

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

НЕСТЕРЕНКО Марини Олександрівни

“Реалізації та контракції алгебр Лі, орбіт-функції та квазікристали”,
представленої на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика

Дисертаційна робота М.О. Нестеренко є дослідженням в області математичної фізики, яке пов’язує в собі теорію алгебр Лі, теорію диференціальних рівнянь, а також різноманітні перспективні застосування відповідних математичних об’єктів (як то орбіт-функції та квазікристали) до обробки зображень. Теорія груп та алгебр Лі почала розроблятись Софусом Лі в другій половині XIX століття як аналог теорії Галуа для дослідження інтегровності диференціальних рівнянь. Пізніше теорія груп та алгебр Лі увійшла в інші розділи математики. В XX столітті ця теорія почала потужно використовуватися у фізиці. Спочатку це були застосування до опису симетрій релятивістської фізики (група Лоренца, група Пуанкаре), а пізніше теорія груп Лі та її представлень почали застосовуватись у квантовій фізиці елементарних частинок. Зараз стандартна модель теорії елементарних частинок описується мовою унітарних симетрій та їх порушень. Важливість теорії симетрій в математиці та в застосуваннях у фізиці пояснює необхідність подальших досліджень математичних структур, які описують симетрії, та пошук нових застосувань.

Основними результатами дисертаційної роботи Марини Нестеренко є розвиток теорії і побудова контракцій та реалізацій алгебр Лі, створення нового методу для обчислень аперіодичних функцій на квазікристалах та встановлення важливих властивостей орбіт-функцій, зокрема, побудова систем відомих ортогональних многочленів.

Дисертаційна робота складається з трьох великих основних розділів, на початку кожного з яких дано опис сучасного стану проблем, що досліджуються в цих розділах. Крім трьох основних розділів ряд результатів оформлено у вигляді додатків, в яких, зокрема, описано контракції нільпотентних алгебр Лі та наведено нові реалізації п'ятивимірних алгебр Галілея.

Основні розділи дисертаційної роботи мають наступну структуру.

У першому розділі дисертації досліджуються реалізації та контракції алгебр Лі, а також диференціальні інваріанті та S -розширення. Тут доведено теореми про дві нові необхідні умови існування контракцій, пов'язані з підалгебрами та розмірністю централізатора похідної алгебри Лі та вивчено контракції комплексних нільпотентних алгебр Лі розмірностей п'ять та шість. Показано, що процедура S -розширення та редукція алгебр Лі дозволяють отримати неуніmodулярні алгебри Лі з уніmodулярних, щоправда при цьому порушується відношення порядку на многовиді алгебр Лі заданої розмірності. В цьому ж розділі узагальнено алгебраїчний метод І. Широкова для побудови реалізацій алгебр Лі як проекцій ліво-інваріантних векторних полів та побудовано диференціальні інваріанти, деформації та реалізації фізично цікавих алгебр Лі, таких як Пуанкарє, Галілея та алгебри Лі конформних перетворень.

Другий розділ дисертації присвячено множинам побудованим за допомогою перерізів та проекцій (квазікристалам), пов'язаним з ними майже періодичним функціям та їх застосуванням. Розроблено метод для дискретного Фур'є-аналізу майже періодичних функцій, визначених на квазікристалах. Цей метод було застосовано та детально досліджено у випадку одновимірного квазікристалу Фібоначчі (побудованому за допомогою константи золотого перерізу). Також запропоновано застосування розривного у кожній точці відображення між фізичним та внутрішнім просторами одновимірних квазікристалів для шифрування.

ння інформації. В дисертації наведено ілюстрації такого шифрування для конкретних зображень.

В останньому, третьому, розділі дисертації вивчаються властивості орбіт-функцій, зокрема їх дискретизація, доведено відповідні твердження. Крім цього, у розділі побудовано нескінченні сім'ї ортогональних поліномів n змінних, що пов'язані з орбіт-функціями та показано їх еквівалентність відомим поліномам Чебишева, Якобі, Корнвіндра та Макдональда. Додатково побудовано правила галуження і редукції груп Вейля за їх максимальними підгрупами, а також доведено еквівалентність трьох сімей орбіт-функцій спеціальним експоненційним функціям багатьох змінних, що були запропоновані А.У. Кліміком та І. Патерою.

До змісту та оформлення дисертації є декілька питань та невеликих зауважень:

1. В дисертаційній роботі наведено приклади різних реалізацій алгебр Лі диференціальними операторами першого порядку. У всіх цих прикладах коефіцієнти векторних полів є раціональними функціями. Чи завжди в класі еквівалентних реалізацій векторними полями можна знайти представника з раціональними коефіцієнтами?
2. Орбіт-функції, що досліджуються у дисертаційній роботі, визначаються виходячи з орбіт груп Вейля напівпростих алгебр Лі. Чи можна узагальнити цей підхід на загальні групи Коксетера?
3. Зауваження: на стор. 40 вступної частини дисертаційної роботи наведені формули перетворення орбіт-функцій C , S та E при елементарних відзеркаленнях, що відповідають відзеркаленням відносно гіперплощин ортогональних до простих коренів. Ці формули мають узагальнювати формули парності/непарності для косинуса, синуса та експоненти, відповідно. Тому орбіт-функція E ,

як узагальнення експоненти, не є ані парною, ані непарною при одному елементарному відзеркаленні. Всі ці орбіт-функції є інваріантними при дії елементів групи Вейля, які є добутком парної кількості відзеркалень. У вступній частині дисертації не зовсім коректно написано закон перетворення для орбіт-функція E , але це схоже на просту описку і в подальшому тексті ця формула не використовується.

4. Ще одне зауваження стосується Зауваження 3.1 дисертаційної роботи, в якому акцентується увага, що кореневі системи визначаються для напівпростих алгебр Лі, а не відповідних груп Лі. Насправді кореневі системи можна визначати для компактних груп Лі (див., наприклад, J. Adams, Lectures on Lie groups, 1969). Більш того, опис всіх неізоморфних зв'язних напівпростих груп Лі та їх топологія для фіксованої напівпростої алгебри Лі пов'язана з описом підграток у ваговій гратці.

Однак, ці зауваження не впливають на загальну високу оцінку дисертаційної роботи.

Робота має теоретичний характер. Отримані результати і запропоновані методи можуть бути застосовані до опису симетрій фізичних моделей та їх граничних переходів, до побудови рівнянь та моделей, інваріантних відносно алгебр Лі та до аналізу і обчислення функцій на квазікристалах та ґратках напівпростих груп Лі. Результати двох останніх розділів можуть бути застосовані до розробки нових методів обробки зображень.

Усі результати, які визначають наукову новизну дисертаційної роботи й виносяться на захист, одержано авторкою самостійно. Вони є новими і достовірними та пройшли достатню апробацію на наукових семінарах та конференціях. Основні результати роботи опубліковано у провідних наукових журналах та фахових наукових збірках, це 21 наукова публікація, більшість з яких проіндексовано у міжнародних

наукометрических базах Scopus або Web of Science і тому, відповідно до прийнятих вагових коефіцієнтів, зараховуються як 33 фахових публікації. Ці роботи є відомими серед науковців, що працюють у цих галузях, та добре цитуються. Автореферат вірно і повно відображає зміст дисертації.

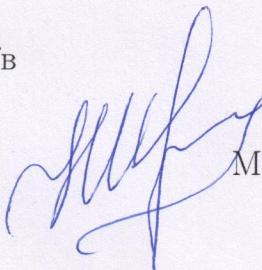
Вважаю, що дисертація “Реалізації та контракції алгебр Лі, орбіт-функції та квазікристали” містить важливі наукові результати з теорії та застосувань алгебр Лі, задовольняє вимогам пп. 9, 10, 12, 13, 14 “Порядку присудження наукових ступенів” (Постанова Кабінету Міністрів України № 567 від 24.07.2013 зі змінами) щодо докторських дисертацій, а її авторка Марина Олександровна Нестеренко заслуговує на присудження їй наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 – математична фізика.

Офіційний опонент

завідувач лабораторії теорії інтегровних систем
відділу математичних методів в теоретичній фізиці

Інституту теоретичної фізики

ім. М.М. Боголюбова НАН України, м. Київ
доктор фіз.-мат. наук,
старший науковий співробітник


М.З. Йоргов

