НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ГУНЬКО Марина Сергіївна

УДК 517.5

ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО ВІДНОВЛЕННЯ ПОЛІЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ І ОПЕРАТОРІВ ЗА ЛІНІЙНОЮ ІНФОРМАЦІЄЮ

01.01.01 –математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 2021

Дисертацією є рукопис

Роботу виконано на кафедрі математичного аналізу і теорії функцій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор **Бабенко Владислав Федорович**, пенсіонер, працював у Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор **Чайченко Станіслав Олегович**, ДВНЗ "Донбаський державний педагогічний університет", м. Слов'янськ, проректор з науково-педагогічної роботи;

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник **Шидліч Андрій Любомирович**, Інститут математики НАН України, провідний науковий співробітник відділу теорії функцій.

Захист відбудеться «05» травня 2021 року об «11» годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01601, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

Із дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розіслано «31» березня 2021 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Романюк А. С.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Однією з основних задач математики є відновлення тих чи інших математичних об'єктів за неповною інформацією. Так, при відновленні функцій ми часто маємо неповну інформацію про функцію, наприклад, деяку кількість її коефіцієнтів Фур'є, чи її значення в деякій системі точок. Треба побудувати метод її наближення (відновлення), який використовує доступну інформацію та дає найменшу похибку відновлення. Такі методи відновлення називають оптимальними для заданої інформації. В теорії апроксимації і теорії оптимальних алгоритмів добре дослідженою є задача оптимального відновлення функцій, лінійних функціоналів та лінійних операторів на різних класах функцій. Задачі найкращого відновлення операторів виникають у працях А. М. Колмогорова, А. Сарда, С. М. Нікольського, Дж. Кіфера в середині XX століття, а їх дослідження як окремого класу задач починається в 70-ті роки того ж століття в теорії наближення та в теорії інформаційної складності в роботах С. А. Смоляка, М. С. Бахвалова, О. Г. Марчука і К. Ю. Осипенка, М. Голомба і Х. Ф. Вайнбергера, С. А. Міккеллі та Т. Дж. Рівліна, А. А. Мелкмена і С. А. Міккеллі. Систематичне викладення результатів задач оптимального відновлення операторів можна знайти, наприклад, в монографіях Дж. Трауба та Х. Вожьняковського; М. П. Корнійчука, Дж. Трауба, Г. Васильковського і Х. Вожьняковського; Е. Новака; А. Г. Вершульца; Л. Пласкоти; О. А. Женсикбаєва; К. Ю. Осипенка та ін. Систематичне дослідження задач оптимального відновлення білінійних функціоналів і операторів розпочав В. Ф. Бабенко в роботах у 1979, 1988, 1989 рр., ним був помічений тісний зв'язок між задачами обчислення n-поперечників за Колмогоровим, лінійних n-поперечників та задачами оптимального відновлення білінійних функціоналів та згорток функцій. Продовжив роботу в цьому напрямку В. Ф. Бабенко разом з О. О. Руденком. Результати опубліковано в 1991, 1992 роках. Як видно, задачі оптимального відновлення лінійних і білінійних функціоналів і операторів досліджені досить повно. Разом з тим до теперішнього часу не було результатів про оптимальне відновлення n-лінійних функціоналів і операторів у випадку n>2. Одержання таких результатів є цікавим з точки зору застосувань. Вони можуть бути, наприклад, використані при відновленні зображень при різних типах пошкоджень. Тому тема дисертації є актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась згідно із загальним планом досліджень кафедри математичного аналізу і теорії функцій Дніпровського національного університету імені

Олеся Гончара та науково-дослідних тем ММФ-78-13 «Нерівності для похідних і екстремальні задачі в різних нормованих просторах» (номер держреєстрації 0114U000193); №1-221-10 «Оптимальне відновлення операторів на класах функцій однієї та багатьох змінних» (номер держреєстрації 0110U001282).

Мета і задачі дослідження. *Метою роботи* є знаходження найкращої лінійної інформації, яка задана точно або з похибкою, та найкращого методу її використання для відновлення лінійних, полілінійних функціоналів на різних класах функцій та множинах в гільбертових просторах, обчислення похибок відновлення та встановлення їх точності (неможливості покращення на заданих класах) при різних обмеженнях на об'єм інформації. *Метою роботи* також є знаходження найкращої лінійної інформації та найкращого методу її використання для відновлення згорток двох та більшої кількості функцій.

Задачами дослідження є знаходження оптимальної лінійної інформації, оптимального методу її використання та обчислення похибки наближення білінійних та полілінійних функціоналів, згорток двох та більшої кількості функцій на різних класах функцій та множинах у конкретних та загальних гільбертових просторах. Розглядалися задачі відновлення за точною та заданою з похибкою інформацією.

Предметом дослідження є питання, пов'язані з:

1) пошуком оптимальної лінійної інформації, яка задана точно, для відновлення білінійних та полілінійних функціоналів, згорток двох та більшої кількості функцій;

2) пошуком оптимальних методів використання наявної інформації точної або неточної для відновлення елементів гільбертового простору або їх скалярних добутків.

3) оцінкою похибки відновлення на різних класах і встановлення її точності.

Методи дослідження. В роботі використовуються загальні методи розв'язання екстремальних задач теорії наближення, загальні факти функціонального аналізу, теорії функцій, а також методи апроксимації індивідуальних функцій та функціональних класів.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати дисертації є новими і полягають в наступному.

Нехай H - сепарабельний дійсний або комплексний гільбертовий простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і ортонормованим базисом $e_1, e_2, ..., \hat{x}_k = (x, e_k)$. Для $j = 1, ..., n$ задамо послідовності комплексних чисел $g^j = \{g_k^j\}_{k=1}^{\infty}$.

Розв'язана задача оптимального відновлення полілінійних функціоналів

виду
$$\Omega(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, \hat{x}_{1k} ... \hat{x}_{nk}, \tag{1}$$
де $\{|f_k|\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно спадають, за оптимальною лінійною інформацією на класах, які задаються наступним чином:
$$W_{p_j}^{g^j} = \left\{ x \in H : \sum_{k=1}^{\infty} |g_k^j| \, |\hat{x}_k|^{p_j} \le 1 \right\}, \tag{2}$$
де $p_j \ge 1$ та послідовності $\{|g_k^j|\}_{k=1}^{\infty}$ не спадають.

У задачі по відновленню згортки n функцій за лінійною інформацією знайдено оптимальну лінійну інформацію, оптимальний метод її використання, оптимальну похибку відновлення на класах періодичних функцій $M_j = K_j * F_{p_j}$, що задаються згорткою ядра $K_j \in L_1$, яке не збільшує осциляцію, із функціями з F_{p_j} – одиничної кулі в L_{p_j}. Функції з класу M_j мають вигляд $x_j = a_j\mu_j + K_j * \psi_j$, де $a_j \in \mathbb{R}$, $\psi_j \in F_{p_j}$, $\psi_j \perp \mu_j$, $\mu_j = \mu_j(K_j) = 1$, якщо $\int\limits_0^{2\pi} K_j dt = 0$ і $\mu_j = \mu_j(K_j) = 0$, якщо $\int\limits_0^{2\pi} K_j dt \ne 0$, $j = 1, ..., n$. Відновлюються згортки n–функцій $x_j \in M_j$ виду
$$(x_1 * x_2 * ... * x_n)(\tau) = (x_1 * (x_2 * ... * x_n))(\tau) =$$
$$= \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} x_1(\tau - t_1 - ... - t_{n-1}) x_2(t_1) ... x_n(t_{n-1}) dt_1 dt_2 ... dt_{n-1}.$$

Нехай H_1 і H_2 – комплексні гільбертові простори, A – компактний оператор, $A : H_1 \to H_2$.

Розв'язана задача оптимального відновлення елементів класу $W^A = \{Ah : h \in H_1, \ \|h\|_{H_1} \le 1\}$ в ситуації, коли інформація про перші n членів послідовності коефіцієнтів Фур'є елемента $x \in W^A$, відома з деякою похибкою.

Розв'язана задача оптимального відновлення скалярних добутків елементів $\langle x, y \rangle_{H_2}$ за неточною інформацією про співмножники, а саме, за неточно заданими наборами перших n коефіцієнтів Фур'є елементів $x \in W^A$ та $y \in W^B$.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертація має теоретичний характер. Результати дисертації можна використати для розв'язання теоретичних та прикладних задач, які потребують наближення білінійних, n-лінійних функціоналів або згорток n функцій за точною та неточною лінійною інформацією.

Отримані результати представляють самостійний науковий інтерес і можуть бути використані для подальших досліджень з теорії наближення, які проводяться в Інституті математики НАН України, Інституті прикладної математики і механіки НАН України, Київському, Дніпровському, Донецькому, Львівському, Одеському національних університетах.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку досліджень і постановки всіх задач, що розглядаються в дисертації, належать науковому керівникові професору В. Ф. Бабенку.

Результати, викладені у підрозділах 1.2, 3.2 отримано здобувачем самостійно.

Для результатів, викладених у підрозділі 3.1, ідеї доведення належать професору В. Ф. Бабенку. Докладні доведення належать здобувачеві.

Результати, викладені у підрозділах 2.1 отримано здобувачем разом із В. Ф. Бабенком та О. О. Руденком (внесок кожного із співавторів складає 33%).

Результати, викладені у підрозділі 2.2 отримано здобувачем разом із О. О. Руденком (внесок кожного з співавторів складає 50%).

Результати, викладені у підрозділах 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 отримано здобувачем разом із В. Ф. Бабенком та Н. В. Парфінович (внесок кожного із співавторів складає 33%).

Апробація результатів дисертації. Результати, отримані у дисертації, були представлені на конференціях і наукових семінарах:

– Міжнародна математична конференція «Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка (23 – 30 червня 2013 р., м. Севастополь, Україна);

– Кримська міжнародна математична конференція «КММК-2013 КРОМШ» (22 вересня – 4 жовтня 2013 р., м. Судак, Автономна республіка Крим, Україна);

– IX міжнародна наукова конференція студентів і молодих вчених «Наука и образование – 2014» (11 квітня 2014 р., м. Астана, Казахстан);

– Міжнародна наукова конференція «Теорія наближень і її застосування» з нагоди 75-річчя з дня народження професора В. П. Моторного (8 – 11 жовтня 2015 р., м. Дніпропетровськ, Україна);

– Міжнародна конференція «Теорія наближення функцій та її застосування», присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (28 травня – 3 червня 2017 р., м. Слов'янськ, Україна);

– Всеукраїнська наукова конференція «Теорія наближень і її застосування» з нагоди 70-річчя професора В. Ф. Бабенка (3 – 5 жовтня 2019 р., м. Дніпро, Україна);

– семінари кафедри математичного аналізу та теорії функцій на механіко-математичному факультеті Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара (керівник – доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент НАН України, професор В. П. Моторний);

– науковому семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник – доктор фізико-математичних наук, професор А. С. Романюк).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 7 статтях [1-7], що входять до переліку наукових фахових видань України з фізико-математичних наук, три статті [1,4,5] з яких – у журналі, що входить до міжнародної наукометричної бази даних Scopus та на момент виходу публікацій належав до видань з другого(Q2) або третього(Q3) квартилів. Шість тез опубліковано у матеріалах всеукраїнських та міжнародних наукових конференцій [8-13].

Структура і обсяг роботи. Дисертація загальним обсягом 137 сторінки машинописного тексту складається з анотації, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів основної частини, висновків і списку використаних джерел, який містить 110 найменувань. Кожний з її розділів розбитий на підрозділи, що нумеруються в межах розділу. Нумерація означень, лем, зауважень, теорем здійснюється у межах підрозділів, при цьому вони нумеруються незалежно.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету і задачі дослідження, визначено об'єкт та предмет дослідження, вказано методи, використані при проведенні досліджень, описано наукову новизну отриманих результатів, їх практичне значення, подано інформацію про апробацію результатів дисертації та публікації, описано структуру та зміст роботи. В дисертаційній роботі задачі відновлення білінійних, n-лінійних функціоналів та згорток двох та n функцій розглядаються із загальної точки зору.

Нехай W_j – деякі множини. Кількість таких множин дорівнює 2 для білінійного випадку та n для n-лінійного. На їх декартовому добутку заданий оператор Ω, $\Omega : W_1 \times ... \times W_n \to Y$. Оператор Ω може бути білінійним чи n-лінійним функціоналом, тоді $Y = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$.

Нехай на лінійних оболонках $\mathrm{span(W_j)}$ множин W_j задані набори $T_j = = (T_1, ..., T_{n_j})$ неперервних функціоналів

$$T_{i_j} : \mathrm{span(W_j)} \to \mathrm{K},$$

де $K = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$. Такі набори T_j будемо називати лінійною інформацію про $x \in W_j$. Кількість функціоналів в наборах може бути різною для різних множин W_j. Через N позначимо сумарну кількість функціоналів для відновлення Ω. Для білінійного випадку $N = n_1 + n_2$, де n_1 – кількість функціоналів у лінійній інформації про перший аргумент, n_2 – відповідно про другий.

Довільну функцію $F : K^N \to Y$ будемо називати методом відновлення Ω. Зауважимо, що ніяких припущень (наприклад, лінійності) відносно F не вимагається.

Якщо Ω – функціонал, тоді

$$R(x_1, ..., x_n; T_1, ..., T_n; F) = \left| \Omega(x_1, ..., x_n) - F(T_1(x_1), ..., T_n(x_n)) \right|.$$

Якщо Ω – згортка функцій, тоді

$$R(x_1, ..., x_n; T_1, ..., T_n; F) = R(x_1, ..., x_n; T_1, ..., T_n; F; X) =$$

$$= ||(x_1 * ... * x_n)(t) - F(T_1(x_1), ..., T_n(x_n))(t)||_X,$$

де $||f||_X$ – норма в деякому просторі X.

$$R(W_1, ..., W_n; T_1, ..., T_n; F) = \sup_{\substack{x_j \in W_j, \\ j=1,...,n}} R(x_1, ..., x_n; T_1, ..., T_n; F), \tag{3}$$

$$R_{m_1,...,m_n}(W_1, ..., W_n) = \inf_{T_1,...,T_n} \inf_F R(W_1, ..., W_n; T_1, ..., T_n; F) \tag{4}$$

($\inf\limits_F$ береться за всіма можливими функціями від N змінних, а $\inf\limits_{T_1,...,T_n}$ за всіма можливими наборами функціоналів, які дають $(m_1, ..., m_n)$ інформацію про $(x_1, ..., x_n)$;

$$R_N(W_1, ..., W_n) = \inf_{m_1+m_2+...+m_n=N} R_{m_1,m_2,...,m_n}(W_1, ..., W_n). \tag{5}$$

Величину (3) назвемо похибкою метода F відновлення Ω на множинах $W_1, ..., W_n$ за інформацією $T_1, ..., T_n$, величину (4) – оптимальною похибкою відновлення Ω на $W_1, ..., W_n$ за $(m_1, ..., m_n)$ – інформацією, і, нарешті, величину (5)– оптимальною похибкою відновлення Ω на $W_1, ..., W_n$ за інформацією сумарного об'єму N. Якщо існують $T_1, ..., T_n$ и F, які реалізують нижні межі в правій частині (4), тоді будемо їх називати оптимальною $(m_1, ..., m_n)$ інформацією і оптимальним методом її використання для відновлення Ω на $W_1, ..., W_n$.

Потрібно для заданих Ω, $W_1, ..., W_n$ і N або $m_1, ..., m_n$ знайти величини (5) (або (4)) , а також оптимальну інформацію об'єму N (або $(m_1, ..., m_n)$ – інформацію) і оптимальний метод її використання.

Перший розділ дисертації присвячено постановкам основних задач дослідження та короткому огляду відомих результатів, також наводяться необхідні означення.

Другий розділ дисертації присвячено відновленню білінійних, полілінійних функціоналів за лінійною інформацією в лінійних нормованих та в конкретних функціональних просторах; знаходженню оптимальної лінійної інформації і найкращого методу її використання для відновлення білінійних, n-лінійних функціоналів; обчисленню похибки наближення на різних множинах.

Підрозділ 2.1 присвячено питанням відновлення n-лінійних функціоналів на множинах, в якості таких множин розглядаються класи елементів

$$W_{p_j}^{g^j} = \left\{ x \in H : \sum_{k=1}^{\infty} |g_k^j| \, |\hat{x}_k|^{p_j} \le 1 \right\}, \; p_j \ge 1.$$

з сепарабельного гільбертового простору H над полем комплексних чисел з ортонормованим базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\hat{x}_k = (x, e_k)$, послідовності $g^j, j = 1, ..., n$, комплексних чисел $g^j = \{g_k^j\}_{k=1}^{\infty}$ такі, що послідовності $\{|g_k^j|\}_{k=1}^{\infty}$ не спадають. Будемо розглядати n-лінійні функціонали, які мають наступну властивість

$$\Omega(e_{k_1}, ..., e_{k_n}) = \begin{cases} f_k \in \mathbb{C} & \text{, якщо } k_1 = ... = k_n = k, \, k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{, в іншому випадку.} \end{cases} \tag{6}$$

Зрозуміло, що такі функціонали мають вигляд

$$\Omega(x_1, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, \hat{x}_{1k} ... \hat{x}_{nk}.$$

Задача про оптимальне відновлення білінійних функціоналів за лінійною інформацією була поставлена у 1979 р. В. Ф. Бабенком.

Визначимо множини $M_j(T_j)$ так

$$M_j(T_j) = \{x_j \in M_j : T_j(x_j) = 0\} \, , j = 1, ..., n,$$

і нехай

$$M(T_j) := M_1 \times ... \times M_{j-1} \times M_j(T_j) \times M_{j+1} \times ... \times M_n, j = 1, ..., n,$$

де позначка $\times$ означає декартовий добуток.

Оцінку знизу для похибки методу F відновлення функціонала Ω за інформацією $T_1, ..., T_n$ дає наступна лема.

Лема 2.1.1. *Для будь-яких $T_1, ..., T_n$ і методу відновлення F*

$$R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n; F) \geq$$

$$\geq \max\left\{ \sup_{(x_1,...,x_n)\in M(T_1)} |\Omega(x_1, ..., x_n)|, ..., \sup_{(x_1,...,x_n)\in M(T_n)} |\Omega(x_1, ..., x_n)| \right\}.$$

Для білінійного випадку лема 2.1.1 доведена В. Ф. Бабенком .

Теорема 2.1.1. *Нехай задано n-лінійний функціонал Ω, який має властивість (6), для якого послідовність $\{|f_k|\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно спадає, і числа $m_1, ..., m_n$. Нехай також $p_j \geq 1$ і $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j} = 1$, тоді*

$$R_{m_1,...,m_n}(W_{p_1}^{g^1}, ..., W_{p_n}^{g^n}) = \frac{|f_{M+1}|}{|g_{M+1}^1|^{\frac{1}{p_1}} \cdot ... \cdot |g_{M+1}^n|^{\frac{1}{p_n}}},$$

де $M = \min\{m_1, ..., m_n\}$. При цьому інформація про елементи $x_j \in W_{p_j}^{g^j}$, $j = 1, ..., n$ виду

$$T_j(x_j) = ((x_j, e_1), ..., (x_j, e_{m_j})) = (\hat{x}_{j,1}, ..., \hat{x}_{j,m_j})$$

і метод

$$\widetilde{F}(x_{1,1}, ..., x_{1,m_1}, ..., x_{n,1}..., x_{n,m_n}) = \sum_{k=1}^{M} f_k \; x_{1,k}...x_{n,k}$$

її використання будуть оптимальними.

Підрозділ 2.2 присвячено питанням відновлення n-лінійних функціоналів на множинах $W_{p_s}^{g^s} = \{x \in H : \sum_{k=1}^{\infty} |g_k^s| \; |\hat{x}_k|^{p_s} \leq 1\}$, $p_s \geq 1$, g^s - послідовності комплексних чисел $g^s = \{g_k^s\}_{k=1}^{\infty}$, де $s = 1, ..., n$, .

Розглянемо n-лінійні функціонали наступного вигляду

$$\Omega(x_1, ..., x_n) = \sum_{k^1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k^n=1}^{\infty} f(e_{k^1}, ..., e_{k^n}) \; \hat{x}_{k^1}...\hat{x}_{k^n} =$$

$$= \sum_{k^1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k^n=1}^{\infty} \frac{f(e_{k^1}, ..., e_{k^n})}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g_{k^s}^s|^{1/p_s}} \; \prod_{s=1}^{n} |g_{k^s}^s|^{1/p_s} \; \hat{x}_{k^1}...\hat{x}_{k^n} \tag{7}$$

Упорядкуємо числа $\frac{|f(e_{k^1},...,e_{k^n})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g_{k^s}^s|^{1/p_s}}$ за спаданням (вважаємо, що базиси e_{k^s} і послідовності g_k^s такі, що це можливо). Позначимо через $v_k \in \mathbb{N}^n$ їх індекси, а через $q_k(s) \in \mathbb{N}$ s-ту координату v_k. Таким чином $\frac{|f(e_{q_k(1)},...,e_{q_k(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_k(s)}|^{1/p_s}}$ не зростають при зростанні k. Нехай також $V_u := \bigcup\limits_{k=1}^{u} v_k$. Через $N(V_u, s)$ будемо позначати кількість різних елементів $q_k(s)$ при фіксованих u і s.

Основним результатом цього підрозділу є наступне твердження.

Теорема 2.2.1. *Нехай задано n-лінійний функціонал Ω виду* (7), $u \in \mathbb{N}$, $Q = 1, 2, ..., n$, $N = N(V_u, Q) - 1 \in \mathbb{N}$. *Нехай також $p_j \geq 1$ і $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j} = 1$, тоді*

$$R_{m_1,...,m_n}(W^{g^1}_{p_1}, ..., W^{g^n}_{p_n}) = \max_{(q_j(1),...,q_j(n)) \notin V_u} \frac{|f(e_{q_j(1)}, ..., e_{q_j(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_j(s)}|^{1/p_s}} =$$

$$= \frac{|f(e_{q_{u+1}(1)}, ..., e_{q_{u+1}(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_{u+1}(s)}|^{1/p_s}}.$$

При цьому інформація про елементи $x_j \in W^{g^j}_{p_j}$, $j = 1, ..., n$ виду

$$\widetilde{T}_j(x_j) = ((x_j, e_{q_1(j)}), ..., (x_j, e_{q_u(j)})) = (\hat{x}_{j,q_1(j)}, ..., \hat{x}_{j,q_u(j)})$$

і метод

$$\widetilde{F}(\hat{x}_{1,q_1(1)}, ..., \hat{x}_{1,q_u(1)}, ..., \hat{x}_{n,q_1(n)} ..., \hat{x}_{n,q_u(n)}) = \sum_{k=1}^{u} |f(e_{q_k(1)}, ..., e_{q_k(n)})| \, \hat{x}_{q_k(1)} ... \hat{x}_{q_k(n)}$$

її використання буде оптимальним.

Третій розділ дисертації присвячено відновленню операторів типу згортки за лінійною інформацією в лінійних нормованих та в конкретних функціональних просторах; знаходженню оптимальної лінійної інформації і найкращого методу її використання для відновлення операторів типу згортки; обчисленню точного значення похибки на різних множинах.

Підрозділ 3.1 присвячено питанням відновлення згорткок на множинах, у якості таких множин розглядаються класи періодичних функцій $M_j = K_j * F_{p_j}$, що задаються згорткою ядра $K_j \in L_1$, із функціями з F_{p_j} – одиничної кулі в L_{p_j}. Функції з класу M_j мають вигляд $x_j = a_j\mu_j + K_j * \psi_j$, де $a_j \in \mathbb{R}$, $\psi_j \in F_{p_j}$, $\psi_j \perp \mu_j$, $j = 1, ..., n$.

Відновлюються згортки n–функцій $x_j \in M_j$

$$(x_1 * x_2 * ... * x_n)(\tau) = (x_1 * (x_2 * ... * x_n))(\tau) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} x_1(\tau - t_1 - ... - t_{n-1}) x_2(t_1) ... x_n(t_{n-1}) dt_1 dt_2 ... dt_{n-1}.$$

Задача про оптимальне відновлення згортки двох функцій з різних функціональних класів була розглянута В.Ф. Бабенком у 1989 р.

Визначимо множини $M_j(T_j)$ так

$$M_j(T_j) = \{x_j \in M_j : T_j(x_j) = 0\}, j = 1, ..., n,$$

і нехай

$$M(T_j) := M_1 \times ... \times M_{j-1} \times M_j(T_j) \times M_{j+1} \times ... \times M_n,$$
$$j = 1, ..., n.$$

Відповідні результати містяться в наступних твердженнях. Нехай $p \in [1, \infty]$. Оцінку знизу для величини $R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n; \Phi; L_p)$, а звідси – і величини $R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n; L_p)$, дає наступна лема.

Лема 3.1.1. *Нехай множини $M_1, \ldots, M_n$ опуклі і центрально-симетричні. Тоді для будь-яких наборів функціоналів $T_1, ..., T_n$ і будь-якого методу відновлення Φ*

$$R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n; \Phi; L_p) \geq \max_{j=1,...,n} \sup_{(x_1,...,x_n) \in M(T_j)} \|(x_1 * ... * x_n)(\cdot)\|_{L_p}.$$

Нехай $d_N(M, C)$ позначає n-поперечник за Колмогоровим множини M у просторі C.

Теорема 3.1.1. *Нехай $K_1, ..., K_n \in L_1$. Тоді для будь-яких наборів функціоналів $T_j = (T_{j,1}, ..., T_{j,m_j})$, $j = 1, ..., n$, $T_{j,l} : \mathrm{span}\,(K_j * F_1) \to \mathbb{R}$, $l = 1, ..., m_j$ і будь-якого методу відновлення Φ*

$$R(K_1 * F_1, ..., K_n * F_1; T_1, ..., T_n; \Phi; L_1) \geq d_{\min\{m_1,...,m_n\}}((K_1 * ... * K_n)(-\cdot) * F_\infty, C).$$

Підрозділ 3.2 присвячено отриманню оцінок зверху відновлення згортки n функцій за лінійною інформацією на множинах 2π - періодичних функцій виду $x = a\mu + K * \psi$, де $K \in L_1$ і не збільшує осциляцію. Під ядрами, які не збільшують осциляцію будемо розуміти функції такі, що: K є CVD - ядро (і писати $K \in CVD$), якщо для довільних $a \in \mathbb{R}$, $\psi \in C$, $\psi \perp \mu(K)$, буде виконуватись нерівність $\nu(a\mu + K * \psi) \leq \nu(\psi)$, де $\nu(g)$ – число змін знаку g на періоді.

Нехай

$$T_l^*(x_l) = (a_0(x_l), a_1(x_l), ..., a_{N-1}(x_l), b_1(x_l), ..., b_{N-1}(x_l)), \qquad l = 1, ..., n. \tag{8}$$

$$\Phi^*({T_1}^*(x_1), ..., {T_n}^*(x_n))(t) = \sum_{j=-(s-1)}^{s-1} \alpha_j c_j(x_1)...c_j(x_n) e^{ijt}. \qquad (9)$$

Основний результат міститься в наступній теоремі.

Теорема 3.2.1. *Нехай ядра $K_1, ..., K_n$ такі, що $K_1 * ... * K_n \in CVD$, нехай $s \in \mathbb{N}$ і нехай $N = n(2s-1)$. Тоді*

$$R_{n(2s-1)}(K_1 * F_1, ..., K_n * F_1; L_1) = R_{2s-1,...,2s-1}(K_1 * F_1, ..., K_n * F_1; L_1) =$$

$$= d_{2s-1}(K_1 * ... * K_n * F_\infty, C) = \|K_1 * ... * K_n * \varphi_s\|_C.$$

При цьому оптимальна інформація визначається рівністю (8)*, а оптимальний метод її використання – рівністю* (9)*.*

У *четвертому розділі* дисертації за допомогою компактного оператора A, $A : H_1 \to H_2$, і обмеженого оператора B, $B : H_1 \to H_2$, визначаються класи

$$W^A = \{Ag \ : \ \|g\|_{H_1} \le 1\}, \qquad W^B = \{Bh \ : \ \|h\|_{H_1} \le 1\},$$

розглядаються задачі оптимального відновлення елементів класу W^A за неточною інформацією та задачі відновлення скалярних добутків елементів класів W^A і W^B гільбертового простору H за неточною інформацією про співмножники.

У підрозділі 4.1 наводиться постановка задач відновлення за неточною інформацією.

Нехай задано банахів простір X, клас елементів $W \subset X$ і деяку (інформаційну) множину Y. Нехай також задано (інформаційне) відображення $I : W \to \mathcal{P}_0(Y)$, де $\mathcal{P}_0(Y)$ сукупність непорожніх підмножин множини Y. Будемо вважати, що, бажаючи отримати інформацію про елемент x, ми отримуємо деякий елемент множини $I(x)$.

Довільне відображення $\Phi : Y \to X$ будемо називати методом відновлення елементів множини W за заданою інформацією. Похибкою методу відновлення Φ на класі W за інформацією I називається величина

$$E(W, I, \Phi) = \sup_{\substack{x \in W \\ y \in I(x)}} \|x - \Phi(y)\|_X. \qquad (10)$$

Величина

$$E(W, I) = \inf_{\Phi} E(W, I, \Phi) \qquad (11)$$

називається похибкою оптимального відновлення елементів класу W за інформацією I. При цьому метод Φ^*, який реалізує точну нижню межу у (11) , називається оптимальним.

Нехай H – гільбертовий простір зі скалярним добутком $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$. Нехай W_1 і W_2 - два класи елементів простору H. Нехай також $I : H\times H\to\mathcal{P}_0(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n)$– деяке інформаційне відображення. Довільне відображення $\Phi : \mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ будемо називати методом відновлення скалярного добутку. Величину

$$\mathcal{E}(W_1,W_2,I,\Phi)=\sup_{\substack{x\in W_1,y\in W_2\\ (\overline{a},\overline{b})\in I(x,y)}}|\langle x,y\rangle_H-\Phi(\overline{a},\overline{b})|$$

будемо називати похибкою методу відновлення Φ скалярного добутку на класах W_1 і W_2 за інформацією, що дається оператором I. Величину

$$\mathcal{E}(W_1,W_2,I)=\inf_{\Phi}\mathcal{E}(W_1,W_2,I,\Phi) \tag{12}$$

будемо називати оптимальною похибкою відновлення скалярного добутку на класах W_1 і W_2 за інформацією, що дається оператором I, а метод Φ^*, який реалізує inf у правій частині (12), оптимальним методом відновлення.

Задачу відновлення лінійних операторів у гільбертових просторах, коли інформація задана точно, було розглянуто в роботі С. А. Міккеллі та Т. Дж. Рівліна у 1977 р. У випадку, коли інформаційне відображення I має вигляд $Ix=i(x)+B$, де i є лінійний оператор, а B – куля деякого радіуса (яка задає похибку), відповідну задачу відновлення було розглянуто у роботі А. А. Мелкмена і С. А. Міккеллі у 1979 р. Інший підхід до вивчення таких задач, який базується на стандартних принципах опуклої оптимізації, використовувався у роботі Г. Г. Магаріл-Ілляєва, К. Ю. Осипенко 2002 р. При цьому у роботі А. А. Мелкмена і С. А. Міккеллі 1979 р. доведено, що серед оптимальних методів відновлення існує лінійний, а у роботі Г. Г. Магаріл-Ілляєва, К. Ю. Осипенко у 2002 р. знайдені оптимальні методи відновлення у випадках, коли похибка задається у рівномірній метриці.

У підрозділі 4.2 отримано загальні оцінки знизу похибок оптимального відновлення. Основними результатом є наступні леми.

Лема 4.2.1. Припустимо, що знайдеться елемент $\tilde{x}\in W$ такий, що $-\tilde{x}\in W$ і $\theta_Y\in I(\tilde{x})\cap I(-\tilde{x})$. Тоді для будь-якого методу Φ

$$E(W,I,\Phi)\geq\|\tilde{x}\|_X$$

і, отже,

$$E(W,I)\geq\|\tilde{x}\|_X.$$

Лема 4.2.2. Нехай задано класи W_1 і W_2 елементів гільбертова простору H та довільне інформаційне відображення $I : H\times H\to\mathcal{P}_0(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n)$. Припустимо, що знайдуться елементи $\tilde{x} \in W_1$ і $\tilde{y} \in W_2$ такі, що

$$-\tilde{x} \in W_1 \quad \text{i} \quad (\theta, \theta) \in I(\tilde{x}, \tilde{y}) \cap I(-\tilde{x}, \tilde{y})$$

або

$$-\tilde{y} \in W_2 \quad \text{i} \quad (\theta, \theta) \in I(\tilde{x}, \tilde{y}) \cap I(\tilde{x}, -\tilde{y}).$$

Тоді для будь-якого методу відновлення $\Phi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

$$\mathcal{E}(W_1, W_2, I, \Phi) \geq |\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle_H|.$$

У підрозділі 4.3 наводиться необхідне канонічне представлення компактного оператора у гільбертовому просторі. Означаються $s_n = \sqrt{\lambda_n}$, де λ_n власні числа оператора A^*A.

У підрозділі 4.4 доведено чотири теореми про відновлення за неточно заданою інформацією, які відрізняються способом задання інформації.

Розглянемо задачу відновлення класу W^A в ситуації, коли інформація про перші n членів послідовності $\{x_k\}$ коефіцієнтів Фур'є відома з деякою похибкою, тобто замість значень x_k, $k = 1, \ldots, n$, задано набір чисел a_k, які відрізняються від x_k на малу величину в тій або іншій метриці.

Як звичайно, через l_p^n, $(n \geq 1, 1 \leq p \leq \infty)$ будемо позначати лінійний простір векторів $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ з відповідною нормою $\| \cdot \|_p = \| \cdot \|_{l_p^n}$.

Для невід'ємного ε через $B[\varepsilon, l_p^n]$ позначимо замкнену кулю у просторі l_p^n з центром у нулі та радіусом ε. У випадку, коли $n = 1$, замість $B[\varepsilon, l_p^n]$ будемо писати $B[\varepsilon]$.

Теорема 4.4.1.1. Нехай $A : H_1 \to H_2$ – компактний оператор і $n \in \mathbb{N}$, $I(x) = I_{\overline{\varepsilon}}^n(x) = (x_1, \ldots, x_n) + B[\varepsilon_1] \times \ldots \times B[\varepsilon_n]$, $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Нехай s_k – s-числа оператора A. Якщо

$$1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k^2}{s_k^2} \geq 0,$$

то покладемо $m = n$. У протилежному випадку виберемо $m \in \mathbb{Z}_+$, $m \leq n$, так, щоб

$$1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k^2}{s_k^2} \geq 0 \quad \text{i} \quad 1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k^2}{s_k^2} - \frac{\varepsilon_{m+1}^2}{s_{m+1}^2} < 0. \tag{13}$$

Тоді

$$E(W^A; I_{\overline{\varepsilon}}^n)^2 = s_{m+1}^2 + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k^2 \left(1 - \frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}\right). \tag{14}$$

При цьому оптимальним методом відновлення є метод

$$\Phi_m^*(\overline{a}) = \sum_{k=1}^{m} a_k \left(1 - \frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}\right) \psi_k, \quad \overline{a} = (a_1, ..., a_m).$$

Теорема 4.4.1.2. Нехай $A : H_1 \to H_2$ – компактний оператор, $I(x) = I^n_{\varepsilon,2}(x) = (x_1, \ldots, x_n) + B[\varepsilon; l^n_2]$. Тоді, якщо $\varepsilon < s_1$, то

$$E(W^A, I^n_{\varepsilon,2}) = \sqrt{s^2_{n+1} + \varepsilon^2\left(1 - \frac{s^2_{n+1}}{s^2_1}\right)}.$$

При цьому оптимальним методом відновлення є

$$\Phi^*_n(\overline{a}) = \sum_{k=1}^{n} a_k\left(1 - \frac{s^2_{n+1}}{s^2_k}\right)\psi_k.$$

Якщо $\varepsilon \geq s_1$, то $E(W^A, I^n_{\varepsilon,2}) = s_1$ і оптимальним методом відновлення є $\Phi^*_0(\overline{a}) = \theta$.

Теорема 4.4.3.1. Нехай $A : H_1 \to H_2$ – компактний оператор, $I(x) = I^n_{\varepsilon,\infty}(x) = (x_1, \ldots, x_n) + B[\varepsilon; l^n_\infty]$ і число $m \in \mathbb{Z}_+,\ m \leq n$, вибране як в теоремі 4.4.1.1. Тоді

$$E(W^A, I^n_{\varepsilon,\infty}) = \sqrt{s^2_n + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{s^2_{m+1}}{s^2_k}\right)}.$$

При цьому оптимальним методом відновлення є метод

$$\Phi^*_m(\overline{a}) = \sum_{k=1}^{m} a_k\left(1 - \frac{s^2_{m+1}}{s^2_k}\right)\psi_k.$$

Введемо наступні позначення:

$$c^2_k = \frac{\left(1 - \frac{s^2_{n+1}}{s^2_k}\right)^{\frac{p}{p-2}-1}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{s^2_{n+1}}{s^2_j}\right)^{\frac{p}{p-2}}\right)^{\frac{2}{p}}}, \qquad b^2_k = \varepsilon^2 c^2_k, \quad k = 1, ..., n.$$

Теорема 4.4.4.1. Нехай $I(x) = I^n_{\varepsilon,p}(x) = (x_1, \ldots, x_n) + B[\varepsilon; l^n_p],\ 2 < p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ і

$$\Phi^*_n(\overline{a}) = \sum_{k=1}^{n} a_k\left(1 - \frac{s^2_{m+1}}{s^2_k}\right)\psi_k, \quad \overline{a} = (a_1, ..., a_m).$$

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ і довільного $2 < p < \infty$

$$E(W^A; I^n_{\varepsilon,p})^2 \leq s^2_{n+1} + \varepsilon^2\left(\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{s^2_{n+1}}{s^2_k}\right)^{\frac{p}{p-2}}\right)^{\frac{p-2}{p}}.$$

Якщо $\varepsilon > 0$ таке, що виконана наступна умова

$$\varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{c^2_k}{s^2_k} \leq 1, \tag{15}$$

то

$$E(W^A; I^n_{\varepsilon,p})^2 = s^2_{n+1} + \varepsilon^2 \left(\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{s^2_{n+1}}{s^2_k} \right)^{\frac{p}{p-2}} \right)^{\frac{p-2}{p}}.$$

У підрозділі 4.5 розглянуто задачі відновлення скалярних добутків. Основними результатами є чотири теореми, для формулювання яких введемо необхідні позначення.

Нехай $A : H_1 \to H_2$ – компактний оператор з канонічним зображенням:

$$Ag = \sum_k s_k \langle g, \phi_k \rangle_{H_1} \psi_k = \sum_k s_k g_k \psi_k,$$

де ϕ_n – власні вектори оператора A^*A, $\psi_k = \frac{1}{s_k} A\phi_k$.

Нехай також задано обмежений оператор $B : H_1 \to H_2$ виду

$$Bh = \sum_k q_k \langle h, \phi_k \rangle_{H_1} \psi_k = \sum_k q_k h_k \psi_k,$$

де $\{q_k\}$ - незростаюча послідовність додатних чисел. За допомогою цих операторів визначимо класи:

$$W^A = \{Ag \ : \ \|g\|_{H_1} \le 1\}, \qquad W^B = \{Bh \ : \ \|h\|_{H_1} \le 1\}.$$

Розглянемо задачу оптимального відновлення скалярного добутку $\langle x, y \rangle_{H_2}$ на класах W^A і W^B за неточно заданими наборами перших n коефіцієнтів Фур'є елементів $x \in W^A$ та $y \in W^B$ за системою $\{\psi_k\}$, тобто за неточно заданими наборами чисел $\{s_k g_k\}_{k=1}^n$ та $\{q_k h_k\}_{k=1}^n$. Будемо розглядати цю задачу для інформаційних відображень наступного виду:

$$I^n_{\overline{\varepsilon}}(x,y) = \{(a,b) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : \ \ \forall k = 1, ..., n, \quad |x_k y_k - a_k b_k| \le \varepsilon_k\} \qquad i$$

$$I^n_{\varepsilon,p}(x,y) = \{(a,b) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : \|(x_1y_1, ..., x_ny_n) - (a_1b_1, ..., a_nb_n)\|_{l^n_p} \le \varepsilon\}.$$

Тут $\varepsilon, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ - невід'ємні числа та $1 \le p \le \infty$.

Теорема 4.5.1.1. Нехай $I^n_{\overline{\varepsilon}}(x,y)$. Для заданого $n \in \mathbb{N}$ покладемо $m = n$, якщо

$$1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k}{s_k q_k} \ge 0.$$

У протилежному випадку виберемо $m \in \mathbb{Z}_+$ $(m \le n)$, виходячи з умов

$$1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k}{s_k q_k} \ge 0 \quad \text{і} \quad 1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k}{s_k q_k} - \frac{\varepsilon_{m+1}}{s_{m+1} q_{m+1}} < 0. \qquad (16)$$

Тоді

$$E(W^A, W^B, I^n_{\overline{\varepsilon}}) = s_{m+1} q_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \left(1 - \frac{s_{m+1} q_{m+1}}{s_k q_k} \right).$$

При цьому оптимальним методом відновлення є

$$\Phi_m^*(\overline{a},\overline{b}) = \sum_{k=1}^{m} a_k b_k \left(1 - \frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_k q_k}\right).$$

Теорема 4.5.2.1. Нехай $I^n_{\varepsilon,1}$. Якщо $\varepsilon < s_1 q_1$, то

$$E(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,1}) = s_{n+1}q_{n+1} + \varepsilon\left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_1 q_1}\right).$$

При цьому оптимальним методом відновлення є

$$\Phi_n^*(\overline{a},\overline{b}) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_1 q_1}\right).$$

Якщо ж $\varepsilon \geq s_1 q_1$, то

$$E(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,1}) = s_1 q_1 \quad \text{і} \quad \Phi_0^*(\overline{a},\overline{b}) = \theta \quad \text{– оптимальний метод.}$$

Теорема 4.5.3.1. Нехай $I^n_{\varepsilon,\infty}$. Для заданого $n \in \mathbb{N}$ число $m \in \mathbb{Z}_+$, $m \leq n$, виберемо як в теоремі 4.5.1.1. Тоді

$$E(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,\infty}) = s_{m+1}q_{m+1} + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_k q_k}\right).$$

При цьому оптимальним методом відновлення є метод

$$\Phi_m^*(\overline{a},\overline{b}) = \sum_{k=1}^{m} a_k b_k \left(1 - \frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_k q_k}\right).$$

Нехай $q = p/(p-1)$ і

$$c_k = \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_k q_k}\right)^{q-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_j q_j}\right)^{q}\right)^{\frac{1-q}{q}}.$$

Теорема 4.5.4.1. Нехай $I^n_{\varepsilon,p}$, $1 < p < \infty$,

$$\Phi_n^*(\overline{a},\overline{b}) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_k q_k}\right),$$

тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$E(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,p}) \leq \mathcal{E}(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,p}, \Phi_n^*) \leq s_{n+1}q_{n+1} + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_k q_k}\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Якщо ε таке, що виконується умова

$$\varepsilon \sum_{k=1}^{n} (s_k q_k)^{-1} c_k \leq 1, \tag{17}$$

то

$$E(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,p}) = \mathcal{E}(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,p}, \Phi_n^*) = s_{n+1}q_{n+1} + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_k q_k}\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

і метод $\Phi_n^*(\overline{a},\overline{b})$ є оптимальним.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджено задачі оптимального відновлення полілінійних функціоналів і операторів за лінійною інформацією. Головні наукові результати роботи наступні:

1. Знайдено оптимальну лінійну інформацію, оптимальні методи відновлення та обчислено оптимальні похибки відновлення скалярних добутків, білінійних, n-лінійних функціоналів для конкретних функціональних класів та класів елементів сепарабельного гільбертового простору над полем дійсних або комплексних чисел.

2. Знайдено оптимальну лінійну інформацію, оптимальні методи відновлення та обчислено оптимальні похибки відновлення згорток n-функцій для конкретних функціональних класів.

3. Розв'язана задача оптимального відновлення підмножин гільбертового простору, які є образом кулі одиничного радіусу відносно дії компактного оператора, за інформацією про значення декількох перших коефіцієнтів Фур'є за деякою, пов'язаною з оператором ортонормованою системою, які задані неточно.

4. Розв'язана задача про оптимальне відновлення скалярного добутку на декартовому добутку підмножин гільбертового простору, одна з яких є образом кулі одиничного радіуса відносно дії компактного оператора, а інша - образом кулі одиничного радіуса відносно дії обмеженого оператора спеціальної структури, за інформацією з похибкою про значення декількох перших коефіцієнтів Фур'є елементів цих підмножин.

Користуючись нагодою, висловлюю щиру подяку моєму науковому керівникові професору Владиславу Федоровичу Бабенку за поставлені задачі, цінні обговорення, за допомогу, постійну підтримку та плідну співпрацю під час роботи над дисертацією. Я також вдячна співавторам Наталії Вікторівні Парфінович та Олександру Олексійовичу Руденку за корисні поради та увагу до даної роботи.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Бабенко В. Ф., Гунько М. С., Парфінович Н. В. Оптимальне відновлення елементів гільбертового простору та їхніх скалярних добутків за коефіцієнтами Фур'є, які відомі з похибкою. Укр. мат. журнал. – 2020. – Т.72, №6. – С. 736-750.

2. Бабенко В. Ф., Гунько М. С. Об оптимальном восстановлении свертки n функций по линейной информации. Укр. мат. журнал. – 2016. – Т. 68, №5. – С. 579-585.

3. Бабенко В. Ф., Гунько М. С., Руденко А. А. Оптимальное восстановление n-линейных функционалов по линейной информации. Укр. мат. журнал. – 2014. – Т. 66, №7. – С. 884-890.

4. Бабенко В. Ф., Гунько М. С., Руденко А. А. Об оптимальном восстановлении n-линейных функционалов по линейной информации. Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2013. – Т. 21, №6/1. – С. 16-25.

5. Бабенко В. Ф., Гунько М. С., Руденко А. А. Об оптимальном восстановлении билинейных функционалов по линейной информации. Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2012. – Т.20, № 6/1 – С. 11-17.

6. Гунько М. С., Руденко А. А. Об оптимальном восстановлении n-линейных функционалов по линейной информации на множествах, которые задаются неограниченными операторами. Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2017. – Т.24, № 6/1. – С. 33-40.

7. Гунько М. С. Оптимальное восстановление свертки n-функций из различных классов по линейной информации. Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2016. – Т. 24, №6/1. – С. 27-34.

8. Бабенко В. Ф., Гунько М. С., Парфінович Н. В. Оптимальне відновлення елементів класу за інформацією, що задана коефіцієнтами Фур'є з похибкою. «Теорія наближень і її застосування», всеукраїнська наукова конференція з нагоди 70-річчя професора В. Ф. Бабенка, 3-5 жовт. 2019 р.: тези допов. – Дніпро, Україна. – 2019. – С. 26.

9. Бабенко В. Ф.,Гунько М. С. Об оптимальном восстановлении свертки n функций по линейной информации. «Теорія наближень і її застосування», міжнародна наукова конференція з нагоди 75-річчя з дня народження професора В. П. Моторного, 8-11 жовтня 2015 р.: тези допов. – Дніпропетровськ, Україна. – 2015. – С. 6.

10. Бабенко В. Ф., Гунько М. С., Руденко А. А. Задачи оптимального восстановления n-линейных функционалов по линейной информации. «КММК-2013 КРОМШ», крымская междунар. матем. конф., 22 сентября - 4 октяб-

ря 2013 г.: тези докл. – Судак, Автономная республика Крым, Украина. – 2013. – С. 83-84.

11. Гунько М. С., Руденко О. О. Про оптимальне відновлення n-лінійних функціоналів за лінійною інформацією. «Теорія наближення функцій та її застосування», міжнародна конференція присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942-2007), 28 травня - 3 червня 2017 р.: тези допов. – Слов'янськ, Україна. – 2017. – С. 54.

12. Гунько М. С. Оптимальное восстановление n-линейных функционалов по линейной информации. «Наука и образование - 2014», IX междунар. научной конф. студентов и молодых ученых, 11 апр. 2014 г.: тез. докл. – Астана, Казахстан. – 2014. – С. 2098-2101.

13. Гунько М. С., Руденко А. А. Об оптимальном восстановлении n-линейных функционалов по линейной информации. «Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування», міжнар. матем. конференція з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, 23-30 червня 2013 р.: тези допов. – Севастополь, Україна. – 2013. – С. 230.

АНОТАЦІЇ

Гунько М. С. Задачі оптимального відновлення полілінійних функціоналів і операторів за лінійною інформацією. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз. – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара. – Інститут математики НАН України, Київ, 2021.

Дисертаційну роботу присвячено задачам оптимального відновлення білінійних, n-лінійних функціоналів та згорток n функцій.

У першому розділі наводяться постановки задач та огляд відомих результатів. У другому, третьому і четвертому розділах наводяться нові результати.

Другий розділ присвячено дослідженню задач відновлення білінійних, n-лінійних функціоналів у сепарабельному гільбертовому посторі над полем дійсних або комплексних чисел. Для конкретних класів знайдено оптимальну лі-

нійну інформацію, оптимальний метод відновлення та обчислено оптимальну похибку відновлення.

У третьому розділі розв'язані задачі відновлення згортки n-функцій x_j виду

$$(x_1 * x_2 * ... * x_n)(\tau) = (x_1 * (x_2 * ... * x_n))(\tau) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} x_1(\tau - t_1 - ... - t_{n-1}) x_2(t_1) ... x_n(t_{n-1}) dt_1 dt_2 ... dt_{n-1}$$

за лінійною інформацією.

А саме, знайдено оптимальну лінійну інформацію, оптимальний метод її використання, оптимальну похибку відновлення на деяких опуклих центрально-симетричних множинах 2π-періодичних функцій.

У четвертому розділі дисертації за допомогою компактного оператора A і обмеженого оператора B визначаються класи

$$W^A = \{Ag \, : \, \|g\|_{H_1} \leq 1\}, \qquad W^B = \{Bh \, : \, \|h\|_{H_1} \leq 1\},$$

де розв'язані задачі оптимального відновлення елементів $x \in W^A$ за неточно заданими наборами перших n коефіцієнтів Фур'є елементів x та розв'язані задачі відновлення скалярних добутків елементів класів W^A, W^B гільбертового простору H за неточно заданими наборами перших n коефіцієнтів Фур'є елементів $x \in W^A$ та $y \in W^B$.

Результати дисертації є новими і можуть бути використані для розв'язку теоретичних та прикладних задач, які потребують наближення білінійних, n-лінійних функціоналів або згорток n функцій за точною та неточною лінійною інформацією.

Ключові слова: відновлення, скалярний добуток, білінійний функціонал, n-лінійний функціонал, згортка n-функцій, лінійна інформація, необмежені оператори, лінійний нормований простір, норма, лінійні оболонки множин, метод відновлення, оптимальна похибка.

Gunko M. S. Problems of optimal recovery of polylinear functionals and operators on linear information. - Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for a Candidate Degree in Physical and Mathematical Sciences in speciality 01.01.01 — mathematical analysis – Oles Honchar Dnipro National University — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2021.

Abstract content: the dissertation is devoted to the problems of optimal recovering of bilinear, n -linear functionals and convolutions of n functions.

The first section provides problem statements and an overview of the known results.

The second, third and fourth sections present new results. The second section is devoted to the study of problems of recovery of bilinear, n -linear functionals in a separable Hilbert space over the real or complex numbers. For specific classes, the optimal linear information and the optimal recovery method were found, and the optimal recovery error was calculated.

The third section solves the problems of recovering the convolution of n-functions x_j of the form

$$(x_1 * x_2 * ... * x_n)(\tau) = (x_1 * (x_2 * ... * x_n))(\tau) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} x_1(\tau - t_1 - ... - t_{n-1}) x_2(t_1) ... x_n(t_{n-1}) dt_1 dt_2 ... dt_{n-1}$$

according to the linear information.

Namely, it was obtained the optimal linear information, the optimal method of its use, the optimal recovery error on some convex centrally-symmetric classes of 2π -periodic functions.

In the fourth section of the dissertation with the compact operator A and the bounded operator B classes are defined

$$W^A = \{Ag \ : \ \|g\|_{H_1} \leq 1\}, \qquad W^B = \{Bh \ : \ \|h\|_{H_1} \leq 1\},$$

solved problems of optimal recovering of elements $x \in W^A$ for inaccurate sets of the first n Fourier coefficients of elements x and solved problems of recovering of scalar products of elements of classes W^A, W^B Hilbert space H for inaccurate sets of the first n Fourier coefficients of elements $x \in W^A$ and $y \in W^B$.

The results of the dissertation are new and can be used to solve theoretical and applied problems that require the approximation of bilinear, n -linear functionals or convolutions of n functions for accurate and inaccurate linear information.

Key words: recovery, scalar product, bilinear functional, n-linear functional, convolution of n-functions, linear information, unboundered operators, linear normed space, norm, linear spans of the sets, method for the recovery, optimal error.