \in M_2$.

Довільний оператор F (не обов'язково білінійний)

$$F : \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \to \mathcal{T} \tag{1.2}$$

будемо називати методом відновлення оператора Ω по інформації T_1, T_2. Нехай також

$$R(x,y;T_1,T_2;F) = ||\Omega(x,y) - F(T_1(x),T_2(y))||_{\mathcal{T}},$$

$$R(M_1,M_2;T_1,T_2;F) = \sup_{\substack{x\in M_1\\ y\in M_2}} R(x,y;T_1,T_2;F), \tag{1.3}$$

$$R_{\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2}(M_1,M_2) = R_{\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2}(M_1,M_2,\Omega) = \inf_{T_1,T_2} \inf_{F} R(M_1,M_2;T_1,T_2;F) \tag{1.4}$$

(тут $\inf\limits_{F}$ береться за всілякими методами відновлення виду (1.2), а $\inf\limits_{T_1,T_2}$ за всілякими інформаційними операторами виду (1.1)). Величину (1.3) назвем похибкою методу F відновлення оператора Ω на множинах M_1, M_2 за інформацією T_1, T_2, а величину (1.4) – оптимальною похибкою відновлення Ω на M_1, M_2 по інформації виду (1.1). У разі коли існують ${T_1}^*, {T_2}^*$ і F^* такі, що реалізують точні нижні межі в правій частині (1.4), то будемо називати їх оптимальною $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ – інформацією та оптимальним методом її використання для відновлення Ω на множинах M_1, M_2. У разі $\mathcal{T}_1 = \mathbb{R}^{n_1}$, $\mathcal{T}_2 = \mathbb{R}^{n_2}$ замість $R_{\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2}(M_1,M_2)$ будемо писати $R_{n_1,n_2}(M_1,M_2)$ і $(\mathbb{R}^{n_1},\mathbb{R}^{n_2})$ – інформацією будемо називати (n_1,n_2) – інформацією. Нехай

$$R_N(M_1,M_2) = \inf_{n_1+n_2=N} R_{n_1,n_2}(M_1,M_2) \tag{1.5}$$

Числа n_1^o і n_2^o, які реалізують inf у (1.5), будемо називати оптимальними об'ємами інформації про x і y, а оптимальну (n_1^o, n_2^o)– інформацію - оптимльною інформацією об'єма N про x і y.

Задача оптимального відновлення білінійних функціоналів за лінійною інформацією полягає в наступному. Потрібно для заданих Ω, M_1, M_2 і N або (n_f, n_g) знайти величини (1.5)(або (1.4)), а також оптимальну інформацію об'єму N (або (n_1,n_2)-інформацію) і оптимальний метод її використання. Задача про оптимальне відновлення білінійних функціоналів за лінійною інформацією в такій постановці була розглянута у [4]. Там також були наведені перші результати по її розв'язанню.

Для довільних $x \in M_1$, $y \in M_2$ розглянемо множини

$$V_1(x) = \{\widetilde{x} \in M_1 \mid T_1(\widetilde{x}) = T_1(x)\},$$

$$V_2(y) = \{\widetilde{y} \in M_2 \mid T_2(\widetilde{y}) = T_2(y)\},$$

$$U(x,y) = \{\Omega(\widetilde{x},\widetilde{y}) \mid \widetilde{x} \in V_1(x), \widetilde{y} \in V_2(y)\}.$$

Зазначимо, що $V_1(x)$, $V_2(y)$, $U(x,y)$ не порожні, оскільки $x \in V_1(x)$, $y \in V_2(y)$ для всіх елементів $x \in M_1$, $y \in M_2$.

Далі суттєву роль відіграватимуть радіус і діаметр множини $U(x,y)$. У наступних трьох лемах з'ясовується зв'язок між цими величинами і оптимальною похибкою відновлення білінійних операторів.

Означення 1.1.1. *Діаметром інформації T_1, T_2 для відновлення оператора Ω назвем величину $d(T_1,T_2,\Omega)$, що задається формулою*

$$d(T_1,T_2,\Omega) = \sup_{\substack{x\in M_1\\ y\in M_2}} \operatorname{diam}(U(x,y)) =$$

$$= \sup_{\substack{x\in M_1\\ y\in M_2}} \sup_{\substack{\widetilde{x}\in V_1(x)\\ \widetilde{y}\in V_2(y)}} ||\Omega(x,y) - \Omega(\widetilde{x},\widetilde{y})||_{\mathcal{T}}.$$

Означення 1.1.2. *Радіусом інформації T_1, T_2 для відновлення оператора Ω назвем величину $r(T_1,T_2,\Omega)$, що задається формулою*

$$r(T_1,T_2,\Omega) = \sup_{\substack{x\in M_1\\ y\in M_2}} \operatorname{rad}(U(x,y)) =$$

$$= \sup_{\substack{x\in M_1\\ y\in M_2}} \inf_{\alpha\in\mathcal{T}} \sup_{\substack{\widetilde{x}\in V_1(x)\\ \widetilde{y}\in V_2(y)}} ||\alpha - \Omega(\widetilde{x},\widetilde{y})||_{\mathcal{T}}.$$

Наступні леми 1.1.1-1.1.3 отримані В. Ф. Бабенком і О. О. Руденком (див. [57]) .

Лема 1.1.1. *Для довільних* Ω, T_1, T_2, M_1, M_2 *має місце рівність*

$$d(T_1,T_2,\Omega)=\sup_{\substack{x\in M_1\\ y\in M_2}}\ \sup_{\substack{x+h_x\in M_1\\ T_1(h_x)=0}}\ \sup_{\substack{y+h_y\in M_2\\ T_2(h_y)=0}}||\Omega(x,h_y)-\Omega(h_x,y)||_{\mathcal{T}}.$$

З неї випливає лема 1.1.2.

Лема 1.1.2. *Нехай задані довільні* Ω, T_1, T_2, M_1 *і центрально-симетрична множина* M_2. *Тоді має місце нерівність*

$$d(T_1,T_2,\Omega)\geq 2\sup_{x\in M_1}\ \sup_{\substack{h_y\in M_2\\ T_2(h_y)=0}}||\Omega(x,h_y)||_{\mathcal{T}}.$$

Похибку довільного методу F відновлення оператора Ω на довільних множинах M_1, M_2 з урахуванням того, що $\bigcup\limits_{x\in M_1}V(x)=M_1$, $\bigcup\limits_{y\in M_2}V(y)=M_2$, легко оцінити знизу через радіус інформації $r(T_1,T_2,\Omega)$.

Лема 1.1.3. *Нехай множини* M_1, M_2 *центрально - симетричні. Тоді для довільних* Ω, T_1, T_2, F

$$R(M_1,M_2,T_1,T_2,F)\geq\max\{\sup_{y\in M_2}\ \sup_{\substack{h_x\in M_1\\ T_1(h_x)=0}}||\Omega(h_x,y)||_{\mathcal{T}},\sup_{x\in M_1}\ \sup_{\substack{h_y\in M_2\\ T_2(h_y)=0}}||\Omega(x,h_y)||_{\mathcal{T}}\}.$$

У випадку, коли $\Omega(x,y)$ – білінійний функціонал у гільбертовому просторі лема 1.1.3 доведена в роботі [7] (див. лему 1).

У лемі 1.1.1 показано, що залежність діаметра інформації від операторів T_1, T_2 зводиться до залежності тільки від їх ядер $\mathrm{Ker}(T_1)$, $\mathrm{Ker}(T_2)$. Оператори $T_1^{'}$ і $T_1^{''}$ будемо називати еквівалентними, якщо $\mathrm{Ker}(T_1^{'})=\mathrm{Ker}(T_1^{''})$.

Лема 2.2 із роботи [62] стверджує, що інформаційний оператор T_1 зі скінченою ковимірністю ядра $n_1=\mathrm{codim}\ \mathrm{Ker}\ T_1$ еквівалентний оператору, що задається n_1 лінійно - незалежними функціоналами. Це призводить до наступного означення кардинальності (див.[62], стор.41).

Означення 1.1.3. *Назвемо кардинальністю інформації* T_1 *величину* $\mathrm{card}(T_1)$, *що задається формулою*

$$\mathrm{card}(T_1)=\mathrm{codimKer}T_1=\mathrm{dim}T_1(\mathrm{span}(M_1)).$$

Аналогічно

$$\mathrm{card}(T_2) = \mathrm{codimKer}T_2 = \mathrm{dim}T_2(\mathrm{span}(M_2)).$$

Означення 1.1.4. *n-поперечником за Колмогоровим (див., наприклад, в [39]) центрально-симетричної множини M в просторі X називається величина*

$$d_n(M, X) = \inf_{A_n} \sup_{\psi \in M} \inf_{x \in A_n} ||\psi - x||_X,$$

де $\inf$ *береться за всілякими підпросторами $A_n \subset X$ вимірності не вище n.*

Означення 1.1.5. *Лінійним n-поперечником центрально-симетричної множини M в просторі X називається величина*

$$\lambda_n(M, X) = \inf_{A_n} \inf_{Ax \subset A_n} \sup_{x \in M} ||x - Ax||_X,$$

де A – лінійний оператор, відображаючий X в A_n.

Надалі множину M_2 будемо означати так. Нехай Z – лінійний нормований простір, $A : Z \to Y$ – лінійний неперервний оператор, Ker$A$, ImA – ядро і образ оператора A відповідно. Тоді $Y = (\mathrm{Im}A) \oplus (\mathrm{Im}A)^{\perp}$, де $(\mathrm{ImA})^{\perp}$– алгебраїчне доповнення (ImA) в просторі Y. Аналогічно $Z = (\mathrm{Ker}A) \oplus (\mathrm{Ker}A)^{\perp}$. Зауважимо, що алгебраїчне доповнення означається, взагалі кажучи, неоднозначно. Надалі $(\mathrm{Im}A)^{\perp}$ і $(\mathrm{Ker}A)^{\perp}$ вважаємо фіксованими, не оговорюючи це особливо. Для заданих оператора A і підпростору $M \subset (\mathrm{ImA})^{\perp}$ таких, що

$$l = \mathrm{dimKer}A < \infty, m = \mathrm{dim}M < \infty \tag{1.6}$$

покладемо

$$M_2 = \{y_o + A(z) | y_o \in M, z \in (\mathrm{KerA})^{\perp}, ||z||_Z \leq 1\}. \tag{1.7}$$

Не обмежуючи загальності надалі будемо вважати, що для будь-якого $y_0 \in M$, $y_o \neq 0$ знайдеться $x \in M_1$ такий, що $\Omega(x, y) \neq 0$.

Наступна теорема 1.1.1 і теорема 1.1.2 отримані В. Ф. Бабенком і О. О. Руденком (див. [57]).

Теорема 1.1.1. *Нехай Y – рефлексивний простір, Y^* – спряжений до Y простір; M_1 – довільна центрально-симетрична множина, M_2 визначається формулою* (1.7)*; $B : \mathrm{span(M_1)} \to \mathrm{Y}^*$ – лінійний обмежений оператор; $\Omega(x, y) = (Bx, y) = (Bx)(y)$, $x \in M_1$, $y \in M_2$ – білінійний функціонал. Тоді для довільних інформаційних операторів T_1, T_2, де* $\mathrm{card}(T_1) = n_1$, $\mathrm{card}(T_2) = n_2 \geq m$ *визначено у* (1.6) *та множини P із* (1.8) *виконується нерівність*

$$d(T_1, T_2, \Omega) \geq d_{n_2-m+l}(P \oplus A^*BM_1, Z^*),$$

де A^* – спряжений до A оператор, $l = \mathrm{dimKer}A < \infty$.

Із теореми 1.1.1 випливає оцінка знизу для похибки довільного методу F відновлення білінійного функціоналу Ω

$$R(M_1, M_2, T_1, T_2, F) \geq d_{n_2-m+l}(P \oplus A^*BM_1, Z^*). \qquad (1.8)$$

У разі коли $X = Y = L_2$ – гільбертові простори, $M = \mathrm{Ker}A = P = \{0\}$ або $M = \mathrm{Ker}A = P = \{const\}$; M_1, M_2 – множини, що задаються згорткою ядер $K_1, K_2 \in L_2$ з функціями із одиничної кулі просторів L_p, L_q, $1 \leq p$, $q \leq \infty$ нерівність (1.8) доведено в теоремі 1 роботи [7].

Перейдемо до побудови оптимальної інформації та найкращого методу її використання. Вважаємо, що умови теореми 1.1.1 виконуються.

Нехай

$$H := \{h \in Z^* | (h, z) = 0 \text{ для кожного } z \in (\mathrm{Ker}A)^{\perp}\}, \qquad (1.9)$$

P-довільна центрально-симетрична множина, $P \subset Z^*$. Зауважимо, що так визначена множина P задовольняє умовам, що накладаються теоремою 1.1.1, так як підпростір H міститься в $H_k := \mathrm{span}\{L_1, ..., L_{n_1-m+l}\}$.

Нехай $n_2 \geq m$, $n_1 = n_2 + l$ і на лінійній оболонці $\mathrm{span}(P \oplus A^*BM_1) \subset Z^*$ множини $P \oplus A^*BM_1$ означено лінійні неперервні функціонали $\widetilde{\alpha}_1, ..., \widetilde{\alpha}_{n_1-m}$ такі, що для довільного $f \in A^*BM_1$

$$||f - \sum_{i=1}^{n_1-m} \widetilde{\alpha}_i(f)\widetilde{\phi}_i||_{Z^*} \leq \lambda_{n_1-m}(P \oplus A^*BM_1, Z^*), \tag{1.10}$$

де $\widetilde{\phi}_i$ можуть бути зображені у вигляді

$$\widetilde{\phi}_i = \sum_{j=1}^{n_2-m} \eta_{i,j}\phi_j + h_i,\ \eta_{i,j} \in \mathbb{R}, \phi_j \in Z^*, h_i \in H. \tag{1.11}$$

Виходячи з $\widetilde{\alpha}_i$ означимо функціонали $\alpha_i(x) := \widetilde{\alpha}_i(A^*Bx)$, $i = 1, ..., n_1 - m$. Розглянемо множину

$$\widetilde{M_1} = \mathrm{span}\{x \in M_1 |\ \text{знайдеться}\ y_o \in M\ \text{такий, що}\ \Omega(x, y) = 0\}.$$

Із (1.7) та наступного за ним припущення щодо M випливає, що $\dim\widetilde{M_1} = m$. Нехай $\widetilde{M_1} = \mathrm{span}\{\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_m\}$. Для довільного $x \in \mathrm{span}(M_1)$, $x = a_1\widetilde{x}_1 + ... + a_m\widetilde{x}_m + \widetilde{x}$, де $\Omega(\widetilde{x}, y_o) = 0$ для всіх $y_0 \in M$, означимо функціонали $\delta_i(x) = a_i$, $i = 1, ..., m$. Покладемо за визначенням

$$T_1^* = (\delta_1, ..., \delta_m,\ \alpha_1, ..., \alpha_{n_1-m}). \tag{1.12}$$

Зафіксуємо елементи $\mu_1, ..., \mu_m \in Y$ такі, що $M = \mathrm{span}\{\mu_1, ..., \mu_m\}$ ($(\widetilde{x}_i, \mu_j) = \delta_{i,j}$ – символ Кронекера), та для довільного $y = a_1\mu_1 + ... + a_m\mu_m + Az$, $z \in (\mathrm{Ker}A)^\perp$ визначимо функціонали $\beta_j(y) = a_j$, $j = 1, ..., m$; $\gamma_j(y) = (\phi_j, z)$, $j = 1, ..., n_2 - m$. Покладемо за визначенням

$$T_2^* = (\beta_1, ..., \beta_m,\ \gamma_1, ..., \gamma_{n_2-m}). \tag{1.13}$$

Задамо метод використання інформації (1.12), (1.13) наступною формулою

$$F^*(T_1^*(x), T_2^*(y)) = \sum_{i=1}^{m} \delta_i(x)\beta_i(y) + \sum_{i=1}^{n_1-m} \alpha_i(x) \sum_{j=1}^{n_2-m} \eta_{i,j}\gamma_j(y), \tag{1.14}$$

де числа $\eta_{i,j}$ означені в (1.11).

Теорема 1.1.2. *Нехай виконуються умови теореми 1.1.1,* $n_2 \geq m$*,* $n_1 \geq n_2 + l$ *і здійснюється* (1.10) *для* P *та* H *із* (1.9)*. Тоді якщо* $\lambda_{n_2-m+l}(P \oplus A^*BM_1, Z^*) = d_{n_2-m+l}(P \oplus A^*BM_1, Z^*)$*, то*

$$R_{n_1,n_2}(M_1, M_2) = d_{n_2-m+l}(P \oplus A^*BM_1, Z^*).$$

При цьому оптимальна (n_1, n_2) *– інформація задається рівностями* (1.12), (1.13)*, а оптимальний метод її використання задається формулою* (1.14)*.*

Можна замінити точну нерівність в (1.10) і точну рівність лінійного і Колмогорівського n-поперечників на асимптотичні або порядкові. Звичайно і в твердженні теореми замість точної рівності також буде асимптотична або порядкова рівність при $n \to \infty$.

Зрозуміло, що коли виконуються умови теорем 1.1.1 і 1.1.2, то ніяка інформація T_2 кардинальності $\mathrm{card}(T_2) < n_2$ не забезпечує таку ж саму точність відновлення на класах M_1, M_2, якщо $d_{n_2-m+l}(P \oplus A^*BM_1, Z^*) < d_{n_2-1-m+l}(P \oplus A^*BM_1, Z^*)$.

1.2 Оптимальне відновлення n-лінійних функціоналів за лінійною інформацією

Будемо вивчати задачу оптимізації наближеного обчислення n-лінійних функціоналів за лінійною інформацією у наступній постановці. Нехай X – лінійний нормований простір над полем комплексних або дійсних чисел, $M_1, ..., M_n \subset X$ опуклі центрально-симетричні множини. Припустимо, що на прямому добутку лінійних оболонок $\mathrm{span}(M_j)$ множин M_j задано n-лінійний оператор

$$\Omega : \prod_{j=1}^{n} \mathrm{span}(M_j) \to \mathcal{T},$$

де $\mathcal{T}$ – лінійний нормований простір над полем комплексних або дійсних чисел і для кожного $j = 1, ..., n$ на множині $\mathrm{span}(M_j)$ задано набор $T_j = (T_{j,1}, ..., T_{j,m_j})$ лінійних неперервних функціоналів

$$T_{j,l} : \mathrm{span}(M_j) \to \mathbb{R}, j = 1, ..., n, l = 1, ..., m_j.$$

Вектори

$$T_j(x_j) = (T_{j,1}(x_j), ..., T_{j,m_j}(x_j)),\ x_j \in M_j,\ j = 1, ..., n$$

будемо називати лінійною інформацією про x_1, ..., x_n типу $(m_1, ..., m_n)$ (або $(m_1, ..., m_n)$-інформацією). Довільну функцію

$$F = F(x_{1,1}, ..., x_{1,m_1}, ..., x_{n,1}, ..., x_{n,m_n})$$

від $m_1 + ... + m_n$ змінних будемо називати методом відновлення оператора $\Omega(\cdot, ..., \cdot)$ за $(m_1, ..., m_n)$-информацією. Нехай

$$R(x_1, ...x_n; T_1, ..., T_n; F) = ||\Omega(x_1, ..., x_n) - F(T_1(x_1), ..., T_n(x_n))||_{\mathcal{T}},$$

$$R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n; F) = \sup_{\substack{x_j \in M_j, \\ j=1,...,n}} R(x_1, ..., x_n; T_1, ..., T_n; F), \tag{1.15}$$

$$R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n) = \inf_{F} R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n; F), \tag{1.16}$$

$$R_{m_1,...,m_n}(M_1,...,M_n) = \inf_{T_1,...,T_n} R(M_1,...,M_n;T_1,...,T_n) \tag{1.17}$$

($\inf\limits_F$ береться по всім можливим функціям від $m_1 + ... + m_n$ змінних, а $\inf\limits_{T_1,...,T_n}$ по всім вожливим наборам функціоналів, які дають $(m_1,...,m_n)$–інформацію про $(x_1,...,x_n)$;

$$R_N(M_1,...,M_n) = \inf_{m_1+...+m_n=N} R_{m_1,...,m_n}(M_1,...,M_n). \tag{1.18}$$

Величину (1.15) назвемо похибкою методу F відновлення оператора Ω на множинах $M_1,...,M_n$ за інформацією $T_1,...,T_n$, величину (1.16) – оптимальною похибкою відновлення Ω на $M_1,...,M_n$ по заданій інформації типу $(m_1,...,m_n)$; величину (1.17) – оптимальной похибкою відновлення Ω на $M_1,...,M_n$ за $(m_1,...,m_n)$ - інформацією, і, нарешті, величину (1.18) – оптимальною похибкою відновлення Ω на $M_1,...,M_n$ за информацією сумарного об'єму N. Якщо при заданих $T_1,...,T_n$ існує F, який реалізує $\inf\limits_F$ в правій частині (1.16), тоді будемо називати F оптимальним методом використання данної інформації. Якщо існують $T_1,...,T_n$ і F, які реалізують нижні межі в правій частині (1.17), тоді будемо їх називати оптимальною $(m_1,...,m_n)$ - інформацією і оптимальним методом її які реалізують inf в (1.18), будемо називати оптимальними об'ємами інформації про $x_1,...,x_n$, а оптимальну $(m_1^0,...,m_n^0)$– інформацію – оптимальною інформацією об'єму N про $x_1,...,x_n$. Потрібно для заданих Ω, $M_1,...,M_n$ і N або $m_1,...,m_n$ знайти величини (1.18)(або (1.17)), а також оптимальну інформацію об'єму N (або $(m_1,...,m_n)$-інформацію) і оптимальний метод її використання.

Для довільних $x_j \in M_j$, $j = 1,...,n$ розглянемо множини

$$V_j = V_j(x_j) = \{\widetilde{x}_j | \widetilde{x}_j \in M_j\ ,\ T_j(\widetilde{x}_j) = T_j(x_j)\},$$

$$U = U(x_1,...,x_n) = \{\Omega(\widetilde{x}_1,...\widetilde{x}_n)\ |,\ \widetilde{x}_j \in V_j\}.$$

Означення 1.2.1. *Діаметром інформації* $T_1,...,T_n$ *для відновлення опе-*

ратора Ω *назвем величину* $d(T_1,...,T_n,\Omega)$, *що задається формулою*

$$d(T_1,...,T_n,\Omega)=\sup_{x_j\in M_j}\mathrm{diam}(U(x_1,...,x_n))=$$

$$=\sup_{\widetilde{x_j}\in V_j(x_j)}\sup_{x_j\in M_j}||\Omega(x_1,...,x_n)-\Omega(\widetilde{x_1},...,\widetilde{x_n})||_{\mathcal{T}}.$$

Означення 1.2.2. *Радіусом інформації* T_1,...,T_n *для відновлення оператора* Ω *назвем величину* $r(T_1,...,T_n,\Omega)$, *що задається формулою*

$$r(T_1,...,T_n,\Omega)=\sup_{x_j\in M_j}\mathrm{rad}(U(x_1,...,x_n))=$$

$$=\sup_{x_j\in M_j}\inf_{\alpha\in\mathcal{T}}\sup_{\widetilde{x_j}\in V_j(x_j)}||\Omega(\widetilde{x_1},...,\widetilde{x_n})-\alpha||_{\mathcal{T}}.$$

Для довільних $M_1,...,M_n$, Ω, $T_1,...,T_n$, F з означень похибки $R(M_1,...,M_n;T_1,...,T_n;F)$ та радіуса інформації $r(T_1,...,T_n,\Omega)$ випливає нерівність

$$R(M_1,...,M_n;T_1,...,T_n;F)\geq r(T_1,...,T_n,\Omega).$$

Наступні леми узагальнюють леми 1.1.2 та 1.1.3 для білінійного випадку на випадок більшої вимірності.

Лема 1.2.1. *Нехай задані довільні* Ω, T_1,...,T_n, M_1,..., M_n, $x_j\in M_j$, h_j *такі, що* $T_j(h_j)=0$ *і* $\widetilde{x}_j:=x_j-h_j\in M_j$. *Тоді має місце рівність*

$$d(T_1,...,T_n,\Omega)=\sup_{\substack{x_j\in M_j\\ \widetilde{x}_j\in M_j\ T_j(h_j)=0}}||\sum_{j=1}^{n}\Omega(\widetilde{x}_1,...,\widetilde{x}_{j-1},h_j,x_{j+1},...,x_n)||_{\mathcal{T}}.$$

Доведення. Для доведення зробимо в означенні 1.2.1 заміну змінних $x_1=\widetilde{x_1}+h_1$ і скористаємося n-лінійністю оператора Ω:

$$\Omega(x_1,...,x_n)-\Omega(\widetilde{x_1},...,\widetilde{x_n})=\Omega(\widetilde{x_1},x_2...,x_n)+\Omega(h_1,x_2,...,x_n)-\Omega(\widetilde{x_1},...,\widetilde{x_n}).$$

В першому доданку останнього виразу замінимо x_2 на $\widetilde{x_2}+h_2$. Отже

$$\Omega(x_1,...,x_n)-\Omega(\widetilde{x_1},...,\widetilde{x_n})=$$

$$=\Omega(\widetilde{x_1},\widetilde{x_2},x_3,...,x_n)+(\Omega(h_1,x_2,...,x_n)+\Omega(\widetilde{x_1},h_2,x_3,...,x_n))-\Omega(\widetilde{x_1},...,\widetilde{x_n}).$$

Продовжимо послідовно замінювати $x_j = \widetilde{x}_j + h_j$ для $j \leq n$. Отримаємо

$$\Omega(x_1, ..., x_n) - \Omega(\widetilde{x_1}, ..., \widetilde{x_n}) =$$
$$= \Omega(\widetilde{x_1}, ...\widetilde{x_n}) + \sum_{j=1}^{n} \Omega(\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_{j-1}, h_j, x_{j+1}, ..., x_n) - \Omega(\widetilde{x_1}, ..., \widetilde{x_n}) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \Omega(\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_{j-1}, h_j, x_{j+1}, ..., x_n).$$

Для доведення леми достатньо перейти в останній рівності до відповідних супремумів. Лема 1.2.1 доведена. З неї легко випливає лема 1.2.2.

Лема 1.2.2. *Нехай задані довільні* Ω, $T_1, ..., T_n$, $M_1, ..., M_n$ *і множина* M_j *є центрально-симетричною при деякому* j. *Тоді має місце нерівність*

$$d(T_1, ..., T_n, \Omega) \geq 2 \sup_{x_k \in M_k} \sup_{\substack{h_j \in M_j, \\ T_j(h_j)=0}} ||\Omega(x_1, ..., x_{j-1}, h_j, x_{j+1}, ...x_n)||_{\mathcal{T}}.$$

Доведення. В правій частині твердження леми 1.2.1 супремум береться за всілякими $h_k (k \neq j)$ такими, що $T_k(h_k) = 0$. Очевидно, що $h_k = 0$ задовольняє цим вимогам. Таким чином з леми 1.2.1 випливає наступна нерівність:

$$d(T_1, ..., T_n, \Omega) \geq ||\Omega(\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_{j-1}, h_j, x_{j+1}, ..., x_n)||_{\mathcal{T}}. \tag{1.19}$$

За умовою леми $x_j \in M_j$, $\widetilde{x}_j := x_j - h_j \in M_j$. Нехай $\widetilde{h_j} \in M_j$ і $T_j(\widetilde{h_j}) = 0$. Покладемо $x_j := \widetilde{h_j} \in M_j$, $\widetilde{x}_j := -\widetilde{h_j}$, завдяки центральній симетрії множини M_j, $\widetilde{x}_j \in M_j$; $h_j = x_j - \widetilde{x}_j = 2\widetilde{h_j}$. Отже

$$\Omega(\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_{j-1}, h_j, x_{j+1}, ..., x_n) = 2\Omega(\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_{j-1}, \widetilde{h_j}, x_{j+1}, ..., x_n).$$

Для доведення леми достатньо $\Omega(\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_{j-1}, h_j, x_{j+1}, ..., x_n)$ з останньої рівності підставити в (1.19) і перейти до відповідних супремумів. Лема 1.2.2 доведена.

1.3 Відновлення білінійних функціоналів в конкретних функціональних просторах

Нехай C і L_p , $1 \leq p \leq \infty$, – простори неперервних і відповідно сумовних в p-му ступені на $[0, 2\pi]$ (при $p < \infty$) або істотно обмежених (при $p = \infty$) 2π – періодичних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $|| \cdot ||_p$ – норма в L_p; F_p – одинична куля в L_p. Згортка функцій $K \in L_1$ (ядра згортки) та $\psi \in L_1$ означається формулою

$$K * \psi(\tau) = \int_0^{2\pi} K(\tau - t)\psi(t)dt.$$

Для заданого ядра K покладемо $\mu = \mu(K) = 1$, якщо $\int_0^{2\pi} K(t)dt = 0$ і $\mu = \mu(K) = 0$ у протилежному випадку. Якщо задані ядро K і множина $F \subset L_1$, то через $K * F$ означимо клас функцій виду $f = a\mu + K * \psi$, $a \in \mathbb{R}$, $\psi \in F$, $\psi \perp \mu$.

Будемо говорити, що K є CVD- ядро (і писати $K \in CVD$), якщо для довільних $a \in \mathbb{R}$, $\psi \in C$, $\psi \perp \mu(K)$, буде виконуватись нерівність $\nu(a\mu + K * \psi) \leq \nu(\psi)$, де $\nu(g)$– число змін знаку g на періоді. Для подальшого знадобляться деякі відомості про інтерполяцію "узагальненими сплайнами", що наведені в роботі [7]. Нехай задане CVD - ядро $K \in C$. Позначимо через $S_n(K)$ множину функцій виду $s(t) = a\mu + \sum_{i=1}^{2n} a_i K(t - \frac{i\pi}{n})$, $a, a_i^j \in \mathbb{R}$, $\mu \sum_{i=1}^{2n} a_i = 0$ (тут і далі $\mu = \mu(K)$). Елементи множини $S_n(K)$ будемо називати "узагальненими сплайнами". Неважко переконатися, що $\dim(S_n(K)) = 2n$.

Нехай $\phi_n(t) := sign \sin nt$ і $\beta + \frac{i\pi}{n}$ – нулі функції $K * \phi_n$. В класі сплайнів із $S_n(K)$ однозначно розв'язувана довільна інтерполяційна задача виду $s(\beta + \frac{i\pi}{n}) = y_i$, $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., 2n$. Через $s(f, t)$ позначимо сплайн із $S_n(K)$, що інтерполює в точках $\beta + \frac{i\pi}{n}$ функцію $f \in C$, а через $s_{n,j}(t)$ –

сплайн із $S_n(K)$ такий, що $s_{n,j}(\beta+\frac{i\pi}{n})=\delta_{i,j}$ ($\delta_{i,j}$ – символ Кронекера).

Зобразимо $s_{n,j}(t)$ у вигляді

$$s_{n,j}(t)=a^j\mu(K)+\sum_{i=1}^{2n}a_i^jK(t-\frac{i\pi}{n}), \tag{1.20}$$

де $a^j, a_i^j\in\mathbb{R}$, $\mu(K)\sum\limits_{i=1}^{2n}a_i^j=0$, $j=1,2,...,2n$.

Для $1\le p\le\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $n=1,2,...$ і довільного неперервного CVD-ядра K мають місце рівності

$$d_{2n}(K*F_\infty,L_p)=\lambda_{2n}(K*F_\infty,L_p)=$$

$$=\sup_{f\in K*F_\infty}||f-s_n(f)||_p=||K*\phi_n||_p, \tag{1.21}$$

$$d_{2n}(K*F_p,L_1)=\lambda_{2n}(K*F_p,L_1)=\sup_{f\in K*F_p}||f-s_n(f)||_1=||K*\phi_n||_p. \tag{1.22}$$

Перейдемо до задачі оптимального відновлення на класах

$$M_1=K_1*F_{p_1},\ \ M_2=K_2*F_{p_2};\ \ K_1,\ K_2\in CVD\cap L_2,$$

де $1\le p_1\le\infty$, $p_2=\infty$ або $p_1=\infty$, $1\le p_2\le\infty$. Будемо вважати, що білінійний функціонал $\Omega(x,y)$ має вигляд

$$\Omega(x,y)=\int\limits_0^{2\pi}(K_3*x)(t)y(t)dt,\ K_3\in\mathbb{L}_2,\ \int\limits_0^{2\pi}K_3(t)dt=1 \tag{1.23}$$

або

$$\Omega(x,y)=\int\limits_0^{2\pi}x(t)y(t)dt. \tag{1.24}$$

Означимо функції $\overline{K}_2:=K_2(-\cdot)*K_3$, $\overline{K}_1:=K_3*K_1$, якщо $\Omega(x,y)$ має вигляд (1.23), і $\overline{K}_2:=K_2(-\cdot)$, $\overline{K}_1:=K_1$, коли $\Omega(x,y)$ задається формулою (1.24). Тоді оператори A і A^*B із теорем 1.1.1 і 1.1.2 в задачі, що розглядається, мають вигляд

$$A\psi=K_2*\psi,\ \ A^*B=\overline{K}*x.$$

Розглянемо спочатку випадок $\mu = \mu(K_1) = \mu(K_2) = 1$. Зауважимо, що в силу зображення (1.20) для $K = \overline{K}_2 * K_1$ має місце співвідношення

$$\sum_{j=1}^{2n} s_{n,j}(t) = \sum_{j=1}^{2n} a^j + \sum_{i=1}^{2n} K(t - \frac{i\pi}{n}) \sum_{j=1}^{2n} a_i^j = \sum_{j=1}^{2n} a^j = 1.$$

З нього і очевидно співвідношення $s_{n,j+1}(t) = s_{n,j}(t - \frac{\pi}{n})$ виходить, що $a^j = \frac{1}{2n}$, $j = 1, ..., 2n$, і $s_{n,2n}(t) = 1 - \sum\limits_{j=1}^{2n-1} s_{n,j}(t)$. Покладемо $P = M = H = \{const\}$, $\widetilde{\phi}_i(t) := s_{n,i}(t)$, $h_i(t) \equiv \frac{1}{2n}$, $i = 1, ..., 2n$; $\phi_j(t) := s_{n,j}(t) - \frac{1}{2n}$, $j - 1, ..., 2n - 1$. Тоді, очевидно, $\widetilde{\phi}_i = \phi_i + h_i$, $i = 1, ..., 2n - 1$; $\widetilde{\phi}_{2n} = h_{2n} - \sum\limits_{j=1}^{2n-1} \phi_j$; співвідношення (1.11) виконується для

$$\eta_{i,j}(x) = \begin{cases} 1, & i = j = 1, ..., 2n - 1, \\ -1, & i = 2n, \;\; j = 1, .., 2n - 1, \\ 0, & \text{в інших випадках} \; . \end{cases} \tag{1.25}$$

Для $x \in M_1$, $y = y_o + Az \in M_2$ визначимо функціонали

$$\delta_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} x(t)dt, \quad \beta_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} y(t)dt, \tag{1.26}$$

$$\alpha_i(x) = \overline{K}_2 * x(\beta + \frac{i\pi}{n}) = A^* Bx(\beta + \frac{i\pi}{n}), \quad i = 1, ..., 2n, \tag{1.27}$$

де β таке саме, як і в означенні сплайнів $s_{n,i}$ в рівності (1.20);

$$\gamma_j(y) = \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{2n} a_i^j \overline{K}_1(t - \frac{i\pi}{n}) y(t)dt = \int_0^{2\pi} \phi_j(t) z(t)dt, \tag{1.28}$$

$j = 1, .., 2n - 1$, де a_i^j –коефіцієнти із (1.20).

Для так вибраних функціоналів і $\widetilde{\alpha}_i(f) = f(\beta + \frac{i\pi}{n})$, $i = 1, ..., 2n$ співвідношення (1.10) має місце в силу (1.21), (1.22). Інші умови теореми 1.1.2, очевидно, також виконуються.

У випадку $\mu = \mu(K_1) = \mu(K_2) = 0$ викладки спрощуються, оскільки достатньо покласти за визначенням $P = M = H = \{0\}$, $\widetilde{\phi}_i(t) = \phi_i(t) =$

$s_{n,i}(t)$, $h_i(t) \equiv 0$, $i = 1, ..., 2n$; $\alpha_i(x)$, $\gamma_i(y)$, $i = 1, ..., 2n$, визначити за формулами (1.27), (1.28) і скористатися теремою 1.1.2.

Таким чином із теореми 1.1.2 може бути отримана наступна теорема, яка доведена В. Ф. Бабенком в роботі [7].

Теорема 1.3.1. *Нехай* $n = 1, 2, ...$; K_1, K_2, $K_3 \in CVD \cap L_2$, $\int\limits_0^{2\pi} K(t)dt = 1$; $\mu = \mu(K_1) = \mu(K_2)$; $\Omega(x, y)$ *має вигляд* (1.23) *або* (1.24); $p_1 = \infty$ *і* $p_2 = p \in [1, \infty]$ *– довільне, або* $p_1 = p \in [1, \infty]$ *– довільне і* $p_2 = \infty$. *Тоді*

$$R_{2n+\mu,2n}(K_1 * Fp_1, K_2 * Fp_2) = R_{2n+1,2n}(K_1 * Fp_1, K_2 * Fp_2) =$$

$$= ||\overline{K}_2 * K_1 * \phi_n||_p.$$

При цьому у випадку $\mu = 0$ *оптимальна лінійна* $(2n, 2n)$- *інформація задається рівностями* (1.27), (1.28), $j = 1, ..., 2n$, *а найкращий метод її використання має вигляд*

$$F^*(T_1^*(x), T_2^*(y)) = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i(x)\gamma_i(y).$$

У випадку $\mu = 1$ *оптимальна лінійна* $(2n+1, 2n)$ - *інформація задається рівностями* (1.26) (1.27), (1.28), *а найкращий метод її використання має вигляд*

$$F^*(T_1^*(x), T_2^*(y)) = \delta_1(x)\beta_1(y) + \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i(x) \sum_{j=1}^{2n-1} \eta_{i,j}\gamma_j(y), \tag{1.29}$$

де числа $\eta_{i,j}$ *означені в* (1.25).

Нехай $B_r(t) = \frac{1}{\pi} \sum\limits_{m=1}^{\infty} m^{-r} cos(mt - \frac{\pi r}{2})$, $r = 1, 2, ...$ – функції Бернуллі; $B_r * F_p = W_p^r$ – клас 2π-періодичних функцій f, що мають локально абсолютно неперервну похідну $f^{(r-1)}$ ($f^{(0)} = f$) таку, що $||f^{(r)}||_p \leq 1$. І нехай $\phi_{n,r}$ – r-й періодичний інтеграл від ϕ_n, що має нульове середнє значення на періоді, тобто $\phi_{n,r} = B_r * \phi_n$.

Наслідок 1.3.1.([7], стор. 21). *Нехай n, p_1, p_2 такі як в теоремі 1.3.1; r_1; $r_2 = 1, 2, ...$; $\Omega(x, y) = \int\limits_0^{2\pi} x(t)y(t)dt$. Тоді*

$$R_{2n+1,2n}(W^{r_1}_{p_1}, W^{r_2}_{p_2}) = ||\phi_{n,r_1+r_2}||_p.$$

Зауважимо, що в разі $K = B_{r+1}$ введені вище "узагальнені сплайни"є звичайними періодичними сплайнами порядку r мінімального дефекту з вузлами $\Delta_n = \{\frac{i\pi}{n}\}_{i=1}^{2n}$.

Нехай $\omega(t)$ – опуклий вгору модуль неперервності (див., напр., [40], стор.155); $W^r H^\omega$, $r = 1, 2, ...$, означає клас 2π - періодичних функцій f, у яких $(r - 1)$-а похідна локально абсолютно неперервна і при всіх $t \in \mathbb{R}$

$$|f^{(r)}(t) - f^{(r)}(t + \delta)| \leq \omega(\delta), \quad \delta \geq 0.$$

Теорема 1.3.2. *Нехай n, r_1, $r_2 \in \mathbb{N}$; $\Omega(x, y)$ визначається формулою* (1.24). *Тоді для довільного опуклого вгору модуля неперервності $\omega(t)$*

$$R_{2n+1,2n}(W^{r_1}H^\omega, W^{r_2}_\infty) = d_{2n}(W^{r_1+r_2}H^\omega, L_1).$$

При цьому оптимальна інформація задається рівностями (1.26), (1.27), (1.28) *для $K_1 = B_{r_1+1}$, $K_2 = B_{r_2}$, а оптимальний метод її використання задається рівністю* (1.29).

Нехай $K(t)$ – неперервне CVD - ядро $\phi_n(t) = sgn\ sin\ nt$, σ – точка абсолютного максимуму або абсолютного мінімуму функції $K * \phi_n$. Тоді в силу теореми 4.1. із роботи [6] існує єдиний тригонометричний поліном $P_{n,\sigma}(t) = P_{n,\sigma}(K, t)$ порядку $n-1$, що інтерполює $K(t)$ в точках $\sigma + \frac{j\pi}{n}$, $j \in \mathbb{Z}$. Поліном $P_{n,\sigma}(t)$ (див. [6] (теореми 2.4, 4.2 і §5)) є поліномом найкращого L_1 - наближення для K і, з урахуванням роботи [89],

$$||K(t) - P_{n,\sigma}(t)||_{L_1} = ||K * \phi_n||_{L_\infty} = d_{2n-1}(K * F_\infty, L_\infty). \tag{1.30}$$

Теорема 1.3.3. *Нехай K_1, K_2, $K_3 \in L_2$; білінійний функціонал $\Omega(x, y)$ визначається формулою* (1.23) *або* (1.24); *$K := K_2(-\cdot) * K_3 * K_1$,* *якщо* $\Omega(x,y)$ *має вигляд* (1.23) *і* $K := K_2(-\cdot)*K_1$ *, якщо* $\Omega(x,y)$ *задається формулою* (1.24). *Тоді якщо* $K \in CVD$*, то для довільного* $n \in \mathbb{N}$

$$R_{2n-1,2n-1}(K_1 * F_\infty, K_2 * F_1) = d_{2n-1}(K * F_\infty, L_\infty) = ||K * \phi_n||_{L_\infty}.$$

При цьому інформація $T_1^*(x)$*,* $T_2^*(y)$*, що являє собою коефіцієнти Фур'є* $a_o(x), a_1(x), ..., a_{n-1}(x),\ \ b_1(x), ..., b_{n-1}(x)\ \ ;\ \ a_o(y), a_1(y), ..., a_{n-1}(y),$ $b_1(y), ..., b_{n-1}(y)$*, є оптимальною. Найкращий метод її використання може бути записаний у комплексній формі так*

$$F^*(T_1^*(x), T_2^*(y)) = 2\pi \sum_{\substack{j=-(n-1)\\ j\neq 0}}^{n-1} \frac{c_j(P_{n,\sigma}(K,\cdot))}{c_j(K_2(-\cdot) * K_1)} c_j(x) c_{-j}(y) + 2\pi A c_o(x) c_o(y),$$

де $P_{n,\sigma}(K,t)$ *– поліном такий же, як у* (1.30)*;* $A = 1$*, якщо* $\int\limits_0^{2\pi} K(t)dt = 0$ *і* $A = \frac{c_o(P_{n,\sigma}(K,\cdot))}{c_o(K_2(-\cdot)*K_1)}$ *в протилежному випадку.*

У випадку , коли $\Omega(x,y)$ задається формулою (1.24) теорема 1.3.3 доведена в [9].

Нехай для заданого $K \in CVD$, $n \in \mathbb{N}$ представимо $\overline{K} = K(-\cdot) * K$. Тоді функція $\overline{K}$ буде парною, а $K * \phi_n$ - непарною і, отже обертається в нуль в точках $\frac{j\pi}{n}$, $j \in \mathbb{Z}$. Оскільки $\overline{K} \in CVD$, то в класі сплайнів виду

$$S(t) = a\mu(\overline{K}) + \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j \overline{K}(t - \frac{j\pi}{n}),\ \ \mu(\overline{K}) \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j = 0, \qquad (1.31)$$

однозначно розв'язана інтерполяційна задача $S(\frac{j\pi}{n}) = a_j$, $a_j \in \mathbb{R}$ - довільні, $j = 1, ..., 2n$.

Через $\overline{s}_i(t)$ будемо позначати сплайни, вище означеного виду, що є фундаментальними для інтерполяції в точках $\frac{j\pi}{n}$. Тобто

$$\overline{s}_i(t) = a^i \mu(\overline{K}) + \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j^i \overline{K}(t - \frac{j\pi}{n}),\quad \mu(\overline{K}) \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j^i = 0, \qquad (1.32)$$

$\overline{s}_i(\frac{j\pi}{n}) = \delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Теорема 1.3.4. *Нехай* $K_1,\ K_2,\ K_3\ \in L_2$*; білінійний функціонал* $\Omega(x,y)$ *визначається формулою* (1.23) *або* (1.24)*;* $K := K_2(-\cdot) * K_3 * K_1$*,* $\overline{K}_2 := K_2(-\cdot) * K_3$*,* $\overline{K}_1 := K_1(-\cdot) * K_3(-\cdot) * K$*, якщо* $\Omega(x,y)$ *має вигляд* (1.23) *і* $K := K_2(-\cdot) * K_1$*,* $\overline{K}_2 := K_2(-\cdot)$*,* $\overline{K}_1 := K_1(-\cdot) * K$*, якщо* $\Omega(x,y)$ *задається формулою* (1.24)*. Тоді якщо* $K \in CVD$*, то для довільного* $n \in \mathbb{N}$

$$R_{2n+\mu,2n}(K_1 * F_2, K_2 * F_2) = d_{2n}(K * F_2, L_2) = 2\pi |c_n(K)|.$$

При цьому в разі $\mu(K) = 0$ *оптимальна* $(2n, 2n)$ *- інформація* $T_1^*(x),\ T_2^*(y)$ *має вигляд:*

$$\alpha_i(x) = \overline{K}_2 * x\left(\frac{i\pi}{n}\right), \quad i = 1, ..., 2n, \quad x \in K_1 * F_2,$$

$$\gamma_i(y) = \int\limits_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{2n} a_j^i \overline{K}_1\left(\frac{j\pi}{n} - t\right) y(t)dt, \quad i = 1, ..., 2n, \quad y \in K_2 * F_2,$$

де a_j^i *– коефіцієнти із* (1.32)*.*

Найкращий метод її використання задається формулою

$$F^*(T_1^*(x), T_2^*(y)) = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i(x)\gamma_i(y).$$

Якщо $\mu = \mu(K) = 1$*, то оптимальна лінійна* $(2n+1, 2n)$ *– інформація задається рівностями*

$$\delta_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{2\pi} x(t)dt, \quad \beta_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{2\pi} y(t)dt, \tag{1.33}$$

$$\alpha_i(x) = \overline{K}_2 * x\left(\frac{i\pi}{n}\right), \quad i = 1, ..., 2n, \tag{1.34}$$

$$\gamma_j(y) = \int\limits_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{2n} a_j^i \overline{K}_1\left(t - \frac{j\pi}{n}\right) y(t)dt, \quad j = 1, .., 2n-1, \tag{1.35}$$

де a_j^i *–коефіцієнти із* (1.32), *а оптимальний метод її використання задається рівністю*

$$F^*(T_1^*(x), T_2^*(y)) = \delta_1(x)\beta_1(y) + \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i(x) \sum_{j=1}^{2n-1} \eta_{i,j}\gamma_j(y),$$

де числа $\eta_{i,j}$ *означені в* (1.25).

У випадку, коли $\Omega(x, y)$ задається формулою (1.24) теорема 1.3.4 доведена в [10]. В ситуації, коли K, K - ядра, що означаються диференціальними операторами із сталими дійсними коефіцієнтами, теорема 1.3.4 доведена в роботі [11]. Теореми 1.3.1 - 1.3.4 належать В. Ф. Бабенку і О. О. Руденку і представлені в [57].

1.4 Відновлення згорток 2π-періодичних функцій

Поняття і означення, що використовуються далі, введені в параграфі 1.3.

Нехай L_p, $1 \le p \le \infty$, – простори 2π-періодичних функцій $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з відповідними нормами $\| \cdot \|_{L_p}$. Нехай також $M_1, M_2 \subset L_1$ – деякі класи функцій; $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$;

Цей параграф присвячений оптимальному відновленню на класах 2π - періодичних функцій операторів виду

$$(x_1 * x_2)(\tau) = \int\limits_0^{2\pi} x_1(\tau - t)x_2(t)dt \tag{1.36}$$

— згортка двох функцій x_1 і x_2.

Будемо припускати, що для $j = 1, 2$ на множинах $\mathrm{span}(M_j)$ задані набори T_j, $T_j = (T_{j,1}, T_{j,2}, ..., T_{j,m_j})$ лінійних неперервних функціоналів

$$T_{j,l} : \mathrm{span}(M_j) \to \mathbb{R}, \;\; l = 1, ..., m_j.$$

Вектори

$$T_j(x_j) = (T_{j,1}(x_j), ..., T_{j,m_j}(x_j)) \in \mathbb{R}^{m_j}, \; x_j \in M_j, \;\; j = 1, 2$$

будемо називати лінійною інформацією про x_1, x_2 типу (m_1, m_2) (або (m_1, m_2)-інформацією). Довільне відображення

$$\Phi : \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \to L_p$$

назвемо методом відновлення згортки $x_1 * x_2$ по (m_1, m_2)- інформації у просторі L_p.

Нехай

$$R(x_1, x_2; T_1, T_2; \Phi)(t) = (x_1 * x_2)(t) - \Phi(T_1(x_1), T_2(x_2))(t),$$

$$R(M_1, M_2; T_1, T_2; \Phi; L_p) = \sup_{\substack{x_j \in M_j, \\ j=1,2}} \|R(x_1, x_2; T_1, T_2; \Phi)(\cdot)\|_{L_p}, \tag{1.37}$$

$$R(M_1, M_2; T_1, T_2; L_p) = \inf_{\Phi} R(M_1, M_2; T_1, T_2; \Phi; L_p), \tag{1.38}$$

$$R_{m_1,m_2}(M_1, M_2; L_p) = \inf_{T_1,T_2} R(M_1, M_2; T_1, T_2; L_p) \tag{1.39}$$

($\inf\limits_{\Phi}$ береться по всім можливим методам відновлення, а $\inf\limits_{T_1,T_2}$ — по всім можливим наборам функціоналів, які дають (m_1, m_2)- інформацію про (x_1, x_2);

$$R_N(M_1, M_2; L_p) = \inf_{m_1+m_2=N} R_{m_1,m_2}(M_1, M_2; L_p). \tag{1.40}$$

Величину (1.37) назвемо похибкою методу Φ відновлення згортки 2-х функцій на класах M_1, M_2 за інформацією T_1, T_2 у просторі L_p; величину (1.38) – оптимальною похибкою відновлення $x_1 * x_2$ на класах M_1, M_2 за заданою інформацією типу (m_1, m_2); величину (1.39) – оптимальною похибкою відновлення $x_1 * x_2$ на M_1, M_2 за (m_1, m_2) - інформацією; і, нарешті, величину (1.40) – оптимальною похибкою відновлення $x_1 * x_2$ на M_1, M_2 за інформацією сумарного об'єму N.

Якщо при заданих T_1, T_2 існує метод Φ^*, що реалізує $\inf\limits_{\Phi}$ в правій частині (1.38), тоді будемо називати Φ^* оптимальним методом використання даної інформації.

Якщо існують T_1^*, T_2^*, які реалізують нижню межу в правій частині (1.39), тоді будемо їх називати оптимальною (m_1, m_2) - інформацією для відновлення $x_1 * x_2$ на M_1, M_2 у просторі L_p.

Числа m_1^0, m_2^0, які реалізують inf (1.40), будемо називати оптимальними об'ємами інформації про x_1, x_2, а оптимальну (m_1^0, m_2^0) - інформацію – оптимальною інформацією сумарного об'єму N про x_1, x_2.

Будемо вивчати наступну задачу оптимального відновлення згортки 2-х-функцій за лінійною інформацією про функціїї, що згортаються.

Нехай задані класи функцій M_1, M_2 і $p \in [1, \infty]$, $N \in \mathbb{N}$. Потрібно знайти величину (1.40), оптимальні об'єми m_1^*, m_2^* інформації ($m_1^* + m_2^* = N$), оптимальну (m_1^*, m_2^*)-інформацію T_1^*, T_2^*, а також оптимальний метод

Φ^* її використання.

Похибку відновлення будемо оцінювати в метриці L_∞.

Теорема 1.4.1.(див. [9]). *Нехай* $K_1,\ K_2 \in L$, $n \in \mathbb{N}$. *Тоді якщо* $K := K_2 * K_1$ *є* CVD *- ядром, то інформація* $T_1^*(x_1)$, $T_2^*(x_2)$, *що являє собою коефіцієнти Фур'є* $a_o(x_1), a_1(x_1), ..., a_{n-1}(x_1)$, $b_1(x_2), ..., b_{n-1}(x_2)$ *функцій* $x_1 \in K_1 * F_\infty$, $x_2 \in K_2 * F_1$ *є оптимальною для відновлення оператора* (1.36). *Найкращий метод її використання може бути записаний в комплексній формі так*

$$\Phi^*(T_1^*(x_1), T_2^*(x_2)) = \Phi^*(T_1^*(x_1), T_2^*(x_2), t) =$$

$$= 2\pi \sum_{\substack{j=-(n-1)\\ j\neq 0}}^{n-1} \frac{c_j(P_{n,\sigma}(K,\cdot))}{c_j(K_2 * K)} c_j(x_1) c_j(x_2) e^{ijt} + 2\pi A c_o(x_1) c_o(x_2), \qquad (1.41)$$

де $P_{n,\sigma}(K,t)$ *– поліном такий же, як у* (1.30) *для* $K := K_1 * K_2$; $A = 1$, *якщо* $\int\limits_0^{2\pi} K(t)dt = 0$ *і* $A = \frac{c_o(P_{n,\sigma}(K,\cdot))}{c_o(K_2(-\cdot)*K_1)}$ *в протилежному випадку. При цьому*

$$R_{2n-1,2n-1}(K_1 * F_\infty, K_2 * F_1, L_\infty) = d_{2n-1}(K * F_\infty, L_\infty) = ||K * \phi_n||_{L_\infty}.$$

Нехай

$$F_n(f,t) = \frac{a_o(f)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j (a_j(f))\ cosjt + b_j(f)\ )sinjt)$$

- метод Фавара, що реалізує найкраще наближення класу $W_\infty^{r_1+r_2}$ тригонометричними поліномами в просторі L_∞ (див., напр., [39], стор.109).

Наслідок 1.4.1. *Нехай* $r_1,\ r_2,\ n \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$R_{2n-1,2n-1}(W_\infty^{r_1}, W_1^{r_2}) = d_{2n-1}(W_\infty^{r_1+r_2}, L_\infty) = \frac{K_{r_1+r_2}}{n^{r_1+r_2}},$$

де K_r *– константи Фавара. При цьому коефіцієнти Фур'є* $a_o(x_1), a_1(x_1), ..., a_{n-1}(x_1)$, $b_1(x_1), ..., b_{n-1}(x_1)$; $a_o(x_2), a_1(x_2), ..., a_{n-1}(x_2)$, $b_1(x_2), ..., b_{n-1}(x_2)$ *функцій* $x_1,\ x_2$ *задають оптимальну* $(2n-1, 2n-1)$ -

інформацію, а найкращий метод її використання має вигляд

$$\Phi^*(T_1^*(x_1), T_2^*(x_2), t) =$$

$$= \pi(\frac{a_o(x_1)a_o(x_2)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j((a_j(x_1)a_j(x_2) - b_j(x_1)b_j(x_2))cosjt +$$

$$+(a_j(x_1)b_j(x_2) - b_j(x_1)a_j(x_2))sinjt)).$$

Згортка n-функцій є природнім узальненням згортки двох функцій. Результати по відновленню згорток n-функцій наведні в розділі 3, або в [18, 33, 17].

Розділ 2

Задачі відновлення n-лінійних функціоналів за лінійною інформацією

2.1 Оптимізація наближеного відновлення n-лінійних функціоналів за лінійною інформацією на класах $W_{p_j}^{g^j}$

Будемо вивчати задачу оптимізації наближеного обчислення n-лінійних функціоналів за лінійною інформацією у наступній постановці. Нехай X – лінійний нормований простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел, $M_1, ..., M_n \subset X$ центрально-симетричні множини. Припустимо, що на прямому добутку лінійних оболонок $\operatorname{span}(M_j)$ множин M_j задано n-лінійний функціонал

$$\Omega : \prod_{j=1}^{n} \operatorname{span}(M_j) \to \mathbb{C}$$

і для кожного $j = 1, ..., n$ на множині $\operatorname{span}(M_j)$ задано набор
$T_j = (T_{j,1}, ..., T_{j,m_j})$ лінійних неперервних функціоналів

$$T_{j,l} : \operatorname{span}(M_j) \to \mathbb{C}, j = 1, ..., n, l = 1, ..., m_j.$$

Вектори

$$T_j(x_j) = (T_{j,1}(x_j), ..., T_{j,m_j}(x_j)),\ x_j \in M_j,\ j = 1, ..., n$$

будемо називати лінійною інформацією про x_1, x_2,..., x_n типу $(m_1, ..., m_n)$

(або $(m_1, ..., m_n)$-інформацією). Довільну комплекснозначну функцію

$$F = F(x_{1,1}, ..., x_{1,m_1}, x_{2,1}, ..., x_{2,m_2}, ..., x_{n,1}, ..., x_{n,m_n})$$

від $m_1 + ... + m_n$ змінних будемо називати методом відновлення функціоналу $\Omega(\cdot, ..., \cdot)$ за $(m_1, ..., m_n)$-информацією. Нехай:

$$R(x_1, ...x_n; T_1, ..., T_n; F) = \Omega(x_1, ..., x_n) - F(T_1(x_1), ..., T_n(x_n)),$$

$$R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n; F) = \sup_{\substack{x_j \in M_j,\\ j=1,...,n}} |R(x_1, ..., x_n; T_1, ..., T_n; F)|, \qquad (2.1)$$

$$R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n) = \inf_F R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n; F), \qquad (2.2)$$

$$R_{m_1,...,m_n}(M_1, ..., M_n) = \inf_{T_1,...,T_n} R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n) \qquad (2.3)$$

($\inf\limits_F$ береться по всім можливим функціям від $m_1 + ... + m_n$ змінних, а $\inf\limits_{T_1,...,T_n}$ по всім можливим наборам функціоналів, які дають $(m_1, ..., m_n)$–інформацію про $(x_1, ..., x_n)$;

$$R_N(M_1, ..., M_n) = \inf_{m_1+...+m_n=N} R_{m_1,...,m_n}(M_1, ..., M_n). \qquad (2.4)$$

Величину (2.1) назвемо похибкою методу F відновлення функціонала Ω на множинах $M_1, ..., M_n$ за інформацією $T_1, ..., T_n$, величину (2.2) – оптимальною похибкою відновлення Ω на $M_1, ..., M_n$ по заданій інформації типу $(m_1, ..., m_n)$; величину (2.3) – оптимальной похибкою відновлення Ω на $M_1, ..., M_n$ за $(m_1, ..., m_n)$ - інформацією, і, нарешті, величину (2.4) – оптимальною похибкою відновлення Ω на $M_1, ..., M_n$ за информацією сумарного об'єму N. Якщо при заданих $T_1, ..., T_n$ існує F, який реалізує $\inf\limits_F$ в правій частині (2.2), тоді будемо називати F оптимальним методом використання данної інформації. Якщо існують $T_1, ..., T_n$ і F, які реалізують нижні межі в правій частині (2.3), тоді будемо їх називати оптимальною $(m_1, ..., m_n)$ - інформацією і оптимальним методом її використання для відновлення Ω на $M_1, ..., M_n$. Числа $m_1^0, ..., m_n^0$, які реалізують inf в (2.4), будемо називати оптимальними об'ємами інформації про $x_1, ..., x_n$, а оптимальну $(m_1^0, ..., m_n^0)$– інформацію – оптимальною інформацією об'єму N про $x_1, ..., x_n$. Потрібно для заданих Ω, $M_1, ..., M_n$ і N або $m_1, ..., m_n$ знайти величини (2.4)(або (2.3)), а також оптимальну інформацію об'єму N (або $(m_1, ..., m_n)$-інформацію) і оптимальний метод її використання.

Задача про оптимальне відновлення білінійних функціоналів за лінійною інформацією була поставлена у [4] В.Ф.Бабенко. Там також наведені перші результати по її розв'язанню. З приводу подальших результатів в цьому напрямку див. [7],[9],[10],[11],[12],[13].

Визначимо множини $M_j(T_j)$ так

$$M_j(T_j) = \{x_j \in M_j : T_j(x_j) = 0\}, \quad j = 1, ..., n,$$

і нехай

$$M(T_j) := M_1 \times ... \times M_{j-1} \times M_j(T_j) \times M_{j+1} \times ... \times M_n, \quad j = 1, ..., n,$$

де позначка $\times$ означає декартовий добуток.

Оцінку знизу для похибки методу F відновлення функціоналу Ω за інформацією $T_1, ..., T_n$ дає наступна лема.

Лема 2.1.1. *Для будь-яких $T_1, ..., T_n$ і методу відновлення F*

$$R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n; F) \geq$$

$$\geq \max \left\{ \sup_{(x_1,...,x_n) \in M(T_1)} |\Omega(x_1, ..., x_n)|, ..., \sup_{(x_1,...,x_n) \in M(T_n)} |\Omega(x_1, ..., x_n)| \right\}.$$

Для білінійних функціоналів лема доведена в [4].

Доведення. Доведемо, що

$$R(M_1, ..., M_n; T_1, .., T_n; F) \geq \sup_{(x_1,...,x_n) \in M(T_n)} |\Omega(x_1, ..., x_n)|.$$

Дійсно

$$R(M_1, ..., M_n; T_1, .., T_n; F) \geq$$

$$\geq \sup_{(x_1,...,x_n)\in M(T_n)} |\Omega(x_1,...,x_n) - F(T_1(x_1), T_2(x_2), ..., T_{n-1}(x_{n-1}), 0)| =$$

$$= \sup_{(x_1,...,x_n)\in M(T_n)} \max\{|\Omega(x_1,...,x_n) - F(T_1(x_1), T_2(x_2), ..., T_{n-1}(x_{n-1}), 0)|,$$

$$| - \Omega(x_1,...,x_n) - F(T_1(x_1), T_2(x_2), ..., T_{n-1}(x_{n-1}), 0)|\} \geq$$

$$\geq \sup_{(x_1,...,x_n)\in M(T_n)} |\Omega(x_1,...,x_n)|.$$

Аналогічно доводиться, що для довільного $j = 1, ..., n-1$

$$R(M_1,...,M_n; T_1,..,T_n; F) \geq \sup_{(x_1,...,x_n)\in M(T_j)} |\Omega(x_1,...,x_n)|.$$

Звідси і випливає твердження леми.

Нехай H- сепарабельний гільбертовий простір над полем комплексних чисел; $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормований базис у просторі H; $\hat{x}_k = (x, e_k)$. За допомогою послідовностей $g^j, j = 1, ..., n$, комплексних чисел $g^j = \{g_k^j\}_{k=1}^{\infty}$ таких, що послідовності $\{|g_k^j|\}_{k=1}^{\infty}$ неспадають, визначимо класи елементів простору H:

$$W_{p_j}^{g^j} = \left\{ x \in H : \sum_{k=1}^{\infty} |g_k^j|\, |\hat{x}_k|^{p_j} \leq 1 \right\},\ p_j \geq 1. \tag{2.5}$$

В якості M_j будемо розглядати $W_{p_j}^{g^j}$. Тоді $M_j(T_j)$ будуть мати наступній вид

$$W_{p_j}^{g^j}(T_j) = \left\{ x_j \in W_{p_j}^{g^j} : T_j(x_j) = 0 \right\}, j = 1, ..., n$$

і нехай

$$W^g(T_j) = W_{p_1}^{g^1} \times ... \times W_{p_{j-1}}^{g^{j-1}} \times W_{p_j}^{g^j}(T_j) \times W_{p_{j+1}}^{g^{j+1}} \times ... \times W_{p_n}^{g^n},\ \ j = 1, ..., n,$$

де позначка $\times$ означає декартовий добуток.

Будемо розглядати n-лінійні функціонали, які мають наступну властивість

$$\Omega(e_{k_1}, ..., e_{k_n}) = \begin{cases} f_k \in \mathbb{C} & \text{, якщо } k_1 = ... = k_n = k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{, в іншому випадку.} \end{cases} \tag{2.6}$$

Ясно, що для класів $W_{p_j}^{g^j}$ елементів $j = 1, ..., n$ функціонал Ω, який має властивість (2.6) буде мати вигляд

$$\Omega(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \; \hat{x}_{1,k} ... \hat{x}_{n,k}.$$

Прикладом функціонала Ω, який має властивість (2.6) є заданий в $L_2[0, 1]$ функціонал

$$\Omega(x_1, x_2, ..., x_n) = \int\limits_0^1 x_1(t) ... x_n(t) dt,$$

якщо в якості функцій e_k, які складають ортонормований базис, обрати базисні функції Хаара (див., наприклад, [59], див. 14). Нагадаємо, що перша функція системи Хаара стала: $\chi_{0,0}(t) = 1, t \in [0, 1]$, а друга має вигляд

$$\chi_{0,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [0, 1/2), \\ 0 & \text{при } t = 1/2, \\ -1 & \text{при } t \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Наступні функції $\chi_{m,k}$ системи Хаара з номерами $m \in \mathbb{N}$,
$k = 1, ..., 2^{m-1}$ визначаються рівністю

$$\chi_{m,k}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } t \in [\frac{k-1}{2^{m-1}}, \frac{k-1/2}{2^{m-1}}), \\ -2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } t \in (\frac{k-1/2}{2^{m-1}}, \frac{k}{2^{m-1}}], \\ 0 & \text{в інших точках } [0,1] \; . \end{cases}$$

Замість подвійної нумерації можна користуватися простою нумерацією, припускаючи $\chi_{m,k} = \chi_j$, де $j = 2^{m-1} + k$.

Теорема 2.1.1. *Нехай задано n-лінійний функціонал Ω, який має властивість* (2.6)*, для якого послідовність $\{|f_k|\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно спадає, і числа $m_1, ..., m_n$. Нехай також $p_j \geq 1$ і $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j} = 1$, послідовності $\{|g_k^j|\}_{k=1}^{\infty}$ неспадають. Тоді*

$$R_{m_1,...,m_n}(W_{p_1}^{g^1}, ..., W_{p_n}^{g^n}) = \frac{|f_{M+1}|}{|g_{M+1}^1|^{\frac{1}{p_1}} \cdot ... \cdot |g_{M+1}^n|^{\frac{1}{p_n}}},$$

де $M = \min\{m_1, ..., m_n\}$. *При цьому інформація про елементи* $x_j \in W^{g^j}_{p_j}$, $j = 1, ..., n$ *виду*

$$T_j(x_j) = ((x_j, e_1), ..., (x_j, e_{m_j})) = (\hat{x}_{j,1}, ..., \hat{x}_{j,m_j})$$

і метод

$$\widetilde{F}(x_{1,1}, ..., x_{1,m_1}, ..., x_{n,1}..., x_{n,m_n}) = \sum_{k=1}^{M} f_k \, x_{1,k}...x_{n,k}$$

її використання будуть оптимальними.

Доведення. Для довільної інформації $T_1, ..., T_n$ типу $(m_1, ..., m_n)$ отримаємо оцінку знизу величини $R(W^{g^1}_{p_1}, ..., W^{g^n}_{p_n}; T_1, ..., T_n)$. Нехай $y = y_1 e_1 + ... + y_{M+1} e_{M+1}$, $y_1, ..., y_{M+1} \in \mathbb{C}$. З умови $T_n(y) = 0$ отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y_1 T_{n,1}(e_1) + ... + y_{M+1} T_{n,1}(e_{M+1}) = 0, \\ \quad \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad , \\ y_1 T_{n,M}(e_1) + ... + y_{M+1} T_{n,M}(e_{M+1}) = 0. \end{cases}$$

Оскільки в системі з M рівнянь $M + 1$ змінна, тоді вона має ненулевий розв'язок $y' = (y'_1, ..., y'_{M+1})$. Визначимо $z_1, ..., z_n$ наступним чином

$$z_s = A_s^{-1} \sum_{k=1}^{M+1} |y'_k|^{p_n/p_s} e_k, \; s = 1, ..., n-2,$$

$$z_{n-1} = A_{n-1}^{-1} \sum_{k=1}^{M+1} |y'_k|^{p_n/p_{n-1}} e^{-i(arg(y'_k)+arg(f_k))} e_k,$$

$$z_n = A_n^{-1} \sum_{k=1}^{M+1} y'_k e_k = A_n^{-1} \sum_{k=1}^{M+1} |y'_k| e^{iarg(y'_k)} e_k.$$

де для $s = 1, ..., n$ покладено

$$A_s := \left(\sum_{j=1}^{M+1} |y'_j|^{p_n} |g^s_j| \right)^{\frac{1}{p_s}}.$$

Покажемо, що елементи $z_k, k = 1, ..., n$ належать відповідно класам $W_{p_k}^{g^k}$. Маємо

$$\sum_{s=1}^{\infty} |g_s^k|\ |\hat{z}_{k,s}|^{p_k} = \sum_{s=1}^{M+1} |g_s^k|\ |\hat{z}_{k,s}|^{p_k} = \sum_{s=1}^{M+1} |g_s^k| \left(A_k^{-1} |y_s'|^{p_n/p_k} \right)^{p_k} =$$

$$= \sum_{s=1}^{M+1} |g_s^k| A_k^{-p_k} |y_s'|^{p_n} = A_k^{-p_k} \sum_{s=1}^{M+1} |g_s^k||y_s'|^{p_n} = A_k^{-p_k} \cdot A_k^{p_k} = 1.$$

Зрозуміло, що $T_n(z_n) = 0$ і, звідси, з урахуванням властивості (2.6) отримаємо нерівність

$$R(W_{p_1}^{g^1}, ..., W_{p_n}^{g^n}; T_1, ..., T_n; F) \geq$$

$$\geq \sup_{\substack{x_j \in W_{p_j}^{g^j},\ j=\overline{1,n} \\ x_n \in W_{p_n}^{g^n}(T_n)}} |\Omega(x_1, ..., x_n)| \geq |\Omega(z_1, ..., z_n)| =$$

$$= \left(\prod_{s=1}^{n} A_s \right)^{-1} \sum_{k=1}^{M+1} |f_k||y_k'|^{p_n(1/p_1 + ... + 1/p_n)} = \left(\prod_{s=1}^{n} A_s \right)^{-1} \sum_{k=1}^{M+1} |f_k||y_k'|^{p_n}. \quad (2.7)$$

Кожний із співмножників $A_s, s = 1, ..., n$ у (2.7) з урахуванням неспадання послідовностей $\{|g_j^s|\}_{j=1}^{\infty}$ можна оцінити так

$$A_s = \left(\sum_{j=1}^{M+1} |y_j'|^{p_n} |g_j^s| \right)^{\frac{1}{p_s}} \leq |g_{M+1}^s|^{\frac{1}{p_s}} \left(\sum_{j=1}^{M+1} |y_j'|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_s}}.$$

З урахуванням останніх нерівностей і незростання $\{|f_k|\}_{k=1}^{\infty}$ нерівність (2.7) можна продовжити

$$R(W_{p_1}^{g^1}, ..., W_{p_n}^{g^n}; T_1, ..., T_n; F) \geq \left(\prod_{s=1}^{n} A_s \right)^{-1} \sum_{k=1}^{M+1} |f_k||y_k'|^{p_n} \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{M+1} |f_k| \frac{|y_k'|^{p_n}}{\prod\limits_{s=1}^{n} \left(|g_{M+1}^s|^{\frac{1}{p_s}} \left(\sum\limits_{j=1}^{M+1} |y_j'|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_s}} \right)} \geq$$

$$\geq |f_{M+1}| \frac{\sum\limits_{k=1}^{M+1} |y_k'|^{p_n}}{\left(\prod\limits_{s=1}^{n} |g_{M+1}^s|^{\frac{1}{p_s}} \right) \prod\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{M+1} |y_j'|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_k}}} = \frac{|f_{M+1}|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g_{M+1}^s|^{\frac{1}{p_s}}}.$$

Для довільного $k = 1, ..., n-1$ нерівність

$$R(W_{p_1}^{g^1}, ..., W_{p_n}^{g^n}; T_1, ..., T_n; F) \geq \sup_{\substack{x_j \in W_{p_j}^{g^j},\, j=\overline{1,n} \\ x_n \in W_{p_n}^{g^n}(T_n)}} |\Omega(x_1, ..., x_n)| \geq \frac{|f_{M+1}|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g_{M+1}^s|^{\frac{1}{p_s}}}.$$

доводиться аналогічно. Таким чином, з урахуванням леми 2.1.1, отримана оцінка знизу

$$R(W_{p_1}^{g^1}, ..., W_{p_n}^{g^n}; T_1, ..., T_n; F) \geq \frac{|f_{M+1}|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g_{M+1}^s|^{\frac{1}{p_s}}}.$$

Отримаємо оцінку зверху

$$R(W_{p_1}^{g^1}, ..., W_{p_n}^{g^n}; T_1, ..., T_n; F) \leq R(W_{p_1}^{g^1}, ..., W_{p_1}^{g^n}; T_1, ..., T_n; \tilde{F}) =$$

$$= \sup_{\substack{x_j \in W_{p_j}^{g^j} \\ j=1,...,n}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot \hat{x}_{1,k} \cdot ... \cdot \hat{x}_{n,k} - \sum_{k=1}^{M} f_k \cdot \hat{x}_{1,k} \cdot ... \cdot \hat{x}_{n,k} \right| =$$

$$= \sup_{\substack{x_j \in W_{p_j}^{g^j} \\ j=1,...,n}} \left| \sum_{k=M+1}^{\infty} f_k \cdot \hat{x}_{1,k} \cdot ... \cdot \hat{x}_{n,k} \right| =$$

$$= \sup_{\substack{x_j \in W_{p_j}^{g^j} \\ j=1,...,n}} \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{|f_k|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g_k^s|^{\frac{1}{p_s}}} \cdot \prod_{s=1}^{n} |g_k^s|^{\frac{1}{p_s}} |\hat{x}_{s,k}| \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{x_j \in W_{p_j}^{g^j} \\ j=1,...,n}} \frac{|f_{M+1}|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g_{M+1}^s|^{\frac{1}{p_s}}} \cdot \sum_{k=M+1}^{\infty} \prod_{s=1}^{n} |g_k^s|^{\frac{1}{p_s}} |\hat{x}_{s,k}|.$$

В силу відомої нерівності для суми добутків степенів (див.[66], стор. 29)

$$\sum A^{\alpha} \cdot B^{\beta} \cdot ... \cdot L^{\lambda} \leq \left(\sum A\right)^{\alpha} \cdot \left(\sum B\right)^{\beta} \cdot ... \cdot \left(\sum L\right)^{\lambda},$$

де $\alpha + \beta + ... + \lambda = 1$ маємо

$$\sup_{\substack{x_j \in W_{p_j}^{g^j} \\ j=1,...,n}} \frac{|f_{M+1}|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g_{M+1}^s|^{\frac{1}{p_s}}} \cdot \sum_{k=M+1}^{\infty} \prod_{s=1}^{n} |g_k^s|^{\frac{1}{p_s}} |\hat{x}_{s,k}| \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{x_j \in W^{g^j}_{p_j}\\ j=1,...,n}} \frac{|f_{M+1}|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{M+1}|^{\frac{1}{p_s}}} \cdot \prod_{s=1}^{n} \left(\sum_{k=M+1}^{\infty} |g^s_k||\hat{x}_{s,k}|^{p_s} \right)^{\frac{1}{p_s}} \leq \frac{|f_{M+1}|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{M+1}|^{\frac{1}{p_s}}}.$$

Теорема доведена.

З теореми 2.1.1 для декількох загальновживаних класів випливають наступні твердження.

Покладемо $W^{g^j}_{p_j} = W^{r^j}_2$, $g^j_k = k^{2r^j}$, $p_j = 2$. Тоді з теореми 2.1.1 випливає наступне твердження.

Наслідок 2.1.1. *Нехай задано n-лінійний функціонал Ω, який має властивість* (2.6)*, для якого послідовність $\{|f_k|\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно спадає, і числа $m_1, ..., m_n$. Нехай також $W^{g^j}_{p_j} = W^{r^j}_2$, $r^j \in \mathbb{N}$. Тоді*

$$R_{m_1,...,m_n}(W^{r^1}_2, ..., W^{r^n}_2) = \frac{|f_{M+1}|}{(M+1)^{r^1} \cdot ... \cdot (M+1)^{r^n}} = \frac{|f_{M+1}|}{(M+1)^{r^1+...+r^n}},$$

де $M = \min\{m_1, ..., m_n\}$. При цьому інформація про елементи $x_j \in W^{r^j}_2$, $j = 1, ..., n$ виду

$$T_j(x_j) = ((x_j, e_1), ..., (x_j, e_{m_j})) = (\hat{x}_{j,1}, ..., \hat{x}_{j,m_j})$$

і метод

$$\widetilde{F}(x_{1,1}, ..., x_{1,m_1}, ..., x_{n,1}..., x_{n,m_n}) = \sum_{k=1}^{M} f_k \, x_{1,k}...x_{n,k}$$

її використання будуть оптимальними.

Нехай $P_n(x)$ - поліном порядку не вище n, що не має дійсних коренів, d-оператор диференціювання, $\mathfrak{L}_n = P_n(d)$-диференціальній оператор.

Через $W^{\mathfrak{L}_n}_2$ означимо клас функцій x, що мають локально абсолютно неперервну похіну $x^{(r-1)}$ таку, що $||\mathfrak{L}_n(x)||_2 \leq 1$.

В якості класів $W^{g^j}_{p_j}$ будемо розглядати класи $W^{\mathfrak{L}_{n_j}}_2$. Покладемо $g^j_k = |P_n(ik)|^2$, $p_j = 2$. Тоді з теореми 2.1.1 випливає

Наслідок 2.1.2. *Нехай задано n-лінійний функціонал Ω, який має властивість* (2.6)*, для якого послідовність $\{|f_k|\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно спадає, і* *числа* $m_1, ..., m_n$. *Нехай також* $W^{g^j}_{p_j} = W_2^{\mathfrak{L}_{n_j}}$. *Тоді*

$$R_{m_1,...,m_n}(W_2^{\mathfrak{L}_{n_1}}, ..., W_2^{\mathfrak{L}_{n_n}}) = \frac{|f_{M+1}|}{|P_{n_1}(i(M+1)) \cdot ... \cdot P_{n_n}(i(M+1))|},$$

де $M = \min\{m_1, ..., m_n\}$. *При цьому інформація про елементи* $x_j \in W_2^{\mathfrak{L}_{n_j}}$, $j = 1, ..., n$ *виду*

$$T_j(x_j) = ((x_j, e_1), ..., (x_j, e_{m_j})) = (\hat{x}_{j,1}, ..., \hat{x}_{j,m_j})$$

і метод

$$\widetilde{F}(x_{1,1}, ..., x_{1,m_1}, ..., x_{n,1}..., x_{n,m_n}) = \sum_{k=1}^{M} f_k \; x_{1,k}...x_{n,k}$$

її використання будуть оптимальними.

Наступні дві теореми є наслідками теореми 2.1.1 і випливають з неї при обмеженні $p_j = n, n \in \mathbb{N}$ на класи $W^{g^j}_{p_j}$. Тобто

$$W^{g^j} = W^{g^j}_{p_j} = \left\{ x \in H : \sum_{k=1}^{\infty} |g^j_k| \; |\hat{x}_k|^n \le 1 \right\}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2.1.2. *Нехай задано числа* $m_1, ..., m_n$, n*-лінійний функціонал виду* (2.6), $f_k > 0$, *для якого послідовність* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *монотонно спадає. Тоді*

$$R_{m_1,...,m_n}(W^{g^1}, ..., W^{g^n}) = \frac{f_{M+1}}{|g^1_{M+1} \cdot ... \cdot g^n_{M+1}|^{\frac{1}{n}}},$$

де $M = \min(m_1, ..., m_n)$. *При цьому інформація про елементи* $x_1 \in W^{g^1}, ..., x_n \in W^{g^n}$ *виду*

$$T_1(x_1) = ((x_1, e_1), ..., (x_1, e_{m_1})),$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ,$$

$$T_n(x_n) = ((x_n, e_1), ..., (x_n, e_{m_n}))$$

і метод

$$\tilde{F}(x_{1,1}, ..., x_{1,m_1}, ..., x_{n,1}..., x_{n,m_n}) = \sum_{k=1}^{\min(m_1,...,m_n)} f_k \; x_{1,k}...x_{n,k}$$

її використання будуть оптимальними.

Теорема 2.1.3. *Нехай* $g := g^1 = g^2 = ... = g^n$ *і, звідси,* $W^g := W^{g^1} = ... = W^{g^n}$, *n-лінійний функціонал* Ω *має вигляд* (2.6), $f_k > 0$ *і* $\frac{f_k}{|g_k|}$ *не зростає. Тоді інформація* $T_1(x_1), .., T_n(x_n)$ *про елементи* $x_1, ..., x_n \in H$

$$T_1(x_1) = ((x_1, e_1), ..., (x_1, e_{m_1})),$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ,$$

$$T_n(x_n) = ((x_n, e_1), ..., (x_n, e_{m_n}))$$

і метод

$$\tilde{F}(x_{1,1}, ..., x_{1,m_1}, ..., x_{n,1}..., x_{n,m_n}) = \sum_{k=1}^{\min(m_1,...,m_n)} f_k \; x_{1,k}...x_{n,k}$$

її використання будуть оптимальними. При цьому похибка відновлення може бути обчислена за формулою

$$R_{m_1,...,m_n}(W^g, ..., W^g) = \frac{f_{M+1}}{|g_{M+1}|},$$

де $M = \min(m_1, ..., m_n)$.

Для доведення теореми 2.1.3 достатньо застосувати теорему 2.1.1 для $\tilde{f}_k = 1$ і $\tilde{g}_k = \frac{g_k}{f_k}$.

Нехай $\Omega(\cdot, \cdot)$ - білінійний функціонал в H. Відомо, що $\Omega(\cdot, \cdot)$ однозначно представлений у вигляді

$$\Omega(x_1, x_2) = (Cx_1, x_2), \tag{2.8}$$

де C - лінійний обмежений оператор в H (див.[3]).

Нехай задана незростаюча за модулем послідовність чисел f_k і нехай оператор C має вигляд

$$Cx = \sum_{k=1}^{\infty} f_k (x, e_k) e_k,$$

тобто білінійний функціонал $\Omega(x_1, x_2) = (Cx_1, x_2)$ з (2.8) задається наступним чином

$$\Omega(x_1, x_2) = (Cx_1, x_2) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_1, e_k)e_k, \sum_{j=1}^{\infty}(x_2, e_j)e_j \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_1, e_k)(x_2, e_k). \tag{2.9}$$

Теорема 2.1.4. *Нехай заданий білінійний функціонал виду* (2.9). *Тоді інформація* T_1x_1, T_2x_2 *про елементи* $x_1, x_2 \in H$

$$T_1x_1 = ((x_1, e_1), ..., (x_1, e_{m_1})),$$

$$T_2x_2 = ((x_2, e_1), ..., (x_2, e_{m_2}))$$

і метод

$$\overline{F}(x_{1,1}, ..., x_{1,m_1}, x_{2,1}, ..., x_{2,m_2}) = \sum_{k=1}^{min(m_1,m_2)} f_k x_{1,k} x_{2,k}$$

її використання будуть оптимальними. При цьому похибка відновлення може бути обчислена за формулою

$$R_{m_1,m_2}(W^{g^1}, W^{g^2}) = \frac{|f_{M+1}|}{\sqrt{|g^1_{M+1} g^2_{M+1}|}},$$

де $M = min(m_1, m_2)$.

Зауваження. Доведення теореми 2.1.4 формально повторює доведення теореми 2.1.1. Відмінність полягає в наступному: в білінійному випадку функціонал Ω визначає оператор C. Оператором C визначається базис e_k та числа f_k. В n-лінійному випадку базис та властивість (2.6) визначають функціонал Ω.

Основні результати цього підрозділу наведні в [15, 16, 32, 14, 31, 13].

2.2 Оптимальне відновлення загальних неперервних n-лінійніх функціоналів.

Будемо вивчати задачу оптимізації наближеного обчислення n-лінійних функціоналів за лінійною інформацією про аргументи у постановці підрозділу 2.1.

Нехай H- сепарабельний гільбертовий простір над полем комплексних чисел; $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормований базис у просторі H; $\hat{x}_k = (x, e_k)$. За допомогою послідовностей $g^s, s = 1, ..., n$, комплексних чисел $g^s = \{g_k^s\}_{k=1}^{\infty}$ визначимо класи елементів простору H:

$$W_{p_s}^{g^s} = \left\{ x \in H : \sum_{k=1}^{\infty} |g_k^s| \; |\hat{x}_k|^{p_s} \leq 1 \right\}, \; p_s \geq 1.$$

Будемо розглядати n-лінійні функціонали наступного вигляду

$$\Omega(x_1, ..., x_n) = \sum_{k^1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k^n=1}^{\infty} f(e_{k^1}, ..., e_{k^n}) \; \hat{x}_{k^1} ... \hat{x}_{k^n} =$$

$$= \sum_{k^1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k^n=1}^{\infty} \frac{f(e_{k^1}, ..., e_{k^n})}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g_{k^s}^s|^{1/p_s}} \; \prod_{s=1}^{n} |g_{k^s}^s|^{1/p_s} \; \hat{x}_{k^1} ... \hat{x}_{k^n} \tag{2.10}$$

Впорядкуємо числа $\frac{|f(e_{k^1}, ..., e_{k^n})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g_{k^s}^s|^{1/p_s}}$ за спаданням (вважаємо, що базиси e_{k^s} і послідовності g_k^s такі, що це можливо). Позначимо через $v_k \in \mathbb{N}^n$ їх індекси, а через $q_k(s) \in \mathbb{N}$ s-ту координату v_k. Таким чином $\frac{|f(e_{q_k(1)}, ..., e_{q_k(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g_{q_k(s)}^s|^{1/p_s}}$ не зростають при зростанні k. Нехай також $V_u := \bigcup\limits_{k=1}^{u} v_k$. Через $N(V_u, s)$ будемо позначати кількість різних елементів $q_k(s)$ при фіксованих u і s.

Теорема 2.2.1. *Нехай задано n-лінійний функціонал Ω виду* (2.10), $u \in \mathbb{N}$, $Q = 1, 2, ..., n$, $N = N(V_u, Q) - 1 \in \mathbb{N}$. *Нехай також* $p_j \geq 1$ *і*

$\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j} = 1$, *тоді*

$$R_{m_1,...,m_n}(W_{p_1}^{g^1},...,W_{p_n}^{g^n}) = \max_{(q_j(1),...,q_j(n))\notin V_u} \frac{|f(e_{q_j(1)},...,e_{q_j(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g_{q_j(s)}^s|^{1/p_s}} =$$

$$= \frac{|f(e_{q_{u+1}(1)},...,e_{q_{u+1}(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g_{q_{u+1}(s)}^s|^{1/p_s}}.$$

При цьому інформація про елементи $x_j \in W_{p_j}^{g^j}$, $j = 1,...,n$ *виду*

$$\widetilde{T}_j(x_j) = ((x_j, e_{q_1(j)}),...,(x_j, e_{q_u(j)})) = (\hat{x}_{j,q_1(j)},...,\hat{x}_{j,q_u(j)})$$

і метод

$$\widetilde{F}(\hat{x}_{1,q_1(1)},...,\hat{x}_{1,q_u(1)},...,\hat{x}_{n,q_1(n)}...,\hat{x}_{n,q_u(n)}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{u} |f(e_{q_k(1)},...,e_{q_k(n)})| \, \hat{x}_{q_k(1)}...\hat{x}_{q_k(n)}$$

її використання буде оптимальним.

Нагадаємо, що серед $q_k(j)$ можуть бути співпадаючи. Кількість різних елементів буде $N(V_u, j)$.

Доведення. Розглянемо множину V_u. Її елементи породжують елементи виду $y^s = \sum\limits_{j=1}^{u} y_j e_{q_j(s)}$, $\quad s = 1,...,n$, де y_j – довільні поки числа. В силу визначення N серед $e_{q_j(n)}$ буде $N+1$ різних.

Вибираємо числа y_j так, щоб, по перше, y_j були при різних $e_{q_j(n)}$ і тому їх буде $N+1$.

По друге, щоб $T_n\left(\sum\limits_{j=1}^{u} \frac{y_j}{\left|g_{q_j(n)}^n\right|^{1/p_n}} e_{q_j(n)}\right) = 0$. Функціоналів N штук, тому можемо вибрати y_j не всі рівні нулю.

По третє, y_j нормуються умовою $\sum |y_j|^{p_n} = 1$. Вибрані таким чином y_j, будемо позначати через y_{u_j}, $\quad j = 1,...,N+1$. Зауважимо, що індекси согласовані так, що y_{u_j} є коефіцієнтами для $e_{q_j(s)}$, $\quad s = 1,...,n$.

Для довільної інформації $T_1, ..., T_n$ типу $(m_1, ..., m_n)$ отримаємо оцінку знизу величини $R(W^{g^1}_{p_1}, ..., W^{g^n}_{p_n}; T_1, ..., T_n)$. Визначимо $z_1, ..., z_n$ наступним чином

$$z_s = \sum_{j=1}^{N+1} \left| \frac{|y_{u_j}|^{p_n}}{g^s_{q_j(s)}} \right|^{1/p_s} e_{q_j(s)}, \;\; s = 1, ..., n-2,$$

$$z_{n-1} = \sum_{j=1}^{N+1} \left| \frac{|y_{u_j}|^{p_n}}{g^{n-1}_{q_j(n-1)}} \right|^{1/p_{n-1}} e^{-i(arg(y_{u_j})+arg(f(e_{q_j(1)},...e_{q_j(n)})))} e_{q_j(n-1)},$$

$$z_n = \sum_{j=1}^{N+1} \left| \frac{|y_{u_j}|^{p_n}}{g^n_{q_j(n)}} \right|^{1/p_n} e^{iarg(y_{u_j})} e_{q_j(n)} = \sum_{j=1}^{N+1} \frac{y_{u_j}}{\left| g^n_{q_j(n)} \right|^{1/p_n}} e_{q_j(n)}.$$

Покажемо, що елементи $z_s, s = 1, ..., n$ належать відповідно класам $W^{g^s}_{p_s}$. Маємо

$$\sum_{j=1}^{\infty} |g^s_{q_j(s)}| \; |\hat{z}_{j,s}|^{p_s} = \sum_{j=1}^{N+1} |g^s_{q_j(s)}| \; |\hat{z}_{j,s}|^{p_s} = \sum_{j=1}^{N+1} |g^s_{q_j(s)}| \; \left(\left| \frac{|y_{u_j}|^{p_n}}{g^s_{q_j(s)}} \right|^{1/p_s} \right)^{p_s} = 1.$$

Зрозуміло, що $T_n(z_n) = 0$ та в силу леми 2.1.1 отримаємо нерівність

$$R(W^{g^1}_{p_1}, ..., W^{g^n}_{p_n}; T_1, ..., T_n; F) \geq \sup_{(x_1,...,x_n) \in M(T_n)} |\Omega(x_1, ..., x_n)| \geq$$

$$\geq \sup_{\substack{x_j \in W^{g^j}_{p_j}, \, j=\overline{1,n} \\ x_n \in W^{g^n}_{p_n}(T_n)}} |\Omega(x_1, ..., x_n)| \geq |\Omega(z_1, ..., z_n)| =$$

$$= \sum_{j=1}^{N+1} |f(e_{q_j(1)}, ..., e_{q_j(n)})| \frac{\prod_{s=1}^{n} |y_{u_j}|^{p_n(1/p_s)}}{\prod_{s=1}^{n} |g^s_{q_j(s)}|^{1/p_s}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N+1} \frac{|f(e_{q_j(1)}, ..., e_{q_j(n)})|}{\prod_{s=1}^{n} |g^s_{q_j(s)}|^{1/p_s}} |y_{u_j}|^{p_n(1/p_1+...+1/p_n)} = \sum_{j=1}^{N+1} \frac{|f(e_{q_j(1)}, ..., e_{q_j(n)})|}{\prod_{s=1}^{n} |g^s_{q_j(s)}|^{1/p_s}} |y_{u_j}|^{p_n} \geq$$

$$\geq \left(\min_{(q_j(1),...,q_j(n)) \in V_u} \frac{|f(e_{q_j(1)}, ..., e_{q_j(n)})|}{\prod_{s=1}^{n} |g^s_{q_j(s)}|^{1/p_s}} \right) \left(\sum_{j=1}^{N+1} |y_{u_j}|^{p_n} \right) =$$

$$= \min_{(q_j(1),...,q_j(n))\in V_u} \frac{|f(e_{q_j(1)},...,e_{q_j(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_j(s)}|^{1/p_s}} \geq \max_{(q_j(1),...,q_j(n))\notin V_u} \frac{|f(e_{q_j(1)},...,e_{q_j(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_j(s)}|^{1/p_s}}.$$

Для довільного $Q = 1, ..., n-1$ оцінка знизу доводиться аналогічно.

Отримаємо оцінку зверху

$$R(W^{g^1}_{p_1}, ..., W^{g^n}_{p_n}; T_1, ..., T_n; F) \leq R(W^{g^1}_{p_1}, ..., W^{g^n}_{p_n}; \widetilde{T}_1, ..., \widetilde{T}_n; \tilde{F}) =$$

$$= \sup_{\substack{x_j \in W^{g^j}_{p_j} \\ j=1,...,n}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f(e_{q_k(1)},...,e_{q_k(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_k(s)}|^{1/p_s}} \prod_{s=1}^{n} |g^s_{q_k(s)}|^{1/p_s}\ \hat{x}_{q_k(1)}...\hat{x}_{q_k(n)} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{u} \frac{|f(e_{q_k(1)},...,e_{q_k(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_k(s)}|^{1/p_s}} \prod_{s=1}^{n} |g^s_{q_k(s)}|^{1/p_s}\ \hat{x}_{q_k(1)}...\hat{x}_{q_k(n)} \right| =$$

$$= \sup_{\substack{x_j \in W^{g^j}_{p_j} \\ j=1,...,n}} \left| \sum_{k=u+1}^{\infty} \frac{|f(e_{q_k(1)},,...,e_{q_k(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_k(s)}|^{1/p_s}} \prod_{s=1}^{n} |g^s_{q_k(s)}|^{1/p_s}\ \hat{x}_{q_k(1)}...\hat{x}_{q_k(n)} \right| =$$

$$= \sup_{\substack{x_j \in W^{g^j}_{p_j} \\ j=1,...,n}} \left| \sum_{k=u+1}^{\infty} \frac{|f(e_{q_k(1)},...,e_{q_k(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_k(s)}|^{1/p_s}} \prod_{s=1}^{n} |g^s_{q_k(s)}|^{1/p_s}\ \hat{x}_{q_k(s)} \right| \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{x_j \in W^{g^j}_{p_j} \\ j=1,...,n}} \left| \sum_{k=u+1}^{\infty} \frac{|f(e_{q_{u+1}(1)},...,e_{q_{u+1}(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_{u+1}(s)}|^{1/p_s}} \prod_{s=1}^{n} |g^s_{q_k(s)}|^{1/p_s}\ \hat{x}_{q_k(s)} \right| \leq$$

$$= \sup_{\substack{x_j \in W^{g^j}_{p_j} \\ j=1,...,n}} \frac{|f(e_{q_{u+1}(1)},...,e_{q_{u+1}(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_{u+1}(s)}|^{1/p_s}} \left| \sum_{k=u+1}^{\infty} \prod_{s=1}^{n} |g^s_{q_k(s)}|^{1/p_s}\ \hat{x}_{q_k(s)} \right|.$$

В силу відомої нерівності для суми добутків степенів (див.[66], стор. 29)

$$\sum A^{\alpha} \cdot B^{\beta} \cdot ... \cdot L^{\lambda} \leq \left(\sum A\right)^{\alpha} \cdot \left(\sum B\right)^{\beta} \cdot ... \cdot \left(\sum L\right)^{\lambda},$$

де $\alpha + \beta + ... + \lambda = 1$ маємо

$$\sup_{\substack{x_j \in W^{g^j}_{p_j} \\ j=1,...,n}} \frac{|f(e_{q_{u+1}(1)},...,e_{q_{u+1}(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_{u+1}(s)}|^{1/p_s}} \left| \sum_{k=u+1}^{\infty} \prod_{s=1}^{n} |g^s_{q_k(s)}|^{1/p_s}\ \hat{x}_{q_k(s)} \right| \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{x_j \in W_{p_j}^{g^j} \\ j=1,\ldots,n}} \frac{|f(e_{q_{u+1}(1)}, \ldots, e_{q_{u+1}(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_{u+1}(s)}|^{1/p_s}} \prod_{s=1}^{n} \left(\sum_{k=u+1}^{\infty} |g^s_{q_k(s)}| \, |\hat{x}_{q_k(s)}|^{p_s} \right)^{1/p_s} \leq$$

$$\leq \frac{|f(e_{q_{u+1}(1)}, \ldots, e_{q_{u+1}(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_{u+1}(s)}|^{1/p_s}}.$$

Оцінка зверху отримана. Теорема доведена.

Результати цього підрозділу наведні в [34], [35].

Висновки до розділу 2

В другому розділі розв'язано задачі оптимального відновлення білінійних та n-лінійних функціоналів за лінійною інформацією. В кожному з двох підрозділів для конкретних класів елементів знайдена оптимальна лінійна інформація та оптимальній метод відновлення, а також обчислено оптимальну похибку відновлення.

В підрозділі 2.1 отримані результати по відновленню n-лінійних функціоналів виду

$$\Omega(x_1, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \ \hat{x}_{1,k}...\hat{x}_{n,k}$$

на класах $W_{p_j}^{g^j}$, що задаються неспадними за модулем послідовностями $g^j = \{g_k^j\}_{k=1}^{\infty}$. Наступна формула є прикладом знайденої похибки відновлення

$$R_{m_1,...,m_n}(W_{p_1}^{g^1}, ..., W_{p_n}^{g^n}) = \frac{|f_{M+1}|}{|g_{M+1}^1|^{\frac{1}{p_1}} \cdot ... \cdot |g_{M+1}^n|^{\frac{1}{p_n}}}.$$

В підрозділі 2.2 розв'язана задача відновлення на класах елементів простору H:

$$W_{p_s}^{g^s} = \left\{ x \in H : \sum_{k=1}^{\infty} |g_k^s| \ |\hat{x}_k|^{p_s} \leq 1 \right\}, \ p_s \geq 1$$

для функціоналів виду

$$\Omega(x_1, ..., x_n) = \sum_{k^1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k^n=1}^{\infty} f(e_{k^1}, ..., e_{k^n}) \ \hat{x}_{k^1}...\hat{x}_{k^n}.$$

Похибка відновлення має вид:

$$R_{m_1,...,m_n}(W_{p_1}^{g^1}, ..., W_{p_n}^{g^n}) = \max_{(q_j(1),...,q_j(n)) \notin V_u} \frac{|f(e_{q_j(1)}, ..., e_{q_j(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g_{q_j(s)}^s|^{1/p_s}} =$$

$$= \frac{|f(e_{q_{u+1}(1)}, ..., e_{q_{u+1}(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g_{q_{u+1}(s)}^s|^{1/p_s}}.$$

Розділ 3

Задачі відновлення згорток n функцій за лінійною інформацією

3.1 Оптимізація відновлення згортки n функцій за лінійною інформацією на множинах 2π - періодичних функцій виду $x = a\mu + K * \psi$, де $K \in L_1$

Будемо вивчати задачу оптимального відновлення згорток функцій в наступній постановці.

Нехай C і L_p, $1 \le p \le \infty$, – простори 2π-періодичних функцій $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з відповідними нормами $\|\cdot\|_C$ і $\|\cdot\|_{L_p}$. Нехай також $M_1, ..., M_n \subset L_1$ – деякі класи функцій; $x_1 \in M_1, \ldots, x_n \in M_n$;

$$(x_1 * x_2)(\tau) = \int\limits_0^{2\pi} x_1(\tau - t) x_2(t) dt$$

- згортка двох функцій x_1 і x_2, а

$$(x_1 * x_2 * ... * x_n)(\tau) = (x_1 * (x_2 * ... * x_n))(\tau) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} x_1(\tau - t_1 - ... - t_{n-1}) x_2(t_1) ... x_n(t_{n-1}) dt_1 dt_2 ... dt_{n-1}$$

– згортка n функцій $x_1, ..., x_n$.

Припустимо, що для $j = 1, ..., n$ на множинах $\mathrm{span}(M_j)$ задано набори T_j, $T_j = (T_{j,1}, ..., T_{j,m_j})$ лінійних неперервних функціоналів

$$T_{j,l} : \mathrm{span}(M_j) \to \mathbb{R}, \ \ l = 1, ..., m_j.$$

Вектори

$$T_j(x_j) = (T_{j,1}(x_j), ..., T_{j,m_j}(x_j)) \in \mathbb{R}^{m_j}, \ x_j \in M_j, \ \ j = 1, ..., n,$$

будемо називати лінійною інформацією про x_1, ..., x_n типу $(m_1, ..., m_n)$ (або $(m_1, ..., m_n)$-інформацією). Довільне відображення

$$\Phi : \mathbb{R}^{m_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{m_n} \to L_p$$

будемо називати методом відновлення згортки $x_1 * ... * x_n$ за $(m_1, ..., m_n)$-інформацією у просторі L_p.

Нехай:

$$R(x_1, ...x_n; T_1, ..., T_n; \Phi)(t) = (x_1 * ... * x_n)(t) - \Phi(T_1(x_1), ..., T_n(x_n))(t),$$

$$R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n; \Phi; L_p) =$$

$$= \sup_{\substack{x_j \in M_j, \\ j=1,...,n}} \|R(x_1, ..., x_n; T_1, ..., T_n; \Phi)(\cdot)\|_{L_p}, \tag{3.1}$$

$$R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n; L_p) = \inf_{\Phi} R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n; \Phi; L_p), \tag{3.2}$$

$$R_{m_1,...,m_n}(M_1, ..., M_n; L_p) = \inf_{T_1,...,T_n} R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n; L_p) \tag{3.3}$$

($\inf\limits_{\Phi}$ береться по всім можливим методам відновлення, а $\inf\limits_{T_1,...,T_n}$ по всім можливим наборам функціоналів, які дають $(m_1, ..., m_n)$– інформацію про $(x_1, ..., x_n)$;

$$R_N(M_1, ..., M_n; L_p) = \inf_{m_1+...+m_n=N} R_{m_1,...,m_n}(M_1, ..., M_n; L_p). \tag{3.4}$$

Величину (3.1) назвемо похибкою методу Φ відновлення згортки n функцій $x_1 * ... * x_n$ на класах $M_1, ..., M_n$ за інформацією $T_1, ..., T_n$ у просторі L_p;

величину (3.2) – оптимальною похибкою відновлення $x_1 * ... * x_n$ на класах $M_1, ..., M_n$ за заданою інформацією типу $(m_1, ..., m_n)$; величину (3.3) – оптимальною похибкою відновлення $x_1 * ... * x_n$ на $M_1, ..., M_n$ за $(m_1, ..., m_n)$ - інформацією; і, нарешті, величину (3.4) – оптимальною похибкою відновлення $x_1 * ... * x_n$ на $M_1, ..., M_n$ за інформацією сумарного об'єму N.

Якщо при заданих $T_1, ..., T_n$ існує метод Φ^*, який реалізує $\inf\limits_{\Phi}$ в правій частині (3.2), тоді будемо називати Φ^* оптимальним методом використання данної інформації. Якщо існують $T_1^*, ..., T_n^*$, які реалізують нижню межу у правій частині (3.3), тоді будемо їх називати оптимальною $(m_1, ..., m_n)$ - інформацією для відновлення $x_1 * ... * x_n$ на $M_1, ..., M_n$ у просторі L_p.

Числа $m_1^0, ..., m_n^0$, які реалізують inf в (3.4), будемо називати оптимальними об'ємами інформації про $x_1, ..., x_n$, а оптимальну $(m_1^0, ..., m_n^0)$ - інформацію – оптимальною інформацією сумарного об'єму N про $x_1, ..., x_n$.

Будемо вивчати наступну задачу оптимального відновлення згортки n функцій за лінійною інформацією про функції, які входять до згортки.

Нехай задано класи функцій $M_1, \ldots, M_n$ і $p \in [1, \infty]$, $N \in \mathbb{N}$. Потрібно знайти величину (3.4), оптимальні об'єми $m_1^*, \ldots, m_n^*$ інформації $(m_1^* + \ldots + m_n^* = N)$, оптимальну $(m_1^*, \ldots, m_n^*)$-інформацію $T_1^*, ..., T_n^*$, а також оптимальний метод Φ^* її використання.

Задача про оптимальне відновлення згортки двох функцій з різних функціональних класів була розглянута у [8]. Там також наведені перші результати по її розвязанню. Щодо подальших результатів в цьому напрямку див. [9].

Визначимо множини $M_j(T_j)$ так

$$M_j(T_j) = \{x_j \in M_j : T_j(x_j) = 0\}, j = 1, ..., n,$$

і нехай

$$M(T_j) := M_1 \times ... \times M_{j-1} \times M_j(T_j) \times M_{j+1} \times ... \times M_n, \ \ j = 1, ..., n.$$

Оцінку знизу для величини (3.1), а, звідси, і величини (3.2), дає наступна лема.

Лема 3.1.1. *Нехай множини $M_1, \ldots, M_n$ опуклі і центрально-симетричні. Тоді для будь-яких наборів функціоналів $T_1, ..., T_n$ і будь-якого метода відновлення Φ*

$$R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n; \Phi; L_p) \geq \max_{j=1,...,n} \sup_{(x_1,...,x_n)\in M(T_j)} \|(x_1 * ... * x_n)(\cdot)\|_{L_p}.$$

Для $n = 2$ лема 1 доведена в [8].

Доведення. Доведемо, що

$$R(M_1, ..., M_n; T_1, .., T_n; \Phi; L_p) \geq \sup_{(x_1,...,x_n)\in M(T_1)} \|(x_1 * ... * x_n)(\cdot)\|_{L_p}.$$

Маємо (нижче θ – нульовий елемент простору $\mathbb{R}^{m_1}$)

$$R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n; \Phi; L_p) \geq$$

$$\geq \sup_{(x_1,...,x_n)\in M(T_1)} \|(x_1 * ... * x_n)(\cdot) - \Phi(\theta, T_2(x_2), ..., T_n(x_n))(\cdot)\|_{L_p} \geq$$

$$\geq \sup_{(x_1,...,x_n)\in M(T_1)} \max\{\|(x_1 * ... * x_n)(\cdot) - -\Phi(\theta, T_2(x_2), ..., T_n(x_n))(\cdot)\|_{L_p},$$

$$\|-(x_1 * ... * x_n)(\cdot) - \Phi(\theta, T_2(x_2), ..., T_n(x_n))(\cdot)\|_{L_p}\} \geq$$

$$\geq \sup_{(x_1,...,x_n)\in M(T_1)} \|(x_1 * ... * x_n)(\cdot)\|_{L_p}.$$

Аналогічно доводиться, що для довільного $j = 2, ..., n$

$$R(M_1, ..., M_n; T_1, .., T_n; \Phi; L_p) \geq \sup_{(x_1,...,x_n)\in M(T_j)} \|(x_1 * ... * x_n)(\cdot)\|_{L_p}.$$

Звідси і випливає твердження леми. Лема доведена.

Зауваження 3.1.1. *В конкретних ситуаціях одна або декілька множин M_i можуть мати таку властивість: якщо $x_i \in M_i$, то для* *будь-якого* $u \in H_i$ *(H_i – заданий скінченновимірний підпростір H)* $u+x_i \in M_i$*. Якщо, наприклад, таку властивість має* M_1*, тоді в силу леми 3.1.1*

$$R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n; \Phi; L_p) \geq$$

$$\geq \sup_{u \in H_1} \sup_{x_1 \in M_1(T_1)} \|((u + x_1) * x_2 * ... * x_n)(\cdot)\|_{L_p} = +\infty,$$

якщо $u * x_2 * ... * x_n \neq 0$ *для деяких* $u \in H_1$, $x_1 \in M_1(T_1)$*. Таким чином, для того щоб величина* $R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n; \Phi; L_p)$ *була в цьому випадку скінченою, необхідно, щоб відновлення згортки на підпросторах* H_i *було точним.*

Нехай F_p – одинична куля у L_p, $K \in L_1$, і $\mu = \mu(K) = 0$, якщо $\int_0^{2\pi} K dt \neq 0$ та $\mu = \mu(K) = 1$, якщо $\int_0^{2\pi} K dt = 0$. Через $K * F_p$ позначимо клас функцій виду $x = a\mu + K * \psi$, де $a \in \mathbb{R}$, $\psi \in F_p$, $\psi \perp \mu$. Надалі будемо вважати, що $M_j = K_j * F_{p_j}$, $j = 1, ..., n$, де $K_j \in L_1$.

Нехай $d_N(M, C)$ позначає n-поперечник за Колмогоровим множини M у просторі C (див., наприклад, [40], с.109).

Теорема 3.1.1. *Нехай* $K_1, ..., K_n \in L_1$*. Тоді для будь-яких наборів функціоналів* $T_j = (T_{j,1}, , ..., T_{j,m_j})$, $j = 1, ..., n$, $T_{j,l} : \mathrm{span}\,(K_j * F_1) \to \mathbb{R}$, $l = 1, ..., m_j$ *і будь-якого методу відновлення* Φ

$$R(K_1 * F_1, ..., K_n * F_1; T_1, ..., T_n; \Phi; L_1) \geq$$

$$\geq d_{\min\{m_1,...,m_n\}}((K_1 * ... * K_n)(-\cdot) * F_\infty, C).$$

Доведення. Оскільки ми оцінюємо $R(K_1 * F_1, ..., K_n * F_1; T_1, ..., T_n; \Phi; L_1)$, у випадку $\mu_1 = ... = \mu_n = 0$ припускаємо $T_1, ..., T_n$ довільними, а у випадку, коли $\mu_1 = ... = \mu_n = 1$, припускаємо $T_1, ..., T_n$ такими, що функціонали $T_{j,0}(x_j) = \int_0^{2\pi} x_j dt$, $j = 1, ..., n$ є лінійними комбінаціями функціоналів $T_{j,l}$, $l = 1, ..., m_j$ (див. зауваження 3.1.1).

Нехай, для визначеності, $\min\{m_1, \ldots, m_n\} = m_1$.

Для $x_1,...,x_n$ виду $x_j=a_j\mu_j+K_j*\psi_j\in K_j*F_{p_j}$ в силу леми 3.1.1 нам достатньо довести нерівність

$$A_1:=\sup_{\substack{x_1\in(K_1*F_1)(T_1),\\ x_2\in K_2*F_1,...,x_n\in K_n*F_1}}\|(x_1*...*x_n)(\cdot)\|_{L_1}\geq d_{m_1}(K_1*...*K_n*F_\infty,C).$$

Маємо

$$A_1=\sup_{\substack{\psi_j\in F_1,\,\psi_1\perp\mu_1,j=\overline{1,n},\\ T_1(K_1*\psi_1)=\theta}}\|(K_1*\psi_1)*...*(K_n*\psi_n)(\cdot)\|_{L_1}=$$

$$=\sup_{\substack{\psi_j\in F_1,\,\psi_1\perp\mu_1,j=\overline{1,n},\\ T_1(K_1*\psi_1)=\theta}}\|(K_1*\ldots*K_n*\psi_1*...*\psi_n)(\cdot)\|_{L_1}=$$

$$=\sup_{\substack{\psi_j\in F_1,\,\psi_1\perp\mu_1,j=\overline{1,n},\\ T_1(K_1*\psi_1)=\theta}}\sup_{\phi\in F_\infty}\int\limits_0^{2\pi}(K_1*\ldots*K_n*\psi_1*...*\psi_n)(t)\phi(t)dt=$$

$$=\sup_{\phi\in F_\infty}\sup_{\substack{\psi_j\in F_1,\,\psi_1\perp\mu_1,j=\overline{1,n},\\ T_1(K_1*\psi_1)=\theta}}\int\limits_0^{2\pi}((K_1*\ldots*K_n)(-\cdot)*\phi)(u)\cdot(\psi_1*...*\psi_n)(u)du=$$

$$=\sup_{\phi\in F_\infty}\sup_{\substack{\psi_j\in F_1,\,\psi_1\perp\mu_1,j=\overline{1,n-1},\\ T_1(K_1*\psi_1)=\theta}}\max_t\int\limits_0^{2\pi}((K_1*\ldots*K_n)(-\cdot)*\phi)(u)\cdot(\psi_1*...*\psi_{n-1})(u-t)du=$$

$$=\sup_{\phi\in F_\infty}\sup_{\substack{\psi_j\in F_1,\,\psi_1\perp\mu_1,j=\overline{1,n-1},\\ T_1(K_1*\psi_1)=\theta}}\int\limits_0^{2\pi}((K_1*\ldots*K_n)(-\cdot)*\phi)(u)\cdot(\psi_1*...*\psi_{n-1})(u)du=\ldots=$$

$$=\sup_{\phi\in F_\infty}\sup_{\substack{\psi_j\in F_1,\,\psi_1\perp\mu_1,j=1,2,\\ T_1(K_1*\psi_1)=\theta}}\int\limits_0^{2\pi}((K_1*\ldots*K_n)(-\cdot)*\phi)(u)\cdot(\psi_1*\psi_2)(u)du=$$

$$=\sup_{\phi\in F_\infty}\sup_{\substack{\psi_j\in F_1,\psi_1\perp\mu_1,\\ T_1(K_1*\psi_1)=\theta}}\int\limits_0^{2\pi}((K_1*\ldots*K_n)(-\cdot)*\phi)(u)\psi_1(u)du.$$

Функціонали $T_{1,1},...,T_{1,m_1}$ допускають неперервні продовження $T'_{1,1},...,T'_{1,m_1}$ на весь простір L_1, причому у випадку $\mu_1=...=\mu_n=1$ ці продовження можна вибрати такими, щоб визначений на всьому L_1 функціонал $T_{1,0}$ був лінійною комбінацією функціоналів $T'_{1,1},...,T'_{1,m_1}$. Нехай функціонали $T'_{1,j}$ мають вигляд

$$T'_{1,j}(x_1)=\int\limits_0^{2\pi}x_1(t)g_{1,j}(t)dt,\,j=1,...,m_1,$$

де $g_{1,j}$ – фіксовані функції з L_∞. Ясно, що при $\mu_1 = ... = \mu_n = 1$ функція $g_{1,0} \equiv 1$ є лінійною комбінацією функцій $g_{1,1}, g_{1,2}, ..., g_{1,m_1}$, звідки випливає, що функції $K_1(-\cdot) * g_{1,1}, K_1(-\cdot) * g_{1,2}, ..., K_1(-\cdot) * g_{1,m_1}$ лінійно залежні.

Умова $T_1(K_1 * \psi_1) = \theta$ означає, що для $j = 1, ..., m_1$

$$\int\limits_0^{2\pi} (K_1 * \psi_1)(t) g_{1,j}(t) dt = 0,$$

або

$$\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} K_1(t-\tau)\psi_1(\tau) d\tau g_{1,j}(t) dt = 0,$$

або

$$\int\limits_0^{2\pi} \psi_1(\tau) \int\limits_0^{2\pi} K_1(t-\tau) g_{1,j}(t) dt d\tau = 0.$$

Таким чином, умова $T_1(K_1 * \psi_1) = \theta$ означає, що $\psi_1 \perp K_1(-\cdot) * g_{1,j}$ для будь-якого $j = 1, \ldots, m_1$. Тому, враховуючи теорему двоїстості С. М. Нікольського (див. [9], с. 120] твердження 3.4.4), отримуємо

$$A_1 = \sup_{\phi \in F_\infty} \sup_{\substack{\psi_1 \in F_1, \psi_1 \perp \mu_1, \\ \psi_1 \perp K_1(-\cdot) * g_{1,j}, j = \overline{1, m_1}}} \int\limits_0^{2\pi} ((K_1 * \ldots * K_n)(-\cdot) * \phi)(u) \cdot \psi_1(u) du =$$

$$= \sup_{\phi \in F_\infty} E((K_1 * \ldots * K_n)(-\cdot) * \phi); H(T_1))_C, \tag{3.5}$$

де $E(x; H(T_1))_C$ – найкраще наближення функції x підпростором

$$H(T_1) = \mathrm{span}\{K_1(-\cdot) * g_{1,1}, ..., K_1(-\cdot) * g_{1,m_1}\}$$

в просторі C. З означення функцій $g_{1,1}, ..., g_{1,m_1}$ випливає, що як у випадку $\mu_1 = ... = \mu_n = 0$, так і у випадку $\mu_1 = ... = \mu_n = 1$, $\dim H(T_1) \leq m_1$, і з (3.5), враховуючи означення поперечника за Колмогоровим, отримуємо

$$A_1 \geq d_{m_1}((K_1 * ... * K_n)(-\cdot) * F_\infty, C).$$

Теорема 3.1.1 доведена.

Результати цього підрозділу наведні в [17, 18, 33].

3.2 Оцінки зверху відновлення згортки n функцій за лінійною інформацією на множинах 2π - періодичних функцій виду $x = a\mu + K * \psi$, де $K \in L_1$ і не збільшує осциляцію

Позначимо через H^T_{2s-1}, $s \in \mathbb{N}$ множину тригонометричних поліномів порядку, не вище $s-1$. Неперервне на $(0, 2\pi)$ ядро K, яке не є тригонометричним поліномом будемо називати CVD - ядром (і писати $K \in CVD$), якщо для будь-яких $a \in \mathbb{R}$, $\phi \in C$, $\phi \perp \mu = \mu(K)$ буде $\nu(a\mu + K * \phi) \leq \nu(\phi)$, де $\nu(g)$ – число змін знаку функції g на періоді. Ряд питань теорії CVD-ядер викладено в [72], [67].

Нехай $K \in CVD$. Тоді це ядро задовольняє умовам теореми 4.1 з [6] і, отже, якщо $\varphi_s(t) = \operatorname{sign} \sin st$, σ – точка абсолютного максимума або абсолютного мінімума функції $K * \varphi_s$, тоді існує єдиний поліном $P_s = P_s(K) \in {H^T}_{2s-1}$, інтерполюючий $K(t)$ в точках $\sigma + \frac{m\pi}{s}, m \in \mathbb{Z}$, якщо всі точки $\sigma + \frac{m\pi}{s}, m \in \mathbb{Z}$, є точками неперервності K. Якщо ж K розірвно в нулі та $0 \in \{\sigma + \frac{m\pi}{s} | m \in \mathbb{Z}\}$, тоді існує єдиний поліном $P_s = P_s(K) \in {H^T}_{2s-1}$, інтерполюючий $K(t)$ в точках $\sigma + \frac{m\pi}{s} \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2\pi)$. Поліном $P_s = P_s(K)$ (див. [6] теореми 2.4, 4.2 і §5, [89]) є поліномом найкращого L_1-наближення для K і при цьому

$$\|K - P_s\|_{L_1} = \|K(-\cdot) - P_s(-\cdot)\|_{L_1} = \|K * \varphi_s\|_\infty =$$
$$= d_{2s-1}(K * F_\infty; C) = d_{2s-1}(K(-\cdot) * F_\infty; C). \tag{3.6}$$

Нижче, розглядаючи задачу оптимального відновлення згортки $x_1 * \ldots * x_n$, де $x_1 \in K_1 * F_1, \ldots x_n \in K_n * F_1$, ми будемо припускати, що ядра $K_1, \ldots, K_n$ такі, що $K_1 * \ldots * K_n \in CVD$.

Нехай $a_j(x)$, $b_j(x)$– коефіцієнти Фур'є функції $x \in L_1$, тобто

$$a_j(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} x(t) \cos jt dt, \quad b_j(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} x(t) \sin jt dt,$$

$$c_j(x) = \frac{a_j(x) - ib_j(x)}{2}, \quad c_{-j}(x) = \frac{a_j(x) + ib_j(x)}{2}, \quad j = 0, 1, ...$$

Припустимо

$$\alpha_j = \frac{c_j(P_n(K_1 * ... * K_n))}{c_j(K_1)...c_j(K_n)}, \quad j = \pm 1, ..., \pm(s-1), \tag{3.7}$$

α_0 обчислюється за формулою (3.7), якщо $\mu(K_1) = ... = \mu(K_n) = 0$, і $\alpha_0 = (2\pi)^{n-1}$ – у протилежному випадку. Зазначимо, що з припущення $K_1 * \ldots * K_n \in CVD$ випливає, що всі коефіцієнти $c_j(K_1), ..., c_j(K_n)$ при кожному $j \in \mathbb{Z}$ відмінні від нуля.

Нехай

$$T_l{}^*(x_l) = (a_0(x_l), a_1(x_l), ..., a_{N-1}(x_l), b_1(x_l), ..., b_{N-1}(x_l)), l = 1, ..., n. \tag{3.8}$$

$$\Phi^*(T_1{}^*(x_1), ..., T_n{}^*(x_n))(t) = \sum_{j=-(s-1)}^{s-1} \alpha_j c_j(x_1)...c_j(x_n) e^{ijt}. \tag{3.9}$$

Тоді, якщо $x_1 = a_1'\mu_1 + K_1 * \psi_1 \in K_1 * F_1, ..., x_n = a_n'\mu_n + K_n * \psi_n \in K_n * F_1$, де $a_j' \in \mathbb{R}, j = \overline{1, n}$, тоді, враховуючи той факт, що для $g_1, ..., g_n \in L_1$

$$c_j(g_1 * ... * g_n) = (2\pi)^{n-1} c_j(g_1)...c_j(g_n), j \in \mathbb{Z}$$

і, діючи, як при перетворенні величини A_1 в доведенні теореми 3.1.1, отримуємо

$$\|x_1 * ... * x_n - \Phi^*(T_1{}^*(x_1), ..., T_n{}^*(x_n)\|_{L_1} =$$

$$= \|K_1 * ... * K_n * \psi_1 * ... * \psi_n - P_s(K_1 * ... * K_n) * \psi_1 ... * \psi_n\|_{L_1} =$$

$$= \sup_{\phi \in F_\infty} \int_0^{2\pi} [(K_1 * \ldots * K_n * \psi_1 * ... * \psi_n)(t) - (P_s(K_1 * ... * K_n) * \psi_1 * ... * \psi_n)(t)] \phi(t) dt =$$

$$= \sup_{\phi \in F_\infty} \int_0^{2\pi} [(K_1 * \ldots * K_n)(-\cdot) - (P_s(K_1 * ... * K_n))(-\cdot)] * \phi(t) (\psi_1 * ... * \psi_{n-1}) * \psi_n(t) dt.$$

Звідси випливає, що

$$\|x_1 * ... * x_n - \Phi^*(T_1{}^*(x_1), ..., T_n{}^*(x_n)\|_{L_1} \leq$$

$$\leq \sup_{\phi \in F_\infty} \|[(K_1 * \ldots * K_n)(-\cdot) - (P_s(K_1 * ... * K_n))(-\cdot)] * \phi * \psi_1 * ... * \psi_{n-1}\|_C \, \|\psi_n\|_{L_1} \leq$$

$$\leq \sup_{\phi \in F_\infty} \|[(K_1 * \ldots * K_n)(-\cdot) - (P_s(K_1 * ... * K_n))(-\cdot)] * \phi\|_C \leq$$

$$\leq \|(K_1 * ... * K_n)(-\cdot) - (P_s(K_1 * ... * K_n))(-\cdot)\|_{L_1} \leq$$

$$\leq \|K_1 * ... * K_n - P_s(K_1 * ... * K_n)\|_{L_1}.$$

Враховуючи співвідношення (3.6), отримуємо

$$\|x_1 * ... * x_n - \Phi^*({T_1}^*(x_1), ..., {T_n}^*(x_n)\|_{L_1} \leq d_{2s-1}(K_1 * ... * K_n * F_\infty; C).$$

Таким чином,

$$R(K_1 * F_1, ..., K_n * F_1; T_1, ..., T_n; \Phi^*; L_1) \leq$$

$$\leq d_{2s-1}(K_1 * ... * K_n * F_\infty; C) = \|K_1 * ... * K_n * \varphi_s\|_C.$$

Враховуючи оцінку знизу, яку дає теорема 3.1.1, і монотонне незростання поперечників $d_m(M, C)$ із зростанням m, переконуємося в справедливості наступної теореми.

Теорема 3.2.1. *Нехай ядра $K_1, ..., K_n$ такі, що $K_1 ... * K_n \in CVD$, нехай $s \in \mathbb{N}$ і нехай $N = n(2s-1)$. Тоді*

$$R_{n(2s-1)}(K_1 * F_1, .., K_n * F_1; L_1) = R_{2s-1,...,2s-1}(K_1 * F_1, ..., K_n * F_1; L_1) =$$

$$= d_{2s-1}(K_1 * ... * K_n * F_\infty, C) = \|K_1 * ... * K_n * \varphi_s\|_C.$$

При цьому оптимальна інформація визначаєтьcя рівністю (3.8)*, а оптимальний метод її використання – рівністю* (3.9)*.*

Результати цього підрозділу наведні в [33].

Висновки до розділу 3

В розділі 3 розв'язано задачу відновлення згортки n функцій виду

$$(x_1 * x_2 * ... * x_n)(\tau) = (x_1 * (x_2 * ... * x_n))(\tau) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} x_1(\tau - t_1 - ... - t_{n-1}) x_2(t_1) ... x_n(t_{n-1}) dt_1 dt_2 ... dt_{n-1}$$

на опуклих центрально - симетричних множинах 2π - періодичних функцій виду $x = a\mu + K * \psi$, де $a \in \mathbb{R}$, $\psi \in F_p$, $\psi \perp \mu$, де $\mu = 1$, якщо $\int\limits_0^{2\pi} K dt = 0$ і $\mu = 0$, якщо $\int\limits_0^{2\pi} K dt \neq 0$.

Доведено, що для ядер $K \in L_1$, які не збільшують осциляцію, коефіцієнти Фур'є функцій аргументів згортки є оптимальною лінійною інформацією як для $\mu = 0$ так і для $\mu = 1$. В обох випадках знайдено оптимальній метод відновлення згортки та обчислено оптимальну похибку відновлення.

Похибка відновлення має вид

$$R_{n(2s-1)}(K_1 * F_1, ..., K_n * F_1; L_1) = R_{2s-1,...,2s-1}(K_1 * F_1, ..., K_n * F_1; L_1) =$$

$$= d_{2s-1}(K_1 * ... * K_n * F_\infty, C) = \|K_1 * ... * K_n * \varphi_s\|_C.$$

Розділ 4

Оптимальне відновлення елементів гільбертового простору та їхніх скалярних добутків за коефіцієнтами Фур'є, які відомі з похибкою.

4.1 Постановка задач.

Нехай задано банахів простір X, клас елементів $W \subset X$ і деяку (інформаційну) множину Y. Нехай також задано (інформаційне) відображення $I : W \to \mathcal{P}_0(Y)$, де $\mathcal{P}_0(Y)$ сукупність непорожніх підмножин множини Y. Будемо вважати, що, бажаючи отримати інформацію про елемент x, ми отримуємо деякий елемент множини $I(x)$.

Довільне відображення $\Phi : Y \to X$ будемо називати методом відновлення елементів множини W за заданою інформацією.

Похибкою методу відновлення на класі W за інформацією I називається величина

$$E(W, I, \Phi) = \sup_{\substack{x \in W \\ y \in I(x)}} \|x - \Phi(y)\|_X. \tag{4.1}$$

Величина

$$E(W; I) = \inf_{\Phi} E(W, I, \Phi) \tag{4.2}$$

називається похибкою оптимального відновлення елементів класу W за інформацією I. При цьому метод Φ^*, який реалізує точну нижню межу у (4.2), називається оптимальним.

Нехай H_1 і H_2 – комплексні гільбертові простори зі скалярними добутками $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_1}$ та $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_2}$ і відповідними нормами $\|\cdot\|_{H_1}$ і $\|\cdot\|_{H_2}$, A – компактний оператор, що діє з H_1 в H_2. Через W^A позначимо образ одиничної кулі простору H_1 при дії оператора A, тобто

$$W^A = \{Ah \,:\, h \in H_1,\ \|h\|_{H_1} \le 1\}.$$

Ми будемо розглядати задачу відновлення елементів класу W^A у випадку, коли $X = H_2$, $Y = \mathbb{C}^n$, а інформація про елемент $x \in W^A$ полягає у тому, що нам відомо з деякою похибкою n коефіцієнтів Фур'є елемента x за деякою (пов'язаною з оператором A) ортонормованою системою. Результати даної роботи доповнюють та узагальнюють результати роботи [45], які відносяться до відновлення функцій.

Задачу відновлення лінійних операторів у гільбертових просторах, коли інформацію задано точно, було розглянуто в роботі [73]. У випадку, коли інформаційне відображення I має вигляд $Ix = i(x) + B$, де i – лінійний оператор, а B – куля деякого радіуса (яка задає похибку), відповідну задачу відновлення було розглянуто у роботі [76] (див. також [74],[83], [90]). Інший підхід до вивчення таких задач, який базується на стандартних принципах опуклої оптимізації, використовувався у [45]. При цьому у [76] доведено, що серед оптимальних методів відновлення існує лінійний, а у [45] знайдено оптимальні методи відновлення у випадках, коли похибка задається у рівномірній метриці.

У данному розділі ми розглянемо задачу оптимального відновлення за неточною інформацією про елементи класу W^A при різних способах означення оператора I. Крім того, ми розглянемо задачу оптимального відновлення скалярних добутків елементів з двох (взагалі кажучи, різних) класів елементів гільбертового простору H за неточною інформацією про співмножники. Ця задача формулюється так.

Нехай H - гільбертовий простір зі скалярним добутком $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$. Нехай W_1 і W_2 - два класи елементів простору H. Нехай також $I : H\times H\to\mathcal{P}_0(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n)$ - деяке інформаційне відображення. Довільне відображення $\Phi:\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ будемо називати методом відновлення скалярного добутку. Величину

$$\mathcal{E}(W_1,W_2,I,\Phi)=\sup_{\substack{x\in W_1,y\in W_2\\(\overline{a},\overline{b})\in I(x,y)}}|\langle x,y\rangle_H-\Phi(\overline{a},\overline{b})|$$

будемо називати похибкою методу відновлення Φ скалярного добутку на класах W_1 і W_2 за інформацією, що дається оператором I. Величину

$$\mathcal{E}(W_1,W_2,I)=\inf_{\Phi}\mathcal{E}(W_1,W_2,I,\Phi) \tag{4.3}$$

будемо називати оптимальною похибкою відновлення скалярного добутку на класах W_1 і W_2 за інформацією, що дається оператором I, а метод Φ^*, який реалізує інфінум у правій частині (4.3), - оптимальним методом відновлення.

Задачу оптимального відновлення білінійних функціоналів (зокрема, скалярних добутків) за точною лінійною інформацією про аргументи було поставлено у роботі [4]. Там же було отримано перші результати щодо її розв'язання. З приводу подальших результатів див. роботи [6], [7], [9], [12], [13].

У даній роботі ми розглянемо задачу оптимального відновлення скалярних добутків елементів з класів W_1 і W_2 за неточною інформацією про перші n коефіцієнтів Фур'є елементів за деякою ортонормованою системою.

4.2 Загальні оцінки знизу похибок оптимального відновлення

Нехай X - банахів простір, Y - векторний простір і θ_Y - нульовий елемент простору Y (нульовий елемент простору $\mathbb{C}^n$ будемо позначати через θ). Нехай також I - деяке інформаційне відображення.

Лема 4.2.1. Припустимо, що знайдеться елемент $\tilde{x} \in W$ такий, що $-\tilde{x} \in W$ і $\theta_Y \in I(\tilde{x}) \cap I(-\tilde{x})$. Тоді для будь-якого методу Φ

$$E(W, I, \Phi) \geq \|\tilde{x}\|_X$$

і, отже,

$$E(W; I) \geq \|\tilde{x}\|_X.$$

Доведення. Маємо

$$E(W, I, \Phi) = \sup_{\substack{x \in W \\ a \in I(x)}} \|x - \Phi(a)\|_X \geq \sup_{\substack{x \in W \\ \theta_Y \in I(x) \cap I(-x)}} \|x - \Phi(\theta_Y)\|_X \geq$$

$$\geq \sup_{\substack{x \in W \\ \theta_Y \in I(x) \cap I(-x)}} \max\{\|x - \Phi(\theta_Y)\|_X, \| - x - \Phi(\theta_Y)\|_X\} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \sup_{\substack{x \in W \\ \theta_Y \in I(x) \cap I(-x)}} \max\{\|x - \Phi(\theta_Y)\|_X + \| - x - \Phi(\theta_Y)\|_X\} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \sup_{\substack{x \in W \\ \theta_Y \in I(x) \cap I(-x)}} \max\{\|x - \Phi(\theta_Y)\|_X + \|x + \Phi(\theta_Y)\|_X\} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \sup_{\substack{x \in W \\ \theta_Y \in I(x) \cap I(-x)}} 2\|x\|_X \geq \|\tilde{x}\|_X.$$

Лему 4.2.1 доведено.

Лема 4.2.2. Нехай задано класи W_1 і W_2 елементів гільбертового простору H та довільне інформаційне відображення $I : H \times H \to \mathcal{P}_0(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)$. Припустимо, що знайдуться елементи $\tilde{x} \in W_1$ і $\tilde{y} \in W_2$ такі, що

$$-\tilde{x} \in W_1 \quad \text{і} \quad (\theta, \theta) \in I(\tilde{x}, \tilde{y}) \cap I(-\tilde{x}, \tilde{y})$$

або

$$-\tilde{y} \in W_2 \quad \text{і} \quad (\theta, \theta) \in I(\tilde{x}, \tilde{y}) \cap I(\tilde{x}, -\tilde{y}).$$

Тоді для будь-якого методу відновлення $\Phi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

$$\mathcal{E}(W_1, W_2, I, \Phi) \geq |\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle_H|.$$

Доведення. Нехай, для визначеності, $(\theta, \theta) \in (I(\tilde{x}, \tilde{y}) \cap I(-\tilde{x}, \tilde{y}))$. Тоді для довільного Φ

$$\mathcal{E}(W_1, W_2, I, \Phi) \geq \sup_{\substack{x \in W_1, y \in W_2 \\ (\theta,\theta) \in (I(x,y) \cap I(-x,y))}} |\langle x, y \rangle_H - \Phi(\theta, \theta)| \geq$$

$$\geq \max\{|\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle_H - \Phi(\theta, \theta)|, |\langle -\tilde{x}, \tilde{y} \rangle_H - \Phi(\theta, \theta)|\} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\{|\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle_H - \Phi(\theta, \theta)| + |\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle_H + \Phi(\theta, \theta)|\} \geq |\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle_H|.$$

Лему 4.2.2 доведено.

4.3 s - числа та канонічне представлення компактного оператора у гільбертовому просторі

Нехай H_1 і H_2 – гільбертові простори, A – компактний оператор, що діє з H_1 в H_2, A^* – спряжений оператор. Тут ми наведемо, в потрібному нам вигляді, твердження про канонічне зображення оператора A (див., наприклад, [28]). Оператор $A^*A : H_1 \to H_1$ є додатним, компактним та самоспряженим. В силу теореми Гільберта - Шмідта в H_1 існує ортонормована система $\{\phi_n\}$ власних векторів цього оператора, які відповідають власним значенням $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \neq 0$, така, що кожний елемент $\xi \in H_1$ можна представити єдиним чином у вигляді

$$\xi = \xi' + \sum_k c_k \phi_k, \quad \xi' \in \mathrm{Ker} A^*A, \tag{4.4}$$

при цьому $A^*A\xi = \sum\limits_k \lambda_k c_k \phi_k$, і, якщо система $\{\phi_n\}$ нескінченна, то $\lambda_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Оскільки оператор A^*A додатний, його ненульові власні значення додатні. Занумеруємо їх у порядку незростання з урахуванням кратностей: $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq \ldots$. Покладемо $s_n = \sqrt{\lambda_n}$. Враховуючи, що $\mathrm{Ker} A^*A = \mathrm{Ker} A$, з (4.4) отримуємо

$$A\xi = \sum_k c_k A\phi_k = \sum_k s_k c_k \frac{1}{s_k} A\phi_k = \sum_k s_k c_k \psi_k,$$

де $\psi_k = \frac{1}{s_k} A\phi_k$. Як не важко перевірити, $\{\psi_n\}$ – ортонормована система у просторі H_2. Таким чином, якщо A – компактний оператор, що діє з H_1 в H_2, то в H_1 і H_2 існують такі ортонормовані системи $\{\phi_n\}$ і $\{\psi_n\}$, що $A\phi_n = s_n \psi_n$, будь-який $\xi \in H_1$ можна представити єдиним чином у вигляді

$$\xi = \xi' + \sum_k \langle \xi, \phi_k \rangle_{H_1} \phi_k, \quad \xi' \in \mathrm{Ker} A,$$

при цьому

$$A\xi = \sum_k s_k \langle \xi, \phi_k \rangle_{H_1} \psi_k. \tag{4.5}$$

Як і у випадку $H_1 = H_2$, числа s_n будемо називати s-числами оператора A, а рівність (4.5) – канонічним зображенням цього оператора.

4.4 Відновлення за неточно заданою інформацією

В подальшому ми вважатимемо, що для оператора A система $\{\phi_k\}$, і, отже, система s-чисел $\{s_k\}$ нескінченна. Зміни, які потрібно внести у формулювання теорем і їхні доведення у протилежному випадку, очевидні, і ми на них не зупиняємось. Нагадаємо, що $W^A = \{x \in H_2 \ : \ x = Ah, \ h \in H_1, \ \|h\|_{H_1} \leq 1\}$. Для $x \in W^A$ через $x_k = \langle x, \psi_k \rangle_{H_2}$, $k \in \mathbb{N}$, позначатимемо коефіцієнти Фур'є елемента $x = Ah$ по системі $\{\psi_k\}$, а через $h_k = \langle h, \phi_k \rangle_{H_1}$ – коефіцієнти Фур'є елемента h по системі $\{\phi_k\}$. Зрозуміло, що $x_k = s_k h_k$. Розглянемо задачу відновлення класу W^A в ситуації, коли інформація про перші n членів послідовності $\{x_k\}$ коефіцієнтів Фур'є є відомою з деякою похибкою, тобто замість значень $x_k = s_k h_k, \ k = 1, \ldots, n$, задано набір чисел a_k, які відрізняються від x_k на малу величину в тій або іншій метриці.

Як звичайно, через $l_p^n, \ (n \geq 1, 1 \leq p \leq \infty)$ будемо позначати лінійний простір векторів $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ з відповідною нормою $\| \cdot \|_p = \| \cdot \|_{l_p^n}$.

Для невід'ємного ε через $B[\varepsilon, l_p^n]$ позначимо замкнену кулю у просторі l_p^n з центром у нулі та радіусом ε. У випадку, коли $n = 1$, замість $B[\varepsilon, l_p^n]$ будемо писати $B[\varepsilon]$. Крім того, скрізь нижче вважаємо, що $\sum\limits_{k=1}^{0}$ дорівнює нулю, якщо під знаком суми стоять числа, і дорівнює нульовому елементу гільбертового простору H, якщо під знаком суми стоять елементи H.

4.4.1 Випадок $I(x) = I_{\overline{\varepsilon}}^n(x) = (x_1, \ldots, x_n) + B[\varepsilon_1] \times \ldots \times B[\varepsilon_n]$, $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \mathbb{R}_+^n$.

Теорема 4.4.1.1. Нехай $A : H_1 \to H_2$ – компактний оператор і $n \in \mathbb{N}$. Якщо

$$1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k^2}{s_k^2} \geq 0,$$

то покладемо $m = n$. У протилежному випадку виберемо $m \in \mathbb{Z}_+, \ m \leq n$, так, щоб

$$1-\sum_{k=1}^{m}\frac{\varepsilon_k^2}{s_k^2}\geq 0 \quad \text{i} \quad 1-\sum_{k=1}^{m}\frac{\varepsilon_k^2}{s_k^2}-\frac{\varepsilon_{m+1}^2}{s_{m+1}^2}<0. \tag{4.6}$$

Тоді

$$E(W^A;I_{\overline{\varepsilon}}^n)^2=s_{m+1}^2+\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k^2\left(1-\frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}\right). \tag{4.7}$$

При цьому оптимальним методом відновлення є метод

$$\Phi_m^*(\overline{a})=\sum_{k=1}^{m}a_k\left(1-\frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}\right)\psi_k, \quad \overline{a}=(a_1,...,a_m).$$

Зауваження 4.4.1.1. Якщо $m=0$, то похибка $E(W^A;I_{\overline{\varepsilon}}^n)^2=s_1^2$, а оптимальним методом відновлення є $\Phi_0^*(\overline{a})=\theta_{H_2}$.

Доведення. Застосовуючи нерівність опуклості і враховуючи, що $|x_k-a_k|\leq\varepsilon_k$ для $k=1,...,n$, отримуємо для $x\in W^A$ і будь-якого m ($0\leq m\leq n$)

$$\|x-\Phi_m^*(\overline{a})\|_{H_2}^2=\sum_{k=1}^{m}\left|x_k-a_k\left(1-\frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}\right)\right|^2+\sum_{k=m+1}^{\infty}|x_k|^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\left|\left(1-\frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}\right)(x_k-a_k)+\frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}x_k\right|^2+\sum_{k=m+1}^{\infty}|x_k|^2\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{m}\left(\left(1-\frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}\right)|x_k-a_k|^2+\frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}|x_k|^2\right)+\sum_{k=m+1}^{\infty}|x_k|^2\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}\right)|x_k-a_k|^2+\sum_{k=1}^{m}s_{m+1}^2|h_k|^2+\sum_{k=m+1}^{\infty}s_k^2|h_k|^2\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}\right)\varepsilon_k^2+s_{m+1}^2.$$

Таким чином, при будь-якому $m\leq n$ має місце оцінка

$$\|x-\Phi_m^*(\overline{a})\|_{H_2}^2\leq\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}\right)\varepsilon_k^2+s_{m+1}^2. \tag{4.8}$$

Для встановлення оцінки знизу, припустимо, що число m вибране з умови (4.6) і означимо набір невід'ємних чисел $u_1, ..., u_m, u_{m+1}$:

$$u_k^2 = \frac{\varepsilon_k^2}{s_k^2}, \quad k = 1, ..., m \quad \text{і} \quad u_{m+1}^2 = 1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k^2}{s_k^2}.$$

Покладемо $\tilde{h} = \sum\limits_{k=1}^{m+1} u_k \phi_k$ і $\tilde{x} = A\tilde{h} = \sum\limits_{k=1}^{m+1} s_k u_k \psi_k$. Зрозуміло, що $\tilde{x} \in W^A$ і

$$\|\tilde{x}\|_{H_2}^2 = \sum_{k=1}^{m} s_k^2 u_k^2 + s_{m+1}^2 u_{m+1}^2 = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k^2 + s_{m+1}^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k^2}{s_k^2}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k^2 + s_{m+1}^2 - \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k^2 \frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}.$$

Покажемо, що $\theta \in I_{\bar{\varepsilon}}^n(\tilde{x}) \cap I_{\bar{\varepsilon}}^n(-\tilde{x})$. У випадку, коли $m = n$, виконання умов

$$|\tilde{x}_k| = |s_k u_k| \leq \varepsilon_k \tag{4.9}$$

для всіх $k = 1, .., n$, очевидне, так що $\theta \in I_{\bar{\varepsilon}}^n(\tilde{x}) \cap I_{\bar{\varepsilon}}^n(-\tilde{x})$. У випадку $m \leq n - 1$ для $k = 1, ..., m$ умови (4.9) виконуються в наслідок визначення u_k і $\tilde{x}_k$. Для $k = m + 1$ на підставі умови (4.6) маємо

$$|u_{m+1}|^2 \leq \frac{\varepsilon_{m+1}^2}{s_{m+1}^2} \quad \text{і} \quad |\tilde{x}_{m+1}|^2 \leq \varepsilon_{m+1}^2.$$

Умову (4.9) виконано і в цьому випадку. Таким чином, $\theta \in I_{\bar{\varepsilon}}^n(\tilde{x}) \cap I_{\bar{\varepsilon}}^n(-\tilde{x})$. Застосовуючи лему 4.2.1, отримуємо

$$E(W^A; I_{\bar{\varepsilon}}^n)^2 \geq \|\tilde{x}\|_{H_2}^2 = s_{m+1}^2 + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k^2 \left(1 - \frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}\right).$$

Теорему 4.4.1.1 доведено.

4.4.2 Випадок $I(x) = I_{\varepsilon,2}^n(x) = (x_1, \ldots, x_n) + B[\varepsilon; l_2^n]$.

Теорема 4.4.2.1. Нехай $A : H_1 \to H_2$ – компактний оператор. Тоді, якщо $\varepsilon < s_1$, то

$$E(W^A, I_{\varepsilon,2}^n) = \sqrt{s_{n+1}^2 + \varepsilon^2 \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_1^2}\right)}.$$

При цьому оптимальним методом відновлення є

$$\Phi_n^*(\overline{a}) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_k^2}\right)\psi_k.$$

Якщо $\varepsilon \geq s_1$, то $E(W^A, I_{\varepsilon,2}^n) = s_1$ і оптимальним методом відновлення є $\Phi_0^*(\overline{a}) = \theta$.

Доведення. Спочатку встановимо оцінку зверху. З оцінки (4.8) при $m = n$, враховуючи, що $\sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 \leq \varepsilon^2$, виводимо

$$E(W^A, I_{\varepsilon,2}^n) \leq \sup_{x \in W^A} \|x - \Phi_n^*(\overline{a})\|_{H_2}^2 \leq \max_{k=1,\ldots,n} \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_k^2}\right)\varepsilon^2 + s_{n+1}^2 =$$

$$= \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_1^2}\right)\varepsilon^2 + s_{n+1}^2.$$

Необхідну оцінку зверху отримано. Встановимо оцінку знизу. Припустимо, що $\varepsilon < s_1$.

Нехай $u_1 = \frac{\varepsilon}{s_1}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{s_1^2}}$. Покладемо

$$\tilde{u} = u_1\phi_1 + u_{n+1}\phi_{n+1} \quad \text{і} \quad \tilde{x} = A\tilde{u} = s_1 u_1 \psi_1 + s_{n+1} u_{n+1} \psi_{n+1} =$$

$$= \varepsilon\psi_1 + s_{n+1}\psi_{n+1}\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{s_1^2}}.$$

При цьому, вочевидь, $\theta \in I_{\varepsilon,2}^n(\tilde{x}) \cap I_{\varepsilon,2}^n(-\tilde{x})$. Крім того, $\tilde{x} \in W^A$ і

$$\|\tilde{x}\|_{H_2}^2 = \varepsilon^2 + s_{n+1}^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{s_1^2}\right) = \varepsilon^2 \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_1^2}\right) + s_{n+1}^2.$$

Використовуючи лему 4.2.1, отримуємо

$$E(W^A, I_{\varepsilon,2}^n)^2 \geq \|\tilde{x}\|_{H_2}^2 = \varepsilon^2 \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_1^2}\right) + s_{n+1}^2.$$

Випадок $\varepsilon < s_1$ розглянуто.

Нехай тепер $\varepsilon \geq s_1$. Тоді для $\Phi_0^*(\overline{a}) = \theta$

$$E(W^A, I_{\varepsilon,2}^n) \leq \sup_{x \in W^A} \|x - \theta\|_{H_2} \leq s_1.$$

Для оцінки знизу, покладемо $\tilde{u} = \psi_1$ і $\tilde{x} = s_1\psi_1$, $\|\tilde{x}\|_{H_2} = s_1$. Зрозуміло, що $\theta \in I^n_{\varepsilon,2}(\tilde{x}) \cap I^n_{\varepsilon,2}(-\tilde{x})$ і за лемою 4.2.1

$$E(W^A, I^n_{\varepsilon,2}) \geq \|\tilde{x}\|_{H_2} = s_1.$$

Теорему 4.4.2.1 доведено.

4.4.3 Випадок $I(x) = I^n_{\varepsilon,\infty}(x) = (x_1, \ldots, x_n) + B[\varepsilon; l^n_\infty]$.

Теорема 4.4.3.1. Нехай $A : H_1 \to H_2$ – компактний оператор і число $m \in \mathbb{Z}_+,\ m \leq n$, вибрано як у теоремі 4.4.1.1. Тоді

$$E(W^A, I^n_{\varepsilon,\infty}) = \sqrt{s_n^2 + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{s^2_{m+1}}{s_k^2}\right)}.$$

При цьому оптимальним методом відновлення є метод

$$\Phi^*_m(\overline{a}) = \sum_{k=1}^{m} a_k \left(1 - \frac{s^2_{m+1}}{s_k^2}\right)\psi_k.$$

Доведення. З теореми 4.4.1.1 виводимо наступну оцінку зверху:

$$E(W^A, I^n_{\varepsilon,\infty}) \leq \sup_{\substack{x \in W^A \\ \overline{a} \in I^n_\varepsilon(x)}} \|x - \Phi^*_m(\overline{a})\|_{H_2} \leq \sqrt{s^2_{m+1} + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{s^2_{m+1}}{s_k^2}\right)}.$$

Для отримання оцінки знизу, достатньо в міркуваннях, за допомогою яких отримано оцінку знизу в теоремі 4.4.1.1 , покласти $\varepsilon_1 = ... = \varepsilon_n = \varepsilon$. Теорему 4.4.3.1 доведено.

4.4.4 Випадок $I(x) = I^n_{\varepsilon,p}(x) = (x_1, \ldots, x_n) + B[\varepsilon; l^n_p],\ 2 < p < \infty$.

Введемо такі позначення:

$$c_k^2 = \frac{\left(1 - \frac{s^2_{n+1}}{s_k^2}\right)^{\frac{p}{p-2} - 1}}{\left(\sum_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{s^2_{n+1}}{s_j^2}\right)^{\frac{p}{p-2}}\right)^{\frac{2}{p}}}, \qquad b_k^2 = \varepsilon^2 c_k^2, \quad k = 1, ..., n.$$

Теорема 4.4.4.1. Нехай $n \in \mathbb{N}$ і

$$\Phi_n^*(\overline{a}) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(1 - \frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}\right)\psi_k, \quad \overline{a} = (a_1, ..., a_m).$$

Тоді для довільних $\varepsilon > 0$ і $2 < p < \infty$

$$E(W^A; I_{\varepsilon,p}^n)^2 \le s_{n+1}^2 + \varepsilon^2 \left(\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_k^2}\right)^{\frac{p}{p-2}}\right)^{\frac{p-2}{p}}.$$

Якщо $\varepsilon > 0$ таке, що виконано умову

$$\varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k^2}{s_k^2} \le 1, \tag{4.10}$$

то

$$E(W^A; I_{\varepsilon,p}^n)^2 = s_{n+1}^2 + \varepsilon^2 \left(\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_k^2}\right)^{\frac{p}{p-2}}\right)^{\frac{p-2}{p}}.$$

Доведення. При доведенні теореми 4.4.1.1 для $x \in W^A$ було отримано оцінку

$$\|x - \Phi_n^*(\overline{a})\|_{H_2}^2 \le \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_k^2}\right)|x_k - a_k|^2 + s_{n+1}^2 \sum_{k=1}^{n} |h_k|^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} s_k^2 |h_k|^2.$$

Застосовуючи для оцінки першого доданку нерівність Гельдера з показниками $\frac{p}{p-2}$ і $\frac{p}{2}$, і враховуючи, що

$$s_{n+1}^2 \sum_{k=1}^{n} |h_k|^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} s_k^2 |h_k|^2 \le s_{n+1}^2,$$

отримуємо

$$\|x - \Phi_n^*(\overline{a})\|_{H_2}^2 \le \left\{\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_k^2}\right)^{\frac{p}{p-2}}\right\}^{\frac{p-2}{p}} \cdot \left\{\sum_{k=1}^{n} |x_k - a_k|^p\right\}^{\frac{2}{p}} + s_{n+1}^2 \le$$

$$\le \left\{\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_k^2}\right)^{\frac{p}{p-2}}\right\}^{\frac{p-2}{p}} \varepsilon^2 + s_{n+1}^2.$$

Для встановлення оцінки знизу вимагатимемо, щоб $\varepsilon > 0$ було таким, щоб виконувалася умова (4.10).

Покладемо $u_k^2 = \frac{b_k^2}{s_k^2}$, $\quad k = 1, ..., n$, $\quad$ і $\quad u_{n+1}^2 = 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{s_k^2}$. Зауважимо, що

$$\sum_{k=1}^{n} (s_k u_k)^p = \sum_{k=1}^{n} \left(b_k^2\right)^{\frac{p}{2}} = \varepsilon^p. \tag{4.11}$$

Покладемо $\tilde{h} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} u_k \phi_k$, $\tilde{x} = A\tilde{h} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} s_k u_k \psi_k$. Зрозуміло, що $\tilde{x} \in W^A$. Крім того,

$$\|\tilde{x}\|_{H_2}^2 = \sum_{k=1}^{n} s_k^2 u_k^2 + s_{n+1}^2 u_{n+1}^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + s_{n+1}^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{s_k^2}\right) = s_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_k^2}\right) =$$

$$= s_{n+1}^2 + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_k^2}\right)\left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_k^2}\right)^{\frac{p}{p-2}-1}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_k^2}\right)^{\frac{p}{p-2}}\right)^{\frac{2}{p}}} = s_{n+1}^2 + \varepsilon^2 \left(\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_k^2}\right)^{\frac{p}{p-2}}\right)^{\frac{p-2}{p}}.$$

Внаслідок (4.11), $\theta \in I_{\varepsilon,p}^n(\tilde{x}) \cap I_{\varepsilon,p}^n(-\tilde{x})$. Застосовуючи лему 4.2.1, отримуємо

$$E(W^A; I_{\varepsilon,p}^n)^2 \geq \|\tilde{x}\|_{H_2}^2 = s_{n+1}^2 + \varepsilon^2 \left(\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_k^2}\right)^{\frac{p}{p-2}}\right)^{\frac{p-2}{p}}.$$

Теорему 4.4.4.1 доведено.

4.5 Відновлення скалярних добутків.

Застосуємо тепер методи, розвинуті в попередньому пункті, до задачі відновлення скалярних добутків.

Нехай $A : H_1 \to H_2$ – компактний оператор з канонічним зображенням (4.5):

$$Ag = \sum_k s_k \langle g, \phi_k \rangle_{H_1} \psi_k = \sum_k s_k g_k \psi_k.$$

Нехай також задано обмежений оператор $B : H_1 \to H_2$ вигляду

$$Bh = \sum_k q_k \langle h, \phi_k \rangle_{H_1} \psi_k = \sum_k q_k h_k \psi_k,$$

де $\{q_k\}$ - незростаюча послідовність додатних чисел. За допомогою цих операторів визначимо класи

$$W^A = \{Ag \ : \ \|g\|_{H_1} \leq 1\}, \quad W^B = \{Bh \ : \ \|h\|_{H_1} \leq 1\}.$$

Розглянемо задачу оптимального відновлення скалярного добутку $\langle x, y \rangle_{H_2}$ на класах W^A і W^B за неточно заданими наборами перших n коефіцієнтів Фур'є елементів $x \in W^A$ та $y \in W^B$ за системою $\{\psi_k\}$, тобто за неточно заданими наборами чисел $\{s_k g_k\}_{k=1}^n$ та $\{q_k h_k\}_{k=1}^n$. Будемо розглядати цю задачу для інформаційних відображень наступного вигляду:

$$I_{\bar{\varepsilon}}^n(x, y) = \{(a, b) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : \ \forall k = 1, ..., n, \quad |x_k y_k - a_k b_k| \leq \varepsilon_k\} \qquad i$$

$$I_{\varepsilon,p}^n(x, y) = \{(a, b) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : \|(x_1 y_1, ..., x_n y_n) - (a_1 b_1, ..., a_n b_n)\|_{l_p^n} \leq \varepsilon\}.$$

Тут $\varepsilon, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ - невід'ємні числа та $1 \leq p \leq \infty$.

4.5.1 Інформаційне відображення $I_{\bar{\varepsilon}}^n(x, y)$.

Теорема 4.5.1.1. Для заданого $n \in \mathbb{N}$ покладемо $m = n$, якщо

$$1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k}{s_k q_k} \geq 0.$$

У протилежному випадку виберемо $m \in \mathbb{Z}_+$ $(m \le n)$, виходячи з умов

$$1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k}{s_k q_k} \ge 0 \quad \text{і} \quad 1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k}{s_k q_k} - \frac{\varepsilon_{m+1}}{s_{m+1} q_{m+1}} < 0. \tag{4.12}$$

Тоді

$$E(W^A, W^B, I_{\overline{\varepsilon}}^n) = s_{m+1} q_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \left(1 - \frac{s_{m+1} q_{m+1}}{s_k q_k}\right).$$

При цьому оптимальним методом відновлення є

$$\Phi_m^*(\overline{a}, \overline{b}) = \sum_{k=1}^{m} a_k b_k \left(1 - \frac{s_{m+1} q_{m+1}}{s_k q_k}\right).$$

Доведення. Для $x \in W^A,\ y \in W^B$ маємо

$$|\langle x, y\rangle_{H_2} - \Phi_m^*(\overline{a}, \overline{b})| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k - \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{s_{m+1} q_{m+1}}{s_k q_k}\right) a_k b_k \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{m} x_k y_k - \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{s_{m+1} q_{m+1}}{s_k q_k}\right) a_k b_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} x_k y_k \right| \le$$

$$\le \left| \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{s_{m+1} q_{m+1}}{s_k q_k}\right) \left(x_k y_k - a_k b_k\right) + \sum_{k=1}^{m} \frac{s_{m+1} q_{m+1}}{s_k q_k} x_k y_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} x_k y_k \right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{s_{m+1} q_{m+1}}{s_k q_k}\right) |x_k y_k - a_k b_k| + \sum_{k=1}^{m} \frac{s_{m+1} q_{m+1}}{s_k q_k} s_k q_k |h_k g_k| +$$

$$+ s_{m+1} q_{m+1} \sum_{k=m+1}^{\infty} |h_k g_k|.$$

Використовуючи для оцінки другого і третього доданків нерівність Коші-Буняковського, продовжимо оцінку так:

$$|\langle x, y\rangle_{H_2} - \Phi_m^*(\overline{a}, \overline{b})| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{s_{m+1} q_{m+1}}{s_k q_k}\right) |x_k y_k - a_k b_k| + s_{m+1} q_{m+1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |h_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |g_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{s_{m+1} q_{m+1}}{s_k q_k}\right) \varepsilon_k + s_{m+1} q_{m+1}.$$

Таким чином, при будь-якому m має місце оцінка

$$|\langle x, y\rangle_{H_2} - \Phi_m^*(\overline{a}, \overline{b})| \leq \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_k q_k}\right) \varepsilon_k + s_{m+1}q_{m+1}. \tag{4.13}$$

Для встановлення оцінки знизу припустимо, що m вибрано з умови (4.12) і покладемо

$$u_k = v_k = \sqrt{\frac{\varepsilon_k}{s_k q_k}}, \quad k = 1, ..., m, \quad \text{і} \quad u_{m+1} = v_{m+1} = \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k}{s_k q_k}}.$$

Означимо елементи $\tilde{x} \in W^A$ і $\tilde{y} \in W^B$:

$$\tilde{x} = \sum_{k=1}^{m+1} s_k u_k \psi_k, \quad \tilde{y} = \sum_{k=1}^{m+1} q_k v_k \psi_k.$$

Покажемо, що $(\theta, \theta) \in I(\tilde{x}, \tilde{y}) \cap I(-\tilde{x}, \tilde{y})$. У випадку $m = n$, виконання умов $|\tilde{x_k}\tilde{y_k}| = |s_k q_k u_k v_k| \leq \varepsilon_k$ при всіх k є очевидним. Отже $(\theta, \theta) \in I(\tilde{x}, \tilde{y}) \cap I(-\tilde{x}, \tilde{y})$.

Якщо ж $m \leq n - 1$, то при $k = 1, ..., m$ нерівності $|\tilde{x_k}\tilde{y_k}| \leq \varepsilon_k$ виконуються згідно означенням $\tilde{x_k}$ і $\tilde{y_k}$. Для $k = m + 1$ маємо

$$|\tilde{x}_{m+1}\tilde{y}_{m+1}| = s_{m+1}q_{m+1} \left(1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k}{s_k q_k}\right) \leq s_{m+1}q_{m+1} \frac{\varepsilon_{m+1}}{s_{m+1}q_{m+1}} = \varepsilon_{m+1}.$$

Далі

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y}\rangle_{H_2} = \sum_{k=1}^{m} s_k q_k u_k v_k + s_{m+1}q_{m+1} \left(1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k}{s_k q_k}\right) =$$

$$= s_{m+1}q_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_k q_k}\right) \varepsilon_k.$$

Використовуючи лему 4.2.2, отримуємо

$$E(W^A, W^B, I_{\overline{\varepsilon}}^n) \geq \langle \tilde{x}, \tilde{y}\rangle_{H_2} = s_{m+1}q_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_k q_k}\right) \varepsilon_k.$$

Необхідну оцінку знизу встановлено.

Теорему 4.5.1.1 доведено.

4.5.2 Інформаційне відображення $I^n_{\varepsilon,1}$.

Теорема 4.5.2.1. Якщо $\varepsilon < s_1q_1$, то

$$E(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,1}) = s_{n+1}q_{n+1} + \varepsilon\left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_1q_1}\right).$$

При цьому оптимальним методом відновлення є

$$\Phi^*_n(\overline{a}, \overline{b}) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_1q_1}\right).$$

Якщо ж $\varepsilon \geq s_1q_1$, то

$$E(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,1}) = s_1q_1 \quad \text{і}$$

$\Phi^*_0(\overline{a}, \overline{b}) = \theta$ - оптимальний метод.

Доведення. З оцінки (4.13), враховуючи що $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \leq \varepsilon$, виводимо що для $x \in W^A$, $y \in W^B$ при $m = n$

$$|\langle x, y\rangle_{H_2} - \Phi^*_n(\overline{a}, \overline{b})| \leq \max_{k=\overline{1,n}} \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_kq_k}\right) \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k + s_{n+1}q_{n+1} =$$

$$= \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_1q_1}\right)\varepsilon + s_{n+1}q_{n+1}.$$

Це необхідна оцінка зверху:

$$E(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,1}) \leq s_{n+1}q_{n+1} + \varepsilon\left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_1q_1}\right).$$

Встановимо оцінку знизу. Припустимо спочатку, що $\varepsilon < s_1q_1$. Нехай $u_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{s_1q_1}}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{s_1q_1}}$. Покладемо $\tilde{u} = u_1\phi_1 + u_{n+1}\phi_{n+1}$, $\tilde{v} = u_1\phi_1 + u_{n+1}\phi_{n+1}$ і

$$\tilde{x} = A\tilde{u} = s_1\tilde{u}_1\psi_1 + s_{n+1}\tilde{u}_{n+1}\psi_{n+1}, \quad \tilde{y} = B\tilde{v} = q_1\tilde{u}_1\psi_1 + q_{n+1}\tilde{u}_{n+1}\psi_{n+1}.$$

Зрозуміло, що $\tilde{x} \in W^A$, $\tilde{y} \in W^B$ і $(\theta, \theta) \in I^n_{\varepsilon,1}(\tilde{x}, \tilde{y}) \cap I^n_{\varepsilon,1}(-\tilde{x}, \tilde{y})$. Крім того,

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y}\rangle_{H_2} = s_1q_1u_1^2 + s_{n+1}q_{n+1}u_{n+1}^2 = \varepsilon + \left(1 - \frac{\varepsilon}{s_1q_1}\right)s_{n+1}q_{n+1} =$$

$$= s_{n+1}q_{n+1} + \varepsilon\left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_1q_1}\right).$$

З огляду на лему 4.2.2 отримуємо

$$E(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,1}) \geq s_{n+1}q_{n+1} + \varepsilon\left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_1q_1}\right).$$

Нехай тепер $\varepsilon \geq s_1q_1$. Для методу $\Phi^*_0(\overline{a}, \overline{b}) = \theta$ і будь-яких $x \in W^A$, $y \in W^B$ одержуємо

$$|\langle x, y\rangle_{H_2} - \theta| = \sum_k s_kq_k|h_kg_k| \leq s_1q_1\|h\|_{H_1} \cdot \|g\|_{H_1} \leq s_1q_1.$$

Для оцінки знизу покладемо $\tilde{x} = s_1\psi_1$, $\tilde{y} = q_1\psi_1$. Зрозуміло, що $\theta \in I^n_{\varepsilon,1}(\tilde{x}, \tilde{y}) \cap I^n_{\varepsilon,1}(-\tilde{x}, \tilde{y})$. За лемою 4.2.2 маємо

$$E(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,1}) \geq |\langle \tilde{x}, \tilde{y}\rangle_{H_2}| = s_1q_1.$$

Теорему 4.5.2.1 доведено.

4.5.3 Інформаційне відображення $I^n_{\varepsilon,\infty}$.

Теорема 4.5.3.1. Для заданого $n \in \mathbb{N}$ число $m \in \mathbb{Z}_+$, $m \leq n$, виберемо як в теоремі 4.5.1.1. Тоді

$$E(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,\infty}) = s_{m+1}q_{m+1} + \varepsilon\sum_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_kq_k}\right).$$

При цьому оптимальним методом відновлення є метод

$$\Phi^*_m(\overline{a}, \overline{b}) = \sum_{k=1}^{m} a_kb_k\left(1 - \frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_kq_k}\right).$$

Доведення. З теореми 4.5.1.1 (п. 4.5.1) виводимо

$$E(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,\infty}) \leq \mathcal{E}(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,\infty}, \Phi^*_m) \leq s_{m+1}q_{m+1} + \varepsilon\sum_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_kq_k}\right).$$

Для встановлення оцінки знизу, достатньо в міркуваннях, за допомогою яких отримано оцінку знизу в теоремі 4.5.1.1 , взяти $\varepsilon_1 = ... = \varepsilon_m = \varepsilon$.

Теорему 4.5.3.1 доведено.

4.5.4 Інформаційне відображення $I^n_{\varepsilon,p}$, $1 < p < \infty$.

Нехай $q = p/(p-1)$ і

$$c_k = \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_k q_k}\right)^{q-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_j q_j}\right)^{q}\right)^{\frac{1-q}{q}}.$$

Теорема 4.5.4.1. Нехай $\Phi^*_n(\overline{a},\overline{b}) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k\left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_k q_k}\right)$, тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$E(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,p}) \le \mathcal{E}(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,p}, \Phi^*_n) \le$$
$$\le s_{n+1}q_{n+1} + \varepsilon\left(\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_k q_k}\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Якщо ε таке, що виконується умова

$$\varepsilon\sum_{k=1}^{n}(s_k q_k)^{-1}c_k \le 1, \tag{4.14}$$

то

$$E(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,p}) = \mathcal{E}(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,p}, \Phi^*_n) =$$
$$= s_{n+1}q_{n+1} + \varepsilon\left(\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_k q_k}\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

і метод $\Phi^*_n(\overline{a},\overline{b})$ є оптимальним.

Доведення. В ході доведення теореми 4.5.1.1 було встановлено оцінку

$$|\langle x,y\rangle_{H_2} - \Phi^*_n(\overline{a},\overline{b})| \le \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_k q_k}\right)|x_k y_k - a_k b_k| + s_{n+1}q_{n+1}.$$

Застосовуючи для оцінки першого доданка нерівність Гельдера з показниками p і $q = \frac{p}{p-1}$, отримуємо

$$|\langle x,y\rangle_{H_2} - \Phi^*_n(\overline{a},\overline{b})| \le$$
$$\le \left(\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_k q_k}\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k y_k - a_k b_k|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} + s_{n+1}q_{n+1} \le$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_k q_k} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \varepsilon + s_{n+1}q_{n+1}.$$

Перше твердження теореми доведено.

Для встановлення оцінки знизу, припустимо, що виконано умову (4.14). Нехай

$$u_k = v_k = (\varepsilon \cdot (s_k q_k)^{-1} \cdot c_k)^{1/2}, \quad k = 1, ..., n \text{ і } u_{n+1} = v_{n+1} =$$

$$= (1 - \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (s_k q_k)^{-1} c_k)^{1/2}.$$

Означимо елементи $\tilde{x} \in W^A$ і $\tilde{y} \in W^B$:

$$\tilde{x} = \sum_{k=1}^{n+1} s_k u_k \psi_k, \quad \tilde{y} = \sum_{k=1}^{n+1} q_k v_k \psi_k.$$

Як легко бачити, $\sum_{k=1}^{n} |\tilde{x}_k \tilde{y}_k|^p = \varepsilon^p$, так що $(\theta, \theta) \in I^n_{\varepsilon,p}(\tilde{x}, \tilde{y}) \cap I^n_{\varepsilon,p}(-\tilde{x}, \tilde{y})$. Крім того,

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle_{H_2} = \sum_{k=1}^{n} s_k q_k u_k v_k = s_{n+1}q_{n+1} + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_k q_k} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Використовуючи лему 2 , отримуємо

$$E(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,p}) \geq \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle_{H_2} = s_{n+1}q_{n+1} + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_k q_k} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Необхідну оцінку знизу встановлено.

Теорему 4.5.4.1 доведено.

Результати цього підрозділу наведно в [19], [20].

Висновки до розділу 4

В розділі 4 розв'язано задачу оптимального відновлення за неточною інформацією про елементи класу W^A при різних способах означення інформаційного оператора I.

Також розв'язано задачу оптимального відновлення скалярних добутків елементів з двох (взагалі кажучи, різних) класів елементів гільбертового простору H за неточною інформацією про співмножники.

В підрозділі 4.1 наводяться необхідні означення та формулюються задачі відновлення за неточною інформацією.

В лемі 4.2.1 означено елемент $\tilde{x}$ і доведена оцінка знизу оптимальної похибки відновлення:

$$E(W, I, \Phi) \geq \|\tilde{x}\|_X$$

а в лемі 4.2.2 означено елементи $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ і доведна наступна оцінка знизу:

$$\mathcal{E}(W_1, W_2, I, \Phi) \geq |\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle_H|.$$

В підрозділі 4.3 наводиться канонічне представлення компактного оператора.

В підрозділі 4.4 для гільбертових просторів H_1, H_2 і компактного оператора A означається множина $W^A = \{x \in H_2 \ : \ x = Ah, \ h \in H_1, \ \|h\|_{H_1} \leq 1\}$. Для W^A знайдена оптимальна лінійна інформація та оптимальній метод відновлення, а також обчислено оптимальну похибку відновлення. Оптимальною лінійною інформацією є перші коефіцієнти Фур'є по деякій ортонормованій системі. Інформація про кожен з коефіцієнтів Фур'є задається з похибкою ε_k, в кожному з пунктів 4.4.1-4.4.4 по-різному. Наведемо приклад обмеження на похибку:

$$1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k^2}{s_k^2} \geq 0,$$

де s_k - $s-$числа оператора A. Похибка відновлення звичайно залежить від похибки задання інформації. У щойно наведеному випадку похибка відновлення буде мати вид:

$$E(W^A; I^n_{\overline{\varepsilon}})^2 = s^2_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^2_k \left(1 - \frac{s^2_{n+1}}{s^2_k}\right).$$

В підрозділі 4.5 для гільбертових просторів H_1, H_2, компактного оператора A і обмеженого оператора B означаються класи $W^A = \{Ag \ : \|g\|_{H_1} \leq 1\}, \qquad W^B = \{Bh \ : \ \|h\|_{H_1} \leq 1\}$. Для W^A, W^B знайдена оптимальна лінійна інформація та оптимальній метод відновлення скалярного добудку по неточній інформаї, а також обчислено оптимальну похибку відновлення. Оптимальною лінійною інформацією є перші коефіцієнти Фур'є x_k, y_k по деякій ортонормованій системі. Але вони нам невідомі. Натомість відомі їх наближення a_k, b_k. Похибка наближення задається в кожному з пунктів 4.5.1-4.5.4 по-різному, наприклад так:

$$I^n_{\overline{\varepsilon}}(x,y) = \{(a,b) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : \forall k = 1, ..., n, |x_k y_k - a_k b_k| \leq \varepsilon_k\}, 1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k}{s_k q_k} \geq 0.$$

Похибка відновлення звичайно залежить від похибки задання інформації. У щойно наведеному випадку похибка відновлення буде мати вид:

$$E(W^A, W^B, I^n_{\overline{\varepsilon}}) = s_{n+1} q_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left(1 - \frac{s_{n+1} q_{n+1}}{s_k q_k}\right).$$

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена задачам оптимального відновлення білінійних, n-лінійних функціоналів та згорток n функцій і відновленню за інформацією, що задана з похибкою.

В першому розділі наводяться постановки задач та огляд відомих результатів. У другому, третьому і четвертому розділах наводяться нові результати.

Другий розділ присвячено дослідженню задач відновлення білінійних, n-лінійних функціоналів у сепарабельному гільбертовому просторі над полем дійсних або комплексних чисел. Для конкретних класів елементів знайдено оптимальну лінійну інформацію, оптимальний метод відновлення та обчислено оптимальну похибку відновлення.

У третьому розділі розв'язані задачі відновлення згортки n–функцій x_j виду

$$(x_1 * x_2 * ... * x_n)(\tau) = (x_1 * (x_2 * ... * x_n))(\tau) =$$
$$= \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} x_1(\tau - t_1 - ... - t_{n-1}) x_2(t_1) ... x_n(t_{n-1}) dt_1 dt_2 ... dt_{n-1}$$

за лінійною інформацією.

А саме, знайдено оптимальну лінійну інформацію, оптимальний метод її використання, оптимальну похибку відновлення на класах періодичних функцій $M_j = K_j * F_{p_j}$, що задаються згорткою ядра $K_j \in L_1$, яке не збільшує осциляцію, із функціями з F_{p_j} – одиничної кулі в L_{p_j}, $j = 1, ..., n$.

У четвертому розділі розв'язана задача оптимального відновлення підмножин гільбертового простору, які є образом кулі одиничного радіуса відносно дії компактного оператора, за інформацією про значення декількох коефіцієнтів Фур'є елементів підмножини, які задані неточно. Також, розв'язана задача про оптимальне відновлення скалярного добутку на декартовому добутку підмножин гільбертового простору, одна з яких є образом кулі одиничного радіуса відносно дії компактного оператора, а інша - образом кулі одиничного радіуса відносно дії обмеженого оператора спеціальної структури, за інформацією з похибкою про значення декількох перших коефіцієнтів Фур'є елементів цих підмножин.

Бібліоґрафія

[1] Арестов В. В. Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи / В. В. Арестов // Тр. МИАН СССР. – М.: Наука. – 1989. – Т. 189. – С. 3-20.

[2] Арестов В. В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи / В. В. Арестов // Успехи матем. наук. – 1996. – Т. 51, № 6. – С. 89-124.

[3] Ахиезер Н. И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман // М.: Наука. – 1966.

[4] Бабенко В. Ф. О наилучшем использовании линейных функционалов для аппроксимации билинейных / В. Ф. Бабенко // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их прил. – Днепропетровск. – 1979. – С. 3-5.

[5] Бабенко В. Ф. Приближение классов сверток / В. Ф. Бабенко // Сибирск. мат. журн. – 1987. – Т. 28, №5. – С. 6-21.

[6] Бабенко В. Ф. Экстремальные задачи теории приближения и несимметричные нормы / В. Ф. Бабенко // Дисс. докт. физ. - мат. наук, ДГУ. – Днепропетровск. – 1987.

[7] Бабенко В. Ф. О приближенном вычислении скалярных произведений / В. Ф. Бабенко // Укр. мат. журн. – 1988. – 40, №1. – С. 15-21.

[8] Бабенко В. Ф. Оптимальные вычисления сверток функций из различных классов / В. Ф. Бабенко // Тез. междунар. конф. по конструктивной теории функций (Варна, май 1989 г.) - София: Изд - во БАН. – 1989. – С. 5-6.

[9] Бабенко В. Ф. Об оптимальном восстановлении сверток и скалярных произведений функций из различных классов / В. Ф. Бабенко, А. А. Руденко // Укр. мат. журн. – 1991. – 43, №10. – С. 1305-1310.

[10] Бабенко В. Ф. Об оптимальном восстановлении скалярных произведений функций из различных классов / В. Ф. Бабенко, А. А. Руденко // Теория функций и приближений. – Саратов. – 1991. – С. 17-22.

[11] Бабенко В. Ф. Об оптимальном восстановлении скалярных произведений функций на классах функций, задаваемых дифференциальными операторами / В. Ф. Бабенко, А. А. Руденко // Приближение функций и суммирование рядов. – Днепропетровск. – 1992. – С. 8-13.

[12] Бабенко В. Ф. Об оптимальном восстановлении билинейных функционалов в линейных нормированных пространствах / В. Ф. Бабенко, А. А. Руденко // Укр. мат. журн. – 1997. – 49, №6. – С. 828-831.

[13] Бабенко В. Ф. Об оптимальном восстановлении билинейных функционалов по линейной информации / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, А. А. Руденко // Вiсник днiпропетровського унiверситету. Серiя: Математика. – Днiпропетровськ. – 2012. – вип. 17. – С. 11-17.

[14] Бабенко В. Ф. Об оптимальном восстановлении n-линейных функционалов по линейной информации / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, А. А. Руденко // Вiсник днiпропетровського унiверситету. Серiя: Математика. – Днiпропетровськ. – 2013. – вип. 18. – С. 16-25.

[15] Бабенко В. Ф. Задачи оптимального восстановления n-линейных функционалов по линейной информации / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, А. А. Руденко // Тез. крымской междунар. матем. конф. «КММК-2013 КРОМШ». – Украина, Автономная республика Крым, Судак. – 22 сент.- 4 окт. 2013 р. – С. 83-84.

[16] Бабенко В. Ф. Оптимальное восстановление n-линейных функционалов по линейной информации / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, А. А. Руденко // Укр. мат. журнал. – 2014. – Т. 66, №7. – С. 884-890.

[17] Бабенко В. Ф. Об оптимальном восстановлении свертки n функций по линейной информации / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько // Тези доповідей міжн. наукової конференції «Теорія наближень і її застосування», присвяченої 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора В. П. Моторного. – Україна, Дніпропетровськ. – 8-11 жовт. 2015 р. – С. 6.

[18] Бабенко В. Ф. Об оптимальном восстановлении свертки n функций по линейной информации / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько // Укр. мат. журнал. – 2016. – Т.68, №5. – С. 579-585.

[19] Бабенко В. Ф. Оптимальне відновлення елементів класу за інформацією, що задана коефіцієнтами Фур'є з похибкою / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, Н. В. Парфінович // Тези доповідей всеукраїнської наукової конференції «Теорія наближень і її застосування», присвячену 70-річчю професора В. Ф. Бабенка. – Україна, Дніпро. – 3-5 жовт. 2019 р. – С. 26.

[20] Бабенко В. Ф. Оптимальне відновлення елементів гільбертового простору та їхніх скалярних добутків за коефіцієнтами Фур'є, які відомі

з похибкою / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, Н. В. Парфінович // Укр. мат. журнал. – 2020. – Т.72, №6. – С. 736-750.

[21] Бабушка И. Оптимизация численных методов / И. Бабушка, С. Л. Соболев // Apl. Mat. – 1965. – 10, № 2. – С. 96-130.

[22] Бахвалов Н. С. Об оптимальных методах решения задач / Н. С. Бахвалов // Apl. Mat. I. – 1968. – P. 27-38.

[23] Бахвалов Н. С. О свойствах оптимальных методов решения задач математической физики / Н. С. Бахвалов // ЖВМ и МФ. – 1970. – 10, № 3. – С.555-568.

[24] Бахвалов Н. С. Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций / Н. С. Бахвалов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1971. – Т. 11, №4. – С. 1014-1018.

[25] Боянов Б. Д. Оптимальная интерполяция периодических дифференцируемых функций с ограниченной старшей производной / Б. Д. Боянов // Матем. заметки. – 1975. – Т. 17. – С. 511-524.

[26] Великин В. Л. Оптимальная интерполяция периодических дифференцируемых функций с ограниченной старшей производной / В. Л. Великин // Матем. заметки. – 1977. – Т. 22, №5. – С. 525-529.

[27] Габушин В. Н. Оптимальные методы вычисления значений оператора Ux, если x задано с погрешностью. Дифференцирование функций, определенных с ошибкой / В. Н. Габушин // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1980. – Т. CXLV. – С. 63-78.

[28] Гельфанд И. М. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащённые гильбертовы пространства / И. М. Гельфанд, Н. Я. Ви-

ленкин // Обобщённые функции.–Физматгиз.– Москва.–1961.–выпуск 4. - 412 с.

[29] Гребенников А. И. Об оптимальном приближении нелинейных операторов / А. И. Гребенников // ЖВМ и МФ. – 1978. – 18, № 3. – С. 762-766.

[30] Гребенников А. И. Об оптимальном приближении операторов / А. И. Гребенников, В. А. Морозов // ЖВМ и МФ. – 1977. – 17, № 1. – С. 3-14.

[31] Гунько М. С. Об оптимальном восстановлении n-линейных функционалов по линейной информации / М. С. Гунько, А. А. Руденко // Тези доповідей міжн. матем. конференції «Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування», присвяченої 75-річчю з дня народження академіка А. М. Самойленка. – Україна, Севастополь. – 23-30 червня 2013 р. – С. 230.

[32] Гунько М. С. Оптимальное восстановление n-линейных функционалов по линейной информации / М. С. Гунько // Тез. IX междунар. научной конф. студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2014». – Казахстан, Астана. – 11 апр. 2014 г. – С. 2098-2101.

[33] Гунько М. С. Оптимальное восстановление свертки n-функций из различных классов по линейной информации / М. С. Гунько // Вісник дніпропетровського університету. Серія: Математика. – Дніпропетровськ. – 2016. - вип. 21. – С. 27-34.

[34] Гунько М. С. Про оптимальне відновлення n-лінійних функціоналів за лінійною інформацією / М. С. Гунько, О. О. Руденко // Тези доповідей міжн. конференції «Теорія наближення функцій та її застосу-

вання», присвяченої 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця. – Україна, Слов'янськ. – 28 трав.-3 черв. 2017 р. – С. 54.

[35] Гунько М. С. Об оптимальном восстановлении n-линейных функционалов по линейной информации на множествах, которые задаются неограниченными операторами / М. С. Гунько, А. А. Руденко // Вісник дніпропетровського університету. Серія: Математика. – Дніпро. – 2017. – вип. 22. – С. 33-40.

[36] Женсыкбаев А. А. Проблемы восстановления операторов / А. А. Женсыкбаев // Ин-т компьют. исслед. –Москва. – 2003. – 411 с.

[37] Иванов В. В. Об оптимальных по точности алгоритмах приближенного решения операторных уравнений I рода / В. В. Иванов // ЖВМ и МФ. – 1975. – 15, № 1. – С. 3-11.

[38] Иванов В. В. Об оптимальных по точности алгоритмах приближения функций некоторых классов на ЭВМ / В. В. Иванов // В кн.: Теория приближения функций. –М.: Наука. – 1977. – С. 195-200.

[39] Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения / Н. П. Корнейчук // М.: Наука. – 1976. – 320 с.

[40] Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближения / Н. П. Корнейчук // М.: Наука. – 1984. – 352 с.

[41] Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения / Н. П. Корнейчук // М.: Наука. – 1987. – 424 с.

[42] Лигун А. А. Экстремальные свойства сплайнов / А. А. Лигун // В кн.: Конструктивная теория функций. – София. – 1981. – С. 99-105.

[43] Магарил-Ильяев Г. Г. К задаче оптимального восстановления функционалов / Г. Г. Магарил-Ильяев, Чан Тхи Ле // УМН. – 1987. – Т. 42, № 2. – С. 237-238.

[44] Магарил-Ильяев Г. Г. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным / Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко // Матем. заметки. – Т. 50, вып. 6. – 1991. – С. 85-93.

[45] Магарил-Ильяев Г. Г. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью / Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко // Мат. сб. 2002. – Т. 193. – С. 79-100.

[46] Магарил-Ильяев Г. Г. Неопределенность знания об объекте и точность методов его восстановления / Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, В. М. Тихомиров // Проблемы передачи информации. – 2003. – Т. 39, Вып. 1. – С. 118-133.

[47] Марчук А. Г. Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек / А. Г. Марчук, К. Ю. Осипенко // Математические заметки. – 1975. – Т. 17, вып. 3. – С. 359—368.

[48] Моторный В. П. Методическиие указания к спецкурсу "Оптимальное восстановление функционалов"/ В. П. Моторный, А. А. Лигун, В. Г. Доронин // ДГУ. – Днепропетровск. – 1983. – 52 с .

[49] Моторный В. П. Оптимальное восстановление функционалов / В. П. Моторный, А. А. Лигун, В. Г. Доронин // Учебн. пособие. – Днепропетровск. – 1986. – 76 с .

[50] Моторный В. П. Методы восстановления функций / В. П. Моторный, А. А. Лигун, В. Г. Доронин // Учебн. пособие. – Днепропетровск. – 1986. – 88 с .

[51] Моторный В. П. Оптимальное восстановление функций и функционалов"/ В. П. Моторный, А. А. Лигун, В. Г. Доронин // Вид-во ДДУ. – Дніпропетровськ. – 1994. – 224 с.

[52] Никольский С. М. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами / С. М. Никольский // УМН. – 1950. – 5, №2. – С. 165-177.

[53] Осипенко К. Ю. Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек / К. Ю. Осипенко // Математические заметки. – 1976. – Т. 19, вып. 1. – С. 29-40.

[54] Осипенко К. Ю. Наилучшие методы приближения аналитических функций, заданных с погрешностью / К. Ю. Осипенко // Матем. сборник. – 1982. – 118(160), № 3(7). – С. 350-370.

[55] Осипенко К. Ю. Задача Хейнса и оптимальная экстраполяция аналитических функций, заданных с ошибкой / К. Ю. Осипенко // Мат. сб. – 1985. – 126(168), № 4. – С. 566-574.

[56] Руденко А. А. Об оптимальном восстановлении скалярных прозведений для некоторых классов периодических функций / А. А. Руденко // Приближение функций и суммирование рядов. – Днепропетровск. – 1991. - С. 55-60.

[57] Руденко О. О. Оптимальне відновлення лінійних та білінійних функціоналів / О. О. Руденко // Дис. канд. фіз.-мат. наук, ДДУ.– Дніпропетровськ. – 1994.

[58] Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них / С. А. Смоляк // Дисс. канд. физ. - мат. наук, МГУ. – М. – 1965.

[59] Соболь И. М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара / И. М. Соболь // М. – 1969.

[60] Субботин Ю. Н. Экстремальные задачи теории приближения функций при неполной информации / Ю. Н. Субботин // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР.– 1980. – Т. CXLV. – С. 152-168.

[61] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений / В. М. Тихомиров // М.: Изд-во МГУ. – 1986. – 303 с.

[62] Трауб Дж. Общая теория оптимальных алгоритмов / Дж. Трауб, Х. Вожьняковский // М.: Мир. – 1983. - 382с.

[63] Ahiberg J. H. The approximation of linear functionals / J. H. Ahiberg, E. N. Nilson // SIAM J. Numer. Anal. 3. – 1966. – P. 173-182.

[64] Gal S. Optimal sequential and non-sequential procedures for evaluating a functional / S. Gal, C. A. Micchelli // Univ. of Wisconsin-Maddison Rep. – 1978. – See also Appl. Anal.10 – 1980. – P. 105-120.

[65] Golomb M. Optimal approximation and error bounds, in "On Numerical Approximation"(R. E. Langer, ed.) / M. Golomb, H. F. Weinberger // Univ. of Wisconsin Press, Maddison, Wisconsin. –1959. – P. 117-190.

[66] Hardy G. H. Inequalities / G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya // Cambridge. – 1934.

[67] Karlin S. Total Positivity / S. Karlin // Stranford, Calif.: Stanford Univ. press. – 1968. – V.I. – 540 p.

[68] Kiefer J. Sequential minimax search for a maximum / J. Kiefer // Proc. Amer. Math. Soc. 4. – 1953. – P. 502-505.

[69] Knauff W. Optimale Approximation linearer Funktionale auf periodischen Funktionen / W. Knauff, R. Kress // Numer. Math. 22. – 1974. – P. 187-206.

[70] Knauff W. Optimale Approximation mit Nebenbedingungen an lineare Funktionale aut periodischen Funktionen / W. Knauff, R. Kress // Numer. Math. 25. – 1976. – P. 149-159.

[71] Larkin F. M. Optimal approximation in Hilbert space with reproducting kernel functions / F. M. Larkin // Math. Comp. 24. – 1970. – P. 911-921.

[72] Mairhuber J. C. On variation diminishing transformations on the circle / J. C. Mairhuber, I. J. Schoenberg, R. E. Williamson // Rend. Circ. mat. –Polermo. – 1959. – 8, №2. – P. 241-270.

[73] Micchelli C. A. A survey of optimal recovery, Optimal estimation in approximation theory / C. A. Micchelli, T. J. Rivlin // N. Y.: Plenum Press. – 1977. – P. 1-54.

[74] Micchelli C. A. Lectures on optimal recovery, Lect. Notes in Math. Numerical Anal. Lancaster. / C. A. Michelli , T. J. Rivlin // Berlin, Springer-Verlag. –1984.– P. 21-93.

[75] Micchelli C. A. Lectures on optimal recovery / C. A. Micchelli, T. J. Rivlin // Lect. Notes Math. – 1985. – V. 1129. – P. 21—93.

[76] Melkman A. A. Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data / A. A. Melkman, C. A. Micchelli // SIAM J. Numer. Anal. – 1979. – V. 16, №1. – P. 87-105.

[77] Mangasarian O. L. Best summation formulae and discrete splines / O. L. Mangasarian, L. L. Schumaker // SIAM J. Numer. Anal.10. – 1973. – P. 448-459.

[78] Meyers L. F. Best approximate integration formulas / L. F. Meyers, A. Sard // J. of Math. and Phys. 28. – 1950. – P. 118-123.

[79] Meyers L. F. Best interpolation formulas / L. F. Meyers, A. Sard // J. of Math. and Phys. 29. – 1950. – P. 198-206.

[80] Meingust J. Optimal approximation and error bounds in seminormed spaces / J. Meingust // Numer. Math.10. – 1967. – P. 370-388.

[81] Micchelli C. A. On a best estimator for the class M^r using only function values / C. A. Micchelli, A. Pinkus // Indiana Univ. Math, J. 26. – 1977. – P. 751-759.

[82] Micchelli C. A. Optimal estimation of linear functionals / C. A. Micchelli // IBM Research Rep. 5729. – 1975.

[83] Micchelli C. A. Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data: a second look / C. A. Micchelli // Numer. Algorithms. – 1993. – V 5. – P. 375–390.

[84] Mansfield L. E. On the optimal approximation of linear functionals in spaces of bivariate functions / L. E. Mansfield // SIAM J. Numer Anal. 8. – 1971. – P. 115-126.

[85] Mansfield L. E. Optimal approximation and error bounds in spaces of bivariate functions / L. E. Mansfield // J. Approx. Theory, 5. – 1972. – P. 77-96.

[86] Nielson G. M. Bivariate spline functions and the approximation of linear functional / G. M. Nielson // Numer. Math. 21. – 1973. – P. 139-160.

[87] Novak E. Deterministic and Stochastic Error Bounds in Numerical Analysis / E. Novak // Vol.1349 of Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin. – 1988.

[88] Osipenko K. Yu. Optimal Recovery of Analytic Functions / K. Yu. Osipenko // Nova Science Publishers, Inc., Huntington, New York.–2000.

[89] Pinkus A. On n-widths of periodic functions / A. Pinkus // J. Anal. Math. – 1979. – 35. – P. 209-235.

[90] Plaskota L. Noisy information and computational complexity / L. Plaskota // Cambridge Univ. Press, Cambridge. – 1996.–xii+308 pp.

[91] Reinsch Ch. Two extensions of the Sard-Schoenberg theory of best approximation / Ch. Reinsch // SIAM J. Numer. Anal. 11. – 1974. – P. 45-51.

[92] Rice J. R. On the computational complexity of approximation operators, in «Approximation Theory» (G. G. Lorentz, ed.) / J. R. Rice // Academic Press, New York. – 1973. – P. 449-456.

[93] Rice J. R. On the computational complexity of approximation operators, in «Analytic Computational Complexity» (J. F. Traub, ed.) / J. R. Rice // Academic Press, New York. – 1976. – P. 191-204.

[94] Ritter K. Two dimensional spline functions and best approximations of linear functional / K. Ritter // J. Approx. Theory 3. – 1970. – P. 352-368.

[95] Richter-Dyn N. Minimal interpolation and approximation in Hilbert spaces / Richter-Dyn N. // SIAM J. Numer. Anal. 8. – 1971. – P. 583-597.

[96] Sard A. Best approximate integration formulas; Best approximation formulas / A. Sard // Amer. J. Math. 71. – 1949. – P. 80-91.

[97] Sard A. Optimal approximation / A. Sard // J. Functional Anal. I. – 1967. – P. 222-244.

[98] Sard A. Approximation based on nonscalar observations / A. Sard // J.Approx. Theory 8. – 1973. – P. 315-334.

[99] Scharlach R. Optimal recovery by linear functionals / R. Scharlach // J. Appoxim. Theory. – 1985. – V. 44, №2. – P. 167-172.

[100] Schoenberg I. J. On best approximations of linear operators / I. J. Schoenberg // Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 67. – 1964. – P. 155-163.

[101] Schoenberg I. J. Spline interpolation and best quadrature formulae / I. J. Schoenberg // Bull. Amer. Math. Soc., 70. – 1964. – P. 143-148.

[102] Schultz M. H. The complexity of linear approximation algorithms, in «Complexity of Computation» (R. M. Karp, ed.) / Schultz M. H.Schultz M. H.Schultz // American Mathematical Soc., Providence, Rhode Island. – 1974. – P. 135-148.

[103] Sukharev A. G. On the existence of optimal affine methods for approximating linear functionals / A. G. Sukharev // J. Complexity. – 1986. – V. 2. – P. 317-322.

[104] Traub J. A general theory of optimal algorithms / J. Traub, H. Woz'niakowski // ACM Monograph Series. New York etc.: Academic Press. XV. – 1980.

[105] Traub J. Information-based complexity, Computer Science and Scientific Computing / J. Traub, G. Wasilkowski, H. Woz'niakowski // Boston, MA: Academic Press, Inc. xii. – 1988.

[106] Weinberger H. F. Optimal approximation for functions prescribed at equally spaced points / H. F. Weinberger // J. Res. Nat. Bur. Std. Sect. B 65. – 1961. – P. 99-104.

[107] Weinberger H. F. On optimal numerical solution of partial of equations / H. F. Weinberger // SIAM J. Numer. Anal. 9. – 1972. – P. 182-198.

[108] Werschulz A. G. The Computational Complexity of Differential and Integral Equations / A. G. Werschulz // Oxford Univ. Press, Oxford. – 1991.

[109] Winograd S. Some remarks on proof techniques in analytic complexity, in "Analytic Computational Complexity" (J. F. Traub, ed.) / S. Winograd // Academic Press, New York. – 1976. – P. 5-14.

[110] Wozniakowski H. A survey of information-based complexity / H. Wozniakowski // J. Complexity. – 1985. – V. 1. – P. 11—44.

ДОДАТОК

Наукові праці, у яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. *Бабенко В. Ф.* Оптимальне відновлення елементів гільбертового простору та їхніх скалярних добутків за коефіцієнтами Фур'є, які відомі з похибкою / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, Н. В. Парфінович // Укр. мат. журнал. – 2020. – Т.72, №6. – С. 736-750.

2. *Гунько М. С.* Об оптимальном восстановлении n-линейных функционалов по линейной информации на множествах, которые задаются неограниченными операторами / М. С. Гунько, А. А. Руденко // Вісник дніпропетровського університету. Серія: Математика. – Дніпро. – 2017. – вип. 22 – С. 33-40.

3. *Гунько М. С.* Оптимальное восстановление свертки n-функций из различных классов по линейной информации / М. С. Гунько // Вісник дніпропетровського університету. Серія: Математика. – Дніпропетровськ. – 2016. – вип. 21. – С. 27-34.

4. *Бабенко В. Ф.* Об оптимальном восстановлении свертки n функций по линейной информации / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько // Укр. мат. журнал. – 2016. – Т. 68, №5. – С. 579-585.

5. *Бабенко В. Ф.* Оптимальное восстановление n-линейных функционалов по линейной информации / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, А. А. Руденко // Укр. мат. журнал. – 2014. – Т. 66, №7. – С. 884-890.

6. *Бабенко В. Ф.* Об оптимальном восстановлении n-линейных функционалов по линейной информации / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, А. А. Руденко // Вісник дніпропетровського університету. Серія: Математика. – Дніпропетровськ. – 2013. – вип. 18. – С. 16-25.

7. *Бабенко В. Ф.* Об оптимальном восстановлении билинейных

функционалов по линейной информации / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, А. А. Руденко // Вісник дніпропетровського університету. Серія: Математика. – Дніпропетровськ. – 2012. – вип. 17. – С. 11-17.

Тези доповідей на конференціях, що засвідчують апробацію результатів дисертації:

1. *Бабенко В. Ф.* Оптимальне відновлення елементів класу за інформацією, що задана коефіцієнтами Фур'є з похибкою / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, Н. В. Парфінович // Тези доповідей всеукраїнської наукової конференції «Теорія наближень і її застосування», присвячену 70-річчю професора В. Ф. Бабенка. – Україна, Дніпро. – 3-5 жовт. 2019 р. – С. 26.

2.*Гунько М. С.* Про оптимальне відновлення n-лінійних функціоналів за лінійною інформацією / М. С. Гунько, О. О. Руденко // Тези доповідей міжн. конференції «Теорія наближення функцій та її застосування», присвяченої 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця. – Україна, Слов'янськ. – 28 трав. - 3 черв. 2017 р. – С. 54.

3. *Бабенко В. Ф.* Об оптимальном восстановлении свертки n функций по линейной информации / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько // Тези доповідей міжн. наукової конференції '«Теорія наближень і її застосування», присвяченої 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора В. П. Моторного. – Україна, Дніпропетровськ. – 8-11 жовт. 2015 р. – С. 6.

4. *Гунько М. С.* Оптимальное восстановление n-линейных функционалов по линейной информации / М. С. Гунько // Тез. IX междунар. научной конф. студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2014». – Казахстан, Астана. – 11 апр. 2014 г. – С. 2098-2101.

5. *Бабенко В. Ф.* Задачи оптимального восстановления n-линейных функционалов по линейной информации / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, А. А. Руденко // Тез. крымской междунар. матем. конф. «КММК-2013

КРОМШ». – Украина, Автономная республика Крым, Судак. – 22 сент.- 4 окт. 2013 р. – С. 83-84.

6. *Гунько М. С.* Об оптимальном восстановлении n-линейных функционалов по линейной информации / М. С. Гунько, А. А. Руденко // Тези доповідей міжн. матем. конференції «Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування», присвяченої 75-річчю з дня народження академіка А. М. Самойленка. – Україна, Севастополь. – 23-30 червня 2013 р. – С. 230.