На правах рукопису

Національна академія наук України
Інститут математики

НЕСТЕРЕНКО Марина Олександрівна

УДК 517.958:512.816

Реалізації та контракції алгебр Лі, орбіт-функції та квазікристали

01.01.03 — математична фізика
111 — математика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ М.О. Нестеренко

Науковий консультант
доктор фіз.-мат. наук
БОЙКО Вячеслав Миколайович

Київ — 2021

Анотація

Нестеренко М.О. Реалізації та контракції алгебр Лі, орбіт-функції та квазікристали. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 “математична фізика” (111 — математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2021.

Дисертацію присвячено розвитку теорії і побудові контракцій та реалізіцій алгебр Лі, створенню нового методу для наближення Фур’є майже періодичних функцій, а також дослідженню нових орбіт-функцій та пов’язаних з ними ортогональних поліномів.

У першому розділі дисертації досліджуються реалізації та контракції алгебр Лі, а також диференціальні інваріантіи та S-розширення.

У параграфі 1.1 сформульовано означення контракцій алгебр Лі, розглянуто найпростіші типи контракцій та їх властивості, а також доведено теореми про дві нові необхідні умови існування контракцій, пов’язані з підалгебрами та розмірністю централізатора похідної.

Параграф 1.2 присвячено дослідженню S-розширень тривимірних дійсних алгебр Лі. Показано, що процедура S-розширення зберігає властивості розв’язності, нільпотентності та унімодулярності, проте S-розширення та редукція алгебр Лі дозволяють отримати неунімодулярні алгебри Лі з унімодулярних, щоправда при цьому порушується відношення порядку на многовиді алгебр Лі заданої розмірності.

Контракції комплексних нільпотентних алгебр Лі розмірностей п’ять та шість досліджуються у параграфі 1.3. У цій частині наведено переліки необхідних умов, що є достатніми для згаданих нільпотентних алгебр Лі та дозволяють виокремити пари нільпотентних алгебр, що допускають контракції. Також тут обчислено необхідні інваріантні та напівінваріантні величини, та показано, які з них порушують необхідні умови існування контракцій. У цьому параграфі доведено, що контракції комплексних

нільпотентних алгебр Лі розмірностей п'ять та шість можуть бути реалізовані за допомогою узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера.

Поняття реалізації алгебри Лі розглядається у параграфі 1.4 паралельно з локальною групою Лі, що їй відповідає. Алгебраїчний метод І. Широкова для побудови реалізацій алгебр Лі, як проєкцій лівоінваріантних векторних полів, узагальнено на інтранзитивний випадок. Запропоновано поняття породжуючої реалізації та доведено теорему про зведення реалізації до суттєвих змінних.

У параграфі 1.5 запропоновано конструктивний метод побудови параметризованих реалізацій, що є точними та збігаються до реалізацій контрактованої алгебри Лі.

У параграфі 1.6 досліджено п'ять алгебр Галілея найменших розмірностей та для кожної з них алгебраїчним методом побудовано набір нееквівалентних реалізацій. Неточні реалізації та реалізації п'ятивимірних алгебр Галілея є новими. Також у цьому параграфі побудовано деформації алгебр Галілея (у тому числі для певних алгебр Галілея довільної розмірності) та породжуючі реалізації деформованих алгебр. Наприкінці розділу наведено ряд фізично цікавих диференціальних рівнянь та їх систем, що інваріантні відносно досліджених алгебр.

У параграфі 1.8 отримано нові породжуючі реалізації конформної алгебри Лі та двох алгебр де Сіттера. Побудовано спільну деформацію алгебри Пуанкаре до алгебр де Сіттера.

Усі нееквівалентні реалізації двох алгебр Пуанкаре, а саме $\mathfrak{p}(1,1)$ та $\mathfrak{p}(1,2)$, що діють у просторах не більше ніж трьох змінних, побудовано у параграфі 1.7, а також знайдено деформації цих алгебр та відповідні породжуючі реалізації.

У параграфі 1.9 розглядаються диференціальні інваріанти алгебр Лі та доведено теорему про нормальну форму інваріантної системи двох рівнянь другого порядку. У цьому параграфі досліджується алгебра Галілея найменшої розмірності, будуються її деформації, породжуючі реалізації

та повні набори диференціальних інваріантів: базиси диференціальних інваріантів, оператори інваріантного диференціювання та визначники Лі. Наприкінці параграфа наведено диференціальні рівняння та їх системи, що мають важливі застосування та інваріантні відносно найменшої алгебри Галілея та її деформацій.

Другий розділ дисертації присвячено квазікристалам (як модельним множинам або множинам побудованим за допомогою перерізів та проєкцій), пов'язаним з ними майже періодичним функціям та їх застосуванням. Він має наступну структуру.

У параграфі 2.1 розроблено метод для дискретного Фур'є-аналізу функцій визначених на квазікристалах та інших майже періодичних множинах. Зокрема для кожної локальної функції відносно дискретної множини доведено теорему про існування єдиної неперервної функції на локальній оболонці цієї дискретної множини. Побудовано загальну схему подрібнення для множин перерізів та проєкцій ґраток з цілими коефіцієнтами та дуальних до них, що дозволяє використати у випадку квазікристалів переваги дискретних методів періодичних функцій.

Параграф 2.2 присвячено квазікристалу Фібоначчі та застосуванню теорії, розробленої у параграфі 2.1, до двох аперіодичних тестових функцій на ньому. Необхідну дискретизацію побудовано та застосовано для кількох різних наближень локальної функції 'відстань до найближчої точки квазікристала' та локальної функції 'тип плитки квазікристала'. Отримана дискретизація є універсальною та може бути використана для наближення чи інтерполяції будь-яких локальних функцій на цьому квазікристалі.

У параграфі 2.3 запропоновано застосування розривного у кожній точці відображення між фізичним та внутрішнім просторами одновимірних квазікристалів для шифрування інформації. Розроблено симетричний переставний метод шифрування, який є стійким відносно обчислень, оскільки оперує лише цілими числами. У цьому параграфі наведено властивості

одновимірних квазікристалів, що дозволяють швидко генерувати одновимірні квазікристали за допомогою комп'ютера (без проєкцій) та описано множину криптозмінних. Розроблений метод шифрування застосовано до кодування растрових зображень.

У третьому розділі дисертаційної роботи досліджуються орбіт-функції, ортогональні поліноми та правила галуження орбіт групи Вейля.

У першому параграфі розділу вивчаються властивості орбіт-функцій, зокрема тривимірних: побудовано явний вигляд їх орбіт, стабілізаторів, фундаментальних областей, розроблено їх дискретизацію та доведено дискретну ортогональність. Також у параграфі 3.1 отримано явний вигляд операторів другого порядку для яких тривимірні C-орбіт-функції та S-орбіт-функції є відповідно розв'язками крайових задач Неймана та Діріхле на відповідних фундаментальних областях.

У параграфі 3.2 орбіти групи Вейля $W(A_n)$ простих алгебр Лі A_n зведено до об'єднання орбіт груп Вейля максимальних редуктивних підалгебр алгебри A_n. Для усіх випадків $n \leq 8$ та нескінченних серій $A_n \supset A_{n-k-1} \times A_k \times U_1$, $A_{2n} \supset B_n$, $A_{2n-1} \supset C_n$ і $A_{2n-1} \supset D_n$ побудовано матриці, що перетворюють точки орбіт $W(A_n)$ у точки орбіт підалгебр. Таким чином, знайдено правила галуження орбіт групи Вейля, що можуть бути застосовані для розкладу добутків орбіт-функцій та для теорії зображень простих алгебр Лі. Крім цього, у параграфі 3.2 доведено еквівалентність трьох сімей орбіт-функцій спеціальним функціям, що були запропоновані Клімиком та Патерою у роботах [73, 74].

Останній параграф розділу присвячено побудові нескінченних сімей ортогональних поліномів n змінних. Запропоновано три методи побудови ортогональних поліномів виходячи з орбіт-функцій. Доведено еквівалентність кількох відомих сімей ортогональних поліномів, зокрема, поліномів Чебишева, Якобі, Макдональда та Курнвіндера поліномам орбіт-функцій. Отримано явний вигляд розв'язних рекурсій, що дозволяють алгоритмічно будувати сім'ї ортогональних поліномів двох та трьох змінних. Для

кожної з простих алгебр Лі рангів два та три знайдено ряд поліномів у явному вигляді та отримано правила редукції поліномів двох та трьох змінних до поліномів інших алгебр за максимальними підгрупами простих груп Лі.

Ключові слова: алгебра Лі, група Лі, реалізація алгебри Лі, векторні поля Лі, диференціальний інваріант, контракція алгебри Лі, орбіт-функція, група Вейля, квазікристал, майже періодична функція, ортогональний поліном, ґратка, фундаментальна область.

Abstract

Nesterenko M.O. Realizations and contractions of Lie algebras, orbit-functions and quasicrystalls. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.03 "Mathematical Physics" (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2021.

The thesis is devoted to contractions and realizations of Lie algebras, to the Fourier analysis of almost periodic functions and investigation of the orbit-functions and respective orthogonal polynomials.

In the first chapter of the thesis, we survey and enhance the theoretical background of contractions and realizations of Lie algebras, moreover, explicit contractions and realizations for some families of Lie algebras are obtained.

Section 1.1 is devoted to the definition of contractions and to the simplest types of contractions and their properties. We also propose two new necessary conditions of contraction existence, based on subalgebras and dimensions of the derived algebra centralizers.

In Section 1.2 S-expansions of three-dimensional real Lie algebras are considered. It is shown, that expansion operation preserves properties of

solvability, nilpotency and unimodularity. At the same time the combination of S-expansion and reduction allows to obtain a non-unimodular Lie algebra from a unimodular one. Nevertheless S-expansions define no ordering on the variety of Lie algebras of a fixed dimension.

Contractions of the complex nilpotent Lie algebras of dimensions five and six are studied in Section 1.3. All possible pairs of nilpotent Lie algebras are considered and necessary contraction conditions are verified. The complete set of the pairs of Lie algebras that do not admit contraction is obtained. It is also proven that contractions of complex nilpotent Lie algebras of dimensions five and six are equivalent to generalized Inönu–Wigner contractions.

Realizations of Lie algebras are considered in Section 1.4. A generalization of the Shirokov's algebraic method and a notion of generic realization are proposed. The theorem on reduction of realization to the essential variables is proven.

It is shown in Section 1.5, that direct application of the parameterized linear transformations (contraction matrices) to the Lie vector fields, that do realize the initial Lie algebra, leads to improper realizations. To avoid this we propose the contraction of the equivalent realization with the same structure constants.

In Section 1.6 all inequivalent realizations of the Galilei algebras of dimensions not greater than five are constructed by the Shirokov's algebraic approach. Families of one-parametric deformations are also presented in the explicit form and varieties of the deformed Galilei algebras are discussed. It is also shown, that a number of well-known and physically important equations and systems are invariant with respect to the considered Galilei algebras or their deformations.

New generic realizations of conformal Lie algebra and two de Sitter algebras are obtained in Section 1.8. Deformation of the Poincaré algebra to both de Sitter algebras is constructed.

In Section 1.7 all inequivalent realizations of the Poincaré algebras $\mathfrak{p}(1,1)$ and $\mathfrak{p}(1,2)$ acting in spaces of not more than three variables are constructed. First-order deformations of $\mathfrak{p}(1,1)$ and $\mathfrak{p}(1,2)$ are proposed and the generic realizations for the initial and deformed Poincaré algebras are presented.

Differential invariants are considered in Section 1.9. Deformations of the smallest Galilei algebra are constructed and deformed algebras are realized by Lie vector fields. In the case of two dependent and one independent variables, for each realization, a basis of differential invariants and an operator of invariant differentiation are constructed. The theorem on the normal form of an invariant system of two second-order equations is proven. The second chapter of the thesis is devoted to quasicrystals (model sets or cut-and-project sets), to approximations of almost periodic functions and to some applications of quasicrystals.

In Section 2.1 we developed a method for the discrete Fourier analysis of almost periodic functions defined on quasicrystals.

The proposed method is tested in Section 2.2 using two almost periodic functions defined on the Fibonacci quasicrystal. The two-dimensional cut-and-project scheme is considered in all necessary details that allows to approximate any aperiodic function on this quasicrystal.

Section 2.3 deals with the application of the qyasicrystalls to cryptography. The key property that is used for an encryption is the everywhere discontinuity of the $\star$-map. The proposed cypher is symmetric and applied to raster images.

The third chapter defines and studies new special functions — orbit functions, orthogonal polynomials and branching rules.

In Section 3.1 three dimensional continuous and discrete Fourier-like transforms, based on the three simple and four semisimple compact Lie groups of rank 3, are presented. For each simple Lie group, there are three families of special functions (C-, S-, and E-functions) on which the transforms are constructed. Pertinent properties of the functions are described

in detail, such as their continuous and discrete orthogonality. Moreover, it is shown that orbit functions are eigenfunctions of some second-order differential operators.

The orbits of Weyl groups $W(A_n)$ of simple A_n type Lie algebras are reduced to the union of orbits of the Weyl groups of maximal reductive subalgebras of A_n in Section 3.2. Matrices transforming points of the orbits of $W(A_n)$ into points of subalgebra orbits are listed for all cases $n \leq 8$ and for the infinite series of algebra-subalgebra pairs $A_n \supset A_{n-k-1} \times A_k \times U_1$, $A_{2n} \supset B_n$, $A_{2n-1} \supset C_n$, $A_{2n-1} \supset D_n$. It also shown that C-, S- and E-functions are equivalent to the special multivariate exponential functions.

The last section of the chapter is devoted to the construction of infinite families of orthogonal polynomials in n variables. Three methods for the construction of orthogonal polynomials related to the orbit functions are proposed. The equivalence of the costructed polynomials to several known families of orthogonal polynomials (the Chebyshev, Jacobi, MacDonald, and Koornwinder polynomials) is proven. An explicit forms of solvable recursions are obtained, what allows to construct orthogonal polynomials of two and three variables algorithmically. For the simple Lie algebras of ranks two and three, a number of explicit polynomials are presented and the reduction rules are found.

Key words: Lie algebra, Lie group, realization of Lie algebra, vector fields, differential invariant, contraction of Lie algebra, orbit function, Weyl group, quasicrystal, almost periodic function, orthogonal polynomial, greed, lattice, fundamental region.

Список публікацій

1. Nesterenko M., Pošta S., Contractions of realizations, *Lie Theory and Its Applications in Physics*, Springer Proc. Math. Stat. **335**, Springer, Singapore, 2020, 447–453.
2. Nesterenko M., Myronova M., Generic realizations of conformal and de Sitter algebras, *Зб. праць Інституту математики НАН України* **16** (2019), no. 1, 100–112.
3. Nesterenko M., Pošta S., Discrete analysis on non-cubic lattices, *J. Phys.: Conf. Ser.* **1416** (2019), 012024, 8 pp.
4. Nesterenko M., Pošta S., Comparison of realizations of Lie algebras, *J. Phys.: Conf. Ser.* **965** (2018), 012028, 6 pp.
5. Nesterenko M., Pošta S., Differential invariants and realizations of the deformed smallest Galilei algebra, *Phys. Part. Nuclei* **49** (2018), 949–951.
6. Nesterenko M., Pošta S., Equivalence of vector field realizations of Lie algebras from the Lie group point of view, *Quantum Theory and Symmetries with Lie Theory and Its Applications in Physics*, Springer Proc. Math. Stat. **263**, Springer, Singapore, 2018, 421–427.
7. Nesterenko M., Pošta S., Vaneeva O., Realizations of Galilei algebras, *J. Phys. A* **49** (2016), 115203, 26 pp.
8. Nesterenko M., The Poincaré algebras $\mathfrak{p}(1,1)$ and $\mathfrak{p}(1,2)$: realizations and deformations, *J. Phys.: Conf. Ser.* **621** (2015), 012009, 7 pp.
9. Nesterenko M., Pošta S., Contraction admissible pairs of complex six-dimensional nilpotent Lie algebras, *Lie Theory and its Applications in Physics*, Springer Proc. Math. Stat. **191**, Springer, Singapore, 2016, 539–549.
10. Nesterenko M., Realizations of Lie algebras, *Phys. Part. Nuclei Lett.* **11** (2014), no. 7, 987–989.

11. Nesterenko M., S-expansions of three-dimensional Lie algebras, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2012)*, University of Cyprus, Nicosia, 2012, 147–154.

12. Nesterenko M., Patera J., Tereszkiewicz A., Orthogonal polynomials of compact simple Lie groups, *Int. J. Math. Math. Sci.* **2011** (2011), 969424, 23 pp.

13. Nesterenko M., Patera J., Tereszkiewicz A., Orbit functions of SU(n) and Chebyshev polynomials, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2010)*, University of Cyprus, Nicosia, 2010, 133–151.

14. Nesterenko M., Patera J., Szajewska M., Tereszkiewicz A., Orthogonal polynomials of compact simple Lie groups: branching rules for polynomials, *J. Phys. A* **43** (2010), 495207, 27 pp.

15. Larouche M., Nesterenko M., Patera J., Branching rules for the Weyl group orbits of the Lie algebra A_n, *J. Phys. A* **42** (2009), 485203, 15 pp.

16. Nesterenko M., Patera J., On orbit functions, their properties and applications *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2008)*, University of Cyprus, Nicosia, 2009, 155–163.

17. Nesterenko M., Patera J., Quasicrystal models in cryptography, *AIP Conf. Proc.* **1191** (2009), 148–159.

18. Nesterenko M., Patera J., Three-dimensional C-, S- and E-transforms, *J. Phys. A* **41** (2008), 475205, 31 pp.

19. Moody R.V., Nesterenko M., Patera J., Computing with almost periodic functions, *Acta Crystallogr. Sect. A* **64** (2008), 654–669.

20. Patera J., Nesterenko M., Quasicrystals in cryptography, *Aspects of Network and Information Security*, **17** NATO Science for Peace and

Security Series – D: Information and Communication Security, IOS Press, 2008, 274–282.

21. Гапонова О.В., Нестеренко М. О., Системи ЗДР другого порядку інваріантні відносно низькорозмірних алгебр Лі, *Зб. праць Інституту математики НАН України* **3** (2006), no. 2, 71–91.

22. Gaponova O.V., Nesterenko M., Systems of second-order ODEs invariant with respect to low-dimensional Lie algebras, *Phys. AUC.* **16** (2006), V.II, 238–256.

23. Nesterenko M., Patera J., Zhavrotskyi D., New families of cryptographic systems, arXiv:0710.0021v1 (2007), 14 pp.

24. Nesterenko M., Pošta S., Contractions of realizations of Lie algebras, Тези доповідей міжнародної конференції молодих математиків, 6–8 червня 2019 р., Ін-т математики НАН України, Київ, с. 38.

25. Nesterenko M., Pošta S., On discrete Fourier analysis for the functions sampled on the weight lattices or model sets of semisimple Lie groups, Abstracts of International Workshop "A Century of Noether's Theorem and Beyond", November 30 – December 2, 2018, Opava, Czech Republic, p. 5.

26. Нестеренко М., Еквівалентність реалізацій алгебр Лі, Матеріали міжнародної науково-практичної конференції "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі", 21–22 червня, 2018, Київ, НУХТ, с. 65.

27. Nesterenko M., Simple Lie groups in quasicrystalls, Book of abstracts of the 9th Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems", Larnaca, Cyprus, June 10–14, 2018, p. 30.

28. Nesterenko M., Pošta S., Контракції реалізацій алгебр Лі, Онлайн-матеріали міжнародного семінару "Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики", Київ, 22–23 грудня, 2018, URL: www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2018/Nesterenko_ua.html

29. Nesterenko M., Comparison of realizations of Lie algebras and their differential invariants, Booklet of abstracts ISQS25, XXVth International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries Prague, Czech Republic, June 6–10, 2017, p. 115.

30. Nesterenko M., Pošta S., Vaneeva O., Realizations of Galilei algebras, Онлайн-матеріали міжнародного семінару "Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики", Київ, 17–20 грудня, 2016, URL: www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2016/Nesterenko.html

31. Nesterenko M., Pošta S., Vaneeva O., Realizations of Galilei algebras, Онлайн-матеріали міжнародного семінару 7th Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems", Larnaca, Cyprus, June 15–19, 2016, URL: www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2016/Nesterenko.html

32. Nesterenko M. Contractions of nilpotent Lie algebras, Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків, Київ, 3–6 червня, 2015, с. 20.

33. Nesterenko M., Realizations of 3- and 6-dimensional Poincaré algebras, Book of abstracts of the 7th Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems", Larnaca, Cyprus, June 15–19, 2014, p. 33.

34. Нестеренко М., Контракції алгебр Лі, Онлайн-матеріали міжнародного семінару "Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики", Київ, 21–24 грудня, 2013, URL: www.imath.kiev.ua/~appmath/AbstractsWIF/Nesterenko2013.html

35. Нестеренко М., Ортогональні поліноми, пов'язані з простими групами Лі, та правила галуження для них, Онлайн-матеріали міжнародного семінару "Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики", Київ, 18–19 грудня, 2011, URL: www.imath.kiev.ua/~appmath/AbstractsWIF/Nesterenko.html

36. Nesterenko M., Computing with almost periodic functions, Онлайн-матеріали міжнародного семінару “CRM-Fields-MITACS Workshop on Lie Groups, Group Transforms and Image Processing”, Toronto, May 16, 2008, URL: www.fields.utoronto.ca/programs/scientific/07-08/liegroups/abstracts.html

37. Nesterenko M., New families of cryptographic systems, Онлайн-матеріали конференції “CMS-MITACS Joint Conference 2007”, Winnipeg, May 31 – June 3, 2007, URL: www2.cms.math.ca/Events/summer07/abs/posters_by_theme

38. Nesterenko M., Systems of two second order ODEs invariant with respect to the low-dimensional Lie algebras, Онлайн-матеріали семінару “Seminar Physique Mathematique CRM, UdeM”, Montreal, February 13, 2007, URL: www.crm.umontreal.ca/cal/en/mois200702.html

39. Nesterenko M., Contractions of low-dimensional Lie algebras, Онлайн-матеріали семінару “Lie Algebra Workshop of University of Ottawa”, Ottawa, April 13–15, 2007, URL: www.fields.utoronto.ca/programs/scientific/06-07/liealgebra/abstracts.pdf

Зміст

Перелік умовних позначень **17**

Вступ **19**

Розділ 1

Реалізації та контракції алгебр Лі **45**

1.1. Контракції алгебр Лі 48
1.2. S-розширення алгебр Лі 60
1.3. Контракції нільпотентних алгебр Лі 69
1.4. Реалізації алгебр Лі 77
1.5. Контракції реалізацій алгебр Лі 89
1.6. Реалізації та деформації алгебри Галілея 93
1.7. Реалізації та деформації алгебр Пуанкаре 112
1.8. Реалізації та деформації конформних алгебр 120
1.9. Диференціальні інваріанти та інваріантні рівняння 127

Розділ 2

Майже періодичні функції, квазікристали та деякі їх застосування **138**

2.1. Обчислення майже періодичних функцій 141
2.2. Квазікристал Фібоначчі 156
2.3. Шифрування зображень за допомогою квазікристалів . . . 172

Розділ 3

Орбіт-функції та ортогональні поліноми **187**

3.1. Прості групи Лі та орбіт-функції 189
3.2. Алгебра Лі A_n: спеціальні функції та правила галуження . 221
3.3. Ортогональні поліноми та орбіт-функції 239

Основні результати та висновки **295**

Список використаних джерел **297**

Додаток А
Нільпотентні алгебри Лі над полем $\mathbb{C}$ та їх допустимі контракції **310**
А.1. Розмірність п'ять 310
А.2. Розмірність шість 312

Додаток Б
Реалізації п'ятивимірних алгебр Галілея **317**

Додаток В
Список публікацій і апробація результатів **320**

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$	група автоморфізмів алгебри Лі $\mathfrak{g}$
α_i	прості корені простої алгебри Лі
ad_x	приєднане зображення елемента $x \in \mathfrak{g}$
ad_x^*	кориєднане зображення елемента $x \in \mathfrak{g}$
c_{ij}^k	компоненти тензора структурних сталих алгебри Лі
$\mathfrak{C}$	матриця Картана простої алгебри Лі
$\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$	алгебра диференціювань алгебри Лі $\mathfrak{g}$
$\partial_i = \partial/\partial x_i$	оператор диференціювання за змінною x_i
D_i, D_{x_i}	оператор повного диференціювання за змінною x_i
$\dim P$	розмірність простору P
$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$	група внутрішніх автоморфізмів алгебри Лі $\mathfrak{g}$
$\mathrm{GL}(V)$	група невироджених лінійних перетворень векторного простору V
$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$	група внутрішніх автоморфізмів алгебри $\mathfrak{g}$
κ	форма Кілінга
$\kappa_+\mathfrak{g}$	ранг додатної частини форми Кілінга алгебри Лі $\mathfrak{g}$
$\kappa_-\mathfrak{g}$	ранг від'ємної частини форми Кілінга алгебри Лі $\mathfrak{g}$
$\tilde{\kappa}_{\mathfrak{g}}^{\alpha}$	модифікована форма Кілінга алгебри Лі $\mathfrak{g}$
$\mathcal{L}_n$	множина n-вимірних алгебр Лі
$n_{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})$	максимальна розмірність абелевих підалгебр алгебри Лі $\mathfrak{g}$
$n_{\mathrm{Ai}}(\mathfrak{g})$	максимальна розмірність абелевих ідеалів алгебри Лі $\mathfrak{g}$
$N(\mathfrak{g})$	нільрадикал алгебри Лі $\mathfrak{g}$
$\mathcal{O}(\mathfrak{g})$	орбіта алгебри Лі $\mathfrak{g}$ під дією групи $\mathrm{GL}(V)$ у $\mathcal{L}_n$
$\overline{\mathcal{O}(\mathfrak{g})}$	замикання орбіти відносно топології Заріського в $\mathcal{L}_n$
ω_i	фундаментальні ваги простої алгебри Лі

$\operatorname{rank}(\operatorname{ad}\mathfrak{g})$	ранг приєднаного зображення алгебри Лі $\mathfrak{g}$
$\operatorname{rank}(\operatorname{ad}^*\mathfrak{g})$	ранг коприєднаного зображення алгебри Лі $\mathfrak{g}$
$r_{\mathfrak{g}}$	ранг алгебри Лі $\mathfrak{g}$
$r_{\mathrm{s}}(\mathfrak{g})$	ранг розв'язності алгебри Лі $\mathfrak{g}$
$r_{\mathrm{n}}(\mathfrak{g})$	ранг нільпотентності алгебри Лі $\mathfrak{g}$
$R(\mathfrak{g})$	радикал алгебри Лі $\mathfrak{g}$
$\operatorname{Vect}(M)$	векторне поле на множині M
$\operatorname{Vect}^r(M)$	r-те продовження векторного поля
W	група Вейля простої алгебри Лі
W^{aff}	афінна група Вейля простої алгебри Лі
F	фундаментальна область афінної групи Вейля
$Z(\mathfrak{g})$	центр алгебри Лі $\mathfrak{g}$

Вступ

Актуальність теми. Дослідження С. Лі та Ф. Клейна ініціювали новий погляд на геометрію і суттєво розширили коло її застосувань. Ідея Клейна про те, що ключовою для геометрії є група перетворень та ті властивості образів у многовидах, що зберігаються при групових перетвореннях, суттєво вплинула на розвиток проективної, афінної, диференціальної та інших видів геометрій. Крім того, використання груп та алгебр Лі при розв'язуванні диференціальних рівнянь виявилось надзвичайно ефективним інструментом, що дозволяє не лише знаходити точні розв'язки, а й дає істотну інформацію як при розв'язанні різноманітних задач, зокрема і прикладного характеру, так і для дослідження задач і побудови моделей сучасної математичної та теоретичної фізики. Широкий спектр застосувань алгебр Лі стимулює подальші дослідження, що стосуються їх класифікацій, підалгебр, реалізацій, інваріантів, контракцій, деформацій, спеціальних функцій та ряду інших об'єктів.

Контракції алгебр Лі знаходять застосування у різних галузях теоретичної фізики та математики, наприклад, при вивченні зображень, інваріантів, спеціальних функцій, при дослідженні структури множин алгебр Лі, тощо. Зокрема, коефіцієнти Вігнера групи Евкліда E(3) було отримано через контракцію коефіцієнтів Вігнера спеціальної ортогональної групи SO(4). Контракції використовують для встановлення зв'язків між різноманітними кінематичними групами. У такий спосіб між собою пов'язано кілька алгебр Лі, які включають релятивістський оператор положення, та конформна група і група Шредінгера. Контракції також відіграють важливу роль при описі взаємодіючих систем за допомогою динамічних груп. Наприклад, граничний процес, при якому стала зчеплення прямує до нуля, призводить до випадку невзаємодіючих систем.

Усі добре визначені фізичні теорії мають свої певні фундаментальні групи інваріантності, тому реалізації їх алгебр Лі диференціальними операторами першого порядку ефективно застосовуються для їх редукцій та інтегрування, а також для побудови нових інваріантних моделей. Область застосування класичних групових методів істотно розширюється завдяки використанню реалізацій алгебр Лі векторними полями при інтегруванні систем, що допускають принцип суперпозиції, та при конструюванні різницевих схем. Побудова реалізацій алгебр Лі є необхідною передумовою для знаходження диференціальних інваріантів та відповідних математичних моделей з нетривіальною симетрією. Вичерпний опис нееквівалентних реалізацій заданих алгебр Лі векторними полями також є фундаментальною математичною задачею, яка має самостійну цінність.

Сучасний груповий аналіз розвивається у провідних університетах та наукових центрах світу, а українська школа групового аналізу, започаткована В.І. Фущичем та розвинута А.Г. Нікітіним, Р.З. Ждановим, М.І. Сєровим, В.А. Тичиніним, В.М. Федорчуком, І.М. Цифрою, В.І. Лагном, Р.М. Чернігою, Р.О. Поповичем, В.М. Бойком та їхніми учнями, посідає гідне місце серед них. Окрім традиційних задач групової класифікації, науковцями київської школи досліджується низка суміжних задач пов'язаних з алгебрами Лі, зокрема суперсиметрія та суперінтегровність, контракції зображень (А. Нікітін [28,116–118]), контракції алгебр Лі (Р. Попович [126, 127], М. Нестеренко [108], Н. Іванова [63, 64]), контракції реалізацій (Р. Попович, О. Ванєєва [140], Н. Іванова [65]), узагальнені оператори Казіміра (В. Бойко, Р. Попович [18, 19]), реалізації алгебр Лі (Р. Попович, В. Бойко, М. Нестеренко [128]).

У зв'язку з нещодавніми відкриттями виникають нові задачі пов'язані з групами Вейля простих алгебр Лі, групами Коксетера, скінченними групами та аперіодичними мозаїками. Так, у 1982 році Д. Шехтманом були відкриті фізичні квазікристали. Це відкриття та необхідність досліджень пов'язаних з ними явищ у фізиці твердого тіла вимагають побудови які-

сних та строгих математичних моделей квазікристалів та розвитку аналізу функцій 'чутливих' до квазікристалів, що можуть бути розв'язані з використанням простих груп та дуальних до них.

У задачах сучасної математики та математичній фізиці зокрема, все частіше виникає потреба використовувати системи координат та ґратки, що не є прямокутними. Яскравим прикладом є задача дискретизації комплексного аналізу, яку І. Диннікову та С. Новікову вдалось успішно розв'язати, використовуючи трикутні ґратки. Крім цього, інтенсивне зростання кількості тривимірних даних та потреба у їх обробці та аналізі, обґрунтовують дослідження спеціальних орбіт-функцій, які були вперше введені у 2005 році Ї. Патерою. Вони мають властивість симетрії відносно дії афінної групи Вейля, тому природнім чином пов'язані з непрямокутними системами координат, можуть застосовуватись для перетворень аналогічних перетворенню Фур'є та природно узагальнюють відомі поліноми малої кількості змінних до поліномів більшої кількості змінних.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі математичної фізики Інституту математики НАН України в рамках тем "Симетрія та інтегровність нелінійних моделей" (номер держреєстрації 0106U000436), "Симетрія, суперсиметрія та інтегровність диференціальних рівнянь" (номер держреєстрації 0110U008615), "Симетрія, суперсиметрія та суперінтегровність рівнянь математичної фізики" (номер держреєстрації 0116U003059), "Аналітичні та групові методи дослідження математичних моделей сучасного природознавства" (номер держреєстрації 0117U002119), "Класифікація симетрій та точні розв'язки нелінійних моделей фізичних та біологічних процесів" (номер держреєстрації 0118U003803), "Симетрія та інтегровність рівнянь сучасної математичної фізики" (номер держреєстрації 0120U100173).

Мета і завдання дослідження. *Мета* дисертаційної роботи — розвиток теорії контракцій та теорії реалізацій алгебр Лі, а також побудова

контракцій, деформацій, реалізацій і диференціальних інваріантів фізично важливих алгебр Лі. Розробка нових методів для дослідження квазікристалів та вивчення властивостей орбіт-функцій, пов'язаних з непрямокутними ґратками.

Об'єктом дослідження є нільпотентні алгебри Лі, алгебри де Сіттера, Пуанкаре та Галілея, конформна алгебра, орбіт-функції, квазікристали та майже періодичні функції.

Предметом дослідження є групи та алгебри Лі, реалізації, контракції, деформації, диференціальні інваріанти та S-розширення алгебр Лі, а також множини перерізів та проєкцій, скінченні групи, дуальні групи, групи Вейля, їх ґратки, підгрупи, орбіти та фундаментальні області, ортогональні поліноми багатьох змінних.

Методи дослідження. Теоретико-групові методи, методи алгебраїчних інваріантів та методи лінійної алгебри застосовувались при дослідженні контракцій; інфінітезимальний метод Лі, методи диференціальної геометрії та алгебраїчний метод І. Широкова були використані для побудови реалізацій; методи теорії зображень та теорії простих груп Лі використовувалися при дослідженні орбіт-функцій та ортогональних поліномів; теоретико-групові методи, методи скінченних груп та дуальних до них застосовувалися для побудови дискретного аналізу майже періодичних функцій.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, такі:

1. Запропоновано дві нові необхідні умови існування контракцій, пов'язані з підалгебрами і розмірністю централізатора похідної, та доведено відповідні теореми.
2. Досліджено S-розширення тривимірних дійсних алгебр Лі. Показано, що процедура S-розширення зберігає властивості розв'язності, нільпотентності та унімодулярності, при цьому S-розширення та редукція

алгебр Лі дозволяють отримати неунімодулярні алгебри Лі з унімодулярних.

3. Для комплексних нільпотентних алгебр Лі розмірностей п'ять та шість встановлено переліки необхідних умов, які є достатніми для визначення пар алгебр, що допускають контракції. Доведено, що контракції комплексних нільпотентних алгебр Лі розмірностей п'ять та шість еквівалентні узагальненим контракціям Іньоню–Вігнера.
4. Доведено теорему про зведення реалізації до суттєвих змінних та узагальнено алгебраїчний метод І. Широкова для побудови реалізацій алгебр Лі як проєкцій лівоінваріантних векторних полів. Запропоновано конструктивний метод побудови параметризованих реалізацій, що є точними та збігаються до реалізацій контрактованої алгебри Лі.
5. Побудовано реалізації алгебр Пуанкаре $\mathfrak{p}(1,1)$ та $\mathfrak{p}(1,2)$ у просторах не більше ніж трьох змінних, а також знайдено деформації цих алгебр і їх породжуючі реалізації.
6. Для алгебр Галілея розмірностей не вище за п'ять побудовано повний набір нееквівалентних реалізацій; зокрема, усі неточні реалізації та усі реалізації п'ятивимірних алгебр Галілея є новими. Також знайдено деформації алгебр Галілея та їх породжуючі реалізації.
7. Отримано нові породжуючі реалізації конформної алгебри Лі та двох алгебр де Сіттера. Побудовано спільну деформацію алгебри Пуанкаре до алгебр де Сіттера.
8. Доведено теорему про нормальну форму інваріантної системи двох рівнянь другого порядку та знайдено деформації, породжуючі реалізації та повні набори диференціальних інваріантів для найменшої алгебри Галілея.
9. Розроблено метод для дискретного Фур'є-аналізу майже періодичних функцій, визначених на квазікристалах. Новий метод протестовано на аперіодичних функціях квазікристала Фібоначчі. Запропоновано

симетричний переставний метод шифрування, що використовує всюди розривне перетворення точок квазікристала у точки вікна; метод використано для кодування растрових зображень.

10. Досліджено властивості орбіт-функцій, зокрема тривимірних: побудовано явний вигляд їхніх орбіт, стабілізаторів, фундаментальних областей, розроблено їхню дискретизацію та доведено дискретну ортогональність. Отримано явний вигляд операторів другого порядку, для яких тривимірні C-орбіт-функції та S-орбіт-функції це відповідно, розв'язки крайових задач Неймана та Діріхле.
11. Побудовано правила галуження орбіт групи Вейля простих алгебр Лі A_n та доведено еквівалентність трьох сімей орбіт-функцій спеціальним експоненційним функціям багатьох змінних, введених А. Клімиком та Ї. Патерою.
12. Запропоновано три методи побудови ортогональних поліномів виходячи з орбіт-функцій. Доведено еквівалентність кількох відомих сімей ортогональних поліномів, зокрема, поліномів Чебишева, Якобі, Макдональда та Курнвіндера поліномам орбіт-функцій. Отримано явний вигляд розв'язних рекурсій, що дозволяють алгоритмічно будувати сім'ї ортогональних поліномів двох та трьох змінних. Знайдено правила редукції поліномів двох та трьох змінних до поліномів інших алгебр за максимальними підгрупами простих груп Лі.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати є новими і можуть бути застосовані для дослідження зв'язків між теоріями і моделями фізики, біології чи економіки, які інваріантні відносно різних алгебр Лі, для побудови рівнянь та моделей, інваріантних відносно певних алгебр Лі, для аналізу та обчислення функцій на квазікристалах та ґратках напівпростих груп Лі.

Особистий внесок здобувачки. Усі результати, що виносяться на захист, одержано дисертанткою самостійно. У роботах, які опубліковано разом з іншими авторами, розподіл особистих внесків такий.

У роботах [1, 3–6, 9] усі основні результати і їхнє доведення дисертантка отримала самостійно, С. Пошта перевіряв обчислення та брав участь в обговоренні результатів.

У роботі [2] усі результати дисертантка отримала самостійно, М. Миронова брала участь у перевірці обчислень та перекладі статті англійською.

У статті [7] постановка задачі, план дослідження й доведення основних результатів належить дисертантці, О.В. Ванєєва показала, що рівняння типу Бюргерса, Кортевега–де Фріза третього й п'ятого порядків, Кавахари та реакції–дифузії є інваріантними відносно алгебр Галілея чи їхніх деформацій, а також перевірила основні результати щодо реалізацій, С. Пошта брав участь у обчисленні реалізацій і обговоренні результатів.

У роботах [21, 22] дисертантці належить уточнення постановки задач, розробка методів дослідження, та доведення теореми про нормальну форму системи, О.В. Гапоновій — опис систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантних відносно дійсних алгебр Лі розмірності не вищої за чотири.

У статтях [12, 13] постановка задачі та загальне керівництво дослідженнями належить Ї. Патері, основні результати — дисертантці, А. Терешкевич виконала перевірку обчислень.

У роботах [16–18, 20] постановка задачі та обґрунтування актуальності належать Ї. Патері, основні результати цих робіт — дисертантці.

У статті [14] постановка задачі та обґрунтування актуальності досліджень належить Ї. Патері, дисертантка побудувала рекурентні співвідношення та правила редукції для ортогональних поліномів, М. Заєвська побудувала відображення фундаментальних областей для ортогональних поліномів та повторила обчислення редукцій поліномів, А. Терешкевич виконала перевірку обчислень.

У роботі [15] постановка задачі належить Ї. Патері, дисертантка та М. Ларош незалежно виконали всі обчислення правил галуження та порівняли отримані результати.

У роботі [19] постановка задачі належить Ї. Патері, уточнення постановки задачі, вибір методів і розробка плану дослідження та загальне керівництво належить Р. Муді, дисертантка вивела необхідні формули, виконала обчислення та протестувала отриманий метод на квазікристалі Фібоначчі.

У роботі [23] постановка задачі належить Ї. Патері, дисертантці належать розробка методу шифрування, а Д. Жавроцькому належить вибір об'єкту для тестування методу та розробка програмного забезпечення.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися на міжнародних конференціях: "Bogolyubov Kyiv Conference: Problems of Theoretical and Mathematical Physics" (Київ, 2019), "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі" (Київ, 2018); Fourth Conference "Symmetries of Discrete Systems and Processes" (Дечин, Чеська республіка, 2017), міжнародних симпозіумах: "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Протарас, Кіпр, 2008, 2010; Ларнака, Кіпр, 2014, 2016, 2018), XXVth International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries (Прага, Чеська республіка, 2017), "Supersymmetries and Quantum Symmetries" (Дубна, Росія, 2013), CMS–MITACS Joint Conference 2007 (Вінніпег, Канада, 2007), міжнародних семінарах: Lie ALgebra Workshop of University of Ottawa (Оттава, Канада, 2007), CRM–Fields–MITACS Workshop on Lie Groups, Group Transforms and Image Processing (Торонто, Канада, 2008) Workshop on Representation Theory (Нікосія, Кіпр, 2009) "Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики" (Київ, 2011, 2013, 2015, 2016, 2018), "A Century of Noether's Theorem and Beyond" (Опава, Чеська Республіка, 2018), а також на міжнародних конференціях молодих математиків (Київ, 2015, 2019).

Результати дисертаційної роботи неодноразово доповідалися й обговорювалися на науковому семінарі відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України, професор А.Г. Нікітін, 2007–2021), а також на засіданні Вченої ради Інституту математики НАН України (2012, 2018), науковому семінарі "Алгебраїчний семінар Київського національного університету імені Тараса Шевченка" (керівники семінару — професор Ю.А. Дрозд, професор А.С. Олійник, професор А.П. Петравчук, 2020), науковому семінарі кафедри математичної фізики, механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка "Асимптотичні та аналітичні методи для задач математичної фізики" (керівники семінару — професор Т.А. Мельник, професор В.Г. Самойленко, 2021), науковому семінарі кафедри математики Чеського технічного університету у Празі (Чехія, 2017), науковому семінарі з математичної фізики Центру математичних досліджень університету Монреалю (Канада, 2008).

Публікації. Результати дисертації висвітлено у 39 наукових публікаціях. Основні результати опубліковано у наукових фахових виданнях України [2, 21] і наукових періодичних виданнях інших держав [1, 3–20]. Роботи [1, 3–10, 12, 14, 15, 17–19] проіндексовані у міжнародній наукометричній базі Scopus, а роботи [3–5, 7, 8, 10, 13–15, 17–19] проіндексовані у міжнародній наукометричній базі Web of Science. Загалом наукові роботи М.О. Нестеренко зібрали на сьогодні 183 та 192 цитування у наукометричних базах Web of Science та Scopus відповідно. Результати дисертації додатково відображено в публікаціях [22, 23], а також у тезах доповідей у матеріалах міжнародних конференцій [24–39]. Кожна зі статей [7, 14, 15, 18, 19], як опублікована у виданні зі квартиля Q1 (відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank), прирівнюється до трьох публікацій, а кожна з робіт [5, 10], як опублікована у виданні зі квартиля Q3, — до двох публікацій (п. 2 Наказу № 1220 МОН України від 23.09.2019), отже, 21 стаття, у яких відображено основні результати дисертації, зарахову-

ється як 33 фахові публікації. Роботи [2, 6, 7, 9, 11–19, 22] проіндексовано у базі Zentrablatt Math, а роботи [6, 7, 9, 11–19] проіндексовано у базі MathSciNet. Статті [8, 10, 11] — одноосібні.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 148 найменувань, і трьох додатків. Повний обсяг дисертації становить 327 сторінок, із них список використаних джерел міститься на 13 сторінках, а додатки — на 18 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми, сформульовано задачі, що досліджуються у дисертації, та стисло викладено отримані результати. Основну частину роботи становлять три розділи. На початку кожного розділу коротко наведено основні результати, що містяться в ньому.

У **першому** розділі дисертації досліджуються реалізації та контракції алгебр Лі, а також диференціальні інваріанти та S-розширення.

Параграф 1.1 присвячено теорії контракцій (граничних переходів між алгебрами Лі), у ньому наведено кілька типів означень, розглянуто основні типи контракцій та доведено ряд тверджень.

Задача встановлення існування та побудови контракції для заданої пари алгебр Лі за означенням надзвичайно складна та громіздка, тому ефективним шляхом дослідження контракцій є інтенсивне використання необхідних умов, що базуються на величинах, інваріантних або напівінваріантних відносно контракцій.

У дисертаційній роботі запропоновано дві нові необхідні умови, які доповнюють уже наявний набір необхідних умов до достатнього для комплексних нільпотентних алгебр Лі розмірностей п'ять та шість.

Нехай $\mathfrak{g}'$ — це похідна n-вимірної алгебри Лі $\mathfrak{g}$. *Централізатором похідної* $\mathfrak{g}'$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ (позначатимемо $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}')$) є набір елементів алгебри $\mathfrak{g}$, які комутують з усіма елементами з $\mathfrak{g}'$.

Твердження 1.8. *Якщо алгебра Лі* $\mathfrak{g}_0$ *є власною контракцією алгебри Лі* $\mathfrak{g}$*, то має місце нерівність* $\dim C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}') \leqslant \dim C_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{g}_0{}')$.

Твердження 1.10. *Нехай алгебра Лі* $\mathfrak{g}_0$ *є контракцією алгебри Лі* $\mathfrak{g}$ *та алгебра* $\mathfrak{g}$ *містить підалгебру* $\mathfrak{s}$*. Тоді алгебра* $\mathfrak{g}_0$ *містить підалгебру* $\mathfrak{s}_0$ *тієї самої розмірності,* $\dim \mathfrak{s}_0 = \dim \mathfrak{s}$.

Систематичне вивчення контракцій алгебр Лі може бути здійснене дослідженням усіх можливих контракцій алгебр Лі заданої розмірності, проте це вимагає попередньої класифікації таких алгебр з точністю до невироджених лінійних перетворень. У загальному випадку така класифікаційна задача є дикою, хоча і розв'язана для алгебр Лі розмірностей, не вищих за шість. Інший підхід, який може бути застосований, це дослідження контракцій всередині певних класів алгебр Лі, замкнених відносно контракцій; такими є множини нільпотентних, розв'язних, унімодулярних алгебр Лі та множини алгебр Лі з абелевим ідеалом корозмірності один і подібні до них. Саме дослідженню контракцій комплексних нільпотентних алгебр Лі розмірностей п'ять та шість присвячено параграф 1.3, у ньому, зокрема, було доведено такі твердження.

Лема 1.14. *Наступний набір необхідних умов є достатнім для виокремлення пар п'ятивимірних нільпотентних алгебр Лі над полем комплексних чисел, для яких існує контракція.*

Якщо алгебра Лі g_0 *є власною контракцією алгебри Лі* g*, то виконуються умови:*

1) $\dim \mathcal{O}(g_0) < \dim \mathcal{O}(g)$*, де* $\mathcal{O}(g)$ *— це орбіта під дією* $\mathrm{GL}(V)$*;*
2) $n_{\mathrm{Ai}}(g_0) \geq n_{\mathrm{Ai}}(g)$*, де* $n_{\mathrm{Ai}}(g)$ *— максимальна розмірність абелевого ідеалу;*
3) $\dim g_0^l \leq \dim g^l$*,* $l = 1, 2, 3$*, де* $g^1 = [g, g]$*,* $g^2 = [g^1, g]$*,* $g^3 = [g^2, g]$*;*
4) $\dim Z(g_0) \geq \dim Z(g)$*, де* $Z(g)$ *— центр алгебри;*
5) $\dim C_g(g') \leq \dim C_g(g_0{}')$*, де* $C_g(g')$ *— централізатор похідної алгебри.*

Твердження 1.15. *Усі, крім однієї, контракції нільпотентних алгебр Лі розмірності не вищої за п'ять еквівалентні звичайним контракціям Іньоню–Вігнера.*

Контракція $\mathfrak{g}_{5.6} \to \mathfrak{g}_{5.4}$ *є єдиною контракцією нільпотентних п'ятивимірних алгебр Лі, що не може бути отримана простою контракцією Іньоню–Вігнера. Для цієї пари мінімальною додатною сигнатурою є набір* $(1, 0, 1, 2, 1)$.

Два аналогічні твердження доведено для шестивимірних нільпотентних алгебр Лі, але контракції шестивимірних нільпотентних алгебр еквівалентні узагальненим контракціям Іньоню–Вігнера і достатній перелік складається з семи необхідних умов. Також у параграфі 1.3 детально розглянуто випадок контракції між характеристично нільпотентними алгебрами Лі розмірності сім, що демонструє неуніверсальність узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера навіть для множини нільпотентних алгебр Лі.

1961 року А. Зайцев [2] сформулював гіпотезу про те, що усі розв'язні алгебри Лі фіксованої розмірності можна отримати за допомогою контракцій з напівпростих алгебр Лі тієї самої розмірності, та запропонував застосувати контракції для 'граничної класифікації' розв'язних алгебр Лі. 1981 року аналогічну гіпотезу сформулювали Селеджіні та Тарліні. Насправді таке припущення хибне, оскільки контракція зберігає властивість унімодулярності, а також тому, що напівпрості алгебри Лі існують не для всіх розмірностей.

У параграфі 1.2 дисертаційної роботи гіпотезу Зайцева було переглянуто у термінах S-розширень.

Якщо $S = \{\lambda_\alpha\}$ — це абелева напівгрупа порядку N, а індекси α, β та γ змінюються від 1 до N, то $(n \cdot N)$-вимірна *S-розширена алгебра Лі* $\mathfrak{G} := S \times \mathfrak{g}$ породжується базисними елементами $\{e_{(i,\alpha)} = \lambda_\alpha e_i\}$ і визначається структурними сталими

$$c_{(i,\alpha)(j,\beta)}^{(k,\gamma)} = \begin{cases} c_{ij}^k, & \text{якщо } \lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_\gamma, \\ 0, & \text{у решті випадків.} \end{cases}$$

Проведені у параграфі 1.2 дослідження S-розширень дійсних тривимірних алгебр Лі дозволили сформулювати наступне твердження.

Твердження 1.13. *S-розширення алгебр Лі зберігають властивості унімодулярності, розв'язності та нільпотентності.*

S-розширення та редукція алгебр Лі дозволяють отримати неунімодулярні алгебри Лі з унімодулярних, проте, при цьому порушується відношення порядку на многовиді алгебр Лі заданої розмірності.

Четвертий параграф першого розділу дисертаці присвячено задачам, пов'язаним з реалізаціями алгебр Лі векторними полями вигляду

$$\sum_{j=1}^{m} \xi^j(x_1, x_2, \dots, x_m) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \text{де} \quad m \in \mathbb{N} \text{ — фіксоване.}$$

У цьому параграфі сформульовано означення реалізації та їх еквівалентності, запропоновано поняття рангу реалізації та суттєвих змінних. А також розглянуто алгебраїчний метод побудови лівоінваріантних векторних полів запропонований І. Широковим, що полягає у відновленні компонент векторних полів з дуальних компонент лівоінваріантних диференціальних один-форм обчислених для канонічних координат другого роду. Використовуючи опис інваріантних просторів примітивних, транзитивних та інтранзитивних груп Лі, а також загальний вигляд інфінітезимальних генераторів груп Лі, алгебраїчний метод Широкова узагальнено для побудови реалізацій алгебр Лі методом проєкції лівоінваріантних векторних полів на простори змінних, які комплементарні до інваріантних підпросторів.

Використовуючи інваріанти нульового порядку, доведено теорему про зведення реалізації алгебри Лі до суттєвих змінних.

Твердження 1.27. *Нехай $R\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{Vect}(\tilde{M})$ — реалізація рангу $r = \operatorname{rank} R < m$, де $m = \dim \tilde{M}$. Тоді існує еквівалентна їй реалізація $\tilde{R}(y)\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{Vect}(\tilde{M})$, така, що коефіцієнти базисних векторних полів $\tilde{\xi}_i^l(y) = 0$ для всіх $i = 1, \dots, n$, $l = r+1, \dots, m$.*

У параграфі 1.5 досліджено питання контракції реалізації та запропоновано метод побудови параметризованої реалізації, що збігається до реалізації контрактованої алгебри Лі.

Узагальнений алгебраїчний метод Широкова застосовано для побудови нових реалізацій алгебр Галілея, Пуанкаре, конформної та де Сіттера. А саме, у параграфі 1.6 досліджено п'ять найменших алгебр Галілея: алгебри розмірностей три, чотири та п'ять. Для кожної з алгебр побудовано повний набір нееквівалентних реалізацій, серед них неточні реалізації та реалізації п'ятивимірних алгебр Галілея побудовано вперше. Крім цього, у параграфі побудовано деформації алгебр Галілея та породжуючі реалізації деформацій, частина з деформацій отримана для алгебр Галілея довільної розмірності. Наприкінці розділу наведено ряд фізично цікавих диференціальних рівнянь та їх систем, що інваріантні відносно алгебр Галілея та їх деформацій.

Для прикладу розглянемо дві п'ятивимірні алгебри Галілея: розширену алгебру Галілея $\mathrm{AG}_2(1)$ та редуковану спеціальну алгебру Галілея $\mathrm{A\bar{G}}_3(1)$. Алгебра $\mathrm{AG}_2(1) = \langle M,\ P,\ T,\ G,\ D\rangle$ з комутаційними співвідношеннями

$$[G,T]=P,\ [D,G]=G,\ [P,D]=P,\ [T,D]=2T,\ [G,P]=M$$

ізоморфна розв'язній алгебрі $\mathfrak{g}_{5.30}^{-2}$ за класифікацією Мубаракзянова, а нерозв'язна нерозкладна алгебра $\mathrm{A\bar{G}}_3(1) = \langle P,\ T,\ G,\ D,\ S\rangle$ з комутаційними співвідношеннями

$$\begin{aligned}&[T,G]=-P\ [D,G]=G,\ [D,P]=-P,\ [D,T]=-2T,\\ &[S,P]=G,\ [D,S]=2S,\ [T,S]=D\end{aligned}$$

відповідає алгебрі з розкладом Леві–Мальцева $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \in 2A_1$.

Класифікація реалізацій цих алгебр цікава не лише для фізичних застосувань (алгебра $\mathrm{A\bar{G}}_3(1)$, наприклад, є максимальною алгеброю симетрії рівняння Бюргерса), а також є важливою самостійною математичною

задачею, оскільки класифікація реалізацій п'ятивимірних алгебр Лі наразі не отримана. Повний перелік реалізацій цих алгебр є досить громіздким і наведений у додатку Б дисертаційної роботи, наведемо лише їх породжуючі реалізації, що відповідають примітивній дії відповідної локальної групи Лі, або, що те саме, нульовій підалгебрі.

Реалізація алгебри $\mathrm{AG}_2(1)$ з комплементарним до підалгебри базисом $\{M,\, P,\, T,\, D,\, G\}$ має вигляд:

$$M=\partial_1,\ P=\partial_2,\ T=\partial_3,$$
$$G=-x_2\partial_1-x_3\partial_2+\mathrm{e}^{x_4}\partial_5,\ D=x_2\partial_2+2x_3\partial_3+\partial_4.$$

А реалізація алгебри $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_3(1)$ з комплементарним до підалгебри базисом $\{G,\, P,\, T,\, D,\, S\}$ має вигляд:

$$D=-x_1\partial_1+x_2\partial_2+2x_3\partial_3+\partial_4,\ G=\partial_1,\ P=\partial_2,$$
$$S=-x_2\partial_1+x_3^2\partial_3+x_3\partial_4+\mathrm{e}^{2x_4}\partial_5,\ T=x_1\partial_2+\partial_3.$$

Усі нееквівалентні реалізації двох алгебр Пуанкаре, а саме $\mathfrak{p}(1,1)$ та $\mathfrak{p}(1,2)$, у просторах не більше ніж трьох змінних, побудовано у параграфі 1.7. Крім цього, знайдено деформації цих алгебр та породжуючі реалізації.

У параграфі 1.8 отримано нові породжуючі реалізації конформної алгебри Лі та двох алгебр де Сіттера. Побудовано спільну деформацію алгебри Пуанкаре до алгебр де Сіттера.

Останній параграф першого розділу присвячено диференціальним інваріантам алгебр Лі. У цьому параграфі досліджується алгебра Галілея найменшої розмірності, будуються її деформації, породжуючі реалізації та повні набори диференціальних інваріантів: базиси диференціальних інваріантів, оператори інваріантного диференціювання та визначники Лі. Наприкінці параграфа зібрано диференціальні рівняння та їх системи, що мають важливі застосування та інваріантні відносно найменшої алгебри Галілея та її деформацій.

При дослідженні інваріантних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, зокрема систем ньютонівського типу, виникає питання про можливість запису такої системи у нормальній формі

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= F(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \\ \ddot{y} &= G(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}). \end{aligned} \tag{1.41}$$

Аналізуючи множини диференціальних інваріантів було доведено критерій існування інваріантних систем вигляду (1.41) для заданої алгебри Лі.

Твердження 1.39. *Алгебра Лі векторних полів допускається нормальною регулярною системою типу* (1.41) *тоді і тільки тоді, коли ранги першого і другого продовження реалізації співпадають.*

Другий розділ дисертації присвячено квазікристалам (як модельним множинам або множинам, побудованим за допомогою перерізів та проєкцій), пов'язаним з ними майже періодичним функціям та їх застосуванням.

Характерною для квазікристалів є структурована далекосяжна впорядкованість, для якої відсутній періодичний порядок. Квазікристали, квазікристалічні фотонні кристали, хвильові експерименти Фарадея та ряд інших фізичних об'єктів і явищ демонструють властивості майже періодичності. Типовим прикладом є потенціальне поле фізичного квазікристала, у цьому випадку потенціал — це аперіодична функція, що належить до множини майже періодичних функцій (або локальних функцій). Зазвичай подібні структури моделюються вибором частини об'єкта дослідження та накладанням періодичних крайових умов. Такий підхід не є цілком задовільним, оскільки майже періодичний порядок принципово відрізняється від періодичного і неспіврозмірність, що лежить в основі квазікристалів, впливає на кожну з частин теорії.

У параграфі 2.1 розроблено метод для дискретного Фур'є-аналізу майже періодичних (локальних) функцій, визначених на квазікристалах. Тут

наведено означення локальної функції, яке спрощено можна пояснити таким чином: функція $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *локальна відносно квазікристала* Λ має 'близькі значення' $f(x) \approx f(y)$ у точках x та y, якщо локальні оточення Λ в точках x та y — 'подібні'; інакше кажучи, функція 'відчуває' точки, що належать квазікристалу. У цьому параграфі також доведено теорему про існування та єдиність неперервної функції на локальній оболонці дискретної множини Λ для кожної локальної функції відносно Λ.

У дисертаційній роботі детально досліджуються точкові множини $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, які є множинами перерізів та проєкцій і задаються наступною схемою

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\ \|\ } & \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\ \perp\ } & \mathbb{R}^d \\ & & \cup & & \\ L & \xleftarrow{\ 1-1\ } & \widetilde{L} & \xrightarrow{\text{щільний образ}} & L' \end{array}$$

тут $\widetilde{L}$ — це ґратка в $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, яка орієнтована таким чином, що проєкції ґратки на простори $\mathbb{R}^d$ будуть відповідно щільними та взаємно однозначними. Простір $\mathbb{R}^d$ ліворуч на схемі є *фізичним простором*, тобто простором, якому буде належати квазікристал Λ, а простір $\mathbb{R}^d$ праворуч є *внутрішнім простором*, який буде використовуватися для контролю проєкції ґратки $\widetilde{L}$ у фізичний простір. Образ $\widetilde{L}$ під дією проєкції у фізичний простір позначається L. Для дискретизації використовується раціональна оболонка $\mathbb{Q}\widetilde{L}$, її відповідні проєкції та класи спряженості. Позначивши через $\tilde{x}$, x та x' елементи з $\widetilde{L}$, їх ліві та праві проєкції, отримаємо $\tilde{x} = (x, x')$, де x пробігає L. Перетворення $(\,\cdot\,)'$ пов'язує фізичний та внутрішній простори: $(\,\cdot\,)'\colon L \to L'$, при цьому $x \mapsto x'$. Обравши компактну підмножину Ω у внутрішньому просторі (вікно), яка співпадає зі своїм замиканням та має границю міри нуль, визначимо *квазікристал* Λ:

$$\Lambda(\Omega) := \{x \mid \tilde{x} \in \widetilde{L},\ x' \in \Omega\}.$$

У параграфі 2.1 побудовано загальну схему подрібнення для ґраток з цілими коефіцієнтами та дуальних до них. В основі зв'язку між майже

періодичністю функції у фізичному просторі та періодичністю у просторі вищої розмірності є природне вкладення евклідового простору у тор $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{T}$, що дозволяє застосувати до майже періодичних функцій на квазікристалах переваги дискретних методів періодичних функцій.

Параграф 2.2 присвячено квазікристалу Фібоначчі та застосуванню теорії, розробленої у параграфі 2.1, до двох аперіодичних тестових функцій на ньому. Детально досліджено двовимірну схему перерізів та проєкцій, що породжує одновимірний квазікристал Фібоначчі, та у явному вигляді побудовано дуальні ґратки і сітки та їх проєкції на фізичний простір квазікристала (точки даних). Отримана дискретизація є універсальною та може бути використана для наближення чи інтерполяції будь-яких локальних функцій квазікристала Фібоначчі. Цю дискретизацію застосовано для кількох різних наближень локальної функції 'відстань до найближчої точки квазікристала' та локальної функції 'тип плитки квазікристала'.

Для ілюстрації стисло розглянемо лише кінцевий етап наближення майже періодичних функцій для одновимірного квазікристала Фібоначчі, коли дискретизацію тора (побудову дуальної ґратки) вже виконано. Позначимо через $f^{\text{exact}}(x)$ скінченні суми, що наближають функцію $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{\text{exact}}(x) = \sum_{k \in K} a_k \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(k|x)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Тепер замінимо коефіцієнти a_k у $f^{\text{exact}}(x)$ на їхні наближення

$$a_k^{\text{int}} := \frac{1}{R} \int_0^R f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(k|x)} \mathrm{d}x \tag{2.45}$$

та позначимо отриману функцію $f^{\text{int}}(x)$. Використовуватимемо різні значення R, які відповідають набору повних шляхів у фундаментальній області.

Інтеграли (2.45) замінюються на скінченні суми, де інтегрант обчислюється на скінченному наборові точок, які походять з проєкцій

$\{u_1, \ldots, u_{N^2}\}$ отриманих з N^2 дискретних точок у фундаментальній області C, спроєктованих на обрану (за допомогою числа R) частину фізичного простору:

$$a_k^{\mathrm{sum}} := \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N^2} f(u_j) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(k|u_j)}.$$

Остаточна апроксимація функції $f^{\mathrm{exact}}(x)$ позначається $f^{\mathrm{sum}}(x)$, це і є шуканим наближенням:

$$f^{\mathrm{sum}}(x) = \sum_{k \in K} \left\{ \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N^2} f(u_j) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(k|u_j)} \right\} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(k|x)}.$$

Воно обчислюється з точок даних у $\mathbb{R}$, є скінченною сумою експоненційних функцій із частотами з модуля Фур'є функції f, використовує дискретні групи, що походять із періодичності схеми перерізів та проєкцій. За побудовою функція f^{sum} є майже періодичною та наближає підняту функцію $\tilde{F}$ на всій прямій, що обвиває тор.

Отже, маємо чотири функції: f, f^{exact}, f^{int}, f^{sum}, усі визначені для всіх $x \in \mathbb{R}$. Три наближені функції залежать від кількості M частин шляху, що проходять через фундаментальну область, та від кількості N^2 точок сітки $\widetilde{L_N}$ у фундаментальній області C. Кожне з цих чисел обмежує повну суму ряду Фур'є–Бора до однакового скінченного набору частот K.

На рис. 2.7 наведено приклад наближення функції $f(t)$, що визначає відстань від точки t до найближчої точки квазікристала Фібоначчі Λ. Це неперервна та кусково-лінійна функція, яка є локальною відносно Λ.

Зауважимо, що відхилення наближених функцій ліворуч від початку координат пов'язане з тим, що у ту саму частину тора перетворюються два простори, розглянутий квазікристал Фібоначчі та множина $\hat{\Lambda}((-1, \frac{1}{\tau}])$, яка відрізняється від нашої Λ у двох точках, що походять з кінців інтервалу $[-1, \frac{1}{\tau})$.

Варто зазначити, що запропонований метод наближає майже періодичну функцію не на обмеженій області (відрізку, інтервалі), а на усьому

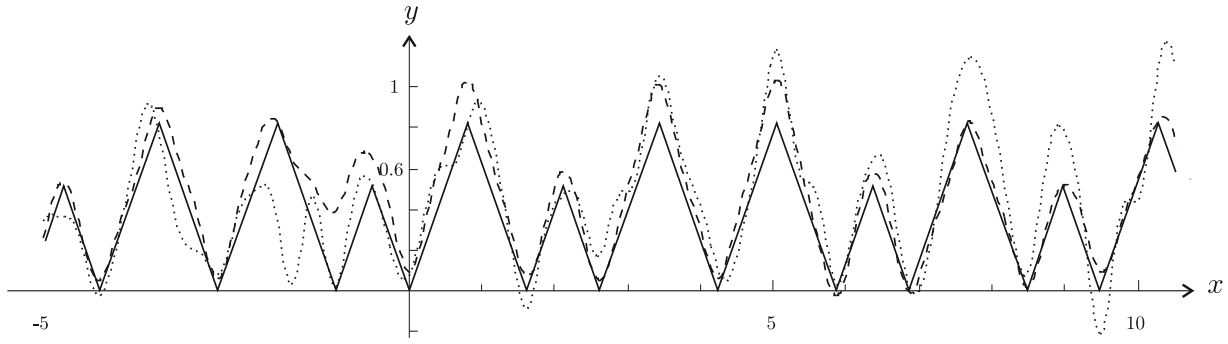


Рис. 2.7. Суцільна лінія — графік функції f. Пунктирна лінія — наближення f^{sum}, а штрихова лінія — наближення f^{int}. Обидві апроксимації обчислено з використанням $N^2 = 49$ точок сітки у фундаментальній області C та $M = 11$ частин шляху в C, відповідний інтервал інтегрування $R \approx 23{,}30$.

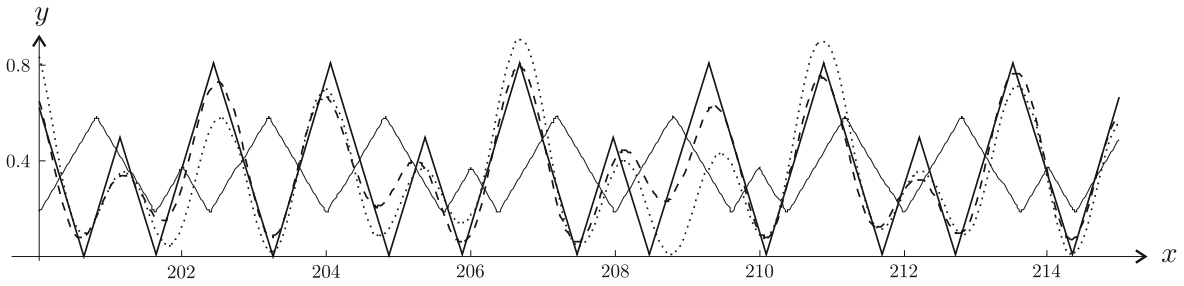


Рис. 2.10. Суцільна лінія — графік функції f. Пунктирна лінія — наближення f^{sum}, а штрихова лінія — наближення f^{int}. Обидві апроксимації обчислено з використанням $N^2 = 9$ точок сітки у C та $M = 10$ частин шляху в C, відповідний інтервал інтегрування $R \approx 21{,}64$. Також тонкою лінією зображено періодичну апроксимацію за допомогою косинусів для $n = 50$ доданків. Тут функції зображено на проміжку $[200, 215]$. Спостерігаємо, що аперіодичні наближення продовжують повторювати графік f на відміну від періодичного наближення.

евклідовому просторі (див. рис. 2.10 для наближення на фрагменті прямої, що суттєво віддалений від початку координат).

У параграфі 2.3 запропоновано застосування розривного у кожній точці відображення між фізичним та внутрішнім просторами одновимірних квазікристалів для шифрування інформації. Розроблено симетричний переставний метод шифрування, який є стійким відносно обчислень, оскільки оперує лише цілими числами. У цьому параграфі також наведено важливі властивості одновимірних квазікристалів, що дозволяють швид-

ко генерувати одновимірні квазікристали за допомогою комп'ютера (без проєкцій), і описано множину криптозмінних. Цей метод шифрування застосовано до кодування растрових зображень. Приклади застосування методу наведено наприкінці параграфу 2.3.

У **третьому розділі** дисертаційної роботи досліджуються орбіт-функції, ортогональні поліноми та правила галуження орбіт групи Вейля алгебри A_n.

Нехай $\lambda \in P^+$ — конус домінантних ваг, а W — група Вейля напівпростої алгебри Лі, тоді для точок x n-вимірного евклідового простору визначимо *C-функцію* таким чином

$$C_\lambda(x) := \sum_{w \in W} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \langle w\lambda, x \rangle}.$$

Якщо у означенні C-функції замінити орбіту групи Вейля на орбіту її парної підгрупи W_e, то отримаємо ще один клас орбіт-функцій, а саме, *E-функції*, що визначаються для $\lambda \in P_e$, де P_e — об'єднання точок з конуса домінантних ваг P та будь-якого його елементарного дзеркального відображення $r_i P$

$$E_\lambda(x) := \sum_{w \in W} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \langle w\lambda, x \rangle}.$$

Останній, третій, клас орбіт-функцій, а саме *S-функції*, визначаються для точок із конуса строго домінантних ваг $\lambda \in P^{++}$ аналогічним чином, але знак кожного з доданків залежить від кількості $p(w)$ елементарних дзеркальних відображень r_i, які необхідні для отримання точки $w\lambda$ з точки λ

$$S_\lambda(x) := \sum_{w \in W} (-1)^{p(w)} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \langle w\lambda, x \rangle}.$$

Орбіт-функції визначаються виходячи з напівпростих алгебр Лі і кількість змінних співпадає з їх рангом. Очевидно, що у одновимірному випадку (алгебра A_1) C-функції та S-функції є сумою та різницею двох

експонент з степенями протилежних знаків, тому співпадають з тригонометричними функціями косинус та синус відповідно, що і обумовило їх назви. E-функція в одновимірному випадку є експонентою з точністю до сталого множника.

Для точок конуса строго домінантних ваг має місце формула

$$E_\lambda(x) = \tfrac{1}{2}\big(C_\lambda(x) + S_\lambda(x)\big).$$

C-, S- та E-функції є неперервними та мають неперервні похідні всіх порядків, допускають масштабування та мають властивості симетрії відносно дзеркальних відображень r_i, що відповідають i-м простим кореням алгебри Лі:

$$C_\lambda(r_i x) = C_{r_i\lambda}(x) = C_\lambda(x), \qquad S_{r_i\lambda}(x) = S_\lambda(r_i x) = -S_\lambda(x),$$
$$E_{r_i\lambda}(x) = E_\lambda(r_i x) = E_\lambda(x).$$

У першому параграфі третього розділу отримано явний вигляд операторів другого порядку, для яких тривимірні C-орбіт-функції та S-орбіт-функції — це, відповідно, розв'язки крайових задач Неймана та Діріхле на фундаментальних областях афінних груп Вейля відповідних напівпростих алгебр Лі.

Твердження 3.5. *Орбіт-функції $C_\lambda(x)$, $E_\lambda(x)$ та $S_\lambda(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, визначені в ω-базисі для напівпростих груп Лі рангу* 3*, є власними функціями наступних диференціальних операторів другого порядку Δ з власними значеннями $-4\pi\langle\lambda,\lambda\rangle$:*

$$\begin{aligned}
&A_1 \times A_1 \times A_1\colon && \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2,\\
&A_2 \times A_1\colon && \Delta = \partial_1^2 - \partial_1\partial_2 + \partial_2^2 + \partial_3^2,\\
&C_2 \times A_1\colon && \Delta = 2\partial_1^2 - 2\partial_1\partial_2 + \partial_2^2 + \partial_3^2,\\
&G_2 \times A_1\colon && \Delta = 3\partial_1^2 - 5\partial_1\partial_2 + \partial_2^2 + \partial_3^2,\\
&A_3\colon && \Delta = \partial_1^2 - \partial_1\partial_2 + \partial_2^2 - \partial_2\partial_3 + \partial_3^2,\\
&B_3\colon && \Delta = \partial_1^2 - \partial_1\partial_2 + \partial_2^2 - 2\partial_2\partial_3 + 2\partial_3^2,\\
&C_3\colon && \Delta = 2\partial_1^2 - 2\partial_1\partial_2 + 2\partial_2^2 - 2\partial_2\partial_3 + \partial_3^2.
\end{aligned}$$

Також у параграфі 3.1 вивчаються властивості орбіт-функцій, зокрема тривимірних: побудовано явний вигляд їхніх орбіт, стабілізаторів, фундаментальних областей, розроблено їхню дискретизацію та доведено дискретну ортогональність.

Розглянемо набір дискретних точок фундаментальної області F_M, $M \in \mathbb{N}$ напівпростої алгебри Лі для $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ та коефіцієнтів $q_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, n$, розкладу старшого кореня за базисом, дуальним до базису простих ваг

$$\Lambda_M = \{t_1\omega_1 + \cdots + t_n\omega_n \mid t_0 + t_1q_1 + \cdots + t_nq_n = M\}.$$

Має місце теорема про дискретну ортогональність орбіт-функцій.

Твердження 3.7. *C- та S-функції, визначені для $\lambda, \lambda' \in \Lambda_M$, попарно ортогональні*

$$\langle C_\lambda(x), C_{\lambda'}(x)\rangle_M = \det(\mathfrak{C})|W|M^n|\mathrm{Stab}(\lambda)|\delta_{\lambda\lambda'},$$
$$\langle S_\lambda(x), S_{\lambda'}(x)\rangle_M = \det(\mathfrak{C})|W|M^n\delta_{\lambda\lambda'}.$$

Тут $\mathfrak{C}$ — матриця Картана, $|W|$ — порядок групи Вейля, $|\mathrm{Stab}(\lambda)|$ — порядок групи ізотропії точки $\lambda \in F_M$ під дією групи Вейля, а δ — дельта-символ Кронекера.

У параграфі 3.2 орбіти групи Вейля $W(A_n)$ простих алгебр Лі A_n зведено до об'єднання орбіт груп Вейля максимальних редуктивних підалгебр алгебри A_n. Для всіх випадків $n \leq 8$ та нескінченних серій $A_n \supset A_{n-k-1} \times A_k \times U_1$, $A_{2n} \supset B_n$, $A_{2n-1} \supset C_n$ і $A_{2n-1} \supset D_n$ побудовано матриці, що перетворюють точки орбіт $W(A_n)$ у точки орбіт підалгебр. Таким чином, знайдено правила галуження орбіт групи Вейля, що можуть бути застосовані для розкладу добутків орбіт-функцій та у теорії зображень простих алгебр Лі. Крім цього, у цьому ж параграфі доведено еквівалентність трьох сімей орбіт-функцій для простої алгебри A_n спеціальним експоненційним функціям багатьох змінних, введеним А.У. Клімиком та Ї. Патерою.

Останній параграф розділу присвячено побудові нескінченних сімей ортогональних поліномів n змінних. Запропоновано три методи побудови ортогональних поліномів виходячи з орбіт-функцій: експоненційний, тригонометричний та рекурсивний. Доведено еквівалентність кількох відомих сімей ортогональних поліномів, зокрема, поліномів Чебишева, Якобі, Макдональда та Курнвіндера поліномам орбіт-функцій. Отримано явний вигляд розв'язних рекурсій, що дозволяють алгоритмічно будувати сім'ї ортогональних поліномів двох та трьох змінних.

При рекурсивному методі побудови поліномів, у якості нових змінних обираються n C-функцій фундаментальних ваг:

$$u_j = u_j(x) := C_{\omega_j}(x), \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

C-поліноми будуються за допомогою розкладу добутку змінних u_j та C-функцій у суму C-поліномів. *S-поліноми* будуються використовуючи C-поліноми та характери Вейля.

Спочатку знаходимо *породжуючі рекурсії* для точок з координатами $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ з конуса строго домінантних ваг. Після чого будуються *додаткові* рекурсії для нижчих ваг, які необхідні, щоб розв'язати породжуючі рекурсії. Ефективний шлях знаходження розкладів добутків орбіт-функцій — це розклад добутків орбіт груп Вейля. Зауважимо, що побудовані рекурсії завжди лінійні, а відповідні матриці — трикутні. Щодо рекурсивних підстановок $u_i = C_{\omega_i}$ доведено наступне твердження.

Твердження 3.16. *Будь-яка C-функція та будь-який характер χ_λ простої групи Лі G може бути представлений у вигляді полінома від C-функцій фундаментальних ваг $\omega_1, \ldots, \omega_n$, тобто у вигляді полінома змінних $u_1, u_2, \ldots, u_n$.*

Для кожної з простих алгебр Лі рангів два та три виписано початкові набори поліномів у явному вигляді та знайдено правила редукції поліномів двох та трьох змінних до поліномів інших алгебр за максимальними підгрупами простих груп Лі.

Для ілюстрації розглянемо просту алгебру Лі рангу два A_2, яка відповідає замощенню площини рівносторонніми трикутниками. Зауважимо, що саме таке покриття площини використали І. Динніков та С. Новіков 2003 р. при дискретизації комплексного аналізу, а також Т. Курнвіндер 1974 р. при дослідженні ортогональних поліномів.

C-функції фундаментальних ваг $\omega_1 = (1,0)$, $\omega_2 = (0,1)$ є новими змінними для ортогональних поліномів, що будуються рекурсивним методом

$$u_1 := C_{(1,0)}(x_1, x_2), \qquad u_2 := C_{(0,1)}(x_1, x_2).$$

Оскільки зовнішній автоморфізм алгебри A_2 пов'язує поліноми $C_{(a,b)}$ та $C_{(b,a)}$ перестановкою змінних $u_1 \leftrightarrow u_2$, то досить побудувати та розв'язати єдину породжуючу рекурсію

$$u_1 C_{(a,b)} = C_{(a+1,b)} + C_{(a-1,b+1)} + C_{(a,b-1)}, \qquad a, b \geqslant 2. \tag{3.46}$$

Додаткові рекурсії, що будуються з розкладу добутків орбіт-функцій, які відповідають непороджуючим точкам, дозволяють отримати необхідні C-поліноми найнижчих степенів, а S-поліноми виводимо за допомогою характера Вейля для кожного з класів конґруентності #. Поліноми найнижчих степенів наведено у табл. 3.6.

$\# = 0$	
$C_{(1,1)}$	u_1u_2-3
$C_{(3,0)}$	$u_1^3-3u_1u_2+3$
$C_{(2,2)}$	$u_1^2u_2^2-2u_1^3-2u_2^3+4u_1u_2-3$
$\# = 1$	
$C_{(1,0)}$	u_1
$C_{(0,2)}$	$u_2^2-2u_1$
$C_{(2,1)}$	$u_1^2u_2-2u_2^2-u_1$
$C_{(1,3)}$	$u_1u_2^3-3u_1^2u_2-u_2^2+5u_1$
$C_{(4,0)}$	$u_1^4-4u_1^2u_2+2u_2^2+4u_1$

$\# = 0$	
$S_{(2,2)}$	u_1u_2-1
$S_{(1,4)}$	$u_2^3-2u_1u_2+1$
$S_{(3,3)}$	$u_1^2u_2^2-u_1^3-u_2^3$
$\# = 1$	
$S_{(2,1)}$	u_1
$S_{(1,3)}$	$u_2^2-u_1$
$S_{(3,2)}$	$u_1^2u_2-u_2^2-u_1$
$S_{(2,4)}$	$u_1u_2^3-2u_1^2u_2-u_2^2+2u_2$
$S_{(5,1)}$	$u_1^4-3u_1^2u_2+u_2^2+u_1+u_2$

Табл. 3.6. C- та S-поліноми алгебри A_2 степеня, не вищого за чотири.

Наприкінці дисертації наведено основні результати й висновки.

Результати, що ілюструють і доповнюють результати основної частини, виокремлено у два додатки.

У додатку А зібрано результати щодо контракцій комплексних нільпотентних алгебр Лі розмірностей п'ять та шість.

А у додатку Б наведено результати класифікації нееквівалентних реалізацій двох п'ятивимірних алгебр Галілея.

Список наукових праць, де опубліковано результати дисертації, й інформацію щодо їхньої апробації наведено у додатку В.

Подяки. Авторка щиро вдячна науковому консультанту доктору фізико-математичних наук Вячеславу Миколайовичу Бойку, доктору фізико-математичних наук, професору Роману Омеляновичу Поповичу та завідувачу відділу математичної фізики, члену-кореспонденту НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору Анатолію Глібовичу Нікітіну за постійні сприяння, увагу і допомогу в роботі, а також співробітникам відділу математичної фізики за комфортну, дружню та сприятливу робочу атмосферу в відділі. Окремо вдячна професору Роберту Муді і професору Їржі Патері та усім своїм співавторам за цікаву та плідну співпрацю.

Розділ 1

Реалізації та контракції алгебр Лі

Граничні переходи між алгебрами Лі вперше з'явились у роботі І. Сегала [134]. Після Сегала концепцію граничних процесів між фізичними теоріями було сформульовано Іньоню та Вігнером [62] у термінах контракцій груп Лі, що лежать в основах цих теорій. Вони запропонували так звані *контракції Іньоню–Вігнера*, які ефективно застосовувались до широкого класу фізичних та математичних задач. Найвідомішим прикладом такого процесу є зв'язок між релятивістською та класичною механіками, в основі яких лежать групи симетрій Пуанкаре та Галілея. Припустивши, що швидкість світла прямує до нескінченності, релятивістська механіка 'переходить' у класичну механіку. Це також приводить до сингулярного переходу від алгебри Пуанкаре до алгебри Галілея. Інший відомий приклад стосується граничного переходу від квантової до класичної механіки за умови $\hbar \to 0$, яка відповідає контракціям алгебр Гейзенберга до абелевих алгебр тих самих розмірностей. Сучасні дослідження контракцій мотивуються великою кількістю застосувань в різних галузях фізики та математики, наприклад у вивченні зображень, інваріантів, спеціальних функцій [23, 28, 93]. Контракції також є одним з інструментів для дослідження структури множин алгебр Лі [21].

Вперше питання про побудову алгебр Лі векторних полів поставив ще С. Лі і воно досі залишається складною математичною задачею та має надзвичайно широкий спектр застосувань. Дійсно, реалізації алгебр Лі диференціальними операторами першого порядку ефективно застосовуються у підході Лі до диференціальних рівнянь, а саме, для редукції,

інтегрування, обчислення диференціальних інваріантів тощо; у груповій класифікації диференціальних рівнянь з частинними похідними; в теорії диференціальних інваріантів; загальній теорії відносності та інших фізичних задачах, при класифікації гравітаційних полів загального вигляду відносно груп руху та груп конформних перетворень, або квантуванні на основі симетрій Еммі Нетер [38, 39, 41, 57, 128].

Терміни 'диференціальні інваріанти' виникли у роботах С. Лі як один з найважливіших інструментів для досліджень диференціальних рівнянь. У 1884 році ним було доведено [82], що кожну невироджену інваріантну систему диференціальних рівнянь можна представити у термінах диференціальних інваріантів відповідної групи симетрій. У тій самій роботі Лі застосував диференціальні інваріанти до інтегрування звичайних диференціальних рівнянь. Теорію диференціальних інваріантів та термінологію пізніше розвинено у роботах Тресса [138, 139], Овсяннікова [123] та Олвера [120].

Три вищезгадані напрямки і є основними складовими даного розділу.

У першому розділі дисертації досліджуються реалізації та контракції алгебр Лі, а також диференціальні інваріантіи та S-розширення. Структура розділу наступна.

У параграфі 1.1 сформульовано строге означення контракцій для алгебр Лі над довільним полем та над полями дійсних і комплексних чисел. Розглянуто найпростіші типи контракцій та їх властивості, які є важливими для досліджень у наступних параграфах. Також у цьому параграфі запропоновано дві нові необхідні умови існування контракцій, пов'язані з розмірністю централізатора похідної та підалгебрами. Доведено відповідні теореми.

Теоретичні відомості, що стосуються реалізацій алгебр Лі наведено у параграфі 1.4. У цьому параграфі реалізації розглянуто паралельно з локальними групами Лі, що їм відповідають та узагальнено алгебраїчний метод І. Широкова для побудови реалізацій алгебр Лі, як проєкцій ліво-

інваріантних векторних полів. Запропоновано поняття породжуючої реалізації та доведено теорему про зведення реалізації до суттєвих змінних.

У параграфі 1.5 запропоновано конструктивний метод побудови параметризованих реалізацій, що є точними та збігаються до реалізацій контрактованої алгебри Лі.

Параграф 1.2 присвячено дослідженню S-розширень тривимірних дійсних алгебр Лі. Показано, що процедура S-розширення зберігає властивості розв'язності, нільпотентності та унімодулярності, проте S-розширення та редукція алгебр Лі дозволяють отримати неунімодулярні алгебри Лі з унімодулярних, щоправда при цьому порушується відношення порядку на многовиді алгебр Лі заданої розмірності.

Контракції комплексних нільпотентних алгебр Лі розмірностей п'ять та шість досліджуються у параграфі 1.3. У цій частині наведено переліки необхідних умов, що є достатніми для згаданих нільпотентних алгебр Лі та дозволяють знайти пари нільпотентних алгебр, що допускають контракції. А також обчислено необхідні інваріантні та напівінваріантні величини, та показано які з них порушують необхідні умови існування контракцій. Поміж іншим, у цьому параграфі доведено, що усі контракції комплексних нільпотентних алгебр Лі розмірностей п'ять та шість можуть бути реалізовані за допомогою узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера. Результати обчислень оформлено у вигляді таблиць у додатку А. Наприкінці параграфа детально проаналізовано приклад контракції між характеристично нільпотентними алгебрами розмірності сім, яка нееквівалентна узагальненій контракції Іньоню–Вігнера.

У параграфі 1.6 досліджено п'ять найменших алгебр Галілея, а саме алгебри розмірностей три, чотири та п'ять. Для кожної з алгебр алгебраїчним методом побудовано повний набір нееквівалентних реалізацій. Зокрема усі неточні реалізації та усі реалізації п'ятивимірних алгебр Галілея є новими. Також у цьому параграфі побудовано деформації алгебр Галілея та породжуючі реалізації деформацій, ряд деформацій побудова-

но для алгебр Галілея довільної розмірності. Наприкінці розділу наведено ряд фізично цікавих диференціальних рівнянь та їх систем, що інваріантні відносно алгебр, які досліджувались у параграфі 1.6.

У параграфі 1.8 отримано нові породжуючі реалізації конформної алгебри Лі та двох алгебр де Сіттера. Побудовано спільну деформацію алгебри Пуанкаре до алгебр де Сіттера.

Усі нееквівалентні реалізації двох алгебр Пуанкаре, а саме $\mathfrak{p}(1,1)$ та $\mathfrak{p}(1,2)$, що діють у просторах не більше ніж трьох змінних, побудовано у параграфі 1.7. Крім цього, знайдено деформації цих алгебр та породжуючі реалізації.

У параграфі 1.9 наведено необхідні теоретичні відомості для вивчення диференціальних інваріантів алгебр Лі та доведено теорему про нормальну форму інваріантної системи двох рівнянь другого порядку. У цьому параграфі також досліджується алгебра Галілея найменшої розмірності, будуються її деформації, породжуючі реалізації та повні набори диференціальних інваріантів: базиси диференціальних інваріантів, оператори інваріантного диференціювання та визначники Лі. Наприкінці параграфа наведено додаткові приклади диференціальних рівнянь та їхніх систем, що мають важливі застосування та інваріантні відносно найменшої алгебри Галілея та її деформацій. Ці приклади доповнюють перелік з параграфа 1.6.

Результати цього розділу опубліковано в роботах [1, 98–101, 109, 110, 112–115].

1.1. Контракції алгебр Лі

Основна термінологія розділу, що стосується теорії контракцій алгебр Лі, була сформульована у роботах [108, 126]. Розглянемо n-вимірний векторний простір V над полем $\mathbb{K}$ (у дисертації здебільшого розглядаються дійсний $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або комплексний $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ випадки). Нехай на V задано

множення $\mu\colon V \times V \to V$, яке задовольняє тотожність Якобі та умови білінійності і антисиметричності. Це множення $\forall\ x, y \in V\ [x, y] = \mu(x, y)$ називають дужкою Лі.

Алгебра Лі $\mathfrak{g}$ розмірності n — це векторний простір V з вказаним множенням: $\mathfrak{g} = (V, \mu)$. Якщо у векторному просторі V зафіксовано базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$, то алгебра Лі задається за допомогою тензора структурних сталих з компонентами $c_{ij}^k \in \mathbb{K}$, де $i, j, k = 1, \ldots, n$, які пов'язані з комутаційними співвідношеннями базисних елементів

$$\mu(e_i, e_j) = [e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k.$$

Нехай $\mathcal{L}_n(V)$ — це многовид усіх n-вимірних алгебр Лі над полем $\mathbb{K}$, тобто кожна алгебра $\mathfrak{g} = (V, [\cdot, \cdot])$ відповідає правилу множення $\mu \in \mathcal{L}_n$. На многовиді $\mathcal{L}_n(V)$ діє група лінійних невироджених перетворень $\mathrm{GL}(V)$

$$\forall A \in \mathrm{GL}(V),\ \forall \mu \in \mathcal{L}_n \quad (A\mu)(x, y) = A^{-1}(\mu(Ax, Ay)) \quad \forall x, y \in V.$$

Дія групи $\mathrm{GL}(V)$ розбиває многовид n-вимірних алгебр Лі на класи еквівалентності (ізоморфізму), кожен з цих класів, а частіше представник класу, розглядається як окрема, нееквівалентна іншим, алгебра Лі.

Щоб означити поняття контракції для алгебр Лі над довільним полем, розглянемо орбіти $\mathcal{O}(\mu)$, $\mu \in \mathcal{L}_n$ під дією групи $\mathrm{GL}(V)$ та замикання цих орбіт $\overline{\mathcal{O}(\mu)}$ у топології Заріського (замкнені множини — це алгебраїчні множини многовиду $\mathcal{L}_n$). Таким чином, алгебра Лі $\mathfrak{g} = (V, \mu_0)$ називається *контракцією* алгебри Лі $\mathfrak{g} = (V, \mu)$, якщо μ_0 належить замиканню орбіти μ, тобто $\mu_0 \in \overline{\mathcal{O}(\mu)}$. Називатимемо контракцію з алгебри Лі $\mathfrak{g}$ до алгебри Лі $\mathfrak{g}_0$ *тривіальною*, якщо $\mathfrak{g}_0$ — абелева ($\mu_0 \equiv 0$), і *невласною*, якщо $\mathfrak{g}_0$ ізоморфна $\mathfrak{g}$, іншими словами, контракція є *власною*, якщо $\mu_0 \in \overline{\mathcal{O}(\mu)} \backslash \mathcal{O}(\mu)$. Тривіальні та невласні контракції існують для будь-якої алгебри Лі.

Задача дослідження контракцій алгебр Лі над довільним полем у термінах замикань орбіт у топології Заріського є досить складною, прогресу

у цьому напрямку було досягнуто у роботах Н. Іванової та К. Паллікароса [63, 64].

На практиці здебільшого застосовуються поля дійсних ($\mathbb{R}$) та комплексних ($\mathbb{C}$) чисел, тому наведемо означення контракції у термінах евклідової топології.

Розглянемо *неперервну* функцію $U\colon (0, \varepsilon_1] \to \mathrm{GL}(V)$, де $\varepsilon_1 > 0$. Іншими словами, $U_\varepsilon = U(\varepsilon)$ — невироджений лінійний оператор на V для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$. Не втрачаючи загальності, можна покласти $\varepsilon_1 = 1$. Параметризована сім'я нових дужок Лі на просторі V визначається через стару дужку таким чином:

$$\forall\, \varepsilon \in (0, 1],\ \forall\, x, y \in V\colon \quad [x, y]_\varepsilon = {U_\varepsilon}^{-1}[U_\varepsilon x, U_\varepsilon y].$$

Природно, що для кожного $\varepsilon \in (0, 1]$ алгебра Лі $\mathfrak{g}_\varepsilon = (V, [\cdot, \cdot]_\varepsilon)$ ізоморфна алгебрі Лі $\mathfrak{g}$.

Означення 1.1 ([108]). Якщо границя

$$\lim_{\varepsilon \to +0} [x, y]_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to +0} {U_\varepsilon}^{-1}[U_\varepsilon x, U_\varepsilon y] =: [x, y]_0$$

існує для усіх $x, y \in V$, тоді $[\cdot, \cdot]_0$ — добре визначена дужка Лі. Алгебра Лі $\mathfrak{g}_0 = (V, [\cdot, \cdot]_0)$ називається *контракцією* алгебри Лі $\mathfrak{g}$.

Якщо базис простору V фіксований, тоді оператор U_ε визначається матрицею з функціональними коефіцієнтами, а означення 1.1 можна переформулювати в термінах структурних сталих.

Означення 1.2 ([108]). Якщо існує границя

$$\lim_{\varepsilon \to +0} (U_\varepsilon)^i_{i'} (U_\varepsilon)^j_{j'} ({U_\varepsilon}^{-1})^{k'}_k\, c^k_{ij} =: \tilde{c}^{k'}_{i'j'}$$

для довільних значень i', j', k', тоді $\tilde{c}^{k'}_{i'j'}$ — компоненти добре визначених структурних сталих алгебри Лі $\mathfrak{g}_0$. У цьому випадку алгебра Лі $\mathfrak{g}_0$ називається *контракцією* алгебри Лі $\mathfrak{g}$.

Тут і надалі індекси, i, j, k, i', j', k', i'', j''та k'' змінюються від 1 до n, а за повторюваними індексами виконується сумування. Параметр ε і матриця

з елементами функціями $U = U(\varepsilon)$ називаються *параметром контракції* та *матрицею контракції* відповідно. Процес переходу від алгебри Лі $\mathfrak{g}$ до алгебри $\mathfrak{g}_0$ також називатимемо *контракцією*.

Тривіальну контракцію легко можна отримати, наприклад, за допомогою матриці $U_\varepsilon = \mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)$. Для невласної контракції матрицю можна взяти у вигляді тотожного перетворення $U_\varepsilon = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)$.

Нехай алгебри Лі $\mathfrak{g}$ та $\tilde{\mathfrak{g}}$ контрактують до алгебр $\mathfrak{g}_0$ та $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ відповідно. Якщо $\tilde{\mathfrak{g}}$ ізоморфна $\mathfrak{g}$ та $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ ізоморфна $\mathfrak{g}_0$, тоді контракції називаються *еквівалентними*. Нестрого кажучи, усі контракції між тією самою парою алгебр — еквівалентні. При такій еквівалентності увагу зосереджено на можливості та результаті контракції. Якщо важливі відмінності між шляхами, якими контракції виконані, то можна ввести окремі поняття сильної та слабкої еквівалентності.

Для доведення тверджень нам знадобиться переформулювати збіжність у термінах послідовностей. Будь-яка неперервна контракція з $\mathfrak{g}$ до $\mathfrak{g}_0$ породжує нескінченну сім'ю матричних послідовностей, які, в свою чергу, визначають контракцію з $\mathfrak{g}$ до $\mathfrak{g}_0$. А саме: якщо U_ε матриця неперервної контракції, а послідовність $\{\varepsilon_p,\, p \in \mathbb{N}\}$ задовольняє умовам $\varepsilon_p \in (0, 1]$, $\varepsilon_p \to +0$, $p \to \infty$, тоді $\{U_{\varepsilon_p},\, p \in \mathbb{N}\}$ — відповідна послідовність матриць, що дозволяє сформулювати еквівалентне означення контракції у термінах послідовностей.

Означення 1.3 ([108]). Якщо для будь-яких $x, y \in V$ існує границя $\lim\limits_{p\to\infty}[x, y]_p = \lim\limits_{p\to\infty} {U_p}^{-1}[U_p x, U_p y] =: [x, y]_0$, тоді дужка Лі $[\cdot, \cdot]_0$ добре визначена, а алгебра Лі $\mathfrak{g}_0 = (V, [\cdot, \cdot]_0)$ називається *послідовною контракцією* алгебри Лі $\mathfrak{g}$.

Розглянемо найпростіші типи контракцій — контракції Іньоню–Вігнера та контракції Салетана, які виникли першими та найчастіше застосовуються.

Прості контракції Іньоню–Вігнера (ІВ-контракції) вперше запропоновано у роботі [62]. Вони породжуються матрицями вигляду $U_\varepsilon = U_0 + \varepsilon U_0'$,

де U_0 та U_0' сталі $n \times n$ матриці. Вважаємо, що матрицю U_ε можна звести до спеціального діагонального вигляду

$$\hat{W} U_\varepsilon \check{W}^{-1} = \operatorname{diag}(1+\varepsilon v, \ldots, 1+\varepsilon v, \varepsilon, \ldots, \varepsilon) =: D_\varepsilon$$

за допомогою невироджених сталих матриць $\hat{W}$ та $\check{W}$. Не втрачаючи загальності, можна покласти $v = 0$. Матриця D_ε породжує контракцію з алгебри $\tilde{\mathfrak{g}}$ до алгебри $\tilde{\mathfrak{g}}_0$, де $\tilde{\mathfrak{g}}$ та $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ — алгебри Лі з дужками Лі

$$[x,y]\tilde{} = \hat{W}\left[\hat{W}^{-1}x, \hat{W}^{-1}y\right] \qquad \text{та} \qquad [x,y]\tilde{_0} = \check{W}\left[\check{W}^{-1}x, \check{W}^{-1}y\right]_0,$$

які очевидно ізоморфні $\mathfrak{g}$ та $\mathfrak{g}_0$. Таким чином, для ІВ-контракцій $U_\varepsilon = D_\varepsilon$, тобто $U_\varepsilon = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)$.

Позначимо кількість діагональних елементів рівних 1 через s, тоді розмірність ε-блоку дорівнює $n-s$. Зручно розбити набір базисних елементів $\{e_1, \ldots, e_n\}$ простору V на дві підмножини $\{e_1, \ldots, e_s\}$ та $\{e_{s+1}, \ldots, e_n\}$ відповідно до значень діагональних елементів матриці контракції.

Оскільки

$$[e_{i_1}, e_{j_1}]_\varepsilon = c_{i_1 j_1}^{k_1} e_{k_1} + \frac{1}{\varepsilon} c_{i_1 j_1}^{k_2} e_{k_2} + O(\varepsilon) \to \tilde{c}_{i_1 j_1}^{k_1} e_{k_1} + \tilde{c}_{i_1 j_1}^{k_2} e_{k_2}, \quad \varepsilon \to +0,$$

тут і далі індекси i_1, j_1 і k_1 змінюються від 1 до s, а індекси i_2, j_2 і k_2 змінюються від $s+1$ до n, то $c_{i_1 j_1}^{k_2} = 0$. Таким чином, базисні елементи $e_1, \ldots, e_s$ породжують підалгебру $\mathfrak{h}$ вихідної алгебри $\mathfrak{g}$. Це єдина умова існування контракції. Всі структурні сталі результуючої алгебри $\mathfrak{g}_0$ легко обчислюються:

$$\tilde{c}_{i_1 j_1}^{k_1} = c_{i_1 j_1}^{k_1},\ \tilde{c}_{i_1 j_1}^{k_2} = c_{i_1 j_1}^{k_2} = 0,\ \tilde{c}_{i_1 j_2}^{k_1} = 0,\ \tilde{c}_{i_1 j_2}^{k_2} = c_{i_1 j_2}^{k_2},\ \tilde{c}_{i_2 j_2}^{k_1} = \tilde{c}_{i_2 j_2}^{k_2} = 0.$$

Кожну підалгебру $\mathfrak{h}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ можна використати для отримання ІВ-контракції алгебри $\mathfrak{g}$.

Салетаном [132] було вивчено інший клас контракцій, які лінійні за параметром контракції, а саме, контракції, що породжуються матрицею вигляду $U(\varepsilon) = U_0 + \varepsilon U_0'$, де U_0 та U_0' сталі матриці. Такі контракції

називаються *контракціями Салетана* (С-контракції). Єдине припущення, зроблене Салетаном $U(1) = E$, де E — одинична матриця. Цю умову, не втрачаючи загальності, можна виконати за допомогою заміни базису та перепараметризації. Тоді матриця контракції набуває вигляду $U(\varepsilon) = \varepsilon E + (1-\varepsilon)\tilde{U}$, де $\tilde{U}$ — стала матриця. Щоб С-контракція була добре визначеною, то єдиною необхідною і достатньою умовою на матрицю $\tilde{U}$ є співвідношення

$$\tilde{U}[x, y]_0 = [\tilde{U}x, \tilde{U}y], \qquad \forall x, y \in V.$$

Важливим розширенням класу ІВ-контракцій є *узагальнені ІВ-контракції* (або контракції Дойбнера–Мельшеймера) [30, 56], для яких умова лінійності матриці контракції заміняється на умову, що матриця контракції еквівалентна діагональній, а елементи діагоналізованої матриці контракції є (цілими) степенями параметра контракції. А саме, матриця контракції узагальненої ІВ-контракції має наступний вигляд

$$U(\varepsilon) = \hat{W}\,\mathrm{diag}(\varepsilon^{\alpha_1}, \varepsilon^{\alpha_2}, \ldots, \varepsilon^{\alpha_n})\check{W},$$

де $\hat{W}$ і $\check{W}$ — невироджені сталі матриці та $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$. Як і у випадку простих ІВ-контракцій, завдяки можливості заміни алгебр Лі ізоморфними їм, можна припустити, що $\hat{W} = \check{W} = E$, тобто

$$U(\varepsilon) = \mathrm{diag}(\varepsilon^{\alpha_1}, \varepsilon^{\alpha_2}, \ldots, \varepsilon^{\alpha_n}).$$

Тоді структурні сталі результуючої алгебри $\mathfrak{g}_0$ обчислюються за формулою $\tilde{c}_{ij}^k = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{\alpha_i + \alpha_j - \alpha_k} c_{ij}^k$, де сумування за повторюваним індексом не виконується. Таким чином, умови

$$\alpha_i + \alpha_j \geqslant \alpha_k, \quad i, j, k = 1, \ldots, n, \quad \text{якщо} \quad c_{ij}^k \neq 0$$

є необхідними та достатніми для існування добре визначеної узагальненої ІВ-контракції з матрицею контракції $U(\varepsilon)$. Крім того, $\tilde{c}_{ij}^k = c_{ij}^k$, коли $\alpha_i + \alpha_j = \alpha_k$ та $\tilde{c}_{ij}^k = 0$, в усіх інших випадках.

Для узагальнених ІВ-контракцій набір цілих чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ називатимемо *сигнатурою* контракції.

Зауваження 1.4. Умови існування контракції Іньоню–Вігнера можна переформулювати в незалежних від базису термінах фільтрацій вихідної алгебри та асоційованих з ними градуювань алгебр Лі, це означає, що узагальнена контракція Іньоню–Вігнера автоматично вводить алгебру Лі у градуювання, які вимагають існування діагональних диференціювань. Ця властивість є надзвичайно важливою, оскільки дозволяє доводити відсутність контракцій Іньоню–Вігнера до заданої алгебри Лі, у випадку коли вона не має діагональних диференціювань.

Детально узагальнені контракції Іньоню–Вігнера вивчались у роботах Д. Поповича та Р. Поповича [126, 127], зокрема ними досліджено питання необхідності від'ємних степенів у матриці контракції та доведено неуніверсальність узагальнених ІВ-контракцій для чотиривимірних алгебр Лі.

1.1.1. Необхідні умови існування контракцій Виходячи з означення, задача побудови або доведення відсутності контракції для фіксованої пари алгебр Лі є надзвичайно громіздкою та складною, тому оптимальним шляхом вивчення контракцій всередині набору алгебр Лі даної розмірності є інтенсивне використання необхідних умов, що базуються на величинах, інваріантних або напівінваріантних відносно контракцій. Інваріантні величини зберігаються під дією контракції, а у випадку напівінваріантності існує нерівність між відповідними величинами для вихідної та контрактованої алгебр. Оскільки контракції є граничними процесами, то замість термінів інваріантність та напівінваріантність можна використовувати поняття неперервності та напівнеперервності.

Будемо використовувати наступні позначення для величин та об'єктів, пов'язаних з певною алгеброю Лі $\mathfrak{g}$: алгебра диференціювань $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$, орбіта $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ під дією групи $\mathrm{GL}(V)$ у множині $\mathcal{L}_n$ n-вимірних алгебр Лі, центр $Z(\mathfrak{g})$, радикал $R(\mathfrak{g})$, нільрадикал $N(\mathfrak{g})$, максимальна розмірність $n_{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})$ абелевих підалгебр, максимальна розмірність $n_{\mathrm{Ai}}(\mathfrak{g})$ абелевих ідеалів,

форма Кілінга κ, ранг $r_{\mathfrak{g}}$ (тобто розмірність підалгебр Картана), приєднане та коприєднане зображення $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ та $\operatorname{ad}^*\mathfrak{g}$, приєднане зображення ad_x елемента $x \in \mathfrak{g}$, ранги приєднаного та коприєднаного зображень, які обчислюються за формулами

$$\operatorname{rank}(\operatorname{ad}\mathfrak{g}) = \max_{x\in V} \operatorname{rank}(c_{ij}^k x^j)$$

та

$$\operatorname{rank}(\operatorname{ad}^*\mathfrak{g}) = \max_{u\in V^*} \operatorname{rank}(c_{ij}^k u_k).$$

Визначимо також три стандартні ряди характеристичних ідеалів алгебри Лі $\mathfrak{g}$, а саме

$$\text{нижній центральний ряд:}\quad \mathfrak{g}^0 \supset \mathfrak{g}^1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}^l \supset \cdots,$$
$$\text{ряд похідних:}\quad \mathfrak{g}^{(0)} \supset \mathfrak{g}^{(1)} \supset \cdots \supset \mathfrak{g}^{(l)} \supset \cdots,$$
$$\text{верхній центральний ряд:}\quad \mathfrak{g}_{(0)} \subset \mathfrak{g}_{(1)} \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_{(l)} \subset \cdots,$$

де

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g},\quad \mathfrak{g}^l = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{l-1}],\quad \mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g},\quad \mathfrak{g}^{(l)} = [\mathfrak{g}^{(l-1)}, \mathfrak{g}^{(l-1)}],\quad \mathfrak{g}_{(0)} = \{0\},$$

а $\mathfrak{g}_{(l)}/\mathfrak{g}_{(l-1)}$ є центром в $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{(l-1)}$, $l \in \mathbb{N}$. Зокрема, $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\mathfrak{g}_{(1)} = Z(\mathfrak{g})$. Якщо $\mathfrak{g}$ — розв'язна (нільпотентна) алгебра Лі, то $r_{\mathrm{s}} = r_{\mathrm{s}}(\mathfrak{g})$ ($r_{\mathrm{n}} = r_{\mathrm{n}}(\mathfrak{g})$) позначає ранг розв'язності (нільпотентності) алгебри $\mathfrak{g}$, тобто мінімальне значення l, таке, що $\mathfrak{g}^{(l)} = \{0\}$ ($\mathfrak{g}^l = \{0\}$).

Припустимо, що для деяких значень $p, q \in \mathbb{N}$ $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_u{}^p) \neq 0$, $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_u{}^q) \neq 0$ і $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_u{}^p \operatorname{ad}_v{}^q) \neq 0$, де $u, v \in \mathfrak{g}$. Припустимо також, що величина

$$\mathfrak{C}_{pq} = \frac{\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_u{}^p)\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_v{}^q)}{\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_u{}^p \operatorname{ad}_v{}^q)},\quad p, q \in \mathbb{N}$$

не залежить від u і v. Тоді $\mathfrak{C}_{pq} = \mathfrak{C}_{pq}(\mathfrak{g})$ — добре визначена інваріантна характеристика алгебри $\mathfrak{g}$, тобто є сталою величиною на орбіті $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$.

Позначимо ранг додатної (від'ємної) частини форми Кілінга $\kappa_{\mathfrak{g}}$, тобто кількість додатних (від'ємних) діагональних елементів у діагональній

формі її матриці, через $\operatorname{rank}_+ \kappa_{\mathfrak{g}}$ ($\operatorname{rank}_- \kappa_{\mathfrak{g}}$). Внаслідок закону інерції квадратичних форм $\operatorname{rank}_+ \kappa_{\mathfrak{g}}$ та $\operatorname{rank}_- \kappa_{\mathfrak{g}}$ інваріантні відносно заміни базису над полем $\mathbb{R}$. Для будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$ введемо поняття *модифікованої форми Кілінга*

$$\tilde{\kappa}^{\alpha}_{\mathfrak{g}} = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_u \operatorname{ad}_v) + \alpha \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_u) \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_v)$$

та відповідні величини $\operatorname{rank}_+ \tilde{\kappa}^{\alpha}_{\mathfrak{g}}$ і $\operatorname{rank}_- \tilde{\kappa}^{\alpha}_{\mathfrak{g}}$. Форма Кілінга є частковим випадком модифікованої форми Кілінга при $\alpha = 0$.

Співвідношення між інваріантними та напівінваріантними величинами зібрані у вигляді необхідних умов існування контракцій в теоремі 1.5.

Теорема 1.5 ([108]). *Якщо алгебра Лі $\mathfrak{g}_0$ є власною (неперервною чи послідовною) контракцією алгебри Лі $\mathfrak{g}$, то мають місце наступні співвідношення:*

1) $\dim \operatorname{Der} \mathfrak{g}_0 > \dim \operatorname{Der} \mathfrak{g}$ *(або, еквівалентно,* $\dim \mathcal{O}(\mathfrak{g}_0) < \dim \mathcal{O}(\mathfrak{g})$*);*
2) $n_{\mathrm{A}}(\mathfrak{g}_0) \geqslant n_{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})$*;*
3) $\dim Z(\mathfrak{g}_0) \geqslant \dim Z(\mathfrak{g})$*; більш того,* $\dim \mathfrak{g}_{0(l)} \geqslant \dim \mathfrak{g}_{(l)}$*,* $l \in \mathbb{N}$*;*
4) $\dim \mathfrak{g}_0^{(l)} \leqslant \dim \mathfrak{g}^{(l)}$*,* $l \in \mathbb{N}$*;*
5) $\dim \mathfrak{g}_0^{l} \leqslant \dim \mathfrak{g}^{l}$*,* $l \in \mathbb{N}$*;*
6) $r_{\mathfrak{g}_0} \geqslant r_{\mathfrak{g}}$*;*
7) $\operatorname{rank} \kappa_{\mathfrak{g}_0} \leqslant \operatorname{rank} \kappa_{\mathfrak{g}}$*;*
8) *якщо $\mathfrak{g}$ — унімодулярна, то і $\mathfrak{g}_0$ унімодулярна, іншими словами, умова* $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_u) = 0$*,* $\forall u \in \mathfrak{g}$ *призводить до такої самої умови в $\mathfrak{g}_0$;*
9) *якщо $\mathfrak{g}$ — розв'язна алгебра Лі, то $\mathfrak{g}_0$ також розв'язна, крім того* $r_{\mathrm{s}}(\mathfrak{g}_0) \leqslant r_{\mathrm{s}}(\mathfrak{g})$*;*
10) *якщо $\mathfrak{g}$ — нільпотентна алгебра Лі, то $\mathfrak{g}_0$ також нільпотентна, крім того* $r_{\mathrm{n}}(\mathfrak{g}_0) \leqslant r_{\mathrm{n}}(\mathfrak{g})$*;*
11) $\mathfrak{C}_{pq}(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{C}_{pq}(\mathfrak{g})$ *для усіх значень* $p, q \in \mathbb{N}$*, де інваріанти* $\mathfrak{C}_{pq}(\mathfrak{g}_0)$ *та* $\mathfrak{C}_{pq}(\mathfrak{g})$ *добре визначені;*

12) *(лише над полем дійсних чисел)*
$\operatorname{rank}_+ \kappa_{\mathfrak{g}_0} \leqslant \operatorname{rank}_+ \kappa_{\mathfrak{g}}$ *та* $\operatorname{rank}_- \kappa_{\mathfrak{g}_0} \leqslant \operatorname{rank}_- \kappa_{\mathfrak{g}}$*; більш того,* $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \operatorname{rank}_+ \tilde{\kappa}^{\alpha}_{\mathfrak{g}_0} \leqslant \operatorname{rank}_+ \tilde{\kappa}^{\alpha}_{\mathfrak{g}}$ *та* $\operatorname{rank}_- \tilde{\kappa}^{\alpha}_{\mathfrak{g}_0} \leqslant \operatorname{rank}_- \tilde{\kappa}^{\alpha}_{\mathfrak{g}}$.

13) $\dim R(\mathfrak{g}_0) \geqslant \dim R(\mathfrak{g})$;

14) $\dim N(\mathfrak{g}_0) \geqslant \dim N(\mathfrak{g})$;

15) $n_{\mathrm{Ai}}(\mathfrak{g}_0) \geqslant n_{\mathrm{Ai}}(\mathfrak{g})$;

16) $\operatorname{rank} \operatorname{ad} \mathfrak{g}_0 \leqslant \operatorname{rank} \operatorname{ad} \mathfrak{g}$, $\operatorname{rank} \operatorname{ad}^* \mathfrak{g}_0 \leqslant \operatorname{rank} \operatorname{ad}^* \mathfrak{g}$;

17) *якщо алгебра* $\mathfrak{g}$ *— l-унімодулярна, для довільного фіксованого* $l \in \mathbb{N}$*, то і* $\mathfrak{g}_0$ *теж l-унімодулярна, тобто* $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_u{}^l) = 0$ *для довільного* u *з* $\mathfrak{g}$*, призводить до такої самої умови в* $\mathfrak{g}_0$;

18) *якщо алгебра Лі* $\mathfrak{g}_0$ *— жорстка, тоді вона не є контракцією жодної алгебри* $\mathfrak{g}$*, а також якщо не існує деформації з* $\mathfrak{g}_0$ *до* $\mathfrak{g}$*, то не існує контракції з* $\mathfrak{g}$ *до* $\mathfrak{g}_0$.

Набір необхідних умов теореми 1.5 вперше наведено у роботі [108], де докладно доведено нові умови та наведено посилання на умови, що були відомі раніше.

Ї. Гривнаком та П. Новотним було запропоновано два типи інваріантних функцій [59, 119], що є параметризованими диференціюваннями та параметризованими коциклами відповідно, та також можуть бути застосовані для виокремлення випадків, коли для заданої пари алгебр Лі не існує контракції.

Набір умов 1–12 є достатнім для встановлення існування контракцій у класах тривимірних та чотиривимірних алгебр Лі над полями дійсних та комплексних чисел.

Вивчення контракцій алгебр Лі вищих розмірностей вимагає класифікації нееквівалентних алгебр Лі, в загальному випадку ця задача є дикою, зокрема у роботі [43] (поміж іншим) доведено, що класифікація метабелевих алгебр Лі є дикою задачею. Для алгебр Лі розмірностей не вище за

шість існують переліки їх нееквівалентних структур, проте для розмірностей п'ять та шість ці класифікації вимагають перевірки та додаткового впорядкування.

Інший підхід, що може бути застосований, — це дослідження контракцій всередині класів алгебр Лі, які замкнені відносно контракцій. Так, з теореми 1.5 випливає, що множини нільпотентних, розв'язних, унімодулярних алгебр є замкненими. Також замкненими є множини алгебр Лі з абелевим ідеалом корозмірності один та подібні до них. Під час дослідження контракцій нільпотентних алгебр Лі розмірностей п'ять та шість (параграф 1.3), з'ясувалось, що необхідних умов, сформульованих у теоремі 1.5 не достатньо для відокремлення випадків, де контракції не існує. Цей перелік було доповнено двома новими необхідними умовами, що наведені нижче.

Для доведення тверджень нам знадобиться наступна технічна лема.

Лема 1.6 ([108]). *Нехай A_p, $p \in \mathbb{N}$ — послідовність дійсних чи комплексних матриць однакових розмірностей та існує покомпонентна границя A_p, при $p \to \infty$, яку позначимо через A_0. Тоді якщо* $\operatorname{rank} A_p = r$ $\forall p \in \mathbb{N}$, *то* $\operatorname{rank} A_0 \leqslant r$.

Позначимо похідну n-вимірної алгебри Лі $\mathfrak{g}$ як $\mathfrak{g}'$ та означимо наступне поняття.

Означення 1.7. *Централізатором похідної* $\mathfrak{g}'$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ (позначатимемо $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}')$) є набір елементів алгебри $\mathfrak{g}$, які комутують з усіма елементами з $\mathfrak{g}'$.

Твердження 1.8. *Якщо алгебра Лі $\mathfrak{g}_0$ є власною контракцією алгебри Лі $\mathfrak{g}$, то має місце нерівність* $\dim C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}') \leqslant \dim C_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{g}_0{}')$.

Доведення. Доведемо теорему у випадку послідовних контракцій. Доведення для неперервного випадку випливає з еквівалентності неперервних та послідовних контракцій.

Зафіксуємо базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$, нехай тензор структурних сталих має компоненти c_{ij}^k, $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. Аналогічно позначимо

структурні сталі $c^k_{p,ij}$ для послідовності алгебр $\mathfrak{g}_p$, $p \in \mathbb{N}$ та $c^k_{0,ij}$ для результуючої алгебри Лі $\mathfrak{g}_0$.

Централізатор похідної алгебри $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}')$ співпадає з розв'язками системи

$$[x, [e_i, e_j]] = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, j-1, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.1}$$

У координатній формі система (1.1) еквівалентна наступній

$$x^{i'} c^{k'}_{i'k} c^k_{ij} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, j-1, \quad j, k', = 1, 2, \ldots, n.$$

Таким чином, рівність $\dim C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}') = \dim C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_p{}')$ еквівалентна такій

$$n - \operatorname{rank} c^{k'}_{i'k} c^k_{ij} = n - \operatorname{rank} c^{k'}_{p,i'k} c^k_{p,ij}, \qquad p \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Тут набір індексів $(i,\ j,\ k')$ та індекс $i' = 1, 2, \ldots, n$ пробігають стовпчикові значення. Комбінація граничного переходу $p \to \infty$ у (1.2) та леми 1.6 призводить до нерівності

$$\dim C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}') \leqslant \dim C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_0{}'). \qquad \square$$

Приклад 1.9. Розглянемо дві нільпотентні алгебри Лі розмірності шість: $\mathfrak{g}_{6.11}$ та $\mathfrak{g}_{5.4} \oplus \mathfrak{g}_1$. З їх комутаційних співвідношень (див. додаток А) випливає, що для $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6.11}$

$$\mathfrak{g}' = \langle e_4, e_5, e_6 \rangle, \quad C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}') = \langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle, \quad \dim C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}') = 5,$$

а для $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5.4} \oplus \mathfrak{g}_1$

$$\mathfrak{g}' = \langle e_3, e_4, e_5 \rangle, \quad C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}') = \langle e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle, \quad \dim C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}') = 4.$$

Отже, з твердження 1.8 можна зробити висновок, що не існує контракції з алгебри Лі $\mathfrak{g}_{6.11}$ до алгебри $\mathfrak{g}_{5.4} \oplus \mathfrak{g}_1$.

Твердження 1.10. *Нехай алгебра Лі $\mathfrak{g}_0$ є контракцією алгебри Лі $\mathfrak{g}$ та алгебра $\mathfrak{g}$ містить підалгебру $\mathfrak{s}$. Тоді алгебра $\mathfrak{g}_0$ містить підалгебру $\mathfrak{s}_0$ тієї ж розмірності,* $\dim \mathfrak{s}_0 = \dim \mathfrak{s}$.

Доведення. Теорему досить довести у випадку послідовних контракцій. Твердження для неперервних контракцій безпосередньо випливають з тверджень для послідовних контракцій.

Нехай $\{\mathfrak{g}_p = (V, [\cdot,\cdot]_p),\ p \in \mathbb{N}\}$ — це послідовність алгебр Лі, що ізоморфні $\mathfrak{g}$ з матрицею ізоморфізму $U_p \in \mathrm{GL}(V)$, $p \in \mathbb{N}$ та здійснюють контракцію $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$. Тоді для кожного $p \in \mathbb{N}$ алгебра $\mathfrak{g}_p$ містить підалгебру $\mathfrak{s}_p = U_p\mathfrak{s}$, тобто $\mathfrak{s}_p$ ізоморфна $\mathfrak{s}$ та $\dim \mathfrak{s}_p = \dim \mathfrak{s}$.

Нехай $n_s = \dim \mathfrak{s}$. Виконаємо заміну базису алгебр $\mathfrak{g}_p$ за допомогою невироджених матриць W_p так, щоб n_s перших нових базисних елементів $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_{n_s}$ утворювали базиси підалгебр $\mathfrak{s}_p$. Позначимо структурні сталі так, як і у доведенні твердження 1.8, при цьому нові структурні сталі алгебр $\mathfrak{g}_p$ мають вигляд $\tilde{c}^k_{p,ij} = (W_p)^i_{i'}(W_p)^j_{j'}({W_p}^{-1})^{k'}_k c^{k'}_{p,i'j'}$. Звідки випливає, що $\tilde{c}^k_{p,ij} = 0$, якщо $i, j \leqslant n_s$, а $k > n_s$. Завдяки можливості ортогоналізувати базис, не втрачаючи загальності, вважаємо, що W_p — ортогональна (для комплексного поля — унітарна) матриця. Набір ортогональних (унітарних) матриць є компактним у індукованій евклідовій топології, тому існує збіжна підпослідовність $\{W_{p_q},\ q \in \mathbb{N}\}$ з границею W_0. Оскільки $c^k_{p,ij} \to c^k_{0,ij}$, $p \to \infty$, тоді $\tilde{c}^k_{p_q,ij} \to \tilde{c}^k_{0,ij}, \quad q \to \infty$, де

$$\tilde{c}^k_{p_q,ij} = (W_{p_q})^i_{i'}(W_{p_q})^j_{j'}({W_{p_q}}^{-1})^{k'}_k c^{k'}_{p_q,i'j'},$$
$$\tilde{c}^k_{0,ij} = (W_0)^i_{i'}(W_0)^j_{j'}({W_0}^{-1})^{k'}_k c^{k'}_{0,i'j'}.$$

Таким чином, $\tilde{c}^k_{0,ij} = 0$, якщо $i, j \leqslant n_s$, а $k > n_s$, тобто,

$\mathfrak{s}_0 = \langle \tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_{n_s} \rangle$ — підалгебра у $\mathfrak{g}_0$ з множенням, $[\cdot,\cdot]_0$.

Очевидно, що $\dim \mathfrak{s}_0 = n_s = \dim \mathfrak{s}$. □

1.2. *S*-розширення алгебр Лі

У 1961 році А. Зайцев [2] припустив, що усі розв'язні алгебри Лі фіксованої розмірності можна отримати за допомогою контракцій з напівпростих

алгебр тієї самої розмірності та запропонував застосувати процедуру контракції для ‘граничної класифікації’ розв’язних алгебр Лі. У 1981 році аналогічну гіпотезу сформулювали Селеджіні та Тарліні [24].

Насправді таке припущення є хибним, оскільки контракція зберігає властивість унімодулярності (необхідна умова 8) теореми 1.5), що було показано у роботі [108], крім цього, напівпрості алгебри Лі існують не для всіх розмірностей. Розширення вихідних алгебр Лі до множини редуктивних алгебр також не є достатнім, це демонструє аналіз схеми контракцій дійсних чотиривимірних алгебр Лі (див. рис. 1.1), побудованої у [108]. Зокрема до найвищого рівня (алгебра диференціювань має найменшу розмірність), який має слугувати за вихідний для граничної класифікації, належать не лише редуктивні алгебри, а і дві розв’язні алгебри $A_{4.10}$ та $2A_{2.1}$, які еквівалентні алгебрі $2A_{2.1}$ над полем комплексних чисел. Тут та далі для позначення алгебр Лі розмірностей не вище за чотири використовується класифікація Мубаракзянова [3].

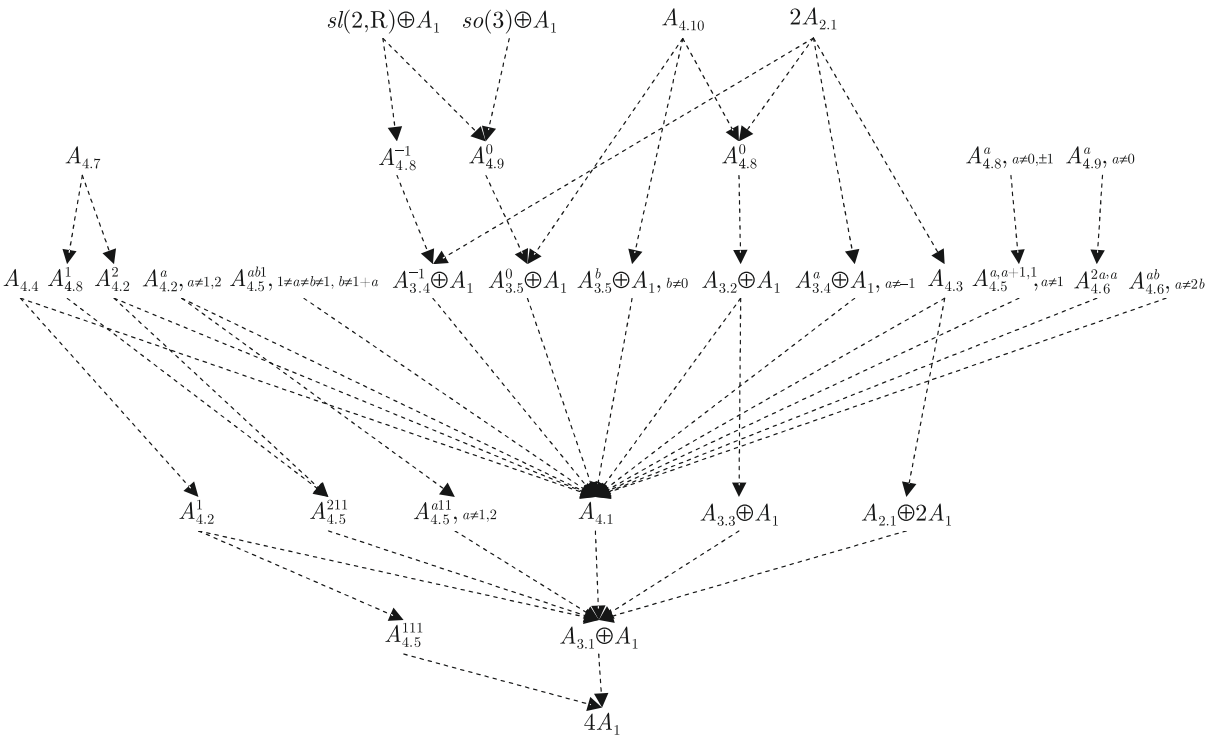


Рис. 1.1. Контракції дійсних чотиривимірних алгебр Лі [108].

Метою даного параграфу є перегляд гіпотези Зайцева у термінах S-розширень та дослідження S-розширень дійсних тривимірних алгебр Лі. У роботі [66] було доведено, що узагальнені ІВ-контракції є частковим випадком S-розширень, тому варто досліджувати лише ті пари алгебр, що не пов'язані контракцією.

S-розширення можна вважати 'добутком' напівгрупи та алгебри Лі, зі структурою алгебри Лі, що визначена спеціальним чином. Поняття S-розширення узагальнює поняття розкладу, розширення, деформації (при належному виборі напівгрупи) та узагальненої ІВ-контракції.

Наведемо означення S-розширення. Нехай $S = \{\lambda_\alpha\}$ — це абелева напівгрупа порядку N та нехай $\mathfrak{g}$ — це n-вимірна алгебра Лі зі структурними сталими c_{ij}^k у базисі $\{e_i\}$ векторного простору V. Тут і далі індекси α, β та γ змінюються від 1 до N, а індекси i, j та k змінюються від 1 до $n = \dim V$.

Означення 1.11 ([66]). ($n \cdot N$)-вимірна *S-розширена алгебра Лі* $\mathfrak{G} := S \times \mathfrak{g}$, породжується базисними елементами $\{e_{(i,\alpha)} = \lambda_\alpha e_i\}$ з такими структурними сталими

$$c_{(i,\alpha)(j,\beta)}^{(k,\gamma)} = \begin{cases} c_{ij}^k, & \text{якщо} \quad \lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_\gamma, \\ 0, & \text{у решті випадків.} \end{cases} \tag{1.3}$$

Зауваження 1.12. З (1.3) безпосередньо випливає, що добуток елементів $e_{(i,\alpha)}$ та $e_{(j,\beta)}$ у алгебрі $\mathfrak{G}$ дорівнює нулю, якщо $[e_i, e_j] = 0$. Таким чином, слід обирати такого представника з класу ізоморфізму вихідної алгебри $\mathfrak{g}$, який відповідає меті S-розширення. Іншими словами, при необхідності тензор структурних сталих має бути перетворений елементом з групи $\mathrm{GL}(V)$ (наприклад, деякі коефіцієнти мають стати ненульовими) перш ніж буде застосовану процедуру розширення. Зрозуміло, що комутаційні співвідношення розширеної алгебри $\mathfrak{G}$ також зводяться до потрібного вигляду невиродженою заміною базису, проте задача знаходження необхідного перетворення ускладнюється при зростанні розмірності.

Нехай алгебра Лі $\mathfrak{g}$ допускає розклад $\mathfrak{g} = \check{V} \oplus \hat{V}$, де $[\check{V}, \hat{V}] \subset \hat{V}$, а саме

$$[\check{v}_{\check{i}}, \hat{v}_{\hat{j}}] = \hat{c}^{\hat{k}}_{\check{i}\hat{j}} \hat{v}_{\hat{k}}, \quad [\check{v}_{\check{i}}, \check{v}_{\check{j}}] = \check{c}^{\check{k}}_{\check{i}\check{j}} \check{v}_{\check{k}} + \hat{c}^{\hat{k}}_{\check{i}\check{j}} \hat{v}_{\hat{k}}, \quad [\hat{v}_{\hat{i}}, \hat{v}_{\hat{j}}] = \check{c}^{\check{k}}_{\hat{i}\hat{j}} \check{v}_{\check{k}} + \hat{c}^{\hat{k}}_{\hat{i}\hat{j}} \hat{v}_{\hat{k}}.$$

Тут $\{\check{v}_{\check{i}}\}$ — це базис $\check{V}$, а $\{\hat{v}_{\hat{i}}\}$ — це базис $\hat{V}$. Тоді елементи $\{\check{v}_{\check{i}}\}$ утворюють добре визначену *редуковану* алгебру Лі натягнуту на $\check{V}$ з добутком Лі, що визначений структурними сталими $\check{c}^{\check{k}}_{\check{i}\check{j}}$.

У загальному випадку розмірність S-розширеної алгебри Лі $\mathfrak{G}$ більша за n та вона має складнішу структуру ніж $\mathfrak{g}$. Тому, для деяких застосувань, варто розглядати підалгебри або редуковані алгебри менших розмірностей замість усієї розширеної алгебри. Задача побудови алгебр меншої розмірності, що пов'язані з розширеною алгеброю Лі досить складна, у роботі [66] сконструйовано два класи таких алгебр для S-розширених алгебр Лі, що допускають узгоджений розклад напівгруп та алгебр Лі.

Казатимемо, що напівгрупа S та алгебра Лі $\mathfrak{g}$ допускають *резонансний розклад підмножин*, якщо їх можна розкласти як $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p\in I} V_p$ (де пряма сума стосується лише розкладу векторних просторів) та $S = \bigcup_{p\in I} S_p$ з деяким набором індексів I, при цьому $[V_p, V_q] \subset \bigoplus_{r\in i(p,q)} V_r$ та $S_p S_q \subset \bigcap_{r\in i(p,q)} S_r$, де для усіх $p, q \in I$ набір індексів $i(p,q)$ є підмножиною I. У резонансному випадку, $\mathfrak{G}_R = \bigoplus_{p\in I}(S_p \times V_p)$ — це *резонансна підалгебра* S-розширеної алгебри Лі $\mathfrak{G}$. Для кожного резонансного розкладу, ця конструкція породжує алгебру Лі розмірності меншої за розмірність $\mathfrak{G}$.

Інший клас підалгебр будується за допомогою редукції. Припустимо, що для кожного $p \in I$ множина S_p розбивається на підмножини $\check{S}_p$ та $\hat{S}_p$, такі, що $\check{S}_p \hat{S}_q \subset \bigcap_{r\in i(p,q)} \hat{S}_r$. Це розбиття індукує розклад $\mathfrak{G}_R = \hat{\mathfrak{G}} \oplus \check{\mathfrak{G}}$, де прямі суми стосуються лише векторних просторів, $\check{\mathfrak{G}} = \bigoplus_{p\in I}(\check{S}_p \times V_p)$ та $\hat{\mathfrak{G}} = \bigoplus_{p\in I}(\hat{S}_p \times V_p)$. Оскільки $[\check{\mathfrak{G}}, \hat{\mathfrak{G}}] \subset \hat{\mathfrak{G}}$, то проєкція дужки Лі алгебри $\mathfrak{G}_R$ на $\check{\mathfrak{G}}$ породжує добре визначену дужку Лі на $|\check{\mathfrak{G}}|$. Інакше кажучи, алгебра Лі $\check{\mathfrak{G}}$ з цією дужкою Лі є редукованою алгеброю для $\mathfrak{G}_R$.

Нехай задано абелеву напівгрупу S з нулем $\lambda_N = 0_S \in S$, тобто, $\lambda_\alpha 0_S = 0_S$ для усіх $\alpha = 1, \ldots, N$, будь-яка S-розширена алгебра Лі $\mathfrak{G} = S \times \mathfrak{g}$ може бути розкладена $\mathfrak{G} = \check{V} \oplus \hat{V}$ з $[\check{V}, \hat{V}] \subset \hat{V}$, де $\hat{V} = \langle 0_S e_1, 0_S e_2, \ldots, 0_S e_n \rangle$. У цьому випадку редукована алгебра Лі $\mathfrak{G}_0 := |\check{V}|$ називається 0_S-*редукованою алгеброю* алгебри $\mathfrak{G}$.

Умова (1.3) призводить до того, що 0_S-редукована алгебра $\mathfrak{G}_0$, у базисі

$$\{\lambda_\alpha e_i \mid \alpha = 1, \ldots, N-1,\ i = 1, \ldots, n\},$$

має наступні комутаційні співвідношення:

$$[\lambda_\alpha e_i, \lambda_\beta e_j] = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} c_{ij}^k \lambda_\alpha \lambda_\beta e_k, & \text{якщо} \quad \lambda_\alpha \lambda_\beta \neq 0_S, \\ 0, & \text{якщо} \quad \lambda_\alpha \lambda_\beta = 0_S. \end{cases} \tag{1.4}$$

Оскільки узагальнені контракції Іньоню–Вігнера пов'язані з градуюваннями (спеціальними розкладами векторного простору) контрактованих алгебр Лі, то очевидно, що узагальнені ІВ-контракції можна отримати за допомогою S-розширень, див. [66]. У той же час з цього твердження не випливає, що S-розширення вичерпують усі можливі контракції, зокрема тому, що існують контракції, які нееквівалентні узагальненим ІВ-контракціям [21, 127].

З іншого боку, існують S-розширення, які не еквівалентні контракціям, приклад такого розширення наведено нижче для алгебр Лі $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ та $A_{2.1} \oplus A_1$.

Існує ще одна конструкція тісно пов'язана з S-розширеннями, що задається виключно алгебраїчним поняттям *градуйованої контракції* [27]. Градуйована контракція будується таким чином: структурні сталі градуйованої алгебри Лі домножаються на числа, підібрані таким чином, щоб домножені структурні сталі визначали алгебру Лі з тим самим градуюванням, що і початкова. Градуйовані контракції включають дискретні контракції але не покривають неперервні.

Контракції дійсних та комплексних тривимірних алгебр Лі були вичерпно досліджені у роботі [108]. Оскільки вони усі реалізуються

узагальненими ІВ-контракціями, то вони можуть бути реалізовані S-розширеннями. Більш того, S-розширення дозволяють встановити додаткові зв'язки на многовиді тривимірних алгебр Лі.

Відповідно до класифікації Мубаракзянова [3], неізоморфні дійсні тривимірні алгебри Лі вичерпуються двома простими алгебрами $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ і $\mathfrak{so}(3)$; двома параметризованими серіями розв'язних алгебр $A^a_{3.4}$, $0<|a|\leqslant 1$ і $A^b_{3.5}$, $b\geqslant 0$; трьома окремими нерозкладними розв'язними алгебрами $A_{3.1}$, $A_{3.2}$ і $A_{3.3}$; та двома розкладними розв'язними алгебрами $3A_1$ і $A_{2.1}\oplus A_1$.

Було доведено [108], що усі тривимірні унімодулярні алгебри (а саме, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, $\mathfrak{so}(3)$, $A^{-1}_{3.4}$, $A^0_{3.5}$, $A_{3.1}$ і $3A_1$) належать замиканню орбіти однієї з простих алгебр. Усі контракції зображено на рис. 1.2 штриховими лініями, де стрілка вказує напрямок контракції: від початкової до результуючої алгебри. Послідовні контракції, тобто контракції виду: $\mathfrak{g}$ контрактує до $\mathfrak{g}_0$, якщо $\mathfrak{g}$ контрактує до $\mathfrak{g}_1$ і $\mathfrak{g}_1$ контрактує до $\mathfrak{g}_0$, на схему не нанесено. Пара алгебр, що пов'язана контракцією, має задовольняти необхідним умовам теореми 1.5, нижче наведено приклади, які демонструють, що для S-розширень алгебр Лі більшість з цих умов не виконується.

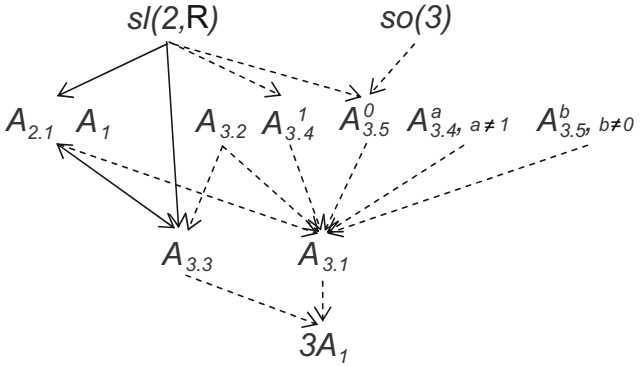


Рис. 1.2. Контракції дійсних тривимірних алгебр Лі позначено штриховими стрілками, а S-розширення, що не еквівалентні контракціям позначено суцільними стрілками.

Нехай задано унімодулярну алгебру Лі $\mathfrak{g}=\langle e_1,\dots,e_n\rangle$, тоді

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{e_i})=\sum_{j=1}^{n}c^j_{ij}=0 \qquad \forall\, i=1,\dots,n. \tag{1.5}$$

Використовуючи (1.5), для базисних елементів $E_{(i-1)N+\alpha} := \lambda_\alpha e_i$ S-розширеної алгебри Лі $\mathfrak{G}$ отримаємо

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{E_{(i-1)N+\alpha}}) = \sum_{\beta=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} K^{\beta}_{\alpha\beta}c^{j}_{ij} = \sum_{\beta=1}^{N} K^{\beta}_{\alpha\beta}\left(\sum_{j=1}^{n} c^{j}_{ij}\right) = 0,$$

де

$$K^{\gamma}_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \lambda_\alpha\lambda_\beta = \lambda_\gamma, \\ 0, & \text{у решті випадків.} \end{cases}$$

Таким чином, властивість унімодулярності зберігається будь-яким окремим S-розширенням. У той же час, унімодулярна алгебра може містити неунімодулярну підалгебру, або може редукуватись до неунімодулярної алгебри Лі.

Наведемо ненульові комутаційні співвідношення трьох алгебр Лі:

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}): \quad [e_1,e_2]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_3,\ [e_1,e_3]=2e_2; \tag{1.6}$$

$$A_{2.1}\oplus A_1: \quad [e_1,e_2]=e_1; \tag{1.7}$$

$$A_{3.3}: \quad [e_1,e_3]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_2. \tag{1.8}$$

Розглянемо розширення алгебри Лі $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ за допомогою абелевої напівгрупи $S_2 := \{\lambda_1,\lambda_2\}$ де $\lambda_1\lambda_1 = \lambda_1\lambda_2 = \lambda_2\lambda_1 = \lambda_2\lambda_2 = \lambda_2$, тобто, λ_2 — це нульовий елемент 0_{S_2} напівгрупи. Елементи $E_{2(i-1)+\alpha} := \lambda_\alpha e_i$, $\alpha = 1,2$, $i = 1,2,3$, утворюють базис шестивимірної S_2-розширеної алгебри Лі $\mathfrak{G}$. Зі співвідношень (1.6) отримуємо ненульові комутаційні співвідношення алгебри Лі $\mathfrak{G}$

$$\begin{aligned}
&[E_1,E_3]=E_2, \quad [E_1,E_4]=E_2, \quad [E_1,E_5]=2E_4, \quad [E_1,E_6]=2E_4,\\
&[E_2,E_3]=E_2, \quad [E_2,E_4]=E_2, \quad [E_2,E_5]=2E_4, \quad [E_2,E_6]=2E_4,\\
&[E_3,E_5]=E_6, \quad [E_3,E_6]=E_6, \quad [E_4,E_5]=E_6, \quad [E_4,E_6]=E_6.
\end{aligned}$$

Елементи E_1, E_2 та E_3 утворюють тривимірну підалгебру з ненульовими комутаційними співвідношенням $[E_1,E_3]=E_2$, $[E_2,E_3]=E_2$. Заміна базису $\tilde{E}_1 = E_2$, $\tilde{E}_2 = E_3$, $\tilde{E}_3 = E_1 - E_2$ призводить до єдиного ненульового

співвідношення $[\tilde{E}_1, \tilde{E}_2] = \tilde{E}_1$. Таким чином, отримуємо алгебру $A_{2.1} \oplus A_1$, див. (1.7).

Іншим прикладом є пара алгебр $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ та $A_{3.3}$. Нехай абелева група порядку три з нулем $S_3 = \{0_{S_3} = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ задовольняє умови $\lambda_2\lambda_3 = \lambda_3\lambda_2 = \lambda_2$ та $\lambda_2\lambda_2 = \lambda_3\lambda_3 = \lambda_1$. Ці властивості S_3 сумісні зі структурою напівгрупи та достатні для визначення S_3-розширень. S_3-розширення алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ є дев'ятивимірною алгеброю Лі $S_3 \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ з ненульовими комутаторами

$$
\begin{aligned}
&[E_1, E_4] = E_1, \quad [E_1, E_5] = E_1, \quad [E_1, E_6] = E_1,\\
&[E_1, E_7] = 2E_4, \quad [E_1, E_8] = 2E_4, \quad [E_1, E_9] = 2E_4,\\
&[E_2, E_4] = E_1, \quad [E_2, E_5] = E_1, \quad [E_2, E_6] = E_2,\\
&[E_2, E_7] = 2E_4, \quad [E_2, E_8] = 2E_4, \quad [E_2, E_9] = 2E_5,\\
&[E_3, E_4] = E_1, \quad [E_3, E_5] = E_2, \quad [E_3, E_6] = E_1,\\
&[E_3, E_7] = 2E_4, \quad [E_3, E_8] = 2E_5, \quad [E_3, E_9] = 2E_4,\\
&[E_4, E_7] = E_7, \quad [E_4, E_8] = E_7, \quad [E_4, E_9] = E_7,\\
&[E_5, E_7] = E_7, \quad [E_5, E_8] = E_7, \quad [E_5, E_9] = E_8,\\
&[E_6, E_7] = E_7, \quad [E_6, E_8] = E_8, \quad [E_6, E_9] = E_7.
\end{aligned}
$$

З алгебри $S_3 \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ можна виокремити тривимірну підалгебру $\langle E_1, E_2, E_6\rangle$ ізоморфну $A_{3.3}$, див. (1.8). Два наведені розширення є прикладами побудови зв'язків між унімодулярними та неунімодулярними тривимірними алгебрами Лі за допомогою розширень та виділення підалгебр.

Що стосується решти неунімодулярних алгебр Лі, а саме $A_{3.2}$, $A^a_{3.4}$ та $A^b_{3.5}$, є підстави вважати, що їх неможливо отримати з простих тривимірних алгебр Лі за допомогою S-розширень. Ця гіпотеза ґрунтується на неузгодженості правих частин у відповідних канонічних комутаційних співвідношеннях, які неможливо подолати за допомогою невиродженої заміни базису. Ця гіпотеза потребує строгого доведення.

Розглянемо S_3-розширення алгебри Лі $A_{2.1} \oplus A_1$. Опустимо громіздкі комутаційні співвідношення дев'ятивимірної алгебри Лі і розглянемо

лише ті, що стосуються базисних елементів $E_1 = \lambda_1 e_1$, $E_2 = \lambda_2 e_1$ та $E_6 = \lambda_3 e_2$: $[E_1, E_6] = E_1$, $[E_2, E_6] = E_2$, $[E_1, E_2] = 0$.

Це означає, що базисні елементи E_1, E_2 і E_6 утворюють підалгебру ізоморфну $A_{3.3}$, див. (1.8).

Зворотній зв'язок може бути отриманий за допомогою S_2-розширення алгебри $A_{3.3}$. Базисні елементи E_1, E_2 та E_6 породжують підалгебру ізоморфну $A_{2.1} \oplus A_1$. Дійсно, комутаційні співвідношення між цими елементами наступні:

$$[E_1, E_2] = 0, \quad [E_1, E_6] = E_1, \quad [E_2, E_6] = E_1.$$

Заміною базису $\tilde{E}_1 = E_1 - E_2$, $\tilde{E}_2 = E_6$, $\tilde{E}_3 = E_2$, отримаємо єдине ненульове співвідношення $[\tilde{E}_1, \tilde{E}_2] = \tilde{E}_1$. Цей приклад демонструє наявність зв'язку між алгебрами у обох напрямках, що заперечує наявність відношення, навіть часткового, порядку.

Отже, на відміну від контракції, S-розширення з алгебри $A_{2.1} \oplus A_1$ до $A_{3.3}$ створило алгебру Лі більш складної структури, а саме: розмірність центру зменшилась з 1 до 0, розмірність підалгебри Картана зменшилась з 2 до 1, а розмірність похідної алгебри зросла з 1 до 2.

У той же час S-розширення, навіть комбіновані з редукцією та виокремленням підалгебри, зберігають певні властивості алгебр Лі. Наприклад, виконується співвідношення

$$[S \times \mathfrak{g}, S \times \mathfrak{g}] = (SS) \times [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

Таким чином, алгебра $S \times \mathfrak{g}$ є розв'язною (нільпотентною) тоді і тільки тоді, коли такою є алгебра $\mathfrak{g}$, степені розв'язності (нільпотентності) цих алгебр співпадають. Процедури редукції алгебри $S \times \mathfrak{g}$ та виділення її підалгебри не можуть підвищити степінь розв'язності (нільпотентності).

Зауважимо, що всі чотири розглянуті випадки розширень можна отримати з неабелевої двовимірної алгебри Лі, оскільки ключову роль грає співвідношення $[e_1, e_2] = e_1$.

Проведений вище аналіз S-розширень дозволяє сформулювати наступне твердження.

Твердження 1.13. *S-розширення алгебр Лі зберігають властивості унімодулярності, розв'язності та нільпотентності.*

S-розширення та редукція алгебр Лі дозволяють отримати неунімодулярні алгебри Лі з унімодулярних, проте, при цьому порушується відношення порядку на многовиді алгебр Лі заданої розмірності.

1.3. Контракції нільпотентних алгебр Лі

Контракції дійсних та комплексних нільпотентних алгебр Лі розмірностей не вище за чотири були повністю досліджені серед контракцій усіх низькорозмірних алгебр у роботі [108], де, зокрема, було показано, що усі контракції нільпотентних низькорозмірних алгебр Лі еквівалентні звичайним контракціям Іньоню–Вігнера.

Розглянемо контракції комплексних нільпотентних алгебр Лі вищих розмірностей. Необхідною умовою для дослідження контракцій є класифікація таких алгебр, для розмірності 5 та 6, ці класифікації відомі та наведені у додатку A. Контракції п'ятивимірних нільпотентних алгебр Лі було досліджено у роботі [51], проте нам вдалось покращити цей результат звівши усі контракції, крім однієї, до звичайних контракцій Іньоню–Вігнера та побудувавши узагальнену IB-контракцію з найменшою можливою сигнатурою. Явний вигляд отриманих матриць контракції наведено у таблиці A.1 додатку A. Для доведення відсутності контракцій у парах п'ятивимірних алгебр Лі були використані необхідні умови пов'язані з розмірністю орбіти, абелевого ідеалу, центру та централізатора похідної алгебри. Отриманий результат можна підсумувати у вигляді твердження.

Лема 1.14. *Наступний набір необхідних умов є достатнім для виокремлення пар п'ятивимірних нільпотентних алгебр Лі над полем комплексних чисел, для яких існує контракція.*

Якщо алгебра Лі g_0 є власною контракцією алгебри Лі g, то виконуються наступні умови:

1) $\dim \mathcal{O}(g_0) < \dim \mathcal{O}(g)$, *де* $\mathcal{O}(g)$ — *це орбіта під дією* $\mathrm{GL}(V)$;
2) $n_{\mathrm{Ai}}(g_0) \geq n_{\mathrm{Ai}}(g)$, *де* $n_{\mathrm{Ai}}(g)$ — *максимальна розмірність абелевого ідеалу;*
3) $\dim g_0^l \leq \dim g^l$, $l = 1, 2, 3$, *де* $g^1 = [g, g]$, $g^2 = [g^1, g]$, $g^3 = [g^2, g]$;
4) $\dim Z(g_0) \geq \dim Z(g)$, *де* $Z(g)$ — *центр алгебри;*
5) $\dim C_g(g') \leq \dim C_g(g_0{}')$, *де* $C_g(g')$ — *централізатор похідної алгебри.*

Твердження 1.15. *Усі, крім однієї, контракції нільпотентних алгебр Лі розмірності не вище за п'ять еквівалентні звичайним контракціям Іньоню–Вігнера.*

Контракція $\mathfrak{g}_{5.6} \to \mathfrak{g}_{5.4}$ *є єдиною контракцією нільпотентних п'ятивимірних алгебр Лі, що не може бути отримана простою IB-контракцією. Для цієї пари мінімальною додатною сигнатурою є набір* $(1, 0, 1, 2, 1)$.

Доведення. Доведення першого твердження випливає з роботи [108] та таблиці A.1.

Доведемо друге твердження. Розглянемо діагональні диференціювання алгебри Лі $\mathfrak{g}_{5.4}$:

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}_{5.4}) = \mathrm{diag}(2p_3 - p_5,\ p_5 - p_3,\ p_3,\ 3p_3 - p_5,\ p_5),$$

де $p_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, 5$. З третьої та п'ятої компоненти випливає, що $\mathbb{Z}_2$-градуювання (яке еквівалентне існуванню контракції Іньоню–Вігнера) вимагає виконання умови $p_3, p_5 \in \{0; 1\}$, що призводить переліку можливих сигнатур:

$p_3 = p_5 = 0$, відповідна сигнатура $(0, 0, 0, 0, 0)$;

$p_3 = p_5 = 1$, відповідна сигнатура $(1, 0, 1, 2, 1)$;

$p_3 = 1,\ p_5 = 0,$ відповідна сигнатура $(2, 0, 1, 3, 0)$;

$p_3 = 0,\ p_5 = 1,$ відповідна сигнатура $(-1, 1, 0, -1, 1)$.

Жодна з них не складається з нулів та одиниць, отже, алгебра $\mathfrak{g}_{5.4}$ не може бути результатом простої контракції Іньоню–Вігнера.

Контракція $\mathfrak{g}_{5.6} \to \mathfrak{g}_{5.4}$ може бути реалізована узагальненою ІВ-контракцією з сигнатурою $(1, 0, 1, 2, 1)$, яка є мінімальною додатною сигнатурою у випадку $p_3, p_5 \in \{0; 1\}$. Існує ще одна додатна сигнатура того ж порядку, а саме $(0, 1, 1, 1, 2)$ при $p_3 = 1,\ p_5 = 2$, але вона вимагає додаткового перетворення ізоморфізму. Решта сигнатур містять від'ємні компоненти або вищі порядки. □

Зауваження 1.16. Зауважимо, що класифікації нільпотентних п'ятивимірних алгебр над полем дійсних та комплексних чисел співпадають. Оскільки усі матриці контракції мають дійсні компоненти, то вищенаведені результати справедливі і для поля дійсних чисел.

Контракції шестивимірних нільпотентних алгебр Лі над полем комплексних чисел (класифікацію алгебр наведено у додатку А) досліджувались у роботі [133], на жаль, там наявні помилки, наприклад, контракцію $\mathfrak{g}_{6.17} \to \mathfrak{g}_{6.12}$ пропущено, а контракція $\mathfrak{g}_{6.17} \to \mathfrak{g}_{6.11}$ є зайвою, оскільки може бути отримана як композиція контракцій. Матриці контракції $\mathfrak{g}_{6.4} \to \mathfrak{g}_{6.7}$, $\mathfrak{g}_{6.18} \to \mathfrak{g}_{6.9}$, $\mathfrak{g}_{6.19} \to \mathfrak{g}_{6.13}$, $\mathfrak{g}_{6.19} \to \mathfrak{g}_{6.17}$ та $\mathfrak{g}_{6.20} \to \mathfrak{g}_{6.18}$ не реалізують задекларовані контракції, а контракції $\mathfrak{g}_{6.11} \to \mathfrak{g}_{5.4} \oplus \mathfrak{g}_1$ та $\mathfrak{g}_{6.7} \to \mathfrak{g}_3 \oplus \mathfrak{g}_3$ насправді не існують.

При дослідженні цієї задачі було встановлено перелік необхідних умов, що є достатніми для виокремлення усіх пар шестивимірних нільпотентних алгебр Лі над полем комплексних чисел, що допускають контракцію.

Лема 1.17. *Якщо алгебра Лі g_0 є власною контракцією алгебри Лі g, то виконуються наступні умови:*

1) $\dim \mathcal{O}(g_0) < \dim \mathcal{O}(g)$, *де* $\mathcal{O}(g)$ — *це орбіта під дією* $\mathrm{GL}(V)$;

2) $n_{\mathrm{Ai}}(g_0) \geq n_{\mathrm{Ai}}(g)$, *де* $n_{\mathrm{Ai}}(g)$ — *максимальна розмірність абелевого ідеалу;*

3) $\dim g_0^l \leq \dim g^l$, $l = 1, 2, 3$, *де* $g^1 = [g, g]$, $g^2 = [g^1, g]$, $g^3 = [g^2, g]$;

4) $\dim Z(g_0) \geq \dim Z(g)$, *де* $Z(g)$ — *центр алгебри;*

5) $\dim C_g(g') \leq \dim C_g(g_0')$, *де* $C_g(g')$ — *централізатор похідної алгебри;*

6) *якщо* s — *підалгебра* g, *то існує підалгебра* s_0 *у* g_0 *тієї ж розмірності, така, що* s_0 *є контракцією* s;

7) *якщо* g *представлено структурою* s, *що лежить у стійкій за Борелем замкненій підмножині* S, *то* g_0 *теж має бути представленою структурою у* S.

Цей набір необхідних умов є достатнім для виокремлення пар шестивимірних нільпотентних алгебр Лі над полем комплексних чисел, для яких існує контракція.

Умови 1)–4) можуть бути знайдені у роботі [108], умова 7) — у роботі [133], а умови 5) та 6) доведено у параграфі 1.1.

Використовуючи комутаційні співвідношення шестивимірних нільпотентних алгебр Лі, обчислимо ряд алгебраїчних величини, для застосування леми 1.17.

Найпотужнішою необхідною умовою є умова 1), оскільки вона містить строгу нерівність та доводить відсутність контракції у понад половині випадків. Маємо наступне впорядкування шестивимірних комплексних нільпотентних алгебр Лі відносно розмірностей орбіти групи $\mathrm{GL}(V)$:

$$28 = \dim \mathcal{O}(g_{6.20});$$
$$27 = \dim \mathcal{O}(g_{6.19}) = \dim \mathcal{O}(g_{6.18});$$
$$26 = \dim \mathcal{O}(g_{6.17}) = \dim \mathcal{O}(g_{6.15}) = \dim \mathcal{O}(g_{6.13});$$
$$25 = \dim \mathcal{O}(g_{6.16}) = \dim \mathcal{O}(g_{6.14}) = \dim \mathcal{O}(g_{6.12}) = \dim \mathcal{O}(g_{6.9});$$
$$24 = \dim \mathcal{O}(g_{6.11}) = \dim \mathcal{O}(g_{6.10}) = \dim \mathcal{O}(g_{6.5}) = \dim \mathcal{O}(g_{5.6} \oplus g_1);$$

$23 = \dim \mathcal{O}(g_{6.8}) = \dim \mathcal{O}(g_{6.4}) = \dim \mathcal{O}(g_{5.5} \oplus g_1)$;

$22 = \dim \mathcal{O}(g_{6.7}) = \dim \mathcal{O}(g_{6.2})$;

$21 = \dim \mathcal{O}(g_{6.6}) = \dim \mathcal{O}(g_{5.4} \oplus g_1) = \dim \mathcal{O}(g_{5.3} \oplus g_1)$;

$20 = \dim \mathcal{O}(g_3 \oplus g_3)$;

$19 = \dim \mathcal{O}(g_{6.1}) = \dim \mathcal{O}(g_4 \oplus 2g_1)$;

$18 = \dim \mathcal{O}(g_{6.3})$;

$17 = \dim \mathcal{O}(g_{5.2} \oplus g_1)$;

$15 = \dim \mathcal{O}(g_{5.1} \oplus g_1)$;

$12 = \dim \mathcal{O}(g_3 \oplus 3g_1)$.

На наступному кроці обчислюємо розмірності максимальних абелевих ідеалів для тих алгебр Лі, що не суперечать умові 1). Отримаємо рівність $n_{\mathrm{Ai}} = 4$ для алгебр $g_{6.19}$, $g_{6.17}$, $g_{6.15}$, $g_{6.14}$, $g_{6.13}$, $g_{6.12}$, $g_{6.11}$, $g_{6.10}$, $g_{6.9}$, $g_{6.8}$, $g_{6.7}$, $g_{6.5}$, $g_{6.4}$, $g_{6.3}$, $g_{6.2}$, $g_{6.1}$, $g_{5.6} \oplus g_1$, $g_{5.4} \oplus g_1$, $g_{5.3} \oplus g_1$, $g_{5.1} \oplus g_1$, $g_3 \oplus g_3$ та $n_{\mathrm{Ai}} = 5$ для алгебр $g_{6.16}$, $g_{6.6}$, $g_{5.5} \oplus g_1$, $g_{5.2} \oplus g_1$, $g_4 \oplus 2g_1$, $g_3 \oplus 3g_1$.

Далі розглянемо перші три компоненти нижнього центрального ряду, для алгебр, що залишились після застосування умов 1) та 2).

$\dim g^1 = 4$ для алгебр $g_{6.16}$ та $g_{6.14}$;

$\dim g^1 = 3$ для алгебр $g_{6.13}$, $g_{6.6}$ та $g_{6.3}$;

$\dim g^1 = 2$ для алгебр $g_{6.2}$, $g_{6.1}$, $g_{5.3} \oplus g_1$ та $g_3 \oplus g_3$.

$\dim g^2 = 2$ для алгебр $g_{6.11}$, $g_{6.8}$, $g_{6.5}$, $g_{5.6} \oplus g_1$, $g_{5.5} \oplus g_1$ та $g_{5.4} \oplus g_1$;

$\dim g^2 = 1$ для алгебр $g_{6.10}$, $g_{6.9}$ та $g_4 \oplus 2g_1$;

$\dim (g_3 \oplus g_3)^2 = 0$;

$\dim {g_{6.15}}^3 = 1$ та $\dim {g_{6.16}}^3 = 2$;

$\dim {g_{6.5}}^3 = 0$ та $\dim {g_{g_{5.5} \oplus g_1}}^3 = 1$.

Після чого обчислюємо та порівнюємо розмірності центрів

$\dim Z = 1$ для алгебр $g_{6.11}$, $g_{6.10}$ та $g_{6.2}$;

$\dim Z = 2$ для алгебр $g_{6.14}$, $g_{6.8}$, $g_{6.5}$, $g_{6.4}$, $g_{6.1}$, $g_{5.6} \oplus g_1$, $g_{5.3} \oplus g_1$, $g_{5.1} \oplus g_1$ та $g_3 \oplus g_3$;

$\dim Z = 3$ для алгебр $g_{6.3}$, $g_{5.4} \oplus g_1$ та $g_{5.2} \oplus g_1$.

Коли вже враховано умови 1)–4) використовуємо розмірності централізаторів похідних алгебр

$\dim C_g(g') = 5$ для алгебр $g_{6.11}$, $g_{6.7}$, $g_{6.4}$ та $g_{6.2}$;

$\dim C_g(g') = 4$ для алгебр $g_{6.8}$ та $g_{5.4} \oplus g_1$.

Необхідна умова 6), що пов'язана з підалгебрами, застосовується до пар $(g_{6.18}, g_{6.15})$, $(g_{6.18}, g_{6.13})$ та $(g_{6.17}, g_{6.9})$. Використовуємо підалгебри розмірності 5 $\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\rangle \subset g_{6.18}$. Ця підалгебра ізоморфна алгебрі $g_{5.1}$, яка контрактує до абелевої алгебри або до алгебри $g_3 \oplus 2g_1$, але жодна з цих трьох алгебр не є підалгеброю у $g_{6.15}$ або $g_{6.13}$. Аналогічно для підалгебри $\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\rangle \subset g_{6.17}$, що ізоморфна $g_3 \oplus 2g_1$ та контрактує до абелевої, але $g_{6.9}$ не має підалгебр $g_3 \oplus 2g_1$ або $5g_1$.

Критерій 7), що стосується структур стійких за Борелем, застосовується до пар: $(g_{6.17}, g_{6.12})$, $(g_{5.6} \oplus g_1, g_{6.4})$, $(g_{5.6} \oplus g_1, g_3 \oplus g_3)$, $(g_{6.8}, g_3 \oplus g_3)$, $(g_{6.7}, g_3 \oplus g_3)$, $(g_{5.3} \oplus g_1, g_3 \oplus g_3)$. Зауважимо, що у випадку групи GL_n стійкі за Борелем підгрупи породжуються нижньо- або верхньотрикутними матрицями. Наведемо структури стійкі за Борелем, що суперечать існуванню контракцій для наших пар алгебр.

Для $g_{6.17}$ розглянемо структуру $[\langle e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6\rangle, \langle e_4,\ e_5,\ e_6\rangle] \subseteq \langle 0\rangle$, для $g_{6.12}$ отримаємо $[\langle e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6\rangle, \langle e_4,\ e_5,\ e_6\rangle] \subseteq \langle e_6\rangle \neq \langle 0\rangle$.

Такі самі структури спрацьовують для пар $(g_{5.3} \oplus g_1, g_3 \oplus g_3)$ та $(g_{5.6} \oplus g_1, g_{6.4})$.

Щодо пар $(g_{5.6} \oplus g_1, g_3 \oplus g_3)$ та $(g_{6.7}, g_3 \oplus g_3)$ перша структура та сама, а друга для $g_3 \oplus g_3$ має вигляд $[\langle e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6\rangle, \langle e_3,\ e_5,\ e_6\rangle] \subseteq \langle e_6\rangle \neq \langle 0\rangle$.

І остання пара $(g_{6.8}, g_3 \oplus g_3)$ виключається структурою для $g_{6.8}$:

$$[\langle e_1,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6\rangle, \langle e_3,\ e_5,\ e_6\rangle] \subseteq \langle 0\rangle.$$

Усі вищенаведені величини порівняно та позначено у таблицях A.3 та A.4. Аналізуючи таблицю можна зробити висновок, що алгебра $g_{6.20}$ породжує за допомогою контракцій усі нільпотентні алгебри Лі розмірності шість.

Наслідок 1.18. *$g_{6.20}$-інваріантні теорії об'єднують усі теорії, що мають комплексну нільпотентну шестивимірну інваріантність.*

Контракції, що допускаються лемою 1.17 можна побудувати за допомогою узагальнених IB-контракцій, що дозволяє зробити наступний висновок.

Наслідок 1.19. *Контракції комплексних нільпотентних алгебр Лі розмірностей не вище за шість еквівалентні узагальненим контракціям Іньоню–Вігнера.*

Класифікація шестивимірних нільпотентних алгебр Лі над полем дійсних та комплексних чисел відрізняється чотирма додатковими алгебрами Лі, тому дійсний випадок має бути досліджений додатково.

Твердження про еквівалентність контракцій нільпотентних алгебр Лі узагальненим IB-контракціям не може бути поширене на вищі розмірності, оскільки починаючи з розмірності сім з'являються *характеристично нільпотентні* алгебри Лі, для яких це твердження спростовує наступний приклад.

Приклад 1.20. Розглянемо приклад контракції між двома нільпотентними алгебрами Лі розмірності сім $\mathfrak{g}_F$ та $\mathfrak{g}_E$. Цю контракцію, поміж інших, було побудовано у роботі [21], проте надзвичайно важливим є більш детальне її дослідження, зокрема, з точки зору градувань алгебри $\mathfrak{g}_E$. Дві нільпотентні алгебри Лі, що розглядаються, задаються комутаційними співвідношеннями

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_F\colon\ & [e_1, e_i] = e_{i+1},\ 2 \leqslant i \leqslant 6, \\
& [e_2, e_3] = e_6, \quad [e_2, e_4] = e_7, \quad [e_2, e_5] = e_7, \quad [e_3, e_4] = -e_7, \\
\mathfrak{g}_E\colon\ & [e_1, e_i] = e_{i+1},\ 2 \leqslant i \leqslant 6, \quad [e_2, e_3] = e_6 + e_7, \quad [e_2, e_4] = e_7.
\end{aligned}$$

Вони є характеристично нільпотентними, оскільки їх алгебри диференціювань теж нільпотентні

$$\begin{aligned}\mathrm{Der}(\mathfrak{g}_F) = \langle & 2E_{21}+E_{42}+E_{53}+3E_{64}+5E_{75}+2E_{76},\ E_{31}+E_{52}-E_{75},\\ & E_{32}+E_{43}+E_{54}+E_{65}+E_{76},\ E_{61},\ E_{41}-E_{51}+E_{74},\ E_{51}+E_{62}\rangle,\\ \mathrm{Der}(\mathfrak{g}_E) = \langle & E_{31}-E_{41}+E_{52},\ E_{41}+E_{62},\ -E_{31}+E_{41}+E_{63}+E_{74},\\ & -E_{21}-E_{31}+E_{41}+2E_{42}+2E_{53}+E_{63}+E_{64},\ E_{71},\ E_{51},\\ & E_{21}+E_{31}-E_{41}-E_{42}-E_{53}-E_{63}+E_{75},\ -E_{41}+E_{73},\\ & E_{32}+E_{43}+E_{54}+E_{65}+E_{76},\ E_{72},\ E_{61}\rangle.\end{aligned}$$

Тут E_{ij} позначає 7×7 матрицю з єдиним ненульовим елементом, що розташований на (i, j)-тому місці та дорівнює 1. Обидві алгебри диференціювань складаються з нижньотрикутних матриць, звідки випливає, що жодна з цих алгебр не допускає градувань, тому жодна з цих алгебр Лі не може бути результатом узагальненої ІВ-контракції.

З іншого боку, існує контракція $\mathfrak{g}_F \to \mathfrak{g}_E$, що задається матрицею контракції U_ε при $\varepsilon \to 0$:

$$U_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\varepsilon^4 & 0 & \varepsilon^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\varepsilon^5 & 0 & \varepsilon^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\varepsilon^6 & 0 & \varepsilon^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\varepsilon^7 & 0 & \varepsilon^8 \end{pmatrix}.$$

Наслідок 1.21. *Узагальнені контракції Іньоню–Вігнера не є універсальними навіть для множини нільпотентних алгебр Лі, зокрема жодна з характеристично нільпотентних алгебр Лі будь-якої розмірності не може бути результатом власної узагальненої ІВ-контракції.*

1.4. Реалізації алгебр Лі

У цьому параграфі об'єктом досліджень є диференціальні оператори першого порядку з гладкими коефіцієнтами (векторні поля Лі), що замкнені відносно операції множення (комутатора), яка задовольняє умовам дужки Лі. Існує кілька підходів до побудови та класифікації таких реалізацій алгебр Лі, основними серед них є такі:

1) побудова базисних векторних полів, що задовольняють наперед задані структурні сталі алгебри Лі;

2) побудова скінченновимірних просторів векторних полів, замкнених відносно множення, що задовольняє означенню дужки Лі.

Класифікацію реалізацій розпочав Софус Лі у термінах другого підходу і виконав її для однієї змінної над полями дійсних і комплексних чисел та двох змінних у випадку комплексного поля [81]. Задачу класифікації скінченновимірних просторів векторних полів Лі у випадку двох змінних над полем дійсних чисел розв'язали Гонзалес зі співаторами [48] 1992 року. Останню класифікацію було розширено у роботі [88] 2013 року, де побудовано скінченновимірні алгебри Лі диференціальних операторів першого порядку у двох змінних з раціональними коефіцієнтами над довільним алгебраїчно замкненим полем характерстики нуль.

Станом на сьогодні існує ряд досліджень у випадку трьох змінних, зокрема Шнейдер [136], взявши за основу комплексні реалізації Лі у двох змінних, побудував алгебри Лі векторних полів на $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ за допомогою трьох суттєвих транзитивних підняттів. Ще один новий підхід до побудови алгебр Лі у термінах вагових векторних полів з'явився у роботах Кавскі [68] та Грабовскі [49]. На сьогодні цим вичерпуються основні методи дослідження реалізацій в рамках другого підходу, зокрема можливість повної класифікації дійсних векторних полів Лі для чотирьох змінних обмежена результатом отриманим у роботі [14], де показано, що задача класифікації скінченновимірних підалгебр алгебри диференціювань на кільці поліномів n змінних є дикою для $n \geq 4$. Зважаючи на теорему

доведену Гульоміним і Штернбергом [52], ці підалгебри є важливими для опису векторних полів з поліноміальними коефіцієнтами на многовиді $\mathbb{R}^n$.

Що стосується першого підходу до побудови реалізацій алгебр Лі, то найочевиднішими є прямий метод (який є технічно досить складним) та метод побудови реалізацій з лінійними коефіцієнтами, які відповідають матричним зображенням. Ці методи будуть детальніше розглянуті далі.

Розглянемо метод побудови транзитивних реалізацій алгебр Лі, виходячи зі структурних сталих, запропонований Блаттнером [9] 1969 року. Нехай базис скінченновимірної алгебри Лі $\mathfrak{g}$ має вигляд $\{e_1, \dots, e_k, \epsilon_1, \dots, \epsilon_m\}$, де $\langle e_1, \dots, e_k\rangle$ — підалгебра корозмірності m, а $U(\mathfrak{g})$ — універсальна обгортуюча алгебри $\mathfrak{g}$. Тоді перетворення φ_ϵ, визначене для $X \in \mathfrak{g}$ формулою

$$\varphi_\epsilon(X) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{l \in \mathbb{N}^m} \boldsymbol{\chi}_i(\epsilon^l X) \frac{x^l}{l!} \right) \partial_i, \qquad \text{де } l! := \prod_{i=1}^{m} l_i!,$$

є транзитивною реалізацією алгебри $\mathfrak{g}$. Тут $\epsilon^l X \in U(\mathfrak{g})$, а $\boldsymbol{\chi}_i$ — коефіцієнт Пуанкаре–Біркгофва–Вітта перед мономом ϵ_i. Саме коефіцієнти $\boldsymbol{\chi}_i$ суттєво ускладнюють застосування формули Блаттнера, оскільки не знайдена регулярна процедура для їх обчислення.

У дисертаційній роботі розглядаються задачі, що також пов'язані з першим підходом, тобто задачі побудови реалізацій алгебри Лі заданої своїми комутаційними співвідношеннями. Зокрема використовується метод Широкова для побудови диференціальних один-форм. Наведемо необхідні означення.

Розглянемо n-вимірну дійсну чи комплексу алгебру Лі $\mathfrak{g} = (V, [\cdot, \cdot])$, задану тензором структурних сталих c_{ij}^k у фіксованому базисі $\{e_1, \dots, e_n\}$ векторного простору V. Тобто вихідними даними є ненульові комутатори $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$, де індекси i, j, k змінюються від 1 до n, а за індексами, що повторюються, відбувається сумування. Далі у цьому параграфі розглядається лише поле дійсних чисел, хоча наведені міркування справедливі і для поля комплексних чисел. Нехай M — відкрита множина в $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.22. *Векторне поле v на M* задається дотичними векторами $v \in TM|_x$ в кожній точці $x \in M$, такими, що v гладко змінюється від точки до точки. У локальних координатах векторне поле має вигляд

$$v(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi^j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{1.9}$$

де $\xi^j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — гладкі функції від $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Надалі будемо використовувати скорочення $\partial_j = \partial/\partial x_j$. Нехай $\tilde{M}$ — відкрита множина в $\mathbb{R}^m$. Позначимо через $\mathrm{Vect}(\tilde{M})$ алгебру Лі гладких векторних полів на $\tilde{M}$ з дужкою Лі, визначеною як комутатор. Іншими словами, це алгебра Лі диференціальних операторів першого порядку з гладкими коефіцієнтами.

Означення 1.23 ([128]). *Реалізацією алгебри Лі $\mathfrak{g}$ векторними полями на $\tilde{M}$* називається гомоморфізм $R\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{Vect}(\tilde{M})$.

Реалізація R *точна*, якщо $\ker R = \{0\}$, в іншому випадку називатимемо реалізацію *неточною*.

Образи базисних елементів e_i, $i = 1, \ldots, n$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ при реалізації R мають вигляд

$$X_i = R(e_i) = \sum_{j=1}^{m} \xi_i^j(x) \partial_j. \tag{1.10}$$

Зауважимо, що означення реалізації алгебри Лі задається на многовиді $\tilde{M}$, розмірності $\dim \tilde{M} = m$, оскільки розмірність простору на якому діє відповідна група Лі не обов'язково співпадає з кількістю параметрів групи Лі, тобто, з розмірністю алгебри Лі. Нехай $x \in \tilde{M}$ — деяка точка многовиду, а R_x — реалізація алгебри $\mathfrak{g}$ у цій точці. Розглянемо лінійне перетворення $R_x\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{Vect}(\tilde{M})(x)$, що перетворює вектор $v \in \mathfrak{g}$ у його образ $R(v(x))$ в точці x. Матриця, що відповідає цьому лінійному перетво-

ренню є $n \times m$ матрицею ξ і утворюється коефіцієнтами реалізації (1.10):

$$\xi(x) = \begin{pmatrix} \xi_1^1(x) & \xi_1^2(x) & \dots & \xi_1^m(x) \\ \xi_2^1(x) & \xi_2^2(x) & \dots & \xi_2^m(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n^1(x) & \xi_n^2(x) & \dots & \xi_n^m(x) \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Означення 1.24. Ранг лінійного пертворення R_x або, еквівалентно, ранг матриці $\xi(x)$ у точці x називається *рангом реалізації* R у точці x та позначається $\operatorname{rank}\xi(x)$.

Значення рангу реалізації задовольняє очевидну нерівність

$$0 \leq \operatorname{rank}\xi(x) \leq n,$$

де n — розмірність алгебри Лі $\mathfrak{g}$.

Означення 1.25. Точка $x \in M$ називається *точкою загального положення* якщо існує окіл U_x точки x, такий, що ранги $\operatorname{rank}\xi(y)$ сталі для всіх точок $y \in U_x$.

Точка, що не є точкою загального положення, називається *особливою*.

Відповідність між групою та алгеброю Лі — локальна, тому в даній роботі, навіть якщо це не зазначено явно, усі реалізації алгебр Лі розглядаються в околах точок загального положення.

Еквівалентність реалізацій. Нехай A — підгрупа групи автоморфізмів $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$.

Означення 1.26 ([128]). Дві реалізації $R_1\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{Vect}(\tilde{M})$ та $R_2\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{Vect}(\tilde{M})$ називаються *A-еквівалентними*, якщо існує $\varphi \in A$ та дифеоморфізм $f\colon \tilde{M} \to \tilde{M}$ такий, що $R_2(v) = f_* R_1(\varphi(v))$ для усіх $v \in A$. Тут f_* — це ізоморфізм з $\operatorname{Vect}(\tilde{M})$ в $\operatorname{Vect}(\tilde{M})$ індукований f.

Іншими словами, дві реалізації еквівалентні, якщо вони зводяться одна до одної автоморфною заміною базису $(e_i \mapsto \tilde{e}_i)$, та невиродженою заміною змінних $(x_l \mapsto y_l = \varphi_l(x))$.

Якщо задано дифеоморфізм на $\tilde{M}$: $y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_m)$, $y_2 = \varphi_2(x_1, \ldots, x_m)$, $\ldots$, $y_m = \varphi_m(x_1, \ldots, x_m)$. То реалізація вигляду (1.10) перетвоюється таким чином:

$$\tilde{R}(e_i) = \sum_{l=1}^{m} \tilde{\xi}_{il}(y)\partial_{y_l} = \sum_{l=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} \xi_{ij}(x) \frac{\partial \varphi_l(x)}{\partial x_j} \right) \partial_{y_l}. \tag{1.12}$$

Коефіцієнти $\tilde{\xi}_{il}(y)$ записуються в термінах y використовуючи обернене перетворення φ^{-1}.

З означення еквівалентності випливає, що точні реалізації алгебри $\mathfrak{g}$ нееквівалентні неточним реалізаціям $\mathfrak{g}$. Неточні реалізації можуть бути використані для побудови точних реалізацій індукованих алгебр. Нехай $R(\mathfrak{g})$ — неточна реалізація алгебри $\mathfrak{g}$ з базисними елементами

$$\{R(e_1) \neq 0, \ldots, R(e_k) \neq 0, R(e_{k+1}) \equiv 0, \ldots, R(e_n) \equiv 0\},$$

тоді набір операторів $\{R(e_1), \ldots, R(e_k)\}$ породжує добре визначену алгебру Лі меншої розмірності $\mathfrak{g}_s = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$, яка є підалгеброю $\mathfrak{g}$. Реалізація $R(\mathfrak{g}_s)$ алгебри $\mathfrak{g}_s$ називається *редукованою реалізацією алгебри* $R(\mathfrak{g})$.

Нехай задано координати $x = (x_1, \ldots, x_m)$ на многовиді $\tilde{M}$, а $X_i \in \mathrm{Vect}(M)$ — образи базисних елементів e_i алгебри Лі $\mathfrak{g}$ при реалізації R, тобто,

$$X_i = R(e_i) = \xi_i^j(x)\partial_j,$$

де $i = 1, \ldots, n$ і j — це індекс сумування. За третьою теоремою Лі існує локальна n-параметрична група перетворень G, що відповідає векторним полям X_i, тобто, X_i — інфінітезимальні генератори дії групи G на $\tilde{M}$. Зауважимо, що така відповідність між групою та алгеброю Лі задається дотичним простором у одиниці групи або, що те саме, у нулі алгебри Лі. Позначимо параметри групи $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{R}$, тоді групові перетворення мають вигляд

$$x'_j = f_j(x_1, \ldots, x_m, a_1, \ldots, a_n) = f_j(x, a).$$

Група Лі G може діяти на многовиді $\tilde{M}$ кількома різними способами: примітивно (утворюється лише одна орбіта при дії G на многовиді) або імпримітивно (многовид розшаровується на кілька орбіт); транзитивно (можуть існувати орбіти але відсутні стаціонарні точки) та інтранзитивно (G розкладає многовид на орбіти, які інваріантні відносно дії G). Очевидно, що примітивна дія є транзитивною, а інтранзитивна — імпримітивною.

Нехай у нас є дві локальні n-параметричні групи перетворень на многовиді $\tilde{M}$, що відповідають двом реалізаціям $\xi_{ij}(x)$ та $\tilde{\xi}_{ij}(y)$ тієї самої алгебри Лі:

$$x'_j = f_j(x, a) \quad \text{та} \quad y'_j = F_j(y_1, \ldots, y_m, b_1, \ldots, b_n) = F_j(y, b).$$

Еквівалентність (або подібність) цих груп означає, що існують невироджені перетворення $y_j = \Phi_j(x)$ та $b_i = \beta_i(a)$, такі, що одна з груп зводиться до іншої. Для кожної з груп перетворення параметрів групи (функції $\beta_i(a)$) індукує лінійне перетворення інфінітезимальних векторів групи, що у термінах реалізації означає ізоморфізм алгебри Лі, а функції $f_j(x)$ задають невироджену заміну координат.

Невиродженою заміною базису можна досягти співпадіння структур подібних груп, а групи з однаковими структурами еквівалентні тоді і лише тоді, коли існує перетворення $y_j = F_j(x)$, таке, що $\tilde{\xi}_{ij} = \xi_{il}\frac{\partial F_j(x)}{\partial x_l}$. Таким чином, ранги матриць утворені інфінітезимальними коефіцієнтами еквівалентних груп — співпадають. Очевидно також, що перетворення з групи $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ не змінюють ранг реалізації R.

Твердження 1.27. *Нехай* $R\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{Vect}(\tilde{M})$ *— реалізація рангу* $r = \operatorname{rank} R < m$, *де* $m = \dim \tilde{M}$. *Тоді існує еквівалентна їй реалізація* $\tilde{R}(y)\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{Vect}(\tilde{M})$, *така, що коефіцієнти базисних векторних полів* $\tilde{\xi}^l_i(y) = 0$ *для всіх* $i = 1, \ldots, n$, $l = r+1, \ldots, m$.

Доведення. Для доведення твердження побудуємо необхідний дифеоморфізм. Оскільки ранг реалізації дорівнює числу r, яке строго менше за роз-

мірність многовиду $\tilde{M}$, то з теорії інваріантів груп та алгебр Лі [120, 121] відомо, що існує $m - r$ функціонально незалежних інваріантів нульового порядку

$$J_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, J_{m-r}(x_1, \ldots, x_m)$$

реалізації R. Дифеоморфізм вигляду

$$y_a = x_a, \quad a = 1, \ldots, r; \qquad y_{r+b} = J_b, \quad b = 1, \ldots, m - r$$

призводить до занулення наступних коефіцієнтів реалізації $\tilde{R}$:

$$\tilde{\xi}_{i(r+b)}(y) = R(e_i)(J_b) = 0$$

для всіх $i = 1, \ldots, n$, $b = 1, \ldots, m - r$. Що і треба було довести. □

Означення 1.28. Змінні $y_1, \ldots, y_r$ з твердження 1.27 називатимемо *суттєвими*, а решту змінних $y_{r+1}, \ldots, y_m$ називатимемо *додатковими*. Перетворення еквівалентності з твердження 1.27 називатимемо *зведенням реалізації до суттєвих змінних*.

Наслідок 1.29. *Оскільки* $\operatorname{rank} R \leq n$, *то будь-яка реалізація зведена до суттєвих змінних містить частинні похідні не більше ніж за* n *змінними, тобто кількість суттєвих змінних* $m \leq n$.

Приклад 1.30. Розглянемо двовимірну абелеву алгебру Лі $2A_1$. Відомо, що її можна реалізувати двома операторами зсуву

$$R_1(e_1) = \partial_1, \quad R_1(e_2) = \partial_2, \qquad \operatorname{rank} R_1 = 2.$$

Доведено [128], що існує єдина додаткова неекваівалентна реалізація алгебри $2A_1$ рангу один

$$R_2(e_1) = \partial_1, \quad R_2(e_2) = x_2\partial_1, \qquad \operatorname{rank} R_2 = 1.$$

Розглянемо формальну суму цих реалізацій $R_3 = R_1 + R_2$ (R_1 для змінних (x_1, x_2) та R_2 для змінних (x_3, x_4)), а саме

$$R_3(e_1) = \partial_1 + \partial_3, \quad R_3(e_2) = \partial_2 + x_4\partial_3.$$

Оскільки $[\partial_1 + \partial_3, \partial_2 + x_4\partial_3] = 0$, то R_3 дійсно є реалізацією алгебри Лі $2A_1$ у просторі чотирьох змінних $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ та $\operatorname{rank} R_3 = 2$, це означає, що кількість суттєвих змінних дорівнює 2 та може бути застосоване твердження 1.27.

Дійсно, дифеоморфізм φ, що задано співвідношеннями

$$\varphi_1(x_1, \dots, x_4) = x_1, \quad \varphi_2(x_1, \dots, x_4) = x_2,$$
$$\varphi_3(x_1, \dots, x_4) = x_1 - x_3 + x_2x_4, \quad \varphi_4(x_1, \dots, x_4) = x_4,$$

зводить реалізацію R_3 до реалізації у двох суттєвих змінних, що еквівалентна R_1.

Побудова реалізацій. Зазвичай для класифікації реалізацій n-вимірної алгебри Лі $\mathfrak{g}$ застосовується прямий метод у якому розглядають n лінійно незалежних векторних полів загального вигляду

$$X_i = \xi_i^j(x)\partial_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

та вимагають, щоб вони задовольняли комутаційні співвідношення алгебри $\mathfrak{g}$. У результаті отримуємо систему диференціальних рівнянь з частинними похідними на коефіцієнти ξ_i^j та інтегруємо її, розглядаючи усі можливі випадки. У кожному з випадків перетворюємо розв'язок до найпростішого вигляду, використовуючи локальні дифеоморфізми простору x та автоморфізми алгебри $\mathfrak{g}$.

Недоліки цього методу полягають у необхідності розв'язувати складну нелінійну систему диференціальних рівнянь з частинними похідними. Прямий метод можна дещо спростити [128], послідовно класифікуючи реалізації вкладених підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$, починаючи з одновимірної підалгебри або іншої підалгебри з відомими реалізаціями та закінчуючи алгеброю $\mathfrak{g}$.

У дисертації розглядається інший підхід, який є алгебраїчним та не вимагає розв'язування диференціальних рівнянь. Вперше цей метод запропоновано у роботі І. Широкова [137] лише для лівоінваріантних век-

торних полів, та розширено до транзитивного випадку у роботі [86]. Головною ідеєю методу Широкова є побудова векторних полів, як дуальних (обернених) до диференціальних один-форм, а також конструювання диференціальних один-форм для алгебр Лі заданих структурними сталим за допомогою приєднаних зображень. Розглянемо згаданий алгебраїчний підхід детальніше.

Ліво-інваріантні векторні поля та диференціальні один-форми — дуальні, тому компоненти лівоінваріантних векторних полів $\xi_i(x) = \xi_k^i(x)\partial_{x_k}$ можна відновити з компонент лівоінваріантних диференціальних один-форм $\omega^j(x) = \omega_i^j(x)\mathrm{d}x_i$ зі співвідношення $\omega_i^j(x)\xi_k^i(x) = \delta_k^j$, де δ_k^j — дельта-символ Кронекера.

Таким чином, задача побудови лівоінваріантних векторних полів зводиться до задачі побудови компонент ω^j диференціальних лівоінваріантних 1-форм та знаходження оберненого перетворення $\xi_k^i(x) = \left((\omega_l^j(x))^{-1}\right)_k^i$.

Оберемо канонічні координати другого роду [50] $g_1(x_1), \ldots, g_n(x_n)$ на G асоційовані з базисом $e_1, \ldots, e_n$ алгебри Лі, тоді компоненти $\omega_i^j(x)$ лівоінваріантних диференціальних один-форм обчислюються так:

$$\omega_i^j(x) = \left(A_1(x_1)\cdots A_{i-1}(x_{i-1})\right)_i^j, \quad \omega_1^j = \delta_1^j.$$

Тут кожна з матриць A_i задовольняє задачі Коші

$$\dot{A}_i(t) = -\mathrm{ad}_{e_i} A_i(t), \quad A_i(0) = I,$$

де $(\mathrm{ad}_{e_k})_i^j = C_{ki}^j$, а $\dot{A}_i(t)$ означає покомпонентне диференціювання за змінною t. Така задача Коші має загальний розв'язок, що дозволяє виписати диференціальні 1-форми у вигляді

$$\omega_i^j(x) = \left(\exp(-x_1\mathrm{ad}_{e_1})\cdots\exp(-x_{i-1}\mathrm{ad}_{e_{i-1}})\right)_i^j.$$

Розглянемо детальніше векторні поля, що відповідають різним діям групи Лі. Нехай дія групи G на многовиді $\tilde{M}$ — примітивна, тоді група перетворень не має інваріантів і локальні координати на многовиді $\tilde{M}$

співпадають з повним набором координат $x_1, \ldots, x_n$. У цьому випадку у якості інфінітезимальних генераторів, що відповідають групі G, або у якості реалізації відповідної алгебри Лі можна взяти побудовані лівоінваріантні векторні поля

$$R(e_i) = \Xi_i = \sum \xi_k^i(x) = \left((\omega_l^j(x))^{-1}\right)_k^i.$$

Означення 1.31. Якщо група Лі G діє на M примітивно, то реалізація, що є лівоінваріантними векторними полями, називається *породжуючою*.

Для породжуючої реалізації ранг реалізації і розмірність многовиду $\tilde{M}$ співпадає з розмірністю алгебри Лі $\mathfrak{g}$ та дорівнює n.

Нехай дія групи G — транзитивна але імпримітивна та нехай H — підгрупа ізотропії точки загального положення $x \in M$ з відповідною алгеброю Лі $\mathfrak{h}$. Тоді G розшаровує M на орбіти і діє примітивно на деякому m-вимірному многовиді $\tilde{M} \subset M$. У цьому випадку існує $(n-m)$ незалежних інваріантів групи. Оберемо координати $y_1, y_2, \ldots, y_m, y_{m+1}, \ldots, y_n$ многовиду M такі, що $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — локальні координати на многовиді $\tilde{M}$, а $y_{m+1}, \ldots, y_n$ — інваріанти групи G. Іншими словами, $y_{m+1}, \ldots, y_n$ — координати, що відповідають підгрупі ізотропії H. Перенумеруємо базис алгебри Лі $e_1, \ldots, e_n$ відповідно до індукованих координат так, що $\mathfrak{h} = \langle e_{m+1}, \ldots, e_n \rangle$, а простір, комплементарний до векторного простору підалгебри $\mathfrak{h}$, натягнутий на елементи $\{e_1, \ldots, e_m\}$. Оберемо знову канонічні координати другого роду асоційовані з належним чином впорядкованим базисом $e_1, \ldots, e_n$, тоді лівоінваріантні векторні поля набувають вигляду $i = 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}\xi_i = {} & \xi_i^1(y_1, \ldots, y_m)\partial_1 + \cdots + \xi_i^m(y_1, \ldots, y_m)\partial_m + \\ & + \xi_i^{m+1}(y_1, y_2, \ldots, y_m, y_{m+1}, \ldots, y_n)\partial_{m+1} + \cdots \\ & + \xi_i^n(y_1, y_2, \ldots, y_m, y_{m+1}, \ldots, y_n)\partial_n.\end{aligned}$$

Інфінітезимальні генератори, що відповідають дії групи на класах суміжності, є проєкцією лівоінваріантних векторних полів на координати

$x_1, \ldots, x_m$:

$$\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}}(\xi_i) = X_i = \xi_i^1(x_1, \ldots, x_m)\partial_1 + \cdots + \xi_i^m(x_1, \ldots, x_m)\partial_m.$$

Дійсно, якщо відомі інфінітезимальні генератори транзитивної групи, то можна виконати перетворення дифеоморфізму, яке залишить нерухомими m змінних та замінить на функціонально-незалежні інваріанти решту $n - m$ змінних. Але задачі пошуку інваріантів та заміни змінних у диференціальному операторі технічно досить складні, тому перевага надається розв'язанню алгебраїчної задачі класифікації підалгебр. Кількість змінних необхідна для реалізації алгебри Лі у транзитивному але імпримітивному випадку дорівнює корозмірності відповідної підалгебри Лі

$$m = \dim(\mathfrak{g}) - \dim(\mathfrak{h}).$$

Якщо підалгебра $\mathfrak{h}$ є ідеалом (їй відповідає нормальна підгрупа H), то спроєктована реалізація буде неточною, оскільки коефіцієнти векторних полів, що відповідають композиції елементів нормальної підгрупи і решти елементів групи будуть нульовими, а саме

$$\xi_l^k \equiv 0, \qquad l = m, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Нехай дія групи G — інтранзитивна, тоді вона розкладає многовид M на неперервну сім'ю q-вимірних многовидів

$$\Omega_1(x_1, \ldots, x_m) = c_1, \ \ldots, \ \Omega_{m-q}(x_1, \ldots, x_m) = c_{m-q},$$

які інваріантні відносно групових перетворень. При цьому вирази, що задають незалежні інваріанти групи, міститимуть q параметрів $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$, тобто інтранзитивна група G індукує q-параметричну підгрупу G_q що діє на інваріантних многовидах. Зокрема, підалгебра, що відповідатиме підгрупі ізотропії точки загального положення $x \in M$ буде параметризована параметрами $\mathfrak{h}^{p_1,\ldots,p_q}$.

Ейзенхартом [35] було показано, що для інтранзитивної дії групи інфінітезимальні коефіцієнти мають вигляд

$$\xi_{ik} = \eta_{ik}\big(x_1, \ldots, x_{m-q}, \psi_{m-q+1}(x_{m-q+1}, \ldots, x_n), \ldots, \psi_m(x_{m-q+1}, \ldots, x_n)\big),$$

де $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m - q$, а $\psi_{m-q+1}, \ldots, \psi_m$ — функції, що визначають безпараметричну групу перетворень для останніх q змінних

$$x'_j = \psi_j(x_{m-q+1}, \ldots, x_m), \qquad j = m - q + 1, \ldots, m.$$

Впорядкувавши базис $e_1, \ldots, e_n$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$, відповідно до підалгебри $\mathfrak{h}^{p_1,\ldots,p_q}$, ми можемо побудувати лівоінваріантні векторні поля та спроєктувати їх на координати $x_1, \ldots, x_{m-q}$. Проте, отримана реалізація буде містити змінні $p_1, \ldots, p_q$, які насправді є довільними функціями (у тому числі і константами) від змінних $x_{m-q+1}, \ldots, x_m$. Такі реалізації потребують подальшого дослідження, а саме: аналіз випадків коли ці функції є сталими, спрощення довільних функцій перетворенням дифеоморфізму (зокрема введення нових змінних замість цих функцій та заміна частини змінних на інваріанти), встановлення обмежень на довільні функції, для уникнення еквівалентних реалізацій всередині серій.

З викладеного вище, доходимо висновку, що алгебраїчний метод Широкова та проєкція можуть бути застосовані до кожної підалгебри $\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}$ (нееквівалентної відносно групи внутрішніх автоморфізмів $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$) і, таким чином, можна побудувати реалізацію $R(e_i) = \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}}(\xi_i)$.

Означення 1.32. Якщо група Лі G діє локально на многовиді M розшаровуючи його на орбіти та підгрупа ізотропії точки загального положення відповідає алгебрі Лі $\mathfrak{h}$, тоді проєкція лівоінваріантних векторних полів $R(e_i) = \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}}(\xi_i)$ називається *реалізацією, що що відповідає підалгебрі* $\mathfrak{h}$.

Зокрема, породжуючі реалізації можна розглядати як реалізації $R_{\mathfrak{h}_0}(\mathfrak{g})$, що відповідають невласній нульовій підалгебрі $\mathfrak{h}_0 = \langle 0 \rangle$.

Важливо зауважити, що для побудови $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-нееквівалентних реалізацій необхідно перевірити нееквівалентність отриманих $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$-нееквівалентних реалізацій відносно зовнішніх автоморфізмів.

Якщо реалізацію алгебри Лі задано, то для знаходження підалгебри, що їй відповідає, слід обчислити ядро лінійного перетворення (1.11) у початку координат.

Приклад 1.33. Розглянемо дві реалізації

$$R_1\colon e_1 = \partial_1, \quad e_2 = x_2\partial_1, \quad e_3 = x_1\partial_1 + 2x_2\partial_2,$$
$$R_2\colon e_1 = \partial_1, \quad e_2 = x_1\partial_1 - x_2\partial_2, \quad e_3 = \partial_2.$$

У точці $x = 0$ цим реалізаціям відповідають лінійні перетворення

$$R_1(x=0)\colon e_1 = \partial_1, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = 0,$$
$$R_2(x=0)\colon e_1 = \partial_1, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = \partial_2.$$

Таким чином, перша реалізація R_1 відповідає підалгебрі $\langle e_2, e_3\rangle$ а реалізація R_2 відповідає підалгебрі $\langle e_2\rangle$.

Нееквівалентні реалізації фіксованої алгебри Лі утворюють деревоподібну діаграму, на вершині якої знаходиться породжуюча реалізація, а реалізації, що відповідають максимальним підалгебрам розташовані на найнижчих рівнях діаграми. При цьому реалізація, що відповідає підалгебрі $\mathfrak{h}_1$ може бути отримана проєкцією реалізації, що відповідає підалгебрі $\mathfrak{h}_2$ за умови $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{h}_1$.

Щодо спрямлення векторних полів, то слід зауважити, що даний метод зводить до зсуву за змінною x_1 перший базисний елемент простору комплементарного до підалгебри. Якщо другий базисний елемент комутує з першим, то він буде представлений зсувом за змінною x_2 і т.д.

Розглянутий алгебраїчний метод побудови реалізацій породжує реалізації з *поліноміальними коефіцієнтами*, коли приєднані зображення базисних елементів алгебри — нільпотентні. Під час обчислень також було помічено, що найпростіші коефіцієнти мають ті реалізації, форма Кілінга для яких має найпростіший вигляд.

1.5. Контракції реалізацій алгебр Лі

Для дослідження граничних переходів між різними теоріями, моделями чи рівняннями, що інваріантні відносно певних алгебр Лі, важливо

не лише отримати контракцію, що пов'язує структурні сталі алгебр, а й побудувати відповідний зв'язок між операторами симетрій, тобто між реалізаціями цих алгебр чи їх зображеннями.

На жаль, пряме застосування матриці контракції до базисних елементів зображень або реалізацій та подальший перехід до границі неефективні, оскільки в результатом є неточні зображення та реалізації. Почнемо з кількох прикладів контракцій [108] і реалізацій [128] та спробуємо їх поєднати.

Розглянемо тривимірну абелеву алгебру $3A_1$, алгебру Гейзенберга $A_{3.1}$ з ненульовим комутаційним співвідношенням $[e_2, e_3] = e_1$, та тривимірну алгебру $A_{3.2}$ з ненульовими комутаторами $[e_1, e_3] = e_1$ та $[e_2, e_3] = e_1 + e_2$.

Кожна з цих алгебр має єдину породжуючу реалізацію:

$$
\begin{aligned}
&3A_1\colon\ R(e_1) = \partial_1,\ R(e_2) = \partial_2,\ R(e_3) = \partial_3;\\
&A_{3.1}\colon\ R(e_1) = \partial_1,\ R(e_2) = \partial_2,\ R(e_3) = x_2\partial_1 + \partial_3;\\
&A_{3.2}\colon\ R(e_1) = \partial_1,\ R(e_2) = \partial_2,\ R(e_3) = (x_1 + x_2)\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3.
\end{aligned}
$$

Для цих алгебр існує три нееквівалентні контракції: $A_{3.2} \to A_{3.1}$ з матрицею ІВ-контракції $U(\varepsilon) = \mathrm{diag}(\varepsilon, 1, \varepsilon)$, $A_{3.2} \to 3A_1$ та $A_{3.1} \to 3A_1$ з тією самою матрицею ІВ-контракції $U(\varepsilon) = \mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$.

Застосувавши ці матриці контракції до вищенаведених реалізацій, в усіх випадках отримаємо неточні реалізації

$$
\begin{aligned}
&A_{3.2}{\to}A_{3.1}\colon\ R^\varepsilon(e_1) = \varepsilon\partial_1{\to}0,\ R^\varepsilon(e_2) = 1\cdot\partial_2{\to}\partial_2,\ R^\varepsilon(e_3) = \varepsilon\partial_3{\to}0;\\
&A_{3.2}{\to}3A_1 \text{ та } A_{3.1}{\to}3A_1\colon\ R^\varepsilon(e_1){\to}0,\ R^\varepsilon(e_2){\to}0,\ R^\varepsilon(e_3){\to}0.
\end{aligned}
$$

Отриманий результат — передбачуваний і був зазначений у першій роботі Іньоню та Вігнера, що стосувалась контракцій зображень алгебр Лі. У випадку зображень проблему нульових матриць можна подолати додатковим перетворенням подібності, що залежить від параметра контракції, саме такий підхід було застосовано у роботі [28].

Якщо узагальнити цей підхід на випадок реалізацій алгебр Лі, то слід подіяти на реалізацію ε-залежними перетвореннями з групи $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, а та-

кож ε-залежними дифеоморфізмами многовиду M, але це призводить до громіздких та нерозв'язних обчислень.

Інший підхід до контракції реалізацій було запропоновано Іньоню та Вігнером та успішно застосовано у роботах [65] та [140], а саме, було застосовано ε-залежне перетворення відповідної групи Лі. Суттєвим недоліком даного методу є те, що для побудови параметризованого перетворення, результат контракції має бути попередньо відомим.

Для контракції реалізацій пропонуємо метод, який полягає у побудові параметризованої реалізації початкової алгебри Лі, виходячи зі структурних сталих, що вже містять параметр контракції та збігаються до структурних сталих результуючої алгебри Лі.

Нехай базис векторного простору зафіксовано $\{e_1, \ldots, e_n\}$ і алгебри Лі $\mathfrak{g} = (V, [\cdot, \cdot])$ на ньому визначаються своїми тензорами структурних сталих $(c_{ij}^k) \in \mathbb{R}^{n^3}$ (або $(c_{ij}^k) \in \mathbb{C}^{n^3}$), де $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$.

Нехай U_ε — це матриця контракції, тоді структурні сталі параметризованих алгебр Лі $\mathfrak{g}_\varepsilon$ обчислюються за формулою

$$c_{\varepsilon,i'j'}^{k'} := (U_\varepsilon)_{i'}^{i} (U_\varepsilon)_{j'}^{j} ({U_\varepsilon}^{-1})_{k}^{k'} c_{ij}^{k}. \tag{1.13}$$

При цьому контракція алгебри $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_\varepsilon \to \mathfrak{g}_0$ еквівалентна збіжності структурних сталих $\forall\ i',\ j'$ та k'

$$c_{0,i'j'}^{k'} := \lim_{\varepsilon \to +0} c_{\varepsilon,i'j'}^{k'} = \lim_{\varepsilon \to +0} (U_\varepsilon)_{i'}^{i} (U_\varepsilon)_{j'}^{j} ({U_\varepsilon}^{-1})_{k}^{k'} c_{ij}^{k}.$$

Оскільки породжуючі реалізації алгебр Лі співпадають з лівоінваріантними векторними полями та можуть бути відновлені з дуальних диференціальних 1-форм, які в свою чергу конструюються з приєднаних зображень (структурних сталих), то маючи параметризовані структурні сталі можна побудувати параметризовані реалізації, що збігатимуться до реалізації алгебри $\mathfrak{g}_0$. Алгоритм побудови параметризованої реалізації, що контрактуватиме до реалізації результуючої алгебри контракції складається з трьох основних кроків:

1. Будуємо параметризовані структурні сталі $c^{k'}_{\varepsilon,i'j'}$, використовуючи матрицю контракції U_ε (яка реалізує потрібну нам контракцію), вихідні структурні сталі c^k_{ij} та формулу (1.13).

2. Використовуючи сталі $c^{k'}_{\varepsilon,i'j'}$, обчислюємо ε-залежні приєднані дії $\mathrm{ad}^\varepsilon e_i$, експоненти $\exp(-x_i \mathrm{ad}^\varepsilon e_i)$ та диференціальні 1-форми $\omega^\varepsilon(x)$.

3. Щоб отримати векторні поля $\xi^\varepsilon(x) = (\omega^\varepsilon(x))^{-1}$, які є шуканими параметризованими реалізаціями, знаходимо перетворення обернене до диференціальної 1-форми.

Застосувавши запропонований метод (кроки 1–3) до вищенаведених алгебр $3A_1$, $A_{3.1}$ та $A_{3.2}$, ми отримаємо добре визначені точні реалізації:

$A_{3.1} \xrightarrow{\mathrm{diag}(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon)} 3A_1$, звідси

$R^\varepsilon(e_1){=}\partial_1{\to}\partial_1,\ R^\varepsilon(e_2){=}\partial_2{\to}\partial_2,\ R^\varepsilon(e_3){=}\varepsilon x_2\partial_1{+}\partial_3{\to}\partial_3,$

$A_{3.2} \xrightarrow{\mathrm{diag}(\varepsilon,1,\varepsilon)} A_{3.1}$, звідси

$R^\varepsilon(e_1){=}\partial_1{\to}\partial_1,\ R^\varepsilon(e_2){=}\partial_2{\to}\partial_2,$

$R^\varepsilon(e_3){=}(\varepsilon x_1{+}x_2)\partial_1{+}\varepsilon x_2\partial_2{+}\partial_3{\to}x_2\partial_1{+}\partial_3,$

$A_{3.2} \xrightarrow{\mathrm{diag}(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon)} 3A_1$, звідси

$R^\varepsilon(e_1){=}\partial_1{\to}\partial_1,\ R^\varepsilon(e_2){=}\partial_2{\to}\partial_2,\ R^\varepsilon(e_3){=}(\varepsilon x_1{+}\varepsilon x_2)\partial_1{+}\varepsilon x_2\partial_2{+}\partial_3{\to}\partial_3.$

Зауважимо, що запропонований метод контракції реалізацій стосується породжуючих реалізацій. Для побудови контракції довільної реалізації потрібно встановити відповідну їй підалгебру (знайти ядро лінійного перетворення у початковій точці), належним чином впорядкувати базис для побудови диференціальної 1-форми та виконати проєкцію отриманої реалізації на підпростір, що комплементарний до підалгебри.

Для контракції зображень алгебр Лі може бути застосована аналогічна процедура, тобто матричне зображення слід будувати виходячи з параметризованого тензора структурних сталих, що задається формулою (1.13). Для зображень, порядок яких співпадає з розмірністю алгебри Лі, існує інший спосіб побудови контракцій. Він полягає у зв'язку

зображень та реалізацій з лінійними коефіцієнтами, розглянемо його детальніше.

Нехай n-вимірну алгебру Лі $\mathfrak{g}$ реалізовано векторними полями вигляду $e_i = a^l_{ik} x_l \partial_k$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $a^l_{ik} \in \mathbb{R}$ (або $a^l_{ik} \in \mathbb{C}$), а $k, l = 1, 2, \ldots, m$.

Розглянемо набір матриць

$$A_i = \begin{pmatrix} a^1_{i1} & a^1_{i2} & \cdots & a^1_{im} \\ a^2_{i1} & a^2_{i2} & \cdots & a^2_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m_{i1} & a^m_{i2} & \cdots & a^m_{im} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \vdots \\ \partial_m \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad X = (x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Тепер базисні елементи реалізації можна переписати у вигляді $e_i = X A_i D$. З того, що $[e_i, e_j] = c^k_{ij} e_i$, випливає, що матриці A_i задовольняють ті самі комутаційні співвідношення $[A_i, A_j] = c^k_{ij} A_i$. Таким чином, $m \times m$ матриці A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ утворюють m-вимірне зображення алгебри $\mathfrak{g}$. Отже, якщо існує взаємно-однозначна відповідність між зображенням та лінійною реалізацією, то контракція реалізації є одночасно і контракцією зображення. Важливо зауважити, що, у загальному випадку, розглянутий метод побудови реалізацій, призводить до нелінійних реалізацій, тому додатково необхідно розв'язати задачу зведення лінійної реалізації до канонічного вигляду, що відповідає проєкції векторних полів за підалгеброю.

1.6. Реалізації та деформації алгебри Галілея

Принципи інваріантності дозволяють нам використовувати динамічні закони, що задовольняються фізичними системами, а також допомагають встановлювати можливу форму систем і знаходити певні закономірності або обмежувати довільність систем. Однією з фундаментальних симетрій у фізиці є галілеївська інваріантність, що лежить в основі принципу відносності Галілея. Це мотивує дослідження груп та алгебр Галілея.

Існує кілька типів алгебр Галілея, означимо основні з них та їх базисні оператори. Щоразу будемо наводити лише ненульові комутаційні співвід-

ношення. Нехай $i, j, k, l = 1, 2, \ldots, n$. Почнемо з найбільш загального випадку. *Повна алгебра Галілея* $\mathrm{AG}_4(n)$ $(n+1)$-вимірного ньютонівського простору–часу породжується базисними елементами:

P_i – оператори просторових зсувів;

T – оператор часового зсуву;

J_{ij} – оператори поворотів, $\quad i < j$;

G_i – оператори чисто галілеївських перетворень;

D – оператор дилатації;

S – оператор проєкції;

Z – оператор масштабних перетворень просторових змінних;

M – оператор маси.

Ці базисні елементи пов'язані комутаційними співвідношеннями:

$$[J_{ij}, J_{kl}] = \delta_{il} J_{jk} + \delta_{jk} J_{il} - \delta_{ik} J_{jl} - \delta_{jl} J_{ik}, \tag{1.14}$$

$$[P_i, J_{jk}] = \delta_{ij} P_k - \delta_{ik} P_j, \tag{1.15}$$

$$[T, G_i] = -P_i; \tag{1.16}$$

$$[G_i, J_{jk}] = \delta_{ij} G_k - \delta_{ik} G_j, \tag{1.17}$$

$$[D, G_i] = G_i, \tag{1.18}$$

$$[D, P_i] = -P_i, \tag{1.19}$$

$$[D, T] = -2T, \tag{1.20}$$

$$[S, P_i] = G_i, \tag{1.21}$$

$$[D, S] = 2S, \tag{1.22}$$

$$[T, S] = D, \tag{1.23}$$

$$[Z, G_i] = -G_i, \tag{1.24}$$

$$[Z, P_i] = -P_i, \tag{1.25}$$

$$[G_i, P_j] = \delta_{ij} M, \tag{1.26}$$

$$[Z, M] = -2M. \tag{1.27}$$

Повна алгебра Галілея містить кілька підалгебр та редукцій важливих для фізики, причому всі вони зазвичай називаються алгеброю Галілея. Наведемо їх точні означення у таблиці 1.1, позначимо розмірності алгебр dim, а розмірність редукованої класичної алгебри Галілея

$$\dim(\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_1(n)) = d := \tfrac{1}{2}n(n-1)+2n+1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Алгебра Галілея	Позначення	Базисні елементи	Комутаційні співвідношення	dim
Класична	$\mathrm{AG}_1(n)$	$\langle P_i, T, J_{ij}, G_i, M\rangle$	(1.14)–(1.17), (1.26)	d+1
Розширена	$\mathrm{AG}_2(n)$	$\langle P_i, T, J_{ij}, G_i, D, M\rangle$	(1.14)–(1.20), (1.26)	d+2
Спеціальна	$\mathrm{AG}_3(n)$	$\langle P_i, T, J_{ij}, G_i, D, S, M\rangle$	(1.14)–(1.23), (1.26)	d+3
Повна	$\mathrm{AG}_4(n)$	$\langle P_i, T, J_{ij}, G_i, D, S, Z, M\rangle$	(1.14)–(1.27)	d+4
Редукована класична	$\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_1(n)$	$\langle P_i, T, J_{ij}, G_i\rangle$	(1.14)–(1.17)	d
Редукована розширена	$\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_2(n)$	$\langle P_i, T, J_{ij}, G_i, D\rangle$	(1.14)–(1.20)	d+1
Редукована спеціальна	$\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_3(n)$	$\langle P_i, T, J_{ij}, G_i, D, S\rangle$	(1.14)–(1.23)	d+2
Редукована повна	$\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_4(n)$	$\langle P_i, T, J_{ij}, G_i, D, S, Z\rangle$	(1.14)–(1.25)	d+3

Табл. 1.1. Основні типи алгебр Галілея.

Проаналізувавши таблицю, можна зробити висновок, що алгебри Лі, які відповідають випадку $n = 1$ є низькорозмірними алгебрами Галілея:

- тривимірна алгебра Лі редукованої класичної групи Галілея одновимірного простору $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_1(1)$;
- чотиривимірна алгебра Лі класичної групи Галілея $AG_1(1)$ з оператором маси M;
- чотиривимірна алгебра Лі редукованої розширеної групи Галілея одновимірного простору $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_2(1)$.

Редукована класична алгебра Галілея $\mathbf{A\bar{G}_1(1)}$. Редукована класична алгебра Галілея $A\bar{G}_1(1)$ одновимірного простору породжується операторами P, G та T з єдиним ненульовим комутатором $[G,T]=P$. Алгебра $A\bar{G}_1(1)$ співпадає з тривимірною алгеброю Лі $A_{3.1}$: $[e_2,e_3]=e_1$ (у дисертації нумерація низькорозмірних алгебр відповідає класифікації Мубаракзянова [3]).

Доведено [128], що всі точні реалізації алгебри $A_{3.1}$ вичерпуються переліком

$$
\begin{aligned}
&e_1=\partial_1, \quad e_2=\partial_2, \quad e_3=x_2\partial_1+\partial_3;\\
&e_1=\partial_1, \quad e_2=\partial_2, \quad e_3=x_2\partial_1+x_3\partial_2;\\
&e_1=\partial_1, \quad e_2=\partial_2, \quad e_3=x_2\partial_1.
\end{aligned}
$$

Повна група автоморфізмів $\mathrm{Aut}(A\bar{G}_1(1))$ породжується невиродженими матрицями

$$
\begin{pmatrix}
\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{32} & 0 & 0\\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\
\alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}
\end{pmatrix},
$$

де $\alpha_{ij}\in\mathbb{R}$, та $\alpha_{22}\alpha_{33}\neq\alpha_{23}\alpha_{32}$. При побудові матриць автоморфізму вважаємо, що перетворення автоморфізму діють на базисні елементи з лівого боку, а порядок базисних елементів співпадає з порядком наведеним при означенні алгебри. Перелік підалгебр $A\bar{G}_1(1)$ нееквівалентних відносно внутрішніх автоморфізмів

$$
\begin{aligned}
&\langle 0\rangle,\ \langle P\rangle,\ \langle G\rangle,\ \langle T\rangle,\ \langle T+\alpha G\rangle,\ \langle P,\,G\rangle,\\
&\langle P,\,T\rangle,\ \langle P,\,T+\alpha G\rangle,\ \langle P,\,G,\,T\rangle\ (\alpha>0).
\end{aligned}
$$

Зовнішній автоморфізм $\tilde{G}=T$, $\tilde{T}=G$, $\tilde{P}=-P$, з матрицею $\left(\begin{smallmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{smallmatrix}\right)$, зв'язує еквівалентні алгебри у парах $(\langle T\rangle,\ \langle G\rangle)$ та $(\langle P,\,T\rangle,\ \langle P,\,G\rangle)$.

Решта підалгебр нееквівалентні відносно повної групи автоморфізмів, нумеруватимемо підалгебри $\mathfrak{h}_{k.p}$ за їх розмірністю k та, при потребі, їх

Комплементарний базис	Реалізація
$\{P,T,G\}$	$R(\mathfrak{h}_0)\colon\ P=\partial_1,\ G=-x_2\partial_1+\partial_3,\ T=\partial_2$
$\{G,T\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.1}}\colon\ P=0,\ G=\partial_1,\ T=\partial_2$
$\{P,G\}$	$R_{\mathfrak{h}^{\alpha}_{1.2}}\colon\ P=\partial_1,\ G=\partial_2,\ T=x_2\partial_1-\alpha\partial_2$
	$R_{\mathfrak{h}^{x_3}_{1.2}}\colon\ P=\partial_1,\ G=\partial_2,\ T=x_2\partial_1-x_3\partial_2$
$\{G\}$	$R_{\mathfrak{h}^{\alpha}_{2}}\colon\ P=0,\ G=\partial_1,\ T=-\alpha\partial_1$
	$R_{\mathfrak{h}^{x_2}_{2}}\colon\ P=0,\ G=\partial_1,\ T=-x_2\partial_1$

Табл. 1.2. Реалізації редукованої класичної алгебри Галілея $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_1(1)$.

порядковим номером p у переліку. У деяких випадках підалгебри буде об'єднано у одну, розширивши значення параметра, наприклад, $\langle T\rangle$ та $\langle T+\alpha G\rangle$, $\alpha>0$ розглядаються як $\langle T+\alpha G\rangle$, $\alpha\geq 0$. Отже, власні неекквівалентні підалгебри $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_1(1)$ наступні

$$\mathfrak{h}_{1.1}=\langle P\rangle;\quad \mathfrak{h}^{\alpha}_{1.2}=\langle T+\alpha G\rangle\ (\alpha\geq 0);\quad \mathfrak{h}^{\alpha}_{2}=\langle P,\,T+\alpha G\rangle\ (\alpha\geq 0).$$

Ідеалами алгебри $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_1(1)$ є $\langle P\rangle$ та $\langle P,\,pG+qT\rangle$, $p,q\in\mathbb{R}$, тому підалгебрам $\mathfrak{h}_{1.1}$, $\mathfrak{h}_2$ та $\mathfrak{h}_3$ відповідають неточні реалізації, які є новими і не були побудовані у [128].

У таблиці 1.2 наведено реалізації $R_{\mathfrak{h}_{k.p}}$ алгебри $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_1(1)$, що відповідають підалгебрам $\mathfrak{h}_{k.p}$, поруч з кожною з реалізацій наведено базис векторного простору, комплементарного до $\mathfrak{h}_{k.p}$, який було використано при побудові саме цієї реалізації, такі самі позначення мають місце для решти алгебр та їх реалізацій.

Реалізації $R_{\mathfrak{h}_0}$, $R_{\mathfrak{h}^0_{1.2}}$ та $R_{\mathfrak{h}^{x_3}_{1.2}}$ алгебри $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_1(1)$ співпадають з реалізаціями отриманими у [128], решта реалізацій — нові.

Для довільного $\alpha>0$ реалізація $R_{\mathfrak{h}^{\alpha}_{1.2}}$ зводиться до $R_{\mathfrak{h}^0_{1.2}}$ перетворенням автоморфізму $\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\alpha&1\end{smallmatrix}\right)$.

Класична алгебра Галілея $\mathbf{AG_1(1)}$. Класична алгебра Галілея $\mathrm{AG}_1(1)$ породжується чотирма операторами P, G, T та M, що задовольняють ненульові комутаційні співвідношення $[G,T]=P$ і

$[G, P] = M$. $\mathrm{AG}_1(1)$ ізоморфна алгебрі $A_{4.1}$ з комутаційними співвідношеннями $[e_2, e_4] = e_1$ і $[e_3, e_4] = e_2$, ізоморфізм задається рівностями

$$P = e_2, \quad T = e_3, \quad G = -e_4, \quad M = e_1.$$

Нееквівалентні точні реалізації алгебри $A_{4.1}$:

1) $e_1 = \partial_1$, $e_2 = \partial_2$, $e_3 = \partial_3$, $e_4 = x_2\partial_1 + x_3\partial_2 + \partial_4$,
2) $e_1 = \partial_1$, $e_2 = \partial_2$, $e_3 = \partial_3$, $e_4 = x_2\partial_1 + x_3\partial_2 + x_4\partial_3$,
3) $e_1 = \partial_1$, $e_2 = \partial_2$, $e_3 = \partial_3$, $e_4 = x_2\partial_1 + x_3\partial_2$,
4) $e_1 = \partial_1$, $e_2 = \partial_2$, $e_3 = x_3\partial_1 + x_4\partial_2$, $e_4 = x_2\partial_1 + x_4\partial_3 - \partial_4$,
5) $e_1 = \partial_1$, $e_2 = \partial_2$, $e_3 = -\frac{1}{2}x_3^2\partial_1 + x_3\partial_2$, $e_4 = x_2\partial_1 - \partial_3$,
6) $e_1 = \partial_1$, $e_2 = x_2\partial_1$, $e_3 = \partial_3$, $e_4 = x_2x_3\partial_1 - \partial_2$,
7) $e_1 = \partial_1$, $e_2 = x_2\partial_1$, $e_3 = x_3\partial_1$, $e_4 = -\partial_2 - x_2\partial_3$,
8) $e_1 = \partial_1$, $e_2 = x_2\partial_1$, $e_3 = \frac{1}{2}x_2^2\partial_1$, $e_4 = -\partial_2$.

Повна група автоморфізмів алгебри $\mathrm{AG}_1(1) = \langle M,\, P,\, T,\, G\rangle$ породжується невиродженими матрицями

$$\begin{pmatrix} \alpha_{33}\alpha_{44}^2 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{32}\alpha_{44} & \alpha_{33}\alpha_{44} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}, \quad \text{де } \alpha_{ij} \in \mathbb{R}, \text{ та } \alpha_{33}\alpha_{44} \neq 0.$$

Використовуючи класифікацію підалгебр [7] та автоморфізми $\mathrm{AG}_1(1)$ отримаємо перелік нееквівалентних підалгебр

$\mathfrak{h}_{1.1} = \langle P\rangle$, $\mathfrak{h}_{2.1} = \langle M,\, P\rangle$,
$\mathfrak{h}_{1.2}^{\alpha} = \langle \alpha T + G\rangle$ $(\alpha \geq 0)$, $\mathfrak{h}_{2.2} = \langle M,\, G\rangle$,
$\mathfrak{h}_{1.3}^{\beta} = \langle T + \beta M\rangle$ $(\beta \in \mathbb{R})$, $\mathfrak{h}_{2.3}^{\alpha} = \langle M,\, T + \alpha G\rangle$ $(\alpha \geq 0)$,
$\mathfrak{h}_{1.4} = \langle M\rangle$, $\mathfrak{h}_{2.4}^{\beta} = \langle P,\, T + \beta M\rangle$ $(\beta \in \mathbb{R})$,
$\mathfrak{h}_{3.1} = \langle M,\, P,\, G\rangle$,
$\mathfrak{h}_{3.2}^{\alpha} = \langle M,\, P,\, T + \alpha G\rangle$ $(\alpha \geq 0)$.

Ідеалами алгебри $\mathrm{AG}_1(1)$ є $\langle M\rangle$, $\langle M,\,P\rangle$, $\langle M,\,P,\,T\rangle$ та $\langle M,\,P,\,T+\alpha G\rangle$, тому неточні реалізації відповідають підалгебрам $\mathfrak{h}_{1.4}$, $\mathfrak{h}_{2.1}$, $\mathfrak{h}_{2.2}$, $\mathfrak{h}^{\alpha}_{2.3}$, $\mathfrak{h}_{3.1}$, $\mathfrak{h}^{\alpha}_{3.2}$. Отримані реалізації алгебри $\mathrm{AG}_1(1)$ наведено у таблиці 1.3.

Комплементарний базис	Реалізація
$\{M,\,P,\,T,\,G\}$	$R_{\mathfrak{h}_0}\colon\ M=\partial_1,\ P=-\partial_2,\ T=\partial_3,\ G=x_2\partial_1+x_3\partial_2+\partial_4$
$\{M,\,T,\,G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.1}}\colon\ M=\partial_1,\ P=x_3\partial_1,\ T=\partial_2,\ G=-x_2x_3\partial_1+\partial_3$
$\{M,\,P,\,T\}$	$R_{\mathfrak{h}^{\alpha}_{1.2}}\colon\ M=\partial_1,\ P=\partial_2,\ T=\partial_3,\ G=-x_2\partial_1-x_3\partial_2-\alpha\partial_3$
	$R_{\mathfrak{h}^{x_4}_{1.2}}\colon\ M=\partial_1,\ P=\partial_2,\ T=\partial_3,\ G=-x_2\partial_1-x_3\partial_2-x_4\partial_3$
$\{M,\,P,\,G\}$	$R_{\mathfrak{h}^{\beta}_{1.3}}\colon\ M=\partial_1,\ P=-\partial_2,\ T=-\left(\frac{1}{2}x_3^2+\beta\right)\partial_1-x_3\partial_2,\ G=x_2\partial_1+\partial_3$
	$R_{\mathfrak{h}^{x_4}_{1.3}}\colon\ M=\partial_1,\ P=-\partial_2,\ T=-\left(\frac{1}{2}x_3^2+x_4\right)\partial_1-x_3\partial_2,\ G=x_2\partial_1+\partial_3$
$\{P,\,T,\,G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.4}}\colon\ M=0,\ P=-\partial_1,\ T=\partial_2,\ G=x_2\partial_1+\partial_3$
$\{T,\,G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.1}}\colon\ M=0,\ P=0,\ T=\partial_1,\ G=\partial_2$
$\{P,\,T\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.2}}\colon\ M=0,\ P=-\partial_1,\ T=\partial_2,\ G=x_2\partial_1$
$\{P,\,G\}$	$R_{\mathfrak{h}^{\alpha}_{2.3}}\colon\ M=0,\ P=-\partial_1,\ T=-x_2\partial_1-\alpha\partial_2,\ G=\partial_2$
	$R_{\mathfrak{h}^{x_3}_{2.3}}\colon\ M=0,\ P=-\partial_1,\ T=-x_2\partial_1-x_3\partial_2,\ G=\partial_2$
$\{M,\,G\}$	$R_{\mathfrak{h}^{\beta}_{2.4}}\colon\ M=\partial_1,\ P=x_2\partial_1,\ T=\left(\frac{1}{2}x_2^2-\beta\right)\partial_1,\ G=\partial_2$
	$R_{\mathfrak{h}^{x_3}_{2.4}}\colon\ M=\partial_1,\ P=x_2\partial_1,\ T=\left(\frac{1}{2}x_2^2-x_3\right)\partial_1,\ G=\partial_2$
$\{T\}$	$R_{\mathfrak{h}_{3.1}}\colon\ M=0,\ P=0,\ T=\partial_1,\ G=0$
$\{G\}$	$R_{\mathfrak{h}^{\alpha}_{3.2}}\colon\ M=0,\ P=0,\ T=-\alpha\partial_1,\ G=\partial_1$
	$R_{\mathfrak{h}^{x_2}_{3.2}}\colon\ M=0,\ P=0,\ T=-x_2\partial_1,\ G=\partial_1$

Табл. 1.3. Реалізації класичної алгебри Галілея $\mathrm{AG}_1(1)$.

Можна встановити еквівалентність реалізацій алгебри $A_{4.1}$ та точних реалізацій алгебри $\mathrm{AG}_1(1)$: 1) $\sim R_{\mathfrak{h}_0}$, 2) $\sim R_{\mathfrak{h}^{x_4}_{1.2}}$, 3) $\sim R_{\mathfrak{h}^{0}_{1.2}}$, 4) $\sim R_{\mathfrak{h}^{x_4}_{1.3}}$, 5) $\sim R_{\mathfrak{h}^{0}_{1.3}}$, 6) $\sim R_{\mathfrak{h}_{1.1}}$, 7) $\sim R_{\mathfrak{h}^{x_3}_{2.4}}$, 8) $\sim R_{\mathfrak{h}^{0}_{2.4}}$.

Ці відповідності встановлюються наступними перетвореннями. Автоморфізм $\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&\alpha&1\end{pmatrix}$ зводить параметризовану серію реалізацій $R_{\mathfrak{h}^{\alpha}_{1.2}}$ до випадку

$$R\big(\mathfrak{h}^{0}_{1.2}\big)\colon\ M=\partial_1,\quad P=\partial_2,\quad T=\partial_3,\quad G=-x_2\partial_1-x_3\partial_2.$$

Інша параметризована серія реалізацій $R(\mathfrak{h}_{1.3}^{\beta\neq0})$ зводиться до

$$R\big(\mathfrak{h}_{1.3}^{0}\big)\colon\ M=\partial_1,\quad P=\partial_2,\quad T=-\tfrac12x_3^2\partial_1+x_3\partial_2,\quad G=-x_2\partial_1-\partial_3,$$

за допомогою заміни змінних $-x_2\mapsto x_2$ та перетворення автоморфізму $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\ \beta&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. Цей самий автоморфізм зводить серію $R(\mathfrak{h}_{2.4}^{\beta})$ до

$$R\big(\mathfrak{h}_{2.4}^{0}\big)\colon\ M=\partial_1,\quad P=x_2\partial_1,\quad T=\tfrac12x_2^2\partial_1,\quad G=\partial_2.$$

Невироджена заміна змінних $\frac12x_2-x_3\mapsto x_3$ перетворює реалізацію $R_{\mathfrak{h}_{2.4}^{x_3}}$ до вигляду

$$M=\partial_1,\quad P=x_2\partial_1,\quad T=x_3\partial_1,\quad G=\partial_2+x_2\partial_3.$$

А перетворення $x_2\mapsto-x_2$, $-(\frac12x_3^2+x_4)\mapsto x_3$ та $x_3\mapsto x_4$ зводять реалізацію $R_{\mathfrak{h}_{1.3}^{x_4}}$ до наступних операторів

$$M=\partial_1,\quad P=x_2\partial_1,\quad T=x_3\partial_1+x_4\partial_2,\quad G=-x_2\partial_1+x_4\partial_3+\partial_4.$$

Редукована розширена алгебра Галілея $\mathbf{A\bar G_2(1)}$. Редукована розширена алгебра Галілея $\mathrm{A\bar G}_2(1)$ одновимірного простору породжується чотирма операторами P, G, D та T, що задовольняють ненульові комутаційні співвідношення $[G,T]=P$, $[D,G]=G$, $[P,D]=P$ і $[T,D]=2T$.

$\mathrm{A\bar G}_2(1)$ ізоморфна алгебрі $A_{4.8}^{b=-1/2}$ з комутаційними співвідношеннями $[e_2,e_3]=e_1$, $[e_1,e_4]=\frac12e_1$, $[e_2,e_4]=e_2$ і $[e_3,e_4]=-\frac12e_3$, де ізоморфізм задається рівностями

$$P=-e_1,\quad T=e_2,\quad G=e_3,\quad D=2e_4.$$

Повна група автоморфізмів алгебри $\mathrm{A\bar G}_2(1)=\langle P,\,T,\,G,\,D\rangle$ породжується невиродженими матрицями

$$\begin{pmatrix}\alpha_{22}\alpha_{33}&0&0&0\\-\alpha_{22}\alpha_{43}&\alpha_{22}&0&0\\-\frac12\alpha_{42}\alpha_{33}&0&\alpha_{33}&0\\\alpha_{41}&\alpha_{42}&\alpha_{43}&1\end{pmatrix},\quad \text{де } \alpha_{ij}\in\mathbb{R},\ \text{та } \alpha_{22}\alpha_{33}\neq0.$$

Використовуючи класифікацію підалгебр [7] та автоморфізми $\mathrm{Aut}(\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_2(1))$ отримаємо перелік нееквівалентних підалгебр

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{h}_{1.1} = \langle P\rangle, && \mathfrak{h}_{2.1} = \langle P,\, T\rangle, && \mathfrak{h}_{3.1} = \langle P,\, T,\, G\rangle,\\
&\mathfrak{h}_{1.2} = \langle T\rangle, && \mathfrak{h}_{2.2} = \langle P,\, G\rangle, && \mathfrak{h}_{3.2} = \langle P,\, T,\, D\rangle,\\
&\mathfrak{h}_{1.3} = \langle G\rangle, && \mathfrak{h}_{2.3} = \langle P,\, D\rangle, && \mathfrak{h}_{3.3} = \langle P,\, G,\, D\rangle.\\
&\mathfrak{h}_{1.4} = \langle D\rangle, && \mathfrak{h}_{2.4} = \langle P,\, T+G\rangle,\\
&\mathfrak{h}_{1.5} = \langle T+G\rangle, && \mathfrak{h}_{2.5} = \langle T,\, D\rangle,\\
& && \mathfrak{h}_{2.6} = \langle G,\, D\rangle.
\end{aligned}$$

Ідеалами алгебри $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_2(1)$ є підалгебри $\langle P\rangle$, $\langle P,\, T\rangle$, $\langle P,\, G\rangle$ та $\langle P,\, T,\, G\rangle$, тому неточні реалізації відповідають підалгебрам $\mathfrak{h}_{1.1}$, $\mathfrak{h}_{2.1}$, $\mathfrak{h}_{2.2}$, $\mathfrak{h}_{2.3}$, $\mathfrak{h}_{2.4}$, $\mathfrak{h}_{3.1}$, $\mathfrak{h}_{3.2}$ та $\mathfrak{h}_{3.3}$. Повний перелік реалізацій зібрано у таблиці 1.4.

Комплементарний базис	Реалізація
$\{P,\, T,\, G,\, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_0}\colon\ P=\partial_1,\ T=\partial_2,\ G=-x_2\partial_1+\partial_3,\ D=x_1\partial_1+2x_2\partial_2-x_3\partial_3+\partial_4$
$\{T,\, G,\, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.1}}\colon\ P=0,\ T=\partial_1,\ G=\partial_2,\ D=2x_1\partial_1-x_2\partial_2+\partial_3$
$\{P,\, G,\, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.2}}\colon\ P=\partial_1,\ T=x_2\partial_1,\ G=\partial_2,\ D=x_1\partial_1-x_2\partial_2+\partial_3$
$\{P,\, T,\, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.3}}\colon\ P=\partial_1,\ T=\partial_2,\ G=-x_2\partial_1,\ D=x_1\partial_1+2x_2\partial_2+\partial_3$
$\{P,\, T,\, G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.4}}\colon\ P=\partial_1,\ T=\partial_2,\ G=-x_2\partial_1+\partial_3,\ D=x_1\partial_1+2x_2\partial_2-x_3\partial_3$
$\{P,\, T,\, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.5}}\colon\ P=\partial_1,\ T=\partial_2,\ G=-x_2\partial_1-e^{3x_3}\partial_2,\ D=x_1\partial_1+2x_2\partial_2+\partial_3$
$\{G,\, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.1}}\colon\ P=0,\ T=0,\ G=\partial_1,\ D=-x_1\partial_1+\partial_2$
$\{T,\, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.2}}\colon\ P=0,\ T=\partial_1,\ G=0,\ D=2x_1\partial_1+\partial_2$
$\{T,\, G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.3}}\colon\ P=0,\ T=\partial_1,\ G=\partial_2,\ D=2x_1\partial_1-x_2\partial_2$
$\{T,\, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.4}}\colon\ P=0,\ T=\partial_1,\ G=-e^{3x_2}\partial_1,\ D=2x_1\partial_1+\partial_2$
$\{P,\, G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.5}}\colon\ P=\partial_1,\ T=x_2\partial_1,\ G=\partial_2,\ D=x_1\partial_1-x_2\partial_2$
$\{P,\, T\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.6}}\colon\ P=\partial_1,\ T=\partial_2,\ G=-x_2\partial_1,\ D=x_1\partial_1+2x_2\partial_2$
$\{D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{3.1}}\colon\ P=0,\ T=0,\ G=0,\ D=\partial_1$
$\{G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{3.2}}\colon\ P=0,\ T=0,\ G=\partial_1,\ D=-x_1\partial_1$
$\{T\}$	$R_{\mathfrak{h}_{3.3}}\colon\ P=0,\ T=\partial_1,\ G=0,\ D=2x_1\partial_1$

Табл. 1.4. Реалізації редукованої розширеної алгебри Галілея $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_2(1)$.

Для порівняння отриманих та відомих реалізацій наведемо нееквівалентні точні реалізації алгебри $A_{4.8}^{-1/2}$:

1) $e_1=\partial_1,\quad e_2=\partial_2,\quad e_3=x_2\partial_1+\partial_3,\qquad e_4=\frac{1}{2}x_1\partial_1+x_2\partial_2-\frac{1}{2}x_3\partial_3+\partial_4,$
2) $e_1=\partial_1,\quad e_2=\partial_2,\quad e_3=x_2\partial_1+\partial_3,\qquad e_4=\frac{1}{2}x_1\partial_1+x_2\partial_2-\frac{1}{2}x_3\partial_3,$
3) $e_1=\partial_1,\quad e_2=\partial_2,\quad e_3=x_2\partial_1+x_3\partial_2,\quad e_4=\frac{1}{2}x_1\partial_1+x_2\partial_2+\frac{3}{2}x_3\partial_3,$
4) $e_1=\partial_1,\quad e_2=\partial_2,\quad e_3=x_2\partial_1,\qquad e_4=\frac{1}{2}x_1\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3,$
5) $e_1=\partial_1,\quad e_2=\partial_2,\quad e_3=x_2\partial_1,\qquad e_4=\frac{1}{2}x_1\partial_1+x_2\partial_2,$
6) $e_1=\partial_1,\quad e_2=x_2\partial_1,\quad e_3=-\partial_2,\quad e_4=\frac{1}{2}x_1\partial_1-\frac{1}{2}x_2\partial_2+\partial_3\ ,$
7) $e_1=\partial_1,\quad e_2=x_2\partial_1,\quad e_3=-\partial_2,\quad e_4=\frac{1}{2}x_1\partial_1-\frac{1}{2}x_2\partial_2.$

Маємо наступну еквівалентність: 1) $\sim R_{\mathfrak{h}_0}$, 2) $\sim R_{\mathfrak{h}_{1.4}}$, 3) $\sim R_{\mathfrak{h}_{1.5}}$, 4) $\sim R_{\mathfrak{h}_{1.3}}$, 5) $\sim R_{\mathfrak{h}_{2.6}}$, 6) $\sim R_{\mathfrak{h}_{1.2}}$, 7) $\sim R_{\mathfrak{h}_{2.5}}$.

Заміна змінних $x_2\mapsto -x_2$, $-e^{3x_3}\mapsto x_3$ зводить реалізації $R_{\mathfrak{h}_{1.5}}\mapsto 3)$, для решти пар достатньо зміни знаків або масштабування змінних.

Розглянемо п'ятивимірні алгебри Галілея:

$$\mathrm{AG}_2(1)=\langle M,\ P,\ T,\ G,\ D\rangle$$

з комутаційними співвідношеннями

$$[T,G]=-P,\ [D,G]=G,\ [P,D]=P,$$
$$[T,D]=2T,\ [G,P]=M$$

та $\mathrm{A\bar{G}}_3(1)=\langle P,\ T,\ G,\ D,\ S\rangle$ з комутаційними співвідношеннями

$$[T,G]=-P,\ [D,G]=G,\ [P,D]=P,\ [T,D]=2T,$$
$$[S,P]=G,\ [T,S]=D,\ [D,S]=2S.$$

Розширена алгебра Галілея $\mathbf{AG_2(1)}$. Алгебра Галілея $\mathrm{AG}_2(1)=\langle M,\ P,\ T,\ G,\ D\rangle$ ізоморфна розв'язній алгебрі $\mathfrak{g}_{5.30}^{-2}$ за класифікацією Мубаракзянова [4]. Відповідна заміна базису задається перетвореннями

$$M=e_1,\quad P=-e_2,\quad T=e_3,\quad G=e_4,\quad D=-e_5. \tag{1.28}$$

Повна група автоморфізмів $\mathrm{Aut}(\mathrm{AG}_2(1))$ породжується невиродженими матрицями вигляду

$$\begin{pmatrix} \alpha_{22}\alpha_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{22}\alpha_{54} & \alpha_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_{22}\alpha_{54}^2}{2\alpha_{44}} & -\frac{\alpha_{22}\alpha_{54}}{\alpha_{44}} & \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{44}} & 0 & 0 \\ \alpha_{42}\alpha_{54} - \alpha_{44}\alpha_{52} & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{44} & 0 \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & -\frac{2\alpha_{42}}{\alpha_{44}} & \alpha_{54} & 1 \end{pmatrix},$$

де $\alpha_{22}, \alpha_{44} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, а решта параметрів — довільні.

Власні підалгебри $\mathrm{AG}_2(1)$, що нееквівалентні відносно групи внутрішніх автоморфізмів:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{h}_{1.1} = \langle M \rangle, && \mathfrak{h}_{2.1} = \langle M,\, D \rangle, && \mathfrak{h}_{3.1} = \langle M,\, T,\, D \rangle,\\
&\mathfrak{h}_{1.2} = \langle D \rangle, && \mathfrak{h}_{2.2} = \langle M,\, T \rangle, && \mathfrak{h}_{3.2} = \langle M,\, G,\, D \rangle,\\
&\mathfrak{h}_{1.3} = \langle T \rangle, && \mathfrak{h}_{2.3} = \langle M,\, G \rangle, && \mathfrak{h}_{3.3} = \langle M,\, P,\, D \rangle,\\
&\mathfrak{h}_{1.4} = \langle G \rangle, && \mathfrak{h}_{2.4} = \langle M,\, P \rangle, && \mathfrak{h}_{3.4} = \langle M,\, P,\, T \rangle,\\
&\mathfrak{h}_{1.5} = \langle P \rangle, && \mathfrak{h}_{2.5} = \langle T,\, D \rangle, && \mathfrak{h}_{3.5} = \langle M,\, P,\, G \rangle,\\
&\mathfrak{h}_{1.6} = \langle M + T \rangle, && \mathfrak{h}_{2.6} = \langle G,\, D \rangle, && \mathfrak{h}_{3.6} = \langle P,\, T,\, D \rangle,\\
&\mathfrak{h}_{1.7} = \langle G + T \rangle, && \mathfrak{h}_{2.7} = \langle P,\, D \rangle, && \mathfrak{h}_{3.7} = \langle M,\, P,\, G + T \rangle,\\
&\mathfrak{h}_{1.8} = \langle D + \alpha M \rangle, && \mathfrak{h}_{2.8} = \langle P,\, T \rangle, && \mathfrak{h}_{3.8} = \langle P,\, T,\, D + \alpha M \rangle;\\
&\mathfrak{h}_{1.9} = \langle T - M \rangle, && \mathfrak{h}_{2.9} = \langle P,\, M + T \rangle, && \mathfrak{h}_{4.1} = \langle M,\, P,\, T,\, D \rangle,\\
& && \mathfrak{h}_{2.10} = \langle M,\, G + T \rangle, && \mathfrak{h}_{4.2} = \langle M,\, P,\, G,\, D \rangle,\\
& && \mathfrak{h}_{2.11} = \langle T,\, D + \alpha M \rangle, && \mathfrak{h}_{4.3} = \langle M,\, P,\, T,\, G \rangle,\\
& && \mathfrak{h}_{2.12} = \langle G,\, D + \alpha M \rangle, &&\\
& && \mathfrak{h}_{2.13} = \langle P,\, D + \alpha M \rangle, &&\\
& && \mathfrak{h}_{2.14} = \langle P,\, T - M \rangle, &&
\end{aligned}$$

де $\alpha \neq 0$. Алгебри $\mathfrak{h}_{1.1}$ та $\mathfrak{h}_{1.8}^{\alpha}$ для $\alpha \neq 0$ зводяться одна до одної автоморфізмом $\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Решта підалгебр неізоморфні відносно повної

групи автоморфізмів, реалізації, що їм відповідають містяться у таблиці Б.1 додатку Б.

Редукована спеціальна алгебра Галілея $\mathbf{A\bar{G}_3(1)}$. Редукована спеціальна алгебра Галілея

$$\mathrm{A\bar{G}}_3(1) = \langle P,\, T,\, G,\, D,\, S\rangle$$

ізоморфна нерозв'язній нерозкладній алгебрі Лі $\mathfrak{g}_5$. Зауважимо, що комутаційні співвідношення наведені для алгебри $\mathfrak{g}_5$ у [4] містять друкарську помилку, а саме, $[e_2, e_3] = -2e_3$ слід замінити на $[e_2, e_3] = 2e_3$, а розклад Леві–Мальцева має вигляд $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \in 2A_1$. Ізоморфізм алгебр задається рівностями

$$T = e_1, \quad D = e_2, \quad S = e_3, \quad G = e_4, \quad P = e_5.$$

З точністю до внутрішніх автоморфізмів, алгебра Галілея $\mathrm{A\bar{G}}_3(1)$ має власні нееквівалентні підалгебри:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{h}_{1.1} = \langle D\rangle, && \mathfrak{h}_{2.1} = \langle D,\, T\rangle, && \mathfrak{h}_{3.1} = \langle D,\, S,\, T\rangle,\\
&\mathfrak{h}_{1.2} = \langle T\rangle, && \mathfrak{h}_{2.2} = \langle D,\, P\rangle, && \mathfrak{h}_{3.2} = \langle D,\, T,\, P\rangle,\\
&\mathfrak{h}_{1.3} = \langle P\rangle, && \mathfrak{h}_{2.3} = \langle T,\, P\rangle, && \mathfrak{h}_{3.3} = \langle D,\, G,\, P\rangle,\\
&\mathfrak{h}_{1.4} = \langle S+T\rangle, && \mathfrak{h}_{2.4} = \langle G,\, P\rangle, && \mathfrak{h}_{3.4} = \langle T,\, G,\, P\rangle,\\
&\mathfrak{h}_{1.5} = \langle G+T\rangle, && \mathfrak{h}_{2.5} = \langle G+T,\, P\rangle, && \mathfrak{h}_{3.5} = \langle S+T,\, G,\, P\rangle,\\
&\mathfrak{h}_{1.6} = \langle T-G\rangle, && \mathfrak{h}_{2.6} = \langle T-G,\, P\rangle, && \mathfrak{h}_{4.1} = \langle D,\, T,\, G,\, P\rangle.
\end{aligned}$$

Підалгебри $\mathfrak{h}_{1.5}$ та $\mathfrak{h}_{1.6}$ зводяться одна до одної зовнішнім автоморфізмом $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, тому виключаємо з розгляду підалгебру $\mathfrak{h}_{1.6}$. Перелік нееквівалентних реалізацій, що відповідають підалгебрам наведено у таблиці Б.2 додатку Б. Повна група автоморфізмів породжується п'ятьма невиродженими матрицями з параметрами $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, на які для кожного з операторів накладаються додаткові умови.

При $\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{14}\alpha_{41} \neq 0$

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha_{11}\alpha_{22}(2+\alpha_{11})}{2\alpha_{14}\alpha_{41}} & 0 & \frac{-\alpha_{11}\alpha_{22}}{2\alpha_{41}} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_{11}(2+\alpha_{11})(\alpha_{12}(2+\alpha_{11})-2\alpha_{13})}{-4\alpha_{14}\alpha_{41}} & \frac{\alpha_{11}(2+\alpha_{11})^2}{4\alpha_{14}\alpha_{41}} & \frac{\alpha_{12}(2+\alpha_{11})-2\alpha_{13}}{4\alpha_{41}} & \frac{\alpha_{11}(2+\alpha_{11})}{4\alpha_{41}} & \frac{\alpha_{14}\alpha_{11}}{4\alpha_{41}} \\ \frac{-\alpha_{11}\alpha_{22}}{\alpha_{14}} & 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{14}} & \frac{\alpha_{11}(2+\alpha_{11})}{\alpha_{14}} & \frac{\alpha_{12}-\alpha_{13}}{\alpha_{11}} & 1+\alpha_{11} & \alpha_{14} \\ \frac{\alpha_{41}\alpha_{12}}{\alpha_{14}} & \frac{\alpha_{41}\alpha_{11}}{\alpha_{14}} & \frac{-\alpha_{41}\alpha_{12}}{\alpha_{11}} & \alpha_{41} & \frac{\alpha_{14}\alpha_{41}}{\alpha_{11}} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_{23}a_{51} & 0 & \frac{2a_{23}a_{51}}{a_{15}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}a_{51}a_{13} & -\frac{1}{2}a_{15}a_{51} & \frac{a_{51}a_{13}}{a_{15}} & a_{51} & \frac{-2a_{51}}{a_{15}} \\ a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(a_{12}a_{15}-a_{13}) & a_{15} & a_{12} & -1 & 0 \\ \frac{-a_{12}a_{15}}{2a_{51}} & -\frac{a_{15}}{2a_{51}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ де } \alpha_{23}\alpha_{51}\alpha_{15} \neq 0;$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2\alpha_{22}\alpha_{51}}{\alpha_{14}} & 0 & -\alpha_{22}\alpha_{51} & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha_{51}\alpha_{12}}{\alpha_{14}} & \frac{2\alpha_{51}}{\alpha_{14}} & \frac{1}{2}\alpha_{51}\alpha_{12} & \alpha_{51} & \frac{1}{2}\alpha_{14}\alpha_{51} \\ 0 & 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{13} & 0 & \frac{1}{2}(\alpha_{12}-\alpha_{13}\alpha_{14}) & 1 & \alpha_{14} \\ 0 & 0 & \frac{-\alpha_{13}\alpha_{14}}{2\alpha_{51}} & 0 & \frac{\alpha_{14}}{2\alpha_{51}} \end{pmatrix}, \text{ де } \alpha_{14}\alpha_{22}\alpha_{51} \neq 0;$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{22}\alpha_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{12}\alpha_{44} & \alpha_{44} & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{22}\alpha_{41}\alpha_{44} & 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ (\alpha_{13}-\alpha_{12}\alpha_{41})\alpha_{44} & 2\alpha_{41}\alpha_{44} & \alpha_{12} & 1 & 0 \\ \alpha_{41}\alpha_{13}\alpha_{44} & \alpha_{41}^2\alpha_{44} & -\alpha_{13} & \alpha_{41} & \frac{1}{\alpha_{44}} \end{pmatrix}, \text{ де } \alpha_{22}\alpha_{44} \neq 0;$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{23}\alpha_{54} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{13}\alpha_{54} & 0 & \alpha_{54} \\ \alpha_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{13} & 0 & \alpha_{12} & -1 & 0 \\ \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{54}} & \frac{1}{\alpha_{54}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ де } \alpha_{23}\alpha_{54} \neq 0.$$

Зауваження 1.34. Побудовані реалізації для алгебр Галілея $\mathrm{AG}_2(1)$ та $\mathrm{A\bar{G}}_3(1)$ є важливими не лише для фізичних застосувань, а і для загальної теорії алгебр Лі, оскільки вони є повною класифікацією нееквівалентних реалізацій двох дійсних п'ятивимірних алгебр Лі $\mathfrak{g}_{5.30}^{-2}$ та $\mathfrak{g}_5$, яка не була відомою до цього.

Деформації алгебр Галілея. Взагалі кажучи, деформацією алгебри Лі $\mathfrak{g}$ є нескінченна сім'я алгебр Лі, яка містить$\mathfrak{g}$ та характеризується спільними комутаційними співвідношеннями параметризованими неперервним параметром. Детальніше поняття деформацій розглянуто у параграфі 1.7. Редукована класична алгебра Галілея $\mathrm{A\bar{G}}_1(1)$, її деформації та породжуючі реалізації детально досліджено у параграфі 1.9 під час побудови диференціальних інваріантів, тому будемо розглядати задачі деформації лише для алгебр Галілея розмірностей чотири та п'ять.

Для дослідження деформацій класичної алгебри Галілея $\mathrm{AG}_1(1)$ використаємо контракцію, що пов'язує алгебру Лі $A_{4.8}^{\beta}$:

$$[e_2, e_3] = e_1,\ [e_1, e_4] = (1+\beta)e_1,\ [e_2, e_4] = e_2,\ [e_3, e_4] = \beta e_3,\ |\beta| \leq 1,$$

та алгебру $A_{4.1}$, яка ізоморфна $\mathrm{AG}_1(1)$. Якщо $\beta \neq 1$, то контракцію можна реалізувати матрицею $\begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{q}{\beta-1} \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, де q — це параметр контракції. Подіявши матрицею контракції на структурні сталі, отримаємо деформовану алгебру Лі $\mathrm{AG}_1^q(1) = \langle P,\, G,\, T,\, M \rangle$ з q-параметризованим добутком $[\cdot, \cdot]_q$:

$$\begin{aligned} &[P, G]_q = -M, \qquad [M, T]_q = \tfrac{1+\beta}{1-\beta} qM, \\ &[P, T]_q = \tfrac{1}{1-\beta} qP, \quad [G, T]_q = P + \tfrac{\beta}{1-\beta} qG, \quad q \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

При $q = 0$ алгебра $\mathrm{AG}_1^0(1)$ співпадає з вихідною алгеброю $\mathrm{AG}_1(1)$, а при $\beta = -\frac{1}{2}$ та $q \neq 0$ деформована алгебра Галілея $\mathrm{AG}_1^q(1)$ ізоморфна алгебрі Галілея $\mathrm{AG}_2(1)$.

Контракція між алгебрами Лі $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus A_1 \to A_{4.1}$ дозволяє побудувати іншу фізично цікаву деформацію $\mathrm{AG}_1^{\tilde{q}}(1)$ алгебри Галілея $\mathrm{AG}_1(1)$ з $\tilde{q}$-параметризованим добутком $[\cdot, \cdot]_{\tilde{q}}$:

$$[P, T]_{\tilde{q}} = \tilde{q}T, \quad [G, P]_{\tilde{q}} = M + \tilde{q}G, \quad [G, T]_{\tilde{q}} = P, \quad \tilde{q} \in \mathbb{R}.$$

Матриця контракції, що пов'язує алгебри $A_{2.1} \oplus A_{2.1}$ та $A_{4.1}$ наступна $\begin{pmatrix} -\hat{q}^3 & -\hat{q}^2 & -\hat{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{q} \\ 0 & \hat{q}^3 & 0 & -\hat{q} \\ 0 & 0 & \hat{q}^2 & 0 \end{pmatrix}$. З неї можна побудувати ще одну важливу деформацію $AG_1^{\hat{q}}(1)$ з $\hat{q}$-параметризованим добутком:

$$\begin{aligned} &[G, M]_{\hat{q}} = \hat{q}M, \quad [P, T]_{\hat{q}} = -\hat{q}M + \hat{q}^2 P, \\ &[G, P]_{\hat{q}} = M, \quad [G, T]_{\hat{q}} = P, \quad \hat{q} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Для решти алгебр Галілея будуватимемо деформації виходячи з класифікації алгебр Лі, тобто будемо включати алгебру Галілея в існуючу

параметризовану серію. Оскільки $\mathrm{A\bar{G}_2}(1)$ ізоморфна $A^{\frac{1}{2}}_{4.8}$, то природно вважати деформацією увесь клас алгебр Лі $A^{\beta}_{4.8}$. Деформована алгебра $A\bar{G}^q_2(1)$ визначається добутком

$$[T,G]_q=-P, \qquad [D,G]_q=G-2qG,$$
$$[D,P]_q=-P-2qP, \quad [D,T]_q=-2T, \qquad q\in\mathbb{R}.$$

Не зважаючи на відсутність класифікацій високорозмірних алгебр Лі, побудована деформація є універсальною і дозволяє за індукцією отримати деформацію редукованих розширених алгебр Галілея довільних розмірностей. Алгебра $A\bar{G}^q_2(n)$ задовольняє стандартні співвідношення (1.14)–(1.17), (1.20) та деформовані

$$[D,G_i]_q=G_i-2qG_i, \quad [D,P_i]_q=-P_i-2qP_i,$$

де $i=1,2,\ldots,n$ та $q\in\mathbb{R}$.

Застосуємо той самий підхід для розширеної алгебри Галілея $\mathrm{AG}_2(1)$, яка ізоморфна алгебрі $A^{-2}_{5.30}$. Застосуємо перетворення ізоморфізму (1.28) до комутаційних співвідношень алгебри Лі $A^{h}_{5.30}$, $h\in\mathbb{R}$

$$[e_2,e_4]=e_1, \qquad [e_3,e_4]=e_2, \qquad [e_1,e_5]=(2+h)e_1,$$
$$[e_2,e_5]=(1+h)e_2, \quad [e_3,e_5]=he_3, \quad [e_4,e_5]=e_4.$$

Це дозволяє побудувати деформовану алгебру Галілея $\mathrm{AG}^q_2(1)$, $q\in\mathbb{R}$ з параметризованим добутком, визначеним співвідношеннями

$$[G,P]_q=M, \qquad [T,G]_q=-P, \qquad [D,G]_q=G,$$
$$[D,M]_q=qM, \quad [D,P]_q=-P+qP, \quad [D,T]_q=-2T+qT.$$

Ця деформація за індукцією розширюється до алгебри $\mathrm{AG}^q_2(n)$, яка задовольняє стандартним співвідношенням (1.14)–(1.20) та деформованим

$$[D,T]_q=-2T+qT, \quad [D,P_i]_q=-P_i+qP_i, \quad [D,M]_q=qM,$$

де $i=1,2,\ldots,n$ та $q\in\mathbb{R}$.

Деформації та контракції задають відношення часткового порядку на многовиді алгебр Лі фіксованої розмірності, тому, використовуючи класифікацію контракцій [108], можна зробити висновки про многовиди деформацій низькорозмірних алгебр Галілея $\mathrm{A\bar{G}_1}(1)$, $\mathrm{AG_1}(1)$ та $\mathrm{A\bar{G}_2}(1)$.

Найменша алгебра Галілея $\mathrm{A\bar{G}_1}(1)$ ізоморфна алгебрі Гейзенберга та може бути деформована до усіх дійсних тривимірних алгебр Лі, крім абелевої та алгебри $A_{3.3}$ ($[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = e_2$). Таким чином, усі диференціальні рівняння, інваріантні відносно тривимірних алгебр Лі (крім $A_{3.3}$ та абелевої) в граничному випадку переходять у галілей-інваріантні теорії, див. деталі у параграфі 1.9.

У випадку чотиривимірних алгебр Галілея $\mathrm{AG_1}(1)$ та $\mathrm{A\bar{G}_2}(1)$ ситуація інша. Редукована розширена алгебра Галілея $\mathrm{A\bar{G}_2}(1)$ ізоморфна алгебрі $A_{4.8}^{-1/2}$, що лежить на одному з верхніх рівнів у діаграмі Хассе [108], тому множина деформацій алгебри $\mathrm{A\bar{G}_2}(1)$ повністю вичерпується наведеними вище. Щодо алгебри $\mathrm{AG_1}(1)$, яка ізоморфна $A_{4.1}$, то вона має ширшу множину деформацій, а саме: класична алгебра Галілея $\mathrm{AG_1}(1)$ може бути деформована до усіх чотиривимірних алгебр Лі за винятком шести випадків: абелева, $A_{4.2}^1$, $A_{4.5}^{a11}$, $A_{3.1} \oplus A_1$, $A_{3.3} \oplus A_1$ та $A_{2.1} \oplus 2A_1$. Тобто усі, за винятком шести, диференціальні рівняння з чотиривимірною симетрією у границі зводяться до $\mathrm{AG_1}(1)$-інваріантних диференціальних рівнянь.

Використовуючи отримані деформації, можна побудувати породжуючі параметризовані реалізації, що збігаються до реалізацій алгебр Галілея.

Породжуюча реалізація для алгебри $\mathrm{A\bar{G}_1^q}(1)$ та реалізації решти тривимірних деформованих алгебр Галілея наведено у параграфі 1.9.

Породжуюча реалізація алгебри $\mathrm{AG_1^q}(1)$ з базисом впорядкованим як $\{G,\, M,\, P,\, T\}$ має вигляд

$$
\begin{aligned}
e_1 =& \partial_2, \quad e_2 = x_1\partial_2 + \partial_3,\\
e_3 =& q\tfrac{\beta}{\beta-1}x_1\partial_1 + \left(\tfrac{1}{2}x_1^2 - q\tfrac{\beta+1}{\beta-1}x_2\right)\partial_2 + \left(x_1 - \tfrac{q}{\beta-1}x_2\right)\partial_3 + \partial_4, \quad e_4 = \partial_1,
\end{aligned}
$$

де $q \in \mathbb{R}$ та $|\beta| \leq 1$, $\beta \neq 1$.

Породжуюча реалізація алгебри $A\bar{G}_2^q(1)$ з базисом впорядкованим як $\{P,\, T,\, G,\, D\}$ наступна

$$e_1 = \partial_1, \quad e_2 = \partial_2, \quad e_3 = -x_2\partial_1 + \partial_3,$$
$$e_4 = (x_1 + 2\,x_1 q)\partial_1 + 2\,x_2\partial_2 + (-x_3 + 2\,x_3 q)\partial_3 + \partial_4, \quad q \in \mathbb{R}.$$

Породжуюча реалізація алгебри $\mathrm{AG}_2^q(1)$ з базисом впорядкованим як $\{M,\, P,\, T,\, G,\, D\}$ має вигляд

$$e_1 = \partial_1, \quad e_2 = \partial_2, \quad e_3 = \partial_3, \quad e_4 = -x_2\partial_1 - x_3\partial_2 + \partial_4,$$
$$e_5 = -qx_1\partial_1 + (x_2 - qx_2)\partial_2 + (2x_3 - qx_3)\partial_3 - x_4\partial_4 + \partial_5, \quad q \in \mathbb{R}.$$

Зауважимо, що кожна з цих реалізацій представляє сім'ю неізоморфних алгебр Лі. Зафіксувавши залежні та незалежні змінні та побудувавши диференціальні інваріанти потрібного порядку ми отримаємо загальний вигляд рівнянь інваріантних одночасно відносно всієї сім'ї алгебр.

Диференціальні рівняння інваріантні відносно алгебр Галілея. Багато відомих диференціальних рівнянь та їх систем виявились галілей-інваріантними. Рівняння у частинних похідних та системи двох диференціальних рівнянь другого порядку, що інваріантні відносно редукованої класичної алгебри Галілея $\mathrm{A\bar{G}_1}(1)$ та її деформацій детально розглянуто у параграфі 1.9, тому будемо розглядати інваріантні рівняння для алгебр Галілея розмірностей чотири та п'ять.

Одним з найвідоміших рівнянь, що задовольняють п'ятивимірній алгебрі Галілея є рівняння Бюргерса [22]

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx}, \quad \mu = \mathrm{const}.$$

Це рівняння є найпростішим нелінійним $(1+1)$-вимірним еволюційним та точно розв'язним рівнянням, але, при цьому, рівняння Бюргерса використовується для опису багатьох процесів гідродинаміки. Його перевагою є те, що заміною Коула–Хопфа воно зводиться до звичайного рівняння теплопровідності. Максимальна алгебра симетрії рівняння Бюргерса —

п'ятивимірна нерозв'язна алгебра $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \in 2A_1$, що породжується операторами

$$\partial_t, \quad 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u, \quad t^2\partial_t + tx\partial_x + (x-tu)\partial_u, \quad \partial_x, \quad t\partial_x + \partial_u.$$

Саме цей набір диференціальних операторів є реалізацією алгебри Галілея $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_3(1)$ відносно підалгебри $\langle D,\, -S\rangle$ з базисом комплементарного простору $\{P,\, G,\, -T\}$.

Зауважимо, що підалгебра $\langle D,\, S\rangle$ не належить до переліку підалгебр [7], тому вона має бути автоморфна одній з алгебр $\langle D,\, T\rangle$ або $\langle D,\, P\rangle$. Насправді $\langle D,\, S\rangle$ еквівалентна $\langle D,\, T\rangle$. Щоб показати еквівалентність базисні елементи першої алгебри розглядаємо у вигляді

$$D = \alpha\tilde{T} + \beta\tilde{D}, \quad S = \gamma\tilde{T} + \delta\tilde{D}, \tag{1.29}$$

де

$$\tilde{T} = a_1P + a_2T + a_3G + a_4D + a_5S,$$
$$\tilde{D} = b_1P + b_2T + b_3G + b_4D + b_5S$$

та $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, а набори a_i та b_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$ є другим та четвертим рядками матриці автоморфізму. Розв'язавши (1.29) та застосувавши перетворення автоморфізму, отримаємо один з можливих розв'язків $\alpha = \delta = 0$, $\beta = -1$, $\gamma = \frac{1}{\alpha_{54}}$ та автоморфізм $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{23}\alpha_{54} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{54} \\ \alpha_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_{54}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, де $\alpha_{23}\alpha_{54} \neq 0$.

Класичне рівняння Кортевега–де Фріза та його узагальнення моделюють різні фізичні системи, включаючи гравітаційні хвилі, плазмові хвилі та хвилі у ґратках. Рівняння Кортевега–де Фріза

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

задовольняє чотиривимірній алгебрі симетрії $A_{4.8}^{-2/3}$ з базисними операторами

$$e_1 = \partial_x, \quad e_2 = \partial_t, \quad e_3 = t\partial_x + \partial_u, \quad e_4 = t\partial_t + \tfrac{1}{3}x\partial_x - \tfrac{2}{3}u\partial_u.$$

Рівняння Кортевега–де Фріза п'ятого порядку зі сталим коефіцієнтом,

$$u_t + uu_x + u_{xxxxx} = 0,$$

задовольняє чотиривимірній алгебрі симетрії типу $A_{4.8}^{-4/5}$ з базисними операторами

$$e_1 = \partial_x, \quad e_2 = t\partial_x + \partial_u, \quad e_3 = \partial_t, \quad e_4 = t\partial_t + \frac{1}{5}x\partial_x - \frac{4}{5}u\partial_u.$$

Обидві ці алгебри є частинними випадками деформованої редукованої розширеної алгебри Галілея $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_2^q(1)$, їх диференціальні оператори еквівалентні реалізації, що відповідає одновимірній підалгебрі $\langle e_4\rangle$ або проєкції породжуючої реалізації алгебри $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_2^q(1)$ на координати (x_1, x_2, x_3) для значень параметра $q = -\frac{1}{6}$ та $q = -\frac{3}{10}$ відповідно.

Ряд інших рівнянь Бюргерса та Кортевега–де Фріза, інваріантних відносно алгебри Галілея, розглядались у роботі [17].

Рівняння реакції–дифузії та їх системи часто застосовуються у математичній біології, хімії та фізиці. Зокрема, у біології можна розглядати клітини, бактерії, хімічні речовини, тварин та інше як частки, що хаотично рухаються. Тоді регулярний рух їхньої групи можна розглядати як дифузійний процес, часто це не проста дифузія, оскільки частинки можуть взаємодіяти. (1+1)-вимірні рівняння реакції-дифузії широко застосовуються для опису глобальної поведінки в термінах густини частинок або концентрації. Існує ряд галілей-інваріантних моделей серед рівнянь реакції–дифузії

$$u_t = (u^n u_x)_x.$$

Максимальна алгебра ліївської інваріантності рівняння реакції–дифузії при $n \neq 0,\ -4/3$ — чотиривимірна алгебра $A_{2.1} \oplus A_{2.1}$, що породжується базисними операторами

$$e_1 = \partial_t, \quad e_2 = t\partial_t - \frac{1}{n}u\partial_u, \quad e_3 = \partial_x, \quad e_4 = x\partial_x + \frac{2}{n}u\partial_u.$$

Оскільки алгебра $A_{2.1} \oplus A_{2.1}$ належить множині деформацій алгебри $\mathrm{AG}_1(1)$, то рівняння реакції–дифузії інваріантне відносно деформованої класичної алгебри Галілея $\mathrm{AG}_1^{\hat{q}}(1)$.

Фізичні моделі у яких задіяно сили направлені у/від напрямку центру зазвичай приводять до задач з центральною силою та виникають у класичній механіці (дія сонця на планету) та атомній фізиці (рух електрону). Розглянемо двовимірну задачу з центральною силою

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \left(\frac{\mu}{(x^2+y^2)^2} - \epsilon \right) \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}, \quad \mu, \epsilon > 0, \quad \boldsymbol{r} = (x, y).$$

Цю систему можна переписати у полярних координатах

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - \frac{\mu}{r^3} + \epsilon r = 0, \quad r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0.$$

Максимальна алгебра інваріантності цієї системи має базис

$$e_1 = \partial_t, \quad e_2 = \partial_\varphi, \quad e_3 = \sin(2\sqrt{\epsilon}t)\partial_t + \sqrt{\epsilon}\cos(2\sqrt{\epsilon}t) r\partial_r,$$
$$e_4 = \cos(2\sqrt{\epsilon}t)\partial_t - \sqrt{\epsilon}\sin(2\sqrt{\epsilon}t) r\partial_r.$$

Ці оператори утворюють алгебру Лі з комутаційними співвідношеннями

$$[e_1, e_3] = 2\sqrt{\epsilon}e_4, \quad [e_1, e_4] = -2\sqrt{\epsilon}e_3, \quad [e_3, e_4] = -2\sqrt{\epsilon}e_1,$$

яка за допомогою ізоморфізму $\tilde{e}_i = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}}$ зводиться до алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus A_1$. При цьому диференціальні оператори еквівалентні реалізації алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus A_1$ відносно підалгебри $\langle e_2 \rangle$. Оскільки $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus A_1$ належить до множини деформацій алгебри $\mathrm{AG}_1(1)$, то двовимірна задача з центральною силою інваріантна відносно деформованої алгебри Галілея $\mathrm{AG}_1^{\tilde{q}}(1)$.

1.7. Реалізації та деформації алгебр Пуанкаре

У цьому розділі застосовується алгебраїчний метод з параграфу 1.4 та класифікація підалгебр [7] алгебри Пуанкаре для побудови явного вигляду реалізацій найменшої можливої алгебри Пуанкаре $\mathfrak{p}(1,1)$ та шестиви-

мірної алгебри Пуанкаре $\mathfrak{p}(1,2)$, а також їх деформацій. Задача класифікації низькорозмірних підалгебр алгебри Пуанкаре $\mathfrak{p}(1,4)$ також розглядалась у роботі [5].

Реалізації алгебр Пуанкаре широко вивчались у низці робіт Рідо, Вінтерніца, Фущича, Цифри, Бойко, Жданова, Лагно та Єгорченко [39, 42, 130, 131, 146, 148] але в усіх дослідженнях були розглянуті лише коваріантні реалізації, та ряд реалізацій було представлено неявно, тобто наведені коефіцієнти мають бути розв'язками досить складних рівнянь з частинними похідними, що не розв'язуються у квадратурах. У даному параграфі усі реалізації побудовані в явному вигляді. Поряд з реалізаціями алгебр Лі також побудовано реалізації деформованих серій цих алгебр.

Алгебра Пуанкаре $\mathfrak{p}(1,1)$. 'Найменша' алгебра Пуанкаре $\mathfrak{p}(1,1)$ діє у двовимірному просторі–часі $\mathbb{R}^{1,1}$ та має розмірність три: $\mathfrak{p}(1,1) = \langle P_0, P_1, J_{01}\rangle$. Її базисні елементи задовольняють комутаційні співвідношення

$$[P_0, P_1] = 0, \quad [P_0, J_{01}] = P_1, \quad [P_1, J_{01}] = P_0. \tag{1.30}$$

У роботі [130] були побудовані лише коваріантні реалізації алгебри Лі $\mathfrak{p}(1,1)$ у просторі трьох змінних. Оскільки $\mathfrak{p}(1,1)$ є тривимірною, то для ізоморфної їй алгебри Лі $A_{3.4}^{-1}$ ($e_1 = P_0 + P_1$, $e_2 = P_0 - P_1$, $e_3 = J_{01}$), у роботі [128] прямим методом були побудовані усі точні нееквівалентні реалізації.

Використаємо перелік підалгебр [7] та застосуємо алгебраїчний метод. Для кожної з отриманих реалізацій алгебри $\mathfrak{p}(1,1)$ у таблиці 1.5 наведено відповідну їй підалгебру та базис комплементарного векторного простору, що був використаний при обчисленні. Підалгебри, що містять один з ідеалів $\langle P_0 \pm P_1\rangle$ алгебри $\mathfrak{p}(1,1)$, породжують неточні реалізації, які є новими та не розглядались у роботі [128]. Решта отриманих реалізацій еквівалентні точним реалізаціям алгебри $A_{3.4}^{-1}$.

Виписуючи явний вигляд реалізацій, навмисне не фіксуються залежні (наприклад u, w) та незалежні (наприклад t, x) змінні, цей вибір стає

Комплементарний векторний простір	Підалгебра	Реалізація
$\{P_0, P_1, J_{01}\}$	$\langle 0\rangle$	$P_0 = \partial_1, P_1 = \partial_2, J_{01} = x_2\partial_1 + x_1\partial_2 + \partial_3$
$\{J_{01}, P_1\}$	$\langle P_0\rangle$	$P_0 = -\operatorname{sh} x_1\partial_2, P_1 = \operatorname{ch} x_1\partial_2, J_{01} = \partial_1$
$\{P_0, P_1\}$	$\langle J_{01}\rangle$	$P_0 = \partial_1, P_1 = \partial_2, J_{01} = x_2\partial_1 + x_1\partial_2$
$\{P_0, J_{01}\}$	$\langle P_0 + P_1\rangle$	$P_0 = \partial_1, P_1 = -\partial_1, J_{01} = -x_1\partial_1 + \partial_2$
$\{P_0, J_{01}\}$	$\langle P_0 - P_1\rangle$	$P_0 = \partial_1, P_1 = \partial_1, J_{01} = x_1\partial_1 + \partial_2$
$\{J_{01}\}$	$\langle P_0, P_1\rangle$	$P_0 = 0, P_1 = 0, J_{01} = \partial_1.$
$\{P_0\}$	$\langle P_0 + P_1, J_{01}\rangle$	$P_0 = \partial_1, P_1 = -\partial_1, J_{01} = -x_1\partial_1$
$\{P_0\}$	$\langle P_0 - P_1, J_{01}\rangle$	$P_0 = \partial_1, P_1 = \partial_1, J_{01} = x_1\partial_1$

Табл. 1.5. Реалізації алгебри Пуанкаре $\mathfrak{p}(1,1)$.

суттєвим при побудові диференціальних інваріантів (див. параграф 1.9). Поділ змінних може бути обрано виходячи зі зручності для певного застосування, наприклад першу реалізацію для $u = u(t,x)$ можна обрати у вигляді

$$\{P_0 = \partial_t,\ P_1 = \partial_x,\ J_{01} = x\partial_t + t\partial_x + \partial_u\},$$

або для $u = u(t)$ та $w = w(t)$

$$\{P_0 = \partial_u,\ P_1 = \partial_w,\ J_{01} = w\partial_u + u\partial_w + \partial_t\}.$$

Алгебра Пуанкаре $\mathfrak{p}(1,2)$. Шестивимірна алгебра Пуанкаре

$$\mathfrak{p}(1,2) = \langle P_0,\ P_1,\ P_2,\ J_{01},\ J_{02},\ J_{12}\rangle$$

розглядається у (1+2)-вимірному просторі Мінковського з базисними елементами, що задовольняють ненульові комутаційні співвідношення

$$\begin{aligned}
&[P_0, J_{01}] = P_1, \quad [P_1, J_{01}] = P_0, \quad [P_2, J_{02}] = P_0,\\
&[P_0, J_{02}] = P_2, \quad [P_1, J_{12}] = -P_2, [P_2, J_{12}] = P_1,\\
&[J_{01}, J_{02}] = -J_{12}, [J_{02}, J_{12}] = J_{01}, \ [J_{01}, J_{12}] = -J_{02}.
\end{aligned}$$

У даному параграфі нас цікавлять породжуючі реалізації та реалізації у просторі не більш ніж трьох змінних, що накладає обмеження на розмірності підалгебр алгебри $\mathfrak{p}(1,2)$. Використаємо підалгебри розмірностей

три, чотири та п'ять, отримані у роботі [7] та застосуємо алгоритм запропонований у параграфі 1.4. Результати обчислень оформлено у вигляді таблиць 1.6, 1.7, 1.8 та 1.9, що поруч з реалізаціями містять підалгебри та відповідні базиси комплементарних просторів.

Породжуюча реалізація алгебри Пуанкаре $\mathfrak{p}(1,2)$ має вигляд

$$P_0=\partial_1,\quad P_1=\partial_2,\quad P_2=\partial_3,\quad J_{01}=x_2\partial_1+x_1\partial_2+\partial_4,$$
$$J_{02}=x_3\partial_1+x_1\partial_3-\operatorname{sh}x_4\operatorname{th}x_5\partial_4+\operatorname{ch}x_4\partial_5-\frac{\operatorname{sh}x_4}{\operatorname{ch}x_5}\partial_6,$$
$$J_{12}=x_3\partial_2-x_2\partial_3+\operatorname{ch}x_4\operatorname{th}x_5\partial_4-\operatorname{sh}x_4\partial_5+\frac{\operatorname{ch}x_4}{\operatorname{ch}x_5}\partial_6.$$

Комплементарний векторний простір	Підалгебра	Реалізація
$\{J_{01}+J_{12}\}$	$\langle P_0, P_1, P_2, J_{02}, J_{01}-J_{12}\rangle$	$P_0=0,\ P_1=0,\ P_2=0,$ $J_{01}=\frac{1}{2}(1-x_1^2)\partial_1,$ $J_{02}=-x_1\partial_1,\ J_{12}=\frac{1}{2}(1+x_1^2)\partial_1$

Табл. 1.6. Реалізація $\mathfrak{p}(1,2)$ у одній змінній.

Порівняння реалізацій алгебри $\mathfrak{p}(1,2)$, отриманих у цьому параграфі та реалізацій отриманих у роботі [148] дозволяє зробити висновок, що результати [148] є частковим випадком реалізацій цього параграфа, оскільки у [148] розглядались лише коваріантні реалізації (тобто оператори P_0, P_1 та P_3 були представлені лише у вигляді зсувів за різними змінними, що комутують), крім цього, у роботі [148] апріорі було зафіксовано набори залежних та незалежних змінних.

Деформації алгебр $\mathfrak{p}(1,1)$ та $\mathfrak{p}(1,2)$. Деформації алгебр Лі виникають у математичних теоріях коли необхідно виконати класифікацію неізоморфних структур або ввести аналітичну структуру на многовиді з такими структурами. У фізиці деформації застосовуються при квантуванні або при інтегруванні теорій з різними симетріями в рамках однієї моделі, та ін. У дисертаційній роботі використовується поняття однопараметричної деформації запропоноване Герстенхабером [46].

Комплементарний векторний простір	Підалгебра	Реалізація
$\{J_{01}+J_{12}, J_{02}\}$	$\langle P_0, P_1, P_2, J_{01}-J_{12}\rangle$	$P_0=0,\ P_1=0,\ P_2=0,$ $J_{01}=\frac{1}{2}(1-x_1^2)\partial_1+x_1\partial_2,$ $J_{02}=-x_1\partial_1+\partial_2,$ $J_{12}=\frac{1}{2}(1+x_1^2)\partial_1-x_1\partial_2$
$\{J_{01}, J_{12}\}$	$\langle P_0, P_1, P_2, J_{02}\rangle$	$P_0=0,\ P_1=0,\ P_2=0,$ $J_{01}=\partial_1,$ $J_{02}=-\operatorname{ch}x_1\operatorname{tg}x_2\partial_1-\operatorname{sh}x_1\partial_2,$ $J_{12}=\operatorname{sh}x_1\operatorname{tg}x_2\partial_1+\operatorname{ch}x_1\partial_2$
$\{J_{01}, J_{02}\}$	$\langle P_0, P_1, P_2, J_{12}\rangle$	$P_0=0,\ P_1=0,\ P_2=0,\ J_{01}=\partial_1,$ $J_{02}=-\operatorname{sh}x_1\operatorname{th}x_2\partial_1+\operatorname{ch}x_1\partial_2,$ $J_{12}=\operatorname{ch}x_1\operatorname{th}x_2\partial_1-\operatorname{sh}x_1\partial_2$
$\{P_0-P_2, J_{01}+J_{12}\}$	$\langle P_0+P_2, P_1, J_{01}-J_{12}, J_{02}\rangle$	$P_0=\frac{1}{2}(1+x_2^2)\partial_1,\ P_1=-x_2\partial_1,$ $P_2=-\frac{1}{2}(1-x_2^2)\partial_1,$ $J_{01}=-x_1x_2\partial_1+\frac{1}{2}(1-x_2^2)\partial_2,$ $J_{02}=-x_1\partial_1-x_2\partial_2,$ $J_{12}=x_1x_2\partial_1+\frac{1}{2}(1+x_2^2)\partial_2$

Табл. 1.7. Реалізації алгебри Пуанкаре $\mathfrak{p}(1,2)$ у двох змінних.

Комплементарний векторний простір	Підалгебра	Реалізація
$\{J_{01}, J_{02}, J_{12}\}$	$\langle P_0, P_1, P_2\rangle$	$P_0=0,\ P_1=0,\ P_2=0,$ $J_{01}=\partial_1,$ $J_{02}=-\operatorname{sh}x_1\operatorname{th}x_2\partial_1+\operatorname{ch}x_1\partial_2-\frac{\operatorname{sh}x_1}{\operatorname{ch}x_2}\partial_3,$ $J_{12}=\operatorname{ch}x_1\operatorname{th}x_2\partial_1-\operatorname{sh}x_1\partial_2+\frac{\operatorname{ch}x_1}{\operatorname{ch}x_2}\partial_3$
$\{P_0-P_2,$ $J_{01}+J_{12},$ $J_{02}\}$	$\langle P_0+P_2,\ P_1,$ $\beta(P_0-P_2)$ $+J_{01}-J_{12}\rangle,$ $\beta\in\{0,1\}$	$P_0=\frac{1}{2}(1+x_2^2)\partial_1,\ P_1=-x_2\partial_1,$ $P_2=\frac{1}{2}(-1+x_2^2)\partial_1,$ $J_{01}=(-x_1x_2-\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{-2x_3})\partial_1+\frac{1}{2}(1-x_2^2)\partial_2+x_2\partial_3,$ $J_{02}=-x_1\partial_1-x_2\partial_2+\partial_3,$ $J_{12}=(x_1x_2+\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{-2x_3})\partial_1+\frac{1}{2}(1+x_2^2)\partial_2-x_2\partial_3$

Табл. 1.8. Реалізації $\mathfrak{p}(1,2)$ у трьох змінних (частина 1).

Комплементарний векторний простір	Підалгебра	Реалізація
$\{P_0, P_1, P_2\}$	$\langle J_{01}, J_{02}, J_{12}\rangle$	$P_0 = \partial_1,\ P_1 = \partial_2,\ P_2 = \partial_3,$ $J_{01} = x_2\partial_1 + x_1\partial_2,\ J_{02} = x_3\partial_1 + x_1\partial_3,$ $J_{12} = x_3\partial_2 - x_2\partial_3$
$\{P_0 - P_2, J_{01}, J_{12}\}$	$\langle P_0 + P_2, P_1, J_{02}\rangle$	$P_0 = (\operatorname{sh} x_1 \sin x_3 + \operatorname{ch} x_1)\partial_2,$ $P_1 = (-\operatorname{sh} x_1 - \operatorname{ch} x_1 \sin x_3)\partial_2,$ $P_2 = -\cos x_3\partial_2,\ J_{01} = \partial_1,$ $J_{02} = -\operatorname{ch} x_1 \operatorname{tg} x_3\partial_1 - \frac{\operatorname{ch} x_1\ x_2}{\cos x_3}\partial_2 - \operatorname{sh} x_1\partial_3,$ $J_{12} = \operatorname{sh} x_1 \operatorname{tg} x_3\partial_1 + \frac{\operatorname{sh} x_1\ x_2}{\cos x_3}\partial_2 + \operatorname{ch} x_1\partial_3$
$\{J_{02}, J_{01}, P_0\}$	$\langle \alpha P_0 + J_{12}, P_1, P_2\rangle,$ $\alpha \geq 0$	$P_0 = \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2\partial_3,\ P_1 = -\operatorname{sh} x_2\partial_3,$ $P_2 = -\operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} x_2\partial_3,$ $J_{01} = -\operatorname{sh} x_1 \operatorname{th} x_2\partial_1 + \operatorname{ch} x_1\partial_2 - \alpha\frac{\operatorname{sh} x_1}{\operatorname{ch} x_2}\partial_3,$ $J_{02} = \partial_1,$ $J_{12} = -\operatorname{ch} x_1 \operatorname{th} x_2\partial_1 + \operatorname{sh} x_1\partial_2 - \alpha\frac{\operatorname{ch} x_1}{\operatorname{ch} x_2}\partial_3$
$\{J_{12}, J_{01}, P_1\}$	$\langle \alpha P_1 + J_{02}, P_0, P_2\rangle,$ $\alpha \geq 0$	$P_0 = -\operatorname{sh} x_2\partial_3,\ P_1 = \cos x_1 \operatorname{ch} x_2\partial_3,$ $P_2 = -\sin x_1 \operatorname{ch} x_2\partial_3,$ $J_{01} = -\sin x_1 \operatorname{th} x_2\partial_1 + \cos x_1\partial_2$ $\quad - \alpha\frac{\sin x_1 \operatorname{ch}(2x_1)}{2\operatorname{ch} x_2}\partial_3,$ $J_{02} = -\cos x_1 \operatorname{th} x_2\partial_1 - \sin x_1\partial_2$ $\quad - \alpha\frac{\cos x_1 \operatorname{ch}(2x_1)}{2\operatorname{ch} x_2}\partial_3,$ $J_{12} = \partial_1$
$\{P_0 - P_2,\ P_1,$ $J_{01} + J_{12}\}$	$\langle P_0 + P_2,\ \alpha P_1 + J_{02},$ $J_{01} - J_{12}\rangle,$ $\alpha \geq 0$	$P_0 = (1 - x_3^2)\partial_1 - x_3\partial_2,\ P_1 = \partial_2,$ $P_2 = -(1 + x_3^2)\partial_1 - x_3\partial_2,$ $J_{01} = (x_2 - x_3^2(x_2 + 2\alpha))\partial_1 + (x_1 - x_3(x_2 + \alpha))\partial_2$ $\quad + (1 - x_3^2)\partial_3,$ $J_{02} = -2(x_1 + ax_3)\partial_1 - \alpha\partial_2 - 2x_3\partial_3,$ $J_{12} = (x_2 + x_3^2(x_2 + 2\alpha))\partial_1 - (x_1 - x_3(x_2 + \alpha))\partial_2$ $\quad + (1 + x_3^2)\partial_3$

Табл. 1.9. Реалізації $\mathfrak{p}(1,2)$ у трьох змінних (частина 2).

Нехай $\mathfrak{g} = (V, [\cdot,\cdot])$ — це алгебра Лі, тоді її *деформація* — це однопараметрична сім'я алгебр Лі $\mathfrak{g}_t = (V, [\cdot,\cdot]_t)$, $t \in \mathbb{R}$, з множенням

$$[x, y]_t = [x, y] + t\varphi_1(x, y) + t^2\varphi_2(x, y) + \cdots,$$

де $\varphi_i\colon V\times V\to V$, $i=1,2,\ldots,$ — білінійні, антисиметричні та задовольняють тотожність Якобі.

Задача знаходження усіх можливих деформацій заданої алгебри Лі вимагає вивчення відповідних когомологій, зокрема, необхідною умовою існування інфінітезимальних деформацій є $\mathcal{H}^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})\neq 0$. Не зважаючи на це, для алгебри Пуанкаре $\mathfrak{p}(1,1)$ можна побудувати її інфінітезимальні деформації безпосередньо з класифікації тривимірних алгебр Лі, використовуючи ізоморфізм $\mathfrak{p}(1,1)\sim A_{3.4}^{-1}$:

$$[P_0,J_{01}]_{t'}=P_1+t'(P_0-P_1),$$
$$[P_1,J_{01}]_{t'}=P_0+t'(P_1-P_0),\quad t'\in\mathbb{R}.$$

Інша деформація може бути побудована використовуючи контракцію від алгебр де Сіттера до алгебри Пуанкаре

$$[P_0,J_{01}]_t=P_1,\quad [P_1,J_{01}]_t=P_0,\quad [P_0,P_1]_t=tJ_{01},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Контракція між алгебрами де Сіттера та алгебрами Пуанкаре існує і для алгебр Лі вищих розмірностей, зокрема можна побудувати деформацію $\mathfrak{p}(1,2)_t$:

$$[P_0,J_{01}]_t=P_1,\quad [P_1,J_{01}]_t=P_0,\quad [P_2,J_{02}]_t=P_0,$$
$$[P_0,J_{02}]_t=P_2,\quad [P_1,J_{12}]_t=-P_2,\quad [P_2,J_{12}]_t=P_1,$$
$$[P_1,P_2]_t=tJ_{12},\quad [P_1,P_2]_t=tJ_{01},\quad [P_0,P_2]_t=tJ_{02},$$
$$[J_{01},J_{02}]_t=-J_{12},\quad [J_{02},J_{12}]_t=J_{01},\quad [J_{01},J_{12}]_t=-J_{02}.$$

Використовуючи той самий метод, що і напочатку параграфу побудуємо породжуючі реалізації $R(\mathfrak{p}(1,1)_{t'})$ та $R(\mathfrak{p}(1,1)_t)$ для отриманих деформацій. Перед кожною з реалізацій вказано базис векторного простору, що використовувався при обчисленнях. Зауважимо, що рівняння інваріантні відносно реалізацій деформованих алгебр Лі, одночасно задовольняють кільком неізоморфним алгебрам симетрії. Знайти інваріантні рівняння можна обравши залежні та незалежні змінні та побудувавши потрібні

диференціальні інваріанти (див. параграф 1.9).

$\{P_0, P_1, J_{01}\}$, $R(\mathfrak{p}(1,1)_{t'})$:
$P_0{=}\partial_1$, $P_1{=}\partial_2$, $J_{01}{=}(t'x_1{+}(1{-}t')x_2)\partial_1{+}((1{-}t')x_1{+}t'x_2)\partial_2{+}\partial_3$.
$\{P_0{+}P_1, P_0{-}P_1, J_{01}\}$, $R(\mathfrak{p}(1,1)_t)$:
$P_0{=}\frac{1}{2}(1{-}tx_1^2)\partial_1{+}(\frac{1}{2}{+}tx_1x_2)\partial_2{-}tx_1\partial_3$,
$P_1{=}\frac{1}{2}(1{+}tx_1^2)\partial_1{-}(\frac{1}{2}{+}tx_1x_2)\partial_2{+}tx_1\partial_3$, $J_{01}{=}x_1\partial_1{-}x_2\partial_2{+}\partial_3$.

Побудуємо породжуючі реалізації деформованої алгебри Пуанкаре $\mathfrak{p}(1,2)_t$, обравши базис векторного простору у вигляді

$$\{P_0{+}P_2, P_0{-}P_2, P_1, J_{01}{+}J_{12}, J_{01}{-}J_{12}, J_{02}\}.$$

Для спрощення вигляду реалізації введемо позначення:

$$A = tx_1^2 + 1, \quad B = tx_1^2 - 1, \quad C = tx_1x_2 + \tfrac{1}{2},$$
$$D = \mathrm{sh}((-t)^{1/2}x_3), \quad E = \mathrm{ch}((-t)^{1/2}x_3),$$
$$F = \mathrm{th}((-t)^{1/2}x_3), \quad T = (-t)^{1/2}.$$

Тоді

$$P_0{=}{-}\tfrac{1}{2}B\partial_1{+}C\partial_2{+}tx_1x_4\partial_4{-}tx_1\partial_5,$$
$$P_1{=}{-}Tx_1F\partial_1{-}(1{+}2tx_1x_2)Tx_2F\partial_2{+}(1{+}2tx_1x_2)\partial_3$$
$$+\frac{1}{E}((2x_2C{-}2tx_1x_2x_4TD{-}x_1{x_4}^2)\partial_4$$
$$+(2tx_1x_4{+}tx_2TD)\partial_5{+}(tx_1\mathrm{e}^{-x_5})\partial_6),$$
$$P_2{=}\tfrac{1}{2}A\partial_1{-}C\partial_2{-}tx_1x_4\partial_4{+}tx_1\partial_5,$$
$$J_{01}{=}\frac{AF}{2T}\partial_1{+}\frac{(1{+}2tx_2(x_1{+}x_2A))F}{2T}\partial_2{+}(x_1{+}x_2A)\partial_3$$
$$-\frac{A({x_4}^2{-}t{x_2}^2){-}2C}{2E}\partial_4{+}$$
$$+x_2x_4TAF\partial_4{+}\frac{A(x_2TD{+}x_4)}{E}\partial_5{+}\frac{A\mathrm{e}^{-x_5}}{2E}\partial_6,$$
$$J_{02}{=}x_1\partial_1{-}x_2\partial_2{-}x_4\partial_4{+}\partial_5,$$

$$J_{12}=\frac{BF}{2T}\partial_1+\frac{(1+2tx_2(x_1+x_2B))F}{2T}\partial_2+(x_1+x_2B)\partial_3$$
$$-\frac{B({x_4}^2-t{x_2}^2)-2C}{2E}\partial_4+x_2x_4TBF\partial_4+\frac{(x_2TD+x_4)B}{E}\partial_5+\frac{B\mathrm{e}^{-x_5}}{2E}\partial_6.$$

1.8. Реалізації та деформації конформних алгебр

Усі добре визначені фізичні теорії мають свої певні фундаментальні групи інваріантності, тому реалізації їх алгебр Лі диференціальними операторами першого порядку ефективно застосовуються для редукцій, інтегрування, побудови диференціальних інваріантів та іншого, див. [38, 39, 41, 57, 120].

У цьому параграфі розглянуто задачу побудови реалізацій алгебр Лі трьох важливих конформних груп: стандартної конформної групи $\mathrm{C}(3,1)$ та двох конформних груп псевдоевклідових просторів $\mathrm{C}(3,0)$ та $\mathrm{C}(2,1)$. Для відповідних цим групам алгебр Лі $\mathfrak{c}(3,1)$, $\mathfrak{c}(3,0)$ та $\mathfrak{c}(2,1)$ буде побудовано максимальні можливі (породжуючі реалізації), використовуючи алгебраїчний метод. Деякі коваріантні реалізації конформної алгебри та алгебр де Сіттера відомі, але вперше запропоновано реалізації в просторах п'ятнадцяти та десяти змінних відповідно. Реалізації з меншою кількістю змінних можна отримати з побудованих за допомогою проєкції відповідно до підалгебр.

Конформна алгебра Лі. Спочатку розглянемо конформну групу та її 15-вимірну алгебру Лі $\mathfrak{c}(3,1)$. Конформна група Лі $\mathrm{C}(3,1)=\mathrm{SO}(4,2)=\mathrm{SU}(2,2)$ простору Мінковського — це максимальна група інваріантності рівняння Максвелла у плоскому просторі–часі. Ця група з багатьох точок зору об'єднує усі фізичні групи. Вона породжується 10 операторами Пуанкаре P_μ, $J_{\mu\nu}$, оператором дилатації D та операторами спеціальних конформних перетворень K_μ, тут і далі $\mu,\nu=1,2,\dots,4$. Ненульові комутаційні співвідношення алгебри Лі ма-

ють вигляд

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}J_{\rho\nu} - g_{\nu\sigma}J_{\rho\mu}, \tag{1.31}$$

$$[J_{\mu\nu}, P_{\rho}] = g_{\mu\rho}P_{\nu} - g_{\nu\rho}P_{\mu}, \tag{1.32}$$

$$[J_{\mu\nu}, K_{\rho}] = g_{\mu\rho}K_{\nu} - g_{\nu\rho}K_{\mu}, \tag{1.33}$$

$$[P_{\mu}, K_{\nu}] = 2(g_{\mu\nu}D + J_{\mu\nu}), \tag{1.34}$$

$$[P_{\mu}, D] = P_{\mu}, \tag{1.35}$$

$$[K_{\mu}, D] = -K_{\mu}. \tag{1.36}$$

Тут $g_{\mu\nu}$ — це метричний тензор простору Мінковського

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{44} = 1.$$

Існують також конформні групи $\mathrm{C}(p, q)$ псевдоевклідових просторів з метричними тензорами

$$g_{11} = g_{22} = \cdots = g_{pp} = -g_{p+1,p+1} = \cdots = -g_{p+q,p+q} = 1, \tag{1.37}$$

тут $\mu, \nu = 1, \ldots, p + q = n$.

Розглянемо групу $\mathrm{SO}(p + 1, q + 1) = \mathrm{span}\{I_{ab}\}$, $I_{ab} = -I_{ba}$ з комутаційними співвідношеннями

$$[I_{ab}, I_{cd}] = g_{ac}I_{bd} - g_{bc}I_{ad} + g_{ad}I_{cb} - g_{bd}I_{ca},$$

де g_{ab} задано рівностями (1.37) та $g_{n+1,n+1} = -g_{n+2,n+2} = 1$. Встановимо відповідність

$$J_{\mu\nu} = I_{\mu\nu}, \quad P_{\mu} = I_{\mu,n+1} - I_{\mu,n+2},$$
$$K_{\mu} = I_{\mu,n+1} + I_{\mu,n+2}, \quad D = I_{n+1,n+2},$$

тоді маємо ізоморфізм $\mathrm{C}(p, q) \simeq \mathrm{SO}(p + 1, q + 1)$. Таким чином, значна кількість добре відомих груп (наприклад, групи де Сіттера) є конформними групами псевдоевклідових просторів. Розглянемо відому реалізацію конформної групи

$$P_{\mu} = \partial_{\mu}, \quad J_{\mu\nu} = x_{\nu}\partial_{\mu} - x_{\mu}\partial_{\nu}, \quad D = x_{\nu}\partial_{\nu}, \quad K_{\mu} = 2x_{\mu}x_{\nu}\partial_{\nu} - x^2\partial_{\mu};$$

тут і далі за повторюваним індексом відбувається підсумовування та $x^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

Встановимо підалгебру, що визначає дану реалізацію. Для цього дослідимо реалізацію у точці $x = (0, 0, 0, 0)$ та знайдемо ядро лінійного перетворення. Ядро співпадає з підалгеброю $\mathrm{span}\{J_{\mu\nu}, D, K_\mu\}$, яка і визначає дану реалізацію. Це дійсно так і буде перевірено побудовою та проєкцією породжуючої реалізації алгебри $\mathfrak{c}(3,1)$ з комплементарною частиною $\{P_\mu, J_{\mu\nu}, K_\mu, D\}$ взятою у лексикографічному порядку. Для спрощення вигляду формул введемо позначення:

$$\sin x_i = \mathrm{s}_i, \quad \cos x_i = \mathrm{c}_i, \quad \mathrm{tg}\, x_i = \mathrm{t}_i, \quad \mathrm{sh}\, x_i = \mathrm{sh}_i,$$
$$\mathrm{ch}\, x_i = \mathrm{ch}_i, \quad \mathrm{th}\, x_i = \mathrm{th}_i, \quad i = 1, \ldots, 10.$$

$R_{\text{породжуюча}}(\mathfrak{c}(3,1))$:

$$P_1 = \partial_1, \quad P_2 = \partial_2, \quad P_3 = \partial_3, \quad P_4 = \partial_4,$$
$$J_{12} = x_2\partial_1 - x_1\partial_{x_2} + \partial_5,$$
$$J_{13} = x_3\partial_1 - x_1\partial_3 - \mathrm{th}_6\mathrm{s}_5\partial_5 + \mathrm{c}_5\partial_6 + 2\frac{\mathrm{s}_5}{\mathrm{ch}_6}\partial_8,$$
$$J_{14} = -x_4\partial_1 - x_1\partial_4 + 2\frac{\mathrm{t}_7\mathrm{s}_5}{\mathrm{ch}_6}\partial_5 + \mathrm{t}_7\mathrm{s}_6\mathrm{c}_5\partial_6 + \mathrm{c}_5\mathrm{c}_6\partial_7 + \frac{\mathrm{s}_9\mathrm{s}_6\mathrm{c}_5\mathrm{c}_8 + \mathrm{th}_6\mathrm{s}_7\mathrm{c}_9\mathrm{s}_5 + \mathrm{s}_9\mathrm{s}_8\mathrm{s}_5}{\mathrm{c}_7\mathrm{c}_9}\partial_8 - \frac{\mathrm{c}_5\mathrm{s}_6\mathrm{s}_8 - \mathrm{s}_5\mathrm{c}_8}{\mathrm{c}_7}\partial_9 + \frac{\mathrm{s}_5\mathrm{s}_8 + \mathrm{c}_5\mathrm{s}_6\mathrm{c}_8}{\mathrm{c}_7\mathrm{c}_9}\partial_{10},$$
$$J_{23} = x_3\partial_2 - x_2\partial_3 + -\mathrm{th}_6\mathrm{c}_5\partial_5 - \mathrm{s}_5\partial_6 + \frac{\mathrm{c}_5}{\mathrm{ch}_6}\partial_8,$$
$$J_{24} = -x_4\partial_2 - x_2\partial_4 + \frac{\mathrm{t}_7\mathrm{c}_5}{\mathrm{c}_7\mathrm{ch}_6}\partial_5 - \mathrm{t}_7\mathrm{s}_5\mathrm{s}_6\partial_6 - \mathrm{s}_5\mathrm{c}_6\partial_7 + \frac{\mathrm{th}_6\mathrm{s}_7\mathrm{c}_9\mathrm{c}_5 - \mathrm{s}_9\mathrm{s}_6\mathrm{c}_8\mathrm{s}_5 + \mathrm{s}_9\mathrm{c}_5\mathrm{s}_8}{\mathrm{c}_7\mathrm{c}_9}\partial_8 + \frac{\mathrm{c}_5\mathrm{c}_8 + \mathrm{s}_5\mathrm{s}_6\mathrm{s}_8}{\mathrm{c}_7}\partial_9 - \frac{\mathrm{s}_5\mathrm{s}_6\mathrm{c}_8 - \mathrm{c}_5\mathrm{s}_8}{\mathrm{c}_7\mathrm{c}_9}\partial_{10},$$
$$J_{34} = -x_4\partial_3 - x_3\partial_4 + \mathrm{c}_6\mathrm{t}_7\partial_6 - \mathrm{s}_6\partial_7 + \frac{\mathrm{t}_9\mathrm{c}_8\mathrm{c}_6}{\mathrm{c}_7}\partial_8 - \frac{\mathrm{s}_8\mathrm{c}_6}{\mathrm{c}_7}\partial_9 + \frac{\mathrm{c}_6\mathrm{c}_8}{\mathrm{c}_7\mathrm{c}_9}\partial_{10},$$

$$
\begin{aligned}
K_1 = {} & \big(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2\big)\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2 + 2x_1x_3\partial_3 + 2x_1x_4\partial_4 \\
& - 2\left(x_2 + \frac{x_4 \mathrm{t}_7 \mathrm{s}_5}{\mathrm{ch}_6} - x_3 \mathrm{th}_6 \mathrm{s}_5\right)\partial_5 \\
& - 2(x_4 \mathrm{t}_7 \mathrm{s}_6 + x_3)\mathrm{c}_5\partial_6 - 2x_4\mathrm{c}_5\mathrm{c}_6\partial_7 \\
& - 2\left(\frac{x_4 \mathrm{t}_9 \mathrm{s}_6 \mathrm{c}_5 \mathrm{c}_8}{\mathrm{c}_7} + x_4 \mathrm{t}_7 \mathrm{th}_6 \mathrm{s}_5 + \frac{x_3 \mathrm{s}_5}{\mathrm{ch}_6} + \frac{x_4 \mathrm{t}_9 \mathrm{s}_5 \mathrm{s}_8}{\mathrm{c}_7}\right)\partial_8 \\
& + 2\frac{(\mathrm{c}_5\mathrm{s}_6\mathrm{s}_8 - \mathrm{s}_5\mathrm{c}_8)x_4}{\mathrm{c}_7}\partial_9 \\
& - 2\frac{(\mathrm{s}_5\mathrm{s}_8 + \mathrm{c}_5\mathrm{s}_6\mathrm{c}_8)x_4}{\mathrm{c}_7\mathrm{c}_9}\partial_{10} - (2x_1x_{11} - \mathrm{ch}_7\mathrm{c}_5\mathrm{c}_6)\partial_{11} \\
& + (\mathrm{sh}_7\mathrm{sh}_9\mathrm{c}_5\mathrm{c}_6 + \mathrm{ch}_9(\mathrm{s}_5\mathrm{c}_8 - \mathrm{s}_6\mathrm{s}_8\mathrm{c}_5) - 2x_1x_{12})\partial_{12} \\
& + (\mathrm{sh}_9\mathrm{sh}_{10}(\mathrm{s}_5\mathrm{c}_8 - \mathrm{c}_5\mathrm{s}_6\mathrm{s}_8) + \mathrm{ch}_{10}(\mathrm{s}_6\mathrm{c}_8\mathrm{c}_5 + \mathrm{s}_5\mathrm{s}_8) \\
& + \mathrm{sh}_7\mathrm{ch}_9\mathrm{sh}_{10}\mathrm{c}_5\mathrm{c}_6 - 2x_1x_{13})\partial_{13} \\
& + (\mathrm{sh}_9\mathrm{ch}_{10}(\mathrm{s}_5\mathrm{c}_8 + \mathrm{c}_5\mathrm{s}_6\mathrm{s}_8) + \mathrm{sh}_{10}(\mathrm{s}_6\mathrm{c}_8\mathrm{c}_5 + \mathrm{s}_5\mathrm{s}_8) \\
& + \mathrm{sh}_7\mathrm{ch}_9\mathrm{ch}_{10}\mathrm{c}_5\mathrm{c}_6 - 2x_1x_{14})\partial_{14} + 2x_1\partial_{15}, \\
K_2 = {} & 2x_1x_2\partial_1 + \big(-{x_1}^2 + {x_2}^2 - {x_3}^2 + {x_4}^2\big)\partial_{x_2} + 2x_2x_3\partial_3 \\
& + 2x_2x_4\partial_4 + 2\left(\frac{x_4\mathrm{c}_5\mathrm{t}_7}{\mathrm{ch}_6} - x_1 - x_3\mathrm{c}_5\mathrm{th}_6\right)\partial_5 \\
& + 2(x_3 + x_4\mathrm{t}_7\mathrm{s}_6)\mathrm{s}_5\partial_6 + 2x_4\mathrm{s}_5\mathrm{c}_6\partial_7 \\
& + 2\left(\frac{x_4\mathrm{t}_9}{\mathrm{c}_7}(\mathrm{s}_6\mathrm{c}_8\mathrm{s}_5 - \mathrm{c}_5\mathrm{s}_8) - x_4\mathrm{th}_7\mathrm{c}_5 - \frac{x_3\mathrm{c}_5}{\mathrm{ch}_6}\right)\partial_8 \\
& - 2\frac{(\mathrm{c}_5\mathrm{c}_8 + \mathrm{s}_5\mathrm{s}_6\mathrm{s}_8)x_4}{\mathrm{c}_7}\partial_9 + 2\frac{(\mathrm{s}_5\mathrm{s}_6\mathrm{c}_8 - \mathrm{c}_5\mathrm{s}_8)x_4}{\mathrm{c}_7\mathrm{c}_9}\partial_{10} \\
& - (2x_2x_{11} + \mathrm{ch}_7\mathrm{s}_5\mathrm{c}_6)\partial_{11} + \big(\mathrm{ch}_9(\mathrm{c}_5\mathrm{c}_8 + \mathrm{s}_5\mathrm{s}_6\mathrm{s}_8) \\
& - \mathrm{sh}_7\mathrm{sh}_9\mathrm{s}_5\mathrm{c}_6 - 2x_2x_{12}\big)\partial_{12} + \big(\mathrm{sh}_9\mathrm{ch}_{10}\mathrm{c}_5\mathrm{c}_8 \\
& + \mathrm{ch}_{10}\mathrm{c}_5\mathrm{s}_8 - \mathrm{sh}_7\mathrm{sh}_{10}\mathrm{ch}_9\mathrm{s}_5\mathrm{c}_6 - \mathrm{ch}_{10}\mathrm{s}_5\mathrm{s}_6\mathrm{c}_8 \\
& + \mathrm{sh}_9\mathrm{sh}_{10}\mathrm{s}_5\mathrm{s}_6\mathrm{s}_8 - 2x_2x_{13}\big)\partial_{13} \\
& + \big(\mathrm{sh}_9\mathrm{ch}_{10}(\mathrm{c}_5\mathrm{c}_8 + \mathrm{s}_5\mathrm{s}_6\mathrm{c}_8) + \mathrm{sh}_{10}(\mathrm{s}_8\mathrm{c}_5 - \mathrm{s}_5\mathrm{s}_6\mathrm{c}_8) \\
& - \mathrm{sh}_7\mathrm{ch}_9\mathrm{ch}_{10}\mathrm{s}_5\mathrm{c}_6 - 2x_2x_{14}\big)\partial_{14} + 2x_2\partial_{15}, \\
K_3 = {} & 2x_1x_3\partial_1 + 2x_2x_3\partial_{x_2} + \big(-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\big)\partial_3 + 2x_3x_4\partial_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 2\mathrm{th}_6(x_1\mathrm{s}_5 + x_2\mathrm{c}_5)\partial_5 - 2(x_4\mathrm{t}_7\mathrm{c}_6 - x_1\mathrm{c}_5 + x_2\mathrm{s}_5)\partial_6\\
&+ 2x_4\mathrm{s}_6\partial_7 + \left(\frac{x_1\mathrm{s}_5 + x_2\mathrm{c}_5}{\mathrm{ch}_6} - 2\frac{x_4\mathrm{t}_9\mathrm{c}_6\mathrm{c}_8}{\mathrm{c}_7}\right)\partial_8\\
&+ 2\frac{\mathrm{s}_8\mathrm{c}_6x_4}{\mathrm{c}_7}\partial_9 - 2\frac{\mathrm{c}_6\mathrm{c}_8x_4}{\mathrm{c}_7\mathrm{c}_9}\partial_{10} - (\mathrm{ch}_7\mathrm{s}_6 + 2x_3x_{11})\partial_{11}\\
&- (\mathrm{ch}_9\mathrm{c}_6\mathrm{s}_8 + 2x_3x_{12} + \mathrm{sh}_7\mathrm{sh}_9\mathrm{s}_6)\partial_{12}\\
&+ \big(\mathrm{ch}_{10}\mathrm{c}_6\mathrm{c}_8 - \mathrm{sh}_9\mathrm{sh}_{10}\mathrm{c}_6\mathrm{s}_8 - \mathrm{sh}_7\mathrm{ch}_9\mathrm{sh}_{10}\mathrm{s}_6\\
&- 2x_3x_{13}\big)\partial_{13} + \big(\mathrm{ch}_{10}\mathrm{c}_6\mathrm{c}_8 - \mathrm{sh}_9\mathrm{ch}_{10}\mathrm{c}_6\mathrm{s}_8\\
&- \mathrm{sh}_7\mathrm{ch}_9\mathrm{ch}_{10}\mathrm{s}_6 - 2x_3x_{14}\big)\partial_{14} + 2x_3\partial_{15},\\
K_4 = &-2x_1x_4\partial_1 - 2x_2x_4\partial_{x_2} - 2x_4x_3\partial_3 - \big(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\big)\partial_4\\
&+ 2\frac{\mathrm{t}_7(x_1\mathrm{s}_5 + x_2\mathrm{c}_5)}{\mathrm{ch}_6}\partial_5 + 2\mathrm{t}_7(x_1\mathrm{s}_6\mathrm{c}_5 - x_2\mathrm{s}_6\mathrm{s}_5 + x_3\mathrm{c}_6)\partial_6\\
&- 2(x_2\mathrm{c}_6\mathrm{s}_5 - x_1\mathrm{c}_6\mathrm{c}_5 + x_3\mathrm{s}_6)\partial_7\\
&+ 2\left(\frac{\mathrm{t}_9}{\mathrm{c}_7}(x_2\mathrm{s}_5\mathrm{s}_6\mathrm{c}_8 - x_1\mathrm{s}_6\mathrm{c}_5\mathrm{c}_8 - x_3\mathrm{c}_6\mathrm{c}_8 - x_1\mathrm{s}_5\mathrm{s}_8\right.\\
&\left.- x_2\mathrm{s}_8\mathrm{c}_5) - \mathrm{th}_6\mathrm{t}_7(x_1\mathrm{s}_5 + x_2\mathrm{c}_5)\right)\partial_8\\
&- \frac{2}{\mathrm{c}_7}(x_2 - \mathrm{s}_5\mathrm{s}_6\mathrm{s}_8 + x_1\mathrm{c}_5\mathrm{s}_6\mathrm{s}_8 + x_3\mathrm{c}_6\mathrm{s}_8 - x_1\mathrm{s}_5\mathrm{c}_8\\
&- x_2\mathrm{c}_5\mathrm{c}_8)\partial_9 + \frac{2}{\mathrm{c}_7\mathrm{c}_9}(x_1\mathrm{c}_5\mathrm{s}_6\mathrm{c}_8 - x_2\mathrm{s}_5\mathrm{s}_6\mathrm{c}_8 + x_3\mathrm{c}_6\mathrm{c}_8\\
&+ x_1\mathrm{s}_5\mathrm{s}_8 + x_2\mathrm{c}_5\mathrm{s}_8)\partial_{10} + (2x_4x_{11} + \mathrm{sh}_7)\partial_{11}\\
&+ (2x_4x_{12} + \mathrm{ch}_7\mathrm{sh}_9)\partial_{12} + (2x_4x_{13} + \mathrm{ch}_7\mathrm{ch}_9\mathrm{sh}_{10})\partial_{13}\\
&+ (2x_4x_{14} + \mathrm{ch}_7\mathrm{ch}_9\mathrm{ch}_{10})\partial_{14} - 2x_4\partial_{15},\\
D = &\, x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3 + x_4\partial_4 - x_{11}\partial_{11} - x_{12}\partial_{12} - x_{13}\partial_{13}\\
&- x_{14}\partial_{14} + \partial_{15}.
\end{aligned}
$$

Алгебри де Сіттера. Розглянемо групи де Сіттера $\mathrm{SO}(4,1)$ та $\mathrm{SO}(3,2)$, які є групами перетворень ізометрії псевдоевклідових просторів з метричними формами $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2+x_5^2$ та $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2-x_5^2$ відповідно. Вони є групами руху 4-вимірних рімановых просторів сталої кривизни

(простори де Сіттера). Обидва простори де Сіттера описують всесвіт, що розширюється, де радіальні швидкості галактик пропорційні відстаням до точок простору. Для алгебр де Сіттера можна використати ізоморфізми $\mathfrak{c}(3,0) \sim \mathfrak{so}(4,1)$ та $\mathfrak{c}(2,1) \sim \mathfrak{so}(3,2)$ з конформними комутаційними співвідношеннями (1.31)–(1.36) для метричних тензорів $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ та $g_{11} = g_{22} = -g_{33} = 1$ відповідно. Побудувавши породжуючі реалізації алгебраїчним методом з комплементарною частиною $\{P_\mu, J_{\mu\nu}, K_\mu, D\}$, записаною у лекскографічому порядку, отримаємо дві наступні реалізації. Зауважимо, що для обох алгебр де Сіттера можна побудувати спільну реалізацію, параметризувавши структурні сталі параметром, що змінює знак у структурному тензорі, але це суттєво ускладнює обчислення та вигляд реалізацій.

$R_{\text{породжуюча}}(\mathfrak{c}(3,0))$:

$$
\begin{aligned}
&P_1 = \partial_1, \quad P_2 = \partial_2, \quad P_3 = \partial_3, \quad J_{12} = x_2\partial_1 - x_1\partial_2 + \partial_4,\\
&J_{13} = x_3\partial_1 - x_1\partial_3 - \mathrm{th}_5\mathrm{s}_4\partial_4 + \mathrm{c}_4\partial_5 + \frac{\mathrm{s}_4}{\mathrm{ch}_5}\partial_6,\\
&J_{23} = x_3\partial_2 - x_2\partial_3 - \mathrm{th}_5\mathrm{c}_4\partial_4 - \mathrm{s}_4\partial_5 + \frac{\mathrm{c}_4}{\mathrm{ch}_5}\partial_6,\\
&K_1 = \big(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\big)\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2 + 2x_1x_3\partial_3\\
&\qquad + 2(x_3\mathrm{s}_4\mathrm{th}_5 - x_2)\partial_4 - 2x_3\mathrm{c}_4\partial_5 - 2\frac{x_3\mathrm{s}_4}{\mathrm{ch}_5}\partial_6\\
&\qquad + (\mathrm{c}_4\mathrm{c}_5 - 2x_1x_7)\partial_7 + (\mathrm{s}_4\mathrm{ch}_6 - \mathrm{c}_4\mathrm{sh}_5\mathrm{sh}_6 - 2x_1x_8)\partial_8\\
&\qquad + (\mathrm{c}_4\mathrm{s}_5\mathrm{c}_6 + \mathrm{s}_4\mathrm{s}_6 - 2x_1x_9)\partial_9 + 2x_1\partial_{10},\\
&K_2 = 2x_1x_2\partial_1 + \big(x_2^2 - x_1^2 - x_3^2\big)\partial_2 + 2x_2x_3\partial_3\\
&\qquad + 2(x_1 + x_3\mathrm{c}_4\mathrm{th}_5)\partial_4 + 2x_3\mathrm{s}_4\partial_5 - 2\frac{x_3\mathrm{c}_4}{\mathrm{ch}_5}\partial_6\\
&\qquad - (\mathrm{s}_4\mathrm{c}_5 + 2x_2x_7)\partial_7 + (\mathrm{s}_4\mathrm{s}_5\mathrm{s}_6 + \mathrm{c}_4\mathrm{c}_6 - 2x_8x_2)\partial_8\\
&\qquad + (\mathrm{c}_4\mathrm{s}_6 - \mathrm{s}_4\mathrm{s}_5\mathrm{c}_6 - 2x_2x_9)\partial_9 + 2x_2\partial_{10},\\
&K_3 = 2x_1x_3\partial_1 + 2x_2x_3\partial_2 + \big(x_3^2 - x_1^2 - x_2^2\big)\partial_3\\
&\qquad - 2(x_1\mathrm{s}_4 + x_2\mathrm{c}_4)\mathrm{th}_5\partial_4 + 2(x_1\mathrm{c}_4 - x_2\mathrm{s}_4)\partial_5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2\frac{x_1\mathrm{s}_4 + x_2\mathrm{c}_4}{\mathrm{ch}_5}\partial_6 - (\mathrm{s}_5 + 2x_3x_7)\partial_7 \\
&- (\mathrm{c}_5\mathrm{s}_6 + 2x_8x_3)\partial_8 + (\mathrm{c}_5\mathrm{c}_6 - 2x_9x_3)\partial_9 + 2x_3\partial_{10}, \\
D &= x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3 - x_7\partial_7 - x_8\partial_8 - x_9\partial_9 + \partial_{10}.
\end{aligned}
$$

$R_{\text{породжуюча}}(\mathfrak{c}(2,1))$:

$$
\begin{aligned}
&P_1 = \partial_1, \quad P_2 = \partial_2, \quad P_3 = \partial_3, \quad J_{12} = x_2\partial_1 - x_1\partial_2 + \partial_4, \\
&J_{13} = -x_3\partial_1 - x_1\partial_3 + \mathrm{s}_4\mathrm{t}_5\partial_4 + \mathrm{c}_4\partial_5 + \frac{\mathrm{s}_4}{\mathrm{c}_5}\partial_6, \\
&J_{23} = -x_3\partial_2 - x_2\partial_3 + \mathrm{c}_4\mathrm{t}_5\partial_4 - \mathrm{s}_4\partial_5 + \frac{\mathrm{c}_4}{\mathrm{c}_5}\partial_6, \\
&K_1 = \left(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2\right)\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2 + 2x_1x_3\partial_3 \\
&\quad - 2(x_2 + x_3\mathrm{s}_4\mathrm{t}_5)\partial_4 - 2x_3\mathrm{c}_4\partial_5 - 2\frac{x_3\mathrm{s}_4}{\mathrm{c}_5}\partial_6 \\
&\quad + (\mathrm{c}_4\mathrm{ch}_5 - 2x_1x_7)\partial_7 + (\mathrm{s}_4\mathrm{ch}_6 + \mathrm{c}_4\mathrm{sh}_5\mathrm{sh}_6 - 2x_1x_8)\partial_8 \\
&\quad + (\mathrm{s}_4\mathrm{sh}_6 + \mathrm{c}_4\mathrm{sh}_5\mathrm{ch}_6 - 2x_1x_9)\partial_9 + 2x_1\partial_{10}, \\
&K_2 = 2x_1x_2\partial_1 + \left(x_2^2 + x_3^2 - x_1^2\right)\partial_2 + 2x_2x_3\partial_3 \\
&\quad - 2(x_3\mathrm{c}_4\mathrm{t}_5 - x_1)\partial_4 + 2x_3\mathrm{s}_4\partial_5 - 2\frac{x_3\mathrm{c}_4}{\mathrm{c}_5}\partial_6 \\
&\quad - (2x_2x_7 + \mathrm{s}_4\mathrm{ch}_5)\partial_7 + (\mathrm{c}_4\mathrm{ch}_6 - \mathrm{s}_4\mathrm{sh}_5\mathrm{sh}_6 - 2x_2x_8)\partial_8 \\
&\quad + (\mathrm{c}_4\mathrm{sh}_6 - \mathrm{s}_4\mathrm{sh}_5\mathrm{ch}_6 - 2x_2x_9)\partial_9 + 2x_2\partial_{10}, \\
&K_3 = -2x_1x_3\partial_1 - 2x_2x_3\partial_2 - \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\partial_3 \\
&\quad + 2(\mathrm{t}_5(x_1\mathrm{s}_4 + x_2\mathrm{c}_4)\partial_4 + 2(x_1\mathrm{c}_4 - x_2\mathrm{s}_4)\partial_5 \\
&\quad + 2\frac{x_1\mathrm{s}_4 + x_2\mathrm{c}_4}{\mathrm{c}_5}\partial_6 + (2x_3x_7 + \mathrm{sh}_5)\partial_7 \\
&\quad + (\mathrm{ch}_5\mathrm{sh}_6 + 2x_3x_8)\partial_8 + (\mathrm{ch}_5\mathrm{ch}_6 + 2x_3x_9)\partial_9 - 2x_3\partial_{10}, \\
&D = x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3 - x_7\partial_7 - x_8\partial_8 - x_9\partial_9 + \partial_{10}.
\end{aligned}
$$

Звя'зок з алгеброю Пуанкаре. Класична десятивимірна алгебра Пуанкаре $\mathfrak{p}(1,3)$ породжується операторами $\{P_\mu,\ J_{\mu\nu}\}$ з комутаційними співвідношеннями (1.31) та (1.32). Розширивши цей набір комутаційних

співвідношень наступними

$$[P_\nu, P_\mu] = \tau J_{\mu\nu}, \quad \tau \in \mathbb{R} \tag{1.38}$$

отримаємо добре визначену 10-вимірну алгебру Лі, яка є деформацією $\mathfrak{p}^\tau(1,3)$ алгебри $\mathfrak{p}(1,3)$ до обох алгебр де Сіттера одночасно. Насправді, для $\tau = 0$ $\mathfrak{p}^\tau(1,3)$ співпадає з алгеброю Пуанкаре, для $\tau \geq 0$ — $\mathfrak{p}^\tau(1,3) \sim \mathfrak{so}(4,1)$, а для $\tau \leq 0$ — $\mathfrak{p}^\tau(1,3) \sim \mathfrak{so}(3,2)$. Таким чином, можна побудувати універсальну реалізацію обох алгебр де Сіттера та алгебри Пуанкаре, використовуючи структурні сталі деформованої алгебри (1.31), (1.32) та (1.38). Зворотній зв'язок між алгебрами де Сіттера та Пуанкаре задається стандартною контракцією Іньоню–Вігнера відносно шестивимірної підалгебри $\mathfrak{so}(3,1)$.

Побудовані реалізації можна використати для знаходження диференціальних інваріантів та відповідних інваріантних рівнянь.

1.9. Диференціальні інваріанти та інваріантні рівняння

Задача опису диференціальних рівнянь чи систем диференціальних рівнянь, інваріантних відносно деякої групи або алгебри Лі, еквівалентна знаходженню диференціальних інваріантів відповідного порядку, оскільки саме довільна функція від таких інваріантів (регулярних та сингулярних) задає інваріантне диференціальне рівняння. Теорію диференціальних інваріантів груп та алгебр Лі започатковано у класичних працях Лі, Тресса і Картана [138, 139] та розвинено у роботах Овсяннікова, Олвера і Фелса [36, 37, 120, 123]. Диференціальні інваріанти широко досліджувались для відомих реалізацій алгебр лі важливих з точки зору фізичних застосувань, наприклад: для алгебри Пуанкаре [6], для алгебри Галілея та конформної алгебри [147], для групи поворотів та її розширень [40]. Для означення та обчислення диференціальних інваріантів суттєвим є

розподіл змінних на множини залежних та незалежних змінних. У цьому параграфі досліджуються задачі в яких є дві залежні змінні x, y та одна незалежна змінна t. Введемо необхідні означення та сформулюємо твердження.

Розглянемо n-вимірну алгебру Лі $\mathfrak{g}$ векторних полів на многовиді M розмірності три з базисними операторами

$$e_i = \xi_i(t,x,y)\partial_t + \eta_i(t,x,y)\partial_x + \zeta_i(t,x,y)\partial_y, \quad i = 1,\dots,n. \tag{1.39}$$

Продовжену алгебру $\mathrm{pr}^{(k)}\mathfrak{g}$ утворюють диференціальні оператори першого порядку, що діють на просторі струменів M^k

$$e_i^{(k)} = \xi_i(t,x,y)\partial_t + \eta_i(t,x,y)\partial_x + \zeta_i(t,x,y)\partial_y + \\ + \sum_{l=1}^{k} \left(\eta_i^l(t,x_{(l)},y_{(l)})\partial_{x^{(l)}} + \zeta_i^l(t,x_{(l)},y_{(l)})\partial_{y^{(l)}}\right). \tag{1.40}$$

Тут і надалі $k \geq 0$, $i = 1,\dots,n$, символи $x_{(l)}$ та $y_{(l)}$ позначають набори $(x,x',\dots,x^{(l)})$ та $(y,y',\dots,y^{(l)})$ із залежних змінних x, y та їх похідних по t порядків не вище за l. У випадку однієї незалежної та двох залежних змінних розмірність простору струменів порядку k дорівнює $2k+3$.

Означення 1.35 ([123]). *Диференціальним інваріантом* порядку k алгебри Лі $\mathfrak{g}$ називають гладку функцію

$$I = I(t,x_{(k)},y_{(k)}):\ \mathbb{R}^{(2k+3)} \to \mathbb{R},$$

таку, що $e_i^{(k)} I(t,x_{(n)},y_{(n)}) = 0$.

З означення безпосередньо випливає, що будь-який диференціальний інваріант порядку l є диференціальним інваріантом порядку k, якщо $l \leq k$.

Розглянемо матриці P_k утворені коефіцієнтами k-продовжених операторів

$$(P_k)_i = (\xi_i, \eta_i, \eta_i^1, \dots, \eta_i^k, \zeta_i, \zeta_i^1, \dots, \zeta_i^k),\ i = 1,\dots,n.$$

Позначимо їх ранги $r_k = \operatorname{rank}(P_k)$, для зручності позначимо через r_0 — ранг матриці початкової реалізації. Послідовність $\{r_k\}$, $k \in 0, 1, \ldots,$ — неспадна, обмежена значенням n та досягає його, тому існує число

$$\nu := \min\{k \in \mathbb{N} \mid r_k = n\}$$

та мають місце співвідношення $r_\nu = r_{\nu+1} = \cdots = r$.

Кількість функціонально незалежних диференціальних інваріантів порядку k алгебри $\mathfrak{g}$ обчислюється за формулою

$$d_k = 2k + 3 - r_k.$$

Усі диференціальні інваріанти заданого порядку можна отримати за допомогою скінченної кількості визначених операцій з певного мінімального набору диференціальних інваріантів. Розглянемо, як це можна реалізувати у загальному випадку.

Означення 1.36 ([123]). *Універсальним диференціальним інваріантом* порядку k алгебри $\mathfrak{g}$ називається максимальний набір I_k функціонально незалежних диференціальних інваріантів порядку не вище k (тобто інваріантів продовженої алгебри $\mathrm{pr}^{(k)}\mathfrak{g}$).

Оскільки будь-який диференціальний інваріант I порядку k з необхідністю є диференціальним оператором порядку $n + l$, $l \geq 0$ цієї ж алгебри, то універсальний диференціальний інваріант I_{n+l} можна отримати доповненням універсального диференціального інваріанта I_k диференціальними інваріантами вищих порядків.

Означення 1.37 ([123]). Диференціальний оператор δ на нескінченно продовженому просторі потоків $M^{(\infty)}$ називається *оператором інваріантного диференціювання* алгебри $\mathfrak{g}$, якщо для будь-кого диференціального інваріанта I алгебри $\mathfrak{g}$ функція δI також є диференціальним інваріантом відповідного продовження $\mathfrak{g}$.

Будь-який оператор δ, що комутує з усіма формально нескінченно продовженими базисними елементами e_i^∞ алгебри Лі, є оператором інваріантного диференціювання.

Для кожної алгебри Лі $\mathfrak{g}$ існує скінченний *базис диференціальних інваріантів*, тобто скінченний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів такий, що будь-який диференціальний інваріант $\mathfrak{g}$ можна отримати з нього за допомогою скінченної кількості функціональних операцій та операцій інваріантного диференціювання. Базис диференціальних інваріантів групи G завжди міститься в універсальному диференціальному інваріанті $\mathrm{I}_{\nu+1}$.

Наслідок 1.38. *Для повного опису усіх диференціальних інваріантів фіксованої реалізації алгебри Лі досить обрати множини залежних і незалежних змінних, побудувати функціональний базис диференціальних інваріантів та оператори інваріантного диференціювання.*

Конструктивна процедура побудови операторів інваріантного диференціювання виводиться безпосередньо з умови їх комутування з формально нескінченно продовженими елементами алгебри. А саме, шукаємо оператор інваріантного диференціювання як оператор повного диференціювання D_t з додатковим множником λ, що залежить від t, $x_{(\nu)}$ та $y_{(\nu)}$: $X = \lambda(t, x_{(\nu)}, y_{(\nu)})D_t$, де $\lambda\colon M^{(\nu)} \to \mathbb{R}$. Функція λ неявно визначається рівнянням $\varphi(t, x_{(\nu)}, y_{(\nu)}, \lambda) = 0$, де φ задовольняє умову

$$(e_i^{(\nu)} + (\lambda D_x)\xi_i\partial_\lambda)\varphi = 0.$$

Повний опис множини диференціальних інваріантів дозволяє описати 'регулярну' частину диференціальних рівнянь чи систем диференціальних рівнянь інваріантних відносно алгебри $\mathfrak{g}$, як довільні функції від диференціальних інваріантів. 'Сингулярна' частина інваріантних рівнянь може бути записана для тих порядків похідних k, коли матриця P_k має розмірність $n \times n$, за такої умови, інваріантні рівняння набувають вигляду визначників Лі, а саме $\det(P_k) = 0$.

При дослідженні інваріантних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, зокрема систем ньютонівського типу, вини-

кає питання про можливість запису такої системи у нормальній формі

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= F(t,x,y,\dot{x},\dot{y}),\\ \ddot{y} &= G(t,x,y,\dot{x},\dot{y}). \end{aligned} \tag{1.41}$$

Аналізуючи диференціальні інваріанти можна сформулювати критерій існування інваріантних систем вигляду (1.41) для заданої алгебри Лі.

Твердження 1.39. *Алгебра Лі векторних полів допускається нормальною регулярною системою типу* (1.41) *тоді і тільки тоді, коли* $r_1 = r_2$.

Доведення. Нехай для алгебри Лі $\mathfrak{g}$ виконується рівність $r_1 = r_2$. Тоді, оскільки $d_2 - d_1 = 2$, то універсальний диференціальний інваріант другого порядку I_2 містить рівно два диференціальні інваріанти $\tilde{I}(t,x,y,\dot{x},\dot{y},\ddot{x},\ddot{y})$ та $\hat{I}(t,x,y,\dot{x},\dot{y},\ddot{x},\ddot{y})$, які явно залежать від других похідних. Іншими словами $I_2 = \{I_1, \tilde{I}, \hat{I}\}$ та для функціональної незалежності вищевказаного набору має виконуватися наступна умова

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{I}'_{\ddot{x}} & \hat{I}'_{\ddot{x}} \\ \tilde{I}'_{\ddot{y}} & \hat{I}'_{\ddot{y}} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{1.42}$$

Помітимо, що регулярна система другого порядку, інваріантна відносно даної алгебри Лі, запишеться у вигляді

$$F(I_1, \tilde{I}, \hat{I}) = 0, \quad G(I_1, \tilde{I}, \hat{I}) = 0.$$

Умова (1.42) гарантує, що система локально може бути розв'язана відносно змінних $\ddot{x}$ та $\ddot{y}$

$$\ddot{x} = f(t,x,y,\dot{x},\dot{y}), \quad \ddot{y} = g(t,x,y,\dot{x},\dot{y}),$$

що доводить достатність.

Навпаки, нехай регулярна система, інваріантна відносно алгебри Лі $\mathfrak{g}$, має вигляд (1.41), тоді функції $\tilde{I} = \ddot{x} - F(t,x,y,\dot{x},\dot{y})$ і $\hat{I} = \ddot{y} - G(t,x,y,\dot{x},\dot{y})$ є диференціальними інваріантами другого порядку, причому видно, що для цих інваріантів виконується умова (1.42). Так, $d_2 - d_1 = 2$ та, беручи до уваги, що у випадку двох залежних та однієї незалежної змінних $d_2 - d_1 = (2 + r_1 - r_2)$, отримуємо $r_1 = r_2$, що і треба було довести. □

Алгебра Галілея найменшої розмірності. Класична редукована алгебра Галілея $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_1(1)$ одновимірного простору породжується операторами P, G та T з єдиним ненульовим комутаційним співвідношенням $[G,T]=P$. Для побудови диференціальних інваріантів, і, відповідно, інваріантних диференціальних рівнянь необхідно знайти реалізації $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_1(1)$. Ця алгебра Галілея є алгеброю найменшої розмірності, а саме три, вона ізоморфна алгебрі Лі $A_{3.1}$ з добутком $[e_2,e_3]=e_1$. Усі її точні нееквівалентні реалізації було побудовано прямим методом у роботі [128] та доповнено неточними реалізаціями у роботі [115], повний перелік підалгебр та відповідних їм реалізацій наведено у параграфі 1.6.

Використовуючи контракції (див. рис. 1.3) знайдені у [108], побудуємо деформації алгебри Галілея $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_1(1)\cong A_{3.1}$.

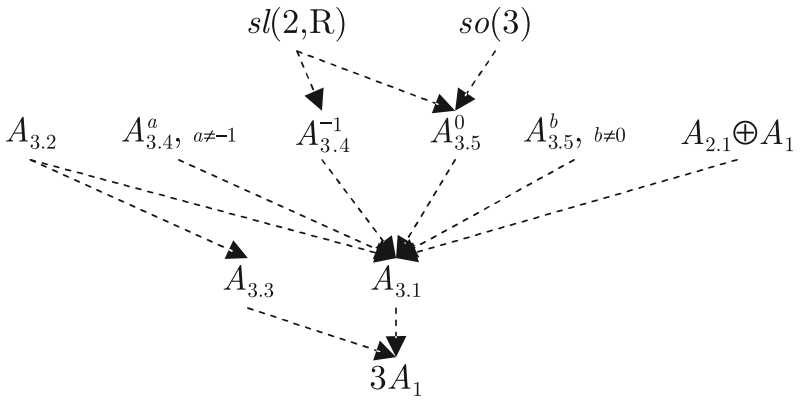


Рис. 1.3. Контракції тривимірних алгебр Лі над полем дійсних чисел [108].

Алгебра $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_1(1)$ належить до замикання орбіт усіх тривимірних алгебр за винятком алгебри Лі $A_{3.3}$ та абелевої алгебри $3A_1$. Явний вигляд комутаційних співвідношень деформованих алгебр отримується дією матриці контракції на структурні сталі. Наприклад, контракція Іньоню–Вігнера з алгебри $A^\alpha_{3.4}$ до алгебри $A_{3.1}$ реалізується матрицею контракції $\begin{pmatrix} q(1-\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}$, де q — параметр контракції. Пряме застосування цієї матриці дозволяє побудувати деформовану алгебру Лі $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}^q_1(1)=\langle P,\,G,\,T\rangle$ з новими q-параметризованими комутаційними співвідношеннями $[\cdot,\cdot]_q$

$$[P,T]_q=qP,\quad [G,T]_q=P+\alpha qG,\quad q\in\mathbb{R}.$$

Зауважимо, що для $q = 0$ деформована алгебра $\mathrm{A\bar{G}}_1^q(1)$ співпадає вихідною алгеброю $\mathrm{A\bar{G}}_1(1)$, а для $\alpha = -1$ та $q \neq 0$ $\mathrm{A\bar{G}}_1^q(1)$ ізоморфна найменшій алгебрі Пуанкаре $\mathfrak{p}(1,1) = \langle P_0,\, P_1,\, J_{01}\rangle$.

Аналогічно будуємо усі можливі деформації редукованої класичної алгебри Галілея $\mathrm{A\bar{G}}_1(1)$.

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to A_{3.1}$ породжує деформацію $A\bar{G}_1^{q_1}(1)$ з добутком $[\cdot,\cdot]_{q_1}$:

$$[P,G]_{q_1} = -2q_1G, \quad [P,T]_{q_1} = 2q_1T, \quad [G,T]_{q_1} = P, \quad q_1 \in \mathbb{R}.$$

$so(3) \to A_{3.1}$ породжує деформацію $A\bar{G}_1^{q_2}(1)$ з добутком $[\cdot,\cdot]_{q_2}$:

$$[P,G]_{q_2} = q_2^2T, \quad [P,T]_{q_2} = -q_2^2G, \quad [G,T]_{q_2} = P, \quad q_2 \in \mathbb{R}.$$

$A_{2.1} \oplus A_1 \to A_{3.1}$ породжує деформацію $\mathrm{A\bar{G}}_1^{q_3}(1)$ з добутком $[\cdot,\cdot]_{q_3}$:

$$[P,G]_{q_3} = q_3P, \quad [G,T]_{q_3} = P, \quad q_3 \in \mathbb{R}.$$

$A_{3.2} \to A_{3.1}$ породжує деформацію $A\bar{G}_1^{q_4}(1)$ з добутком $[\cdot,\cdot]_{q_4}$:

$$[P,T]_{q_4} = q_4P, \quad [G,T]_{q_4} = P + q_4G, \quad q_4 \in \mathbb{R}.$$

$A_{3.5}^b \to A_{3.1}$ породжує деформацію $\mathrm{A\bar{G}}_1^{q_5}(1)$ з добутком $[\cdot,\cdot]_{q_5}$:

$$[P,T]_{q_5} = q_5bP - q_5^2G, \quad [G,T]_{q_5} = P + q_5bG, \quad q_5 \in \mathbb{R}.$$

Використовуючи алгебраїчний метод (див. параграф 1.4), побудуємо породжуючі реалізації усіх деформованих алгебр Галілея $\mathrm{A\bar{G}}_1(1)$, отримані реалізації маркуються параметрами деформації $q,\, q_1, \ldots, q_5$.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A\bar{G}}_1^{q}(1): && P = \partial_1,\, G = \partial_2,\, T = (qx_1{+}x_2)\,\partial_1{+}\alpha q x_2\partial_2{+}\partial_3,\\
&\mathrm{A\bar{G}}_1^{q_1}(1): && P = 2q_1x_1\partial_1{+}\partial_2,\, G = \partial_1,\, T = q_1x_1^2\partial_1{+}x_1\partial_2{+}e^{2q_1x_2}\partial_3,\\
&\mathrm{A\bar{G}}_1^{q_2}(1): && P = -q_2\cos(q_2x_1)\,\mathrm{tg}(q_2x_2)\partial_1{+}q_2\sin(q_2x_1)\partial_2{+}\tfrac{\cos q_2x_1}{\cos q_2x_2}\partial_3,\\
& && G = \sin(q_2x_1)\,\mathrm{tg}(q_2x_2)\partial_1{+}\cos(q_2x_1)\partial_2{-}\tfrac{\sin q_2x_1}{q_2\cos q_2x_2}\partial_3,\, T = \partial_1,\\
&\mathrm{A\bar{G}}_1^{q_3}(1): && P = \partial_1,\, G = (q_3x_1{-}x_2)\,\partial_1{+}\partial_3,\, T = \partial_2,\\
&\mathrm{A\bar{G}}_1^{q_4}(1): && P = \partial_1,\, G = \partial_2,\, T = (q_4x_1{+}x_2)\,\partial_1{+}q_4x_2\partial_2{+}\partial_3,\\
&\mathrm{A\bar{G}}_1^{q_5}(1): && P = \partial_1,\, G = \partial_2,\, T = (bq_5x_1{+}x_2)\,\partial_1{+}q_5\,(bx_2{-}q_5x_1)\,\partial_2{+}\partial_3.
\end{aligned}$$

Знайдемо базиси диференціальних інваріантів та оператори інваріантного диференціювання для деформованих алгебр Галілея. Вважаємо, що змінні $\{x_1, x_2, x_3\}$ містять одну незалежну t та дві залежні змінні $\{u_1, u_2\}$. Оскільки розглядаються породжуючі реалізації, то в усіх випадках ранг реалізації r_0 співпадає з розмірністю алгебри, звідки випливає, що немає диференціальних інваріантів нульового порядку (крім визначників Лі), а базис диференціальних інваріантів може бути обраний як універсальний інваріант $\mathbf{I}_1$ першого порядку. Оператори інваріантного диференціювання знаходимо у вигляді $D = \lambda(t, u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, в свою чергу, неявний вигляд коефіцієнта λ, а саме $\varphi(t, u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2, \lambda)$, є інваріантом розширення векторних полів P, T та G. Для даної задачі розширення $\bar{e}$ векторного поля

$$e = \xi(t, u_1, u_2)\partial_t + \eta_1(t, u_1, u_2)\partial_{u_1} + \eta_2(t, u_1, u_2)\partial_{u_2}$$

має вигляд

$$\bar{e} = \lambda(t, u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi(t, u_1, u_2)\partial_\lambda + \xi\partial_t + \eta_1\partial_{u_1} + \eta_2\partial_{u_2}.$$

Сингулярні інваріанти виписуються з умов виродження рангу продовжених реалізацій, для даної задачі застосовуємо метод мінорів. Наступна таблиця містить базис диференціальних інваріантів, оператори інваріантного диференціювання (D) та сингулярні інваріанти у формі визначників Лі (які позначено L).

Алгебра	Базис диференціальних інваріантів	D	L
$\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_1^q(1)$	$\frac{(\alpha-1)q-\dot{u}_1}{(\alpha-1)^2q^2-\dot{u}_2}$, $\frac{(\alpha-1)q\dot{u}_2\mathrm{e}^{(\alpha-1)qu_2}}{\dot{u}_1}$	$\mathrm{e}^{(q+\dot{u}_1)u_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$	tu_1u_2
$\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_1^{q_1}(1)$	$\dot{u}_1\mathrm{e}^{2q_1u_1}-u_2$, $q_1u_2^2+\mathrm{e}^{2q_1u_1}(\dot{u}_2-2q_1\dot{u}_1u_2)$	$\mathrm{e}^{2q_1u_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$	$\mathrm{e}^{2q_1u_1}$
$\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_1^{q_2}(1)$	$\frac{1}{q_2^2}\operatorname{arctg}(\frac{\dot{u}_1}{\cos(q_2u_1)})-u_2$, $\frac{q_2\dot{u}_2+\sin(q_2u_1)}{q_2\sqrt{\dot{u}_1^2+\cos^2(q_2u_1)}}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$	$\frac{-1}{\cos(q_1u_2)}$
$\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_1^{q_3}(1)$	$\frac{q_3\dot{u}_2}{\dot{u}_1}$, $\frac{(q_3-\dot{u}_1)\mathrm{e}^{-q_3u_2}}{q_3\dot{u}_1}$	$\mathrm{e}^{q_3u_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$	-1
$\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_1^{q_4}(1)$	$\frac{2u_2\dot{u}_1-1}{\dot{u}_1}$, $\frac{\dot{u}_2^2\mathrm{e}^{2q_4u_2}}{\dot{u}_1}$	$\mathrm{e}^{q_4u_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$	1
$\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_1^{q_5}(1)$	$-\gamma u_2+2f(\dot{u}_1)$, $\frac{(\dot{u}_1+\dot{u}_2+bq+q^2)\mathrm{e}^{-\frac{(bq+q^2)f(\dot{u}_1)}{\gamma}}}{\sqrt{-bq+(bq+q^2)\dot{u}_1+\dot{u}_1^2}}$	$\mathrm{e}^{bq_5u_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$	1

У вищенаведеній таблиці

$$f(\dot{u}_1)=\operatorname{arcth}\frac{2\dot{u}_1+bq+q^2}{\gamma} \qquad \text{та} \qquad \gamma=\sqrt{4bq+(bq+q^2)^2}.$$

Незважаючи на низьку розмірність алгебри Галілея $A\bar{G}_1(1)$ та її деформацій, ряд відомих диференціальних рівнянь інваріантні відносно них. Наприклад, відносно алгебри $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}^q(1)$ інваріантне рівняння Кавахари

$$u_t + uu_x + \lambda t^\rho u_{xxx} + \varepsilon t^{\frac{5\rho+2}{3}} u_{xxxxx} = 0.$$

Узагальнене рівняння Кортевега–де Фріза

$$u_t = u^n u_x + \varepsilon u_{xxx}, \quad n \neq 0, 1, \quad \varepsilon \neq 0$$

задовольняє алгебрі симетрії

$$\langle \partial_t,\, \partial_x,\, 3nt\partial_t + nx\partial_x - 2u\partial_u \rangle,$$

яка ізоморфна $A_{3.4}^{1/3}$ та еквівалентна породжуючій реалізації деформованої алгебри Галілея $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_1^q(1)$ для $q = 1$ та $\alpha = \frac{1}{3}$.

Рівняння Кортевега–де Фріза п'ятого порядку, з коефіцієнтом залежним від часу

$$u_t + uu_x + t^\rho u_{xxxxx} = 0, \quad \rho \neq 0$$

також має алгебру симетрії, що ізоморфна $A_{3.4}^{\frac{\rho-4}{\rho+1}}$

$$\langle \partial_x,\, t\partial_x + \partial_u,\, 5t\partial_t + (\rho+1)x\partial_x + (\rho-4)u\partial_u \rangle.$$

Ці оператори еквівалентні породжуючій реалізації деформованої алгебри Галілея $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_1^q(1)$ для $q = 1$ та $\alpha = \frac{\rho-4}{\rho+1}$.

Класичне рівняння Кавахари, яке, зокрема, описує довгі хвилі в неглибокій рідині під кригою при стисненні,

$$u_t + uu_x + \lambda u_{xxx} + \varepsilon u_{xxxxx} = 0, \quad \lambda\varepsilon \neq 0,$$

має максимальну алгебру симетрії

$$\langle \partial_x,\, t\partial_x + \partial_u,\, \partial_t \rangle,$$

що ізоморфна алгебрі Галілея $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_1(1)$ з реалізацією $R_{\mathfrak{h}_0}$, при умові заміни змінної $x_3 \mapsto -x_3$.

Ще одним прикладом є рівняння реакції-дифузій з довільними сталими n та m, такими, що $n\varepsilon \neq 0$, $m \neq 0, 1$:

$$u_t = (u^n u_x)_x + \varepsilon u^m.$$

При $(n, m) \neq (-4/3, -1/3)$ це рівняння має тривимірну алгебру симетрії

$$e_1 = \partial_t, \quad e_2 = \partial_x, \quad e_3 = 2(1-m)t\partial_t + (1-m+n)x\partial_x + 2u\partial_u,$$

яка перетворенням ізоморфізму $\tilde{e}_3 = \frac{1}{2(1-m)}e_3$ зводиться до алгебри Лі $A_{3.4}^{\frac{1-m+n}{2(1-m)}}$, тобто рівняння реакції-дифузії інваріантне відносно деформованої алгебри Галілея $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_1^q(1)$ для параметра деформації $q = \frac{1-m+n}{2(1-m)}$, а оператори еквівалентні породжуючій реалізації алгебри $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_1^{q=\frac{1-m+n}{2(1-m)}}(1)$.

Розглянемо узагальнену систему Єрмакова

$$\ddot{x} = \frac{1}{x^3}F\left(\frac{y}{x}\right), \quad \ddot{y} = \frac{1}{y^3}G\left(\frac{y}{x}\right).$$

Для довільних F та G її максимальна алгебра інваріантності породжується операторами

$$e_1 = \partial_t, \quad e_2 = 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y, \quad e_3 = t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y,$$

тому узагальнена система Єрмакова інваріантна відносно простої алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, що належить множині деформацій алгебри Галілея $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_1(1)$.

Класична задача Кеплера, що є однією з фундаментальних задач класичної механіки та електростатики, у полярних координатах є системою другого порядку

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\mu}{r^2} = 0, \quad r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0.$$

Ця система інваріантна відносно алгебри Лі $A_{2.1} \oplus A_1$ з базисом

$$e_1 = \partial_t, \quad e_2 = \partial_\theta, \quad e_3 = t\partial_t + \frac{2}{3}r\partial_r.$$

Таким чином, класична задача Кеплера інваріантна відносно деформованої алгебри Галілея $\mathrm{A}\bar{\mathrm{G}}_1^{\hat{q}}(1)$.

Крім опису диференціальних інваріантів найменшої алгебри Галілея, в рамках досліджень диференціальних інваріантів, було отримано вичерпний опис систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантних відносно дійсних алгебр Лі розмірностей не вище чотирьох [1,44]. Для цього було використано реалізації низькорозмірних алгебр Лі векторними полями у просторі не більше трьох змінних [128]. Залежні та незалежну змінні було обрано з міркувань максимального спрощення обчислень, проте, при потребі, отримані системи перетворюються до систем з іншим набором змінних за допомогою перетворень годографа та перенумерації. Для відокремлення систем диференціальних рівнянь другого порядку, що можуть бути представлені у нормальній формі, було використано твердження 1.41.

Серед повного переліку інваріантних систем (див. [1]) міститься кілька вищезгаданих, а також двовимірна задача з центральною силою

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \left(\frac{\mu}{(x^2+y^2)^2} - \epsilon\right)\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}, \quad \mu, \epsilon > 0, \quad \boldsymbol{r} = (x, y),$$

інваріантна відносно реалізації алгебри Лі $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus A_1$.

Системи, що відповідають розв'язним алгебрам Лі, можуть бути проінтегровані у квадратурах, для решти систем їх симетрії використовуються для пониження порядку рівнянь.

Розділ 2

Майже періодичні функції, квазікристали та деякі їх застосування

Вперше квазікристали виникли у задачах про замощення площини геометричними фігурами з певного скінченного набору. Такі задачі виникли у 1960-х роках у роботах логіка Ван Хао (доміно Вана) у зв'язку з проблемами вибору та прийняття рішень. Ван Хао звів такі задачі до задач про можливість покриття площини певними геометричними фігурами без пропусків та перетинів. А саме, існування розв'язків логічних задач зводилось до можливості періодичного замощення площини певними многокутниками.

У 1970-х роках відомий фізик та математик Роджер Пенроуз побудував приклади неперіодичного покриття (замощення) площини многокутниками (плитками) — так звані мозаїки Пенроуза. Жодна зсунута копія мозаїки Пенроуза не співпадає з оригіналом (не допускає симетрій зсуву, тобто не періодична), проте ці мозаїки самоподібні (фрактальні, тобто ті самі фрагменти зустрічаються при масштабуванні всієї структури) також мозаїки Пенроуза допускають дзеркальні відображення та повороти на кут $\frac{2\pi}{5}$. Дві останні властивості мозаїк Пенроуза обґрунтовують дослідження їх зв'язків з групами Коксетера та аналогічними ґратками.

Вперше фізичні квазікристали були відкриті Даніелем Шехтманом у 1982 р. під час вивчення швидко замороженого сплаву алюмінію та магнію, саме ці дослідження були удостоєні Нобелівської премії у 2011 р. Відкриття квазікристалів та необхідність досліджень явищ пов'язаних з ними у фізиці твердого тіла вимагають побудови якісних та строгих

математичних моделей квазікристалів та розвитку аналізу функцій ‘чутливих’ до квазікристалів. Теорія квазікристалів є новою, не усталеною галуззю, яка активно розвивається.

Квазікристали, квазікристалічні фотонні кристали, хвильові експерименти Фарадея та ряд інших фізичних об’єктів і явищ демонструють властивості майже періодичності. Типовим прикладом є потенціальне поле фізичного квазікристала. Характерною для квазікристалів є структурована далекосяжна впорядкованість, але при цьому відсутній періодичний порядок. Таким чином, потенціал є неперіодичною функцією, але належить до множини майже періодичних функцій.

Зазвичай подібні структури моделюються за наступною схемою: беремо скінченну частину об’єкта дослідження, накладаємо періодичні крайові умови, дискретизуємо і зводимо об’єкт до періодичного апроксиманта та застосовуємо звичайну кристалографію. Незважаючи на те, що подібний підхід досить успішно застосовується у багатьох задачах з моделювання, він не є цілком задовільним, оскільки майже періодичний порядок принципово відрізняється від періодичного порядку і неспіврозмірність, що лежить в основі квазікристалів проникає в кожну з частин теорії.

Нашою метою є побудова дискретного аналізу для майже періодичних функцій, який базується на теоретико-групових методах, скінченних групах та дуальних до них. Фур’є-наближення функцій, обчислені дискретним методом, також мають бути майже періодичними та однотипно наближувати цільові функції на всіх їхніх областях визначення.

Теорію майже періодичних функцій започаткував Г. Бор [13] і її суттєво було розвинено у роботах А. Безіковича [8], С. Бочнера [10, 11], Дж. фон Неймана [12], Н. Вінера [145], Г. Вейля [144] та інших.

Поява квазікристалів призвела до інтенсивного розвитку теорії перерізів та проєкцій [58, 92, 94, 135], яка лягла в основу експериментальних та теоретичних досліджень пов’язаних з аперіодичними множинами. Даний розділ дисертації присвячено квазікристалам (як модельним множи-

нам або множинам побудованим за допомогою перерізів та проекцій), пов'язаним з ними майже періодичним функціям та їх застосуванням. У другому та третьому розділах дисертації здебільшого розглядаються комплексні функції, проте, отримані результати можуть застосовуватись і для дійсного випадку. Другий розділ дисертації має наступну структуру.

У параграфі 2.1 розроблено метод для дискретного Фур'є-аналізу функцій визначених на квазікристалах та інших майже періодичних множинах. Локальні функції розширено до неперервних функцій на локальних оболонках, які, в свою чергу, ототожнено з квадратично інтегровними функціями на торі, де для їх Фур'є-розкладу ефективно застосовано теорію скінченних груп та дуальних до них. Зокрема доведено теорему про існування єдиної неперервної функції на локальній оболонці дискретної множини для кожної локальної функції відносно тієї самої дискретної множини. Побудовано загальну схему подрібнення для дискретних множин отриманих методом перерізів та проєкцій ґраток з цілими коефіцієнтами та дуальних до них, що дозволяє використати у випадку квазікристалів переваги дискретних методів періодичних функцій.

Параграф 2.2 присвячено квазікристала Фібоначчі та застосуванню теорії розробленої у параграфі 2.1 до двох аперіодичних тестових функцій на ньому. Детально досліджено двовимірну схему перерізів та проєкцій, що породжує одновимірний квазікристал Фібоначчі, у явному вигляді побудовано дуальні ґратки і сітки та їх проєкції на фізичний простір квазікристала (точки даних). Отриману дискретизацію застосовано для кількох різних наближень локальної функції 'відстань до найближчої точки квазікристала' та локальної функції 'тип плитки квазікристала'. Побудована дискретизація є універсальною та може бути використана для наближення чи інтерполяції будь-яких локальних функцій квазікристала Фібоначчі.

У параграфі 2.3 запропоновано застосування розривного у кожній точці відображення між фізичним та внутрішнім просторами одновимірних

квазікристалів для шифрування інформації. Розроблено симетричний переставний метод шифрування, який є стійким відносно обчислень, оскільки оперує лише цілими числами. У цьому параграфі наведено властивості одновимірних квазікристалів, що дозволяють швидко генерувати одновимірні квазікристали за допомогою комп'ютера (без проєкцій) та описано множину криптозмінних. Розроблений метод шифрування застосовано до кодування растрових зображень та отримано ряд прикладів.

Результати цього розділу опубліковано в статтях [95, 107, 111, 125].

2.1. Обчислення майже періодичних функцій

2.1.1. Неперервні функції на аперіодичних множинах точок. Розглянемо дійсний Евклідів простір $\mathbb{R}^d$ скінченної розмірності d. Для деякого $r > 0$ позначимо через $D_r(\mathbb{R}^d)$ усі такі множини точок $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, для яких відстань $|x-y| \geq r$ для всіх $x, y \in \Lambda$. Це означає, що D_r складається з усіх дискретних точкових множин з мінімальною відстанню $\geq r$ між їх точками.

Введемо *локальну топологію* на $D_r(\mathbb{R}^d)$ таким чином.

Дві множини Λ_1 та Λ_2 з $D_r(\mathbb{R}^d)$ називаються 'близькими', якщо для деякого достатньо великого дійсного числа R та деякого достатньо малого ε, маємо

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \cap B_R &\subset \Lambda_2 + B_\varepsilon, \\ \Lambda_2 \cap B_R &\subset \Lambda_1 + B_\varepsilon, \end{aligned} \tag{2.1}$$

де B_R (відповідно B_ε) це окіл радіусу R (відповідно ε) з центром у точці 0. Таким чином, для кожної точки з Λ_1 в околі B_R, існує точка з Λ_2 в межах відстані ε від цієї точки і навпаки. Пари (Λ_1, Λ_2), що задовольняють (2.1) називаються (R, ε)-близькими.

Означення 2.1. Нехай $\Lambda \in D_r(\mathbb{R}^d)$. *Локальною оболонкою* Λ називається

$$X(\Lambda) = \overline{\{t + \Lambda \colon t \in \mathbb{R}^d\}} \subset D_r(\mathbb{R}^d), \tag{2.2}$$

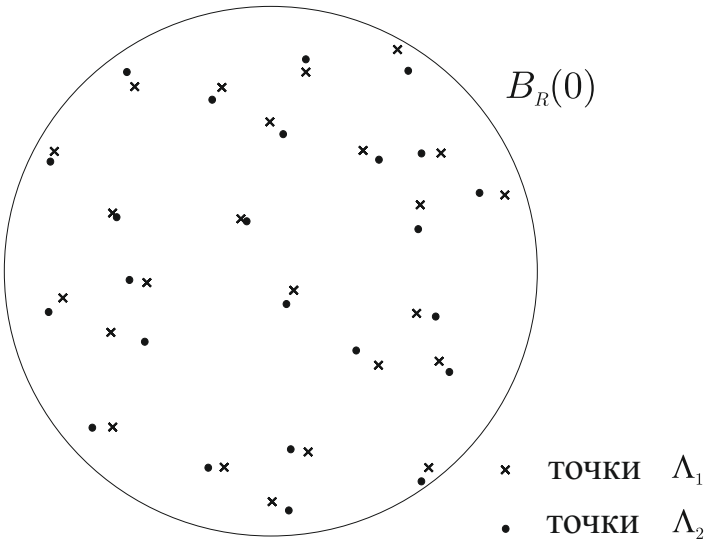


Рис. 2.1. Дві множини Λ_1 та Λ_2 з $D_r(\mathbb{R}^d)$, які є близькими.

тобто розглядаємо всі зсуви Λ та їх замикання у локальній топології.

Використаємо результати Радіна та Вольфа, у їх роботі [129] доведено, що дія зсуву $\mathbb{R}^d$ на Λ піднімається до дії зсуву на $X(\Lambda)$. Локальна оболонка $X(\Lambda)$ — компактна множина, а дія $\mathbb{R}^d$ на ній — неперервна.

Приклад 2.2. Нехай Λ — це ґратка $\mathbb{Z}^d$ у $\mathbb{R}^d$. Тоді фактор-простір $X(\Lambda) = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ є d-вимірним тором. За допомогою $\mathbb{R}^d$ можемо зсувати ґратку в усіх напрямках, але зсув на елемент з $\mathbb{Z}^d$ залишає Λ інваріантною, таким чином $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ параметризує усі різні положення Λ відносно зсувів.

Приклад 2.3. Нехай Λ — це будь-яка з мозаїк Пенроуза. Тоді $X(\Lambda)$ це множина усіх мозаїк Пенроуза, які локально нерозрізнювані відносно деякого зсуву множини Λ. $X(\Lambda)$ містить суттєво більше інформації ніж просто зсуви Λ, оскільки насправді $X(\Lambda)$ складається з усіх мозаїк Пенроуза, що побудовані з тієї самої пари ромбів Пенроуза і з тими самими орієнтаціями, що і Λ.

У загальному випадку можна вважати, що $X(\Lambda)$ — це певний клас локальної нерозрізнюваності Λ.

Розглянемо функцію

$$F\colon\ X(\Lambda)\ \longrightarrow\ \mathbb{C}. \tag{2.3}$$

Використовуючи її, визначимо функцію $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ таким чином

$$f(t) = F(t + \Lambda). \tag{2.4}$$

Якщо F неперервна, то для усіх $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^d$ з того, що

$$\begin{aligned} & t_1 + \Lambda,\ t_2 + \Lambda \quad \text{є близькими} \\ & \qquad \Longrightarrow \quad F(t_1 + \Lambda),\ F(t_2 + \Lambda) \quad \text{є близькими} \\ & \qquad \Longrightarrow \quad f(t_1),\ f(t_2) \quad \text{є близькими.} \end{aligned}$$

Таким чином, з неперервності F випливає неперервність f, а також функція f є локальною або майже періодичною відносно Λ в сенсі наступного означення.

Означення 2.4. Функція $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ називається *локальною відносно множини* $\Lambda \in D_r(\mathbb{R}^d)$, або Λ-*локальною*, якщо $\forall \varepsilon' > 0$ існують R та ε такі, що коли точки $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^d$ задовольняють умові, що $t_1 + \Lambda$ і $t_2 + \Lambda$ є (R, ε)-близькими, тоді

$$|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon'.$$

Вищенаведене означення нестрого можна пояснити таким чином: функція f має природну властивість з точки зору фізичних систем, тобто функція має 'близькі значення' у точках де їх локальні околи мають 'подібний вигляд'; інакше кажучи, функція 'відчуває' точки, що належать квазікристалу.

Локальні функції є неперервними на $\mathbb{R}^d$. Використовуючи локальність, можемо рухатись у протилежному напрямку. Нехай $\Lambda \in D_r(\mathbb{R}^d)$ та нехай $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ є локальною відносно Λ. Визначимо функцію

$$F\colon \ \{t + \Lambda\colon t \in \mathbb{R}^d\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

(таким чином, що F є функцією на частині $D_r(\mathbb{R}^d)$), а саме

$$F(t + \Lambda) = f(t).$$

Тоді у локальній топології F неперервна на $\{t+\Lambda\colon t\in\mathbb{R}^d\}$, насправді вона є рівномірно неперервною, оскільки умова неперервності, яка визначає локальність f, базується на рівномірності означення локальної топології на $\{t+\Lambda\colon t\in\mathbb{R}^d\}$ (поняття (R,ε)-близькості). Звідси випливає, що F однозначно піднімається до неперервної функції (2.3) на локальній оболонці $X(\Lambda)$, що дозволяє нам сформулювати твердження.

Твердження 2.5. *Для кожної функції f локальної відносно Λ існує єдина неперервна функція (2.3) на локальній оболонці, звуження якої до орбіти Λ є функція f. Кожна неперервна функція на локальній оболонці множини Λ породжується в такий спосіб.*

Таким чином, локальність відносно Λ та існування неперервного розширення (підняття) функції на $X(\Lambda)$ по суті одне й те ж саме.

У випадку, якщо на $X(\Lambda)$ задано $\mathbb{R}^d$-інваріантну ймовірнісну міру μ (тобто додатну борелівську міру μ, таку, що $\mu(t+A)=\mu(A)$ для усіх борелівських множин і таку, що $\mu(X(\Lambda))=1$), то дія $\mathbb{R}^d$ на $X(\Lambda)$ призводить до унітарної дії T простору $\mathbb{R}^d$ на $L^2(X(\Lambda),\mu)$.

А саме, для усіх $F\in L^2(X(\Lambda),\mu)$ та усіх $t\in\mathbb{R}^d$, T_tF є функцією, що визначається як $T_tF(\Gamma)=F(-t+\Gamma)$.

Зі скалярного добутку

$$\langle F\mid G\rangle := \int\limits_{X(\Lambda)} F\overline{G}\mathrm{d}\mu$$

маємо

$$\langle T_tF\mid T_tG\rangle = \langle F\mid G\rangle.$$

Отже, в принципі, спектральна теорія простору $L^2(X(\Lambda),\mu)$ має дозволяти аналізувати Λ-локальні функції $f\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ через аналіз відповідних їм функцій F на $L^2(X(\Lambda),\mu)$.

Але для одного надзвичайно важливого класу підмножин Λ можна провести більш детальний аналіз, цей клас множин — квазікристали, модельні множини або множини перерізів та проєкцій, які будуть розглянуті у параграфі 2.1.2.

2.1.2. Локальні функції на модельних множинах. Важливий клас точкових множин $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ для якого добре вивчені локальні оболонки $X(\Lambda)$ це клас множин перерізів та проєкцій або, як їх часто називають, модельних множин [92, 94].

Розглянемо деяке вікно $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ та наступну схему перерізу та проєкції

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\ \|\ } & \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\ \perp\ } & \mathbb{R}^d \\ & & \cup & & \\ L & \xleftarrow{\ 1-1\ } & \widetilde{L} & \xrightarrow{\text{щільний образ}} & L' \end{array} \tag{2.5}$$

Тут $\widetilde{L}$ — це ґратка в $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, яка орієнтована таким чином, що проєкції ґратки на простори $\mathbb{R}^d$ будуть щільними та взаємно однозначними.

На схемі (2.5) простір $\mathbb{R}^d$ з лівого боку є *фізичним простором*, тобто простором, якому буде належати Λ. Простір $\mathbb{R}^d$ праворуч є *внутрішнім простором*, який буде використовуватися для контролю проєкції ґратки $\widetilde{L}$ у фізичний простір. Образ $\widetilde{L}$ під дією проєкції у фізичний простір позначається L. Оскільки ця проєкція є взаємно однозначною, то $L \simeq \widetilde{L}$ як групи, тому L є вільною абелевою групою рангу $2d$, тобто вона має $\mathbb{Z}$-базис з $2d$ елементів. Для зручності використовуватимемо позначення $\tilde{x}$, x, x' для елементів з $\widetilde{L}$ та їх відповідних лівих та правих проєкцій. Тоді $\tilde{x} = (x, x')$, де x пробігає L.

Це передбачає існування перетворення $(\,\cdot\,)'$, яке пов'язує фізичний та внутрішній простори: $(\,\cdot\,)' \colon L \to L'$, при цьому $x \mapsto x'$.

Зауважимо, що задане перетворення $(\,\cdot\,)'$, визначено лише на L. Жодним канонічним чином воно не може бути розширене на $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, але при цьому $(\,\cdot\,)'$ добре розширюється на раціональні оболонки досліджуваних об'єктів, що невдовзі буде використано. Іноді в літературі це перетворення називають '$\star$-перетворення' і в параграфі 2.3 саме його буде застосовано для шифрування зображень.

Оберемо підмножину Ω у внутрішньому просторі. Припускаємо, що це *вікно* компактне, співпадає зі своїм замиканням та має границю міри

нуль. Використовуючи його введемо означення *квазікристала* Λ

$$\Lambda = \Lambda(\Omega) := \{x\colon \tilde{x} \in \widetilde{L},\, x' \in \Omega\}\,. \tag{2.6}$$

Означення 2.6. Множини вигляду $t + \Lambda(\Omega)$, $t \in \mathbb{R}^d$, називаються *множинами перерізів та проєкцій* або *модельними множинами*.

Зокрема, для кожного $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ можемо визначити

$$\Lambda_{(x,y)} = x + \Lambda(-y + \Omega). \tag{2.7}$$

Зауважимо, що модельні множини можна розглядати у більш загальному вигляді, з довільною локально компактною абелевою групою у якості внутрішнього простору.

Безпосередньо з означень випливає, що якщо, $(x, y) \equiv (x', y') \mod \widetilde{L}$, тоді $x + \Lambda(-y + \Omega) = x' + \Lambda(-y' + \Omega)$. Таким чином, ці модельні множини параметризуються тором розмірності $2d$,

$$(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)/\widetilde{L} \simeq (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d =: \mathbb{T}. \tag{2.8}$$

Хоча ця параметризація необов'язково має бути взаємно однозначною, тобто в загальному випадку, $\Lambda_{(x,y)} = \Lambda_{(x',y')} \not\Rightarrow (x, y) = (x', y') \mod \widetilde{L}$, ми в подальшому, для спрощення, будемо скорочено писати $(x, y)_L$ для класів конґруентності $(x, y) \mod \widetilde{L}$.

На торі $\mathbb{T}$ існує природна міра, а саме міра Хаара $\theta_{\mathbb{T}}$, яка є 'площинною' мірою у випадку $\mathbb{T}^2$, та 'довжиною' мірою для $\mathbb{T}^1$. Міра Хаара інваріантна відносно $\mathbb{R}^d$-дії, оскільки $\mathbb{R}^d$ діє на $\mathbb{R}^{2d}/\widetilde{L}$ таким чином:

$$t + (x, y)_L = (t + x, y)_L. \tag{2.9}$$

Надзвичайно важливим є природне вкладення (див. рис. 2.2)

$$\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{T}, \qquad t \mapsto (t, 0)_L, \tag{2.10}$$

яке лежить в основі зв'язку між майже періодичністю у фізичному просторі та періодичністю у просторі вищої розмірності. Образ такого перетворення є щільним у $\mathbb{T}$.

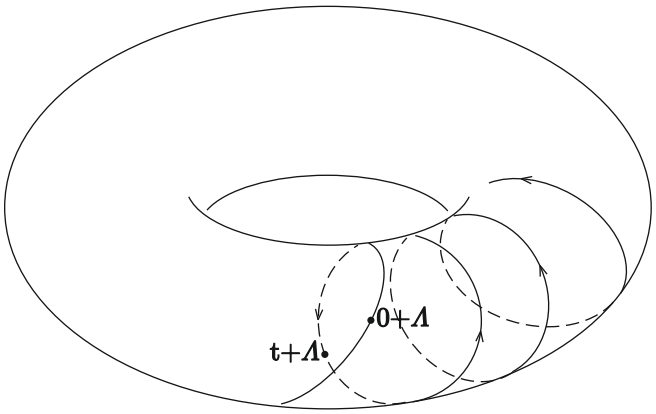


Рис. 2.2. Фрагмент орбіти Λ при параметризації тора.

Отже, беремо множину $\Lambda = \Lambda_{(0,0)} = \Lambda(\Omega)$ та зсуваємо її за допомогою елементів $t \in \mathbb{R}^d$:

$$t + \Lambda(\Omega) = t + \Lambda(0 + \Omega) = \Lambda_{(t,0)}. \tag{2.11}$$

Будуємо локальну оболонку $X(\Lambda)$ як замикання множини усіх зсувів $\Lambda_{(t,0)}$ множини Λ у локальній топології (2.2).

Використаємо твердження доведене у роботі Шльоттмана [135].

Твердження 2.7 ([135]). *Існує неперервне перетворення*

$$\beta\colon\ X(\Lambda) \longrightarrow \mathbb{T}, \tag{2.12}$$

що називається параметризацією тора, таке, що

1) β *є сюр'єкцією;*

2) β *є біекцією майже скрізь відносно міри Хаара на* $\mathbb{T}$*;*

3) *для всіх* $t \in \mathbb{R}^d$ *і для всіх* $\Lambda' \in X(\Lambda)$*, маємо* $\beta(t + \Lambda') = t + \beta(\Lambda')$*;*

4) $\beta(t + \Lambda) = (t, 0)_L$ *для всіх* $t \in \mathbb{R}^d$*.*

Отже $X(\Lambda)$ та $\mathbb{T}$ є компактними просторами з природною $\mathbb{R}^d$-дією, а $\beta\colon X(\Lambda) \to \mathbb{T}$ є сюр'єктивним $\mathbb{R}^d$-перетворенням.

Але між $X(\Lambda)$ та $\mathbb{T}$ існує різниця. Хоча $t + \Lambda \in X(\Lambda)$ і $t + \Lambda \mapsto \Lambda_{(t,0)}$ для усіх t, але не кожен елемент з $X(\Lambda)$ є елементом вигляду $\Lambda_{(x,y)}$ для

деякого (x, y). Більш того, коли $(-y + \partial\Omega) \cap L' \neq \varnothing$, тоді для всіх $x \in \mathbb{R}^d$ завжди існують елементи з $X(\Lambda)$ ($\Lambda_1 \neq \Lambda_2$), які перетворюються за допомогою β у той самий елемент $(x, y)_L$. Якщо $\tilde{z} = (z, z') \in \widetilde{L}$ і $z' \in (-y+\partial\Omega)$, то завжди будуть $\Lambda_1, \Lambda_2 \in X(\Lambda)$ такі, що $\beta(X(\Lambda_1)) = \beta(X(\Lambda_2)) = (x, y)_L$, хоча $x + z \in \Lambda_1$, $x + z \notin \Lambda_2$. Інакше кажучи, точки ґратки неоднозначно проєктуються на границю $\partial\Omega$ вікна Ω. Відповідний приклад буде наведено при розгляді квазікристала Фібоначчі. Твердження про те, що β є бієкцією майже скрізь, справедливе завдяки припущенню, що границя Ω має міру 0. Тобто, коли говоримо, що β є бієкцією майже скрізь, маємо на увазі, що множина A точок ξ в $\mathbb{T}$, для яких існує більше ніж одна точкова множина над ξ, задовольняє умові $\theta_{\mathbb{T}}(A) = 0$.

Існує єдина $\mathbb{R}^d$-*інваріантна ергодична міра* μ на $X(\Lambda)$, така, що $\mu(X(\Lambda)) = 1$. Насправді, β пов'язує μ та θ:

$$\beta(\mu) = \theta. \tag{2.13}$$

Якщо більш точно, то $\theta(A) = \mu(\beta^{-1}A)$ для усіх вимірних підмножин A з $\mathbb{T}$. Маючи μ, можемо ввести простір $L^2(X(\Lambda), \mu)$ двічі інтегровних функцій на $X(\Lambda)$. Як вже було зауважено, природна дія $\mathbb{R}^d$ на ньому є унітарною.

2.1.3. Перехід з локальних оболонок на тори. Квадратично інтегровні функції на $X(\Lambda)$ та квадратично інтегровні функції на $\mathbb{T}$ можна ототожнити,

$$L^2(X(\Lambda), \mu) \simeq L^2(\mathbb{T}, \theta). \tag{2.14}$$

Необхідний зв'язок задається наступним ізоморфізмом

$$\begin{array}{ccc} X(\Lambda) & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{T} \\ & \searrow^{G\circ\beta} & \downarrow G \\ & & \mathbb{C} \end{array}$$

Отже, маємо перетворення

$$L^2(\mathbb{T}, \theta) \quad \longrightarrow \quad L^2(X(\Lambda), \mu). \tag{2.15}$$

Оскільки β є бієкцією майже скрізь, то перетворення (2.15) є бієктивним. Це дозволяє нам аналізувати функції на $X(\Lambda)$, розглядаючи їх як функції на $\mathbb{T}$. Користуємось тією перевагою, що функції в $L^2(\mathbb{T},\theta)$ мають розклад Фур'є

$$\widetilde{F}(z)=\sum_{\widetilde{k}\in\widetilde{L}^\circ} a_k\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\langle\widetilde{k}|z\rangle},\qquad z\in\mathbb{T},\ a_k\in\mathbb{C}. \tag{2.16}$$

Тут $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярний добуток у $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d=\mathbb{R}^{2d}$, а $\widetilde{L}^\circ$ — ґратка $\mathbb{Z}$-дуальна до $\widetilde{L}$:

$$\widetilde{k}\in\widetilde{L}^\circ\iff\langle\widetilde{k}\mid\widetilde{x}\rangle\in\mathbb{Z},\qquad\text{для всіх}\quad\widetilde{x}\in\widetilde{L}.$$

Припустимо, що скалярний добуток має раціональні значення на $\widetilde{L}$, тоді нова ґратка $\widetilde{L}^\circ$ належить лінійній оболонці $\widetilde{L}$ з раціональними коефіцієнтами ($\mathbb{Q}$), а її елементи $\widetilde{k}$ мають той самий розклад $\widetilde{k}=(k,k')$, що і елементи $\widetilde{L}$. Зокрема, для кожного $\widetilde{k}$ існує єдине $k\in\mathbb{R}^d$.

Таким чином, маємо все необхідне, щоб звести увесь розгляд до фізичного простору просто використовуючи символи a_k замість $a_{\widetilde{k}}$ для коефіцієнтів розкладу Фур'є.

Позначимо через L° проєкцію $\widetilde{L}^\circ$ на фізичний простір та запишемо $k\in L^\circ$, оскільки $\widetilde{k}\in\widetilde{L}^\circ$. Називатимемо ґратку L° дуальною (або $\mathbb{Z}[\tau]$-дуальною) до L. Перетворення $(\cdot)'\colon L^\circ\to\mathbb{R}^d$ є сумісним з відповідним перетворенням на L, внаслідок того, що $\mathbb{Q}L^\circ=\mathbb{Q}L$.

Відповідні функції на $X(\Lambda)$ мають аналогічні розклади. Це працює таким чином: Якщо $F\colon X(\Lambda)\longrightarrow\mathbb{C}$ відповідає $\widetilde{F}\colon\mathbb{T}\longrightarrow\mathbb{C}$ тоді, для $\Lambda_1\in X(\Lambda)$, такого що $\beta(\Lambda_1)=(x,y)_L$, маємо, що як L^2-функції

$$F(\Lambda_1)=\widetilde{F}((x,y)_L)=\sum_{k\in L^\circ} a_k\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\langle\widetilde{k}|(x,y)\rangle}. \tag{2.17}$$

Нехай Λ — це модельна множина, що відповідає схемі перерізів та проєкцій (2.5), а $\mathbb{T}=\mathbb{T}^{2d}=(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)/L$ — тор з параметризацією

$$\beta\colon X(\Lambda)\longrightarrow\mathbb{T}.$$

Тоді можемо ототожнити за допомогою (2.14) відповідні L^2-простори. Кожен елемент $\Lambda' \in X(\Lambda)$ перетворюється за допомогою β в точку $\beta(\Lambda')$ на торі $\mathbb{T}$. Також знаємо, що $\beta(\Lambda) = (0,0)_L$, та $\beta(t+\Lambda) \to (t,0)_L$. Таким чином, знаємо як перетворення β діє на $\mathbb{R}^d + \Lambda$.

Нехай f — локальна функція відносно модельної множини Λ. З локальної функції f отримуємо її розширення $F \in L^2(X(\Lambda), \mu)$, яке є неперервним. Далі отримуємо $\widetilde{F} \in L^2(\mathbb{T}, \theta)$, де

$$\widetilde{F}((t,0)_L) = \widetilde{F}(\beta(t+\Lambda)) = F(t+\Lambda) = f(t), \tag{2.18}$$

тепер можемо записати

$$\widetilde{F}(\cdot) = \sum_{k \in L^\circ} a_k \, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \langle \widetilde{k} | \cdot \rangle}, \quad \text{де } L^\circ \text{ є дуальною до } L.$$

Означення 2.8. *Розкладом Фур'є–Бора* локальної функції f називається

$$f(t) = F(t+\Lambda) = \widetilde{F}((t,0)_L) = \sum_{k \in L^\circ} a_k \, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \langle \widetilde{k} | (t,0) \rangle} = \sum_{k \in L^\circ} a_k \, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \langle k | t \rangle}. \tag{2.19}$$

Вивчення майже періодичних функцій на Λ зводиться до вивчення функцій на $\mathbb{T}$, а їх обмеження до 'спіральних' орбіт $\mathbb{R}^d + \Lambda$ на $\mathbb{T}$ задається вкладенням (2.10), тобто звуженням на $(\mathbb{R}^d, 0)_L$.

Повернемось до розгляду модельних множин. Для усіх $x \in \mathbb{T}$,

$$\widetilde{F}(x) = \sum_{k \in L^\circ} a_k \, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \langle \widetilde{k} | x \rangle}, \qquad \text{де } a_k = \int_{\mathbb{T}} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \langle \widetilde{k} | x \rangle} \, \widetilde{F}(x) \mathrm{d}\theta_{\mathbb{T}}(x). \tag{2.20}$$

На жаль, значення функції $\widetilde{F}$ відомі нам лише на $(\mathbb{R}^d, 0)_L$, тому, щоб обчислити коефіцієнти a_k виходячи лише з f, використаємо ергодичну теорему Біркгофа. Доведення потрібної нам форми теореми Біргкофа міститься в роботі Келлера [69] для простору $\mathbb{Z}^d$, це саме доведення справедливе і для простору $\mathbb{R}^d$.

Для усіх неперервних функцій $\widetilde{G}$ на $\mathbb{T}$ маємо

$$\int_{\mathbb{T}} \widetilde{G}(x) \mathrm{d}\theta_{\mathbb{T}}(x) = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{\operatorname{vol} B_R} \int_{B_R} \widetilde{G}((t,0)_L) \mathrm{d}t. \tag{2.21}$$

Таким чином,

$$a_k = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\operatorname{vol} B_R} \int\limits_{B_R} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\langle \widetilde{k}|(t,0)\rangle} \widetilde{F}((t,0)_L)\mathrm{d}t$$
$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\operatorname{vol} B_R} \int\limits_{B_R} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\langle k|t\rangle} f(t)\mathrm{d}t. \tag{2.22}$$

Використавши те, що $F((t,0)_L) = f(t)$ і $\widetilde{k} = (k,k')$, отримаємо

$$\langle \widetilde{k} \mid (t,0)\rangle = \langle k,t\rangle + \langle k',0\rangle = \langle k,t\rangle.$$

Використана тут усереднююча послідовність $\{B_R\}$, може бути замінена будь-якою необмеженою зростаючою послідовністю $\{A_n\}$, де $A_n \subset \mathbb{R}^d$ — компактна, $\bigcup A_n = \mathbb{R}^d$, та границя A_n має міру 0 для усіх n. На практиці слід підбирати усереднюючу послідовність відповідно до задачі яка розглядається.

2.1.4. Дискретизація. Основною нашою задачею є створення дискретного методу, за допомогою якого зможемо обчислити коефіцієнти a_k рівняння (2.22) для функції f локальної відносно модельної множини $\Lambda = \Lambda(\Omega)$. Це означає, що маємо замінити інтеграл скінченною сумою значень інтегранту. Важливо здійснити цю процедуру у такий спосіб, що відповідає схемі перерізу та проєкції, яка притаманна модельній множині; щоб була гарантована збіжність у границі до потрібного інтегралу та щоб це можна було виконати ефективно з точки зору обчислень.

Маємо три основні складові нашої задачі:

(i) вибір відповідної області інтегрування (що використати у якості усереднюючої B_R?);

(ii) визначення точок для обчислення значень інтегранту, включаючи їх кількість;

(iii) вибір набору коефіцієнтів Фур'є (які значення k беремо?) на яких зосередимо свою увагу під час обчислень.

Ключовою перевагою дискретних методів для періодичних функцій є використання скінченних груп, що виникають з подрібнення періодичної ґратки та дуальної до неї ґратки. Адаптуємо цей підхід до схем перерізів та проєкцій.

Набір точок для обчислення інтегранта будемо отримувати тією самою схемою перерізів та проєкцій, що і квазікристал. Оберемо підходячу ґратку $\widetilde{L_N} \supset \widetilde{L}$, яка породить необхідну нам скінченну групу $\widetilde{L_N}/\widetilde{L}$. Точки даних у $\mathbb{R}^d$, в яких будемо обчислювати наші функції, отримуються проєкцією на фізичний простір відповідної множини представників класу спряженості $\widetilde{L_N}$ за модулем $\widetilde{L}$. Відповідні частоти k обираються з дуальної ґратки L°. Значень k в яких обчислюємо коефіцієнти Фур'є a_k обирається завдяки підходячим представникам класів з $\widetilde{L}^\circ$ за модулем $\widetilde{L_N}^\circ$. Ключовою для обчислень є наступна дуальність

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \ \widetilde{L}^\circ / \widetilde{L_N^\circ} \times \widetilde{L}_N / \widetilde{L} \longrightarrow \frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}.$$

Вищенаведена загальна процедура допускає різні можливі реалізації і вибір певних ґраток та точок даних залежить від конкретної задачі, яка розв'язується, це буде продемонстровано не прикладах у наступному параграфі. Зауважимо, що хоча отримання всіх вище згаданих обчислювальних компонент є досить громіздкою задачею, ці компоненти залежать лише від квазікристала (множини перерізу та проєкції) та точності необхідної для обчислень. Щойно вони обрані, тоді точки даних та частоти є визначеними і можуть бути використані для Фур'є аналізу *усіх* функцій, що походять з тієї ж майже періодичної сім'ї та алгоритмічно легко обчислюються.

Дослідимо детальніше, як можна реалізувати вищевказану процедуру. Почнемо зі схеми перерізу та проєкції (2.5) з тором $\mathbb{T}$ та введемо розширення перетворення $(\cdot)'$ до раціональної оболонки модуля L:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Q}L & \xleftarrow{1-1} & \mathbb{Q}\widetilde{L} & \longrightarrow & \mathbb{Q}L' \\ x & \longmapsto & \widetilde{x} = (x, x') & \mapsto & x' \end{array} \tag{2.23}$$

Припустимо, що на $\mathbb{R}^{2d} \simeq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ задано стандартний скалярний добуток (позначений $\langle\cdot|\cdot\rangle$), та означимо дуальну ґратку:

$$\widetilde{L}^\circ = \{Y \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \colon \langle Y \mid \widetilde{x}\rangle \in \mathbb{Z} \ \text{ для усіх } \widetilde{x} \in \widetilde{L}\}.$$

Тоді $\widetilde{L}^\circ$ є $\mathbb{Z}$-модулем того ж рангу що і $\widetilde{L}$, а саме $2d$. Існує схема перерізу та проєкцій дуальна до (2.5) у якій $\widetilde{L}^\circ$ є ґраткою [94]:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\ \|\ } & \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\ \perp\ } & \mathbb{R}^d \\ & & \cup & & \\ L^\circ & \xleftarrow{1-1} & \widetilde{L}^\circ & \xrightarrow{\text{щільний образ}} & (L^\circ)'. \end{array} \tag{2.24}$$

Для цієї схеми використаємо такі самі позначення як і для (2.23). Детальна інформація про дуальні схеми перерізів та проєкцій наведена у роботі [94].

Дуалізіція суттєво спрощується, якщо скалярний добуток в $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ набуває раціональних значень на ґратці $\widetilde{L}$. На практиці така ситуація досить типова, наприклад, це має місце у прикладі Фібоначчі, що розглядається нижче. Якщо це має місце, то можна ототожнити $\widetilde{L}^\circ$ з підмножиною $\mathbb{Q}\widetilde{L}$ і уникнути пошуку нового $(\cdot)'$ перетворення. Але в загальному випадку це не так, тому тут не використовуємо це спрощення.

В основі апроксимації лежить очевидне рівняння, на якому базуються наші подальші викладки

$$\mathrm{e}^{2\pi i\langle \tilde{k}|\tilde{s}\rangle} = \mathrm{e}^{2\pi i\langle k|s\rangle}\mathrm{e}^{2\pi i\langle k'|s'\rangle}. \tag{2.25}$$

Дискретний Фур'є аналіз базується на парі дуальних скінченних груп з яких отримуємо $\tilde{k}$ та $\tilde{s}$. Значення $\tilde{k}$ та $\tilde{s}$ важливі лише за модулем ґраток $\widetilde{L_N}^\circ$ та $\widetilde{L}$ відповідно і саме ця 'свобода' є центральною у процесі наближення.

Значення s мають належати обраній області інтегрування A, та, в ідеальному випадку, відповідні $s' = 0$, оскільки припускаємо, що $\tilde{s}$ представляють точки фізичного простору $\mathbb{R}^d$. Однак останнє не є можливим,

тому намагаємось обрати $s \in A$ з найменшими можливими s'. Тоді апроксимація відбувається відкиданням компоненти, що містить k', s' у рівнянні (2.25). Вибір значень $\tilde{k}$ обмежимо вимогою, що значення $|k|$ мають бути якнайменшими (див. нижче кроки 5 та 6).

Сформулюємо загальний практичний алгоритм, що містить шість основних кроків.

Крок 1: Обираємо скінченну підгрупу тора $\mathbb{T}$ порядку N. Вона має вигляд $\widetilde{L_N}/\widetilde{L}$ де $\widetilde{L_N} \supset \widetilde{L}$ — сітка, що подрібнює $\widetilde{L}$. Число N визначає кількість точок обчислення при наближенні інтегралів сумами. Маємо $\widetilde{L}_N \subset \mathbb{Q}\widetilde{L}$ та $\mathbb{Z}$-дуальну до неї $\widetilde{L}_N^\circ \subset \widetilde{L}^\circ$ індексу N у $\widetilde{L}^\circ$.

Маємо парування індуковане скалярним добутком $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$

$$\widetilde{L}^\circ/\widetilde{L}_N^\circ \times \widetilde{L}_N/\widetilde{L} \longrightarrow \frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}. \tag{2.26}$$

Використовуючи $(\cdot)'$-перетворення, отримаємо $\mathbb{Z}$-модулі $L_N \supset L$, $L_N^\circ \subset L^\circ$, $\widetilde{L}_N/\widetilde{L} \simeq L_N/L$, $\widetilde{L}^\circ/\widetilde{L}_N^\circ \simeq \widetilde{L}/\widetilde{L}_N$, та індуковане парування

$$\langle \cdot \mid \cdot \rangle\colon \; L^\circ/L_N^\circ \times L_N/L \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}.$$

Замінивши $\widetilde{L}$ на $\widetilde{L}_N$, маємо подрібнену схему перерізу та проєкцій

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \longleftarrow & \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ & & \cup & & \\ L_N & \overset{1-1}{\longleftrightarrow} & \widetilde{L}_N & \longleftrightarrow & L'_N \end{array} \tag{2.27}$$

та, аналогічно, дуальну до неї схему.

Крок 2: Оберемо фундаментальну область C для $\widetilde{L}$. Канонічним вибором може бути плитка Вороного для $\widetilde{L}$ у нулі, але можливий будь-який інший вибір. У прикладах, наведених нижче, використовуємо паралелограм, визначений парою базисних векторів з $\widetilde{L}$. Покриваємо фундаментальною областю простір $(\mathbb{R}^d, 0) \subset \mathbb{R}^{2d}$ за допомогою зсувів $\tilde{t} + C$ області C на елементи $\widetilde{L}$. Проєкція цих плиток на фізичний простір $\mathbb{R}^d$ покриває його, хоча зазвичай спроєктований простір $\tilde{t} + C$ має багато перекриттів.

Крок 3: Будуємо $\widetilde{S} := \widetilde{L_N} \cap C$. Таким чином, отримаємо повний набір представників у $\widetilde{L_N}$ для групи $\widetilde{L}_N/\widetilde{L}$.

Крок 4: Обираємо область A, яка визначає проміжок на якому будуть оцінюватись коефіцієнти Фур'є функції f у наступній формі

$$a_k = a_{\widetilde{k}} \simeq \frac{1}{\operatorname{vol} A} \int\limits_A \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\langle k|t\rangle} f(t) \mathrm{d}t.$$

Ці інтеграли обчислюються для значень k з L°/L_N°.

Оберемо у якості A образ скінченної множини зсувів фундаментальної області C, а саме

$$A = \big(\bigcup_{\tilde{t}\in\widetilde{T}} \tilde{t} + C\big)^{||}$$

для деякої скінченної підмножини $\widetilde{T}$ елементів з $\widetilde{L}$. Вибір A знову ж таки залежить від задачі, що розглядається.

На наступному кроці оберемо множину точок даних у $\mathbb{R}^d$, яку буде використано для заміщення інтегралів скінченними сумами.

Зауважимо знову, що на свій розсуд можемо зсувати елементи $\widetilde{S}$ за допомогою $\widetilde{L}$ і робитимемо це у такий спосіб, щоб образи проєкції потрапили у проміжок інтегрування $A = \bigcup_{\tilde{t}\in\widetilde{T}} (\tilde{t} + C)^{||}$. Крім цього, прагнемо мінімізувати відповідні s'.

Крок 5: Для кожного $\tilde{s} = (s, s') \in \widetilde{S}$ знайдемо $\widetilde{t(s)} \in \widetilde{T}$ для якого значення $|s' + t(s)'|$ є мінімальним. Тоді набір точок даних це

$$D := \{s + t(s) \colon \widetilde{s} \in \widetilde{S}\}.$$

З цієї точки зору для кожного $k \in L^\circ$ маємо

$$a_k := \frac{1}{\operatorname{vol} A} \sum_{u\in D} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\langle k|u\rangle} f(u),$$

а відповідне наближення функції f наступне

$$f(x) \simeq \sum_{k\in K} a_k \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\langle k|x\rangle}.$$

Множина K має пробігати повну множину представників з L°/L_N°. Вибір представників є вільним, але в більшості випадків найменші частоти (менші $|k|$) є найбільш суттєвими для апроксимації f скінченним набором її частот. У зв'язку з цим маємо наступний крок.

Крок 6: Обираємо k для кожного з класів L°/L_N° таким чином, щоб $|k|$ був найменшим з можливих.

2.2. Квазікристал Фібоначчі

Щоб конкретизувати усі наведені викладки розглянемо детально випадок одновимірного квазікристала, що пов'язаний з відомою числовою послідовністю Фібоначчі. Схема перерізів та проєкцій цього квазікристала лежить у двовимірному просторі, тому геометрія точок даних D, простір зсувів $\tilde{T}$ у подрібненій сітці та нові вікна легко візуалізуються.

Однією з найбільших переваг методу перерізів та проєкцій є те, що він принципово алгебраїчний та не вимагає складної геометрії для застосування. У випадку аперіодичних структур розмірностей вище за один, доводиться мати справу з ґратками розмірностей вище за три, а, отже, і з просторами розмірностей чотири та вище, де алгебраїчний формалізм стає надзвичайно цінним порівняно з геометричним і лише задача вибору фундаментальної області вимагає серйозних геометричних досліджень.

Нехай $\tau := \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ та нехай $Z[\tau] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$.

Тоді $Z[\tau]$ є кільцем цілих чисел у полі $\mathbb{Q}[\tau] = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, а τ та τ' є розв'язками рівняння $\tau^2 = \tau + 1$.

Позначимо через $(\cdot)'$ спряження на $Z[\tau]$ та $\mathbb{Q}[\tau]$, яке міняє місцями τ та τ' (тобто $\sqrt{5}$ та $-\sqrt{5}$).

Означимо

$$\widetilde{\mathbb{Z}[\tau]} := \{(x, x') \colon x \in \mathbb{Z}[\tau]\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

$\widetilde{\mathbb{Z}[\tau]}$ — ґратка у $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ та її проєкції

$$\mathbb{R} \hookleftarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}$$

на $\mathbb{R}$ задають схему перерізу та проєкції Фібоначчі:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longleftarrow & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \mathbb{Z}[\tau] & \longleftarrow & \widetilde{\mathbb{Z}[\tau]} & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\tau'] \\ x & \longmapsto & \widetilde{x}=(x,x') & \mapsto & x'. \end{array} \tag{2.28}$$

Природним базисом у $\widetilde{\mathbb{Z}[\tau]}$ є набір векторів $\{(1,1),\ (\tau,\tau')\}$. Введемо позначення

$$\begin{aligned} \delta &= (\tau\sqrt{5})^{-1} = (\tau(\tau-\tau'))^{-1} = \tfrac{1}{\tau^2+1}, \\ \delta' &= (-\tau'\sqrt{5})^{-1} = (\tau'(\tau'-\tau))^{-1} = \tfrac{1}{\tau'^2+1}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Визначимо скалярний добуток на $\widetilde{\mathbb{Z}[\tau]}$ за формулою

$$(\widetilde{x}\mid\widetilde{y}) = (2x\cdot y)_{\mathbb{Z}} = \delta xy + (\delta xy)', \tag{2.30}$$

де $(\ \cdot\ )_{\mathbb{Z}}$ означає взяття раціональної компоненти a від ірраціонального числа $2x\cdot y\in\mathbb{Z}[\tau] =: a+b\tau$. Зокрема,

$$\begin{aligned} &(\widetilde{1}\mid\widetilde{1}) = (2(1\cdot 1))_{\mathbb{Z}} = 2, \quad (\widetilde{\tau}\mid\widetilde{\tau}) = \left(2\tau^2\right)_{\mathbb{Z}} = 2, \\ &(\widetilde{1}\mid\widetilde{\tau}) = (2\tau)_{\mathbb{Z}} = 0. \end{aligned}$$

Фундаментальна область для ґратки $\widetilde{\mathbb{Z}[\tau]}$ зображена на рис. 2.3.

Скалярний добуток $(\cdot\mid\cdot)$ дозволяє визначити $\widetilde{\mathbb{Z}[\tau]}^{\circ}$ у раціональній оболонці $\widetilde{\mathbb{Z}[\tau]}$ та виразити $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ у термінах $(\cdot\mid\cdot)$. Дуальний базис до $\{(1,1),(\tau,\tau')\}$ задається формулами

$$\widetilde{\omega}_1 = \tfrac{1}{2}\widetilde{1} = (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}), \qquad \widetilde{\omega}_2 = \tfrac{1}{2}\widetilde{\tau} = (\tfrac{\tau}{2},\tfrac{\tau'}{2}), \tag{2.31}$$

а дуальна ґратка має вигляд

$$(\widetilde{\mathbb{Z}[\tau]})^{\circ} = \mathbb{Z}\widetilde{\omega}_1 + \mathbb{Z}\widetilde{\omega}_2 = \tfrac{1}{2}\widetilde{\mathbb{Z}[\tau]}. \tag{2.32}$$

Елементи $(\widetilde{\mathbb{Z}[\tau]})^{\circ}$ завжди мають вигляд $\widetilde{k}=(k,k')$, що дозволяє нам записати

$$\mathbb{Z}[\tau]^{\circ} := \{k\colon \widetilde{k}=(k,k')\in(\widetilde{\mathbb{Z}[\tau]})^{\circ}\}. \tag{2.33}$$

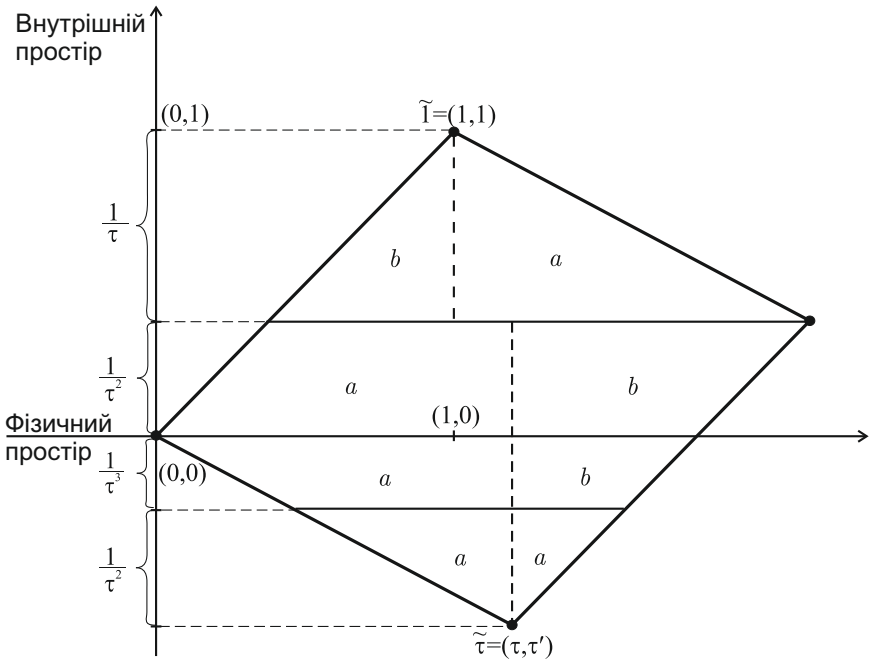


Рис. 2.3. Фундаментальна область C ґратки $\widetilde{\mathbb{Z}[\tau]} = \mathbb{Z}(1,1) + \mathbb{Z}(\tau,\tau')$ зображена у термінах стандартної координатної системи для $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Якщо C уявляти як тор (ототожнивши протилежні сторони) то фізичний простір навивається на тор, а області a та b вказують які частини фізичного простору лежать у плитках a чи b відповідно.

Тоді

$$(\widetilde{\mathbb{Z}[\tau]})^\circ = \widetilde{\mathbb{Z}[\tau]^\circ} = \{\widetilde{k}\colon k = (k,k') \in \mathbb{Z}[\tau]^\circ\},$$

та скалярний добуток $\langle \widetilde{k} \mid \widetilde{x}\rangle$ стає добутком $(\widetilde{k} \mid \widetilde{x})$, що є більш зручним для подальших міркувань.

Тоді двовимірним тором $\mathbb{T}$ схеми перерізу та проєкції (2.28) є

$$\mathbb{T} = (\mathbb{R}\times\mathbb{R})/\widetilde{\mathbb{Z}[\tau]}.$$

Ряд Фур'є на торі $\mathbb{T}$ записується у термінах характерів $\chi_{\widetilde{k}}$, а саме

$$\chi_{\widetilde{k}}(\widetilde{x}) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\widetilde{k}|\widetilde{x})}, \quad \text{де} \quad \widetilde{k} = (k,k') \in \mathbb{Z}\widetilde{\omega}_1 + \mathbb{Z}\widetilde{\omega}_2. \tag{2.34}$$

Тут $\widetilde{x}$ є довільним у $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, але необхідно виконувати обчислення лише з $\widetilde{x} \in \mathbb{Q}\widetilde{\omega}_1 + \mathbb{Q}\widetilde{\omega}_2$ для яких операція $\widetilde{\ }$ добре визначена рівнянням (2.28). Для таких елементів $(\widetilde{k} \mid \widetilde{x}) = (2k\cdot x)_{\mathbb{Q}}$, де $(\cdot)_{\mathbb{Q}}$ визначається аналогічно до $(\cdot)_{\mathbb{Z}}$.

Добуток $(\cdot \mid \cdot)$ розширюється до $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, проте слід контролювати цей процес: для типового елементу $a\widetilde{1} + b\widetilde{\tau}$, $a, b \in \mathbb{R}$ нашого простору $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ скалярний добуток обчислюється за формулою

$$((a\widetilde{1} + b\widetilde{\tau}) \mid (c\widetilde{1} + d\widetilde{\tau})) = 2ac + 2bd,$$

де

$$a\widetilde{1} + b\widetilde{\tau} = a(1,1) + b(\tau, \tau') = (a + b\tau, a + b\tau') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Розглянемо

$$\widetilde{k} = a\widetilde{\omega}_1 + b\widetilde{\omega}_2 = \tfrac{a}{2}\widetilde{1} + \tfrac{b}{2}\widetilde{\tau} = \left(\tfrac{a+b\tau}{2}, \tfrac{a+b\tau'}{2}\right) = (k, k') \in \widetilde{\mathbb{Z}[\tau]}^{\circ},$$

де $a, b \in \mathbb{Z}$. Припустимо, що хочемо обчислити $(\widetilde{k} \mid (t, 0))$, $t \in \mathbb{R}$.

З системи

$$\begin{aligned}(1,0) &= \tfrac{1}{\tau\sqrt{5}}\widetilde{1} + \tfrac{1}{\sqrt{5}}\widetilde{\tau} = \delta\widetilde{1} + \tau\delta\widetilde{\tau},\\ (0,1) &= \tau^2\delta\widetilde{1} - \tau\delta\widetilde{\tau} \;= \delta'\widetilde{1} + \tau'\delta'\widetilde{\tau},\end{aligned}$$

де $\delta,\ \delta'$ з рівняння (2.29), маємо $(\widetilde{k} \mid (1,0)) = 2\delta k$, таким чином,

$$(\widetilde{k} \mid (t,0)) = 2\delta k t, \qquad \text{для усіх} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Нас цікавлять модельні множини Λ, що будуються за допомогою перерізів та проєкцій (2.28). У контексті цієї схеми розклад Бора–Фур'є (2.19) набуває простішого вигляду

$$f(t) = F(t + \Lambda) = \widetilde{F}((t,0)_{\widetilde{\mathbb{Z}[\tau]}}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}[\tau]^{\circ}} a_k \, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \cdot 2\delta k t}. \tag{2.35}$$

Будемо обчислювати a_k у вигляді

$$a_k = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} \int_0^R \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \cdot 2kt} f(t) \mathrm{d}t. \tag{2.36}$$

Зауважимо також, що

$$(\widetilde{k} \mid (0,1)) = ((\tfrac{a+b\tau}{2}, \tfrac{a+b\tau'}{2}) \mid \delta'\widetilde{1} + \tau'\delta'\widetilde{\tau}) = 2k'\delta', \quad (\widetilde{k} \mid (0,u)) = 2uk'\delta'.$$

Стандартна 2-літерна послідовність Фібоначчі складається з точок, що отримуються підстановками $a \to ab$, $b \to a$: $a\ b\ a\ a\ b\ a\ b\ a \ldots$.

Плитки квазікристала (у даному випадку відрізки), якими замощується (покривається) увесь простір (в даному випадку пряма) мають довжину τ для символів a і довжину 1 для символів b, а замощення прямої починається з точки 0. Отримуємо послідовність плиток, що покривають невід'ємну частину дійсної прямої,

$$0,\ \tau,\ \tau{+}1,\ 2\tau{+}1,\ 3\tau{+}1,\ 3\tau{+}2,\ 4\tau{+}2,\ 4\tau{+}3,\ 5\tau{+}3,\ \ldots.$$

Цей набір повністю співпадає р невід'ємною частиною модельної множини $\Lambda = \Lambda([-1, \frac{1}{\tau}))$, яка породжується схемою перерізу та проєкції (2.28).

Зауваження 2.9. Можна використати іншу множину $\Lambda((-1, \frac{1}{\tau}])$, яка відрізняється від вище наведеної Λ у двох точках, що походять з кінців інтервалу $[-1, \frac{1}{\tau})$. Це є прикладом пари просторів, які перетворюються у ту саму частину тора $\mathbb{T}$. Саме ця двозначність цікаво проявляється у подальшому при наближеннях.

Λ розкладається як $\Lambda_a = \Lambda([-\frac{1}{\tau^2}, \frac{1}{\tau}))$ та $\Lambda_b = \Lambda([-1, -\frac{1}{\tau^2}))$, що дає ліві кінці плиток типів a та b відповідно.

Корисно візуалізувати розподіл a і b точок на торі $\mathbb{T}$ після вкладення (2.10) простору $\mathbb{R}$ у $\mathbb{T}$. Фундаментальна область, див. рис. 2.3, з ототожненими протилежними сторонами це тор $\mathbb{T}$. Щоб побачити як утворюється Λ, починаємо з точки $(0, 0)$ та зсуваємося на $(t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$ за звичайними правилами виходу та повернення у фундаментальну область. Рухаємось неперервно та наша рухома точка має три відрізки ('щетинки') приєднані до неї.

$a(1)$: щетинка довжини $\frac{1}{\tau}$ спрямована вертикально вгору;

$a(2)$: щетинка довжини $\frac{1}{\tau^2}$ спрямована донизу;

$b(1)$: щетинка довжини $\frac{1}{\tau}$ спрямована донизу, але має початковий порожній проміжок розміру $\frac{1}{\tau^2}$.

Маємо наступне правило. Оскільки наша точка рухається вздовж прямої у фундаментальній області, то: якщо щетинка $a(1)$ досягає до вектора $(1,1)$ (тобто $(1,1)$ достатньо близько, щоб перетнутися з цією щетинкою), то ми маємо a-точку з Λ; якщо щетинка $a(2)$ досягає до вектора (τ,τ'), то також маємо a-точку з Λ; якщо щетинка $b(1)$ досягає до вектора (τ,τ'), то також маємо b-точку.

По суті, вікно представлене щетинками і переміщується разом з точкою, виходить та повертається у фундаментальну область. Перевагою даного підходу є те, що можемо розбити фундаментальну область на частини, які породжують a- та b-точки, і таким чином з'ясувати який вигляд має функція $f(t)$ на фундаментальній області.

На рис. 2.3 вертикальні лінії позначені крапками є ключовими, наша рухома точка переміщується праворуч та щоразу коли вона перетинає вертикальну лінію отримуємо нову точку Λ і починаємо новий інтервал та залишаємось у цьому інтервалі до наступного перетину.

Розглянемо детально дискретизацію Фур'є аналізу для цього випадку. Дотримуватимемось шести кроків наведених у попередньому параграфі.

Запишемо $\widetilde{L}$ для $\widetilde{\mathbb{Z}[\tau]}$ тобто $\widetilde{L} = \mathbb{Z}\widetilde{1} + \mathbb{Z}\widetilde{\tau}$.

Оберемо фундаментальну область для $\widetilde{L}$ з площею (об'ємом) $\sqrt{5}$:

$$C := \{u\widetilde{1} + v\widetilde{\tau} \colon 0 \le u, v > 1\}.$$

Зафіксуємо довільне число $N \in \mathbb{Z}_+$ і побудуємо сітку $\widetilde{L_N}$, яка є подрібненням $\widetilde{L}$. У параграфі 2.1 використовували $\widetilde{L_N} \supset \widetilde{L}$, де $[\widetilde{L_N} : \widetilde{L}] = N$, але для даного випадку використаємо більш очевидну сітку індексу N^2, а саме $\frac{1}{N}L$. Оскільки $N\widetilde{L_N} \subseteq \widetilde{L}$, то $\widetilde{L_N} \subset \mathbb{Q}\widetilde{1} + \mathbb{Q}\widetilde{\tau}$.

Нехай $\tilde{S} := L_N \cap C$, тоді $\tilde{S}$ є повним набором представників з $L_N \bmod L$. Таким чином, виконали кроки 1–3.

Для кращого розуміння апроксимації введемо фундаментальні області C_N для L_N, які обираємо так, що

$$C = \bigcup_{\tilde{s}\in\tilde{S}} \tilde{s} + C_N. \tag{2.37}$$

Для виконання кроку 4 обираємо інтервал збіжності $[0, R]$, де R — це додатне дійсне число, таке, що $(R, 0)$ за модулем $\widetilde{L}$ належить границі області C.

Рухаючись вздовж шляху $(t, 0)$, $t \in \mathbb{R}_{>0}$ та обвиваючи фундаментальну область, як показано на рис. 2.4, ми зупинимось у деякій точці R, де шлях виходить з C, тобто матимемо скінченну кількість шляхів з C. Таким чином, шлях $(t, 0)$, $0 \leq t \leq R$ складатиметься зі скінченної кількості зсувів $\tilde{t}_i + C$, $i = 1, \ldots, M$ з C, позначимо $\tilde{T} = \{\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_M\}$.

Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ це довільна неперервна локальна функція відносно квазікристала $\Lambda = \Lambda([-1, \frac{1}{\tau}))$ та нехай $\widetilde{F}\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ це її розширення до неперервної функції на торі $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\widetilde{L}$. Нас цікавить розклад Фур'є функції $\widetilde{F}$ та відповідний розклад функції f. Тобто потрібно обчислити

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \widetilde{F}(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(\widetilde{k}|x)} \mathrm{d}\theta_{\mathbb{T}}(x),$$

де $\widetilde{F}(\cdot)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(\widetilde{k}|\cdot)}$ це деяка інша неперервна функція на $\mathbb{T}$, яка також є локальною відносно Λ. Отже досить розглянути деяку загальну неперервну функцію $\widetilde{G}$ на $\mathbb{T}$ та її обмеження $g(t) = \widetilde{G}((t, 0))$ на пряму $(\mathbb{R}, 0) \mod \widetilde{L}$.

Позначимо $\varepsilon_N := \sup_{i=1,\ldots,N^2} \sup_{x \in \tilde{s}_i + C_N} |\widetilde{G}(x) - \widetilde{G}(\tilde{s}_i)|$.

Розглядаємо наступне наближення

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \widetilde{G} \mathrm{d}\theta_{\mathbb{T}} \;\sim\; \frac{\sqrt{5}}{N^2} \sum_{i=1}^{N^2} \widetilde{G}(\tilde{s}_i).$$

Оскільки $\operatorname{vol} C_{N^2} = \frac{\sqrt{5}}{N^2}$, то помилка наближення оцінюється як

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_{\mathbb{T}} \widetilde{G} \mathrm{d}\theta - \frac{\sqrt{5}}{N^2} \sum_{i=1}^{N^2} \widetilde{G}(\tilde{s}_i) \right| &= \left| \sum_{i=1}^{N^2} \int\limits_{\tilde{s}_i + C_{N^2}} \Big(\widetilde{G}(x) - \widetilde{G}(\tilde{s}_i) \Big)\, \mathrm{d}\theta(x) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{N^2} \int\limits_{\tilde{s}_i + C_{N^2}} \varepsilon_N \mathrm{d}\theta = \sum_{i=1}^{N^2} \varepsilon_N \operatorname{vol} C_{N^2} = \sqrt{5}\, \varepsilon_N, \end{aligned} \tag{2.38}$$

тобто помилка нашої апроксимації обмежена числом $\sqrt{5}\,\varepsilon_N$. На практиці L_N та N мають бути обрані таким чином, щоб забезпечити бажане *aniopi* задане значення ε_N.

Для застосувань у наших обчисленнях мають бути задіяні лише значення функції f, оскільки це єдине, що задано на практиці, тому, відповідно до (2.21), використовуватимемо наближення вигляду

$$\frac{1}{R}\int\limits_0^R g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{R}\int\limits_0^R \widetilde{G}(t,0)\mathrm{d}t \sim \int\limits_{\mathbb{T}} \widetilde{G}\mathrm{d}\theta_{\mathbb{T}}.$$

Шлях $\{(t,0)_L \mid 0 \le t \le R\}$, що навивається на тор, розбивається фундаментальною областю C на сегменти $l_1, \ldots, l_M$.

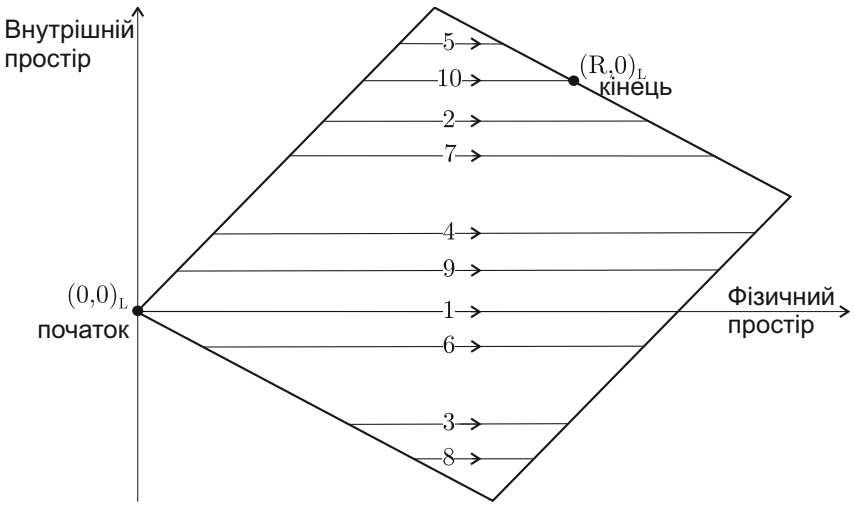


Рис. 2.4. Десять перетинів фундаментальної області C шляхом $\{(t,0)_L \mid 0 \le t \le R\}$ зображені на торі. (Протилежні сторони паралелограма — ототожнюються.)

Нехай $b_1 < b_2 < \cdots < b_M$ — це проєкції на внутрішній простір точок перетину границі з $\{(t,0)\colon 0 \le t \le R\}$.

Позначимо $c_0 = \tau'$, $c_1 = \frac{b_1+b_2}{2}, \ldots,$ $c_{M-1} = \frac{b_{M-1}+b_M}{2}$, $c_M = 1$.

Смуги S_i, що проходять через C у межах інтервалів $[c_{i-1}, c_i)$ з внутрішнього простору та у напрямку фізичних осей, утворюють розбиття C. Через кожну смугу в C проходить частина l_i нашої прямої $\{(t,0)_L\colon 0 \le t \le R\}$. Головною ідеєю є використати $[c_{i-1}, c_i)$ як вікна,

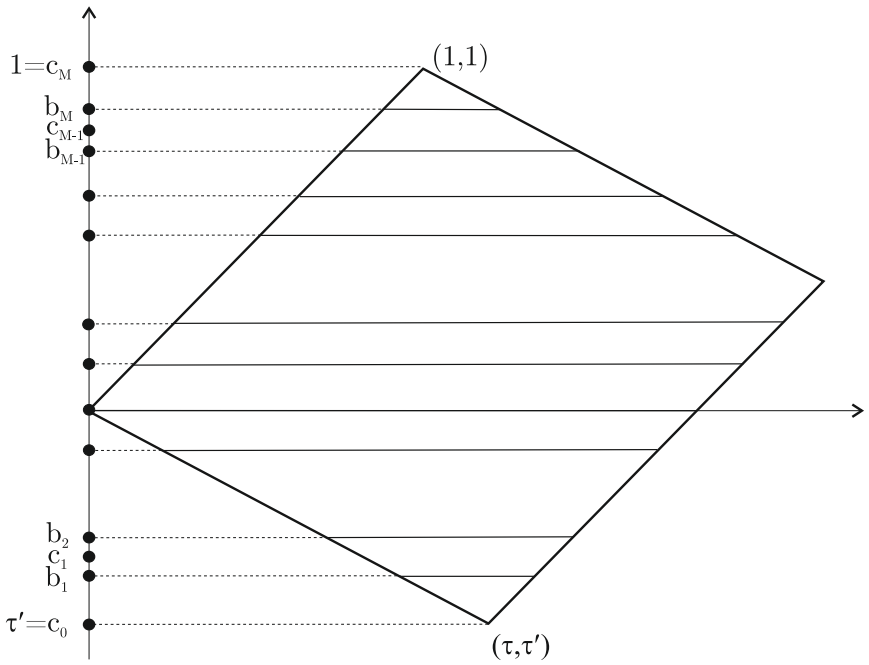


Рис. 2.5. Проєкції $b_1, \ldots, b_M$ на внутрішній простір точок перетину границі та шляху. Точки $c_0, \ldots, c_M$ позначають границі менших вікон на які розбивається вихідне вікно $[\tau', 1)$.

а частини прямої l_i як частини фізичного простору для модельної множини, що побудована на сітці $\widetilde{L_N}$. Це дозволить побудувати точки l_i, які будуть точками даних для обчислення функцій $\widetilde{G}$ та g. Іншими словами, неявно використовуємо частину модельної множини $\Lambda_{\widetilde{L_N}}(S_i) \cap l_i$.

Нехай $m(R) := \max\{|c_i - c_{i-1}|\}$ та

$$\varepsilon'_N := \sup_i \sup_{(x,v),(x,u)\in S_i} \left|\widetilde{G}(x,v) - \widetilde{G}(x,u)\right|, \qquad i = 1, \ldots, M.$$

Кожне з $\tilde{s}_j \in \widetilde{S}$ лежить у рівно одній смузі S_i. Нехай (p_j, q_j) буде його проєкцією на частину прямої l_i. Тоді $(p_j, q_j) \equiv (u_j, 0)_L$ для деякого $u_j \in [0, R]$. Таким чином, отримаємо $\{(u_1, 0), \ldots, (u_{N^2}, 0)\}$ на нашому шляху $\{(t, 0)_L \colon 0 \le t \le R\}$.

Маємо оцінку (2.38), більш того

$$\frac{\sqrt{5}}{N^2}\sum_{i=1}^{N^2}\widetilde{G}(\tilde{s}_i) = \frac{\sqrt{5}}{N^2}\sum_{i=1}^{N^2}(\widetilde{G}(\tilde{s}_i) - \widetilde{G}(p_i, q_i)) + \frac{\sqrt{5}}{N^2}\sum_{i=1}^{N^2} g(u_i),$$

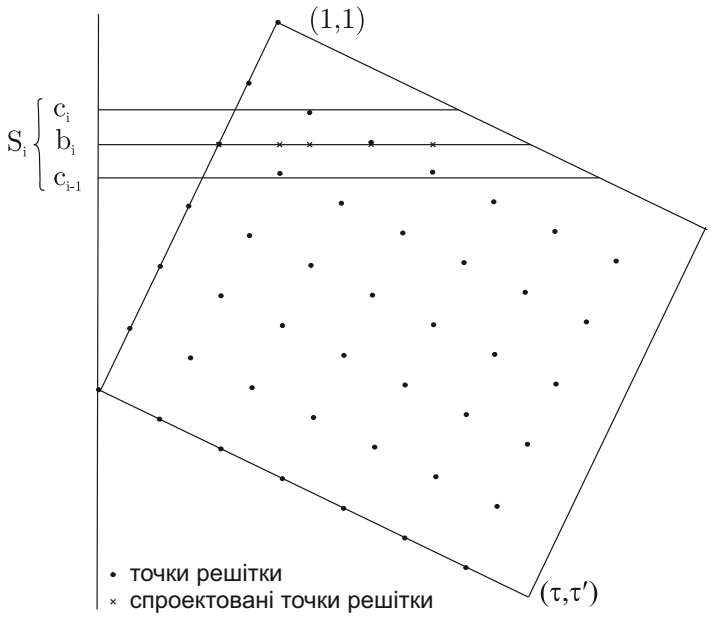


Рис. 2.6. Точки $\tilde{s}_j$, що лежать у смузі S_i утвореній вікном $[c_{i-1}, c_i)$, проєктуються на частину l_i шляху $\{(t,0)_L \colon 0 \le t \le R\}$ і породжують точки даних u_j, які позначені маленькими хрестиками.

оскільки

$$\widetilde{G}(p_i, q_i) = \widetilde{G}((u_i, 0)) = g(u_i).$$

Таким чином,

$$\left| \frac{\sqrt{5}}{N^2} \sum_{i=1}^{N^2} \widetilde{G}(\tilde{s}_i) - \frac{\sqrt{5}}{N^2} \sum_{i=1}^{N^2} g(u_i) \right| \le \frac{\sqrt{5}}{N^2} \sum_{i=1}^{N^2} \varepsilon'_N = \sqrt{5}\, \varepsilon'_N, \tag{2.39}$$

оскільки і $\tilde{s}_i$ і (p_i, q_i) одночасно мають другу компоненту на тому самому інтервалі $[c_{i-1}, c_i)$.

Поєднавши (2.38) та (2.39), отримаємо

$$\left| \int_{\mathbb{T}} \widetilde{G}\, d\theta - \frac{\sqrt{5}}{N^2} \sum_{i=1}^{N^2} g(u_i) \right| < \sqrt{5}\, (\varepsilon_N + \varepsilon'_N). \tag{2.40}$$

Це дає нам метод оцінки інтегралу $\int\limits_{\mathbb{T}} \widetilde{G} \mathrm{d}\theta$, використовуючи лише g на $[0, R]$ та добре обрані точки на інтервалі. Два параметри N та R контролюють оцінку.

Незважаючи на видиму складність смуг, отримані результати легко імплементуються. Для кожного $\tilde{s}_i = (s_i, s'_i)$ існує вектор зсуву $\tilde{t}_j \in \tilde{T}$ для якого модуль $|s'_i + t'_j|$ мінімальний, тоді відповідні точки даних мають вигляд $u_i := s_i + t_j$, що і завершує крок 5 попереднього розділу.

Застосуємо наведений метод до двох функцій $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, кожна з яких є локальною відносно модельної множини $\Lambda = \Lambda([-1, \frac{1}{\tau}))$.

Перша функція — це відстань до найближчої точки квазікристала:

$$f(t) = \text{відстань від } t \text{ до найближчої точки } \Lambda. \tag{2.41}$$

Це неперервна та кусково-лінійна функція, яка є локальною відносно Λ.

Друга функція — це f:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ належить довгому інтервалу,} \\ -1, & \text{якщо } x \text{ належить короткому інтервалу,} \end{cases} \tag{2.42}$$

яка є локальною відносно Λ, але лише частково неперервною з розривами у точках x, де відбувається зміна довгих та коротких інтервалів. Графіки цих функцій (суцільні лінії) наведено на рис. 2.7 та рис. 2.12 відповідно.

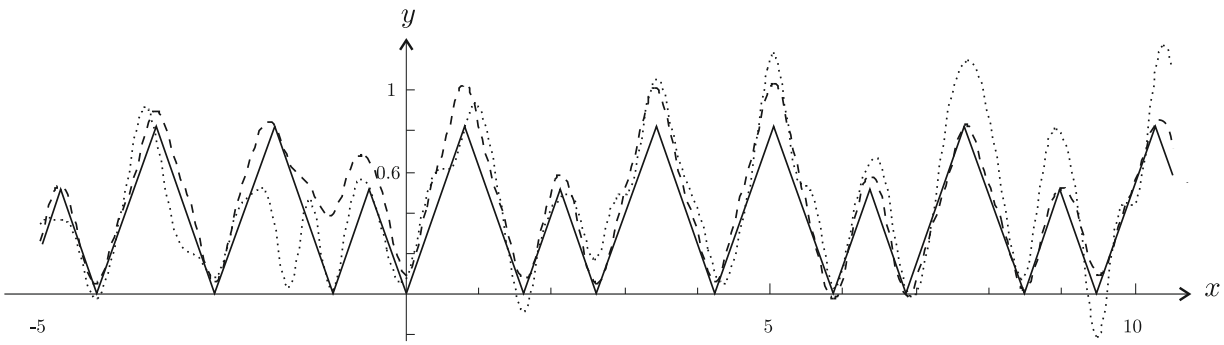


Рис. 2.7. Суцільна лінія — графік функції f (2.41). Пунктирна лінія — наближення f^{sum}, а штрихова лінія — наближення f^{int}. Обидві апроксимації обчислено з використанням $N^2 = 49$ точок сітки у C та $M = 11$ частин шляху в C, відповідний інтервал інтегрування $R \approx 23{,}30$.

Наближаємо кожну з цих двох функцій скінченною кількістю доданків з їх розкладу Фур'є–Бора (2.19):

$$f(x) = \sum_{\tilde{k} \in \widetilde{\mathbb{Z}[\tau]^\circ}} a_k \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(k|x)}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.43}$$

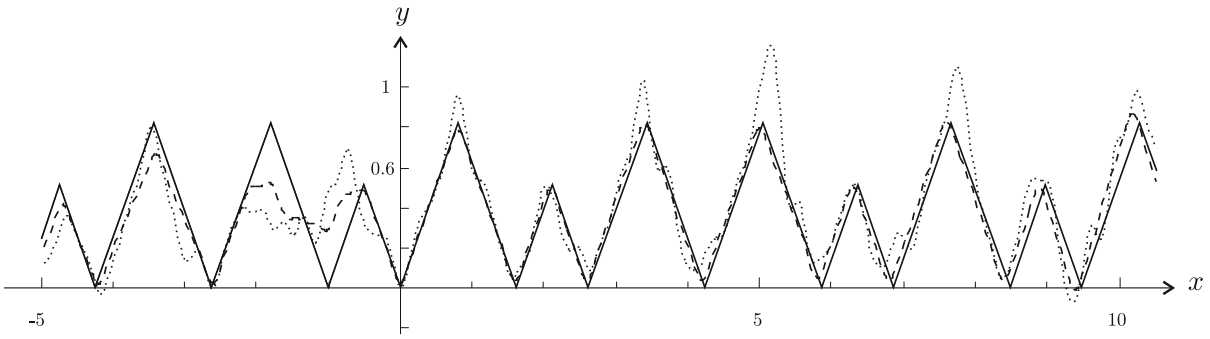


Рис. 2.8. Функція f та апроксиманти (2.41) зображено з тими самими позначеннями що і на рис. 2.7, але для дрібніших параметрів: $M = 17$, $N^2 = 121$, та $R \approx 37{,}43$.

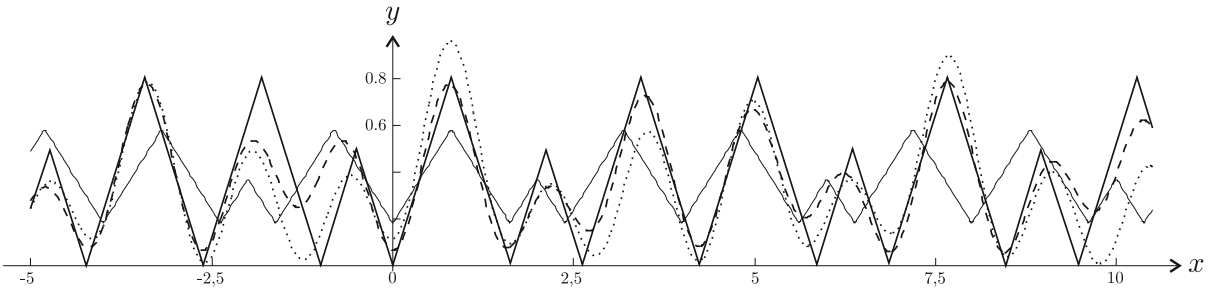


Рис. 2.9. Функцію f (2.41) зображено для параметрів: $N^2 = 9$, $M = 10$ та $R \approx 21{,}64$. Також тонкою лінією зображено періодичну апроксимацію $f^{\cos}$ для $n = 50$ коефіцієнтів обчислених за формулою (2.48).

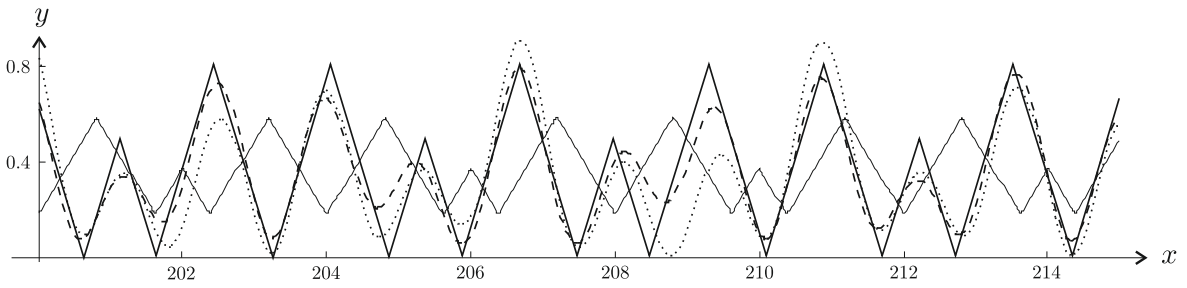


Рис. 2.10. Тут зображено ті самі наближення, що і на рис. 2.9, але функції зображено на проміжку $[200, 215]$. Спостерігаємо, що аперіодичні наближення продовжують повторювати графік f на відміну від періодичного.

Для двох функцій f, які розглядаємо, легко встановити відповідні функції $\tilde{F}$ на торі $\mathbb{T} = (\mathbb{R} \times \mathbb{R})/\widetilde{L}$ та точно обчислити коефіцієнти Фур'є–Бора a_k використовуючи (2.20).

З іншого боку, наближення залежить від вибору сітки подрібнення $\widetilde{L_N}$, яка в даному випадку має вигляд $(1/N)\widetilde{L} = (1/N)\widetilde{\mathbb{Z}[\tau]}$ (та-

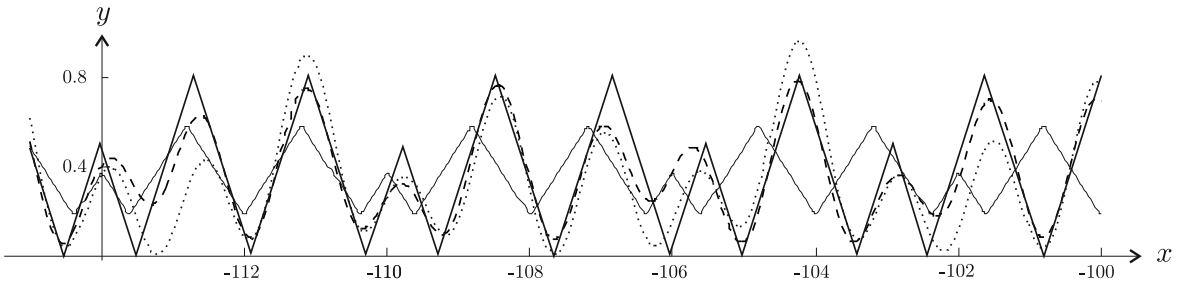


Рис. 2.11. Тут зображено ті самі наближення, що і на рис. 2.9, але функції зображено на проміжку $[-115, -100]$.

k	a_k^{exact}	a_k^{int}	a_k^{sum}
$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tau$	-0,1065-0,0367i	-0,1065-0,0371i	-0,1086-0,0581i
$-\frac{1}{2}$	0,0243+0,0287i	0,0236+0,0292i	0,0269+0,0711i
$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau$	0,0026+0,0153i	0,0035+0,0155i	0,0233-0,0332i
$-\frac{1}{2}\tau$	-0,0683+0,0407i	-0,0680+0,0412i	-0,0517+0,0542i
0	0,3618	0,3618	0,3367
$\frac{1}{2}\tau$	-0,0683-0,0407i	-0,0680-0,0412i	-0,0517-0,0542i
$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tau$	0,0026-0,0153i	0,0035-0,0155i	0,0233+0,0332i
$\frac{1}{2}$	0,0243-0,0287i	0,0236-0,0292i	0,0269-0,0711i
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau$	-0,1065+0,0367i	-0,1065+0,0371i	-0,1086+0,0581i

Табл. 2.1. Порівняння обчислених коефіцієнтів a_k для наближень f^{exact}, f^{int}, та f^{sum}. Параметри співпадають з рис. 2.13.

ким чином індекс $[\widetilde{L_N} : \widetilde{L}]$ дорівнює N^2). Це визначає точки, що будуть спроєктовані у точки даних та набір чисел k які слід включити до апроксимуючої суми (2.43), а саме набір $\tilde{K}$ з $\tilde{k} = (k, k') \in \widetilde{\mathbb{Z}[\tau]}^\circ$ обирається як представники групи $\widetilde{\mathbb{Z}[\tau]}^\circ / N\widetilde{\mathbb{Z}[\tau]}^\circ$ дуальної до групи $((1/N)\widetilde{\mathbb{Z}[\tau]})/\widetilde{L}$. Обираємо $\tilde{k}$ з найменшим $|k|$, тому K складається з елементів $k \in \mathbb{Z}[\tau]$, по одному для кожного класу конґруентності $\mathbb{Z}[\tau]$ за модулем $N\mathbb{Z}[\tau]$, обраних так, що $|k|$ є мінімальним для кожного класу.

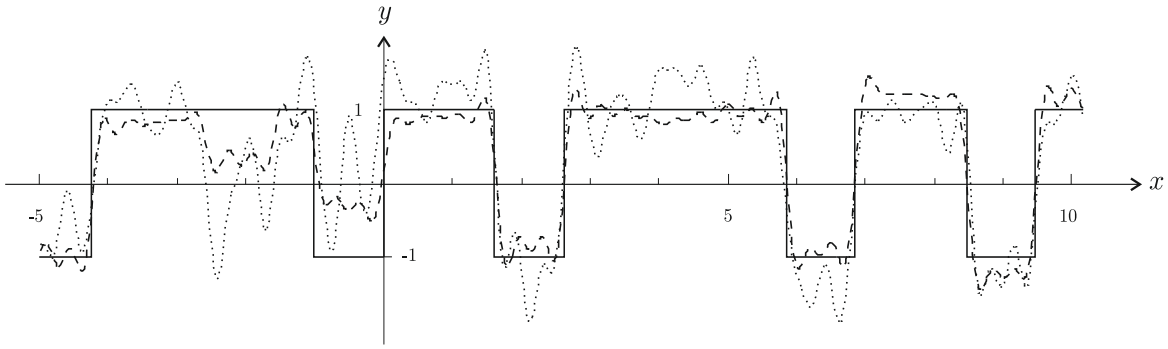


Рис. 2.12. Суцільна лінія — графік функції f (2.42). Пунктирна лінія — графік f^{sum}, а штрихова — f^{int}. Обидва наближення обчислено для $N^2 = 81$ точок сітки у C, $M = 17$ шляхів у C, а відповідний інтервал інтегрування задається числом $R \approx 37{,}01$.

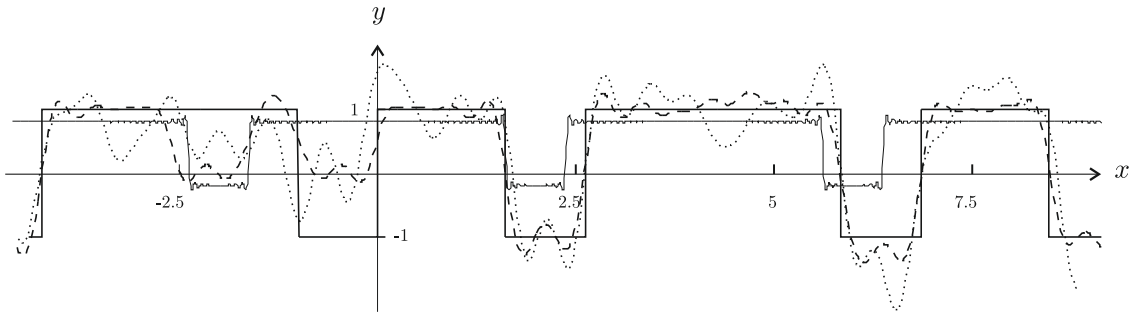


Рис. 2.13. Функція f (2.42) зображена для параметрів: $N^2 = 49$, $M = 11$, $R \approx 23,30$. Також тонкою лінією наведено періодичне наближення $f^{\cos}$ обчислене для $n = 50$ доданків. Пунктирна лінія відповідає f^{sum}, а штрихова відповідає f^{exact}.

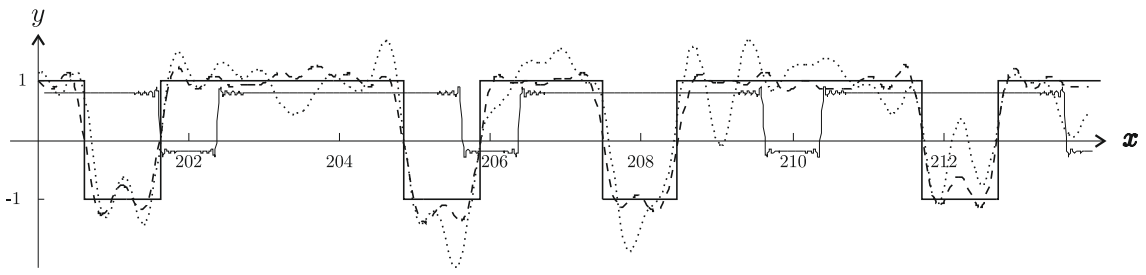


Рис. 2.14. Тут наведено ті самі наближення, що і на рис. 2.13, але функції зображено на проміжку $[200, 215]$.

Позначимо через $f^{\mathrm{exact}}(x)$ скінченні суми з формули (2.43), що наближають функцію $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{\mathrm{exact}}(x) = \sum_{k \in K} a_k \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(k|x)}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.44}$$

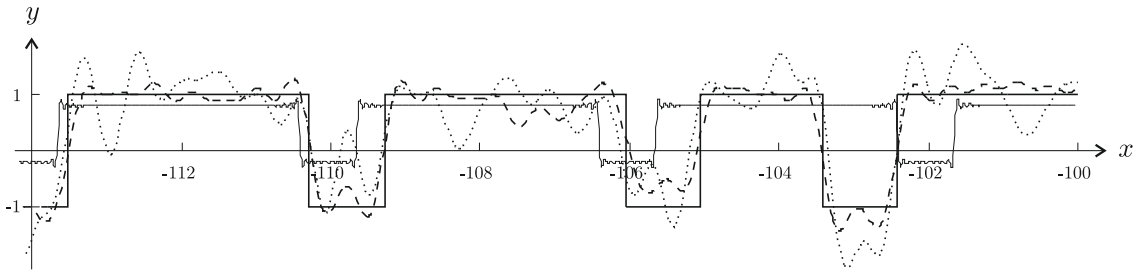


Рис. 2.15. Тут наведено ті самі наближення, що і на рис. 2.13, але функції зображено на проміжку $[-115, -100]$.

x_i	$f(x_i)$	$f^{\text{exact}}(x_i)$	$f^{\text{int}}(x_i)$	$f^{\text{sum}}(x_i)$	$f^{\cos}(x_i)$
-100	1	1,0960	1,0796	1,1907	0,8024
-50	1	1,0690	1,0628	0,6269	-0,1948
-15	1	1,1020	1,1637	1,1570	0,8162
-3-5τ	1	0,1092	0,0963	0,3515	0,8093
0	1	0,5331	0,5268	1,5952	0,8024
τ	-1	-0,0271	-0,0291	0,7757	0,3036
0,25+τ	-1	-1,2750	-1,2957	-1,3115	-0,1820
0,5+τ	-1	-0,7919	-0,8123	-0,7404	-0,1884
1+τ	1	0,0704	0,0971	-0,0128	0,7910
1+1,25τ	1	0,9261	0,9625	1,1215	0,8005
1+2,5τ	1	1,1233	1,1382	1,0246	0,7991
1+2,75τ	1	0,9577	0,9519	1,2470	0,7826
50	1	0,9241	0,9374	1,1735	-0,1948
100	-1	-1,2440	-1,2652	-1,5375	0,8024
500	1	1,0950	1,0639	0,9970	0,8024

Табл. 2.2. Порівняння значень функцій f (2.42) та її наближень f^{exact}, f^{int}, f^{sum} і $f^{\cos}$.

Тепер замінимо коефіцієнти a_k у $f^{\text{exact}}(x)$ їх наближеннями

$$a_k^{\text{int}} := \frac{1}{R}\int_0^R f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(k|x)}\mathrm{d}x \tag{2.45}$$

відповідно до (2.22), та позначимо отриману функцію $f^{\text{int}}(x)$. Використовуватимемо різні значення R, які відповідають набору повних шляхів у фундаментальній області, як це зображено на рис. 2.4.

Інтеграли (2.45) замінюються на скінченні суми, де інтегрант обчислюється на скінченному наборі точок, які походять з проєкцій $\{u_1, \ldots, u_{N^2}\}$ отриманих з N^2 точок в C:

$$a_k^{\text{sum}} := \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N^2} f(u_j) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(k|u_j)}. \tag{2.46}$$

Остаточна апроксимація функції $f^{\text{exact}}(x)$ позначається $f^{\text{sum}}(x)$, це і є наближення над яким працювали:

$$f^{\text{sum}}(x) = \sum_{k \in K} \left\{ \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N^2} f(u_j) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(k|u_j)} \right\} \mathrm{e}^{2\pi i(k|x)}. \tag{2.47}$$

Воно обчислюється з точок даних у $\mathbb{R}$, є скінченною сумою експоненційних функцій з частотами з модуля Фур'є функції f, використовує дискретні групи, що походять з періодичності схеми перерізів та проєкцій. За побудовою функція f^{sum} є майже періодичною та наближає функцію $\tilde{F}$ на всій прямій, що обвиває тор.

Отже, маємо чотири функції: f, f^{exact}, f^{int}, f^{sum}, усі визначені для всіх $x \in \mathbb{R}$. Три наближені функції залежать від кількості M частин шляху, що проходять через фундаментальну область, та від кількості N^2 точок сітки $\widetilde{L_N}$ у фундаментальній області C. Кожне з цих чисел обмежує повну суму ряду Фур'є–Бора до однакового скінченного набору частот K.

Обчислення та графіки, наведені нижче, дозволяють порівняти ці функції. Також наведемо періодичне Фур'є наближення за допомогою функції косинуса

$$f^{\cos}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos\left(\frac{k}{2}\pi x\right), \quad \text{де } a_k = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) \cos\left(\frac{k}{2}\pi x\right) \mathrm{d}x. \tag{2.48}$$

Передбачувано, що $f^{\cos}$ не може добре наближати f поза деяким інтервалом I, і вона не наближає. Насправді, $f^{\cos}$ не є хорошим вибором навіть для певної обмеженої області I.

Дослідження аперіодичних наближень показує, що вони дуже близькі до оригіналів, але спостерігається дивна нечіткість наближень на інтервалі $[-\tau^2, 0]$. Пояснення цього феномену досить цікаве та демонструє той факт, що метод наближень чутливий до тонких властивостей аперіодичності. Той набір Фібоначчі, який використовували у наших прикладах є *сингулярним*, тобто для нього параметризація тора не є однозначною. Λ є однією з двох різних множин у $X(\Lambda)$, які перетворюються у ті самі точки на торі $\mathbb{T}$. Друга множина відрізняється від Λ тим, що вона містить точку $\{-\tau\}$ замість $\{-1\}$. Розклад Фур'є виконується на торі $\mathbb{T}$ та однаково працює з обома цими множинами, а от функції найменшої відстані до цих точок — різні. Цієї різниці не помічає функція $\tilde{F}$, але помічає F, при цьому Фур'є аналіз коливається між двома сценаріями.

Подальші подрібнення сітки не можуть покращити ситуацію на цьому інтервалі. Але, якщо використаємо елемент з $X(\Lambda)$ для якого перехід на тор буде $1 - 1$, то даний феномен не матиме місця. У даному випадку досить зсунути вікно таким чином, щоб його кінці не належали $\mathbb{Z}[\tau]$, наприклад $\frac{1}{2} + [-1, \frac{1}{\tau}]$.

2.3. Шифрування зображень за допомогою квазікристалів

Даний параграф дисертації присвячено 'класичній' задачі криптографії, а саме захисту даних, що передаються або зберігаються від розголошення та спотворення. Ця проблема часто виникає, коли створення та використання даних роз'єднано в часі або просторі. У сучасній криптографії існує багато підходів до цієї проблеми, які можна розділити на три

основні групи за типом ключів: без ключа, симетричні ключі та публічні ключі [29, 47].

У цьому параграфі запропоновано переставний симетричний метод шифрування, оснований на аперіодичних точкових наборах, що у фізичній літературі називаються квазікристалами, а у математичній — модельними множинами [26, 45]. Процес шифрування є строго аперіодичним та розривним у кожній точці. Кодування є стійким, оскільки обчислення виконуються у цілих числах та не містять помилку обчислення, частково пошкоджені дані можуть бути успішно декодовані без зростання кількості пошкодженої інформації. У заключній частині обговорено змінні, що можуть входити до ключа шифрування.

У цьому параграфі буде наведено додаткові властивості одновимірних множини перерізів та проєкцій, що спрощують їх побудову та застосування. Отже, множина перерізів та проєкцій це дискретний детермінований аперіодичний набір точок Λ у скінченно-вимірному дійсному евклідовому просторі. Багато в чому квазікристали нагадують ґратки (окрім симетрії зсуву), тому подекуди їх називають аперіодичними ґратками.

Загальна ідея пропонованого підходу наступна. Беремо задані цифрові дані та встановлюємо відповідність один-до-одного між інформаційними байтами та натуральними числами $\mathbb{N}$, далі пов'язуємо підмножину чисел з $\mathbb{N}$ та фрагмент квазікристала Λ (див. перші два рядки схеми на рис. 2.16). На цьому етапі дані розташовано на точках квазікристала. Далі до точок квазікристала застосовується $\star$-перетворення (див. другий і третій рядки схеми на рис. 2.16), яке є вирішальним кроком процедури шифрування. У результаті отримуємо точки квазікристала, що містять наші дані, у змішаному вигляді на вікні Ω. Єдине що залишається — це встановити відповідність між вмістом вікна Ω та бажаною сіткою для виводу інформації (див. два останні рядки схеми на рис. 2.16).

Зауважимо, що це саме $\star$-перетворення позначали $(\cdot)'$ у попередніх параграфах 2.1 та 2.2, тут використовуємо позначення $\star$ аби дотриматись

термінології робіт, що цитуються у даному параграфі.

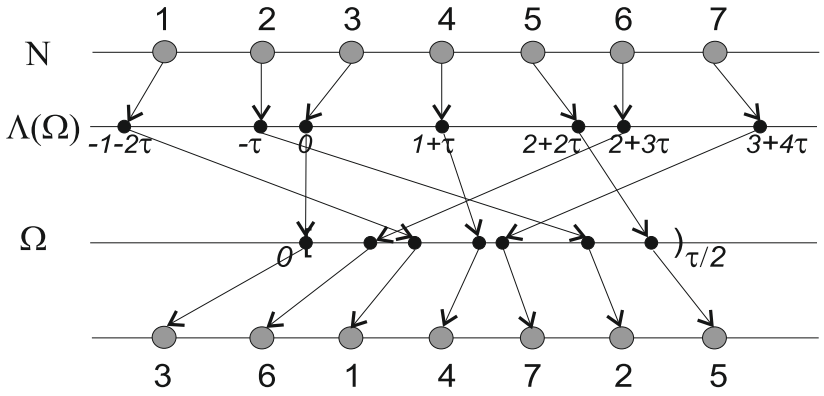


Рис. 2.16. Схема найпростішого шифру, основаного на квазікристалі $\Lambda(\Omega)$.

Перш ніж зафіксовано криптозмінні, не відомо, яку саме частину квазікристала буде використано для шифрування, навіть, якщо відомий обсяг даних шифрування, це одна з причин, які обумовлюють нескінченну кількість можливих ключів шифрування.

Процедура побудови точок квазікристала є надзвичайно гнучкою: вони можуть обчислюватись в один потік або розбиватись на кілька блоків для паралельного обчислення.

У роботі деталізуємо лише найпростішу з можливих версій квазікристала, котра використовує лише відносні положення точок квазікристала і не залежить від значень точок $a + b\tau$, $a, b \in \mathbb{Z}$, в той час як цілі числа a та b також добре застосовуються у шифруванні.

2.3.1. Математичні складові методу шифрування Теоретичні відомості, що стосуються одновимірних квазікристалів дещо інші ніж у загальному випадку, оскільки вони детальніше вивчені, зокрема у роботах [26, 45, 89, 90, 96].

Оберемо дві прямі $V_1\colon y = \tau x$ та $V_2\colon y = \tau' x$ на квадратній ґратці $\mathbb{Z}_2$ (див. рис. 2.17), де τ та τ' це два ірраціональні числа. Найпростіший вибір цих чисел $\tau = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ і $\tau' = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$. Одна з прямих, наприклад V_1, грає роль фізичного простору (простору квазікристала) на яку проєкту-

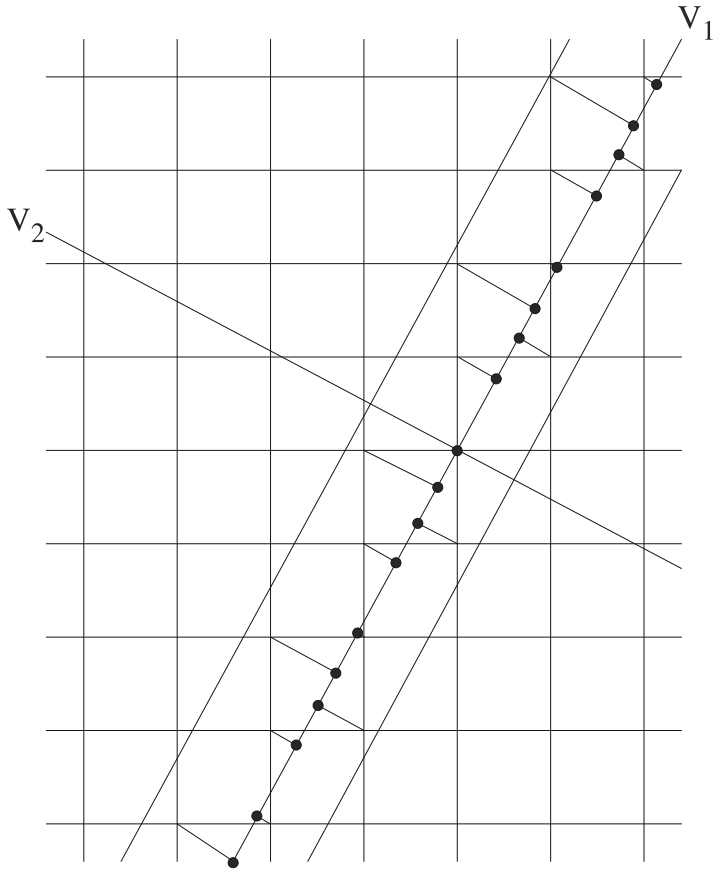


Рис. 2.17. Побудова одновимірного квазікристала з квадратної ґратки цілих чисел.

ється ‘переріз’ ґратки $\mathbb{Z}_2$. У іншому напрямку V_2, обираємо скінченний інтервал Ω. Точка ґратки $\mathbb{Z}_2$ стає точкою квазікристала, після проєкції на V_1, за умови, якщо її проєкція на V_2 потрапляє у вікно Ω, тобто якщо вона до проєкції належала ‘перерізу’.

Позначимо через $\mathbb{Z}[\tau]$ множину дійсних чисел вигляду $(a + b\tau)$, з цілими a та b. Як і у параграфі 2.1 розглянемо $\star$-перетворення між точкою квазікристала $(a + b\tau)$ та точкою $(a + b\tau')$ вікна Ω, яке задається співвідношенням

$$\begin{aligned} \star : \quad \mathbb{Z}[\tau] \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{Z}[\tau'], \\ (a + b\tau) \quad &\mapsto \quad (a + b\tau'), \qquad a, b \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Існує необмежена кількість ірраціональних пар, що можуть бути використані у нашій конструкції. Наприклад, можна обрати τ і τ' як спряжені

розв'язки двох нескінченних серій рівнянь $x^2 = mx + 1,\ m = 1, 2, \ldots$ та $x^2 = mx - 1,\ m = 3, 4, \ldots$.

Одновимірний *квазікристал* або *множина перерізу та проєкції* $\Lambda_\tau(\Omega)$ описується таким чином.

Означення 2.10. Нехай Ω це скінченний інтервал, а τ і τ' — ірраціональні числа, тоді

$$\Lambda_\tau(\Omega) = \{a + b\tau \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a + b\tau' \in \Omega\},$$

де Ω — це *вікно* квазікристала $\Lambda_\tau(\Omega)$.

Варто підкреслити, що означений тут квазікристал $\Lambda_\tau(\Omega)$ є нескінченною та однорідно дискретною точковою множиною, в той час як вікно Ω це скінченний інтервал, щільно покритий $\star$-перетворенням точок з $\Lambda_\tau(\Omega)$.

З означення $\Lambda_\tau(\Omega)$ можна вивести ряд властивостей квазікристала [45,96], зокрема аперіодичність та розривність $\star$-перетворення та існування лише двох або трьох різних відстаней між сусідніми точками квазікристала $\Lambda_\tau(\Omega)$. Наведемо дві наступні теореми.

Твердження 2.11 ([89]). *Нехай Ω — це напіввідкритий інтервал. Для кожної множини $\Lambda_\tau(\Omega)$ існують додатні числа $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathbb{Z}[\tau]$, такі, що відстань між двома сусідніми точками у $\Lambda_\tau(\Omega)$ набуває значень з множини $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_1 + \Delta_2\}$. Відстані залежать лише від τ, τ' та довжини вікна Ω.*

Залежність кількості можливих відстаней між сусідніми точками квазікристала від довжини вікна виражається співвідношенням

$$\{x_{n+1} - x_n | n \in \mathbb{Z}\} = \begin{cases} \{\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_1 + \Delta_2\}, \\ \text{якщо} \quad |\Delta_1^\star - \Delta_2^\star| > |\Omega|, \\ \{\Delta_1,\ \Delta_2\}, \\ \text{якщо} \quad |\Delta_1^\star - \Delta_2^\star| = |\Omega|. \end{cases}$$

Зауважимо, що не існує аналогічних відстаней для перетворених точок $x^\star$ у вікні Ω, тому $\star$-перетворення не можна розглядати як передбачуване перетворення.

Можна встановити загальну властивість масштабування квазікристалів:

Твердження 2.12 ([89]). *Для довільних ірраціональних чисел τ, τ', $\tau \neq \tau'$ та обмеженого інтервалу Ω, існують $\tilde{\tau}' \in (-1, 0)$, $\tilde{\tau} > 0$, $s \in \mathbb{R}$ та $\tilde{\Omega}$ (що задовольняють умові $\max\{1 + \tilde{\tau}', -\tilde{\tau}'\} < |\tilde{\Omega}| \leq 1$), такі що*

$$\Lambda_\tau(\Omega) = s\Lambda_{\tilde{\tau}}(\tilde{\Omega}).$$

Більш того, відстані між сусідніми точками у $\Lambda_{\tilde{\tau}}(\tilde{\Omega})$ рівні числам $\tilde{\tau}$, $1 + \tilde{\tau}$, $1 + 2\tilde{\tau}$, коли $|\tilde{\Omega}| \neq 1$ та числам $\tilde{\tau}$, $1 + \tilde{\tau}$, коли $|\tilde{\Omega}| = 1$.

Остаточно підкреслимо, що одновимірний квазікристал $\Lambda_\tau(\Omega)$ — це нескінченний дискретний аперіодичний набір точок, однозначно визначений вибором τ, τ' та вікна $\Omega = [c, c + d)$, де c та d довільні дійсні числа. За твердженням 2.11, не втрачаючи загальності, можемо розглядати $\tau' \in (-1, 0)$, $\tau > 0$, $c = 0$ та $d \in (\max\{1 + \tau', -\tau'\}, 1]$. Більш того, в умовах твердження 2.11 можна уникнути проблеми коли ті самі частини різних квазікристалів Λ_1 і Λ_2, таких, що $\Lambda_1 = s\Lambda_2$ призводять до того самого шифрування.

У випадку вищих розмірностей досить застосувати декартів добуток одновимірних квазікристалів, наприклад, у ортогональних напрямках.

Розглянемо два приклади одновимірних квазікристалів $\Lambda_\tau(\Omega)$.

Приклад 2.13. Візьмемо два корені квадратного рівняння $x^2 = x + 1$: $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ та $\tau' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Тоді $\tau + \tau' = 1$, $\tau\tau' = -1$. Оберемо $\Omega = [0, d)$, $d = \frac{\tau}{2}$, в цьому випадку задовольняються умови твердження 2.11: $\tau' \approx -0{,}62 \in (-1, 0)$ та $\tau \approx 1{,}62 > 0$. Тоді відстані між сусідніми точками квазікристала $\Lambda_\tau([0, d))$ наступні $\Delta_1 = \tau$, $\Delta_2 = 1 + \tau$ і $\Delta_3 = 1 + 2\tau$.

У якості початкової точки для побудови квазікристала $\Lambda_\tau([0, d))$ можна обрати будь-яку точку $x = a + b\tau$ таку, що $x' = a + b\tau' \in [0, d)$. Оберемо, наприклад, точку $x = 0$.

На відміну від означення (2.6), яке не є конструктивним, маємо необхідну інформацію для швидкої побудови точок квазікристала. Можемо рухатись ліворуч або праворуч від початкової точки додаючи або віднімаючи одну за одною відстані Δ_1, Δ_2 або Δ_3.

Припустимо, що встановлено, що x є точкою $\Lambda_\tau([0,d))$, тобто, що $x' \in [0,d)$, тоді права сусідня точка до x є однією з трьох

$$x+\tau, \quad x+1+\tau \quad \text{або} \quad x+1+2\tau.$$

Щоб визначити яка саме з них підходить, перевіряємо одне за одним включення $x+\tau' \in [0,d)$, $x+1+\tau' \in [0,d)$ або $x+1+2\tau' \in [0,d)$. Перше включення яке справдилось визначає нову точку квазікристала.

Вищенаведеним способом було отримано дві підмножини квазікристалів $\Lambda_\tau([0,d))$

$$\begin{aligned}
&\{\ldots, -1-2\tau,\ -\tau,\ 0,\ 1+\tau,\ 2+2\tau,\ 2+3\tau,\ 3+4\tau, \ldots\} \leftrightarrow \\
&\qquad\qquad \leftrightarrow \{\ldots,\ \Delta_2,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_2,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots\}; \\
&\{\ldots, -\tau,\ 0,\ 1+\tau,\ 2+3\tau,\ 3+4\tau, \ldots\} \leftrightarrow \\
&\qquad\qquad \leftrightarrow \{\ldots, \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3,\ \Delta_2, \ldots\}.
\end{aligned}$$

Другий рядок у кожному з прикладів містить відповідну послідовність відстаней (порядок перевірки чи належить спряжена точка вікну). Два наведені квазікристали відрізняються порядком у якому три можливі відстані Δ_1, Δ_2 та Δ_3 були використані для побудови точок. Перший випадок використано як другий рядок схеми на рис. 2.16.

Приклад 2.14. Наступний квазікристал $\Lambda_\tau(\Omega)$ побудовано з використанням ірраціональностей $\tau = 1+\sqrt{2}$, $\tau' = 1-\sqrt{2}$, які є коренями рівняння $x^2 = 2x+1$. Умови твердження 2.9 виконуються: $\tau' \approx -0{,}42 \in (-1,0)$ та $\tau \approx 2{,}42 > 0$. Оберемо $\Omega = [0,1)$, у цьому випадку лише дві різні відстані $\Delta_1 = \tau$ та $\Delta_2 = 1+\tau$ між точками квазікристала $\Lambda_\tau([0,1))$.

Використовуючи нульову точку як початкову, отримаємо множину перерізу та проєкції

$$\{\ldots,\!-1-3\tau,\!-2\tau,\!-\tau,0,1+\tau,1+2\tau,2+3\tau,2+4\tau,3+5\tau,\ldots\}$$
$$\leftrightarrow\{\ldots,\ \Delta_2,\ \Delta_1,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots\}.$$

Можливі випадки коли точка x' розташована досить близько до межі інтервалу Ω, у цьому випадку процедура визначення належності $x' \in \Omega$ чи не належності $x' \notin \Omega$ точки вікну займатиме багато часу. Цього можна уникнути викидаючи з розгляду точки x', що розташовані до меж Ω на відстані меншій за деяке наперед задане число ε.

Дійсні числа вигляду $a + b\tau$ вважаються такими, що задані двома цілими компонентами кортежу (a, b). Оскільки необхідні операції вичерпуються додаванням та відніманням, то усі операції виконуються абсолютно точно.

Застосуємо найпростішу версію симетричного шифрування за допомогою квазікристала до двовимірних цифрових даних, а саме до шифрування растрових зображень. Вважаємо, що дані задано на двовимірній ґратці яка має скінченну кількість точок n_1 та n_2 у кожному з напрямків. Застосуємо відповідні скінченні фрагменти квазікристалів $\Lambda^{(i)}(\Omega_i)$, $i = 1, 2$ та їх декартів добуток в ортогональних напрямках $\Lambda(\Omega) = \Lambda^{(1)}(\Omega_1) \otimes \Lambda^{(2)}(\Omega_2)$.

Як було зазначено вище, основним інструментом є $\star$-перетворення між скінченними множинами $\Lambda_i(\Omega_i)$ та їх образами у Ω_i

$$\Lambda_i(\Omega_i) \quad \longleftrightarrow \quad \Omega_i, \qquad i = 1, 2.$$

Швидкий метод побудови квазікристалів $\Lambda_i(\Omega_i)$ вимагає заданих значень n_1, n_2, τ_i, τ_i' і Ω_i, а також двох початкових точок $\Lambda_i(\Omega_i)$, $i = 1, 2$.

Припустимо, що задано растрове зображення $P(L)$ на точках (x, y) фрагменту прямокутної ґратки, тоді кожна з координат даних обробляється незалежно, використовуючи фрагмент квазікристала, як показано на рис. 2.16.

Основний алгоритм шифрування:

- Будуємо два різних одновимірних квазікристали $\Lambda^{(1)}$ та $\Lambda^{(2)}$ розмірів n_1 та n_2, що відповідають заданим даним $P(L)$. (Кожен з фрагментів та вікно можуть бути розташовані будь-де на відповідних осях.)
- Співставляємо один-до-одного послідовності координат x з точками $\Lambda^{(1)}$, та аналогічно співставляємо координати y з точками $\Lambda^{(2)}$. (Таким чином, x перетворюється на точку $x_1 + x_2\tau$ з $\Lambda^{(1)}$, а y перетворюється на точку $y_1 + y_2\tau$ з $\Lambda^{(2)}$, де x_1, x_2, y_1, y_2 — цілі числа.)
- Ключовий крок шифрування це $\star$-перетворення $\Lambda^{(1)} \otimes \Lambda^{(2)}$ у відповідне вікно $\Omega_1 \otimes \Omega_2$

$$\Lambda^{(1)}(\Omega_1) \longrightarrow \Omega_1, \qquad \Lambda^{(2)}(\Omega_2) \longrightarrow \Omega_2;$$
$$x_1 + x_2\tau_1 \mapsto x_1 + x_2\tau_1', \qquad y_1 + y_2\tau_2 \mapsto y_1 + y_2\tau_2'.$$

  (Послідовність координат вихідних даних драматично змінюється через розривність $\star$-перетворення.)
- Останнім кроком є відображення зашифрованих точок, які зараз належать Ω_1 та Ω_2, у послідовність цілих чисел вздовж осей x та y.

Даний алгоритм переставляє точки з даними не змінюючи самі дані у кожній точці. Прямим узагальненням є розглянути можливі значення функції даних як ще один дискретний набір точок і застосувати до нього той самий алгоритм шифрування. У цьому випадку матимемо справу з тривимірною задачею і використаємо декартів добуток трьох квазікристалів.

Усі перетворення, що застосовуються у даному алгоритмі — однозначні, тому можуть бути використані для дешифрування. Крім цього, це дозволяє використовувати алгоритм ітеративно. При втраті чи пошкодженні частини зображення дешифрування відбудеться, оскільки кожна точка відновлюється незалежно від інших.

Для певних типів даних цей алгоритм шифрування залишає сліди в ортогональних напрямках, див. рис. 2.18b. Зауважимо, що причиною цього недоліку є не застосування квазікристала, а внутрішні властивості даних (повторюваність інформації — кольору, яка не шифрується) та той факт, що перестановка кожної з координат відбувається незалежно. Цього недоліку можна уникнути різними шляхами, один з них був згаданий вище — це перехід до тривимірного випадку. Іншу можливість проілюстровано на рис. 2.18c: двовимірні дані розглядаються у вигляді впорядкованого одновимірного масиву (друга модифікація алгоритму). Ще один досить швидкий спосіб полягає у введенні додаткової циклічної перестановки, що залежить від квазікристала (перша модифікація алгоритму), див. рис. 2.18d.

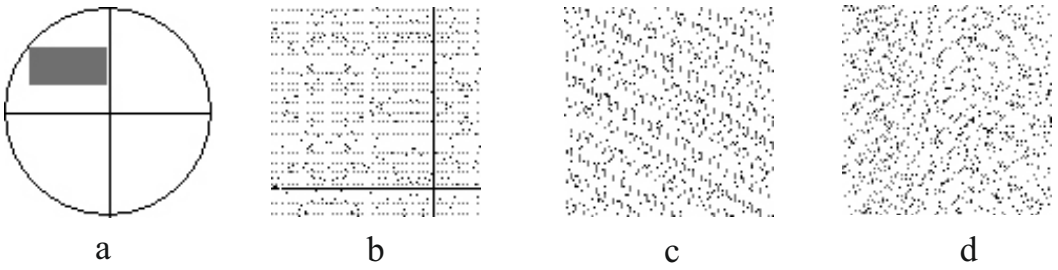


Рис. 2.18. Застосування алгоритмів шифрування: a — початкове зображення; b — основний алгоритм; c — друга модифікація; d — перша модифікація.

Основний алгоритм	Перша модифікація	Друга модифікація
3 секунди	6 секунд	192 секунди

Табл. 2.3. Час роботи програми.

Час, що займають обчислення за трьома наведеними алгоритмами порівнюється у таблиці 2.3. Обчислення виконувались з допомогою процесора Pentium M 1.70 GHz та 1 Gb RAM. Використовувалось тестове зображення Lenna розміром 512×512 пікселів у 8-бітній сірій шкалі (див. рис. 2.19 та 2.23). Другу модифікацію алгоритму тестували на зображенні Lenna розміром 200×200-пікселів з 8-бітною сірою шкалою. Зауважимо, що для обчислень зображення не розбивалось на блоки.

Поданий алгоритм для шифрування кожного з одновимірних наборів даних вимагає наступні криптозмінні:

- τ та τ' — ірраціональні числа, які є розв'язками одного з рівнянь $x^2 = mx + 1$, $m = 1, 2, \ldots$ або $x^2 = mx - 1$, $m = 3, 4, \ldots$;
- a та b — цілі числа, що визначають початкову точку для побудови квазікристала;
- X набуває значень {'+', '–'} і визначає напрямок в якому будується квазікристал відносно початкової точки;
- sml або sl — порядок можливих відстаней у якому вони перевіряються при побудові квазікристала;
- ε — відстань від кінців вікна Ω поза якою розглядаються точки, отримані $\star$-перетворенням;
- c та d — числа, що визначають вікно $\Omega = [c, c + d)$;
- I — натуральне число, що визначає кількість ітерацій шифрування з заданим квазікристалом.

Таким чином, ключ має наступну структуру:

$$\tau_\tau'_a_b_c_d_sml_X_\varepsilon_I.$$

Більш складна система шифрування може бути створена, використовуючи властивості двовимірних квазікристалів, які не є декартовим добутком одновимірних. Завдяки $\star$-перетворенню квазікристали можуть бути використані *для генерування випадкових чисел* [53].

Зауважимо, що програмно реалізований метод шифрування є *перестановним*, тому ймовірно може бути зламаний перебором. На скільки відомо автору, випробування запропонованого методу шифрування на стійкість не проводились, оцінити метод можемо лише візуально порівнюючи шифрування зображень, які є стандартними тестовими зображеннями (Lenna, Baboon та sailboat), та виходячи з математичних властивостей квазікристалів та $\star$-перетворення.

Рис. 2.19. Основний алгоритм шифрування без ітерацій.

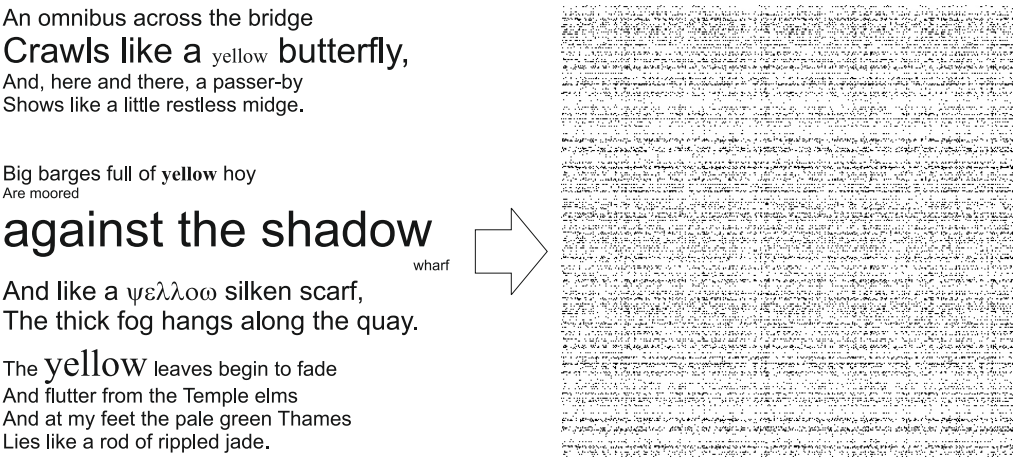


Рис. 2.20. Основний алгоритм шифрування без ітерацій.

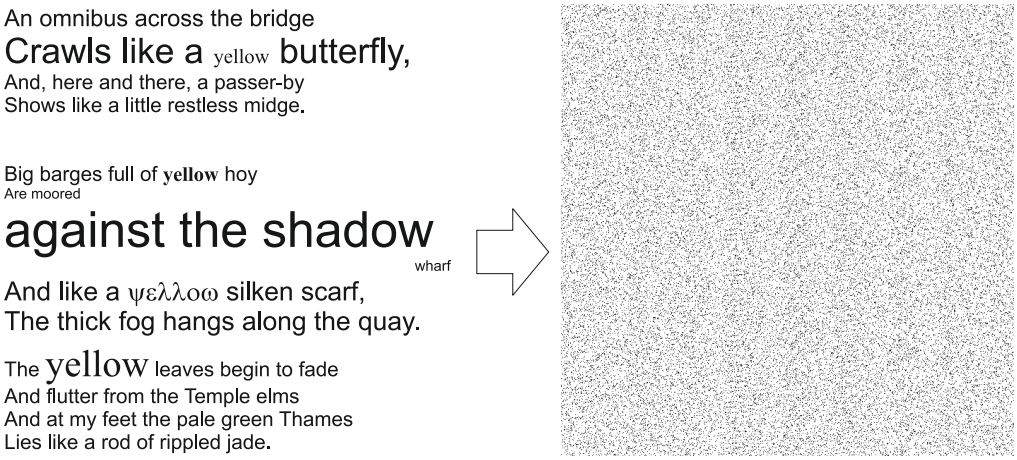


Рис. 2.21. Перша модифікація основного алгоритму без ітерацій.

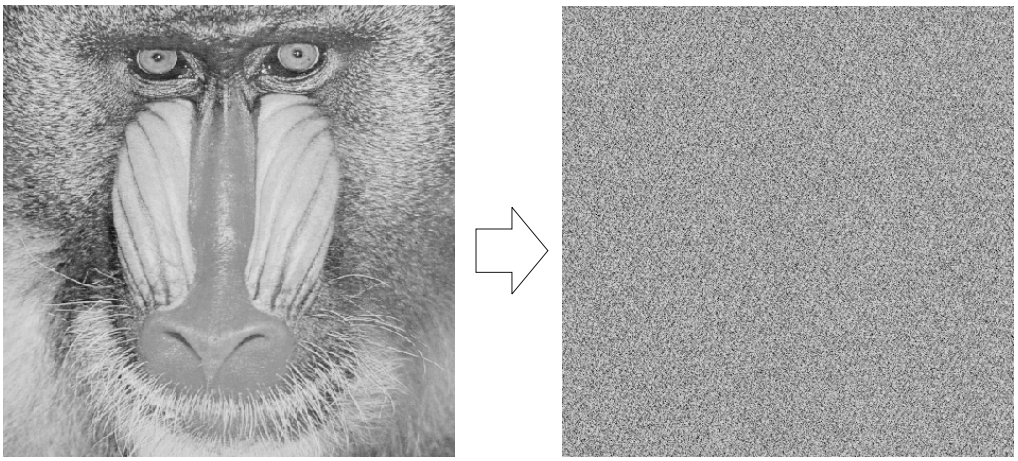


Рис. 2.22. Перша модифікація основного алгоритму без ітерацій.

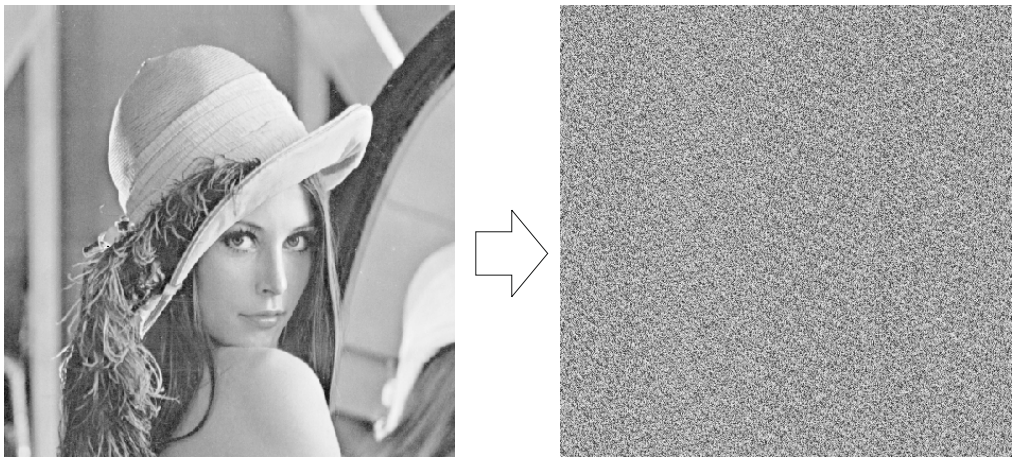


Рис. 2.23. Перша модифікація основного алгоритму без ітерацій.

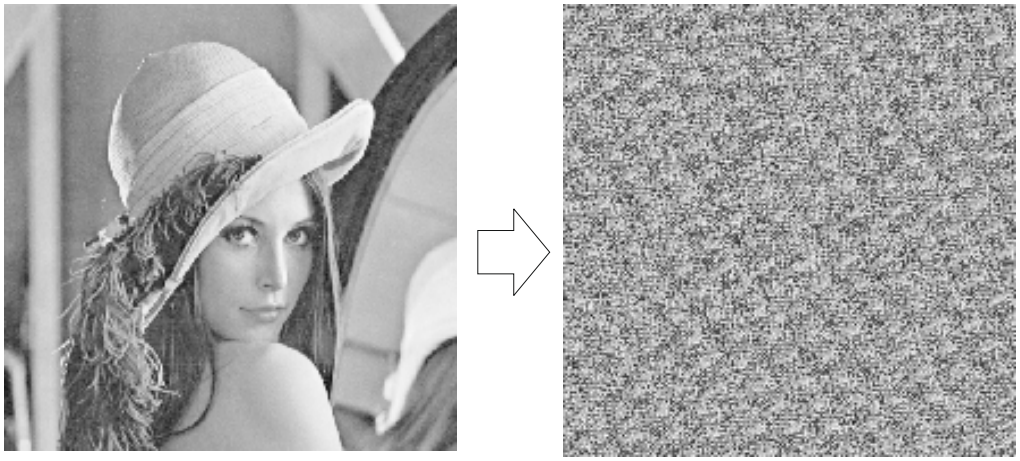


Рис. 2.24. Друга модифікація основного алгоритму без ітерацій.

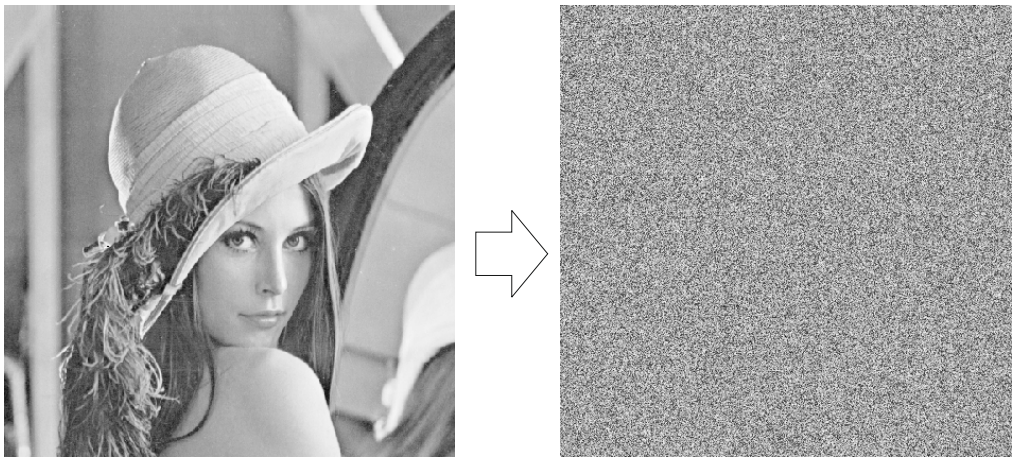


Рис. 2.25. Перша модифікація основного алгоритму з 7 ітераціями.

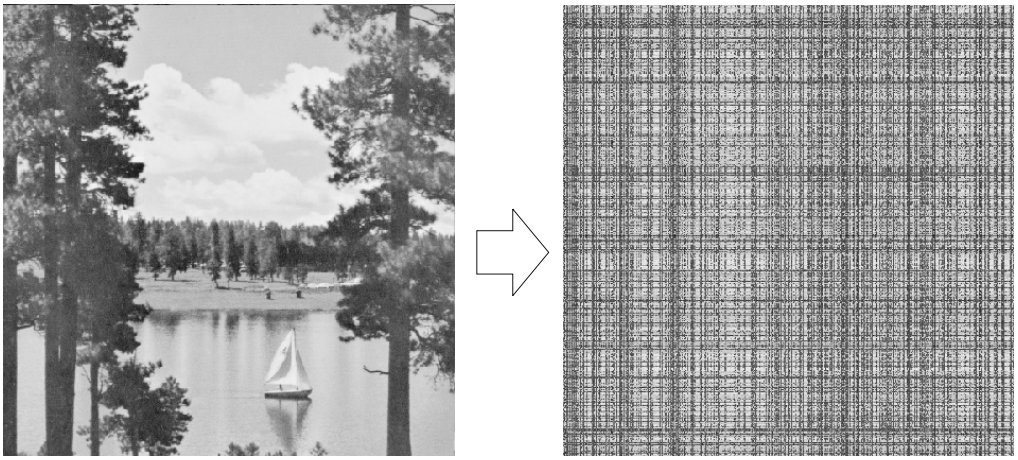


Рис. 2.26. Основний алгоритм шифрування з 5 ітераціями.

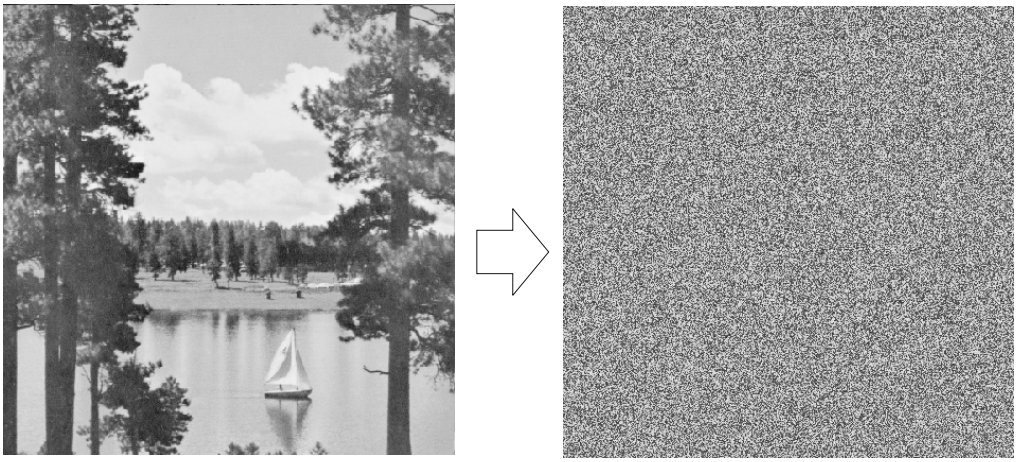


Рис. 2.27. Перша модифікація основного алгоритму з 5 ітераціями.

Проте в даній роботі докладно викладено всі необхідні математичні компоненти, що дозволять будувати та застосовувати квазікристали для будь-яких *інших систем шифрування, кодування, стиснення* та ін.

Ряд прикладів шифрування стандартних тестових растрових зображень наведено на рис. 2.19–2.27.

Розділ 3

Орбіт-функції та ортогональні поліноми

Дослідження проведені у даному розділі обґрунтовані, з одного боку, інтенсивним зростанням кількості тривимірних даних та потребою у їх обробці та аналізі, а, з іншого боку, тим фактом, що у задачах сучасної математики та математичній фізиці, зокрема, все частіше виникає потреба використовувати системи координат та ґратки, що не є прямокутними. Важливим прикладом є задача дискретизації комплексного аналізу, зокрема, факторизація умов Коші–Рімана, яка була не надто вдало розглянута на прямокутній ґратці у 1944 році у роботі Лелонг-Серранд [80] та було успішно розв'язана на ґратках правильних трикутників у роботі Диннікова та Новікова [34] та серії інших робіт, що продовжили побудову дискретного комплексного аналізу Новікова–Диннікова.

Ефективним інструментом для досліджень пов'язаних з непрямокутними системами координат є кореневі та вагові ґратки діаграм Динкіна–Коксетера. Ці ґратки, між іншим, породжують елементи скінченного порядку, які застосовуються при дослідженні та наближенні багатовимірних симплексів. У даному розділі досліджуються спеціальні функції, які були вперше введені у 2005 році Ї. Патерою [124] і називаються C-, S-, та E-функціями або орбіт-функціями. Вони визначаються для вагових ґраток і мають властивість симетрії відносно дії афінної групи Вейля. Оскільки афінна група Вейля містить, як підгрупу, групу зсувів у $\mathbb{R}^n$, то орбіт-функції можна застосовувати для перетворень аналогічних перетворенню Фур'є, що породжує широкий спектр їх застосувань. Надзвичайно цікавим є зв'язок орбіт-функцій з важливими класами ортогональних полі-

номів, що дає можливість алгоритмічно будувати ці поліноми у явному вигляді, дискретизувати їх на різних ґратках та природно узагальнювати відомі поліноми до випадків більшої кількості змінних.

У даному розділі детально вивчаються тривимірні спеціальні орбіт-функцій, оскільки саме вони необхідні для обробки та аналізу тривимірних даних. Основою для їх побудови є сім напівпростих груп Лі рангу три: $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$, $\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2)$, $\mathrm{O}(5) \times \mathrm{SU}(2)$, $\mathrm{G}(2) \times \mathrm{SU}(2)$, $\mathrm{SU}(4)$, $\mathrm{O}(7)$, $\mathrm{Sp}(6)$, що відповідають алгебрам Лі: $A_1 \times A_1 \times A_1$, $A_2 \times A_1$, $C_2 \times A_1$, $G_2 \times A_1$, A_3, B_3, C_3.

Загалом третій розділ дисертаційної роботи присвячено орбіт-функціям, ортогональним поліномам та правилам галуження орбіт групи Вейля, його організовано таким чином.

У першому параграфі вивчаються властивості орбіт-функцій, зокрема тривимірних: побудовано явний вигляд їх орбіт, стабілізаторів, фундаментальних областей, розроблено їх дискретизацію та доведено дискретну ортогональність. Також у параграфі 3.1 отримано явний вигляд операторів другого порядку для яких тривимірні C-орбіт-функції та S-орбіт-функції є відповідно розв'язками крайових задач Неймана та Діріхле.

У параграфі 3.2 орбіти групи Вейля $W(A_n)$ простих алгебр Лі A_n зведено до об'єднання орбіт груп Вейля максимальних редуктивних підалгебр алгебри A_n. Для усіх випадків $n \leq 8$ та нескінченних серій $A_n \supset A_{n-k-1} \times A_k \times U_1$, $A_{2n} \supset B_n$, $A_{2n-1} \supset C_n$ і $A_{2n-1} \supset D_n$ побудовано матриці, що перетворюють точки орбіт $W(A_n)$ у точки орбіт підалгебр. Таким чином, знайдено правила галуження орбіт групи Вейля, що можуть бути застосовані для розкладу добутків орбіт-функцій та до теорії зображень простих алгебр Лі. Крім цього, у параграфі 3.2 доведено еквівалентність трьох сімей орбіт-функцій спеціальним функціям багатьох змінних, запропонованим Клімиком та Патерою у роботах [73, 74].

Останній параграф розділу присвячено побудові нескінченних сімей ортогональних поліномів n змінних. Запропоновано три методи побудови

ортогональних поліномів виходячи з орбіт-функцій. Доведено еквівалентність кількох відомих сімей ортогональних поліномів, зокрема, поліномів Чебишева, Якобі, Макдональда та Курнвіндера поліномам орбіт-функцій. Отримано явний вигляд розв'язних рекурсій, що дозволяють алгоритмічно будувати сім'ї ортогональних поліномів двох та трьох змінних. Для кожної з простих алгебр Лі рангів два та три у явному вигляді знайдено базові поліноми та правила редукції поліномів двох та трьох змінних до поліномів інших алгебр за максимальними підгрупами простих груп Лі.

Результати цього розділу опубліковано в роботах [79, 102–106].

3.1. Прості групи Лі та орбіт-функції

Поняття орбіт-функцій n змінних суттєво залежать від напівпростих груп Лі рангу n, що лежать в основі їх означень, тому цей розділ почнемо з необхідних означень та стандартних властивостей [16, 60, 67].

Скінченні групи, що породжуються дзеркальними відображеннями у n-вимірному дійсному Евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, зазвичай називають групами Коксетера [60, 61]. Скінченні групи Коксетера поділяються на два класи: кристалографічні та некристалографічні. Кристалографічні групи також називаються групами Вейля напівпростих груп Лі або алгебр Лі і вони є групами симетрій певних ґраток у $\mathbb{R}^n$. Існує чотири нескінченні серії таких груп (відповідно до допустимих рангів n) та п'ять окремих виняткових груп рангів 2, 4, 6, 7 та 8. Некристалографічні скінченні групи Коксетера — це групи симетрій правильних $2D$ многогранників (діедральні групи) та дві виняткові групи для $n = 3$ (ікосаедральна група порядку 120) та для $n = 4$ група порядку 120^2.

Нехай дійсний Евклідів простір $\mathbb{R}^n$ натягнуто на прості корені напівпростої групи Лі G. Позначимо базис простих коренів як α-базис, взагалі кажучи, він неортогональний та містить прості корені щонайбільше двох різних довжин. Якщо напівпроста група G не є простою, то α-базиси її

простих компонент взаємно ортогональні. Розглянемо базис фундаментальних ваг — ω-базис, який є $\mathbb{Z}$-дуальним до базису простих коренів. Для груп Лі з коренями різних довжин зручно додатково ввести дуальні базиси до α- та ω-базисів, а саме $\check{\omega}$-базис та $\check{\alpha}$-базис відповідно. При потребі також використовуватимемо стандартний ортонормований базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ Евклідового простору $\mathbb{R}^n$.

Зауваження 3.1. Зазвичай коренева система та система простих коренів виникають при класифікації та визначаються не для простої групи Лі, а для простої алгебри Лі, але, у літературі, часто використовують паралельно терміни група Лі та алгебра Лі, коли це стосується кореневих та вагових систем і мова йде саме про них, а не про алгебри чи групи, які їм відповідають.

Наприклад, коренева система алгебри A_1 складається з двох коренів, має один простий корінь і, відповідно, її ранг є одиницею. Але алгебра Лі — тривимірна та відповідає групі Лі спеціальних лінійних перетворень порядку три.

Для усіх простих груп Лі G відомі їх матриці Картана $\mathfrak{C}$, це $n \times n$-матриці, що містять усю ключову інформацію про групу, зокрема співвідношення між α- та ω-базисами:

$$\alpha = \mathfrak{C}\omega, \qquad \omega = \mathfrak{C}^{-1}\alpha,$$

де

$$\mathfrak{C}_{ij} = \left(\frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} \right), \qquad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Тут і далі позначаємо через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярний добуток у $\mathbb{R}^n$. Не обмежуючи загальності, можна прийняти, що довжини довгого та короткого простих коренів визначаються співвідношеннями

$$\langle \alpha_{\text{довгий}}, \alpha_{\text{довгий}} \rangle = 2, \qquad \langle \alpha_{\text{короткий}}, \alpha_{\text{короткий}} \rangle = 1.$$

Дуальні базиси визначаються наступними співвідношеннями

$$\check{\alpha}_i = \frac{2\alpha_i}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}, \qquad \check{\omega}_i = \frac{2\omega_i}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}, \qquad \langle \alpha_i, \check{\omega}_j \rangle = \langle \check{\alpha}_i, \omega_j \rangle = \delta_{ij},$$

тут і далі δ_{ij} — це дельта-символ Кронекера.

Коренева ґратка Q та вагова ґратка P групи G утворюються усіма цілими лінійними комбінаціями α-базису та ω-базису,

$$Q = \mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}\alpha_2 + \cdots + \mathbb{Z}\alpha_n, \qquad P = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 + \cdots + \mathbb{Z}\omega_n.$$

В загальному випадку $Q \subseteq P$, але для груп Лі рангу 3 рівність не має місця. Аналогічно визначаються дуальні ґратки

$$\check{Q} = \mathbb{Z}\check{\alpha}_1 + \mathbb{Z}\check{\alpha}_2 + \cdots + \mathbb{Z}\check{\alpha}_n, \qquad \check{P} = \mathbb{Z}\check{\omega}_1 + \mathbb{Z}\check{\omega}_2 + \cdots + \mathbb{Z}\check{\omega}_n.$$

У ваговій ґратці P означимо конус домінантних ваг P^+ та конус строго домінантних ваг P^{++}

$$P \supset P^+ = \mathbb{Z}^{\geq 0}\omega_1 + \cdots + \mathbb{Z}^{\geq 0}\omega_n \supset P^{++} = \mathbb{Z}^{>0}\omega_1 + \cdots + \mathbb{Z}^{>0}\omega_n.$$

Для кожної простої групи Лі G існує єдиний старший корінь ξ

$$\xi = m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \cdots + m_n\alpha_n = q_1\check{\alpha}_1 + q_2\check{\alpha}_2 + \cdots + q_n\check{\alpha}_n. \tag{3.1}$$

Коефіцієнти m_i та q_i, $i = 1, \ldots, n$ є натуральними числами, що визначаються однозначно і добре відомі для всіх простих груп Лі [60, 67].

Групою Вейля $W(G)$ напівпростої групи Лі G є скінченна група породжена в $\mathbb{R}^n$ дзеркальними відображеннями відносно $(n-1)$-вимірних дзеркал (гіперплощин), що ортогональні до простих коренів групи G та проходять через початок координат $\mathbb{R}^n$. Для простого кореня α_i, $i = 1, \ldots, n$ відповідне відображення r_{α_i} задається співвідношенням

$$r_i x = r_{\alpha_i} x = x - \frac{2\langle x, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}\alpha_i = x - \langle x, \check{\alpha}_i \rangle \alpha_i, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

Нехай зафіксовано деяку напівпросту групу Лі, тоді для будь-якої точки $\lambda \in \mathbb{R}^n$ можна визначити її орбіту під дією групи Вейля $W(\lambda)$. Орбіту точки

$$\lambda = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \cdots + a_n\omega_n$$

з додатними координатами $a_i > 0$ будемо називати *породжуючою* і позначати $W(a_1, \ldots, a_n)$. Очевидно, що кожна група містить тривіальну одноточкову орбіту $(0, \ldots, 0)$. Кількість точок у породжуючій орбіті $|W(a_1, \ldots, a_n)|$ співпадає з порядком $|W|$ групи Вейля. Існує загальний метод побудови орбіт групи Вейля для простих груп, далі побудуємо їх явно для усіх напівпростих груп Лі рангу $n = 3$.

Розглянемо корінь $\alpha_0 = -\xi$ та відповідне дзеркальне відображення r_0

$$r_0 x = r_\xi x + \frac{2\xi}{\langle \xi, \xi \rangle},$$

де

$$r_\xi x = x - \frac{2\langle x, \xi \rangle}{\langle \xi, \xi \rangle} \xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Діаграма Динкіна доповнена вершиною α_0 та ребрами які відповідають кутам між α_0 та α_i називається *розширеною діаграмою Динкіна.*

Розширимо набір з n дзеркальних відображень r_{α_i}, що задані рівнянням (3.2) та породжують групу Вейля W, щойно означеним відображенням r_0. У результаті отримаємо групові перетворення простору $\mathbb{R}^n$, породжені $n + 1$ відображеннями $r_0, r_1, \ldots, r_n$, які називаються афінною групою Вейля W^{aff}.

Фундаментальною областю $F(G) \subset \mathbb{R}^n$ для афінної групи Вейля $W^{\text{aff}}(G)$ називається опуклий многогранник з вершинами $\left\{0, \frac{\omega_1}{q_1}, \ldots, \frac{\omega_n}{q_n}\right\}$, де q_i, $i = 1, \ldots, n$, — це коефіцієнти розкладу старшого кореня у термінах $\check{\alpha}_i$. Використовуючи коефіцієнти m_i, $i = 1, \ldots, n$ розкладу старшого кореня (3.1) у термінах α_i можемо подати вершини фундаментальної області у вигляді

$$\left\{0, \frac{\check{\omega}_1}{m_1}, \frac{\check{\omega}_2}{m_2}, \ldots, \frac{\check{\omega}_n}{m_n}\right\}.$$

Група W^{aff} має нескінченний порядок та відображає $F(G)$ відносно її $(n-1)$-вимірних граней у весь Евклідів простір,

$$W^{\text{aff}} F = \mathbb{R}^n. \tag{3.3}$$

Нехай $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, задамо точки фундаментальної області у явному вигляді

$$F(G) = \{x_1\check{\omega}_1 + x_2\check{\omega}_2 + \cdots + x_n\check{\omega}_n \mid x_0 + x_1m_1 + \cdots + x_nm_n = 1\}. \qquad (3.4)$$

Позначимо внутрішню частину фундаментальної області $\mathrm{int}(F)$ та розглянемо точку $x \in F$. *Групою ізотропії* точки $x \in F$ є

$$\mathrm{Stab}_{W^{\mathrm{aff}}}(x) = \{w \in W^{\mathrm{aff}} \mid wx = x\}.$$

Група ізотропії тривіальна $\mathrm{Stab}_{W^{\mathrm{aff}}}(x) = 1$, якщо $x \in \mathrm{int}(F)$, тобто $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. У решті випадків підгрупа ізотропії $\mathrm{Stab}_{W^{\mathrm{aff}}}(x)$ породжується дзеркальними відображеннями r_i для яких $x_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Діаграма Динкіна підгрупи ізотропії $\mathrm{Stab}_{W^{\mathrm{aff}}}(x)$ отримується з розширеної діаграми Динкіна з якої викидаються вершини (та приєднані до них ребра), що відповідають кореням α_i для яких $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Відповідний підграф завжди власний, оскільки завжди існує кілька $x_i > 0$.

Визначимо сітку-розбиття (подрібнення) фундаментальної області $F_M \subset F$, щільність якого залежить від довільного натурального числа M. Виберемо розбиття $s_0, s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ числа M на доданки з коефіцієнтами старшого кореня, тоді

$$F_M = \left\{ \frac{s_1}{M}\check{\omega}_1 + \frac{s_2}{M}\check{\omega}_2 + \cdots + \frac{s_n}{M}\check{\omega}_n \mid s_i \in \mathbb{Z}^{\geq 0},\ s_0 + \sum_{i=1}^{n} s_i m_i = M \right\}.$$

Кількість точок сітки F_M позначатимемо $|F_M|$, а об'єм фундаментальної області F відносно евклідової міри позначимо $|F|$.

Зауваження 3.2. У випадку прямого добутку груп $G = G' \times G''$, де G' та G'' прості, фундаментальна область G будується виходячи з графу, який є об'єднанням відповідних діаграм Динкіна, додаткові ребра між підграфами не будуються, оскільки добуток прямий. Те саме має місце для сіток $F_{M',M''}$, але для кожної простої групи числа M' та M'' можна обирати незалежно.

Якщо два різних числа M_1 та M_2 задовольняють умову подільності $M_1 \mod M_2 = 0$, то відповідні сітки для тієї самої напівпростої групи G пов'язані співвідношенням $F_{M_2} \subset F_{M_1}$.

Якщо $G = G' \times G''$ (або $G = G' \times G'' \times G'''$, і т.п.) аналогічне твердження справедливе для наборів сіток, тобто, якщо $M_1' \mod M_2' = 0$ і $M_1'' \mod M_2'' = 0$ тоді $F_{M_2',M_2''} \subset F_{M_1',M_1''}$.

Розглянемо елементи з W, які утворені парною кількістю дзеркальних відображень та підгрупу, яка породжена ними

$$W_{\mathrm{e}} = \{r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_{2k}} | k \in \mathbb{N},\ r_{i_l} \in W,\ l = \overline{1, 2k}\}. \tag{3.5}$$

W_{e} — нормальна підгрупа індесу 2 групи Вейля, тобто $2|W_{\mathrm{e}}| = |W|$.

Позначимо орбіту точки $\lambda \in P$ відносно дії парної підгрупи групи Вейля W_{e} як $W_{\mathrm{e}}(\lambda)$, а розмірність орбіти позначимо $|W_{\mathrm{e}}(\lambda)|$, тоді для деякого $r_i \in W$

$$W(\lambda) = \begin{cases} W_{\mathrm{e}}(\lambda) \cup W_{\mathrm{e}}(r_i\lambda), & \text{якщо } \lambda \in P^{++}; \\ W_{\mathrm{e}}(\lambda), & \text{якщо } \lambda \in P^{+} \setminus P^{++}. \end{cases} \tag{3.6}$$

Очевидно, що виконується одне з співвідношень $|W_{\mathrm{e}}(\lambda)| = \frac{1}{2}|W(\lambda)|$, якщо $\lambda \in P^{++}$, або $|W_{\mathrm{e}}(\lambda)| = |W(\lambda)|$, якщо $\lambda \in P^{+} \setminus P^{++}$.

Зауважимо, що кожна орбіта парної підгрупи W_{e} містить рівно одну точку з $P_e := P^{+} \cup r_i P^{++}$, $r_i \in W$.

Аналогічно можна ввести поняття афінної парної підгрупи

$$W_e^{\mathrm{aff}} = \{r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_{2k}} | k \in \mathbb{N},\ r_{i_l} \in W^{\mathrm{aff}},\ l = 1, \ldots, 2k\},$$

та її фундаментальну область

$$F_e = F \cup r_i F, \tag{3.7}$$

де F — фундаментальна область W^{aff} (3.4) та $r_i \in r_0, r_1, \ldots, r_n$.

Та сама формула має місце і для сітки фундаментальної області F_e

$$F_{e\,M} = F_M \cup r_i F_M, \qquad r_i \in W^{\mathrm{aff}}.$$

Зауваження 3.3. З формули (3.7) випливає, що фундаментальна область W_{e} не єдина, отже її можна обирати виходячи зі зручності для певного застосування.

Для початку розглянемо просту компактну групу Лі рангу один $\mathrm{SU}(2)$; її алгебра Лі в класифікації Динкіна це A_1, яка відповідає найменшій можливій нерозв'язній алгебрі Лі $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ і має розмірність три. Її (1×1)-матриця Картана — це число $\mathfrak{C} = (2)$. Коренева система A_1 складається з двох коренів $\pm\alpha$. Ґратки коренів та ваг мають вигляд

$$Q = \{\mathbb{Z}\alpha\}, \qquad P = \{\mathbb{Z}\omega\}, \qquad \text{де} \quad \alpha = \mathfrak{C}\omega, \quad \text{тобто} \quad \omega = \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Таким чином $P = Q \cup (Q + \omega)$.

Група Вейля $W(A_1)$ має порядок 2, це група дзеркальних відображень відносно нуля на прямій $\mathbb{R}$: $W = \{1, -1\}$ та $W_{\mathrm{e}} = \{1\}$. Внаслідок цього орбіта групи Вейля, що містить точку $x \neq 0$, також містить точку $-x$, але орбіта парної підгрупи складається з єдиної точки або x або $-x$.

Фундаментальна область F це інтервал з кінцями $F = \{0, \omega\}$.

Сітка $F_M \subset F$ визначається додатнім цілим числом M та складається з $M + 1$ точки

$$F_M = \left\{0, \tfrac{1}{M}, \tfrac{2}{M}, \ldots, \tfrac{M-1}{M}, 1\right\}.$$

Розгляд простих груп рангу два опустимо, оскільки інформація про них міститься у строго напівпростих групах рангу три. Компактні напівпрості групи Лі рангу три є найважливішими з точки зору прикладних застосувань. Для кожної з них обчислимо всю необхідну інформацію для означення, побудови та дискретизації тривимірних орбіт-функцій, зокрема діаграми Динкіна, на яких короткі прості корені α позначимо зафарбованими кругами та над кожним з простих коренів вкажемо його коефіцієнт у розкладі старшого кореня. Слід зазначити, що прямокутні або частково-прямокутні ґратки можуть містити лише вагові ґратки груп Лі $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)$, $\mathrm{O}(5)\times\mathrm{SU}(2)$, $\mathrm{O}(7)$ та $\mathrm{Sp}(6)$.

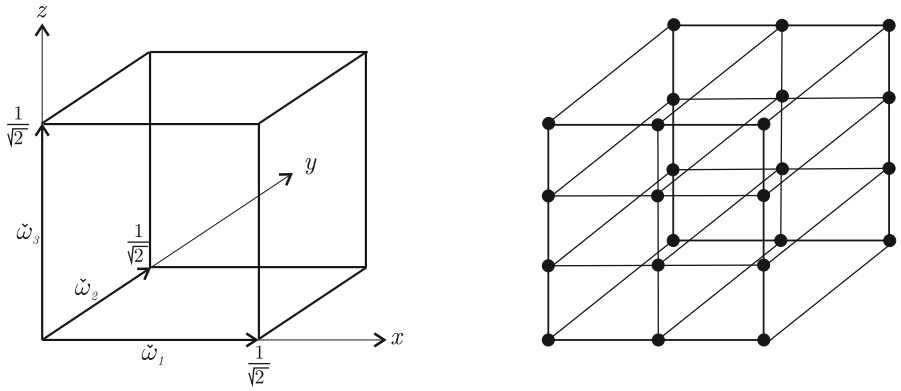


Рис. 3.1. Ліворуч: фундаментальна область F алгебри Лі $A_1 \times A_1 \times A_1$; x, y та z вказують відповідно на ортогональні напрямки ортонормованого базису $\{e_1, e_2, e_3\}$. Праворуч: сітка $F_{2,1,3}(A_1 \times A_1 \times A_1)$.

Алгебра Лі $A_1 \times A_1 \times A_1$ (група Лі SU(2) × SU(2) × SU(2)).

Цей випадок є прямою сумою трьох копій алгебри A_1, діаграма Динкіна, матриця Картана та обернена до неї мають вигляд

$$\overset{1}{\underset{\alpha_1}{\bigcirc}}\ \overset{1}{\underset{\alpha_2}{\bigcirc}}\ \overset{1}{\underset{\alpha_3}{\bigcirc}} \qquad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{C}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Всі прості корені мають однакову довжину $\sqrt{2}$. Базиси простих коренів та фундаментальних ваг пов'язані співвідношеннями

$$\alpha_i = 2\omega_i, \qquad \omega_i = \tfrac{1}{2}\alpha_i, \qquad \check{\alpha}_1 = \alpha_1, \qquad \check{\omega}_1 = \omega_1, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Обчисливши кореневий та ваговий базиси у ортонормованому базисі $\{e_1, e_2, e_3\}$ отримаємо

$$\alpha_i = \sqrt{2}e_i, \qquad \omega_i = \tfrac{1}{\sqrt{2}}e_i, \qquad \check{\omega}_i = \tfrac{1}{\sqrt{2}}e_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Старші корені для простих підгруп A_1 задаються формулами

$$\xi = \alpha_1, \quad \xi = \alpha_2, \quad \xi = \alpha_3.$$

Фундаментальна область — куб (див. рис. 3.1) з вершинами

$$F(A_1 \times A_1 \times A_1) = \{0,\ \omega_i,\ \omega_i + \omega_j,\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3\},$$

де $j < i \in 1, 2, 3$.

Об'єм фундаментальної області обчислюється за формулою

$$|F(A_1 \times A_1 \times A_1)| = |\check{\omega}_1| \cdot |\check{\omega}_2| \cdot |\check{\omega}_3| = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Сітка $F_{M,M',M''} \subset F$ визначається незалежним вибором трьох натуральних чисел M, M' і M'' та складається з усіх точок

$$F_{M,M',M''}(A_1 \times A_1 \times A_1) =$$
$$= \left\{ \tfrac{s_1}{M}\check{\omega}_1 + \tfrac{s_1'}{M'}\check{\omega}_2 + \tfrac{s_1''}{M''}\check{\omega}_3 \mid s_1 \leq M, s_1' \leq M', s_1'' \leq M'; s_1, s_1', s_1'' \in \mathbb{Z}^{\geq 0} \right\}.$$

Сітка буде кубічною у випадку $M = M' = M''$, та паралелепіпедальною у решті випадків.

Кількість точок у сітці $F_{M,M',M''}$ обчислюється за формулою

$$|F_{M,M',M''}(A_1 \times A_1 \times A_1)| =$$
$$= |F_M(A_1)| \cdot |F_{M'}(A_1)| \cdot |F_{M''}(A_1)| = (M+1)(M'+1)(M''+1).$$

Орбіта групи Вейля породжуючої точки $a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3$, $a, b, c > 0$ завжди складається з восьми точок

$$W_{(a,b,c)}(A_1 \times A_1 \times A_1) = \{(\pm a,\ \pm b,\ \pm c)\}.$$

Розмірності орбіт для довільних точок задаються співвідношеннями

$$|W_{(a,b,c)}| = 8, \qquad |W_{(a,b,0)}| = |W_{(a,0,c)}| = |W_{(0,b,c)}| = 4,$$
$$|W_{(0,0,0)}| = 1, \qquad |W_{(a,0,0)}| = |W_{(0,b,0)}| = |W_{(0,0,c)}| = 2.$$

Алгебра Лі $A_2 \times A_1$ (група Лі SU(3) × SU(2)). Діаграма Динкіна, матриця Картана та обернена до неї мають вигляд

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{C}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Всі прості корені мають однакову довжину $\sqrt{2}$. Базиси простих коренів та фундаментальних ваг пов'язані співвідношеннями

$$\alpha_1 = 2\omega_1 - \omega_2, \qquad \omega_1 = \tfrac{2}{3}\alpha_1 + \tfrac{1}{3}\alpha_2, \qquad \check{\alpha}_1 = \alpha_1, \qquad \check{\omega}_1 = \omega_1,$$
$$\alpha_2 = -\omega_1 + 2\omega_2, \qquad \omega_2 = \tfrac{1}{3}\alpha_1 + \tfrac{2}{3}\alpha_2, \qquad \check{\alpha}_2 = \alpha_2, \qquad \check{\omega}_2 = \omega_2,$$
$$\alpha_3 = 2\omega_3, \qquad \omega_3 = \tfrac{1}{2}\alpha_3, \qquad \check{\alpha}_3 = \alpha_3, \qquad \check{\omega}_3 = \omega_3.$$

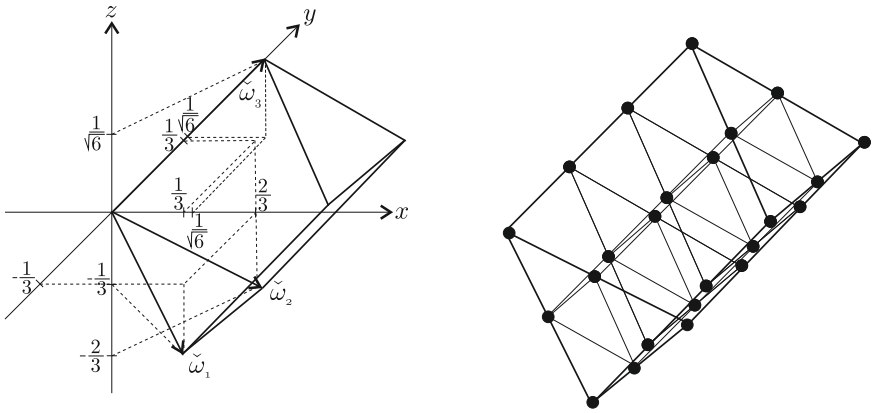


Рис. 3.2. Ліворуч: фундаментальна область F алгебри Лі $A_2 \times A_1$; x, y та z вказують відповідно на ортогональні напрямки ортонормованого базису $\{e_1, e_2, e_3\}$, фундаментальна область A_2 лежить у площині $x + y + z = 0$. Праворуч: сітка $F_{2,3}(A_2 \times A_1)$.

Для геометричної візуалізації обчислимо ω- та α-базиси у ортонормованому базисі $\{e_1, e_2, e_3\}$

$$\alpha_1 = (1,\ -1,\ 0) = e_1 - e_2,$$
$$\alpha_2 = (0,\ 1,\ -1) = e_2 - e_3,$$
$$\alpha_3 = \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3),$$
$$\omega_1 = (\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}) = \tfrac{2}{3}e_1 - \tfrac{1}{3}e_2 - \tfrac{1}{3}e_3 = \check{\omega}_1,$$
$$\omega_2 = (\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}) = \tfrac{1}{3}e_1 + \tfrac{1}{3}e_2 - \tfrac{2}{3}e_3 = \check{\omega}_2,$$
$$\omega_3 = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(1,\ 1,\ 1) = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(e_1 + e_2 + e_3) = \check{\omega}_3.$$

Старші корені для простих підгруп A_2 та A_1 задаються формулами

$$\xi = \alpha_1 + \alpha_2, \qquad \xi = \alpha_3.$$

Фундаментальна область — циліндр (див. рис. 3.2) з правильним трикутником у основі та з висотою ω_3, його вершини

$$F(A_2 \times A_1) = \{0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_1 + \omega_3,\ \omega_2 + \omega_3\}.$$

Об'єм фундаментальної області обчислюється за формулою

$$|F(A_2 \times A_1)| = \tfrac{1}{2}([\check{\omega}_1, \check{\omega}_2], \check{\omega}_3) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2\sqrt{6}}.$$

Сітка $F_{M,M'}(A_2 \times A_1) \subset F(A_2 \times A_1)$ визначається незалежним вибором двох натуральних чисел M і M' та складається з точок

$$F_{M,M'}(A_2 \times A_1) =$$
$$= \left\{ \tfrac{s_1}{M}\check{\omega}_1 + \tfrac{s_2}{M}\check{\omega}_2 + \tfrac{s_1'}{M'}\check{\omega}_3 \mid s_1 + s_2 \le M,\ s_1' \le M';\ s_1, s_2, s_1' \in \mathbb{Z}^{\ge 0} \right\}.$$

Кількість точок у сітці $F_{M,M'}(A_2 \times A_1)$ обчислюється за формулою

$$|F_{M,M'}(A_2 \times A_1)| = |F_M(A_2)| \cdot |F_{M'}(A_1)| =$$
$$= \left((M+1)^2 - \tfrac{M(M+1)}{2}\right)(M'+1).$$

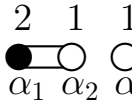
Орбіта групи Вейля породжуючої точки $a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3,\ \ a, b, c > 0$ завжди складається з дванадцяти точок

$$W_{(a,b,c)}((A_2 \times A_1)) = \{(a,\ b,\ \pm c),\ (-a,\ a+b,\ \pm c),\ (a+b,\ -b,\ \pm c),$$
$$(b,\ -(a+b),\ \pm c),\ (-(a+b),\ a,\ \pm c),\ (-b,\ -a,\ \pm c)\}.$$

Розмірності орбіт для довільних точок задаються співвідношеннями

$$|W_{(a,b,c)}| = 12, \qquad |W_{(a,b,0)}| = 6, \qquad |W_{(a,0,c)}| = 6, \qquad |W_{(0,b,c)}| = 6,$$
$$|W_{(a,0,0)}| = 3, \qquad |W_{(0,b,0)}| = 3, \qquad |W_{(0,0,c)}| = 2, \qquad |W_{(0,0,0)}| = 1.$$

Алгебра Лі $C_2 \times A_1$ (група Лі $\mathbf{O(5) \times SU(2)}$). Діаграма Динкіна, матриця Картана та обернена до неї мають вигляд



$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{C}^{-1} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки простий корінь α_1 є коротким, то відносні довжини простих коренів наступні: $\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = 1$, $\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = \langle \alpha_3, \alpha_3 \rangle = 2$.

Базиси простих коренів та фундаментальних ваг пов'язані співвідношеннями

$$\alpha_1 = 2\omega_1 - \omega_2, \qquad \omega_1 = \alpha_1 + \tfrac{1}{2}\alpha_2, \qquad \check{\alpha}_1 = 2\alpha_1, \qquad \check{\omega}_1 = 2\omega_1,$$
$$\alpha_2 = -2\omega_1 + 2\omega_2, \qquad \omega_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \qquad \check{\alpha}_2 = \alpha_2, \qquad \check{\omega}_2 = \omega_2,$$
$$\alpha_3 = 2\omega_3, \qquad \omega_3 = \tfrac{1}{2}\alpha_3, \qquad \check{\alpha}_3 = \alpha_3, \qquad \check{\omega}_3 = \omega_3.$$

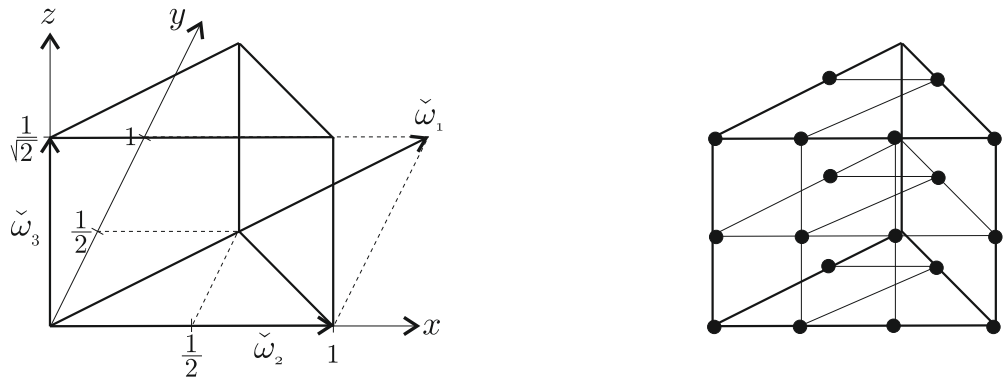


Рис. 3.3. Ліворуч: фундаментальна область F алгебри Лі $C_2 \times A_1$; x, y та z вказують відповідно на ортогональні напрямки ортонормованого базису $\{e_1, e_2, e_3\}$, фундаментальна область C_2 — рівнобедрений прямокутний трикутник, що лежить у площині $z = 0$, його прямий кут у вершині $\frac{1}{2}\check{\omega}_1$. Праворуч: сітка $F_{3,2}(C_2 \times A_1)$.

Обчисливши кореневий та ваговий базиси у ортонормованому базисі $\{e_1, e_2, e_3\}$ отримаємо

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = (0,1,0) = e_2,\\
&\alpha_2 = (1,-1,0) = e_1 - e_2,\\
&\alpha_3 = (0,0,\sqrt{2}) = \sqrt{2}e_3,\\
&\omega_1 = (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0) = \tfrac{1}{2}e_1 + \tfrac{1}{2}e_2, \qquad \check{\omega}_1 = (1,1,1),\\
&\omega_2 = (1,0,0) = e_1, \qquad\qquad\quad \check{\omega}_2 = (1,0,0),\\
&\omega_3 = (0,0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}e_3, \qquad\quad \check{\omega}_3 = (0,0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}).
\end{aligned}$$

Старші корені для простих підгруп C_2 та A_1 задаються формулами

$$\xi = 2\alpha_1 + \alpha_2, \qquad \xi = \alpha_3.$$

Фундаментальна область $F(C_2 \times A_1)$ — циліндр з трикутною основою (див. рис. 3.3) з вершинами

$$F(C_2 \times A_1) = \left\{0,\ \tfrac{1}{2}\check{\omega}_1,\ \check{\omega}_2,\ \check{\omega}_3,\ \tfrac{1}{2}\check{\omega}_1 + \check{\omega}_3,\ \check{\omega}_2 + \check{\omega}_3\right\}.$$

Об'єм фундаментальної області обчислюється за формулою

$$|F(C_2 \times A_1)| = \tfrac{1}{4}([\check{\omega}_2, \check{\omega}_1], \check{\omega}_3) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Сітка $F_{M,M'} \subset F$ визначається незалежним вибором двох натуральних чисел M і M' та складається з усіх точок

$$F_{M,M'}(C_2 \times A_1) =$$
$$= \left\{ \tfrac{s_1}{M}\check{\omega}_1 + \tfrac{s_2}{M}\check{\omega}_2 + \tfrac{s_1'}{M'}\check{\omega}_3 \mid \ 2s_1 + s_2 \le M,\ s_1' \le M';\ s_1, s_2, s_1' \in \mathbb{Z}^{\ge 0} \right\}.$$

Кількість точок у сітці $F_{M,M'}(C_2 \times A_1)$ обчислюється за формулою

$$|F_{M,M'}(C_2 \times A_1)| = |F_M(C_2)| \cdot |F_{M'}(A_1)| =$$
$$= \left(\left[\tfrac{M}{2}\right] + 1\right)\left(M + 1 - \left[\tfrac{M}{2}\right]\right)(M' + 1),$$

де $[\,\cdot\,]$ позначає цілу частину числа.

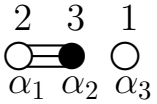
Орбіта групи Вейля породжуючої точки $a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3,\ \ a, b, c > 0$ завжди складається з 16 точок

$$W_{(a,b,c)}(C_2 \times A_1) = \{\pm(a,b,c),\ \pm(a,b,-c),\ \pm(-a,a+b,c),$$
$$\pm(a+2b,-b,c),\ \pm(a+2b,-(a+b),c),\ \pm(-a,a+b,-c),$$
$$\pm(a+2b,-(a+b),-c),\ \pm(a+2b,-b,-c)\}.$$

Розмірності орбіт для довільних точок задаються співвідношеннями

$$|W_{(a,b,c)}| = 16, \qquad |W_{(a,b,0)}| = 8, \qquad |W_{(a,0,c)}| = 8, \qquad |W_{(0,b,c)}| = 8,$$
$$|W_{(a,0,0)}| = 4, \qquad |W_{(0,b,0)}| = 4, \qquad |W_{(0,0,c)}| = 2, \qquad |W_{(0,0,0)}| = 1.$$

Алгебра Лі $G_2 \times A_1$ (група Лі $G_2 \times \mathrm{SU}(2)$). Діаграма Динкіна, матриця Картана та обернена до неї мають вигляд

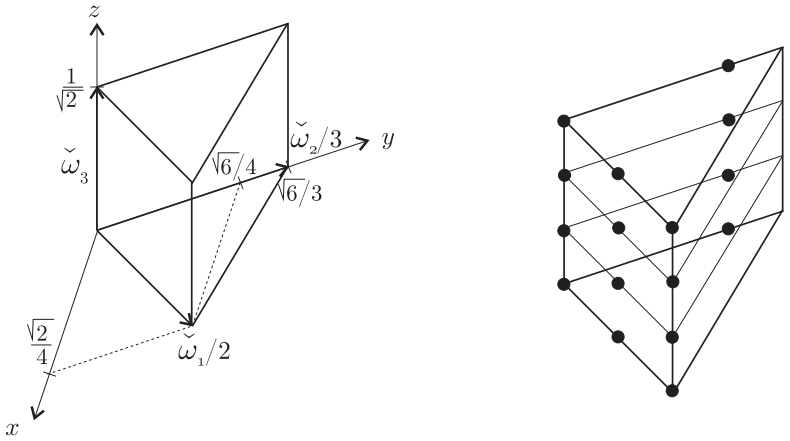


$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{C}^{-1} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки простий корінь α_2 є коротким, то відносні довжини простих коренів наступні $\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = 1$ та $\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = \langle \alpha_3, \alpha_3 \rangle = 2$.

Базиси простих коренів та фундаментальних ваг пов'язані співвідношеннями

$$\alpha_1 = 2\omega_1 - 3\omega_2, \qquad \omega_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2, \qquad \check{\alpha}_1 = \alpha_1, \qquad \check{\omega}_1 = \omega_1,$$
$$\alpha_2 = -\omega_1 + 2\omega_2, \qquad \omega_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \qquad \check{\alpha}_2 = 3\alpha_2, \qquad \check{\omega}_2 = 3\omega_2,$$
$$\alpha_3 = 2\omega_3, \qquad \omega_3 = \tfrac{1}{2}\alpha_3, \qquad \check{\alpha}_3 = \alpha_3, \qquad \check{\omega}_3 = \omega_3.$$



a b

Рис. 3.4. Ліворуч: фундаментальна область F алгебри Лі $G_2 \times A_1$; x, y та z вказують відповідно на ортогональні напрямки ортонормованого базису $\{e_1, e_2, e_3\}$, фундаментальна область G_2 — половина рівностороннього трикутника, що лежить у площині $z = 0$. Праворуч: сітка $F_{4,3}(G_2 \times A_1)$.

Обчисливши α- та ω-базиси у ортонормованому базисі $\{e_1, e_2, e_3\}$ отримаємо

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = (\sqrt{2}, 0, 0) = \sqrt{2}e_1, && \omega_1 = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}e_2,\\
&\alpha_2 = (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, 0) = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \tfrac{1}{\sqrt{6}}e_2, && \omega_2 = (0, \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0) = \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}e_2,\\
&\alpha_3 = (0, 0, \sqrt{2}) = \sqrt{2}e_3, && \omega_3 = (0, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}e_3,\\
&\check{\omega}_1 = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0),\\
&\check{\omega}_2 = (0, \sqrt{6}, 0),\\
&\check{\omega}_3 = (0, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}).
\end{aligned}$$

Старші корені для простих підгруп задаються формулами

$$\xi = 2\alpha_1 + 3\alpha_2, \qquad \xi = \alpha_3.$$

Фундаментальна область F — циліндр з трикутною основою (див. рис. 3.4). Її вершини наступні

$$F(G_2 \times A_1) = \{0,\ \tfrac{1}{2}\check{\omega}_1,\ \tfrac{1}{3}\check{\omega}_2,\ \check{\omega}_3,\ \tfrac{1}{2}\check{\omega}_1 + \check{\omega}_3,\ \tfrac{1}{3}\check{\omega}_2 + \check{\omega}_3\}.$$

Об'єм фундаментальної області обчислюється за формулою

$$|F(G_2\times A_1)| = \tfrac{1}{2}\langle[\tfrac{1}{2}\check\omega_1,\tfrac{1}{3}\check\omega_2],\check\omega_3\rangle = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1&\sqrt{3}&0\\0&\sqrt{2}&0\\0&0&1\end{vmatrix} = \frac{\sqrt{6}}{24},$$

тут $[\cdot,\cdot]$ позначає векторний добуток.

Сітка $F_{M,M'}\subset F$ визначається незалежним вибором двох натуральних чисел M і M' та складається з усіх точок

$$F_{M,M'}(G_2\times A_1) =$$
$$= \left\{\tfrac{s_1}{M}\check\omega_1+\tfrac{s_2}{M}\check\omega_2+\tfrac{s_1'}{M'}\check\omega_3 \mid\ 2s_1+3s_2\le M,\ s_1'\le M';\ s_1,s_2,s_1'\in\mathbb{Z}^{\ge0}\right\}.$$

Кількість точок у сітці $F_{M,M'}$ обчислюється за формулою

$$|F_{M,M''}(G_2\times A_1)| = |F_M(G_2)|\cdot|F_{M'}(A_1)| =$$
$$= \left(\left[\tfrac{M}{3}\right]+1+\sum_{i=0}^{\frac{M}{3}}\left[\tfrac{M-3i}{2}\right]\right)(M'+1),$$

де $[\,\cdot\,]$ позначає цілу частину числа.

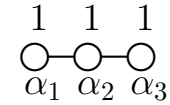
Орбіта групи Вейля породжуючої точки складається з 24 точок

$$W_{(a,b,c)}(G_2\times A_1) = \{\pm(a,b,c),\ \pm(-a,3a+b,c),\ \pm(a+b,-b,c),$$
$$\pm(2a+b,-(3a+b),c),\ \pm(-(a+b),3a+2b,c),$$
$$\pm(-(2a+b),3a+2b,c),\ \pm(a,b,-c),\ \pm(-a,3a+b,-c),$$
$$\pm(a+b,-b,-c),\ \pm(2a+b,-(3a+b),-c),$$
$$\pm(-(a+b),3a+2b,-c),\ \pm(-(2a+b),3a+2b,-c)\}.$$

Розмірності орбіт для довільних точок задаються співвідношеннями

$$|W_{(a,b,c)}| = 24,\qquad |W_{(a,b,0)}| = 12,\qquad |W_{(a,0,c)}| = 12,\qquad |W_{(0,b,c)}| = 12,$$
$$|W_{(a,0,0)}| = 6,\qquad |W_{(0,b,0)}| = 6,\qquad |W_{(0,0,c)}| = 2,\qquad |W_{(0,0,0)}| = 1.$$

Алгебра Лі A_3 (група Лі SU(4)). Діаграма Динкіна, матриця Картана та обернена до неї мають вигляд



$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix},\qquad \mathfrak{C}^{-1} = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix}3&2&1\\2&4&2\\1&2&3\end{pmatrix}.$$

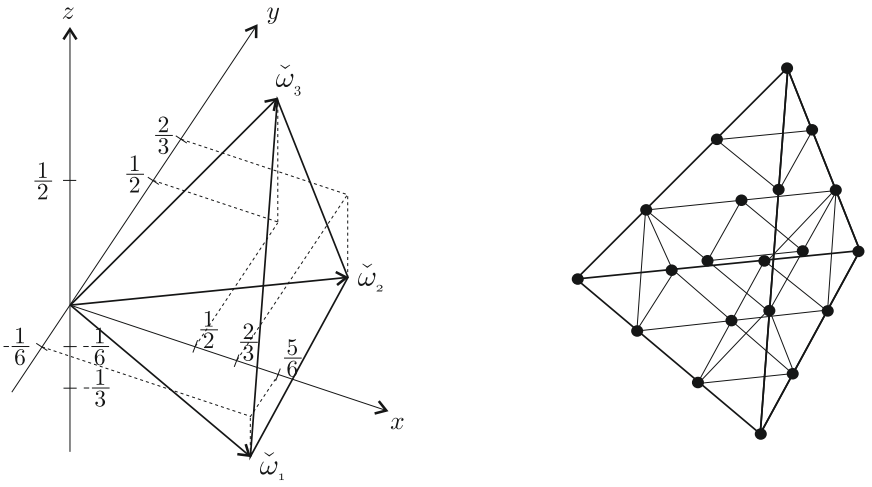


Рис. 3.5. Ліворуч: фундаментальна область F алгебри Лі A_3; x, y та z вказують відповідно на ортогональні напрямки ортонормованого базису $\{e_1, e_2, e_3\}$, фундаментальна область A_3 — тетраедр. Праворуч: сітка $F_3(A_3)$.

Всі прості корені мають однакову довжину $\sqrt{2}$. Базиси простих коренів та фундаментальних ваг пов'язані співвідношеннями

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = 2\omega_1 - \omega_2, && \omega_1 = \tfrac{3}{4}\alpha_1 + \tfrac{1}{2}\alpha_2 + \tfrac{1}{4}\alpha_3,\\
&\alpha_2 = -\omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3, && \omega_2 = \tfrac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2 + \tfrac{1}{2}\alpha_3,\\
&\alpha_3 = -\omega_2 + 2\omega_3, && \omega_3 = \tfrac{1}{4}\alpha_1 + \tfrac{1}{2}\alpha_2 + \tfrac{3}{4}\alpha_3,\\
&\check{\alpha}_i = \alpha_i,\ i \in \{1,2,3\}, && \check{\omega}_i = \omega_i,\ i \in \{1,2,3\}.
\end{aligned}$$

Обчисливши кореневий та ваговий базиси у ортонормованому базисі $\{e_1, e_2, e_3\}$ отримаємо

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (1,-1,0) = e_1 - e_2,\\
\alpha_2 &= (0,1,-1) = e_2 - e_3,\\
\alpha_3 &= (\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{4}{3}) = \tfrac{1}{3}(e_1 + e_2 + 4e_3),\\
\omega_1 &= (\tfrac{5}{6},-\tfrac{1}{6},-\tfrac{1}{6}) = \tfrac{1}{6}(5e_1 - e_2 - e_3) = \check{\omega}_1,\\
\omega_2 &= (\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3},-\tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3) = \check{\omega}_2,\\
\omega_3 &= (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3) = \check{\omega}_3.
\end{aligned}$$

Старший корінь ξ задається формулою

$$\xi = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

Фундаментальна область — тетраедр (див. рис. 3.5) з вершинами

$$F(A_3) = \{0,\ \check{\omega}_1,\ \check{\omega}_2,\ \check{\omega}_3\}.$$

Об'єм фундаментальної області обчислюється за формулою

$$|F(A_3)| = \tfrac{1}{6}\langle[\check{\omega}_1, \check{\omega}_2], \check{\omega}_3\rangle = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{12},$$

тут $[\cdot,\cdot]$ позначає векторний добуток.

Сітка $F_M \subset F$ визначається вибором натурального числа M та складається з усіх точок

$$F_M(A_3) = \left\{ \tfrac{s_1}{M}\check{\omega}_1 + \tfrac{s_2}{M}\check{\omega}_2 + \tfrac{s_3}{M}\check{\omega}_3 \mid\ s_1+s_2+s_3 \le M;\ s_1,s_2,s_3 \in \mathbb{Z}^{\ge 0} \right\}.$$

Кількість точок у сітці F_M обчислюється за формулою

$$|F_M(A_3)| = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{M}(M+1-i)(M+2-i).$$

Орбіта групи Вейля породжуючої точки $a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3,\ a,b,c > 0$ завжди складається з 24 точок

$$\begin{aligned}
W_{(a,b,c)}(A_3) = \{&(a,\ b,\ c), (-a,\ a{+}b,\ c), (a{+}b,\ -b,\ b{+}c),\\
&(a,\ b{+}c,\ -c), (b,\ -(a{+}b),\ a{+}b{+}c), (-a,\ a{+}b{+}c,\ -c),\\
&(-(a{+}b),\ a,\ b{+}c), (a{+}b,\ c,\ -(b{+}c)), (a{+}b{+}c,\ -(b{+}c),\ c),\\
&(b,\ c,\ -(a{+}b{+}c)), (b{+}c,\ -(a{+}b{+}c),\ a{+}b), (-b,\ -a,\ a{+}b{+}c),\\
&(-(a{+}b),\ a{+}b{+}c,\ -(b{+}c)), (-(a{+}b{+}c),\ a,\ b),\\
&(a{+}b{+}c,\ -c,\ -b), (b{+}c,\ -c,\ -(a{+}b)), (-b,\ b{+}c\ -(a{+}b{+}c)),\\
&(c,\ -(a{+}b{+}c),\ a), (-(b{+}c),\ -a,\ (a{+}b)),\\
&(-(a{+}b{+}c),\ a{+}b,\ -b), (c,\ -(b{+}c),\ -a),\\
&(-(b{+}c),\ b,\ -(a{+}b)), (-c,\ -(a{+}b),\ a), (-c,\ -b,\ -a)\}.
\end{aligned}$$

Розмірності орбіт для довільних точок задаються співвідношеннями

$$|W_{(a,b,c)}| = 24, \quad |W_{(a,b,0)}| = 12, \quad |W_{(a,0,c)}| = 12, \quad |W_{(0,b,c)}| = 12,$$
$$|W_{(a,0,0)}| = 4, \quad |W_{(0,b,0)}| = 6, \quad |W_{(0,0,c)}| = 4, \quad |W_{(0,0,0)}| = 1.$$

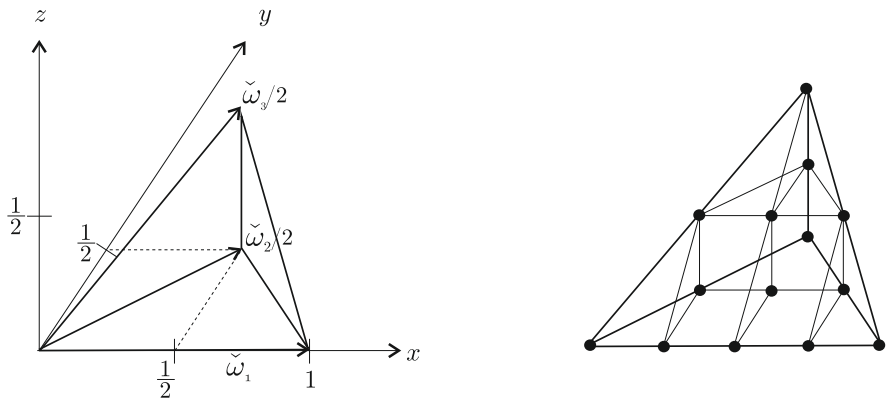
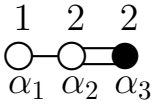


Рис. 3.6. Ліворуч: фундаментальна область F алгебри Лі B_3; x, y та z вказують відповідно на ортогональні напрямки ортонормованого базису $\{e_1, e_2, e_3\}$, грань, що визначається вершинами $\{0, \check{\omega}_1, \frac{1}{2}\check{\omega}_2\}$ лежить у площині $z = 0$. Праворуч: сітка $F_4(B_3)$.

Алгебра Лі B_3 (група Лі O(7)). Діаграма Динкіна, матриця Картана та обернена до неї мають вигляд



$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{C}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки простий корінь α_3 є коротким, то відносні довжини простих коренів наступні $\langle \alpha_3, \alpha_3 \rangle = 1$ і $\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = 2$.

Базиси простих коренів та фундаментальних ваг пов'язані співвідношеннями

$$\alpha_1 = 2\omega_1 - \omega_2, \qquad \omega_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$
$$\alpha_2 = -\omega_1 + 2\omega_2 - 2\omega_3, \qquad \omega_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3,$$
$$\alpha_3 = -\omega_2 + 2\omega_3, \qquad \omega_3 = \tfrac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2 + \tfrac{3}{2}\alpha_3,$$
$$\check{\alpha}_1 = \alpha_1, \qquad \check{\omega}_1 = \omega_1,$$
$$\check{\alpha}_2 = \alpha_2, \qquad \check{\omega}_2 = \omega_2,$$
$$\check{\alpha}_3 = 2\alpha_3, \qquad \check{\omega}_3 = 2\omega_3.$$

У ортонормованому базисі $\{e_1, e_2, e_3\}$ отримаємо

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = (1,-1,0) = e_1 - e_2, && \omega_1 = (1,0,0) = e_1,\\
&\alpha_2 = (0,1,-1) = e_2 - e_3, && \omega_2 = (1,1,0) = e_1 + e_2,\\
&\alpha_3 = (0,0,1) = e_3, && \omega_3 = (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}(e_1+e_2+e_3),\\
&\check{\omega}_1 = (1,0,0) = e_1,\\
&\check{\omega}_2 = (1,1,0) = e_1 + e_2,\\
&\check{\omega}_3 = (1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3.
\end{aligned}$$

Старший корінь ξ задається формулою

$$\xi = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3.$$

Фундаментальна область F зображена на рис. 3.6 та має вершини

$$F(B_3) = \{0,\ \check{\omega}_1,\ \tfrac{1}{2}\check{\omega}_2,\ \tfrac{1}{2}\check{\omega}_3\}.$$

Об'єм фундаментальної області обчислюється за формулою

$$|F(B_3)| = \tfrac{1}{6}\langle[\check{\omega}_1, \tfrac{1}{2}\check{\omega}_2], \tfrac{1}{2}\check{\omega}_3\rangle = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = \tfrac{1}{24},$$

тут $[\cdot,\cdot]$ позначає векторний добуток.

Сітка $F_M \subset F$ визначається вибором натурального числа M та складається з усіх точок

$$F_M(B_3) = \left\{ \tfrac{s_1}{M}\check{\omega}_1 + \tfrac{s_2}{M}\check{\omega}_2 + \tfrac{s_3}{M}\check{\omega}_3 \mid s_1 + 2s_2 + 2s_3 \leq M;\, s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{N} \right\}.$$

Кількість точок у сітці F_M обчислюється за формулою

$$|F_M(B_3)| = \left(\left[\tfrac{M}{2}\right] + 1\right)\left(\left[\tfrac{M}{2}\right]\left[\tfrac{M+1}{2}\right] + M + 1 - \tfrac{M+2}{2}\left[\tfrac{M}{2}\right]\right) + \sum_{i=0}^{\left[\frac{M}{2}\right]} i^2,$$

де $[\,\cdot\,]$ позначає цілу частину числа.

Орбіта групи Вейля породжуючої точки $a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3,\ a,b,c > 0$ завжди складається з 48 точок

$$W_{(a,b,c)}(B_3) = \{\pm(a,\ b,\ c), \pm(-a,\ a+b,\ c), \pm(a+b,\ -b,\ 2b+c),$$

$$\pm(a,\ b+c,\ -c), \pm(b,\ -(a+b),\ 2a+2b+c), \pm(-a,\ a+b+c,\ -c),$$
$$\pm(-(a+b),\ a,\ 2b+c), \pm(a+b+c,\ -(b+c),\ 2b+c),$$
$$\pm(b,\ a+b+c,\ -(2a+2b+c)), \pm(b+c,\ -(a+b+c),\ 2a+2b+c),$$
$$\pm(-b,\ -a,\ 2a+2b+c), \pm(-(a+b),\ a+2b+c,\ -(2b+c)),$$
$$\pm(a+2b+c,\ -(b+c),\ c), \pm(-(a+b+c),\ a,\ 2b+c),$$
$$\pm(a+b+c,\ b,\ -(2b+c)), \pm(a+2b+c,\ -(a+b+c),\ c),$$
$$\pm(b+c,\ a+b,\ -(2a+2b+c)), \pm(-b,\ a+2b+c,\ -(2a+2b+c)),$$
$$\pm(b+c,\ -(a+2b+c),\ 2a+2b+c), \pm(-(a+2b+c),\ a+b,\ c),$$
$$\pm(a+2b+c,\ -b,\ -c), \pm(-(b+c),\ -a,\ 2a+2b+c),$$
$$\pm(-(a+b+c),\ a+2b+c,\ -(2b+c))\}.$$

Розмірності орбіт для довільних точок задаються співвідношеннями

$$|W_{(a,b,c)}| = 48, \quad |W_{(a,b,0)}| = 24, \quad |W_{(a,0,c)}| = 24, \quad |W_{(0,b,c)}| = 24,$$
$$|W_{(a,0,0)}| = 6, \quad |W_{(0,b,0)}| = 12, \quad |W_{(0,0,c)}| = 8, \quad |W_{(0,0,0)}| = 1.$$

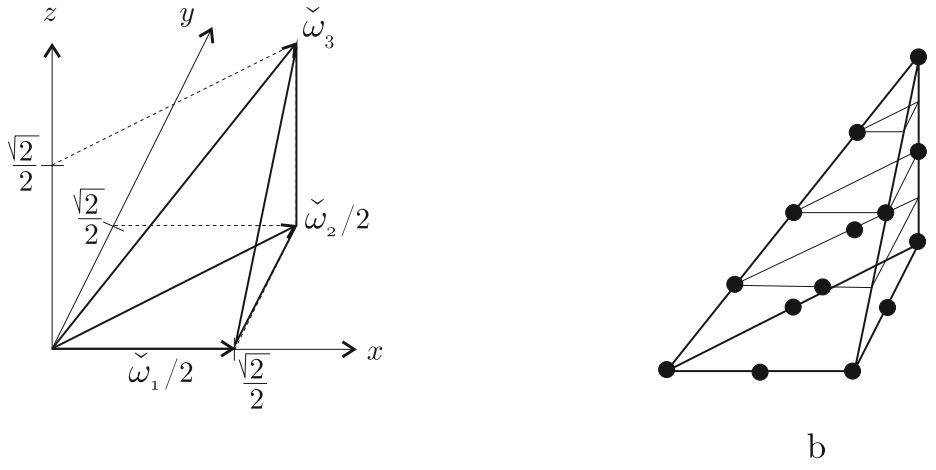
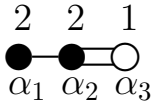


Рис. 3.7. Ліворуч: фундаментальна область F алгебри Лі C_3; x, y та z вказують відповідно на ортогональні напрямки ортонормованого базису $\{e_1, e_2, e_3\}$, грань, що визначається вершинами $\{0, \frac{1}{2}\check{\omega}_1, \frac{1}{2}\check{\omega}_2\}$ лежить у площині $z = 0$. Праворуч: сітка $F_4(C_3)$.

Алгебра Лі C_3 (група Лі Sp(6)). Діаграма Динкіна, матриця Картана та обернена до неї мають вигляд



$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{C}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки простий корінь α_3 є довгим, то відносні довжини простих коренів наступні $\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle = \langle\alpha_2,\alpha_2\rangle = 1$ і $\langle\alpha_3,\alpha_3\rangle = 2$.

Базиси простих коренів та фундаментальних ваг пов'язані співвідношеннями

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = 2\omega_1 - \omega_2, && \omega_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \tfrac{1}{2}\alpha_3,\\
&\alpha_2 = -\omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3, && \omega_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3,\\
&\alpha_3 = -2\omega_1 + 2\omega_3, && \omega_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \tfrac{3}{2}\alpha_3,\\
&\check{\alpha}_1 = 2\alpha_1, && \check{\omega}_1 = 2\omega_1,\\
&\check{\alpha}_2 = 2\alpha_2, && \check{\omega}_2 = 2\omega_2,\\
&\check{\alpha}_3 = \alpha_3, && \check{\omega}_3 = \omega_3.
\end{aligned}$$

У ортонормованому базисі $\{e_1, e_2, e_3\}$ отримаємо

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2),\\
&\alpha_2 = (0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_3),\\
&\alpha_3 = (0, 0, \sqrt{2}) = \sqrt{2}e_3,\\
&\omega_1 = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}e_1, && \check{\omega}_1 = (\sqrt{2}, 0, 0),\\
&\omega_2 = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2), && \check{\omega}_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0),\\
&\omega_3 = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2 + e_3), && \check{\omega}_3 = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}).
\end{aligned}$$

Старший корінь ξ задається формулою

$$\xi = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3.$$

Фундаментальна область F зображена на рис. 3.7 та має вершини

$$F(C_3) = \big\{0,\ \tfrac{1}{2}\check{\omega}_1,\ \tfrac{1}{2}\check{\omega}_2,\ \check{\omega}_3\big\}.$$

Об'єм фундаментальної області обчислюється за формулою

$$|F(C_3)| = \tfrac{1}{6}\langle[\tfrac{1}{2}\check{\omega}_1, \tfrac{1}{2}\check{\omega}_2], \check{\omega}_3\rangle = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{24},$$

тут $[\cdot,\cdot]$ позначає векторний добуток.

Сітка $F_M \subset F$ визначається вибором натурального числа M та складається з усіх точок

$$F_M(C_3) = \left\{ \tfrac{s_1}{M}\check{\omega}_1 + \tfrac{s_2}{M}\check{\omega}_2 + \tfrac{s_3}{M}\check{\omega}_3 \mid 2s_1+2s_2+s_3 \leq M;\ s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{N} \right\}.$$

Кількість точок у сітці F_M обчислюється за формулою

$$|F_M(C_3)| = \left(\left[\tfrac{M}{2}\right]+1\right)\left(\left[\tfrac{M}{2}\right]\left[\tfrac{M+1}{2}\right] + M + 1 - \tfrac{M+2}{2}\left[\tfrac{M}{2}\right]\right) + \sum_{i=0}^{\left[\frac{M}{2}\right]} i^2,$$

де $[\,\cdot\,]$ позначає цілу частину числа.

Орбіта групи Вейля породжуючої точки $a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3,\ a, b, c > 0$ завжди складається з 48 точок

$$\begin{aligned}
W_{(a,b,c)}(C_3) = \{&\pm(a,\ b,\ c),\ \pm(-a,\ a{+}b,\ c),\ \pm(a{+}b,\ -b,\ b{+}c),\\
&\pm(a,\ b{+}2c,\ -c),\ \pm(b,\ -(a{+}b),\ a{+}b{+}c),\ \pm(-a,\ a{+}b{+}2c,\ -c),\\
&\pm(-(a{+}b),\ a,\ b{+}c),\ \pm(a{+}b,\ b{+}2c,\ -(b{+}c)),\\
&\pm(a{+}b{+}2c,\ -(b{+}2c),\ b{+}c),\ \pm(b,\ a{+}b{+}2c,\ -(a{+}b{+}c)),\\
&\pm(b{+}2c,\ -(a{+}b{+}2c),\ a{+}b{+}c),\ \pm(-b,\ -a,\ a{+}b{+}c),\\
&\pm(-(a{+}b),\ a{+}2b{+}2c,\ -(b{+}c)),\ \pm(a{+}2b{+}2c,\ -(b{+}2c),\ c),\\
&\pm(-(a{+}b{+}2c),\ a,\ b{+}c),\ \pm(a{+}b{+}2c,\ b,\ -(b{+}c)),\\
&\pm(a{+}2b{+}2c,\ -(a{+}b{+}2c),\ c),\ \pm(b{+}2c,\ a{+}b,\ -(a{+}b{+}c)),\\
&\pm(-b,\ a{+}2b{+}2c,\ -(a{+}b{+}c)),\ \pm(b{+}2c,\ -(a{+}2b{+}2c),\ a{+}b{+}c),\\
&\pm(-(a{+}2b{+}2c),\ a{+}b,\ c),\ \pm(a{+}2b{+}2c,\ -b,\ -c),\\
&\pm(-(b{+}2c),\ -a,\ a{+}b{+}c),\ \pm(-(a{+}b{+}2c),\ a{+}2b{+}2c,\ -(b{+}c))\}.
\end{aligned}$$

Розмірності орбіт для довільних точок задаються співвідношеннями

$$|W_{(a,b,c)}| = 48, \quad |W_{(a,b,0)}| = 24, \quad |W_{(a,0,c)}| = 24, \quad |W_{(0,b,c)}| = 24,$$
$$|W_{(a,0,0)}| = 6, \quad |W_{(0,b,0)}| = 12, \quad |W_{(0,0,c)}| = 8, \quad |W_{(0,0,0)}| = 1.$$

Зафіксувавши термінологію та обчисливши всі необхідні складові для напівпростих груп Лі рангу три переходимо до означення трьох класів *орбіт-функцій* (спеціальних функцій $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$) та вивчення їх властивостей.

3.1.1. Означення орбіт-функцій. Для точок з конуса домінантних ваг $\lambda \in P^+$ та для точок Евклідового простору $x \in \mathbb{R}^n$ означимо *C-функцію* таким чином

$$C_\lambda(x) := \sum_{w \in W} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \langle w\lambda, x \rangle}, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.8}$$

де W — група Вейля напівпростої алгебри Лі.

Якщо у означенні C-функції замінити орбіту групи Вейля на орбіту її парної підгрупи $W_{e\lambda}$, то отримаємо ще один клас орбіт-функцій, а саме *E-функції*, що визначаються для точок $\lambda \in P_e$

$$E_\lambda(x) := \sum_{w \in W_e} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \langle w\lambda, x \rangle}, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.9}$$

Останній, третій, клас орбіт-функцій, а саме *S-функції*, визначаються аналогічним чином для точок з конуса строго домінантних ваг $\lambda \in P^{++}$, але знак кожного з доданків залежить від кількості $p(w)$ елементарних дзеркальних відображень r_i, які необхідні для отримання точки $w\lambda$ з точки λ

$$S_\lambda(x) := \sum_{w \in W} (-1)^{p(w)} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \langle w\lambda, x \rangle}, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.10}$$

Зрозуміло, що та сама точка орбіти $w\lambda$ може бути отримана з λ різною послідовністю дзеркальних відображень, але усі 'шляхи' матимуть довжину тієї самої парності, тому знак у сумі визначається однозначно і означення є коректним.

Зауваження 3.4. У роботах Клімика та Патери [70–72] орбіт-функції було визначено дещо інакше, а саме, точка λ обиралась з домінантної камери Вейля, а не з конуса домінантних ваг, та компоненти орбіт-функції (доданки) відповідали точкам орбіти $\mathrm{O}(\lambda)$, а не перетворенням групи Вейля, як у нашому випадку. Групи Вейля розглядались для простих, а не напівпростих груп Лі. Наведена тут форма орбіт-функцій важлива для доведення дискретної ортогональності. При цьому, для точок $\lambda \in P^{++}$ наші означення повністю співпадають.

3.1.2. Властивості орбіт-функцій. Усі три набори функцій визначаються виходячи з напівпростих груп Лі скінченного порядку і кількість змінних співпадає з рангом відповідної алгебри.

Загалом C-, S- та E-функції є скінченними сумами експонент, тому вони є неперервними та мають неперервні похідні всіх порядків.

Використовуючи тотожність $\langle \lambda, r_i x\rangle = \langle r_i\lambda, x\rangle$ для відображення r_i, $i = 1, \dots, n$, отримаємо наступні властивості симетрії орбіт-функцій

$$C_\lambda(r_i x) = C_{r_i\lambda}(x) = C_\lambda(x), \qquad S_{r_i\lambda}(x) = S_\lambda(r_i x) = -S_\lambda(x). \tag{3.11}$$

Нехай $b \in \mathbb{R}$, тоді орбіт-функції допускають масштабування:

$$C_{b\lambda}(x) = C_\lambda(bx), \qquad S_{b\lambda}(x) = S_\lambda(bx), \qquad E_{b\lambda}(x) = E_\lambda(bx).$$

Для породжуючих точок $E_\lambda(x) = \frac{1}{2}\Big(C_\lambda(x) + S_\lambda(x)\Big)$, та з (3.11) отримаємо

$$E_{r_i\lambda}(x) = E_\lambda(r_i x) = \tfrac{1}{2}\left(C_\lambda(x) - S_\lambda(x)\right) = E_\lambda(x). \tag{3.12}$$

Зауважимо, що у одновимірному випадку (алгебра A_1) C-функції та S-функції є сумою та різницею двох експонент з степенями протилежних знаків, тому співпадають з тригонометричними функціями косинус та синус відповідно, що і обумовило їх назви. E-функція в одновимірному випадку є експонентою з точністю до сталого множника.

S-функції антисиметричні відносно $(n-1)$-вимірних граней фундаментальної області F, тому вони є нульовими на межі F. C-функції симетричні відносно $(n-1)$-вимірних граней фундаментальної області F, їх нормальні похідні є S-функціями і тому нульові на межі F.

Для деяких простих алгебр Лі, орбіти групи Вейля складаються з пар, які породжують у орбіт-функціях комплексно спряжені доданки. Такими алгебрами є: A_1, G_2, E_7, E_8, B_n, C_n, D_{2n}, отже їх C-функції *завжди дійсні*. Для алгебр $A_{n\geq 2}$, E_6 та D_{2n-1} дійсні функції можна побудувати симетризувавши спеціальним чином координати λ.

Оскільки фундаментальні області для групи Вейля W та її парної підгрупи W_{e} відрізняються, то, для зручності, введемо спільне умовне позначення $\widetilde{F}$ для фундаментальних областей усіх орбіт-функцій.

Нехай $\phi(x)$ та $\psi(x)$ — це дві довільні квадратично інтегровні функції, тоді скалярний добуток цих функцій на області $\widetilde{F}$ визначається формулою:

$$\langle \phi(x), \psi(x) \rangle := \int_{\widetilde{F}} \phi(x)\overline{\psi(x)}\mathrm{d}x, \tag{3.13}$$

де $\overline{\psi(x)}$ позначає комплексне спряження, а інтегрування відбувається відносно Евклідової міри.

Нехай $\lambda, \lambda' \in P^+$, тоді будь-яка пара орбіт-функцій з того самого класу (C-, E- або S-функції) є ортогональною на відповідній фундаментальній області відносно скалярного добутку (3.13):

$$\langle C_\lambda(x), C_{\lambda'}(x) \rangle = |\mathrm{Stab}(\lambda)| \cdot |W| \cdot |F| \cdot \delta_{\lambda\lambda'}, \tag{3.14}$$

$$\langle S_\lambda(x), S_{\lambda'}(x) \rangle = |W| \cdot |F| \cdot \delta_{\lambda\lambda'}, \tag{3.15}$$

$$\langle E_\lambda(x), E_{\lambda'}(x) \rangle = |\mathrm{Stab}(\lambda)| \cdot |W_{\mathrm{e}}| \cdot |F_{\mathrm{e}}| \cdot \delta_{\lambda\lambda'}, \tag{3.16}$$

тут $\delta_{\lambda\lambda'}$ — дельта-символ Кронекера, $|W|$ — порядок групи Вейля, $|\mathrm{Stab}(\lambda)|$ — порядок стабілізатора точки λ, а $|F|$ та $|F_{\mathrm{e}}|$ — об'єми фундаментальних областей. Нагадаємо, що вся необхідна інформація для груп рангу три була обчислена на початку цього параграфу, зокрема $|F_{\mathrm{e}}| = 2|F|$ та для породжуючих точок $2|W_e| = |W|$.

Доведення рівностей (3.14), (3.15) та (3.16) випливає з ортогональності звичайних експонент та того факту, що задана вага $\lambda \in P$ завжди належить рівно одній орбіті.

Класи C-, S- та E-функцій є повними на фундаментальних областях. Їх повнота випливає з повноти експонент, тобто: у обраному класі орбіт-функцій не існує функції $\phi(x)$ такої, що $\langle \phi(x), \phi(x) \rangle > 0$ та в той же час $\langle \phi(x), \psi(x) \rangle = 0$ для усіх функцій $\psi(x)$ з того ж класу.

Таким чином, кожен з класів орбіт-функцій утворює ортогональний базис у гільбертовому просторі квадратично інтегровних функцій $\mathcal{L}^2(\widetilde{F})$,

тому такі функції можуть бути розкладені в ряд за C-, S- або E-функціями.

Нехай неперервну змінну x задано в ортонормованому базисі з координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Припустимо, що точку λ, яка нумерує та визначає орбіт-функцію, також задано у ортонормованому e-базисі, тоді скалярні добутки у експоненційних компонентах орбіт-функцій перетворюються на суми попарних добутків координат. Оператор Лапласа у ортогональних координатах має вигляд

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_k}, \quad \text{де } k = n \text{ (або } k = n+1 \text{ для } A_n).$$

Оскільки оператор Лапласа має те саме власне значення для кожної з експонент, які є доданками орбіт-функцій, а саме число $-4\pi^2\langle\lambda,\lambda\rangle$, то орбіт-функції $C_\lambda(x)$, $E_\lambda(x)$ та $S_\lambda(x)$, задані у ортонормованому базисі, є власними функціями оператора Лапласа:

$$\begin{aligned}
\Delta C_\lambda(x) &= -4\pi^2\langle\lambda,\lambda\rangle C_\lambda(x),\\
\Delta E_\lambda(x) &= -4\pi^2\langle\lambda,\lambda\rangle E_\lambda(x),\\
\Delta S_\lambda(x) &= -4\pi^2\langle\lambda,\lambda\rangle S_\lambda(x).
\end{aligned}$$

На жаль, побудова орбіт-функцій у ортонормованих координатах є надзвичайно громіздкою, оскільки орбіти груп Вейля природно обчислюються у ваговому або кореневому базисі, тому для для змінної x оберемо канонічний ваговий базис, а для λ оберемо дуальний йому $\check{\alpha}$-базис. Позначимо Δ оператор Лапласа, такий, що ∂_{x_i} це похідна за напрямком ω_i. Нехай $\mathfrak{C}$ — матриця Картана, тоді

$$\Delta = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\mathfrak{C}_{ij}}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}\partial_{x_i}\partial_{x_j}.$$

Таке означення оператора Лапласа є коректним, оскільки матриця скалярних добутків простих коренів є додатно визначеною, більш того, за нашим означенням матриця $\frac{\mathfrak{C}_{ij}}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}$ симетрична, тому її можна діагоналізувати і оператор Лапласа зведеться до суми других похідних.

Використовуючи ω-базиси побудовані в явному вигляді на початку розділу для усіх напівпростих алгебр рангу три, можна отримати явний вигляд операторів другого порядку, для яких орбіт-функції трьох змінних будуть власними функціями.

Твердження 3.5. *Орбіт-функції $C_\lambda(x)$, $E_\lambda(x)$ та $S_\lambda(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, визначені в ω-базисі для напівпростих груп Лі рангу* 3*, є власними функціями наступних диференціальних операторів другого порядку Δ з власними значеннями $-4\pi\langle\lambda,\lambda\rangle$:*

$$
\begin{aligned}
&A_1 \times A_1 \times A_1: && \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2,\\
&A_2 \times A_1: && \Delta = \partial_1^2 - \partial_1\partial_2 + \partial_2^2 + \partial_3^2,\\
&C_2 \times A_1: && \Delta = 2\partial_1^2 - 2\partial_1\partial_2 + \partial_2^2 + \partial_3^2,\\
&G_2 \times A_1: && \Delta = 3\partial_1^2 - 5\partial_1\partial_2 + \partial_2^2 + \partial_3^2,\\
&A_3: && \Delta = \partial_1^2 - \partial_1\partial_2 + \partial_2^2 - \partial_2\partial_3 + \partial_3^2,\\
&B_3: && \Delta = \partial_1^2 - \partial_1\partial_2 + \partial_2^2 - 2\partial_2\partial_3 + 2\partial_3^2,\\
&C_3: && \Delta = 2\partial_1^2 - 2\partial_1\partial_2 + 2\partial_2^2 - 2\partial_2\partial_3 + \partial_3^2.
\end{aligned}
$$

Зауважимо, що власні значення операторів Лапласа, записаних у ω-базисі, обчислюються складніше, оскільки λ задано у $\check{\alpha}$-базисі, який не є ортонормованим, але ця задача є технічною, оскільки для тривимірного випадку усі необхідні нам вектори обчислено у явному вигляді на початку параграфа. На границі ∂F фундаментальної області C-функції мають нульову нормальну похідну (оскільки вона співпадає з S-функцією, яка є антисиметричною), а S — є нульовими на границі фундаментальної області F для усіх простих груп Лі, тому вони є розв'язками класичних крайових задач математичної фізики для оператора Лапласа та фундаментальної області алгебри Лі за якою вони означені.

Твердження 3.6. *C_λ-функції є власними функціями оператора Лапласа на n-вимірному симплексі F, що задовольняють крайову умову Неймана*

$$\left.\frac{\partial f(x)}{\partial \nu}\right|_{\partial F} = 0, \qquad \text{де } \nu \text{ — нормаль до } \partial F.$$

S_λ-функції є є власними функціями оператора Лапласа на n-вимірному симплексі F, що задовольняють крайову умову Діріхле

$$f(x)|_{\partial F} = 0.$$

3.1.3. Дискретизація орбіт-функцій. Сітка фундаментальної області напівпростої групи може визначатись не одним натуральним числом, а кількома, проте, для зручності, позначимо її $\widetilde{F_M}$, а кількість точок у ній $|\widetilde{F_M}|$, та зауважимо, що у означенні різних класів орбіт-функцій маємо справу з різними фундаментальними областями, а саме

$$\widetilde{F_M} = \begin{cases} F_M & \text{для } C\text{-функцій,} \\ \text{int}(F_M) & \text{для } S\text{-функцій,} \\ F_M \bigcup r_i F_M & \text{для } E\text{-функцій.} \end{cases}$$

Задача дискретизації E-функцій зводиться до задачі дискретизації фундаментальної області напівпростої групи Лі, тому більшість необхідної інформації вже отримана та може бути використана, але, оскільки фундаментальна область парної підгрупи афінної групи Вейля є об'єднанням F та її дзеркального відображення відносно однієї з граней, то дискретні точки, які потрапляють на згадану грань, подвоюються. Вони можуть бути легко встановлені та викинуті з розгляду, але для цього має бути обрана грань симетрії, що суттєво залежить від конкретного застосування. Внаслідок цього далі наведемо деталі лише для C- та S-функцій, оскільки вони є універсальними для всіх випадків.

У випадку якщо $x \in F_M$ (тобто координати x є раціональними числами), то компоненти C-, S- і E-функцій є коренями з одиниці. Таким чином, існує скінченна кількість орбіт-функцій, що набувають різних значень у точках F_M і ці функції ортогональні на сітці. Кількість попарно ортогональних функцій на F_M співпадає з кількістю точок F_M, включаючи границю у випадку C- та E-функцій та виключаючи границю у випадку S-функцій.

Нехай два вектори задано у ω-базисі:

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) = u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + \cdots + u_n\omega_n,$$
$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_1\omega_1 + v_2\omega_2 + \cdots + v_n\omega_n,$$

тоді їх скалярний добуток обчислюється як матричний добуток

$$\langle u, v\rangle = u\tilde{\mathfrak{C}}v^t = \sum_{i,j=1}^{n} u_i v_j \langle \omega_i, \omega_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} u_i v_j \frac{\langle \alpha_j, \alpha_j\rangle}{2}\mathfrak{C}^{-1}_{i,j},$$

тут $\tilde{\mathfrak{C}}_{i,j} = \frac{\langle \alpha_j, \alpha_j\rangle}{2}\mathfrak{C}^{-1}_{i,j}$, де $\mathfrak{C}$ — матриця Картана.

Якщо вектори задано у α-базисі:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n,$$
$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \cdots + y_n\alpha_n,$$

тоді їх скалярний добуток обчислюється як матричний добуток

$$\langle x, y\rangle = x\hat{\mathfrak{C}}y^t = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \langle \alpha_i, \alpha_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \frac{\langle \alpha_j, \alpha_j\rangle}{2}\mathfrak{C}_{i,j},$$

тут $\hat{\mathfrak{C}}_{i,j} = \frac{\langle \alpha_j, \alpha_j\rangle}{2}\mathfrak{C}_{i,j}$, де $\mathfrak{C}$ — матриця Картана.

Квадрати довжин простих коренів $\langle \alpha_j, \alpha_j\rangle$ графічно зображено у діаграмах Динкіна простих груп Лі [60, 67]. Нагадаємо також, що

$$\langle \alpha_i, \check{\omega}_j\rangle = \langle \check{\alpha}_i, \omega_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}.$$

Дискретний скалярний добуток двох функцій

$$\phi(x), \psi(x)\colon F_M \to \mathbb{C},$$

що залежить від сітки та визначений білінійною формою:

$$\langle \phi(x), \psi(x)\rangle_M = \sum_{i=1}^{|F_M|} \varepsilon(x_i)\phi(x_i)\overline{\psi(x_i)}, \quad x_i \in F_M. \tag{3.17}$$

Група Вейля природно діє на відповідному їй максимальному торі $\mathbb{T} = \mathbb{R}^n/\check{Q}$. Групу ізотропії точки $x \in \mathbb{T}$ позначимо

$$\mathrm{Stab}(x) = \{w \in W \mid wx = x\},$$

а її порядок $|\mathrm{Stab}(x)|$. Орбітою групи Вейля точки x з максимального тора $\mathbb{T}$ є $W(x) = \{wx \in \mathbb{T} \mid w \in W\}$. Розмірність цієї орбіти і є коефіцієнтом дискретного скалярного добутку

$$\varepsilon(x_i) = |W(x)| = \frac{|W|}{|\mathrm{Stab}(x)|}.$$

C- та S-функцій визначені для конуса домінантних ваг, враховуючи параметризацію евклідового простору максимальним тором, для дискретизації достатньо набору орбіт-функцій визначених на точках $\lambda \in \Lambda_M$:

$$\Lambda_M = \{t_1\omega_1 + \cdots + t_n\omega_n \mid t_0, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{Z}^{\geq 0},\ t_0 + t_1q_1 + \cdots + t_nq_n = M\}.$$

Оскільки коефіцієнти розкладу старшого кореня та дуальні їм коефіцієнти є тими самими наборами з точністю до перестановки елементів, то $|F_M| = |\Lambda_M|$. Позначимо $|\mathrm{Stab}(\lambda)|$ порядок групи ізотропії точки $\lambda \in F_M$ під дією групи Вейля. З викладеного вище та неперервної ортогональності орбіт-функцій випливає твердження.

Твердження 3.7. *C- та S-функції визначені для $\lambda, \lambda' \in \Lambda_M$ попарно ортогональні*

$$\langle C_\lambda(x), C_{\lambda'}(x)\rangle_M = \det(\mathfrak{C})|W|M^n|\mathrm{Stab}(\lambda)|\delta_{\lambda\lambda'}, \tag{3.18}$$

$$\langle S_\lambda(x), S_{\lambda'}(x)\rangle_M = \det(\mathfrak{C})|W|M^n\delta_{\lambda\lambda'}. \tag{3.19}$$

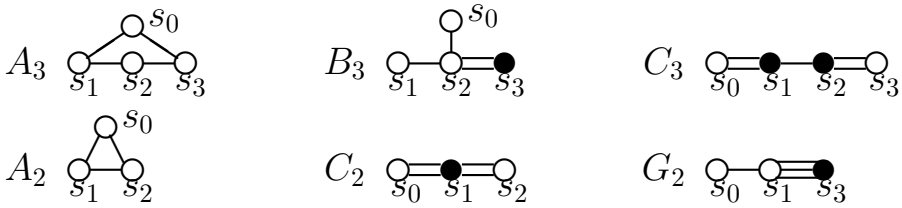
Для тривимірних орбіт-функцій порядки груп Вейля, матриці Картана та кількість точок у сітці було отримано та наведено на початку даного розділу.

Розглянемо задачу обчислення порядків стабілізаторів для простих груп рангів не вище за три. Стабілізатор точки λ з F_M може бути обчислений наступним методом: у ω-базисі точка має координати $\lambda = \left(\frac{s_1}{M}, \frac{s_2}{M}, \frac{s_3}{M}\right)$,

x	A_3		B_3		C_3	
	$\lvert\mathrm{Stab}_W(x)\rvert$	$\varepsilon(x)$	$\lvert\mathrm{Stab}_W(x)\rvert$	$\varepsilon(x)$	$\lvert\mathrm{Stab}_W(x)\rvert$	$\varepsilon(x)$
$[s_0, s_1, s_2, s_3]$	1	24	1	48	1	48
$[s_0, s_1, s_2, 0]$	2	12	2	24	2	24
$[s_0, s_1, 0, s_3]$	2	12	2	24	2	24
$[s_0, 0, s_2, s_3]$	2	12	2	24	2	24
$[0, s_1, s_2, s_3]$	2	12	2	24	2	24
$[s_0, s_1, 0, 0]$	6	4	8	6	8	6
$[s_0, 0, s_2, 0]$	4	6	4	12	4	12
$[0, s_1, s_2, 0]$	6	4	4	12	4	12
$[s_0, 0, 0, s_3]$	6	4	6	8	6	8
$[0, s_1, 0, s_3]$	4	6	6	8	4	12
$[0, 0, s_2, s_3]$	6	4	4	12	8	6
$[s_0, 0, 0, 0]$	24	1	48	1	48	1
$[0, 0, s_2, 0]$	24	1	8	6	16	3
$[0, s_1, 0, 0]$	24	1	48	1	16	3
$[0, 0, 0, s_3]$	24	1	24	2	48	1

Табл. 3.1. Значення стабілізаторів та $\varepsilon(x)$ для простих груп Лі рангу 3.

розглядаємо набір $[s_0, s_1, s_2, s_3]$, такий, що $s_0, s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ і $s_0 + s_1 + s_2 + s_3 = M$ та пов'язуємо його з розширеною діаграмою Динкіна, після чого розглядаємо піддіаграму, що відповідає нульовим значенням. Цій діаграмі і відповідає шукана група Вейля порядку $\lvert\mathrm{Stab}_W(x)\rvert$. Наведемо необхідні для цього розширені діаграми Динкіна:



Значення стабілізаторів та коефіцієнтів $\varepsilon(x)$ для C-функцій наведено у таблицях 3.1, 3.2, 3.3 для груп Лі рангів 1, 2 та 3; у цих таблицях $s_0, s_1, s_2, s_3 > 0$.

	A_2		C_2		G_2	
x	$\lvert\mathrm{Stab}_W(x)\rvert$	$\varepsilon(x)$	$\lvert\mathrm{Stab}_W(x)\rvert$	$\varepsilon(x)$	$\lvert\mathrm{Stab}_W(x)\rvert$	$\varepsilon(x)$
$[s_0, s_1, s_2]$	1	6	1	8	1	12
$[s_0, s_1, 0]$	2	3	2	4	2	6
$[s_0, 0, s_2]$	2	3	2	4	2	6
$[0, s_1, s_2]$	2	3	2	4	2	6
$[s_0, 0, 0]$	6	1	8	1	12	1
$[0, s_1, 0]$	6	1	4	2	4	2
$[0, 0, s_2]$	6	1	8	1	6	3

Табл. 3.2. Значення стабілізаторів та $\varepsilon(x)$ для простих груп Лі рангу 2.

	A_1	
x	$\lvert\mathrm{Stab}_W(x)\rvert$	$\varepsilon(x)$
$[s_0, s_1]$	1	2
$[s_0, 0]$	2	1
$[0, s_1]$	2	1

Табл. 3.3. Значення стабілізаторів та $\varepsilon(x)$ для простої групи Лі рангу 1 A_1.

Зауваження 3.8. Коефіцієнти $\varepsilon(x)$ для чотирьох напівпростих груп рангу три $A_1 \times A_1 \times A_1$, $A_2 \times A_1$, $C_2 \times A_1$ та $G_2 \times A_1$ обчислюються як добутки коефіцієнтів їх простих компонент.

Для різних фіксованих $m \in R^n$ набір експонент $\{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\langle m,x\rangle},\ x \in R^n\}$ визначає дискретне та неперервне перетворення Фур'є на $\mathbb{R}^n$. Так само орбіт-функції, які є симетризованою версією експонент, визначають аналог перетворення Фур'є.

Нехай неперервно диференційовну функцію $f(x)$ задано на сітці F_M фундаментальної області деякої напівпростої алгебри Лі, тоді її можна наблизити/інтерполювати за допомогою дискретних C- та S-функцій:

$$f(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda_M} c_\lambda C_\lambda(x), \qquad c_\lambda = |W_\lambda|^{-1}|F|^{-1}\langle f(x), C_\lambda(x)\rangle;$$

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_M} c'_\lambda S_\lambda(x), \qquad c'_\lambda = |W|^{-1}|F|^{-1}\langle f(x), S_\lambda(x)\rangle.$$

Для дискретного Фур'є аналізу означимо інтерполюючі функції, які задамо в термінах розкладу за функціями $C_\lambda(x)$ і $S_\lambda(x)$ з коефіцієнтами a_λ і b_λ, які необхідно обчислити

$$C^M(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_M} a_\lambda C_\lambda(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.20}$$

$$S^M(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_M} b_\lambda S_\lambda(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.21}$$

Нехай деяку функцію $f(x)$ задано на сітці $\widetilde{F_M}$, інтерполяція f полягає у знаходженні відповідно коефіцієнтів a_λ або b_λ таких, що

$$C^M(x) = f(x), \quad \text{або} \quad S^M(x) = f(x), \quad x \in \widetilde{F_M}. \tag{3.22}$$

Ці дві лінійні системи мають квадратні невироджені матриці, тому однозначно розв'язуються.

$$a_\lambda = \frac{\langle f, C_\lambda\rangle_M}{\langle C_\lambda, C_\lambda\rangle_M} = (\det(C)|W|M^n|\mathrm{Stab}(\lambda)|)^{-1} \sum_{x \in F_M} \varepsilon(x) f(x)\overline{C_\lambda(x)};$$

$$b_\lambda = \frac{\langle f, S_\lambda\rangle_M}{\langle S_\lambda, S_\lambda\rangle_M} = (\det(C)M^n)^{-1} \sum_{x \in \mathrm{int}(F_M)} f(x)\overline{S_\lambda(x)}.$$

Важливо зауважити, що після підстановки a_λ або b_λ у апроксиманти, ми отримаємо матричну задачу $v = Df$, де $v \in \mathbb{C}^{|F_M|}$, $f \in \mathbb{C}^{|\Lambda_M|\times 1}$, і $D \in \mathbb{C}^{|\Lambda_M|\times|F_M|}$, а D залежить від орбіт-функцій і не залежить від f, тому для фіксованих сіток матриці коефіцієнтів D можуть бути обчислені один раз та збережені, що дозволить суттєво економити час обчислення.

3.2. Алгебра Лі A_n: спеціальні функції та правила галуження

Група перестановок S_{n+1} порядку $(n+1)!$ перетворює впорядкований набір чисел $[l_1, \ldots, l_n, l_{n+1}]$ переставляючи числа у ньому.

Розглянемо ортонормований базис в $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$e_i \in \mathbb{R}^{n+1}, \qquad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \qquad 1 \le i, j \le n+1, \tag{3.23}$$

нехай набір чисел l_k, $k = 1, 2, \ldots, n+1$ — це координати точки $\mu \in \mathbb{R}^{n+1}$ у e-базисі:

$$\mu = \sum_{k=1}^{n+1} l_k e_k, \qquad l_k \in \mathbb{R}.$$

Переставляючи координати l_k точки μ група S_{n+1} породжує набір точок, який є орбітою μ. Серед точок орбіти є єдина *домінантна* точка така, що

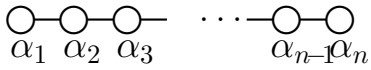
$$l_1 \ge l_2 \ge \cdots \ge l_n \ge l_{n+1}.$$

Позначимо точку з такими координатами λ, а орбіту до якої вона належить позначимо W_λ. Якщо усі координати домінантної точки різні, то W_λ складається з $(n+1)!$ різних точок.

Розглянемо n-вимірний підпростір (гіперплощина) $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ визначений співвідношенням

$$\mathcal{H} = \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} l_k e_k \mid l_k \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{n+1} l_k = 0 \right\}. \tag{3.24}$$

A_n — проста алгебра Лі компактної групи Лі $\mathrm{SU}(n+1)$. У загальному випадку для рангу ($1 \le n < \infty$) діаграма Динкіна–Коксетера, матриця Картана $\mathfrak{C}$ та обернена до неї $\mathfrak{C}^{-1}$ мають вигляд:



$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{C}^{-1} = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} 1{\cdot}n & 1{\cdot}(n{-}1) & 1{\cdot}(n{-}2) & 1{\cdot}(n{-}3) & \ldots & 1{\cdot}3 & 1{\cdot}2 & 1{\cdot}1 \\ 1{\cdot}(n{-}1) & 2{\cdot}(n{-}1) & 2{\cdot}(n{-}2) & 2{\cdot}(n{-}3) & \ldots & 2{\cdot}3 & 2{\cdot}2 & 2{\cdot}1 \\ 1{\cdot}(n{-}2) & 2{\cdot}(n{-}2) & 3{\cdot}(n{-}2) & 3{\cdot}(n{-}3) & \ldots & 3{\cdot}3 & 3{\cdot}2 & 3{\cdot}1 \\ 1{\cdot}(n{-}3) & 2{\cdot}(n{-}3) & 3{\cdot}(n{-}3) & 4{\cdot}(n{-}3) & \ldots & 4{\cdot}3 & 4{\cdot}2 & 4{\cdot}1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1{\cdot}3 & 2{\cdot}3 & 3{\cdot}3 & 4{\cdot}3 & \ldots & (n{-}2){\cdot}3 & (n{-}2){\cdot}2 & (n{-}2){\cdot}1 \\ 1{\cdot}2 & 2{\cdot}2 & 3{\cdot}2 & 4{\cdot}2 & \ldots & (n{-}2){\cdot}2 & (n{-}1){\cdot}2 & (n{-}1){\cdot}1 \\ 1{\cdot}1 & 2{\cdot}1 & 3{\cdot}1 & 4{\cdot}1 & \ldots & (n{-}2){\cdot}1 & (n{-}1){\cdot}1 & n{\cdot}1 \end{pmatrix}.$$

Прості корені α_i, $1 \le i \le n$ алгебри A_n утворюють α-базис простору $\mathbb{R}^n$. Побудуємо їх у гіперплощині $\mathcal{H}$:

$$\alpha_i = e_i - e_{i+1}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Цим вибором зафіксовано довжини $\sqrt{2}$ та відносні кути ($\frac{2\pi}{3}$ та $\frac{\pi}{2}$) між простими коренями.

Важливо, що у випадку алгебри A_n всі корені мають однакову довжину, тому має місце рівність $\omega_i = \check{\omega}_i$ і це дозволяє нам опускати символ ‘$\check{}$’ у даному параграфі. Дуальний ω-базис та α-базис пов’язані матрицею Картана:

$$\langle \alpha_i, \omega_j \rangle = \delta_{ij}, \qquad 1 \le i, j \le n, \qquad \alpha = \mathfrak{C}\omega, \qquad \omega = \mathfrak{C}^{-1}\alpha.$$

Оберемо координати для домінантної точки $\lambda \in \mathcal{H}$ у e- та ω-базисах:

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n+1} l_j e_j =: (l_1, \dots, l_{n+1})_e = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \omega_i =: (\lambda_1, \dots, \lambda_n)_\omega, \quad \sum_{i=1}^{n+1} l_i = 0.$$

Використовуючи $\mathfrak{C}$ знайдемо співвідношення між λ_i та l_j:

$$l_1 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathfrak{C}^{-1}_{k1}, \qquad l_{n+1} = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathfrak{C}^{-1}_{kn}, \quad \text{коли } j{=}2, \dots, n, \text{ то}$$
$$l_j = \lambda_1(\mathfrak{C}^{-1}_{1\,j} - \mathfrak{C}^{-1}_{1\,j-1}) + \lambda_2(\mathfrak{C}^{-1}_{2\,j} - \mathfrak{C}^{-1}_{2\,j-1}) + \dots + \lambda_n(\mathfrak{C}^{-1}_{n\,j} - \mathfrak{C}^{-1}_{n\,j-1}).$$

У явному вигляді

$$\lambda_i = l_i - l_{i+1}, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.25}$$

Обернені формули значно складніші

$$l = A\lambda, \tag{3.26}$$

де $l = (l_1, \dots, 1_{n+1})_e$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)_\omega$, та A — $(n{+}1) \times n$ матриця:

$$A = \tfrac{1}{n+1} \begin{pmatrix} n & n{-}1 & n{-}2 & \cdots & 2 & 1 \\ -1 & n{-}1 & n{-}2 & \cdots & 2 & 1 \\ -1 & -2 & n{-}2 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n{-}1) & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n{-}1) & -n \end{pmatrix}.$$

Група Вейля $W(A_n)$ породжується дзеркальними відображеннями r_i:

$$\begin{aligned} r_i x &= x - \tfrac{2}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \langle x, \alpha_i \rangle \alpha_i = \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})_e - (x_i - x_{i+1})(e_i - e_{i+1}) = \\ &= (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \ldots, x_{n+1})_e. \end{aligned}$$

Очевидно, що ці перестановки породжують групу S_{n+1}, отже $W(A_n)$ ізоморфна S_{n+1}, а точки орбіт $W_\lambda(\mathrm{S}_{n+1})$ та $W_\lambda(A_n)$ співпадають.

Нехай $\lambda \in P$ задано у ω-базисі, а $x \in \mathbb{R}^n$ задано у α-базисі:

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \omega_j, \qquad \mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \omega_j, \qquad \lambda_j, \mu_j \in \mathbb{Z}$$

та

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_j, \qquad x_j \in \mathbb{R},$$

тоді орбіт-функції алгебри A_n мають наступний вигляд

$$C_\lambda(x) = \sum_{\mu \in W_\lambda} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j} = \sum_{\mu \in W_\lambda} \prod_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \mu_j x_j}, \tag{3.27}$$

$$S_\lambda(x) = \sum_{\mu \in W_\lambda} (-1)^{p(\mu)} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j} = \sum_{\mu \in W_\lambda} (-1)^{p(\mu)} \prod_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \mu_j x_j}, \tag{3.28}$$

$$E_\lambda(x) = \sum_{\mu \in W_\lambda^e} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j} = \sum_{\mu \in W_\lambda^e} \prod_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \mu_j x_j}. \tag{3.29}$$

Зауваження 3.9. На відміну від параграфа 3.1, у параграфах 3.2 та 3.3 компоненти орбіт-функцій відповідають орбіті точки W_λ, а не усій групі Вейля W.

Співвідношення (3.26) дозволяють переписати λ та x у орбіт-функціях в ортогональному базисі $\mathbb{R}^{n+1}$

$$C_\lambda(x) = \sum_{s \in \mathrm{S}_{n+1}} \mathrm{e}^{2\pi i (s(\lambda), x)}, \tag{3.30}$$

$$S_\lambda(x) = \sum_{s\in \mathrm{S}_{n+1}} (\operatorname{sgn} s)\mathrm{e}^{2\pi i(s(\lambda),x)}, \tag{3.31}$$

$$E_\lambda(x) = \sum_{s\in \mathrm{Alt}_{n+1}} \mathrm{e}^{2\pi i(s(\lambda),x)}, \tag{3.32}$$

де $\operatorname{sgn} s$ — знак перестановки, а Alt_{n+1} — знакозмінна група, що діє на $(n+1)$-вимірних числових векторах, знакозмінна група є підгрупою індексу два у групі перестановок і може бути ототожнена з парною підгрупою групи Вейля алгебри A_n.

Розглянемо $(n+1)\times(n+1)$ матрицю

$$M = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2\pi i\lambda_1 x_1} & \mathrm{e}^{2\pi i\lambda_1 x_2} & \dots & \mathrm{e}^{2\pi i\lambda_1 x_{n+1}} \\ \mathrm{e}^{2\pi i\lambda_2 x_1} & \mathrm{e}^{2\pi i\lambda_2 x_2} & \dots & \mathrm{e}^{2\pi i\lambda_2 x_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{e}^{2\pi i\lambda_{n+1} x_1} & \mathrm{e}^{2\pi i\lambda_{n+1} x_2} & \dots & \mathrm{e}^{2\pi i\lambda_n x_{n+1}} \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

Взявши до уваги властивості орбіт-функцій (3.11) та (3.12), отримаємо

$$C_\lambda(x) = \det(M), \quad S_\lambda(x) = \det{}^+(M), \quad E_\lambda(x) = \operatorname{sdet}(M), \tag{3.34}$$

де $\det^+$ — перманент (антивизначник), а $\operatorname{sdet} = \frac{1}{2}(\det + \det^+)$ — напіввизначник. Виходячи з вищенаведеного маємо твердження.

Твердження 3.10. *Спеціальні симетричні багатозмінні експоненційні функції введені у роботі* [73] *еквівалентні C-функціям простої алгебри Лі A_n.*

Спеціальні антисиметричні багатозмінні експоненційні функції введені у роботі [73] *еквівалентні S-функціям простої алгебри Лі A_n.*

Спеціальні знакозмінні багатозмінні експоненційні функції введені у роботі [74] *еквівалентні E-функціям простої алгебри Лі A_n.*

Зауваження 3.11. Вищенаведене твердження дає можливість визначити нові спеціальні функції багатьох змінних, виходячи з експонент або тригонометричних функцій, відповідних визначників, антивизначників та напіввизначників; а також дискретних груп перетворень для яких базове групове перетворення є зміною знаку i-ї координати. Такі функції утворять ортогональні системи та матимуть ряд інших корисних властивостей, оскільки будуть еквівалентні орбіт-функціям простої алгебри Лі B_n.

3.2.1. Галуження орбіт групи Вейля алгебри A_n. У цьому параграфі розглядаємо орбіти групи Вейля $W(A_n)$ простих алгебр Лі типу A_n, $n \geq 1$, ці алгебри Лі відповідають групам спеціальних лінійних перетворень $\mathrm{SL}(n{+}1, \mathbb{C})$ або їх компактним дійсним аналогам $\mathrm{SU}(n{+}1)$. Точки W_λ рівновіддалені від початку координат, а також група $W(A_n)$ ізоморфна групі перестановок $n{+}1$ елемента. З геометричної точки зору, одна орбіта утворює опуклий многогранник у $\mathbb{R}^n$, грані усіх розмірностей якого є елементами скінченного порядку та алгоритмічно описуються за діаграмою Динкіна [25].

Задача класифікації можливих редукцій групи Вейля $W(A_n)$ була розв'язана понад 50 років тому у роботах [15, 33], використовуючи ці результати побудуємо розклади орбіт групи Вейля у об'єднання орбіт менших розмірностей.

У фізичній літературі подібні задачі називаються обчисленням правил галуження [91] та пов'язані з незвідними скінченновимірними зображеннями простих алгебр Лі (що еквівалентно правилам галуження вагових систем зображень). Такі задачі також виникають при описі порушення симетрій у фізичних системах.

Розклади орбіт та правила галуження подібні, оскільки стосуються точок орбіти, але між ними існують і певні відмінності, зокрема:

- Вагові системи суттєво розгалужуються при зростанні розмірності зображення, в той час як розмірність орбіти завжди обмежена і збільшитись може лише відстань точок орбіти від початку координат. Вагова система зазвичай складається з кількох W-орбіт, при цьому задача виокремлення орбіт (обчислення коефіцієнтів домінантних ваг) є досить складною, проте задачі розкладу добутків зображень у суму незвідних успішно розв'язуються з використанням вагових систем.
- Точка вагової системи зображення з необхідністю є точкою вагової ґратки алгебри Лі, отже у відповідному базисі її координати цілі, як

і координати після редукції. У випадку окремої орбіти групи Вейля точки λ її координати є довільними дійсними числами.

Правило галуження для пари $W(A_n) \to W(L)$, де L є максимальною редуктивною підалгеброю A_n — це лінійне перетворення між Евклідовими просторами $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, де m це ранг підалгебри L. На відміну від перетворень окремих точок орбіти (які залежать від вибору базису), правила галуження є єдиними. Нижче побудуємо лінійні перетворення у вигляді $n \times m$ матриць проєкції. Вибір певних базисів дозволяє отримати цілі матричні елементи для усіх матриць проєкції. В усіх випадках дотримуємось нумерації та позначень Динкіна для коренів, ваг та діаграм.

Метод дослідження наступний. Розглянемо пару алгебр Лі $L \supset L'$ рангів n та m відповідно, де L є простою, а L' — максимальною редуктивною. Задача редукції орбіти для пари $W(L) \supset W(L')$ вважається розв'язною, коли побудовано $n \times m$ матрицю P, з такою властивістю, що будь-яка орбіта з $W(L)$ проєктується за допомогою P в точки відповідних орбіт $W(L')$. Обчислення правила галуження для певної орбіти зводиться до застосування P до точок орбіти та сортування спроєктованих точок на орбіти $W(L')$.

Задача обчислення точок орбіти групи Вейля була детально розглянута напочатку розділу в термінах дзеркальних відображень, додаткові дані обчислено та наведено також у роботах [20, 54].

Орбіта групи Вейля однопараметричної групи Лі U_1 тривіальна і складається лише з тотожного елемента. Незвідні зображення A_1 всі одновимірні, відповідно орбіти $W(A_1)$ складаються з однієї точки і нумеруються цілими числами. Символ (k) може позначати орбіту $\{k, -k\}$ алгебри A_1 або U_1-орбіту точки $\{k\}$, що саме — зазвичай зрозуміло з контексту. Наприклад, орбіта $(p)(q)$, де $p \in \mathbb{Z}^{>0}$, $q \in \mathbb{Z}$, групи Вейля $W(A_1 \times A_1)$ складається з двох елементів $\{(p)(q), (-p)(q)\}$.

Орбіти групи Вейля $W(A_n)$ точки $(q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, q_n)$ та точки $(q_n, q_{n-1}, \ldots, q_2, q_1)$, $q_j \geq 0$ для усіх j будемо називати *контраградієнтни-*

ми. Правила галуження контраградієнтних орбіт тісно пов'язані, оскільки ці орбіти або співпадають, або можуть бути зведені одна до одної заміною компонент домінантних ваг $q_k \leftrightarrow q_{n-k}$. Будемо розглядати лише одного представника з контраградієнтної пари.

Орбіти групи Вейля $W(A_n)$ мають наступну симетрію: для кожної точки орбіти $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, точка $(-a_n, -a_{n-1}, \ldots, -a_2, -a_1)$ також належить цій орбіті.

Відомо, що фундаментальні зображення (тобто зображення зі старшою вагою $\omega_j,\ j = 1, ..., n$) мають вагові системи, що складаються лише з однієї орбіти групи Вейля W_{ω_j}. Тому правила галужень для фундаментальних зображень співпадають з розкладами (галуженнями) орбіт.

Кількість точок у орбіті групи Вейля, що промаркована єдиною домінінтною вагою $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, визначається додатніми a_j. У теорії зображень застосовуються обмеження $a_j \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$. Тут будемо розглядати більш загальний випадок, вимагаючи лише $a_j \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. Якщо усі a_j строго додатні, то орбіта $W(A_n)$ містить $(n+1)!$ точок.

Для спрощення позначень у подальшому використовуватимемо лише символи для алгебр і опускатимемо символи їх груп Вейля, тобто вживатимемо 'орбіта A_k' замість 'орбіта $W(A_k)$'.

Матриця проєкції P для заданої пари алгебр Лі $L \supset L'$ обчислюється виходячи одного відомого правила галуження. Класифікація підалгебр, по суті, є доведенням правила галуження. Зазвичай правило галуження задано для зображення найменшої розмірності, після чого матриця будується використовуючи вагові системи наявних зображень.

Спочатку впорядкуємо у лексикографічному порядку ваги L та L', після чого встановлюємо відповідність один-до-одного між впорядкованими вагами з обох боків. Матриця отримується з умови, що кожна вага з L повинна перейти у відповідну їй вагу з L'.

Приклад 3.12. Розглянемо випадок $A_3 \supset C_2$. Найменша орбіта A_3 містить чотири точки. Найменша орбіта C_2 також містить чотири точки.

Точніше існує дві 4-точкові орбіти A_3 та дві такі орбіти C_2. Кожна з двох орбіт A_3 може бути використана для побудови матриці проєкції. Дві орбіти C_2 з домінантними вагами $(1,0)$ та $(0,1)$ — різні, оскільки пов'язані з простими коренями різної довжини. Візьмемо A_3-орбіту домінантної точки $(1,0,0)$ та спроєктуємо її на C_2-орбіту точки $(1,0)$

$$(1,0,0)\mapsto(1,0),\qquad (-1,1,0)\mapsto(-1,1),$$
$$(0,-1,1)\mapsto(1,-1),\qquad (0,0,-1)\mapsto(-1,0).$$

Запишемо точки як стовпці матриці, тоді матриця проєкції будується з перших трьох точок. Обчислюючи по одному стовпчику отримаємо

$$\left(\begin{smallmatrix}1&*&*\\0&*&*\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right),\qquad \left(\begin{smallmatrix}1&0&*\\0&1&*\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right),\qquad \left(\begin{smallmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right).$$

Зірочками позначили елементи матриці, які ще не обчислено. Матриця $P=\left(\begin{smallmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{smallmatrix}\right)$ автоматично перетворює четверту точку $(0,0,-1)$ з орбіти групи Вейля A_3 так як потрібно. Ця матриця може бути використана для проєкції будь-якої A_3 орбіти.

Правила галуження для орбіт однакових розмірностей. Усі орбіти групи $W(A_n)$ — n-вимірні за винятком тривіальної одноточкової орбіти $\lambda=0$. Має місце редукція до орбіт тієї ж розмірності коли редукована орбіта має симетрію $W(A_r\times A_s\times U_1)$, де $r+s+1=n$. Очевидно, що слід розглядати лише випадки $r\geq s$. З геометричної точки зору, точки орбіти не переміщуються, а лише перенумеровуються відповідно до координат заданих в стандартному базисі підгрупи.

У цьому параграфі спочатку наведемо випадки найнижчої розмірності, частково з метою ілюстрації, а частково через те, що вони найчастіше використовуються у фізичних застосуваннях. А наприкінці розглянемо нескінченні серії випадків $1\leq n<\infty$ для усіх можливих значень рангу n: $W(A_n)\to W(A_{n-k-1}\times A_k\times U_1)$, $0\leq k\leq[\frac{n-1}{2}]$, де $[\frac{n-1}{2}]$ ціла частина від $\frac{n-1}{2}$.

Правила галуження орбіт для $A_n\supset A_{n-1}\times U_1$. Почнемо розгляд з випадку $A_1\supset U_1$.

Група Вейля алгебри A_1 має два елементи, а група U_1 — лише тотожне перетворення. Орбіта $\{p, -p\}$ алгебри A_1 редукується до двох орбіт U_1:

$$(p) \supset (p)+(-p), \qquad p \in \mathbb{R}^{>0}.$$

Редукція виконується застосуванням 1×1 матриці проєкції $P = (1)$ до кожного елемента A_1-орбіти.

Випадок $A_2 \supset A_1 \times U_1$:

Цей випадок часто використовується у ядерній фізиці та фізиці частинок. У термінах компактних груп Лі це $\mathrm{SU}(3) \supset U(2) = \mathrm{SU}(2) \times U(1)$. Редукція виконується застосуванням до кожного елементу з A_2-орбіти матриці проєкції $\mathrm{P} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, та подальшим перегрупуванням результату у орбіти $A_1 \times U_1$. Правила галуження для трьох типів A_2-орбіт:

$$\begin{aligned}
&(p, 0) \supset (p)(p)+(0)(-2p),\\
&(0, q) \supset (q)(-q)+(0)(2q),\\
&(p, q) \supset (p)(p+2q)+(p+q)(p-q)+(q)(-2p-q), \quad \text{де } p, q \in \mathbb{R}^{>0}.
\end{aligned}$$

Випадок $A_3 \supset A_2 \times U_1$:

Редукція виконується застосуванням до кожного елементу з A_3-орбіти матриці проєкції

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

та подальшим перегрупуванням результату у орбіти $A_2 \times U_1$. Для усіх семи типів A_3-орбіт отримали правила галуження:

$$\begin{aligned}
&(p, 0, 0) \supset (p, 0)(p)+(0, 0)(-3p),\\
&(0, q, 0) \supset (0, q)(2q)+(q, 0)(-2q),\\
&(0, 0, r) \supset (0, 0)(3r)+(0, r)(-r),\\
&(p, q, 0) \supset (p, q)(p+2q)+(p+q, 0)(p-2q)+(q, 0)(-3p-2q),\\
&(p, 0, r) \supset (p, 0)(p+3r)+(p, r)(p-r)+(0, r)(-3p-r),\\
&(0, q, r) \supset (0, q)(2q+3r)+(0, q+r)(2q-r)+(q, r)(-2q-r),
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$(p,q,r) \supset (p,q)(p{+}2q{+}3r){+}(p,q{+}r)(p{+}2q{-}r) \\ {+}(p{+}q,r)(p{-}2q{-}r){+}(q,r)(-3p{-}2q{-}r),$$

де $p,q,r \in \mathbb{R}^{>0}$.

Приклад 3.13. Проілюструємо обчислення правил галуження на прикладі A_3-орбіти точки $(2,0,1)$, що складається з 12 точок. Запишемо координати точок орбіти у вигляді вектор-стовпчиків:

$$\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}. \tag{3.37}$$

Домножаючи кожну з точок (3.37) на матрицю проєкції (3.35), ми отримаємо точки $A_2 \times U_1$-орбіти. У отриманих точках перші дві координати належать A_2-орбіті, а третя — U_1-орбіті. Залишається розсортувати отримані точки на окремі орбіти (на практиці для цього досить знайти представників з конуса домінантних ваг).

Випадок $A_n \supset A_{n-1} \times U_1, \quad n \geq 2$:

Вищенаведені випадки включаються у даний. Матриця проєкції:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n{-}2 & n{-}1 & n \end{pmatrix}.$$

Випишемо кілька правил галуження для цього загального випадку:

$$(p,0,0,\ldots,0) \supset (p,0,0,\ldots,0)(p){+}(0,\ldots,0)(-np),$$
$$(0,q,0,\ldots,0) \supset (0,q,0,\ldots,0)(2q){+}(q,0,0,\ldots,0)(-(n-1)q),$$
$$(p,0,\ldots,0,r) \supset (p,0,0,\ldots,0)(p{+}nr){+}(p,0,0,\ldots,0,r)(p-r) \\ {+}(0,0,\ldots,0,r)(-np-r).$$

Зауважимо, що тут та далі $p,q,r \in \mathbb{R}^{>0}$.

Правила галуження орбіт для $A_n \supset A_{n-k-1} \times A_k \times U_1$. Усі випадки, що вже було розглянуто, можна включити в даний випадок за

умови k = 0. Розглянемо детальніше алгебри з загальним рангом $n \geq 3$ та $1 \leq\ k \leq\ [\frac{n-1}{2}]$.

Випадок $A_3 \supset A_1 \times A_1 \times U_1$:

Редукція виконується застосуванням до кожного елементу з A_3-орбіти матриці проєкції $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, та подальшим перегрупуванням результату у орбіти $A_1 \times A_1 \times U_1$.

Для всіх типів A_3-орбіт, маємо:

$$
\begin{aligned}
&(p,0,0) \supset (p)(0)(p)+(0)(p)(-p),\\
&(0,q,0) \supset (0)(0)(2q)+(0)(0)(-2q)+(q)(q)(0),\\
&(0,0,r) \supset (0)(r)(r)+(r)(0)(-r),\\
&(p,q,0) \supset (p)(0)(p+2q)+(p+q)(q)(p)+(q)(p+q)(-p)+(0)(p)(-p-2q),\\
&(p,0,r) \supset (p)(r)(p+r)+(p+r)(0)(p-r)+(0)(p+r)(r-p)\\
&\qquad\quad +(r)(p)(-p-r),\\
&(0,q,r) \supset (0)(r)(2q+r)+(q)(q+r)(r)+(q+r)(q)(-r)+(r)(0)(-2q-r),\\
&(p,q,r) \supset (p)(r)(p+2q+r)+(p+q)(r+q)(p+r)+(p+q+r)(q)(p-r)\\
&\qquad\quad +(q)(p+q+r)(r-p)+(q+r)(p+q)(-p-r)+(r)(p)(-p-2q-r).
\end{aligned}
$$

Випадок $A_4 \supset A_2 \times A_1 \times U_1$:

Цей випадок часто використовується у фізиці частинок в термінах компактних груп Лі $\mathrm{SU}(5) \supset \mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2) \times U(1)$. Редукція виконується застосуванням до кожного елементу з A_4-орбіти матриці проєкції

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

та подальшим перегрупуванням результату у орбіти $A_2 \times A_1 \times U_1$.

Наведемо правила галуження для орбіт групи Вейля алгебри Лі A_4 трьох наступних точок:

$$
\begin{aligned}
&(p,0,0,0) \supset (p,0)(0)(2p)+(0,0)(p)(-3p),\\
&(0,q,0,0) \supset (0,q)(0)(4q)+(q,0)(q)(-q)+(0,0)(0)(-6q),
\end{aligned}
$$

$$(p,0,0,r) \supset (p,0)(r)(2p{+}3r){+}(p,r)(0)(2p-2r){+}$$
$$+(0,0)(p{+}r)(3r-3p){+}(0,r)(p)(-3p-2r).$$

Випадок $A_n \supset A_{n-2} \times A_1 \times U_1$, для непарних $n \geq 3$:

Матриця проєкції

$$P = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&\cdots&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&\cdots&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&\cdots&0&0&0&0 \\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots \\ 0&0&0&0&\cdots&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&\cdots&0&0&0&1 \\ 1&2&3&4&\cdots&n{-}3&n{-}2&n{-}1&\frac{n-1}{2} \end{pmatrix},$$

деякі з правил галуження:

$$(p,0,0,\ldots,0) \supset (p,0,\ldots,0)(0)(p){+}(0,\ldots,0)(p)(-\tfrac{n-1}{2}p),$$
$$(0,q,0,\ldots,0) \supset (0,q,0,\ldots,0)(0)(2q){+}(q,0,0,\ldots,0)(q)(-\tfrac{n-3}{2}q)$$
$$+(0,\ldots,0)(0)((1{-}n)q),$$
$$(p,0,\ldots,0,r) \supset (p,0,\ldots,0)(r)(p{+}\tfrac{n-1}{2}r){+}(p,0,\ldots,0,r)(0)(p{-}r)$$
$$+(0,\ldots,0)(p{+}r)((r{-}p)^{\frac{n-1}{2}})$$
$$+(0,\ldots,0,r)(p)(-r{-}\tfrac{n-1}{2}p).$$

Випадок $A_n \supset A_{n-2} \times A_1 \times U_1$, для парних $n \geq 4$:

Матриця проєкції

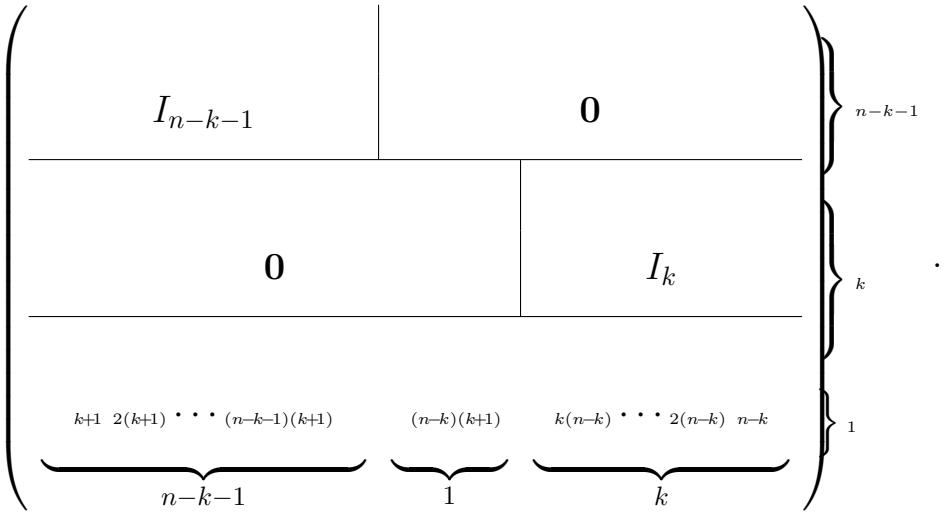
$$P = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&\cdots&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&\cdots&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&\cdots&0&0&0&0 \\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots \\ 0&0&0&0&\cdots&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&\cdots&0&0&0&1 \\ 2&4&6&8&\cdots&2(n{-}3)&2(n{-}2)&2(n{-}1)&n{-}1 \end{pmatrix},$$

деякі з правил галуження:

$$(p,0,0,\ldots,0) \supset (p,0,\ldots,0)(0)(2p){+}(0,\ldots,0)(p)((1-n)p),$$
$$(0,q,0,\ldots,0) \supset (0,q,0,\ldots,0)(0)(4q){+}(q,0,\ldots,0)(q)((3-n)q)$$
$$+(0,\ldots,0)(0)(2(1-n)q),$$
$$(p,0,\ldots,0,r) \supset (p,0,\ldots,0)(r)(2p{+}(n-1)r)$$
$$+(p,0,\ldots,0,r)(0)(2(p-r))$$

$$+(0,\dots,0)(p{+}r)((n-1)(r-p))$$
$$+(0,\dots,0,r)(p)(-2r-(n-1)p).$$

Загальний випадок $A_n \supset A_{n-k-1}\times A_k\times U_1$: $1\le k\le [\frac{n-1}{2}]$:
Матриця проєкції у загальному випадку



Тут і надалі I_k позначає $k\times k$ одиничну матрицю, а $\mathbf{0}$ позначає нульову матрицю.

Деякі з правил галуження:

$$(p,0,0,\dots,0)\supset(p,0,\dots,0)(0,\dots,0)((k{+}1)p)$$
$$+(0,\dots,0)(p,0,\dots,0)((k{-}n)p),$$
$$(p,0,\dots,0,r)\supset(p,0,\dots,0)(0,\dots,0,r)((k{+}1)p{+}(n-k)r)$$
$$+(p,0,\dots,0,r)(0,\dots,0)((k{+}1)(p-r))$$
$$+(0,\dots,0)(p,0,\dots,0,r)((n-k)(r-p))$$
$$+(0,\dots,0,r)(p,0,\dots,0)((-k-1)r{+}(k-n)p).$$

Правила галуження для максимальних напівпростих підалгебр алгебри A_n. Прості алгебри Лі A_n не містять напівпростих підалгебр того самого рангу n, тому усі правила галуження орбіт, що розглядатимуться далі, мають ранг строго менший ніж n. Поступово збільшуватимемо ранг до випадку $n=8$ та опишемо нескінченні серії, що

стосуються груп Вейля класичних алгебр Лі, а саме $W(A_{2n}) \supset W(B_n)$, $n \geq 3$, $W(A_{2n-1}) \supset W(C_n)$, $n \geq 2$, та $W(A_{2n-1}) \supset W(D_n)$, $n \geq 4$.

З цих трьох серій окремо розглянемо випадки для низьких рангів. Випадки коли підалгебра є максимальною серед напівпростих але не є максимальною серед редуктивних — виключено з розгляду. Матриці проєкції для останніх випадків будуються відкиданням останнього рядка відповідних квадратних матриць, що щойно було наведено. Крапки у матрицях проєкцій позначають нульові елементи.

Випадок рангу 2:

Існує лише один такий випадок, а саме $A_2 \supset A_1$, який часто задається в термінах груп Лі $\mathrm{SU}(3) \supset \mathrm{O}(3)$, коли групи компактні, або $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C}) \supset \mathrm{O}(3,\mathbb{C})$, коли групи комплексні. Орбіти їхніх груп Вейля співпадають. Матриця проєкції $P = (2\ 2)$, таким чином, маємо редукції:

$$(p,q) \supset (2p{+}2q){+}(2p){+}(2q),$$
$$(p,0) \supset (2p){+}(0),$$
$$(0,q) \supset (2q){+}(0).$$

Випадок рангу 3:

Є лише два випадки рангу три, наведемо матриці проєкцій:

$$A_3 \supset C_2: \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \end{smallmatrix}\right), \qquad A_3 \supset A_1 \times A_1: \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & \cdot & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Приклад 3.14. Розглянемо дванадцятиточкову орбіту, наведену у (3.37) та застосуємо до неї матрицю проєкції $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \end{smallmatrix}\right)$. Дві домінантні точки знаходимо записавши спроєктовані точки у вигляді вектора-рядка: $(3,0)$ та $(1,1)$. Отримаємо правило для $A_3{\supset}C_2$: $(2,0,1){\supset}(3,0){+}(1,1)$. Орбіта $(3,0)$ містить 4 точки, а орбіта $(1,1)$ містить 8 точок.

З точки зору геометрії, орбіта $(2,0,1)$ – це тетраедр з чотирма зрізаними вершинами, а плоска фігура після проєкції — об'єднання квадрата $(3,0)$ та восьмикутника $(1,1)$.

Між підалгеброю $A_1 \times A_1$ та підалгеброю $A_1 \times A_1 \times U_1$ існують суттєві відмінності, розглянемо їх. Використовуючи відповідні матриці проєкцій

отримаємо різні редукції для орбіти тієї самої точки

$$(1,0,0) \supset (1)(1), \quad \text{та} \quad (1,0,0) \supset (1)(0)(1)+(0)(1)(-1).$$

Знехтувавши внеском U_1 у друге правило галуження, отримаємо відмінності між чотирма точками орбіти після реедукції у двох випадках:

$$(1,0,0) \supset \{(1)(1),\ (-1)(1),\ (1)(-1),\ (-1)(-1)\},$$
$$(1,0,0) \supset \{(1)(0),\ (-1)(0),\ (0)(1),\ (0)(-1)\}.$$

Очевидно, що існує підалгебра A_2 в A_3, не зважаючи на те, що вона максимальна серед напівпростих підалгебр A_3, вона не є максимальною серед редуктивних підалгебр і співпадає з вже розглянутим випадком підалгебри $A_2 \times U_1$.

Випадок рангу 4:

Існує лише одна проста та максимальна підалгебра A_4 серед редуктивних:

$$A_4 \supset C_2: \quad \left(\begin{smallmatrix} \cdot & 2 & 2 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Дві інші напівпрості підалгебри рангу 3, а саме A_3 та $A_1 \times A_2$ розширяються за допомогою U_1 до максимальних редуктивних підалгебр і є частинними випадками редукцій розглянутих вище.

Деякі правила галуження:

$$(p,0,0,0) \supset (0,p)+(0,0),$$
$$(p,0,0,r) \supset (0,p+r)+(0,p)+(0,r)+(2r,p-r), \quad p > r,$$
$$(p,0,0,p) \supset (0,2p)+2(0,p)+2(2p,0).$$

Випадок рангу 5:

У цьому випадку існує чотири максимальні підалгебри. Алгебри A_3 та D_3 співпадають, тому $A_5 \supset A_3$ еквівалентно $A_5 \supset D_3$, з тим уточненням, що координати (a,b,c) алгебри A_3 відповідають координатам (b,a,c) алгебри D_3.

$$\Pr(A_5 \supset A_3) = \left(\begin{smallmatrix} \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & 2 & 1 & \cdot \end{smallmatrix}\right), \qquad \Pr(A_5 \supset C_3) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{smallmatrix}\right),$$

$$\Pr(A_5 \supset A_2) = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}, \qquad \Pr(A_5 \supset A_1 \times A_2) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зокрема правила галуження для 6-точкової A_5-орбіти наступні:

$$(p,0,0,0,0) \supset \begin{cases} (0,p,0) & \text{для} \quad A_3, \\ (p,0,0) & \text{для} \quad C_3, \\ (0,2p) & \text{для} \quad C_2, \\ (p)(p,0) & \text{для} \quad A_1 \times A_2, \end{cases} \qquad p \in \mathbb{R}^{>0}. \tag{3.38}$$

Випадок рангу 6:

Цей єдиний випадок включається у загальний випадок $A_{2n} \supset B_n$:

$$\Pr(A_6 \supset B_3) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$(p,0,0,0,0,0) \supset (p,0,0)+(0,0,0),$$

$$(p,0,0,0,0,r) \supset (p+r,0,0)+(p,0,0)+(r,0,0)+(p-r,r,0), \quad p > r,$$

$$(p,0,0,0,0,p) \supset (2p,0,0)+2(p,0,0)+2(0,p,0).$$

Випадок рангу 7:

Перші два з трьох можливих випадків також включаються у загальні формули, що будуть наведені нижче:

$$\Pr(A_7 \supset C_4) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \qquad \Pr(A_7 \supset D_4) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 2 & 1 & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\Pr(A_7 \supset A_1 \times A_3) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 2 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зокрема, для $A_7 \supset A_1 \times A_3$, при умові $p > r$, маємо:

$$(p,0,0,0,0,0,0) \supset (p)(p,0,0),$$

$$(p,0,0,0,0,0,r) \supset (p+r)(p,0,r)+(p-r)(p,0,r)+(p+r)(p-r,0,0),$$

$$(p,0,0,0,0,0,p) \supset (2p)(p,0,p)+2(0)(p,0,p)+4(2p)(0,0,0).$$

Випадок рангу 8:

Один з трьох випадків включається до формули (3.39), а два інші мають вигляд:

$$\Pr(A_8 \supset B_4)= \begin{pmatrix} 1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1\\ \cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot\\ \cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&2&2&\cdot&\cdot&\cdot \end{pmatrix}, \quad \Pr(A_8 \supset A_2\times A_2)= \begin{pmatrix} 1&\cdot&1&1&\cdot&1&1&\cdot\\ \cdot&1&1&\cdot&1&1&\cdot&1\\ 1&2&1&2&1&1&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&1&1&2&1&2&1 \end{pmatrix}.$$

Приклади проявил галуження для другого випадку:

$$(p,0,0,0,0,0,0,0)\supset(p,0)(p,0),$$
$$(p,0,0,0,0,0,0,r)\supset(p,r)(p,r)+(p-r,0)(p,r)+(p,r)(p-r,0),\quad p>r,$$
$$(p,0,0,0,0,0,0,p)\supset(p,p)(p,p)+3(0,0)(p,p)+3(p,p)(0,0).$$

Три випадки загального рангу:

Нижче усі випадки наведено з прикладами галужень для орбіт точок $(p,0,\dots,0)$ та $(p,0,\dots,0,r)$, де параметри p, r є строго додатніми цілими числами, також припускаємо, що $p>r$. Якщо $p<r$, то параметриp та rу правилах галуження слід поміняти місцями. Випадок $p=r$ зазвичай вимагає окремого розгляду.

$A_{2n}\supset B_n,\quad n\ge 3$

$$P=\left(\begin{array}{c|c|c} I_{n-1} & \mathbf{0} & E_{n-1}\\ \hline 0\cdots 0 & 2\ 2 & 0\cdots 0 \end{array}\right). \tag{3.39}$$

Тут та надалі E_k позначає $k\times k$ матрицю з одиницями на кодіагоналі.

$$(p,0,0,\dots,0)\supset(p,0,\dots,0)+(0,\dots,0),$$
$$(p,0,\dots,0,r)\supset(p+r,0,\dots,0)+(p,0,\dots,0)+(r,0,\dots,0)$$
$$+(p-r,r,0,\dots,0),$$
$$(p,0,\dots,0,p)\supset(2p,0,\dots,0)+2(p,0,\dots,0)+2(0,p,0,\dots,0).$$

$A_{2n-1}\supset C_n,\quad n\ge 2$

$$P=\left(\begin{array}{c|c|c} I_{n-1} & \mathbf{0} & E_{n-1}\\ \hline 0\cdots 0 & 1 & 0\cdots 0 \end{array}\right). \tag{3.40}$$

$$(p,0,0,\ldots,0) \supset (p,0,\ldots,0),$$
$$(p,0,\ldots,0,r) \supset (p{+}r,0,\ldots,0){+}(p-r,r,0,\ldots,0),$$
$$(p,0,\ldots,0,p) \supset (2p,0,\ldots,0){+}2(0,p,0,\ldots,0).$$

$A_{2n-1} \supset D_n, \quad n \geq 4$

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{n-1} & \mathbf{0} & E_{n-1} \\ \hline 0\cdots 0\ 1 & 2 & 1\ 0\cdots 0 \end{array}\right). \tag{3.41}$$

$$(p,0,0,\ldots,0) \supset (p,0,\ldots,0),$$
$$(p,0,\ldots,0,r) \supset (p{+}r,0,\ldots,0){+}(p-r,r,0,\ldots,0),$$
$$(p,0,\ldots,0,p) \supset (2p,0,\ldots,0){+}2(0,p,0,\ldots,0).$$

У випадку правил галуження в просторах однієї розмірності матриці проєкції є оборотними та можуть бути використані у зворотному напрямку. Обернена матриця трансформує орбіту $W(L')$ у лінійну комбінацію орбіт $W(L)$, де $L' \subset L$. Лінійна комбінація в загальному випадку матиме цілі коефіцієнти обох знаків. Не відомо ніяких прикладних чи фізичних застосувань таких 'правил галуження', хоча вони використовуються у кільцях зображень Гротендіка.

Ще одне можливе застосування отриманих правил галуження — це встановлення зв'язку між парою максимальних підалгебр L' та L'' тієї самої алгебри Лі L за допомогою композиції матриць проєкції $P(L \to L')$ та $P(L \to L'')$

$$P(L' \to L'') = P(L \to L'')P^{-1}(L \to L').$$

3.3. Ортогональні поліноми та орбіт-функції

Більшість спеціальних функцій та ортогональних поліномів означених протягом останніх десятиліть пов'язані з групами Лі або їх узагальненнями. Зокрема спеціальні функції математичної фізики є матричними

елементами зображень алгебр Лі [143], також нещодавні узагальнення класичних гіпергеометричних ортогональних поліномів на випадок багатьох змінних базуються на простих групах Лі [31, 55, 76, 83–85, 122, 142].

У цьому параграфі розглядаємо задачу побудови ортогональних поліномів n змінних, що пов'язані з орбіт-функціями та простими групами Лі рангу n. Оскільки використовуємо функції симетричні або антисиметричні відносно дії групи Вейля, то отримані поліноми природнім чином виникатимуть в усіх поліномах пов'язаних з кореневими та ваговими ґратками.

На відміну від ортогоналізації Грама–Шмідта мономіального базсу відносно міри Хаара [55, 85, 122] та на відміну від визначникових конструкцій поліномів [77, 78, 141] використовуємо розклад добутків орбіт груп Вейля та основні властивості характерів незвідних скінченновимірних зображень. Такий теоретико-груповий підхід дає нам ряд суттєвих переваг та спрощень:

- Область ортогональності $F \subset \mathbb{R}^n$ відома для усіх груп G та співпадає для характерів і орбіт-функцій.
- Ортогональність поліномів є наслідком ортогональності орбіт-функцій.
- Побудова сіток та задача дискретизації поліномів зводиться до вже розв'язаних на початку цього розділу задач дискретизації орбіт-функцій.
- Поліноми будуються в явному вигляді, при цьому надзвичайно корисними є класи конґруентності характерів та орбіт-функцій, які обчислюються виходячи з центру відповідної простої алгебри Лі.
- Поліноми отримують корисні властивості орбіт-функцій, зокрема вони є власними функціями певних диференціальних операторів.

Нижче пропонуємо три алгебраїчні методи побудови поліномів з C- або S-функцій.

Перший метод полягає у підстановці на місце кожної експоненційної компоненти монома з відповідною кількістю змінних (3.46). У одновимірному випадку отримаємо поліноми Чебишева записані у лоранівській формі з симетрично розташованими додатними та від'ємними степенями змінної; у випадку алгебри A_2 наш результат співпадає з результатом Курнвіндера [75].

Другий метод — 'тригонометричний', він базується на тому факті, що для багатьох простих алгебр Лі (3.50) орбіт-функції складаються з пар експонент, які у сумі породжують синус чи косинус. Зауважимо, що цей метод не може застосовуватись до алгебри A_n, якщо $n > 1$.

Третій метод подібний до методу Вейля, що застосовується для побудови скінченновимірних зображень з фундаментальних зображень. Тобто C-поліноми мають n змінних, які є C-функціями, по одній для кожної фундаментальної ваги ω_j. Цей метод призводить до порівняно простої рекурсивної конструкції, що дозволяє представити будь-яку C-функцію у вигляді не лоранівського полінома.

Окрім загальних методів, у цьому параграфі виведено рекурсії, що дозволяють будувати поліноми та отримано значну кількість допоміжного інструментарію та даних, таких як класи конґруентності та розмірності незвідних зображень.

3.3.1. Характер зображення та орбіт-функції. Нехай Евклідів простір $\mathbb{R}^n$ натягнуто на прості корені деякої простої групи G. Вважаємо, що орбіт-функції визначено так, як у параграфі 3.2 та $\lambda, \mu \in P$ задано у ω-базисі, а $x \in \mathbb{R}^n$ задано у $\check{\alpha}$-базисі.

Кількість експоненційних доданків у S-функції S_λ завжди співпадає з порядком групи Вейля. Для C-функції C_λ кількість експоненційних доданків співпадає з порядком W поділеним на стабілізатор точки λ у W, зокрема $C_{(0,0,\ldots,0)} = 1$ для будь-якої G. У деяких випадках зручно відмасштабувати C_λ стабілізатором непороджуючої точки λ (для цього су-

мування відносно елементів W_λ в означенні C-функції замінюється на сумування по всіх елементах W, як у параграфі 3.1).

Для усіх простих груп Лі G існує зв'язок між C- та S-функціями у вигладі формули характера Вейля: характер $\chi_\lambda(x)$ зображення групи G з старшою вагою λ має вигляд:

$$\chi_\lambda(x) = \frac{S_{\lambda+\rho}(x)}{S_\rho(x)} = \sum_\mu m_\mu^\lambda C_\mu(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda, \mu \in P^+. \tag{3.42}$$

Тут ρ — це півсума додатніх коренів G, яка відома для усіх груп G і задається рівнянням $\rho = \sum_{k=1}^{n} \omega_k$. Число m_μ^λ — це натуральне число, що називається числом Костки (кратність домінантної ваги μ у ваговій системі незвідного зображення зі старшою вагою λ). Обчислення чисел Костки виконується за стандартними алгоритмами теорії зображень [97]. Кратність старшого доданка у (3.42) завжди одиниця, тобто $m_\lambda^\lambda = 1$. Ваги $\lambda \in P^+$ можна впорядкувати так, що матриця (m_μ^λ) буде верхньо-трикутною з одиницями на діагоналі (див. таблиці в роботі [20]), тоді обернена матриця дозволяє записати $C_\mu(x)$ як лінійну комбінацію незвідних характерів з цілими коефіцієнтами. Нехай $x \in \mathbb{R}^n$ і $\lambda, \mu \in P^+$, тоді

$$C_\mu(x) = \sum_\lambda \tilde{m}_\mu^\lambda \chi_\lambda(x) = S_\rho^{-1} \sum_\lambda \tilde{m}_\mu^\lambda S_{\lambda+\rho}, \tag{3.43}$$

де $(\tilde{m}_\mu^\lambda)$ — елементи трикутної матриці, оберненої до (m_μ^λ).

При обчисленнях перевірка істиності рівностей (3.42) та (3.43) використовує той факт, що вони виконуються для розмірностей зображень та розмірностей орбіт.

Приклад 3.15. Розглянемо поліноми C та χ алгебри Лі G_2. Значення m_μ^λ та $(m_\mu^\lambda)^{-1}$ для 5 найменших домінантних ваг G_2 наведено у таблицях 3.4. Ці таблиці та формули (3.42), (3.43) дозволяють записати C-функції через характери і навпаки, наприклад з останнього стовпчика першої таблиці маємо:

$$\chi_{(1,1)} = 4C_{(0,0)} + 4C_{(0,1)} + 2C_{(1,0)} + 2C_{(0,2)} + C_{(1,1)}. \tag{3.44}$$

m_μ^λ	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,2)	(1,1)
(0,0)	1	1	2	3	4
(0,1)		1	1	2	4
(1,0)			1	1	2
(0,2)				1	2
(1,1)					1
dim	1	7	14	27	64

$\left(m_\mu^\lambda\right)^{-1}$	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,2)	(1,1)	$\lvert W_\mu\rvert$
(0,0)	1	−1	−1	0	2	1
(0,1)		1	−1	−1	0	6
(1,0)			1	−1	0	6
(0,2)				1	−2	6
(1,1)					1	12
dim	1	7	14	27	64	

Табл. 3.4. Числа Костки m_μ^λ та $(m_\mu^\lambda)^{-1}$ для 5 найнижчих домінантних ваг алгебри G_2. У першому рядку наведено λ, у першому стовпчику наведено μ. Останній стовпчик містить розмірність групи Вейля домінантної ваги μ. У останньому рядку наведено розмірності незвідних зображень G_2 зі старшою вагою λ.

Аналогічно з останнього стовпчика другої таблиці:

$$C_{(1,1)} = 2\chi_{(0,0)} - 2\chi_{(0,2)} + \chi_{(1,1)}. \tag{3.45}$$

3.3.2. Ортогональні поліноми побудовані за орбіт-функціями. Будемо розглядати заміни змінних

$$\mathfrak{T}\colon\ \mathbb{R}^n \ \longrightarrow\ \mathbb{C}^n; \qquad (x_1,\dots,x_n)\ \mapsto\ (u_1,\dots,u_n),$$

що перетворюють $C(x)$- та $S(x)$-функції у поліноми n змінних. Ортогональність поліномів у області $\mathfrak{F}$ випливає з ортогональності орбіт-функцій, де $\mathfrak{F}$- образ фундаментальної області F під дією перетворення $\mathfrak{T}$. Вагові функції f для обчислення скалярного добутку отримуються з вагових коефіцієнтів орбіт-функцій та Якобіана $\det^{-1}\left(\frac{D(u)}{D(x)}\right)$. Їх обчислено та наведено наприкінці параграфа для усіх поліномів двох та трьох змінних побудованих рекурентним способом.

Експоненційні підстановки. Перший метод є очевидною заміною експонент на нові змінні

$$u_j := \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x_j}, \qquad x_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1,2,\dots,n. \tag{3.46}$$

Поліноміальні доданки є добутками $\prod_{j=1}^{n} u_j^{\mu_j}$, де $\mu_j \in \mathbb{Z}$ — координати точок орбіти у відповідному базисі. Під дією цього перетворення орбіт-функції $C_\lambda(x)$ та $S_\lambda(x)$ перетворюються у поліноми Лорана n змінних u_j, де $j = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Поліноми отримані за допомогою експоненційної підстановки є комплекснозначними, допускають від'ємні степені та мають одиничні коефіцієнти для C-поліномів, та коефіцієнти 1 або -1 для S-поліномів.

Тригонометричні підстановки. Орбіти групи Вейля W багатьох (але не всіх!) простих груп Лі мають таку властивість, що дозволяє тригонометричну заміну змінних. Для цього орбіта W_λ має задовольняти умову

$$\pm\mu \in W_\lambda(L) \qquad \text{для всіх} \quad \mu \in W_\lambda(L). \tag{3.47}$$

Пара відповідних доданків у орбіт-функції може бути скомбінована таким чином:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\langle\mu,x\rangle} + \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\langle\mu,x\rangle} &= 2\cos(2\pi\langle\mu,x\rangle) \in C_\lambda(x), \\ \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\langle\mu,x\rangle} - \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\langle\mu,x\rangle} &= 2\mathrm{i}\sin(2\pi\langle\mu,x\rangle) \in S_\lambda(x), \end{aligned}$$

тоді функції $C_\lambda(x)$ та $S_\lambda(x)$ стають лінійними комбінаціями синусів та косинусів.

Введемо нові змінні для C-функцій

$$u_j := \cos 2\pi x_j, \qquad x_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.48}$$

Та нові змінні для S-функцій

$$u_j := \sin 2\pi x_j, \qquad x_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.49}$$

Використовуючи тригонометричні тотожності решта синусів та косинусів може бути виражена у вигляді поліномів через нові змінні.

Вочевидь, важливим є питання для яких простих алгебр Лі виконується умова (3.47). У теорії Лі ця інформація є відомою для зображень і,

відповідно, для орбіт групи Вейля [91], така властивість виконується для наступних алгебр Лі:

$$A_1,\ B_n\ (n \geq 3),\ C_n,\ D_{2n}\ (n \geq 2),\ E_7,\ E_8,\ F_4,\ G_2. \tag{3.50}$$

Зауважимо, що у випадку алгебри A_1, саме ця підстановка породжує поліноми Чебишева першого та другого роду.

Рекурсивний метод. Оберемо у якості нових змінних n C-функцій фундаментальних ваг:

$$u_j = u_j(x) := C_{\omega_j}(x), \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R}^n; \tag{3.51}$$

розглянемо одну додаткову змінну — найменшу з можливих S-функцій,

$$\mathbf{S} := S_\rho(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad \rho = (1, 1, \ldots, 1) = \sum_{m=1}^{n} \omega_m, \tag{3.52}$$

яку неможливо отримати за допомогою добутку інших змінних. Ця змінна не фігуруватиме у отриманих поліномах, але буде використовуватись при побудові рекурсій.

Рекурсивний метод побудови *C-поліномів* починається з розкладу добутку змінних u_j та C-функцій у суму C-поліномів. Правильний вибір послідовності добутків дозволяє отримувати все вищі і вищі степені C-поліномів.

Спочатку знаходимо *породжуючі рекурсії*, як розклад добутків $u_j C_{(a_1,a_2,\ldots,a_n)}$ для точок $a_1, a_2, \ldots, a_n$ з конуса строго домінантних ваг (тобто породжуючих точок). Після цього будується решта *додаткових* рекурсій для нижчих ваг, які необхідні, щоб розв'язати породжуючу рекурсію. Ефективний шлях знаходження розкладів добутків — це розклад добутків орбіт замість добутків орбіт-функцій. Такі задачі широко вивчались та для ряду випадків отримано явні розв'язки [54]. Зауважимо, що такі рекурсії завжди лінійні, а відповідні матриці — трикутні. Нижче обчислимо у явному вигляді рекурсії для алгебр $L = A_1,\ A_2,\ A_3,\ C_2$, і G_2, а також для B_3 і C_3.

Результатом реурсивних замін змінних є наступне твердження.

Твердження 3.16. *Будь-яка C-функція та будь-який характер χ_λ простої групи Лі G може бути представлений у вигляді полінома від C-функцій фундаментальних ваг $\omega_1, \ldots, \omega_n$, тобто у вигляді полінома у змінних $u_1, u_2, \ldots, u_n$.*

Доведення. Зафіксуємо домінантний порядок (природній частковий порядок) на ваговій ґратці:

$$\lambda \succcurlyeq \mu \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - \mu) \in Q^+,$$

де $Q^+ = \sum\limits_{\alpha \in \Delta^+} \mathbb{N}\alpha$, Δ^+-додатні корені.

Тоді будемо вважати, що

$$u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \cdots u_n^{\lambda_n} \succcurlyeq u_1^{\mu_1} u_2^{\mu_2} \cdots u_n^{\mu_n}.$$

Щойно вищевказане відношення порядку зафіксовано, можемо впорядкувати поліноми $C_\lambda(u)$, $\lambda = \lambda_1\omega_1 + \cdots + \lambda_n\omega_n$. Тоді твердження доводиться методом математичної індукції за точками вагової ґратки λ.

Базу індукції становлять додаткові рекурсії, тобто розклади добутків $u_j C_\lambda$, де λ має принаймні одну нульові координату у ω-базисі.

Оскільки λ задано у ω-базисі, а x задано у $\check{\alpha}$-базисі, то розклад добутку $u_j(x)C_\lambda(x)$ еквівалентний розкладу добутку орбіт групи Вейля $W_{\omega_j} W_\lambda$. Для кожної орбіти існує єдина точка $\lambda' \in W_\lambda$, така, що $\forall \mu \in W_\lambda$ маємо $\mu \preccurlyeq \lambda'$. Тоді дагальний вигляд рекурентного співвідношення наступний

$$u_j C_\lambda = C_{(\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots \lambda'_j + 1, \ldots, \lambda'_n)} + L(C_{\preccurlyeq \lambda'}), \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.53}$$

Тут $L(C_{\preccurlyeq \lambda'})$ — це $\mathbb{Z}$-лінійна комбінація орбіт-функцій C_μ, з $\mu \preccurlyeq \lambda'$. Формула (3.53) є кроком індукції для кожного $j = 1, 2, \ldots, n$.

Отже, довели, що C_λ є поліномом від C-функцій фундаментальних ваг $\omega_1, \ldots, \omega_n$.

Аналогічне твердження для χ_λ випливає з того факту, що характер є лінійною комбінацією певних C-функцій. □

Рекурсивна побудова *S-поліномів* починається з розкладу добутків змінних $\mathbf{S}$ та u_j у суми S-поліномів. Правильний вибір послідовності добутків дозволяє отримувати вищі степені S-поліномів. Нижче наведено приклади рекурсивної побудови S-поліномів для алгебр Лі $L = A_2,\ C_2,$ і G_2. Зі зростанням рангу алгебри Лі, рекурсивна процедура для S-поліномів суттєво ускладнюється, порівняно з процедурою для C-поліномів. Це обумовлено наявністю від'ємних доданків у S-поліномах та тим фактом, що S-функції визначені для породжуючих точок, які мають орбіти максимальних розмірностей. Проте, на противагу C-поліномам, при обчисленні розкладів добутків S-поліномів часто має місце скорочення доданків.

Існує альтернативна рекурсивна процедура, яка може бути застосована для S-поліномів. Щойно обчислено C-поліноми, їх можна використати у формулі (3.42) для знаходження S-поліномів у вигляді сум C-поліномів з додатковим множником-змінною $\mathbf{S}$.

Зауваження 3.17. На практиці використовуються поліноми $\frac{S_\lambda}{\mathbf{S}}$ замість S_λ. Це дозволяє уникнути колізії спричиненої тим фактом, що поліноми S_λ залежать від $n+1$ змінної $\mathbf{S}, u_1, \ldots, u_n$, хоча визначаються у n-вимірному Евклідовому просторі. Частка $\frac{S_\lambda}{\mathbf{S}}$ є добре визначеною, оскільки функція $\mathbf{S}(u)$ не набуває нульових значень всередині F, а на границі F обидві функції $\mathbf{S}$ та S_λ є нульовими. Іншими словами, використовуємо характери замість S-орбіт-функцій.

Зауваження 3.18. Існує два порівняно простих способи перевірки обчислених рекурсій. Перший — співпадіння кількості експоненційних доданків у правій та лівій частинах, що спричинено розмірностями орбіт групи Вейля.

Другий — співпадіння чисел конґруентності #. Характер χ_λ, зображення λ та C_λ- і S_λ-поліноми, як і всі точки орбіти групи Вейля відповідають певному класу конґруентності, що позначається числом конґруентності $\#(\lambda)$, яке є числом, що маркує клас спряженості до якого належить λ

у ґратці P відносно дії кореневої ґратки. Іншими словами, числа конґруентності $\#$ — це елементи фактор-групи P/Q. Кількість різних можливих значень $\#$ співпадає з розмірністю центра G. Під час множення орбіт числа конґруентності сумуються. Зокрема, усі C-поліноми у (3.42) мають бути з одного класу конґруентності, більш того, усі доданки розкладу добутку поліномів належать одному класу конґруентності. Прості групи Лі G_2, F_4 та E_8 мають лише один клас конґруентності.

Кількість експоненційних доданків у характері $\chi_\lambda(x)$ співпадає з розмірністю зображення старшої ваги λ, тому кількість доданків у кожному C-поліномі з (3.42) співпадає з розмірністю зображення.

Мономіальні симетричні поліноми. Орбіт-функції C_λ є певними модифікаціями *мономіальних симетричних поліномів*

$$\mathfrak{m}_\lambda(y) = \sum_{\mu\in W_\lambda} y^\mu \equiv \sum_{\mu\in W_\lambda} y_1^{\mu_1} y_2^{\mu_2}\cdots y_n^{\mu_n}, \qquad \lambda\in P^+. \tag{3.54}$$

Ця відповідність випливає з підстановки (3.46), де $y_j = u_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Для вивчення симетричних ортогональних поліномів зазвичай виконується заміна y^μ на e^μ (e^μ розглядається як функція у Евклідовому просторі $\mathrm{e}^\mu(x) = \mathrm{e}^{\langle\mu,x\rangle} = \mathrm{e}^{\mu_1x_1+\cdots+\mu_nx_n}$). За таких умов отримаємо модифіковані C-функції, які також називають *мономіальними симетричними функціями*

$$\hat{\mathfrak{m}}_\lambda(x) = \sum_{\mu\in W_\lambda} \mathrm{e}^{\langle\mu,x\rangle} = \sum_{\mu\in W_\lambda} \mathrm{e}^{\mu_1x_1+\cdots+\mu_nx_n}. \tag{3.55}$$

Функції $\hat{\mathfrak{m}}_\lambda(x)$ також є власними функціями оператора Лапласа. Зауважимо, що при виборі інтегральних ортогональних координат $m_1, m_2, \ldots, m_n$ у випадку алгебри A_n, у такий спосіб, що $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_n \geq 0$, поліноми Лорана $\mathfrak{m}_\lambda(y)$ та $\hat{\mathfrak{m}}_\lambda(x)$ перетворяться у звичайні (не лоранівські) поліноми.

Важливо, що добре відомі ортогональні поліноми з теорії спеціальних функцій — поліноми Якобі однієї змінної та поліноми Якобі багатьох змін-

них є симетричними поліномами Лорана, що визначаються у термінах $\hat{\mathfrak{m}}_\lambda$, $\lambda \in P_+$, а відповідно і у термінах C-функцій.

Симетричні поліноми Макдональда. Розглянемо симетричні поліноми Макдональда, які є квантовим аналогом поліномів Якобі та будуються з мономіальних симетричних поліномів.

Нехай A — алгебра над $\mathbb{R}$ вільної Абелової групи P, тоді група Вейля W діє на P та на A. Позначимо через A^W підалгебру W-інваріантних елементів з A, а щойно означені мономіальні симетричні функції позначимо $\hat{\mathfrak{m}}_\lambda$, — вони утворюють базис A^W.

Розглянемо деяке дійсне число q, $0 \leqslant q < 1$ та з кожним коренем α з кореневої системи R групи G проасоціюємо змінну t_α, таку що $t_\alpha = t_{w\alpha}$, $w \in W$.

Нехай $\mathbb{C}_{q,t_\alpha}$ — поле раціональних функцій від q та t_α. Позначимо $\mathbb{C}_{q,t_\alpha}[\mathrm{e}^{x_1}, \dots, \mathrm{e}^{x_n}]$ набір поліномів Лорана від функцій $\mathrm{e}^{x_1}, \mathrm{e}^{x_2}, \dots, \mathrm{e}^{x_n}$ з коефіцієнтами з $\mathbb{C}(q, t_\alpha)$.

Сталий доданок a_0 функції $\sum\limits_\lambda a_\lambda \mathrm{e}^\lambda$ позначимо як $[\sum\limits_\lambda a_\lambda \mathrm{e}^\lambda]_0$.

Означимо скалярний добуток для $f, g \in \mathbb{C}_{q,t_\alpha}[\mathrm{e}^{x_1}, \dots, \mathrm{e}^{x_n}]$

$$\langle f, g\rangle_{q,p_\alpha} = |W|^{-1}[f\bar{g}\boldsymbol{\Delta}]_0, \quad \text{де} \quad \boldsymbol{\Delta} = \prod_{\alpha\in R}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1-q^{2i}\mathrm{e}^\alpha}{1-t_\alpha^2 q^{2i}\mathrm{e}^\alpha},$$

тут $\bar{g}$ означає лінійну інволюцію, визначену рівністю $\overline{\mathrm{e}^\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda}$.

І. Макдональдом [85] доведено теорему, що однозначно визначає поліноми Макдональда P_λ, $\lambda \in P^+$, а саме:

Існує єдиний набір поліномів $P_\lambda \in \mathbb{C}_{q,t_\alpha}[\mathrm{e}^{x_1}, \mathrm{e}^{x_2}, \dots, \mathrm{e}^{x_n}]^W$, $\lambda \in P^+$, що задовольняють умови

1) $P_\lambda = \hat{\mathfrak{m}}_\lambda + \sum\limits_{\mu<\lambda} a_\lambda^\mu \hat{\mathfrak{m}}_\mu, \qquad a_\lambda^\mu \in \mathbb{C}_{q,t_\alpha},$

2) $\langle P_\lambda, P_\mu\rangle_{q,t_\alpha} = 0, \qquad$ якщо $\quad \lambda \neq \mu.$

Іншими словами, поліноми Макдональда будуються методом ортогоналізації базису для A^W. Ортогональність доводиться виходячи з того

факту, що поліноми Макдональда є власними векторами алгебри комутуючих самоспряжених операторів з одновимірними власними просторами, а власні простори різних власних векторів мають бути ортогональні.

Замінивши e^{x_j} на y_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ у поліномах P_λ ми отримаємо (для кожного фіксованого значення q та t_α) ортогональні симетричні поліноми, які називаються *симетричними поліномами Макдональда.*

Знову замінивши y_j на $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, у поліномах Макдональда ми отримаємо ортогональні функції, що є скінченними лінійним комбінаціями C-функцій.

При певних значеннях q та t_α поліноми Макдональда зводяться до C- та S-функцій:

- Якщо $t_\alpha = 1$, тоді не залежно від q маємо

$$P_\lambda(y) = \hat{\mathfrak{m}}_\lambda(y) = C_\lambda(x)|_{y=2\pi \mathrm{i} x}.$$

- Якщо $\forall \alpha \in R \;\; t_\alpha = q$, тоді

$$P_\lambda(y) = \chi_\lambda(y) = \frac{S_\lambda(x)}{S_\rho(x)}\Big|_{y=x}.$$

Наслідок 3.19. *Поліноміальні форми C- та S-функцій отримані заміною (3.46) є частинними випадками симетричних поліномів Макдональда. Поліноміальні форми орбіт-функцій, що отримані тригонометричними підстановками та заміною (3.51) еквівалентні симетричним поліномам Макдональда.*

Наслідок 3.20. *Симетричні поліномами Макдональда можна представити у вигляді поліномів від фундаментальних C-функцій: $u_1 = C_{\omega_1}, \ldots, u_n = C_{\omega_n}$. У цьому випадку отримаємо не лоранівські поліноми, а поліноми з невід'ємними степенями.*

Орбіт-функції та поліноми Чебишева. Не зважаючи на те, що у літературі [32] наявна значна кількість узагальнень поліномів Чебишева на випадок багатьох змінних, ми детально розглянемо як во-

ни з'являються серед ортогональних поліномів, що походять з орбіт-функцій.

Розглянемо два типи орбіт-функцій алгебри A_1 для $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}^{>0}$:

$$C_m(x) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} m x} + \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} m x} = 2\cos(2\pi m x), \tag{3.56}$$

$$S_m(x) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} m x} - \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} m x} = 2\mathrm{i}\sin(2\pi m x). \tag{3.57}$$

При $m = 0$, означення орбіт-функцій, наведені на початку цього розділу, дають формули $C_0(x) = 1$ та $S_0(x) = 0$ для усіх x, але (3.56) дає формулу $C_0(x) = 2$. У цьому параграфі дотримуватимемось останнього нормування щоб отримати класичний вигляд поліномів Чебишева. Взагалі кажучи, для деяких випадків може бути корисним відмасштабувати орбіт-функцію не породжуючої точки її стабілізатором.

Експоненційна підстановка породжує поліноми Чебишева у симетричній формі. Розглянемо іншу заміну змінних:

$$\begin{aligned} u &:= C_1(x) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x} + \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x} = 2\cos(2\pi x), \\ S &:= S_1(x) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x} - \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x} = 2\mathrm{i}\sin(2\pi x). \end{aligned} \tag{3.58}$$

Рекурсивно за степенями u і S обчислюємо розклади добутків різних орбіт-функцій. Породжуючі рекурсії мають вигляд

$$\begin{aligned} uC_m &= C_{m+1} + C_{m-1}, \qquad & SC_m &= S_{m+1} - S_{m-1}, \\ uS_m &= S_{m+1} + S_{m-1}, \qquad & SS_m &= C_{m+1} - C_{m-1}, \end{aligned} \qquad m \geqslant 1.$$

Розв'язуючи рекурсії для C-поліномів,ми починаємо з найнижчих:

$$\begin{aligned} u^2 = C_2 + C_0 = C_2 + 2 \quad &\Longrightarrow \quad C_2 = u^2 - 2, \\ uC_2 = C_3 + C_1 = C_3 + u \quad &\Longrightarrow \quad C_3 = uC_2 - u = u^3 - 3u, \\ uC_m = C_{m+1} + C_{m-1} \quad &\Longrightarrow \quad C_{m+1} = uC_m - C_{m-1}, \qquad m \geqslant 3. \end{aligned}$$

Поліноми найменших порядків наведено у таблиці 3.5, аналізуючи її робимо висновок, що $C_m = 2T_m$, для $m = 0, 1, \ldots$, де T_m — поліноми Чебишева першого роду.

Рекурсії для C-поліномів, які отримуються з добутку двох S-поліномів наступні:

$$\begin{aligned} S^2 = C_2 - 2 \quad &\Longrightarrow \quad C_2 = S^2 + 2, \\ SS_m = C_{m+1} - C_{m-1} \quad &\Longrightarrow \quad C_{m+1} = SS_m + C_{m-1}, \quad m \geqslant 2. \end{aligned}$$

Отже, кожна функція C_m може бути представлена двома шляхами: як поліном степеня m від u та як поліном того ж степеня від S та u. Прирівнявши два можливі представлення для C_m, отримаємо тригонометричну тотожність для кожного m. Наприклад, записавши C_2, маємо

$$u^2 - S^2 = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin^2(2\pi x) + \cos^2(2\pi x) = 1.$$

Виходячи звідси бачимо, що змінна S є чисто уявною, оскільки її квадрат — від'ємне число.

Аналогічні співвідношення породжують поліноміальні вирази для S_m,

$$\begin{aligned} uS = S_2 \quad &\Longrightarrow \quad S_2 = uS \\ uS_2 = S_3 + S \quad &\Longrightarrow \quad S_3 = uS_2 - S = u^2 S - S \\ uS_m = S_{m+1} + S_{m-1} \quad &\Longrightarrow \quad S_{m+1} = SS_m - S_{m-1}, \qquad m \geqslant 2; \\ SC_2 = S_3 - S \quad &\Longrightarrow \quad S_3 = SC_2 + S = S^3 + 3S \\ SC_m = S_{m+1} + S_{m-1} \quad &\Longrightarrow \quad S_{m+1} = SS_m - C_{m-1}, \qquad m \geqslant 2. \end{aligned}$$

Фундаментальне співвідношення між S- та C-поліномами є спеціальним випадком формули характера (3.42). Це позбавляє нас необхідності рекурсивної побудови S-поліномів, у випадку коли C-поліноми вже відомі. Характер $\chi_m(x)$ незвідного зображення алгебри A_1 розмірномті $m+1$ відомий для усіх $m \geqslant 0$. Існує два способи записати характер: як відношення S-функцій та як суму C-функцій, останній випадок дозволяє отримати поліноми Чебишева другого роду $U_m(x)$:

$$\chi_m(x) = \frac{S_{m+1}(x)}{S(x)};$$

$$\chi_m(x) = C_m(x)+C_{m-2}(x)+\cdots+\begin{cases} C_2(x)+C_0, & m \text{ — парне,} \\ C_3(x)+u(x), & m \text{ — непарне.} \end{cases}$$

Зауваження 3.21. Поліноми C_m з таблиці 3.5 є поліномами Діксона (відомо, що вони еквівалентні поліномам Чебишева над полем комплексних чисел). При зведенні спеціальних експоненційних функцій показали, що група Вейля алгебри A_n еквівалентна групі S_{n+1}, таким чином цілком природньо вважати C-поліноми алгебри A_n n-вимірним узагальненням поліномів Діксона (як поліномів перестановок). Наша форма поліномів Діксона-Чебишева є найменшими частковими випадками для (3.42) та (3.43) без будь-яких додаткових обгрунтувань та перетворень, що є більш 'природнім' оскільки, наприклад, рівність $C_2^2 = C_4 + 2$ не виконується для класичних форм T_2 та T_4.

C-поліноми	
$\# = 0$	
C_2	$u^2 - 2$
C_4	$u^4 - 4u^2 + 2$
C_6	$u^6 - 6u^4 + 9u^2 - 2$
C_8	$u^8 - 8u^6 + 20u^4 - 16u^2 + 2$
$\# = 1$	
C_1	u
C_3	$u^3 - 3u$
C_5	$u^5 - 5u^3 + 5u$
C_7	$u^7 - 7u^5 + 14u^3 - 7u$

S-поліноми	
$\# = 0$	
S_1	1
S_3	$u^2 - 1$
S_5	$u^4 - 3u^2 + 1$
S_7	$u^6 - 5u^4 + 6u^2 - 1$
$\# = 1$	
S_2	u
S_4	$u^3 - 2u$
S_6	$u^5 - 4u^3 + 3u$
S_8	$u^7 - 6u^5 + 10u^3 - 4u$

Табл. 3.5. Незвідні C- та S-поліноми алгебри A_1 степеня не вище за 8.

Алгебра A_2 та ортогональні поліноми. Змінними для поліномів алгебри A_2 є C-функції фундаментальних ваг $\omega_1 = (1,0)$, $\omega_2 = (0,1)$, та найнижча S-функція з домінантною вагою $(1,1)$. Позначимо змінні таким чином

$$u_1 := C_{(1,0)}(x_1, x_2), \qquad u_2 := C_{(0,1)}(x_1, x_2), \qquad S := S_{(1,1)}(x_1, x_2).$$

Для спрощення викладу надалі опускатимемо змінні (x_1, x_2) при записі орбіт-функцій.

Беручи до уваги очевидні поліноми u_1, u_2, u_1^2, u_1u_2 та u_2^2, рекурсивно знаходимо решту A_2-поліномів. Степені поліномів $C_{(a,b)}$ та $S_{(a,b)}$ рівні $a + b$. Зауважимо, що зовнішній автоморфізм алгебри A_2 пов'язує поліноми $C_{(a,b)}$ та $C_{(b,a)}$ перестановкою змінних $u_1 \leftrightarrow u_2$ (тобто $C_{(a,b)}(u_1, u_2) = C_{(b,a)}(u_2, u_1)$).

Усі доданки полінома або, еквівалентно, усі ваги орбіти, мають належати одному класу конґруентності. Для A_2-ваги (a, b) маємо

$$\#(a, b) = (a + 2b) \mod 3. \tag{3.59}$$

Для орбіт-функцій алгебри A_2 маємо

$$\#(C_{(a,b)}) = \#(S_{(a,b)}) = (a + 2b) \mod 3,$$

тобто три класи поліномів, що відповідають конґруентностям $\# = 0, 1, 2$. Під час множення, числа конґруентності додаються за модулем три. Добуток незвідних орбіт розкладається у суму орбіт, що належать тому самому класу конґруетнтності.

Розмірності орбіт $W(A_2)$ наведено на початку розділу під час обчислення усіх можливих орбіт груп рангу три. Розмірність $d_{(a,b)}$ зображення алгебри A_2 зі старшою вагою (a, b) задається рівнянням

$$d_{(a,b)} = \tfrac{1}{2}(a + 1)(b + 1)(a + b + 2).$$

Для C-функцій алгебри A_2 існує дві чотири-компонентні породжуючі рекурсії. C-функція породжуючої точки є сумою $|W(A_2)| = 6$ експоненційних доданків. Щоб рекурсія була породжуючою, а не додатковою розклад добутку u_i та породжуючої C-функції має утворювати три різні 6-вимірні орбіти.

$$u_1C_{(a,b)} = C_{(a+1,b)} + C_{(a-1,b+1)} + C_{(a,b-1)}, \qquad a, b \geqslant 2;$$
$$u_2C_{(a,b)} = C_{(a,b+1)} + C_{(a+1,b-1)} + C_{(a-1,b)}, \qquad a, b \geqslant 2.$$

Перш ніж використовувати породжуючі рекурсії, мають бути розв'язані усі додаткові рекурсійні співвідношення, починаючи з найнижчого:

$$u_1^2{=}C_{(2,0)}{+}2u_2, \quad u_2^2{=}C_{(0,2)}{+}2u_1, \quad u_1u_2{=}C_{(1,1)}{+}3,$$
$$u_1C_{(1,1)}{=}C_{(2,1)}{+}2C_{(0,2)}{+}2u_1, \quad u_2C_{(1,1)}{=}C_{(1,2)}{+}2C_{(2,0)}{+}2u_2.$$

Для $a \geqslant 2$:

$$u_1C_{(a,1)}{=}C_{(a+1,1)}{+}C_{(a-1,2)}{+}2C_{(a,0)}, \quad u_1C_{(a,0)}{=}C_{(a+1,0)}{+}C_{(a-1,1)},$$
$$u_2C_{(a,1)}{=}C_{(a,2)}{+}2C_{(a+1,0)}{+}C_{(a-1,1)}, \quad u_2C_{(a,0)}{=}C_{(a,1)}{+}C_{(a-1,0)}.$$

Для $b \geqslant 2$:

$$u_1C_{(1,b)}{=}C_{(2,b)}{+}2C_{(0,b+1)}{+}C_{(1,b-1)}, \quad u_1C_{(0,b)}{=}C_{(1,b)}{+}C_{(0,b-1)},$$
$$u_2C_{(1,b)}{=}C_{(1,b+1)}{+}C_{(2,b-1)}{+}2C_{(0,b)}, \quad u_2C_{(0,b)}{=}C_{(0,b+1)}{+}C_{(1,b-1)}.$$

Використовуючи симетрію відносно перестановки компонент домінантних ваг, виписуються поліноми $C_{(a,0)}$ та $C_{(a,1)}$ для усіх $a \in \mathbb{N}$. Після чого розв'язуються 4-компонентні рекурсії для $C_{(2,b)}$ і $C_{(a,2)}$ для всіх $a, b \in \mathbb{N}$. І вже тепер можна розв'язати породжуючі рекурсії.

Розглянемо S-поліноми алгебри A_2. Зауважимо, що $S_{(a,0)} = S_{(0,b)} = 0$ для усіх a і b. Для S-функцій існує дві 4-компонентні породжуючі рекурсії

$$u_1S_{(a,b)} = S_{(a+1,b)} + S_{(a-1,b+1)} + S_{(a,b-1)}, \qquad a, b \geqslant 2;$$
$$u_2S_{(a,b)} = S_{(a,b+1)} + S_{(a+1,b-1)} + S_{(a-1,b)}, \qquad a, b \geqslant 2.$$

Додаткові рекурсії $a = 1$ та/або $b = 1$:

$$u_1S = S_{(2,1)}, \qquad u_2S = S_{(1,2)};$$
$$u_1S_{(1,2)} = S_{(2,2)} + S, \qquad u_2S_{(1,2)} = S_{(1,3)} + S_{(2,1)};$$
$$u_1S_{(2,1)} = S_{(3,1)} + S_{(1,2)}, \qquad u_2S_{(2,1)} = S_{(2,2)} + S;$$
$$u_1S_{(3,1)} = S_{(4,1)} + S_{(2,2)}, \qquad u_2S_{(3,1)} = S_{(2,1)} + S_{(3,2)}.$$

Додаткові зв'язки для C-поліномів:

$$SS = C_{(2,2)} - 2C_{(0,3)} - 2C_{(3,0)} + 2C_{(1,1)} - 6,$$

$$SS_{(2,1)} = C_{(3,2)} - C_{(1,3)} - 2C_{(4,0)} + 2C_{(0,2)} - 2C_{(1,0)} + C_{(2,1)},$$
$$SS_{(1,2)} = C_{(2,3)} - C_{(3,1)} - 2C_{(0,4)} + 2C_{(2,0)} - 2C_{(0,1)} + C_{(1,2)},$$
$$SS_{(2,2)} = C_{(3,3)} - C_{(4,1)} - C_{(1,4)} + 2C_{(0,3)} + 2C_{(3,0)} - C_{(1,1)},$$

для $a, b \geqslant 3$:

$$SS_{(a,b)} = C_{(a+1,b+1)} - C_{(a+2,b-1)} - C_{(a-1,b+2)} + C_{(a-2,b+1)} + \\ + C_{(a+1,b-2)} - C_{(a-1,b-1)}.$$

У випадку алгебри A_2 характер $\chi_{(a,b)}$ (3.42) набуває вигляду

$$\chi_{(a,b)}(x,y) = \frac{S_{(a+1,b+1)}(x,y)}{S_{(1,1)}(x,y)} = C_{(a,b)}(x,y) + \sum_{\lambda} m_\lambda C_\lambda(x,y).$$

Коефіцієнти домінантних ваг наведено у роботі [20], обчислимо набори характерів для всіх трьох класів конґруентності алгебри A_2.

Клас конґруентності $\# = 0$:

$$\chi_{(0,0)} = C_{(0,0)} = 1,$$
$$\chi_{(1,1)} = C_{(1,1)} + 2C_{(0,0)},$$
$$\chi_{(3,0)} = C_{(3,0)} + C_{(1,1)} + C_{(0,0)},$$
$$\chi_{(0,3)} = C_{(0,3)} + C_{(1,1)} + C_{(0,0)},$$
$$\chi_{(2,2)} = C_{(2,2)} + C_{(0,3)} + C_{(3,0)} + 2C_{(1,1)} + 3C_{(0,0)},$$
$$\chi_{(1,4)} = C_{(1,4)} + C_{(2,2))} + 2C_{(0,3)} + C_{(3,0)} + 2C_{(1,1)} + 2C_{(0,0)},$$
$$\chi_{(3,3)} = C_{(3,3)} + C_{(4,1)} + C_{(1,4)} + 2C_{(2,2))} + 2C_{(0,3)} + 2C_{(3,0)} + 3C_{(1,1)} + 4C_{(0,0)},$$
$$\chi_{(6,0)} = C_{(6,0)} + C_{(4,1)} + C_{(2,2))} + C_{(0,3)} + C_{(3,0)} + C_{(1,1)} + C_{(0,0)}.$$

Клас конґруентності $\# = 1$:

$$\chi_{(1,0)} = C_{(1,0)},$$
$$\chi_{(0,2)} = C_{(0,2)} + C_{(1,0)},$$
$$\chi_{(2,1)} = C_{(2,1)} + C_{(0,2)} + 2C_{(1,0)},$$
$$\chi_{(1,3)} = C_{(1,3)} + C_{(2,1)} + 2C_{(0,2)} + 2C_{(1,0)},$$

C-поліноми	
$\# = 0$	
$C_{(1,1)}$	u_1u_2-3
$C_{(3,0)}$	$u_1^3-3u_1u_2+3$
$C_{(2,2)}$	$u_1^2u_2^2-2u_1^3-2u_2^3+4u_1u_2-3$
$\# = 1$	
$C_{(1,0)}$	u_1
$C_{(0,2)}$	$u_2^2-2u_1$
$C_{(2,1)}$	$u_1^2u_2-2u_2^2-u_1$
$C_{(1,3)}$	$u_1u_2^3-3u_1^2u_2-u_2^2+5u_1$
$C_{(4,0)}$	$u_1^4-4u_1^2u_2+2u_2^2+4u_1$

S-поліноми	
$\# = 0$	
$S_{(2,2)}$	u_1u_2-1
$S_{(1,4)}$	$u_2^3-2u_1u_2+1$
$S_{(3,3)}$	$u_1^2u_2^2-u_1^3-u_2^3$
$\# = 1$	
$S_{(2,1)}$	u_1
$S_{(1,3)}$	$u_2^2-u_1$
$S_{(3,2)}$	$u_1^2u_2-u_2^2-u_1$
$S_{(2,4)}$	$u_1u_2^3-2u_1^2u_2-u_2^2+2u_2$
$S_{(5,1)}$	$u_1^4-3u_1^2u_2+u_2^2+u_1+u_2$

Табл. 3.6. C- та S-поліноми алгебри A_2 степеня не вище за 4. З усіх поліномів $C_{(a,b)}$ або $S_{(a,b)}$ отримаємо $C_{(b,a)}$ або $S_{(b,a)}$ відповідно поміявши місцями u_1 та u_2.

$$\chi_{(4,0)} = C_{(4,0)} + C_{(2,1)} + C_{(0,2)} + C_{(1,0)},$$
$$\chi_{(0,5)} = C_{(0,5)} + C_{(1,3)} + C_{(2,1)} + C_{(0,2)} + C_{(1,0)}.$$

Для класу конґруентності $\# = 2$ досить поміняти місцями домінантні ваги у рівностях для класу конґруентності $\# = 1$.

Приклад 3.22. Порівняємо поліноми отримані для алгебри A_2 з результатами Т. Курнвіндера [75]. Нехай $x = (x_1, x_2)$ задано у α-базисі, тоді C-функції A_2 набувають вигляду:

$$C_{(0,0)}(x) = 1,$$
$$C_{(0,m)}(x) = \overline{C_{(m,0)}(x)} = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}mx_1} + \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}mx_1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}mx_2} + \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}mx_2},$$
$$\begin{aligned} C_{(m_1,m_2)}(x) = {} & \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}m_1x_1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}m_2x_2} + \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}m_1x_1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(m_1+m_2)x_2} + \\ & \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(m_1+m_2)x_1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}m_2x_2} + \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}m_2x_1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}m_1x_2} + \\ & \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(m_1+m_2)x_1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}m_1x_2} + \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}m_2x_1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(m_1+m_2)x_2}, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} S_{(m_1,m_2)}(x) = {} & \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}m_1x_1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}m_2x_2} - \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}m_1x_1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(m_1+m_2)x_2} - \\ & \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(m_1+m_2)x_1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}m_2x_2} - \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}m_2x_1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}m_1x_2} + \\ & \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(m_1+m_2)x_1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}m_1x_2} + \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}m_2x_1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(m_1+m_2)x_2}. \end{aligned}$$

Поліноми e^{+} та e^{-}, наведені у (2.6) роботи [75, III], співпадають з рекурентними C- та S-поліномами алгебри A_2, коли встановлено наступну відповідність: $\sigma = 2\pi x_1$, $\tau = 2\pi x_2$. Отже, обидва набори поліномів алгебри A_2 та $\mathrm{e}^{\pm}$ з роботи [75, III] ортогональні всередині гіпоциклоїди Штейнера.

Варто зауважити, що регулярне замощення площини рівносторонніми трикутниками у [75] є стандартним покриттям площини ваговою ґраткою алгебри A_2. Фундаментальна область R з [75] співпадає з фундаментальною областю $F(A_2)$ у наших позначеннях. Відповідна група ізометрії є афінною групою Вейля для A_2.

Продовжуючи порівняння з [75], слід наголосити, що орбіт-функції є власними функціями не лише оператора Лапласа, а також диференціальних операторів, що будуються з елементарних симетричних поліномів [70, 71].

Дослідимо перетворення фундаментальної області $F(A_2) \to \mathfrak{F}(A_2)$. Під час заміни $x \mapsto u$, вершини симплексу $F(A_2)$ переходять у точки $\{P_0, P_1, P_2\}$, а ребра переходять у неперервні криві. У явному вигляді маємо

$$
\begin{aligned}
&(0,0) \mapsto (3,0) =: P_0;\\
&\omega_1 \mapsto (-\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3\sqrt{3}}{2}) =: P_1;\\
&\omega_2 \mapsto (-\tfrac{3}{2}, \tfrac{3\sqrt{3}}{2}) =: P_2.
\end{aligned}
$$

Приклад 3.23. Зафіксуємо натуральне число $M = 3$. $|F_3(A_2)| = 10$, а відповідні точки сітки $(\frac{s_1}{M}, \frac{s_2}{M})$ у координатах $(\mathrm{Re}(u_1), \mathrm{Im}(u_1))$ мають вигляд

$$
\begin{aligned}
&(0,0) \mapsto (3,0);\\
&(0,1) \mapsto (-\tfrac{3}{2}, \tfrac{3\sqrt{3}}{2});\\
&(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}) \mapsto (-2\cos\tfrac{\pi}{9} + \cos\tfrac{2\pi}{9}, -2\sin\tfrac{\pi}{9} - \sin\tfrac{2\pi}{9});\\
&(1,0) \mapsto (-\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3\sqrt{3}}{2});
\end{aligned}
$$

$$(\tfrac{2}{3},0)\mapsto(-\cos\tfrac{\pi}{9}+2\sin\tfrac{\pi}{18},-2\cos\tfrac{\pi}{18}+\sin\tfrac{\pi}{9});$$
$$(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3})\mapsto(-2\cos\tfrac{\pi}{9}+\cos\tfrac{2\pi}{9},2\sin\tfrac{\pi}{9}+\sin\tfrac{2\pi}{9});$$
$$(\tfrac{1}{3},0)\mapsto(2\cos\tfrac{2\pi}{9}+\sin\tfrac{\pi}{18},\cos\tfrac{\pi}{18}-2\sin\tfrac{2\pi}{9});$$
$$(0,\tfrac{1}{3})\mapsto(2\cos\tfrac{2\pi}{9}+\sin\tfrac{\pi}{18},-\cos\tfrac{\pi}{18}+2\sin\tfrac{2\pi}{9});$$
$$(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3})\mapsto(0,0);$$
$$(0,\tfrac{2}{3})\mapsto(-2\cos\tfrac{\pi}{9}+2\sin\tfrac{\pi}{18},2\cos\tfrac{\pi}{18}-\sin\tfrac{\pi}{9}).$$

Вибір координат у вигляді $(\mathrm{Re}(u_1),\mathrm{Im}(u_1))$ обумовлений комплексним спряженням $u_1=\overline{u_2}$. Зображаючи ці точки та трансформовану фундаментальну область $\mathfrak{F}$ на рис. 3.8, ми бачимо, що дискретні точки $F_M(A_2)$ у нових координатах (u_1,u_2) переходять у точки $\mathfrak{F}_M(A_2)\subset\mathfrak{F}(A_2)$.

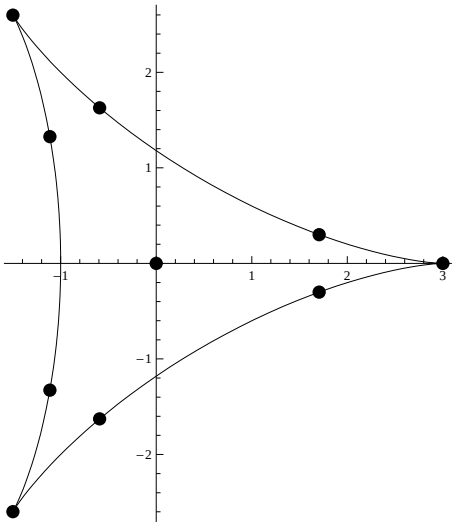


Рис. 3.8. Область ортогональності $\mathfrak{F}$ поліномів алгебри A_2 та дискретні точки фундаментальної області $\mathfrak{F}_3$ побудовані у прикладі 3.23.

Алгебра C_2 та ортогональні поліноми. Для орбіт алгебри Лі C_2 існує два класи конґруентності, які для довільної ваги (a,b) визначаються таким чином

$$\#(a,b)=a \mod 2. \tag{3.60}$$

Розмірність незвідного зображення $d_{(a,b)}$ алгебри C_2 зі старшою вагою

(a,b) задається рівнянням

$$d_{(a,b)} = \tfrac{1}{6}(a+1)(b+1)(2a+b+3)(a+b+2). \tag{3.61}$$

При множенні поліномів числа конґруентності підсумовуються за модулем два, а характер задається формулою (3.42) з числами Костки m_λ, які наведено у [20].

Введемо нові змінні для поліномів алгебри C_2

$$u_1 := C_{(1,0)}(x_1,x_2), \qquad u_2 := C_{(0,1)}(x_1,x_2), \qquad S := S_{(1,1)}(x_1,x_2),$$

змінні (x_1,x_2) будемо опускати для спрощення вигляду формул. Не зважаючи на те, що змінні позначаються так само як і у випадку алгебри A_2 (та алгебри G_2 нижче), вони суттєво відрізняються. А саме, u_1 та u_2 складаються з 4 експоненційних компонент і S — з 8 компонент. Числа конґруентності $\#$ для змінних u_1 та S — 1, для змінної u_2 — 0.

Для C-функцій алгебри C_2 існує дві породжуючі рекурсії

$$\begin{aligned}
u_1 C_{(a,b)} &= C_{(a+1,b)} + C_{(a-1,b+1)} + C_{(a+1,b-1)} + C_{(a-1,b)}, && a,\ b \geqslant 2;\\
u_2 C_{(a,b)} &= C_{(a,b+1)} + C_{(a+2,b-1)} + C_{(a-2,b+1)} + C_{(a,b-1)}, && a \geqslant 3,\ b \geqslant 2.
\end{aligned}$$

Для розв'язування породжуючих рекурсій необхідно спочатку розв'язати додаткові рекурсії для C-функцій:

$$\begin{aligned}
u_1 C_{(a,1)} &= C_{(a+1,1)} + C_{(a-1,2)} + 2C_{(a+1,0)} + C_{(a-1,1)}, && a \geqslant 2;\\
u_1 C_{(a,0)} &= C_{(a+1,0)} + C_{(a-1,1)} + C_{(a-1,0)}, && a \geqslant 2;\\
u_1 C_{(1,b)} &= C_{(2,b)} + 2C_{(0,b+1)} + C_{(2,b-1)} + 2C_{(0,b)}, && b \geqslant 2;\\
u_1 C_{(0,b)} &= C_{(1,b)} + C_{(1,b-1)}, && b \geqslant 2;\\
u_1 C_{(1,1)} &= C_{(2,1)} + 2C_{(0,2)} + 2C_{(2,0)} + 2u_2;\\
u_1 u_2 &= C_{(1,1)} + 2u_1; \qquad u_1^2 = C_{(2,0)} + 2u_2 + 4;\\
u_2 C_{(a,1)} &= C_{(a,2)} + 2C_{(a+2,0)} + C_{(a-2,2)} + 2C_{(a,0)}, && a \geqslant 3;\\
u_2 C_{(a,0)} &= C_{(a,1)} + C_{(a-2,1)}, && a \geqslant 3;\\
u_2 C_{(2,b)} &= C_{(2,b+1)} + C_{(4,b-1)} + 2C_{(0,b+1)} + C_{(2,b-1)}, && b \geqslant 2;
\end{aligned}$$

$\# = 0$	
$C_{(0,1)}$	u_2
$C_{(2,0)}$	$u_1^2 - 2u_2 - 4$
$C_{(2,1)}$	$u_1^2u_2 - 2u_2^2 - 6u_2$
$C_{(4,0)}$	$4 - 4u_1^2 + u_1^4 + 8u_2 - 4u_1^2u_2 + 2u_2^2$
$C_{(0,2)}$	$4 - 2u_1^2 + 4u_2 + u_2^2$
$C_{(0,3)}$	$9u_2 - 3u_1^2u_2 + 6u_2^2 + u_2^3$
$C_{(2,2)}$	$-8 + 10u_1^2 - 2u_1^4 - 20u_2 + 8u_1^2u_2 - 12u_2^2 + u_1^2u_2^2 - 2u_2^3$
$C_{(0,4)}$	$4 - 8u_1^2 + 2u_1^4 + 16u_2 - 8u_1^2u_2 + 20u_2^2 - 4u_1^2u_2^2 + 8u_2^3 + u_2^4$
$\# = 1$	
$C_{(1,0)}$	u_1
$C_{(1,1)}$	$u_1u_2 - 2u_1$
$C_{(3,0)}$	$u_1^3 - 3u_1u_2 - 3u_1$
$C_{(3,1)}$	$2u_1 - 4u_1u_2 + u_1^3u_2 - 3u_1u_2^2$
$C_{(1,2)}$	$6u_1 - 2u_1^3 + 3u_1u_2 + u_1u_2^2$
$C_{(1,3)}$	$-6u_1 + 2u_1^3 + 6u_1u_2 - 3u_1^3u_2 + 5u_1u_2^2 + u_1u_2^3$

Табл. 3.7. C-поліноми алгебри C_2 степеня не вище за 4.

$$
\begin{aligned}
u_2C_{(1,b)} &= C_{(1,b+1)} + C_{(3,b-1)} + C_{(1,b-1)} + C_{(1,b)}, && b \geqslant 2;\\
u_2C_{(0,b)} &= C_{(0,b+1)} + C_{(2,b-1)} + C_{(0,b-1)}, && b \geqslant 2;\\
u_2C_{(2,1)} &= C_{(2,2)} + 2C_{(4,0)} + C_{(0,4)} + 2C_{(0,2)} + 2C_{(2,0)};\\
u_2C_{(1,1)} &= C_{(1,2)} + 2C_{(3,0)} + C_{(1,1)} + 2u_1;\\
u_2C_{(2,0)} &= C_{(2,1)} + 2u_2; \qquad u_2^2 = C_{(0,2)} + 2C_{(2,0)} + 4.
\end{aligned}
$$

Рекурсії, що складаються з трьох та чотирьох компонент, розв'язуються незалежно та дають вирази для $C_{(0,b)}$, $C_{(a,0)}$, $C_{(1,b)}$, та $C_{(a,1)}$ при всіх значеннях a та b, див. таблицю 3.7.

Розглянемо S-поліноми. Породжуючі рекурсії для них будуються з вже отриманих рекурсій для C-функцій за допомогою зміни знаків на

протилежні біля точок орбіти з непарною кількістю відображень:

$$u_1 S_{(a,b)} = S_{(a+1,b)} - S_{(a-1,b+1)} + S_{(a+1,b-1)} - S_{(a-1,b)}, \qquad a,\ b \geqslant 2;$$
$$u_2 S_{(a,b)} = S_{(a,b+1)} - S_{(a+2,b-1)} + S_{(a-2,b+1)} - S_{(a,b-1)}, \qquad a \geqslant 3,\ b \geqslant 2.$$

Додаткові рекурсії, які слід розв'язати перш ніж породжуючі, мають вигляд:

$$u_1 S_{(a,1)} = S_{(a+1,1)} + S_{(a-1,2)} + S_{(a-1,1)}, \quad a \geqslant 2;$$
$$u_2 S_{(a,1)} = S_{(a,2)} + S_{(a-2,2)}, \quad a \geqslant 3;$$
$$u_2 S_{(2,b)} = S_{(2,b+1)} + S_{(4,b-1)} + S_{(2,b-1)}, \quad b \geqslant 2;$$
$$u_1 S_{(1,b)} = S_{(2,b)} + S_{(2,b-1)}, \quad b \geqslant 2;$$
$$u_2 S_{(1,b)} = S_{(1,b+1)} + S_{(3,b-1)} + S_{(1,b-1)} - S_{(1,b)}, \quad b \geqslant 2;$$
$$u_2 S_{(2,1)} = S_{(2,2)};$$
$$u_1 S = S_{(2,1)};$$
$$u_2 S = S_{(1,2)} - S;$$
$$\begin{aligned} SS_{(a,b)} = {} & C_{(a+1,b+1)} - C_{(a-1,b+2)} - C_{(a+3,b-1)} \\ & - C_{(a-3,b+1)} + C_{(a-1,b-1)} - C_{(a+1,b-2)} \\ & + C_{(a+3,b-2)} + C_{(a-3,b+2)}, \quad a \geqslant 4,\ b \geqslant 3; \end{aligned}$$
$$SS = C_{(2,2)} - 2C_{(0,3)} - 2C_{(4,0)} - 2C_{(2,0)} - 2u_2 + 2u_2 + 2C_{(2,1)} + 8.$$

C-функції алгебри C_2 — дійснозначні, наведемо кілька прикладів C_2-характерів:

$\# = 0$:

$$\chi_{(0,0)} = C_{(0,0)} = 1;$$
$$\chi_{(0,1)} = 1 + C_{(0,1)} = 1 + u_2;$$
$$\chi_{(2,0)} = 2 + u_2 + C_{(2,0)};$$
$$\chi_{(0,2)} = 2 + u_2 + C_{(2,0)} + C_{(0,2)};$$
$$\chi_{(2,1)} = 3 + 3u_2 + 2C_{(2,0)} + C_{(0,2)} + C_{(2,1)};$$
$$\chi_{(0,3)} = 2 + 2u_2 + C_{(2,0)} + C_{(0,2)} + C_{(2,1)} + C_{(0,3)};$$

$$\chi_{(4,0)} = 3 + 2u_2 + 2C_{(2,0)} + C_{(0,2)} + C_{(2,1)} + C_{(4,0)};$$
$$\chi_{(2,2)} = 5 + 4u_2 + 4C_{(2,0)} + 3C_{(0,2)} + 2C_{(2,1)} + C_{(0,3)} + C_{(4,0)} + C_{(2,2)}.$$

$\# = 1$:

$$\chi_{(1,0)} = C_{(1,0)} = u_1;$$
$$\chi_{(1,1)} = 2u_1 + C_{(1,1)};$$
$$\chi_{(3,0)} = 2u_1 + C_{(1,1)} + C_{(3,0)};$$
$$\chi_{(1,2)} = 3u_1 + 2C_{(1,1)} + C_{(3,0)} + C_{(1,2)};$$
$$\chi_{(3,1)} = 4u_1 + 3C_{(1,1)} + 2C_{(3,0)} + C_{(1,2)} + C_{(3,1)};$$
$$\chi_{(1,3)} = 4u_1 + 3C_{(1,1)} + 2C_{(3,0)} + 2C_{(1,2)} + C_{(3,1)} + C_{(1,3)}.$$

Використовуючи ці характери та таблицю 3.7, можна побудувати всі S-поліноми до четвертого степеня включно. Зауважимо, що характер $\chi_{(0,4)}$ породжує поліном п'ятого степеня.

Заміна змінних $x \mapsto u$, за допомогою якої було побудовано поліноми, перетворює вершини фундаментальної області $F(C_2)$ у точки $\{P_0, P_1, P_2\}$: $(0,0) \mapsto (4,4) =: P_0, \quad \omega_1 \mapsto (0,-4) =: P_1, \quad \omega_2 \mapsto (-4,4) =: P_2.$

Приклад 3.24. Зафіксуємо сталу для подрібнення сітки $M = 4$, тоді $|F_4(C_2)| = 9$, а відповідні точки сітки $(\frac{s_1}{M}, \frac{s_2}{M})$ в координатах (u_1, u_2) мають вигляд

$$(0,0) \mapsto (4,4), \qquad (0,\tfrac{1}{4}) \mapsto (2\sqrt{2},2), \qquad (\tfrac{1}{2},0) \mapsto (0,-4),$$
$$(0,\tfrac{1}{2}) \mapsto (0,0), \qquad (0,\tfrac{3}{4}) \mapsto (-2\sqrt{2},2), \qquad (\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}) \mapsto (-2,0),$$
$$(0,1) \mapsto (-4,4), \qquad (\tfrac{1}{4},0) \mapsto (2,0), \qquad (\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}) \mapsto (0,-2).$$

На рис. 3.9 зображено дискретний набір точок $F_M(C_2)$ у координатах (u_1, u_2) та область ортогональності поліномів $\mathfrak{F}(C_2)$.

Алгебра G_2 та ортогональні поліноми. У випадку алгебри Лі G_2 усі вагові орбіти належать одному класу конґруентності, а розмірність незвідного зображення $d_{(a,b)}$ алгебри G_2 зі старшою вагою (a,b) задається

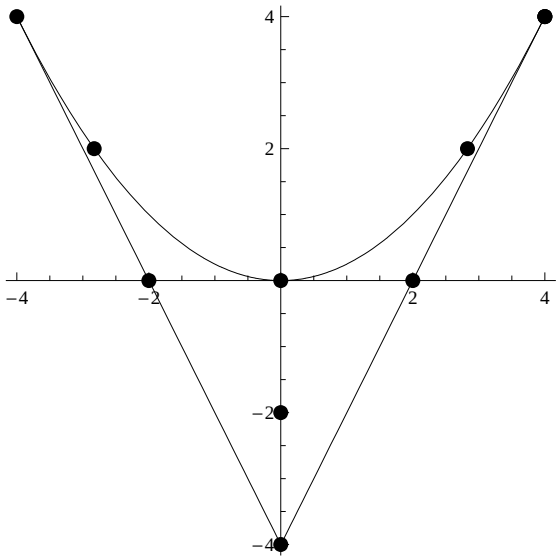


Рис. 3.9. Область ортогональності $\mathfrak{F}$ та дискретні точки $\mathfrak{F}_4$ поліномів алгебри C_2.

$\# = 0$	
$S_{(1,2)}$	$1 + u_2$
$S_{(3,1)}$	$-2 + u_1^2 - u_2$
$S_{(1,3)}$	$2 - u_1^2 + 3u_2 + u_2^2$
$S_{(3,2)}$	$-1 - 3u_2 + u_1^2 u_2 - u_2^2$
$S_{(1,4)}$	$2 - u_1^2 + 7u_2 - 2u_1^2 u_2 + 5u_2^2 + u_2^3$
$S_{(5,1)}$	$3 - 4u_1^2 + u_1^4 + 4u_2 - 3u_1^2 u_2 + u_2^2$
$S_{(3,3)}$	$-3 + 4u_1^2 - u_1^4 - 7u_2 + 3u_1^2 u_2 - 5u_2^2 + u_1^2 u_2^2 - u_2^3$
$\# = 1$	
$S_{(2,1)}$	u_1
$S_{(2,2)}$	$u_1 u_2$
$S_{(4,1)}$	$-3u_1 + u_1^3 - 2u_1 u_2$
$S_{(2,3)}$	$2u_1 - u_1^3 + 2u_1 u_2 + u_1 u_2^2$
$S_{(4,2)}$	$-4u_1 u_2 + u_1^3 u_2 - 2u_1 u_2^2$
$S_{(2,4)}$	$5u_1 u_2 - 2u_1^3 u_2 + 4u_1 u_2^2 + u_1 u_2^3$

Табл. 3.8. S-поліноми алгебри C_2 степенів не вище за 4.

рівнянням

$$d_{(a,b)} = \tfrac{1}{120}(a+1)(b+1)(a+b+2)(2a+b+3)(3a+b+4)(3a+2b+5). \quad (3.62)$$

Для рекурентної побудови поліномів оберемо змінні

$$u_1 := C_{(1,0)}(x_1, x_2), \qquad u_2 := C_{(0,1)}(x_1, x_2), \qquad S = S_{(1,1)}(x_1, x_2).$$

Змінні u_1 та u_2 містять 6 доданків, а змінна S має 12 доданків, $C_{(0,0)}$=1.

Для C-поліномів алгебри G_2 існує дві породжуючі рекурсії, кожна з яких містить один добуток та суму шести C-поліномів

для $a \geqslant 3,\ b \geqslant 4$:

$$u_1 C_{(a,b)} = C_{(a+1,b)} + C_{(a-1,b+3)} + C_{(a+2,b-3)} + C_{(a-2,b+3)} + C_{(a+1,b-3)} + C_{(a-1,b)};$$

для $a \geqslant 2,\ b \geqslant 3$:

$$u_2 C_{(a,b)} = C_{(a,b+1)} + C_{(a+1,b-1)} + C_{(a-1,b+2)} + C_{(a+1,b-2)} + C_{(a-1,b+1)} + C_{(a,b-1)}.$$

Додаткові рекурсії для множника u_1 та для $a \in \{0, 1, 2\}$ або $b \in \{0, 1, 2, 3\}$ мають вигляд

$$u_1 C_{(2,b)} = C_{(3,b)} + C_{(1,b+3)} + C_{(4,b-3)} + 2C_{(0,b+3)} + C_{(3,b-3)} + C_{(1,b)};$$
$$u_1 C_{(1,b)} = C_{(2,b)} + 2C_{(0,b+3)} + C_{(3,b-3)} + C_{(2,b-3)} + C_{(1,b)} + 2C_{(0,b)};$$
$$u_1 C_{(0,b)} = C_{(1,b)} + C_{(2,b-3)} + C_{(1,b-3)};$$
$$u_1 C_{(a,3)} = C_{(a+1,3)} + C_{(a-1,6)} + 2C_{(a+2,0)} + C_{(a-2,6)} + 2C_{(a+1,0)} + C_{(a-1,3)};$$
$$u_1 C_{(a,2)} = C_{(a+1,2)} + C_{(a-1,5)} + C_{(a+1,1)} + C_{(a-2,5)} + C_{(a,1)} + C_{(a-1,2)};$$
$$u_1 C_{(a,1)} = C_{(a+1,1)} + C_{(a-1,4)} + C_{(a-2,4)} + C_{(a-1,1)} + C_{(a,2)} + C_{(a-1,2)};$$
$$u_1 C_{(a,0)} = C_{(a+1,0)} + C_{(a-1,3)} + C_{(a-2,3)} + C_{(a-1,0)};$$
$$u_1 C_{(2,3)} = C_{(3,3)} + C_{(1,6)} + 2C_{(4,0)} + 2C_{(0,6)} + 2C_{(3,0)} + C_{(1,3)};$$
$$u_1 C_{(2,2)} = C_{(3,2)} + C_{(1,5)} + C_{(0,5)} + C_{(1,2)} + C_{(2,1)} + C_{(3,1)};$$
$$u_1 C_{(2,1)} = C_{(3,1)} + C_{(1,4)} + 2C_{(0,4)} + C_{(1,1)} + C_{(2,2)} + C_{(1,2)};$$
$$u_1 C_{(2,0)} = C_{(3,0)} + C_{(1,3)} + 2C_{(0,3)} + u_1;$$
$$u_1 C_{(1,3)} = C_{(2,3)} + 2C_{(0,6)} + 2C_{(3,0)} + 2C_{(2,0)} + C_{(1,3)} + 2C_{(0,3)};$$
$$u_1 C_{(1,2)} = C_{(2,2)} + 2C_{(0,5)} + C_{(1,2)} + 2C_{(0,2)} + C_{(2,1)} + C_{(1,1)};$$
$$u_1 C_{(1,1)} = C_{(2,1)} + 2C_{(0,4)} + C_{(1,2)} + 2C_{(0,2)} + C_{(1,1)} + 2u_2;$$
$$u_1 C_{(0,3)} = C_{(1,3)} + 2C_{(2,0)} + 2u_1;$$

$$u_1C_{(0,2)}=C_{(1,2)}+C_{(1,1)}+2u_2;$$
$$u_1u_1=C_{(2,0)}+2C_{(0,3)}+2u_1+6;$$
$$u_1u_2=C_{(1,1)}+2C_{(0,2)}+2u_2.$$

Для множника u_2 та для $a \in \{0,1\}$ або $b \in \{0,1,2\}$ додаткові рекурсії мають вигляд

$$u_2C_{(1,b)}=C_{(1,b+1)}+C_{(2,b-1)}+2C_{(0,b+2)}+C_{(2,b-2)}+2C_{(0,b+1)}+C_{(1,b-1)};$$
$$u_2C_{(0,b)}=C_{(0,b+1)}+C_{(1,b-1)}+C_{(1,b-2)}+C_{(0,b-1)};$$
$$u_2C_{(a,1)}=C_{(a,2)}+2C_{(a+1,0)}+C_{(a-1,3)}+C_{(a-1,2)}+2C_{(a,0)}+C_{(a,1)};$$
$$u_2C_{(a,0)}=C_{(a,1)}+C_{(a-1,2)}+C_{(a-1,1)};$$
$$u_2C_{(1,2)}=C_{(1,3)}+C_{(2,1)}+2C_{(0,4)}+2C_{(0,3)}+C_{(1,1)}+2C_{(2,0)};$$
$$u_2C_{(1,1)}=C_{(1,2)}+2C_{(2,0)}+2C_{(0,3)}+2C_{(0,2)}+C_{(1,1)}+2u_1;$$
$$u_2C_{(0,2)}=C_{(0,3)}+C_{(1,1)}+2u_1+u_2;$$
$$u_2u_2=C_{(0,2)}+2u_1+2u_2+6.$$

Зауваження 3.25. Степінь поліномів $C_{(a,b)}$ може перевищувати число $a+b$, це продемонстровано у таблиці 3.9.

Породжуючі рекурсії для S-поліномів ало відрізняються від відповідних рекурсій для C-поліномів

для $a \geqslant 3,\ b \geqslant 4$:
$$u_1S_{(a,b)}=S_{(a+1,b)}+S_{(a-1,b+3)}+S_{(a+2,b-3)}+S_{(a-2,b+3)}+S_{(a+1,b-3)}+S_{(a-1,b)};$$

для $a \geqslant 2,\ b \geqslant 3$:
$$u_2S_{(a,b)}=S_{(a,b+1)}+S_{(a+1,b-1)}+S_{(a-1,b+2)}+S_{(a+1,b-2)}+S_{(a-1,b+1)}+S_{(a,b-1)}.$$

Для цієї алгебри немає потреби незалежно обчислювати S-поліноми. Їх можна отримати з таблиць [20] у вигляді характерів зображень алгебри G_2. Наведемо характери $\chi_{(a,b)}$ для випадків $a+b \leqslant 3$:

$$\chi_{(1,0)}=1+C_{(1,0)}=1+u_1;$$

$C_{(1,0)}=u_1$
$C_{(0,1)}=u_2$
$C_{(0,2)}=-6-2u_1-2u_2+u_2^2$
$C_{(1,1)}=12+4u_1+2u_2+u_1u_2-2u_2^2$
$C_{(1,2)}=-12-10u_1-2u_1^2-4u_2-3u_1u_2+2u_2^2+u_1u_2^2$
$C_{(0,3)}=-12-12u_1-2u_1^2-3u_2-3u_1u_2+2u_2^2+u_1u_2^2$
$C_{(2,0)}=18+22u_1+5u_1^2+6u_2+6u_1u_2-4u_2^2-2u_1u_2^2$
$C_{(1,3)}=-36-58u_1-22u_1^2-2u_1^3-12u_2-15u_1u_2-3u_1^2u_2+8u_2^2+6u_1u_2^2+u_1^2u_2^2$
$C_{(0,4)}=6+8u_1+2u_1^2-8u_2-10u_1u_2-2u_1^2u_2-4u_2^2-4u_1u_2^2+2u_2^3+u_1u_2^3$
$C_{(2,1)}=6u_1+2u_1^2+20u_2+24u_1u_2+5u_1^2u_2+6u_2^2+5u_1u_2^2-4u_2^3-2u_1u_2^3$
$C_{(1,4)}=-12-4u_1+6u_1^2+2u_1^3-22u_2-33u_1u_2-15u_1^2u_2-2u_1^3u_2-4u_2^2-9u_1u_2^2$ $-4u_1^2u_2^2+4u_2^3+4u_1u_2^3+u_1^2u_2^3$
$C_{(3,0)}=60+99u_1+48u_1^2+7u_1^3+18u_2+27u_1u_2+9u_1^2u_2-12u_2^2-12u_1u_2^2-3u_1^2u_2^2$
$C_{(2,2)}=-108-156u_1-46u_1^2-2u_1^3-64u_2-60u_1u_2+9u_1^2u_2+5u_1^3u_2+32u_2^2$ $+36u_1u_2^2+11u_1^2u_2^2+12u_2^3+6u_1u_2^3-2u_1^2u_2^3-4u_2^4-2u_1u_2^4$
$C_{(3,1)}=108+150u_1+44u_1^2+2u_1^3+104u_2+135u_1u_2+34u_1^2u_2+2u_1^3u_2-20u_2^2$ $-14u_1u_2^2-2u_1^2u_2^2-20u_2^3-16u_1u_2^3-u_1^2u_2^3+4u_2^4+2u_1u_2^4$
$C_{(4,0)}=198+400u_1+282u_1^2+84u_1^3+9u_1^4+240u_2+360u_1u_2+152u_1^2u_2+20u_1^3u_2$ $+26u_2^2+28u_1u_2^2-8u_1^2u_2^2-4u_1^3u_2^2-52u_2^3-46u_1u_2^3-8u_1^2u_2^3$ $-8u_2^4-8u_1u_2^4+4u_2^5+2u_1u_2^5$

Табл. 3.9. $C_{(a,b)}$-поліноми алгебри G_2 для $a+b\leqslant 4$.

$\chi_{(0,1)}=2+C_{(1,0)}+C_{(0,1)}=2+u_1+u_2;$

$\chi_{(2,0)}=3+2u_1+u_2+C_{(2,0)};$

$\chi_{(1,1)}=4+4u_1+2u_2+2C_{(2,0)}+C_{(1,1)};$

$\chi_{(3,0)}=5+4u_1+3u_2+2C_{(2,0)}+C_{(3,0)};$

$\chi_{(0,2)}=5+3u_1+3u_2+2C_{(2,0)}+C_{(1,1)}+C_{(3,0)}+C_{(0,2)};$

$\chi_{(2,1)}=9+8u_1+6u_2+5C_{(2,0)}+3C_{(1,1)}+2C_{(3,0)}+C_{(0,2)}+C_{(2,1)};$

$\chi_{(1,2)}=10+10u_1+7u_2+7C_{(2,0)}+5C_{(1,1)}+3C_{(3,0)}+3C_{(3,0)}+2C_{(0,2)}+$

$$2C_{(2,1)}+C_{(4,0)}+C_{(1,2)};$$

$$\chi_{(0,3)}=9+7u_1+7u_2+5C_{(2,0)}+4C_{(1,1)}+4C_{(3,0)}+3C_{(0,2)}+2C_{(1,1)}+$$
$$C_{(4,0)}+C_{(1,2)}+C_{(3,1)}+C_{(0,3)}.$$

$S_{(2,1)}$	$1+u_1$
$S_{(1,2)}$	$2+u_1+u_2$
$S_{(3,1)}$	$21+24u_1+5u_1^2+7u_2+6u_1u_2-4u_2^2-2u_1u_2^2$
$S_{(2,2)}$	$52+52u_1+10u_1^2+16u_2+13u_1u_2-10u_2^2-4u_1u_2^2$
$S_{(4,1)}$	$113+151u_1+58u_1^2+7u_1^3+35u_2+40u_1u_2+9u_1^2u_2-22u_2^2-16u_1u_2^2-3u_1^2u_2^2$
$S_{(1,3)}$	$107+148u_1+58u_1^2+7u_1^3+33u_2+40u_1u_2+9u_1^2u_2-21u_2^2-16u_1u_2^2-3u_1^2u_2^2$
$S_{(3,2)}$	$249+332u_1+123u_1^2+14u_1^3+96u_2+111u_1u_2+23u_1^2u_2-43u_2^2-29u_1u_2^2$ $-6u_1^2u_2^2-4u_2^3-2u_1u_2^3$
$S_{(2,3)}$	$550+879u_1+463u_1^2+105u_1^3+9u_1^4+385u_2+533u_1u_2+189u_1^2u_2+20u_1^3u_2$ $-11u_1u_2^2-32u_2^2-17u_1^2u_2^2-4u_1^3u_2^2-60u_2^3-50u_1u_2^3-8u_1^2u_2^3-8u_2^4$ $-8u_1u_2^4+4u_2^5+2u_1u_2^5$
$S_{(4,1)}$	$651+1063u_1+543u_1^2+114u_1^3+9u_1^4+488u_2+679u_1u_2+232u_1^2u_2$ $+22u_1^3u_2-32u_1u_2^2-51u_2^2-22u_1^2u_2^2-4u_1^3u_2^2-80u_2^3-66u_1u_2^3-9u_1^2u_2^3$ $-4u_2^4-6u_1u_2^4+4u_2^5+2u_1u_2^5$

Табл. 3.10. $S_{(a,b)}$-поліноми алгебри G_2 для $a+b \leqslant 5$.

Алгебра A_3 та ортогональні поліноми трьох змінних. Алгебра A_3 має чотири класи конґруентності, що визначаються співвідношенням

$$\#(a,b,c) = a + 2b + 3c \mod 4. \tag{3.63}$$

Розмірність незвідного зображення $d_{(a,b,c)}$ зі старшою вагою $\lambda = (a,b,c)$ задається рівністю

$$d_{(a,b,c)} = \tfrac{1}{12}(a+1)(b+1)(c+1)$$
$$\times (a+b+2)(b+c+2)(a+b+c+3). \tag{3.64}$$

Оберемо змінні для рекурсивної побудови поліномів

$$u_1 := C_{(1,0,0)}(x_1, x_2, x_3),$$

$$u_2 := C_{(0,1,0)}(x_1, x_2, x_3),$$
$$u_3 := C_{(0,0,1)}(x_1, x_2, x_3).$$

Орбіт-функції $C_{(1,0,0)}$ та $C_{(0,0,1)}$ мають по 4 компоненти, а $C_{(0,1,0)}$ — 6 компонент.

Для C-функцій породжуючі рекурсії для $a, b, c \geqslant 2$ мають вигляд

$$\begin{aligned}
u_1 C_{(a,b,c)} &= C_{(a+1,b,c)} + C_{(a-1,b+1,c)} + C_{(a,b-1,c+1)} + C_{(a,b,c-1)};\\
u_2 C_{(a,b,c)} &= C_{(a,b+1,c)} + C_{(a+1,b-1,c+1)} + C_{(a-1,b,c+1)} + C_{(a+1,b,c-1)} +\\
&\qquad C_{(a-1,b+1,c-1)} + C_{(a,b-1,c)};\\
u_3 C_{(a,b,c)} &= C_{(a,b,c+1)} + C_{(a,b+1,c-1)} + C_{(a+1,b-1,c)} + C_{(a-1,b,c)}.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що перше та третє співвідношення пов'язані перестановкою першої та третьої компонент у всіх домінантних вагах, таким чином

$$u_1 \leftrightarrow u_3 \qquad \text{та} \qquad (a, b, c) \leftrightarrow (c, b, a).$$

У цьому випадку перелік додаткових рекурсій, необхідних для розв'язування породжуючих рекурсій, досить громіздкий. Для додаткових співвідношень деякі з координат a, b, c набувають значень 1 та 0. Розв'язавши нижченаведені додаткові рекурсивні співвідношення, було отримано C-поліноми алгебри A_3, які наведено у таблиці 3.11.

$$\begin{aligned}
u_1 C_{(a,b,1)} &= 2C_{(a,b,0)} + C_{(a+1,b,1)} + C_{(a-1,b+1,1)} + C_{(a,b-1,2)};\\
u_1 C_{(a,b,0)} &= C_{(a+1,b,0)} + C_{(a-1,b+1,0)} + C_{(a,b-1,1)};\\
u_1 C_{(a,1,c)} &= C_{(a+1,1,c)} + C_{(a-1,2,c)} + C_{(a,1,c-1)} + 2C_{(a,0,c+1)};\\
u_1 C_{(a,1,1)} &= 2C_{(a,1,0)} + C_{(a+1,1,1)} + C_{(a-1,2,1)} + 2C_{(a,0,2)};\\
u_1 C_{(a,1,0)} &= C_{(a+1,1,0)} + C_{(a-1,2,0)} + 2C_{(a,0,1)};\\
u_1 C_{(a,0,c)} &= C_{(a+1,0,c)} + C_{(a-1,1,c)} + C_{(a,0,c-1)};\\
u_1 C_{(a,0,1)} &= 3C_{(a,0,0)} + C_{(a+1,0,1)} + C_{(a-1,1,1)};\\
u_1 C_{(a,0,0)} &= C_{(a+1,0,0)} + C_{(a-1,1,0)};\\
u_1 C_{(1,b,c)} &= C_{(2,b,c)} + 2C_{(0,b+1,c)} + C_{(1,b,c-1)} + C_{(1,b-1,c+1)};
\end{aligned}$$

$$u_1C_{(1,b,1)} = 2C_{(1,b,0)} + C_{(2,b,1)} + 2C_{(0,b+1,1)} + C_{(1,b-1,2)};$$
$$u_1C_{(1,b,0)} = 2C_{(0,b+1,0)} + C_{(2,b,0)} + C_{(1,b-1,1)};$$
$$u_1C_{(1,1,c)} = C_{(2,1,c)} + 2C_{(0,2,c)} + C_{(1,1,c-1)} + 2C_{(1,0,c+1)};$$
$$u_1C_{(1,1,1)} = 2C_{(1,1,0)} + C_{(2,1,1)} + 2C_{(0,2,1)} + 2C_{(1,0,2)};$$
$$u_1C_{(1,1,0)} = 2C_{(0,2,0)} + C_{(2,1,0)} + 2C_{(1,0,1)};$$
$$u_1C_{(1,0,c)} = C_{(2,0,c)} + 2C_{(0,1,c)} + C_{(1,0,c-1)};$$
$$u_1C_{(1,0,1)} = 3u_1 + 2C_{(0,1,1)} + C_{(2,0,1)};$$
$$u_1C_{(0,b,c)} = C_{(1,b,c)} + C_{(0,b,c-1)} + C_{(0,b-1,c+1)};$$
$$u_1C_{(0,b,1)} = 2C_{(0,b,0)} + C_{(1,b,1)} + C_{(0,b-1,2)};$$
$$u_1C_{(0,b,0)} = C_{(1,b,0)} + C_{(0,b-1,1)};$$
$$u_1C_{(0,1,c)} = 2C_{(0,0,c+1)} + C_{(1,1,c)} + C_{(0,1,c-1)} + C_{(0,0,c+1)};$$
$$u_1C_{(0,1,1)} = 2u_2 + 3C_{(0,0,2)} + C_{(1,1,1)};$$
$$u_1C_{(0,0,c)} = C_{(1,0,c)} + C_{(0,0,c-1)};$$
$$u_1^2 = C_{(2,0,0)} + 2u_2; \quad u_1u_2 = C_{(1,1,0)} + 3u_3; \quad u_1u_3 = 4 + C_{(1,0,1)};$$
$$u_2C_{(a,b,1)} = 2C_{(a+1,b,0)} + 2C_{(a-1,b+1,0)} + C_{(a,b-1,1)} + C_{(a,b+1,1)}$$
$$+ u_2C_{(a,b,1)} = C_{(a-1,b,2)} + C_{(a+1,b-1,2)};$$
$$u_2C_{(a,b,0)} = C_{(a,b-1,0)} + C_{(a,b+1,0)} + C_{(a-1,b,1)} + C_{(a+1,b-1,1)};$$
$$u_2C_{(a,1,c)} = 2C_{(a,0,c)} + 2C_{(a+1,0,c+1)} + C_{(a-1,1,c+1)} + C_{(a-1,2,c-1)}$$
$$+ C_{(a+1,1,c-1)} + C_{(a,2,c)};$$
$$u_2C_{(a,1,1)} = 2C_{(a+1,1,0)} + 2C_{(a-1,2,0)} + 2C_{(a,0,1)} + C_{(a,2,1)}$$
$$+ 2C_{(a+1,0,2)} + C_{(a-1,1,2)};$$
$$u_2C_{(a,1,0)} = 3C_{(a,0,0)} + C_{(a,2,0)} + 2C_{(a+1,0,1)} + C_{(a-1,1,1)};$$
$$u_2C_{(a,0,c)} = C_{(a,1,c)} + C_{(a+1,0,c-1)} + C_{(a-1,2,c-1)} + C_{(a-1,0,c+1)};$$
$$u_2C_{(a,0,1)} = 3C_{(a+1,0,0)} + 2C_{(a-1,1,0)} + C_{(a,1,1)} + C_{(a-1,0,2)};$$
$$u_2C_{(a,0,0)} = C_{(a,1,0)} + C_{(a-1,0,1)};$$
$$u_2C_{(1,b,c)} = C_{(1,b-1,c)} + C_{(1,b+1,c)} + C_{(2,b,c-1)} + 2C_{(0,b+1,c-1)}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + 2C_{(0,b,c+1)} + C_{(2,b-1,c+1)};\\
u_2C_{(1,b,1)} &= 4C_{(0,b+1,0)} + 2C_{(2,b,0)} + C_{(1,b-1,1)} + C_{(1,b+1,1)}\\
&\quad + 2C_{(0,b,2)} + C_{(2,b-1,2)};\\
u_2C_{(1,b,0)} &= C_{(1,b-1,0)} + C_{(1,b+1,0)} + 2C_{(0,b,1)} + C_{(2,b-1,1)};\\
u_2C_{(1,1,c)} &= 2C_{(1,0,c)} + C_{(1,2,c)} + C_{(2,1,c-1)} + 2C_{(0,2,c-1)}\\
&\quad + 2C_{(2,0,c+1)} + 2C_{(0,1,c+1)};\\
u_2C_{(1,1,1)} &= 4C_{(0,2,0)}+2C_{(2,1,0)}+2C_{(1,0,1)}+C_{(1,2,1)}+2C_{(2,0,2)}+2C_{(0,1,2)};\\
u_2C_{(1,1,0)} &= 3u_1 + C_{(1,2,0)} + 2C_{(2,0,1)} + 2C_{(0,1,1)};\\
u_2C_{(1,0,c)} &= 3C_{(0,0,c+1)} + C_{(1,1,c)} + C_{(2,0,c-1)} + 2C_{(0,1,c-1)};\\
u_2C_{(1,0,1)} &= 3C_{(2,0,0)} + 4C_{(0,2,0)} + 3C_{(0,0,2)} + C_{(1,1,1)};\\
u_2C_{(0,b,c)} &= C_{(0,b-1,c)} + C_{(0,b+1,c)} + C_{(1,b,c-1)} + C_{(1,b-1,c+1)};\\
u_2C_{(0,b,1)} &= 2C_{(1,b,0)} + C_{(0,b-1,1)} + C_{(0,b+1,1)} + C_{(1,b-1,2)};\\
u_2C_{(0,b,0)} &= C_{(0,b+1,0)} + C_{(1,b-1,1)} + C_{(0,b-1,0)};\\
u_2C_{(0,1,c)} &= C_{(0,2,c)} + C_{(1,1,c-1)} + 2C_{(1,0,c+1)} + 3C_{(0,0,c)};\\
u_2C_{(0,1,1)} &= 2C_{(1,1,0)} + 3u_3 + C_{(0,2,1)} + 2C_{(1,2,0)};\\
u_2C_{(0,0,c)} &= C_{(0,1,c)} + C_{(1,0,c-1)};\\
u_2^2 &= 6 + C_{(0,2,0)} + 2C_{(1,0,1)}; \quad u_2u_3 = 3u_1 + C_{(0,1,1)};\\
u_3C_{(a,b,1)} &= 2C_{(a,b+1,0)} + C_{(a-1,b,1)} + C_{(a+1,b-1,1)} + C_{(a,b,2)};\\
u_3C_{(a,b,0)} &= C_{(a-1,b,0)} + C_{(a+1,b-1,0)} + C_{(a,b,1)};\\
u_3C_{(a,1,c)} &= 2C_{(a+1,0,c)} + C_{(a-1,1,c)} + C_{(a,2,c-1)} + C_{(a,1,c+1)};\\
u_3C_{(a,1,1)} &= 2C_{(a,2,0)} + 2C_{(a+1,0,1)} + C_{(a-1,1,1)} + C_{(a,1,2)};\\
u_3C_{(a,1,0)} &= 3C_{(a+1,0,0)} + C_{(a-1,1,0)} + C_{(a,1,1)};\\
u_3C_{(a,0,c)} &= C_{(a-1,0,c)} + C_{(a,1,c-1)} + C_{(a,0,c+1)};\\
u_3C_{(a,0,1)} &= 2C_{(a,1,0)} + C_{(a-1,0,1)} + C_{(a,0,2)};\\
u_3C_{(a,0,0)} &= C_{(a-1,0,0)} + C_{(a,0,1)};\\
u_3C_{(1,b,c)} &= C_{(1,b,c+1)} + C_{(1,b+1,c-1)} + 2C_{(0,b,c)} + C_{(2,b-1,c)};
\end{aligned}
$$

$$u_3C_{(1,b,1)} = 2C_{(1,b+1,0)} + 2C_{(0,b,1)} + C_{(2,b-1,1)} + C_{(1,b,2)};$$
$$u_3C_{(1,b,0)} = 2C_{(0,b,0)} + C_{(2,b-1,0)} + C_{(1,b,1)};$$
$$u_3C_{(1,1,c)} = 2C_{(0,1,c)} + C_{(1,2,c-1)} + C_{(1,1,c+1)} + 2C_{(2,0,c)};$$
$$u_3C_{(1,1,1)} = 2C_{(1,2,0)} + 2C_{(2,0,1)} + 2C_{(0,1,1)} + C_{(1,1,2)};$$
$$u_3C_{(1,1,0)} = 3C_{(2,0,0)} + 2u_2 + C_{(1,1,1)};$$
$$u_3C_{(1,0,c)} = 2C_{(0,0,c)} + C_{(1,1,c-1)};$$
$$u_3C_{(1,0,1)} = 2C_{(1,1,0)} + 3u_3 + C_{(1,0,2)};$$
$$u_3C_{(0,b,c)} = C_{(1,b-1,c)} + C_{(0,b+1,c-1)} + C_{(0,b,c+1)};$$
$$u_3C_{(0,b,1)} = 2C_{(0,b+1,0)} + C_{(1,b-1,1)} + C_{(0,1,2)};$$
$$u_3C_{(0,b,0)} = C_{(1,b-1,0)} + C_{(0,b,1)};$$
$$u_3C_{(0,1,c)} = C_{(1,0,c)} + C_{(0,2,c-1)} + C_{(0,1,c+1)} + C_{(1,0,c)};$$
$$u_3C_{(0,1,1)} = C_{(0,1,2)} + 2C_{(0,2,0)} + 2C_{(1,0,1)};$$
$$u_3C_{(0,0,c)} = C_{(0,0,c+1)} + C_{(0,1,c-1)}; \qquad u_3^2 = C_{(0,0,2)} + 2u_2.$$

Породжуючі рекурсії для S-поліномів алгебри A_3 мають вигляд

$$u_1S_{(a,b,c)} = S_{(a+1,b,c)} + S_{(a-1,b+1,c)} + S_{(a,b-1,c+1)} + S_{(a,b,c-1)};$$
$$u_2S_{(a,b,c)} = S_{(a,b+1,c)} + S_{(a+1,b-1,c+1)} + S_{(a-1,b,c+1)} + S_{(a+1,b,c-1)}$$
$$+ S_{(a-1,b+1,c-1)} + S_{(a,b-1,c)};$$
$$u_3S_{(a,b,c)} = S_{(a,b,c+1)} + S_{(a,b+1,c-1)} + S_{(a+1,b-1,c)} + S_{(a-1,b,c)}.$$

Але рекурсивне обчислення явного вигляду S-поліномів надзвичайно громіздке, тому для обчислення скористаємося характерами алгебри A_3.

#=0:

$\chi_{(0,0,0)}$=$C_{(0,0,0)}$=1,

$\chi_{(1,0,1)}$=3+$C_{(1,0,1)}$,

$\chi_{(0,2,0)}$=2+$C_{(1,0,1)}$+$C_{(0,2,0)}$,

$\chi_{(0,1,2)}$=3+2$C_{(1,0,1)}$+$C_{(0,2,0)}$+$C_{(0,1,2)}$,

$\chi_{(2,1,0)}$=3+2$C_{(1,0,1)}$+$C_{(0,2,0)}$+$C_{(2,1,0)}$.

$\#=1$:

$\chi_{(1,0,0)}=C_{(1,0,0)}=u_1,$

$\chi_{(0,1,1)}=2u_1+C_{(0,1,1)},$

$\chi_{(2,0,1)}=3u_1+C_{(0,1,1)}+C_{(2,0,1)},$

$\chi_{(0,0,3)}=u_1+C_{(0,1,1)}+C_{(0,0,3)},$

$\chi_{(1,2,0)}=3u_1+2C_{(0,1,1)}+C_{(2,0,1)}+C_{(1,2,0)}.$

$\#=2$:

$\chi_{(0,1,0)}=C_{(0,1,0)}=u_2,$

$\chi_{(0,0,2)}=u_2+C_{(0,0,2)},$

$\chi_{(2,0,0)}=u_2+C_{(2,0,0)},$

$\chi_{(1,1,1)}=4u_2+2C_{(0,0,2)}+2C_{(2,0,0)}+C_{(1,1,1)}.$

$\#=3$:

$\chi_{(0,0,1)}=C_{(0,0,1)}=u_3,$

$\chi_{(1,1,0)}=2u_3+C_{(1,1,0)},$

$\chi_{(1,0,2)}=3u_3+C_{(1,1,0)}+C_{(1,0,2)},$

$\chi_{(3,0,0)}=u_3+C_{(1,1,0)}+C_{(3,0,0)},$

$\chi_{(0,2,1)}=3u_3+2C_{(1,1,0)}+C_{(1,0,2)}+C_{(0,2,1)}.$

Дослідимо перетворення фундаментальної області $F(A_3) \to \mathfrak{F}(A_3)$, що відповідає перетворенню, яке пов'язує поліноми та орбіт-функції $x \mapsto u$. Вершини симплексу $F(A_3)$ переходять у точки $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$:

$$(0,0,0) \mapsto (4,6,0) =: P_0, \qquad \omega_1 \mapsto (0,-6,-4) =: P_1,$$
$$\omega_2 \mapsto (-4,6,0) =: P_2, \qquad \omega_3 \mapsto (0,-6,4) =: P_3.$$

Область ортогональності поліномів алгебри A_3 зображено на рис. 3.10.

Приклад 3.26. Розглянемо дискретизацію фундаментальної області з числом $M = 3$. $|F_3(A_3)| = 20$, а точки сітки $(\frac{s_1}{M}, \frac{s_2}{M}, \frac{s_3}{M})$ у нових координа-

C-поліноми	
$\# = 0$	
$C_{(1,0,1)}$	$-4 + u_1u_3$
$C_{(0,2,0)}$	$2 - 2u_1u_3 + u_2^2$
$C_{(0,1,2)}$	$4 - u_1u_3 - 2u_2^2 + u_2u_3^2$
$C_{(2,1,0)}$	$4 - u_1u_3 + u_1^2u_2 - 2u_2^2$
$\# = 1$	
$C_{(1,0,0)}$	u_1
$C_{(0,1,1)}$	$-3u_1 + u_2u_3$
$C_{(0,0,3)}$	$3u_1 - 3u_2u_3 + u_3^3$
$C_{(2,0,1)}$	$-u_1 - 2u_2u_3 + u_1^2u_3$
$C_{(1,2,0)}$	$5u_1 - u_2u_3 - 2u_1^2u_3 + u_1u_2^2$
$\# = 2$	
$C_{(0,1,0)}$	u_2
$C_{(0,0,2)}$	$-2u_2 + u_3^2$
$C_{(2,0,0)}$	$-2u_2 + u_1^2$
$C_{(1,1,1)}$	$4u_2 - 3u_3^2 - 3u_1^2 + u_1u_2u_3$
$\# = 3$	
$C_{(0,0,1)}$	u_3
$C_{(1,1,0)}$	$-3u_3 + u_1u_2$
$C_{(3,0,0)}$	$3u_3 - 3u_1u_2 + u_1^3$
$C_{(1,0,2)}$	$-u_3 - 2u_1u_2 + u_1u_3^2$
$C_{(0,2,1)}$	$5u_3 - u_1u_2 - 2u_1u_3^2 + u_2^2u_3$

S-поліноми	
$\# = 0$	
$S_{(2,1,2)}$	$-1 + u_1u_3$
$S_{(1,3,1)}$	$u_2^2 - u_1u_3$
$S_{(1,2,3)}$	$1 - u_2^2 - u_1u_3 + u_2u_3^2$
$S_{(3,2,1)}$	$1 + u_1^2u_2 - u_2^2 - u_1u_3$
$\# = 1$	
$S_{(2,1,1)}$	u_1
$S_{(1,2,2)}$	$-u_1 + u_2u_3$
$S_{(1,1,4)}$	$u_1 - 2u_2u_3 + u_3^3$
$S_{(3,1,2)}$	$-u_1 + u_1^2u_3 - u_2u_3$
$S_{(2,3,1)}$	$u_1 + u_1u_2^2 - u_1^2u_3 - u_2u_3$
$\# = 2$	
$S_{(1,2,1)}$	u_2
$S_{(1,1,3)}$	$-u_2 + u_3^2$
$S_{(3,1,1)}$	$u_1^2 - u_2$
$S_{(2,2,2)}$	$-u_1^2 - u_3^2 + u_1u_2u_3$
$\# = 3$	
$S_{(1,1,2)}$	u_3
$S_{(2,2,1)}$	$u_1u_2 - u_3$
$S_{(4,1,1)}$	$u_1^3 - u_1u_2 + u_3$
$S_{(2,1,3)}$	$-u_1u_2 - u_3 + u_1u_3^2$
$S_{(1,3,2)}$	$-u_1u_2 - u_3 - u_1u_3^2 + u_2^2u_3$

Табл. 3.11. C-поліноми та S-поліноми алгебри A_3.

тах $(\mathrm{Re}(u_1), u_2, \mathrm{Im}(u_1))$ такі:

$$(0,0,0) \mapsto (4,6,0), \qquad (0,0,1) \mapsto (0,-6,4),$$
$$(\tfrac{2}{3},0,\tfrac{1}{3}) \mapsto (0,-3,-2), \qquad (\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3},0) \mapsto (-\tfrac{1}{2},-3,-\tfrac{3\sqrt{3}}{2}),$$
$$(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3},0) \mapsto (-\tfrac{3\sqrt{3}}{2},3,-\tfrac{1}{2}), \qquad (0,\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3}) \mapsto (-\tfrac{3\sqrt{3}}{2},3,\tfrac{1}{2}),$$
$$(0,\tfrac{1}{3},0) \mapsto (2,3,0), \qquad (\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},0) \mapsto (0,0,-1),$$

$(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}) \mapsto (-1,0,0)$, $(\frac{2}{3},0,0) \mapsto (\frac{1}{2},-3,-\frac{3\sqrt{3}}{2})$,
$(1,0,0) \mapsto (0,-6,-4)$, $(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}) \mapsto (-\frac{1}{2},-3,\frac{3\sqrt{3}}{2})$,
$(0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}) \mapsto (0,0,1)$, $(0,\frac{2}{3},0) \mapsto (-2,3,0)$,
$(0,1,0) \mapsto (-4,6,0)$, $(\frac{1}{3},0,\frac{2}{3}) \mapsto (0,-3,2)$,
$(\frac{1}{3},0,0) \mapsto (\frac{3\sqrt{3}}{2},3,-\frac{1}{2})$, $(0,0,\frac{2}{3}) \mapsto (\frac{1}{2},-3,\frac{3\sqrt{3}}{2})$,
$(0,0,\frac{1}{3}) \mapsto (\frac{3\sqrt{3}}{2},3,\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{3},0,\frac{1}{3}) \mapsto (1,0,0)$.

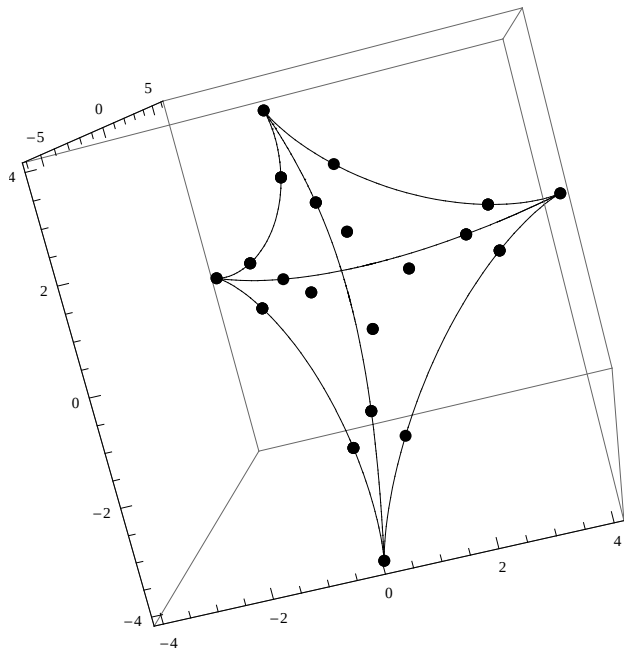


Рис. 3.10. Область ортогональності $\mathfrak{F}$ та точки дискретизації $\mathfrak{F}_3$ поліномів алгебри A_3.

Алгебра B_3 та ортогональні поліноми трьох змінних. Групи Вейля алгебр B_3 та C_3 — ізоморфні, але, не зважаючи на це, орбіт-функції та ортогональні поліноми у цих випадках суттєво відрізняються. Нові змінні позначаємо u_1, u_2, u_3, де $u_j := C_{\omega_j}$, $j = 1,2,3$. Для алгебри B_3 існує два класи конґруентності, визначені співвідношенням

$$\#(B_3) = a_3 \mod 2.$$

Розмірність незвідного зображення обчислюється за правилом

$$d_{(a,b,c)}(B_3) = \tfrac{1}{720}(a+1)(b+1)(c+1)(a+b+2)(2b+c+3)\times$$

$$(2a+2b+5)(b+c+2)(a+b+c+3)(a+2b+c+4).$$

C-поліноми з найнижчими степенями обчислено та наведено у таблиці 3.12, решта поліномів виводиться з породжуючих та додаткових рекурсій. Породжуючі рекурсії для алгебри B_3 мають вигляд

$$\begin{aligned}
u_1C_{(a,b,c)}=&C_{(a+1,b,c)}+C_{(a-1,b+1,c)}+C_{(a,b-1,c+2)}+C_{(a,b+1,c-2)}\\
&+C_{(a+1,b-1,c)}+C_{(a-1,b,c)}, \quad a,b\geqslant 2,\ c\geqslant 3;\\
u_2C_{(a,b,c)}=&C_{(a,b+1,c)}+C_{(a+1,b-1,c+2)}+C_{(a-1,b,c+2)}+C_{(a+1,b+1,c-2)}\\
&+C_{(a-1,b+2,c-2)}+C_{(a+2,b-1,c)}+C_{(a+1,b-2,c+2)}+C_{(a-2,b+1,c)}\\
&+C_{(a-1,b-1,c+2)}+C_{(a+1,b,c-2)}+C_{(a-1,b+1,c-2)}+C_{(a,b-1,c)},\\
&a\geqslant 2,\ b,c\geqslant 3;\\
u_3C_{(a,b,c)}=&C_{(a,b,c+1)}+C_{(a,b+1,c-1)}+C_{(a+1,b-1,c+1)}+C_{(a-1,b,c+1)}\\
&-C_{(a+1,b,c-1)}+C_{(a-1,b+1,c-1)}+C_{(a,b-1,c+1)}+C_{(a,b,c-1)},\\
&a,b,c\geqslant 2.
\end{aligned}$$

Решта додаткових рекурсій, за винятком розв'язаних найнижчих, такі:

$$\begin{aligned}
C_{(a+1,b,0)}(u) =& u_1C_{(a,b,0)}(u)-C_{(a-1,b+1,0)}(u)-C_{(a+1,b-1,0)}(u)\\
&-C_{(a-1,b,0)}(u)-C_{(a,b-1,2)}(u),\\
C_{(a,b+1,0)}(u) =& u_2C_{(a,b,0)}(u)-C_{(a-2,b+1,0)}(u)-C_{(a+2,b-1,0)}(u)\\
&-C_{(a-1,b,2)}(u)-C_{(a,b-1,0)}(u)-C_{(a+1,b-1,2)}(u)\\
&-C_{(a-1,b-1,2)}(u)-C_{(a+1,b-2,2)}(u),\\
C_{(a+1,0,0)}(u) =& u_1C_{(a,0,0)}(u)-C_{(a-1,1,0)}(u)-C_{(a-1,0,0)}(u),\\
C_{(0,b+1,0)}(u) =& u_2C_{(0,b,0)}(u)-C_{(2,b-1,0)}(u)-C_{(0,b-1,0)}(u)\\
&-C_{(1,b-1,2)}(u)-C_{(1,b-2,2)}(u),\\
C_{(0,0,c+1)}(u) =& u_3C_{(0,0,c)}(u)-C_{(0,1,c-1)}(u)-C_{(1,0,c-1)}(u)-C_{(0,0,c-1)}(u),\\
C_{(a+1,0,c)}(u) =& u_1C_{(a,0,c)}(u)-C_{(a,1,c-2)}(u)-C_{(a-1,1,c)}(u),\\
C_{(a,0,c+1)}(u) =& u_3C_{(a,0,c)}(u)-C_{(a-1,0,c+1)}(u)-C_{(a-1,1,c-1)}(u)\\
&-C_{(a,1,c-1)}(u)-C_{(a,0,c-1)}(u)-C_{(a+1,0,c-1)}(u),
\end{aligned}$$

$$C_{(0,b+1,c)}(u) = u_2 C_{(0,b,c)}(u) - C_{(1,b-1,c+2)}(u) - C_{(1,b-2,c+2)}(u) - C_{(0,b-1,c)}(u) - C_{(2,b-1,c)}(u) - C_{(1,b+1,c-2)}(u) - C_{(1,b,c-2)}(u),$$

$$C_{(0,b,c+1)}(u) = u_3 C_{(0,b,c)}(u) - C_{(1,b-1,c+1)}(u) - C_{(0,b-1,c+1)}(u) - C_{(0,b+1,c-1)}(u) - C_{(0,b,c-1)}(u) - C_{(1,b,c-1)}(u).$$

♯0	1	u_1	u_2	u_1^2	u_3^2	u_1u_2	$u_1u_3^2$	u_1^3	u_2^2	$u_2u_3^2$	$u_1^2u_2$
$C_{(0,0,0)}(u)$	1										
$C_{(1,0,0)}(u)$	0	1									
$C_{(0,1,0)}(u)$	0	0	1								
$C_{(2,0,0)}(u)$	−6	0	−2	1							
$C_{(0,0,2)}(u)$	−8	−4	−2	0	1						
$C_{(1,1,0)}(u)$	24	8	6	0	−3	1					
$C_{(1,0,2)}(u)$	0	−8	−2	−4	0	−2	1				
$C_{(3,0,0)}(u)$	−24	−15	−6	0	3	−3	0	1			
$C_{(0,2,0)}(u)$	12	16	8	4	0	4	−2	0	1		
$C_{(0,1,2)}(u)$	−48	−20	−20	0	6	−6	0	0	−2	1	
$C_{(2,1,0)}(u)$	0	8	−6	4	0	2	−1	0	−2	0	1

♯1	u_3	u_1u_3	u_2u_3	u_3^3	$u_1^2u_3$	$u_1u_2u_3$
$C_{(0,0,1)}(u)$	1					
$C_{(1,0,1)}(u)$	−3	1				
$C_{(0,1,1)}(u)$	3	−2	1			
$C_{(0,0,3)}(u)$	−9	−3	−3	1		
$C_{(2,0,1)}(u)$	−3	−1	−2	0	1	
$C_{(1,1,1)}(u)$	30	12	8	−3	−2	1

Табл. 3.12. C-поліноми алгебри B_3 класів конґруентності $\# = 0$ та $\# = 1$.

Для побудови S-поліномів можемо використати формулу характера або рекурсії, що мають місце для $a, b, c \geqslant 2$:

$$S_{(a+1,b,c)}(u) = u_1 S_{(a,b,c)}(u) - S_{(a,b+1,c-2)}(u) - S_{(a,b-1,c+2)}(u)$$

$$
\begin{aligned}
&-S_{(a+1,b-1,c)}(u)-S_{(a-1,b+1,c)}(u)-S_{(a-1,b,c)}(u)\\
&-S_{(a-1,b+1,c)}(u)-S_{(a-1,b,c)}(u),\\
S_{(a,b+1,c)}(u) = u_2 S_{(a,b,c)}(u)&-S_{(a+1,b-1,c+2)}(u)-S_{(a-1,b-1,c+2)}(u)\\
&-S_{(a+1,b-2,c+2)}(u)-S_{(a+1,b,c-2)}(u)-S_{(a-2,b+1,c)}(u)\\
&-S_{(a-1,b,c+2)}(u)-S_{(a-1,b+2,c-2)}(u)-S_{(a+1,b+1,c-2)}(u)\\
&-S_{(a-1,b+1,c-2)}(u)-S_{(a+2,b-1,c)}(u),\\
S_{(a,b,c+1)}(u) = u_3 S_{(a,b,c)}(u)&-S_{(a+1,b-1,c+1)}(u)-S_{(a,b-1,c+1)}(u)\\
&-S_{(a-1,b,c+1)}(u)-S_{(a-1,b+1,c-1)}(u)-S_{(a,b+1,c-1)}(u)\\
&-S_{(a+1,b,c-1)}(u)-S_{(a,b,c-1)}(u).
\end{aligned}
$$

Перетворення $x \mapsto u$ трансформує вершини фундаментальної області $F(B_3)$ у вершини області ортогональності полінома $\mathfrak{F}(B_3) = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ за правилом:

$$
\begin{aligned}
&(0,0,0) \mapsto (6,12,8) =: P_0, \quad && \omega_1 \mapsto (6,12,-8) =: P_1,\\
&\tfrac{1}{2}\omega_2 \mapsto (-2,-4,0) =: P_2, \quad && \omega_3 \mapsto (-6,12,0) =: P_3.
\end{aligned}
$$

Області ортогональності $\mathfrak{F}(B_3)$ та точки дискретизації з прикладу 3.27 зображено на рис. 3.11.

Приклад 3.27. Зафіксуємо число $M = 4$, тоді $|F_4(B_3)| = 14$ та точки сітки $(\frac{s_1}{M}, \frac{s_2}{M}, \frac{s_3}{M})$ у нових координатах (u_1, u_2, u_3) мають вигляд:

$$
\begin{aligned}
&(0,0,0) \mapsto (6,12,8), && (0,0,\tfrac{1}{4}) \mapsto (0,0,2\sqrt{2}),\\
&(\tfrac{1}{2},\frac{1}{4},0) \mapsto (2,0,-4), && (1,0,0) \mapsto (6,12,-8),\\
&(0,\tfrac{1}{4},0) \mapsto (2,0,4), && (\tfrac{1}{4},0,0) \mapsto (4,4,4\sqrt{2}),\\
&(\tfrac{1}{2},0,0) \mapsto (2,-4,0), && (\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{4}) \mapsto (0,0,-2\sqrt{2}),\\
&(0,\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}) \mapsto (-4,4,0), && (0,0,\tfrac{1}{2}) \mapsto (-6,12,0),\\
&(0,\tfrac{1}{2},0) \mapsto (-2,-4,0), && (\tfrac{3}{4},0,0) \mapsto (4,4,-4\sqrt{2}),\\
&(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},0) \mapsto (0,-4,0), && (\tfrac{1}{4},0,\tfrac{1}{4}) \mapsto (-2,0,0).
\end{aligned}
$$

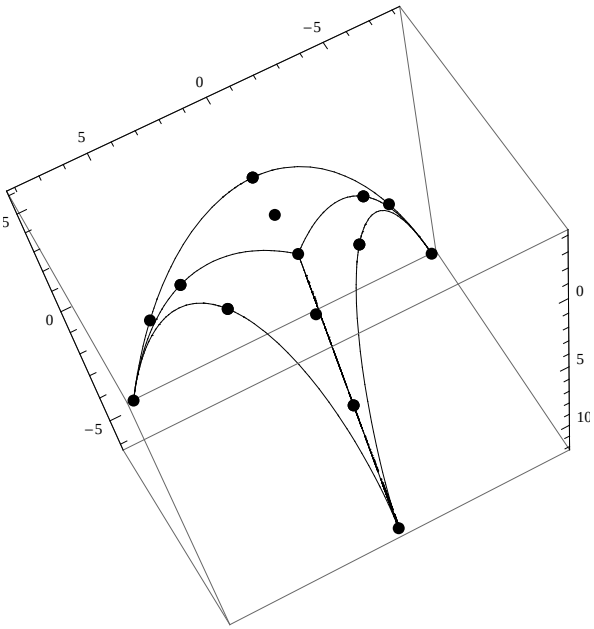


Рис. 3.11. Область ортогональності $\mathfrak{F}$ та дискретні точки $\mathfrak{F}_4$ поліномів алгебри B_3.

Алгебра C_3 та ортогональні поліноми трьох змінних. Для алгебри C_3 існує два класи конґруентності, визначені співвідношенням

$$\#(C_3) = a_1 + a_3 \mod 2.$$

Розмірність незвідного зображення обчислюється за правилом

$$d_{(a,b,c)}(C_3) = \tfrac{1}{720}(a+1)(b+1)(c+1)(a+b+2)(b+2c+3) \times (a+b+2c+4)(b+c+2)(a+2b+2c+5)(a+b+c+3).$$

C-поліноми алгебри C_3 з найнижчими степенями обчислено та наведено у таблиці 3.13, решта поліномів отримується з породжуючих та додаткових рекурсій. Породжуючі рекурсії для $a, b, c \geqslant 2$ такі:

$$\begin{aligned} u_1 C_{(a,b,c)} &= C_{(a+1,b,c)} + C_{(a-1,b+1,c)} + C_{(a,b-1,c+1)} + C_{(a,b+1,c-1)} + \\ &\qquad C_{(a+1,b-1,c)} + C_{(a-1,b,c)}, \qquad a,b,c \geqslant 2; \\ u_2 C_{(a,b,c)} &= C_{(a,b+1,c)} + C_{(a+1,b-1,c)} + C_{(a-1,b,c+1)} + C_{(a+1,b+1,c-1)} \\ &\quad + C_{(a-1,b+2,c-1)} + C_{(a+2,b-1,c)} + C_{(a+1,b-2,c+1)} + C_{(a-2,b+1,c)} \\ &\quad + C_{(a+1,b,c-1)} + C_{(a-1,b-1,c+1)} + C_{(a-1,b+1,c-1)} + C_{(a,b-1,c)}, \end{aligned}$$

$$a, b \geqslant 3,\ c \geqslant 2;$$

$$u_3 C_{(a,b,c)} = C_{(a,b,c+1)} + C_{(a,b+2,c-1)} + C_{(a+2,b-2,c+1)} + C_{(a-2,b,c+1)} + C_{(a+2,b,c-1)} + C_{(a-2,b+2,c-1)} + C_{(a,b-2,c+1)} + C_{(a,b,c-1)},$$

$$a, b \geqslant 3,\ c \geqslant 2.$$

Додаткові рекурсії:

$$C_{(a+1,0,0)}(u) = u_1 C_{(a,0,0)}(u) - C_{(a-1,1,0)}(u) - C_{(a-1,0,0)}(u),\ a > 1;$$

$$C_{(a+1,b,0)}(u) = u_1 C_{(a,b,0)}(u) - C_{(a,b-1,1)}(u) - C_{(a-1,b,0)}(u) - C_{(a+1,b-1,0)}(u) - C_{(a-1,b+1,0)}(u),\ a, b > 1;$$

$$C_{(a,b+1,0)}(u) = u_2 C_{(a,b,0)}(u) - C_{(a-1,b,1)}(u) - C_{(a,b-1,0)}(u) - C_{(a+2,b-1,0)}(u) - C_{(a-2,b+1,0)}(u) - C_{(a-1,b-1,1)}(u) - C_{(a+1,b-1,1)}(u) - C_{(a+1,b-2,1)}(u),\quad a, b > 2;$$

$$C_{(0,b+1,c)}(u) = u_2 C_{(0,b,c)}(u) - C_{(1,b,c-1)}(u) - C_{(0,b-1,c)}(u) - C_{(2,b-1,c)}(u) - C_{(1,b+1,c-1)}(u) - C_{(1,b-1,c+1)}(u) - C_{(1,b-2,c+1)}(u),\ b > 2,\ c > 1;$$

$$C_{(0,b,c+1)}(u) = u_3 C_{(0,b,c)}(u) - C_{(0,b-2,c+1)}(u) - C_{(0,b,c-1)}(u) - C_{(2,b-2,c+1)}(u) - C_{(2,b,c-1)}(u) - C_{(0,b+2,c-1)}(u),\ b > 2,\ c > 1;$$

$$C_{(a+1,0,c)}(u) = u_1 C_{(a,0,c)}(u) - C_{(a-1,1,c)}(u) - C_{(a,1,c-1)}(u) - C_{(a-1,0,c)}(u),\ a, c > 1;$$

$$C_{(a,0,c+1)}(u) = u_3 C_{(a,0,c)}(u) - C_{(a-2,0,c+1)}(u) - C_{(a,0,c-1)}(u) - C_{(a-2,2,c-1)}(u) - C_{(a+2,0,c-1)}(u) - C_{(a,2,c-1)}(u),\ a > 2,\ c > 1;$$

$$C_{(0,b+1,0)}(u) = u_2 C_{(0,b,0)}(u) - C_{(0,b-1,0)}(u) - C_{(2,b-1,0)}(u) - C_{(1,b-1,1)}(u) - C_{(1,b-2,1)}(u),\ b > 2;$$

$$C_{(0,0,c+1)}(u) = u_3 C_{(0,0,c)}(u) - C_{(0,0,c-1)}(u) - C_{(2,0,c-1)}(u) - C_{(0,2,c-1)}(u),\ c > 1.$$

Породжуючі рекурсії для S-поліномів мають місце коли $a, b, c \geqslant 2$

$$\begin{aligned}
S_{(a+1,b,c)}(u) &= u_1 S_{(a,b,c)}(u) - S_{(a,b-1,c+1)}(u) - S_{(a+1,b-1,c)}(u) \\
&\quad - S_{(a-1,b+1,c)}(u) - S_{(a-1,b,c)}(u) - S_{(a,b+1,c-1)}(u), \\
S_{(a,b+1,c)}(u) &= u_2 S_{(a,b,c)}(u) - S_{(a+1,b,c-1)}(u) - S_{(a-1,b,c+1)}(u) \\
&\quad - S_{(a+2,b-1,c)}(u) - S_{(a-2,b+1,c)}(u) - S_{(a-1,b-1,c+1)}(u) \\
&\quad - S_{(a-1,b+1,c-1)}(u) - S_{(a+1,b+1,c-1)}(u) - S_{(a+1,b-1,c+1)}(u) \\
&\quad - S_{(a+1,b-2,c+1)}(u) - S_{(a-1,b+2,c-1)}(u) - S_{(a,b-1,c)}(u), \\
S_{(a,b,c+1)}(u) &= u_3 S_{(a,b,c)}(u) - S_{(a,b-2,c+1)}(u) - S_{(a-2,b,c+1)}(u) \\
&\quad - S_{(a,b+2,c-1)}(u) - S_{(a+2,b-2,c+1)}(u) - S_{(a-2,b+2,c-1)}(u) \\
&\quad - S_{(a+2,b,c-1)}(u) - S_{(a,b,c-1)}(u).
\end{aligned}$$

Розглянемо, як перетворюється фундаментальна область $F(C_3) \to \mathfrak{F}(C_3)$ під дією перетворення $x \mapsto u$. Вершини $F(C_3)$ переходять у точки $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$:

$$\begin{aligned}
&(0,0,0) \mapsto (6,12,8) =: P_0, \quad && \omega_1 \mapsto (2,-4,-8) =: P_1, \\
&\omega_2 \mapsto (-2,-4,8) =: P_2, && \omega_3 \mapsto (-6,12,-8) =: P_3.
\end{aligned}$$

Область ортогональності поліномів алгебри C_3 зображено на рис. 3.12.

Приклад 3.28. Зафіксуємо сталу подрібнення $M = 4$. $|F_4(C_3)| = 14$ точки сітки $(\frac{s_1}{M}, \frac{s_2}{M}, \frac{s_3}{M}) \in F_4$ переходять у точки (u_1, u_2, u_3):

$$\begin{aligned}
&(0,0,0) \mapsto (6,12,8), && (0,0,\tfrac{1}{4}) \mapsto (3\sqrt{2},6,2\sqrt{2}), \\
&(0,\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}) \mapsto (-\sqrt{2},-2,2\sqrt{2}), && (\tfrac{1}{4},0,\tfrac{1}{4}) \mapsto (\sqrt{2},-2,-2\sqrt{2}), \\
&(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},0) \mapsto (0,-4,0), && (0,\tfrac{1}{2},0) \mapsto (-2,-4,8), \\
&(\tfrac{1}{2},0,0) \mapsto (2,-4,-8), && (0,0,1) \mapsto (-6,12,-8), \\
&(\tfrac{1}{4},0,0) \mapsto (4,4,0), && (0,0,\tfrac{3}{4}) \mapsto (-3\sqrt{2},6,-2\sqrt{2}), \\
&(0,\tfrac{1}{4},0) \mapsto (2,0,0), && (\frac{1}{4},0,\tfrac{1}{2}) \mapsto (-2,0,0), \\
&(0,\tfrac{1}{4},\frac{1}{2}) \mapsto (-4,4,0), && (0,0,\tfrac{1}{2}) \mapsto (0,0,0).
\end{aligned}$$

Ці точки зображено на області ортогональності $\mathfrak{F}(C_3)$ на рис. 3.12.

♯0	1	u_2	u_1^2	u_1u_3	u_2^2	$u_1^2u_2$	u_3^2	$u_1u_2u_3$	u_2^3	$u_2u_3^2$
$C_{(0,0,0)}(u)$	1									
$C_{(0,1,0)}(u)$	0	1								
$C_{(2,0,0)}(u)$	−6	−2	1							
$C_{(1,0,1)}(u)$	0	−2	0	1						
$C_{(0,2,0)}(u)$	12	8	−4	−2	1					
$C_{(2,1,0)}(u)$	0	−6	0	−1	−2	1				
$C_{(0,0,2)}(u)$	−8	−8	4	4	−2	0	1			
$C_{(1,1,1)}(u)$	0	12	0	−4	4	−2	−3	1		
$C_{(0,3,0)}(u)$	0	9	0	3	6	−3	3	−3	1	
$C_{(0,1,2)}(u)$	0	−18	0	3	−12	6	3	3	−2	1

♯1	u_1	u_3	u_1u_2	u_1^3	u_2u_3	$u_1^2u_3$	$u_1u_2^2$	$u_1u_3^2$	$u_2^2u_3$	v_3^3
$C_{(1,0,0)}(u)$	1									
$C_{(0,0,1)}(u)$	0	1								
$C_{(1,1,0)}(u)$	−4	−3	1							
$C_{(3,0,0)}(u)$	−3	3	−3	1						
$C_{(0,1,1)}(u)$	4	6	−2	0	1					
$C_{(2,0,1)}(u)$	0	−9	0	0	−2	1				
$C_{(1,2,0)}(u)$	12	−3	9	−4	−1	−2	1			
$C_{(1,0,2)}(u)$	−12	−6	−6	4	−1	4	−2	1		
$C_{(0,2,1)}(u)$	0	27	0	0	12	−6	0	−2	1	
$C_{(0,0,3)}(u)$	0	−27	0	0	−18	9	0	6	−3	1

Табл. 3.13. C-поліноми алгебри C_3 двох класів конґруентності $\# = 0$ та $\# = 1$.

Вагові функції для скалярного добутку та ортогональності C- та S-поліномів. Для практичних застосувань, зокрема для наближення функцій за допомогою поліномів, необхідні вагові функції, що дозволяють обчислити скалярний добуток двох ортогональних поліномів. Для кожної з простих алгебр Лі рангів два та три такі функції обчисле-

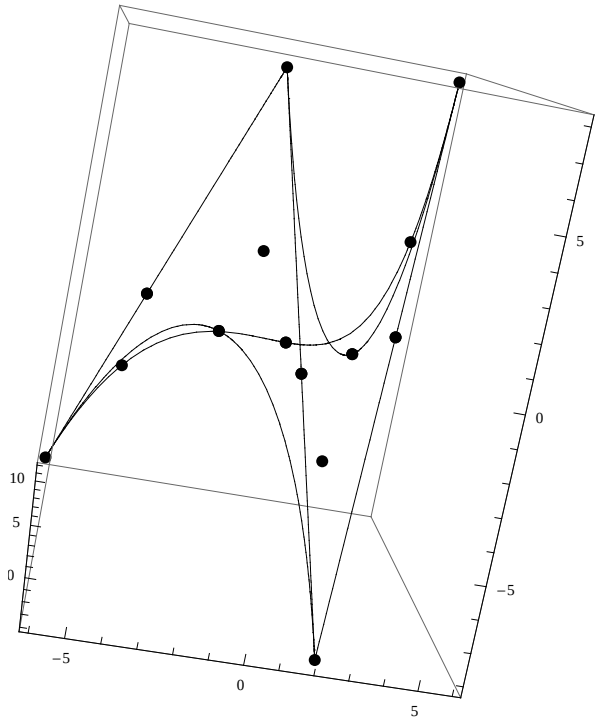


Рис. 3.12. Область ортогональності $\mathfrak{F}$ та точки подрібнення $\mathfrak{F}_4$ поліномів алгебри C_3.

но та наведено нижче для заміни змінних, яка відповідає C-функціям фундаментальних ваг (рекурентний метод побудови поліномів).

Алгебра A_2: $f(A_2)=|W_u(A_2)|J(u)$, де

$$J(u)^{-1}=4\pi^2\sqrt{u_1^2u_2^2-4u_1^3-4u_2^3+18u_1u_2-27}.$$

Алгебра C_2: $f(C_2)=|W_u(C_2)|J(u)$, де

$$J(u)^{-1}=4\pi^2\sqrt{u_1^2u_2^2-4(u_1^4+4u_1^2-u_2^3-8u_2^2-16u_2+6u_1^2u_2)}.$$

Алгебра A_3: $f(A_3)=\frac{|W_u(A_3)|}{8\pi^3\sqrt{|\mathbf{S}(u)|}}$ та $\tilde{f}(A_3)=\frac{4!\sqrt{|\mathbf{S}(u)|}}{8\pi^3}$, де

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(u) = {} & 256-27u_1^4+144u_1^2u_2-128u_2^2-4u_1^2u_2^3+16u_2^4-192u_1u_3\\ & +18u_1^3u_2u_3-80u_1u_2^2u_3-6u_1^2u_3^2+144u_2u_3^2+u_1^2u_2^2u_3^2\\ & -4u_2^3u_3^2-4u_1^3u_3^3+18u_1u_2u_3^3-27u_3^4.\end{aligned}$$

Алгебра B_3: $f(B_3)=\frac{|W_u(B_3)|}{8\pi^3\sqrt{|\mathbf{S}(u)|}}$ та $\tilde{f}(B_3)=\frac{2^33!\sqrt{|\mathbf{S}(u)|}}{8\pi^3}$, де

$$\mathbf{S}(u) = (16+4u_2-u_3^2)(1728+1728u_1+432u_1^2-32u_1^3-16u_1^4+864u_2$$

$$+576u_1u_2+72u_1^2u_2-8u_1^3u_2+108u_2^2+36u_1u_2^2-u_1^2u_2^2+4u_2^3$$
$$-432u_3^2-216u_1u_3^2+4u_1^3u_3^2-108u_2u_3^2-18u_1u_2u_3^2+27u_3^4).$$

Алгебра C_3: $f(C_3)=\frac{|W_u(C_3)|}{8\pi^3\sqrt{|\mathbf{S}(u)|}}$ та $\tilde{f}(C_3)=\frac{2^33!\sqrt{|\mathbf{S}(u)|}}{8\pi^3}$, де

$$\mathbf{S}(u) = (u_3-2u_2+4u_1-8)(8+4u_1+2u_2+u_3)(u_1^2u_2^2-4u_2^3-4u_1^3u_3$$
$$+18u_1u_2u_3-27u_3^2).$$

3.3.3. Правила галуження для поліномів алгебр Лі. У параграфі 3.2 досліджувались правила галуження груп Вейля, тобто, за допомогою матриці проєкції встановлювався зв'язок між групами Вейля алгебри Лі та її підалгебр. Вивчення та застосування правил галуження до ортогональних поліномів, що пов'язані з орбіт-функціями, також є важливою задачею, оскільки дозволить редукувати ортогональні поліноми визначені для однієї алгебри – до суми поліномів підалгебри чи набору підалгебр того самого або меншого рангу. При цьому, залежно від збереження чи зменшення рангу, поліноми редукуються до поліномів тієї самої чи меншої кількості змінних.

Ймовірно, що найбільш цікавими випадками будуть максимальні напівпрості підалгебри. Для алгебр рангу три та менше маємо наступний перелік вкладень:

$$A_2 \supset A_1,$$
$$C_2 \supset A_1 \times A_1, \quad C_2 \supset A_1,$$
$$G_2 \supset A_1 \times A_1, \quad G_2 \supset A_2, \quad G_2 \supset A_1.$$

$$A_3 \supset C_2, \quad A_3 \supset A_1 \times A_1,$$
$$B_3 \supset A_3, \quad B_3 \supset A_1 \times A_1 \times A_1, \quad B_3 \supset G_2,$$
$$C_3 \supset C_2 \times A_1, \quad C_3 \supset A_2, \quad C_3 \supset A_1.$$

Крім цього, редукція поліномів має місце і для тих випадків, коли підгрупа не є напівпростою редуктивною. Для рагу $r \leq 3$ існує три такі

максимальні підалгебри, а саме $A_2 \supset A_1 \times U_1$, $A_3 \supset A_2 \times U_1$, та $B_3 \supset B_2 \times U_1$. Вочевидь, незвідними поліномами 1-параметричної групи U_1 є усі мономи y^k, з цілими степенями k.

У цьому параграфі розглянемо прості алгебри Лі рангів $r = 2$ та $r = 3$ та дослідимо можливі редукції їх поліномів. Для цього будуть побудовані матриці проєкції Pr, що редукують просту групу Лі G до її максимальної підгрупи H. Після цього для кожного з наборів $\{G \supset H, \mathrm{Pr}\}$ ми встановимо правило проєкції фундаментальних C-функцій та знайдемо відповідну заміну змінних $u_i \mapsto f_i(y_1, \ldots, y_r)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, яка зводить ортогональні поліноми групи G зі змінними u_i до поліномів групи H зі змінними y_j. Приклади редукції C-поліномів наведено для кожної з пар $G \supset H$. Усі поліноми, використані у прикладах, побудовано рекурсивним методом за допомогою заміни $u_i := C_{\omega_i}$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Редукція поліномів алгебри A_2 до поліномів алгебри A_1. Матриця проєкції має вигляд $\mathrm{Pr} = (2\ 2)$, фундаментальні C-функції проєктуються таким чином

$$\begin{aligned} C_{(1,0)}(A_2) &\mapsto C_{(2)}(A_1)+C_{(0)}(A_1), \\ C_{(0,1)}(A_2) &\mapsto C_{(2)}(A_1)+C_{(0)}(A_1). \end{aligned}$$

Отже, редукція поліномів алгебри A_2 до поліномів алгебри A_1 виконується заміною змінних

$$\begin{aligned} u_1 &\mapsto y^2-1, \\ u_2 &\mapsto y^2-1. \end{aligned}$$

Приклад 3.29. Виконаємо редукцію кількох поліномів алгебри A_2, які було побудовано у попередньому параграфі.

$$\begin{aligned} C_{(1,1)}(A_2) = u_1u_2-3 &\mapsto y^4-2y^2-2 = T_4(y)+2T_2(y), \\ C_{(0,2)}(A_2) = u_2^2-2u_1 &\mapsto y^4-4y^2+3 = T_4(y)+1. \end{aligned}$$

Тут та нижче літерами T позначено поліноми Чебишева першого роду.

Редукція поліномів алгебри C_2 до поліномів алгебри $A_1 \times A_1 =: A_1^{(1)} \times A_1^{(2)}$.

$$\Pr = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_{(1,0)}(C_2) \ \mapsto \ C_{(1)}(A_1^{(1)})C_{(0)}(A_1^{(2)}) + C_{(0)}(A_1^{(1)})C_{(1)}(A_1^{(2)}),$$

$$C_{(0,1)}(C_2) \ \mapsto \ C_{(1)}(A_1^{(1)})C_{(1)}(A_1^{(2)}).$$

Заміна змінних, що реалізує редукцію поліномів:

$$u_1 \ \mapsto \ y_1 + y_2,$$

$$u_2 \ \mapsto \ y_1 y_2.$$

Приклад 3.30. У цьому прикладі поліноми Чебишева $T_m(y_1)$, $m = 1, 2, \ldots$ відповідають алгебрі Лі $A_1^{(1)}$, а поліноми Чебишева $T_m(y_2)$ відповідають алгебрі $A_1^{(2)}$.

$$C_{(2,1)}(C_2) = u_1^2 u_2 - 2u_2^2 - 6u_2 \ \mapsto \ y_1^3 y_2 + y_1 y_2^3 - 6y_1 y_2 = T_3(y_1)y_2 + y_1 T_3(y_2),$$

$$C_{(3,0)}(C_2) = u_1^3 - 3u_1 u_2 - 3u_1 \ \mapsto \ y_1^3 + y_2^3 - 3y_1 - 3y_2 = T_3(y_1) + T_3(y_2).$$

Редукція поліномів алгебри C_2 до поліномів алгебри A_1.

$$\Pr = (3 \ 4), \qquad \begin{aligned} C_{(1,0)}(C_2) \ &\mapsto \ C_{(3)}(A_1) + C_{(1)}(A_1), \\ C_{(0,1)}(C_2) \ &\mapsto \ C_{(4)}(A_1) + C_{(2)}(A_1). \end{aligned}$$

Заміна змінних:

$$u_1 \ \mapsto \ y^3 - 2y,$$

$$u_2 \ \mapsto \ y^4 - 3y^2.$$

Приклад 3.31.

$$C_{(1,1)}(C_2) = u_1 u_2 - 2u_1 \ \mapsto \ y^7 - 5y^5 + 4y^3 + 4y = T_7(y) - 2T_5(y) + 21y,$$

$$C_{(2,0)}(C_2) = u_1^2 - 2u_2 - 4 \ \mapsto \ y^6 - 6y^4 + 10y^2 - 4 = T_6(y) + T_2(y).$$

Редукція поліномів алгебри G_2 до поліномів алгебри A_2.

$$\Pr = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_{(1,0)}(G_2) \ \mapsto \ C_{(1,1)}(A_2),$$
$$C_{(0,1)}(G_2) \ \mapsto \ C_{(1,0)}(A_2)+C_{(0,1)}(A_2).$$

Заміна змінних у цьому випадку має вигляд

$$u_1 \ \mapsto \ y_1y_2-3,$$
$$u_2 \ \mapsto \ y_1+y_2.$$

Приклад 3.32. У цьому прикладі $C_{(a,b)}(\bar{y}) := C_{(a,b)}(y_1, y_2)$ — це поліноми алгебри A_2.

$$C_{(0,2)}(G_2) = u_2^2-2u_2-2u_1-6 \mapsto$$
$$\mapsto y_1^2+y_2^2-2y_1-2y_2 = C_{(2,0)}(\bar{y})+C_{(0,2)}(\bar{y}),$$
$$C_{(1,1)}(G_2) = -2u_2^2+u_1u_2+2u_2+4u_1+12 \mapsto$$
$$\mapsto y_1^2y_2+y_1y_2^2-2y_1^2-2y_2^2-y_1-y_1 = C_{(2,1)}(\bar{y})+C_{(1,2)}(\bar{y}).$$

Редукція поліномів алгебри G_2 до поліномів алгебри $A_1 \times A_1 =: A_1^{(1)} \times A_1^{(2)}$.

$$\Pr = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_{(1,0)}(G_2) \ \mapsto \ C_{(1)}(A_1^{(1)})C_{(3)}(A_1^{(2)}) + C_{(2)}(A_1^{(1)})C_{(0)}(A_1^{(2)}),$$
$$C_{(0,1)}(G_2) \ \mapsto \ C_{(1)}(A_1^{(1)})C_{(1)}(A_1^{(2)}) + C_{(0)}(A_1^{(1)})C_{(2)}(A_1^{(2)}).$$

Заміна змінних:

$$u_1 \ \mapsto \ y_1y_2^3-3y_1y_2+y_1^2-2,$$
$$u_2 \ \mapsto \ y_1y_2+y_2^2-2.$$

Приклад 3.33. Кожен з поліномів $T_m(y_1)$, $m = 1, 2, \ldots$ відповідає алгебрі $A_1^{(1)}$, а поліноми $T_m(y_2)$ — $A_1^{(2)}$.

$$C_{(0,2)}(G_2) = u_2^2 - 2u_2 - 2u_1 - 6 \;\mapsto$$
$$\mapsto y_2^4 + y_1^2 y_2^2 - 6y_2^2 - 2y_1^2 + 6 = T_4(y_2) + T_2(y_1)T_2(y_2) + 2,$$
$$C_{(1,1)}(G_2) = -2u_2^2 + u_1u_2 + 2u_2 + 4u_1 + 12 \;\mapsto$$
$$\mapsto\; y_1y_2^5 + y_1^2y_2^4 - 2y_2^4 - 5y_1y_2^3 - 4y_1^2y_2^2 + 8y_2^2 + y_1^3y_2 + 2y_1y_2 + y_1^2 - 4 =$$
$$= y_1T_5(y_2) - T_3(y_1)y_2 + T_2(y_1)T_4(y_2).$$

Редукція поліномів алгебри G_2 до поліномів алгебри A_1.

$$\mathrm{Pr} = (10\ 6)\,,$$
$$C_{(1,0)}(G_2) \;\mapsto\; C_{(10)}(A_1) + C_{(8)}(A_1) + C_{(2)}(A_1),$$
$$C_{(0,1)}(G_2) \;\mapsto\; C_{(6)}(A_1) + C_{(4)}(A_1) + C_{(2)}(A_1).$$

таким чином,

$$u_1 \;\mapsto\; y^{10} - 9y^8 + 27y^6 - 31y^4 + 10y^2 - 2,$$
$$u_2 \;\mapsto\; y^6 - 5y^4 + 6y^2 - 2.$$

Приклад 3.34.

$$C_{(0,2)}(G_2) = u_2^2 - 2u_2 - 2u_1 - 6 \;\mapsto$$
$$\mapsto y^{12} - 12y^{10} + 55y^8 - 120y^6 + 128y^4 - 56y^2 + 6 =$$
$$= T_{12}(y) + T_8(y) + 3T_4(y) + 8T_2(y) + 12.$$

Редукція поліномів алгебри A_3 до поліномів алгебри C_2.

$$\mathrm{Pr} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$C_{(1,0,0)}(A_3) \mapsto C_{(1,0)}(C_2),$$
$$C_{(0,1,0)}(A_3) \mapsto C_{(0,1)}(C_2) + 2C_{(0,0)}(C_2),$$
$$C_{(0,0,1)}(A_3) \mapsto C_{(1,0)}(C_2),$$

звідси

$$u_1 \mapsto\ y_1, \quad u_2 \mapsto\ y_2{+}2, \quad u_3 \mapsto\ y_1.$$

Приклад 3.35. Позначимо поліноми алгебри C_2 таким чином $C_{(a,b)}(\overline{y}) := C_{(a,b)}(y_1, y_2)$, тоді:

$$C_{(1,0,1)}(A_3) = -4 + u_1u_3 \mapsto -4 + y_1^2 = C_{(2,0)}(\overline{y}) + 2y_2,$$
$$C_{(0,1,1)}(A_3) = -3u_1 + u_2u_3 \mapsto -y_1 + y_1y_2 = C_{(1,1)}(\overline{y}) + y_1.$$

Редукція поліномів алгебри A_3 до поліномів алгебри $A_1 \times A_1 =: A_1^{(1)} \times A_1^{(2)}$.

$$\mathrm{Pr} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C_{(1,0,0)}(A_3) \mapsto C_1(A_1^{(1)})C_1(A_1^{(2)}),$$
$$C_{(0,1,0)}(A_3) \mapsto C_0(A_1^{(1)})C_2(A_1^{(2)}) + 2C_0(A_1^{(1)})C_0(A_1^{(2)}),$$
$$C_{(0,0,1)}(A_3) \mapsto C_1(A_1^{(1)})C_1(A_1^{(2)}).$$

Таким чином, змінні при редукції пов'язані співвідношеннями:

$$u_1 \mapsto\ y_1y_2, \quad u_2 \mapsto\ y_2^2, \quad u_3 \mapsto\ y_1y_2.$$

Приклад 3.36. Поліноми Чебишева від різних змінних $T_m(y_i)$, $m = 1, 2, \ldots$ відповідають різним групам Лі $A_1^{(i)}$, $i = 1, 2$,

$$C_{(1,0,1)} = -4 + u_1u_3 \mapsto -4 + y_1^2y_2^2 = T_2(y_1)T_2(y_2) + 2T_2(y_1) + 2T_2(y_2),$$
$$C_{(0,1,1)} = -3u_1 + u_2u_3 \mapsto -3y_1y_2 + y_1y_2^3 = y_1T_3(y_2).$$

Редукція поліномів алгебри B_3 до поліномів алгебри A_3.

$$\mathrm{Pr} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_{(1,0,0)}(B_3) \mapsto C_{(0,1,0)}(A_3)+C_{(1,0,1)}(A_3),$$
$$C_{(0,1,0)}(B_3) \mapsto C_{(1,1,1)}(A_3) + C_{(0,1,2)}(A_3),$$
$$C_{(0,0,1)}(B_3) \mapsto C_{(1,0,0)}(A_3) + C_{(0,0,1)}(A_3) + C_{(0,1,1)}(A_3).$$

Заміна змінних:

$$u_1 \mapsto\ y_2 + y_1y_3 - 4,$$
$$u_2 \mapsto\ y_1y_2y_3 + y_2y_3^2 - 3y_1^2 - 3y_3^2 - 2y_2^2 - y_1y_3 + 4y_2 + 4,$$
$$u_3 \mapsto\ y_2y_3 - 2y_1 + y_3.$$

Приклад 3.37. $C_{(a,b,c)}(\overline{y}) := C_{(a,b,c)}(y_1, y_2, y_3)$ — це поліноми підалгебри A_3.

$$C_{(1,0,1)}(B_3) = u_1u_3-3u_3 \mapsto$$
$$\mapsto y_1y_2y_3^2-2y_1^2y_3+y_1y_3^2+y_2^2y_3-2y_1y_2-6y_2y_3+14y_1-7y_3 =$$
$$= C_{(1,1,2)}(\overline{y})+4C_{(1,0,2)}(\overline{y})+C_{(0,2,1)}(\overline{y})+2C_{(2,0,1)}(\overline{y})-7C_{(0,1,1)}(\overline{y})$$
$$+5C_{(1,1,0)}(\overline{y})-9y_1+6y_3,$$
$$C_{(2,0,0)}(B_3) = u_1^2-2u_2-6 \mapsto$$
$$\mapsto y_1^2y_3^2-2y_2y_3^2+6y_1^2+5y_2^2+6y_3^2-6y_1y_3-16y_2+2 =$$
$$= C_{(2,0,2)}(\overline{y})+2C_{(2,1,0)}(\overline{y})+5C_{(0,2,0)}(\overline{y})+6C_{(2,0,0)}(\overline{y})+6C_{(0,0,2)}(\overline{y})$$
$$+9C_{(1,0,1)}(\overline{y})+8y_2+24.$$

Редукція поліномів алгебри B_3 до поліномів алгебри $3A_1 =: A_1^{(1)} \times A_1^{(2)} \times A_1^{(3)}$.

$$\mathrm{Pr} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C_{(1,0,0)}(B_3) \mapsto C_1(A_1^1)C_1(A_1^2)C_0(A_1^3) + C_0(A_1^1)C_0(A_1^2)C_2(A_1^3),$$
$$C_{(0,1,0)}(B_3) \mapsto C_1(A_1^1)C_1(A_1^2)C_2(A_1^3) + C_0(A_1^1)C_2(A_1^2)C_0(A_1^3)$$
$$+ C_2(A_1^1)C_0(A_1^2)C_0(A_1^3),$$

$$C_{(0,0,1)}(B_3) \mapsto C_0(A_1^1)C_1(A_1^2)C_1(A_1^3) + C_1(A_1^1)C_0(A_1^2)C_1(A_1^3).$$

Заміна, що редукує поліноми:

$$\begin{aligned} u_1 &\mapsto\ y_1y_2 + y_3^2 - 2,\\ u_2 &\mapsto\ y_1y_2(y_3^2-2) + y_1^2 + y_2^2 - 4,\\ u_3 &\mapsto\ y_1y_3 + y_2y_3. \end{aligned}$$

Приклад 3.38. Різні змінні у поліномах Чебишева відповідають випадкам різних підалгебр A_1: $T_m(y_i)$, $m = 1, 2, \ldots$ відповідає $A_1^{(i)}, i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} C_{(1,0,1)}(B_3) &= u_1u_3 - 3u_3 \mapsto\\ &\mapsto y_1^2y_2y_3 + y_1y_2^2y_3 + y_1y_3^3 + y_2y_3^3 - 5y_1y_3 - 5y_2y_3 =\\ &= y_1T_3(y_3) + y_2T_3(y_3) + T_2(y_1)y_2y_3 + y_1T_2(y_2)y_3,\\ C_{(0,1,1)}(B_3) &= u_2u_3 - 2u_1u_3 + 3u_3 \mapsto\\ &\mapsto y_1^2y_2y_3^3 + y_1y_2^2y_3^3 - 3y_1^2y_2y_3 - 3y_1y_2^2y_3 + y_1^3y_3\\ &\quad + y_2^3y_3 - 2y_1y_3^3 - 2y_2y_3^3 + 3y_1y_3 + 3y_2y_3 =\\ &= T_2(y_1)y_2T_3(y_3) + y_1T_2(y_2)T_3(y_3) + T_3(y_1)y_3 + T_3(y_2)y_3. \end{aligned}$$

Редукція поліномів алгебри B_3 до поліномів алгебри G_2.

$$\Pr = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} &C_{(1,0,0)}(B_3) \mapsto C_{(0,1)}(G_2),\\ &C_{(0,1,0)}(B_3) \mapsto C_{(1,0)}(G_2) + C_{(0,1)}(G_2),\\ &C_{(0,0,1)}(B_3) \mapsto C_{(0,1)}(G_2) + C_{(0,0)}(G_2). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$u_1 \mapsto\ y_2, \quad u_2 \mapsto\ y_1 + y_2, \quad u_3 \mapsto\ y_2 + 2.$$

Приклад 3.39. Позначимо поліноми алгебри G_2 як

$$C_{(a,b,c)}(\overline{y}) := C_{(a,b)}(y_1, y_2),$$

тоді

$$C_{(1,0,1)}(B_3) = u_1u_3 - 3u_3 \mapsto y_2^2 - y_2 - 6 = C_{(0,2)}(\overline{y}) + 2y_1 + y_2,$$
$$C_{(1,1,0)}(B_3) = u_1^2 - 2u_2 - 6 \mapsto y_2^2 - 2y_1 - 2y_2 - 6 = C_{(0,2)}(\overline{y}).$$

Редукція поліномів алгебри C_3 до поліномів алгебри $C_2 \times A_1$.

$$\mathrm{Pr} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_{(1,0,0)}(C_3) \mapsto C_{(1,0)}(C_2)C_0(A_1) + C_{(0,0)}(C_2)C_1(A_1),$$
$$C_{(0,1,0)}(C_3) \mapsto C_{(0,1)}(C_2)C_0(A_1) + C_{(1,0)}(C_2)C_1(A_1),$$
$$C_{(0,0,1)}(C_3) \mapsto C_{(0,1)}(C_2)C_1(A_1).$$

У цьому випадку редукція поліномів виконується заміною змінних

$$u_1 \mapsto\ y_1 + y_3,$$
$$u_2 \mapsto\ y_2 + y_1y_3,$$
$$u_3 \mapsto\ y_2y_3.$$

Приклад 3.40. Нехай $C_{(a,b,c)}(\overline{y}) := C_{(a,b)}(y_1, y_2)$ — це поліноми підалгебри C_2, а поліноми Чебишева $T_m(y_3)$, $m = 1, 2, \ldots$ відповідають алгебрі Лі A_1,

$$C_{(1,1,0)}(C_3) = u_1u_2 - 3u_3 - 4u_1 \mapsto y_1y_2 - 3y_2y_3 - 4y_1 = \\ = C_{(1,1)}(\overline{y}) - 2y_1 - 3y_2y_3$$
$$C_{(1,0,1)}(C_3) = u_1u_3 - 2u_2 \mapsto y_1y_2y_3 + y_2y_3^2 - 2y_1y_3 - 2y_2 = \\ = C_{(1,1)}(\overline{y})y_3 + y_2T_2(y_3),$$
$$C_{(2,0,0)}(C_3) = u_1^2 - 2u_2 - 6 \mapsto y_1^2 + y_3^2 - 2y_2 - 6 = C_{(2,0)}(\overline{y}) + T_2(y_3).$$

Редукція поліномів алгебри C_3 до поліномів алгебри A_2.

$$\mathrm{Pr} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_{(1,0,0)}(C_3) \mapsto C_{(1,0)}(A_2) + C_{(0,1)}(A_2),$$
$$C_{(0,1,0)}(C_3) \mapsto C_{(1,1)}(A_2) + C_{(1,0)}(A_2) + C_{(0,1)}(A_2),$$
$$C_{(0,0,1)}(C_3) \mapsto C_{(2,0)}(A_2) + C_{(0,2)}(A_2) + C_{(0,0)}(A_2).$$

Заміна змінних:

$$u_1 \mapsto\ y_1 + y_2,$$
$$u_2 \mapsto\ y_1y_2 + y_1 + y_2 - 3,$$
$$u_3 \mapsto\ y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 - 2y_2 + 2.$$

Приклад 3.41. In this case, $C_{(a,b,c)}(\overline{y}) := C_{(a,b)}(y_1, y_2)$ are polynomials of the subalgebra A_2,

$$C_{(1,0,1)}(C_3) = u_1u_3 - 2u_2 \mapsto$$
$$\mapsto y_1^3 + y_2^3 + y_1^2y_2 + y_1y_2^2 - 2y_1^2 - 2y_2^2 - 6y_1y_2 + 6 =$$
$$= C_{(3,0)}(\overline{y}) + C_{(0,3)}(\overline{y}) + C_{(2,1)}(\overline{y}) + C_{(1,2)}(\overline{y}) + y_1 + y_2,$$
$$C_{(2,0,0)}(C_3) = u_1^2 - 2u_2 - 6 \mapsto$$
$$\mapsto y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 - 2y_2 = C_{(2,0)}(\overline{y}) + C_{(0,2)}(\overline{y}).$$

Редукція поліномів алгебри C_3 до поліномів алгебри A_1.

$$\mathrm{Pr} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$
$$C_{(1,0,0)}(C_3) \mapsto C_5(A_1) + C_3(A_1) + C_1(A_1),$$
$$C_{(0,1,0)}(C_3) \mapsto C_8(A_1) + C_6(A_1) + 2C_4(A_1) + 2C_2(A_1),$$
$$C_{(0,0,1)}(C_3) \mapsto C_9(A_1) + C_7(A_1) + C_3(A_1) + C_1(A_1).$$

Редукція поліномів виконується заміною:

$$u_1 \mapsto\ y^5 - 4y^3 + 3y,$$
$$u_2 \mapsto\ y^8 - 7y^6 + 16y^4 - 13y^2,$$
$$u_3 \mapsto\ y^9 - 8y^7 + 20y^5 - 15y^3.$$

Приклад 3.42.

$$C_{(1,1,0)}(C_3) = u_1u_2 - 3u_3 - 4u_1 \mapsto$$

$$\mapsto y^{13}-11y^{11}+44y^9-74y^7+36y^5+22y^3-12y =$$
$$= T_{13}(y)+2T_{11}(y)+T_9(y)+3T_7(y)+2T_5(y)-43T_3(y)+128y,$$
$$C_{(1,0,1)}(C_3) = u_1u_3-2u_2 \mapsto$$
$$\mapsto y^{14}-12y^{12}+55y^{10}-121y^8+134y^6-77y^4+26y^2 =$$
$$= T_{14}(y)+2T_{12}(y)+2T_{10}(y)+T_8(y)+2T_6(y)+T_4(y)+T_2(y)+2.$$
$$C_{(2,0,0)}(C_3) = u_1^2-2u_2-6 \mapsto$$
$$\mapsto y^{10}-12y^8+51y^6-90y^4+57y-10 = T_{10}(y)-2T_8(y)-4.$$

Основні результати та висновки

Основними результатами дисертаційної роботи є наступні:

- Використовуючи розмірність централізатора похідної алгебри Лі, підалгебри та їх розмірності, сформульовано та доведено дві нові необхідні умови існування контракцій.
- У термінах S-розширень переглянуто гіпотезу А. Зайцева про можливість граничної класифікації розв'язних алгебр Лі. Для цього досліджено S-розширення тривимірних дійсних алгебр Лі та показано, що S-розширення та редукція алгебр Лі дозволяють отримати неунімодулярні алгебри Лі з унімодулярних, проте при цьому порушується відношення порядку на многовиді алгебр Лі фіксованої розмірності.
- Досліджено контракції комплексних нільпотентних алгебр Лі розмірностей п'ять та шість, для них встановлено достатні переліки необхідних умов та показано, що ці контракції можна реалізувати за допомогою контракцій Іньоню–Вігнера або узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера.
- Узагальнено алгебраїчний метод І. Широкова для побудови реалізацій алгебр Лі на випадок інтранзитивної дії локальної групи Лі. Запропоновано спосіб зведення реалізації до суттєвих змінних та метод побудови контракцій реалізацій алгебр Лі.
- Знайдено реалізації алгебр Пуанкаре $\mathfrak{p}(1,1)$ та $\mathfrak{p}(1,2)$ у просторах не більше ніж трьох змінних і побудовано деформації цих алгебр.
- Досліджено алгебри Галілея розмірностей, не вищих за п'ять, побудовано їх нееквівалентні реалізації та деформації.
- Для конформної алгебри Лі та двох алгебр де Сіттера побудовано нові породжуючі реалізації та отримано спільну деформацію алгебри Пуанкаре до алгебр де Сіттера як обернену до контракцій.

- Знайдено повні набори диференціальних інваріантів для найменшої алгебри Галілея та її деформацій, а також доведено теорему про нормальну форму інваріантної системи двох рівнянь другого порядку.
- Вивчено множини перерізів та проєкцій та запропоновано метод для дискретного Фур'є-аналізу майже періодичних функцій, пов'язаних з квазікристалами, цей метод протестовано на аперіодичних функціях квазікристала Фібоначчі. Розроблено та застосовано до растрових зображень симетричний переставний метод шифрування, що базується на одновимірних квазікристалах.
- Досліджено спеціальні C-, S- та E-функції, розроблено їх дискретизацію та доведено дискретну ортогональність. Для функцій, що відповідають напівпростим алгебрам рангу три, побудовано явний вигляд їх орбіт, стабілізаторів, фундаментальних областей та оператори другого порядку, для яких тривимірні C-функції та S-функції — це відповідно, розв'язки крайових задач Неймана та Діріхле.
- Розглянуто спеціальні експоненційні функції багатьох змінних, запропоновані А. Клімиком та Ї. Патерою у вигляді визначників та перманентів, та показано, що вони еквівалентні орбіт-функціям алгебри A_n. Побудовано правила галуження орбіт групи Вейля простих алгебр Лі A_n за максимальними підгрупами.
- Виходячи з орбіт-функцій побудовано ортогональні поліноми багатьох змінних та показано, що вони еквівалентні відомим наборам ортогональних поліномів, а саме поліномам Чебишева, Якобі, Макдональда та Курнвіндера. Розглянуто три методи побудови поліномів, отримано явний вигляд розв'язних рекурсій і редукції для випадку напівпростих алгебр Лі рангів два та три.

Список використаних джерел

1. Гапонова О.В., Нестеренко М.О., Системи ЗДР другого порядку інваріантні відносно низькорозмірних алгебр Лі, *Зб. праць Інституту математики НАН України* **3** (2006), no. 2, 71–91.
2. Зайцев Г.А., Проблема інваріантно-групового вивчення множин граничних геометрій та спеціальні підалгебри Лі, 1961, *Тези доповіді, Всесоюзна геометрична конференція (Київ, УРСР, 1961)*, 1–48.
3. Мубаракзянов Г.М., О разрешимых алгебрах Ли, *Изв. ВУЗов. Математика*, **(32)** (1963), no. 1, 114–123.
4. Мубаракзянов Г.М., Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка, *Изв. ВУЗов. Математика*, **(34)** (1963), no. 3, 99–106.
5. Федорчук В.М., Федорчук В.І., Про класифікацію низькорозмірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре P(1,4), *Зб. праць Інституту математики НАН України* **3**, 2 (2006) 302–308.
6. Федорчук В.М., Федорчук В.І. Про функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неперервних підгруп групи Пуанкаре P(1,4), *Мат. Методи та фіз.-мех. поля* **48** (2005), no. 4, 51–58.
7. Фущич В., Баранник Л., Баранник А., *Подгрупповой анализ групп Галиллея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений*, Киев, Наукова думка, 1991, 304 с.
8. Besicovitch A.S., Almost periodic functions, Dover publications, Cambrige, 1954.
9. Blattner R., Induced and produced representations of Lie algebras, *Trans. Am. Math. Soc.* **144** (1969), 457–474.

10. Bochner S., Properties of Fourier series of almost periodic functions, *Proc. London Math. Soc.* **26** (1927), 433–452.

11. Bochner S., A new approach to almost periodicity, *Proceedings of the Nat. Acad. Sci. USA* **48** (1962), 195–205.

12. Bochner S., von Neumann J., Almost periodic functions of groups II, *Trans. Am. Math. Soc.* **37** (1935), 21–50.

13. Bohr H., Almost periodic functions, Chelsea publishing company, 1947.

14. Bondarenko V., Petravchuk A., Wildness of the problem of classifying nilpotent Lie algebras of vector fields in four variables, *Linear Algebra Appl.*, **568** (2019), 165–172.

15. Borel A., de Siebental J., Les sous-groupes fermés de rang maximum de groupes de Lie clos, *Comment. Math. Helv.* **23** (1949), 200–221.

16. Bourbaki N., Lie groups and Lie algebras. Chapters 1–3, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1989.

17. Boyko V.M., Popovych V.O., Group classification Galilei invariant equations of higher order, *Праці Інституту математики НАН України* **36** (2001), 45–50.

18. Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., Computation of invariants of Lie algebras by means of moving frames, *J. Phys. A* **39** (2006), no. 20, 5749–5762; arXiv:math-ph/0602046v2.

19. Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., Invariants of solvable Lie algebras with triangular nilradicals and diagonal nilindependent elements, *Linear Algebra Appl.* **428** (2008), no. 4, 834–854.

20. Bremner M.R., Moody R.V., Patera J., *Tables of dominant weight multiplicities for representations of simple Lie algebras,* Marcel Dekker, New York 1985, 340 p.

21. Burde D., Degenerations of 7-dimensional nilpotent Lie algebras, *Comm. Algebra* **33** (2005), 1259–1277.

22. Burgers J.M., A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Adv. Appl. Mech.* **1** (1948), 171–199.

23. Campoamor-Stursberg R., A contraction formula for the invariants of the coadjoint representation of Lie algebras, Algebras Groups Geom. **19** (2002), 385–394.

24. Celeghini E., Tarlini M., Contraction of group representations II, *Nuovo Cimento B* **65** (1981), 172–180.

25. Champagne B., Kjiri M., Patera J., Sharp R.T., Description of reflection generated polytopes using decorated Coxeter diagrams, *Can. J. Phys.* **73** (1995), 566–584.

26. Chen L., Moody R.V., Patera J., Non-crystallographic root systems. Quasicrystals and discrete geometry, *Fields Inst. Monogr.*, **10**, Amer. Math. Soc., Providence, (1998), 135–178.

27. Couture M., Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Graded contractions of $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, *J. Math. Phys.* **32** (1991), 2310–2318.

28. De Montigny M., Niederle J., Nikitin A. G. Galilei invariant theories: I. Constructions of indecomposable finite-dimensional representations of the homogeneous Galilei group: directly and via contractions, *J. Phys. A* **39** (2006), 9365–9385.

29. Diffie W., Hellman M., New Directions in Cryptography, *IEEE Transactions on Information Theory*, **IT-22** (1976), 644–654.

30. Doebner H.D., Melsheimer O., On a class of generalized group contractions, Nuovo Cimento A(10) **49** (1967), 306–311.

31. Dunkl Ch., Xu Yu., Orthogonal polynomials of several variables, Cambridge University Press, New York, 2008.

32. Dunn K.B., Lidl R., Multidimensional generalizations of the Chebyshev polynomials. I, II, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **56**, (1980), no 4, 154–159, 160–165.

33. Dynkin E.B., Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras, *AMS Trnanslations*, **6**, (1957), no 2, 111–244.

34. Dynnikov I., Novikov S., Geometry of triangle equation, *Moscow. Mathj. Journal.-MMJ*, **3** (2003), 410–438.

35. Eisenhart L. P., Continuous groups of transformations, Dover Publications, New York, 1961.

36. Fels M., Olver P.J., Moving coframes: I. A practical algorithm, *Acta Appl. Math.* **51** (1998), 161–213.

37. Fels M., Olver P.J., Moving coframes: II. Regularization and theoretical foundations, *Acta Appl. Math.* **55** (1999), 127–208.

38. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of equations of quantum mechanics, New York, Allerton Press Inc., 1994, 480 pp.

39. Fushchych W.I., Tsyfra I.M., Boyko V.M., Nonlinear representations for Poincaré and Galilei algebras and nonlinear equations for electromagnetic fields, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **1** (1994) 210–221.

40. Fushchich W., Yegorchenko I., Second-order differential invariants of the rotation group $O(n)$ and of its extensions: $E(n)$, $P(1,n)$, $G(1,n)$, *Acta Appl. Math.* **28** (1992), 69–92.

41. Fushchich W., Zhdanov R., Symmetries and exact solutions of nonlinear Dirac equations, Kyiv, Mathematical Ukraina Publisher, 384 pp, 1997.

42. Fushchych W., Zhdanov R., Lahno V., On linear and nonlinear representations of the generalized Poincaré groups in the class of Lie vector fields, *J. Nonlinear Math. Phys.* **1** (1994) 295–308.

43. Futorny V., Klymchuk T., Petravchuk A., Sergeichuk V., Wildness of the problems of classifying two-dimensional spaces of commuting linear operators and certain Lie algebras, *Linear Algebra Appl.* **536** (2018) 201–209.

44. Gaponova O.V., Nesterenko M., Systems of second-order ODEs invariant with respect to low-dimensional Lie algebras, *Physics AUC.* **16** (2006), V.II, 238–256.

45. Gazeau J.P., Masakova Z., Pelantova E., Nested quasicrystalline discretizations of the line, *Physics and number theory* **10** (2006) 79–131.

46. Gerstenhaber M., On the deformation of rings and algebras *Ann. Math.* **79** (1964) 59–103.

47. Goldreich O., Foundations of cryptography, Cambridge University Press, 2001.

48. Gonzáles-López A., Kamran N., Olver P., Lie algebras of vector fields in the real plane, *Proc. London Math. Soc. (3)* **64** (1992), 339–368.

49. Grabowska K., Grabowski J., Solvable Lie algebras of vector fields and a Lie's conjecture, *SIGMA* **16** (2020), 065, 14 pp.

50. Graner N., Canonical coordinates on Lie groups and the Baker Campbell Hausdorff formula, Master thesis, Utah State University, Logan (2018), 39 pp.

51. Grunewald F., O'Halloran J., Varieties of nilpotent Lie algebras of dimension less than six, *J. Algebra* **112** (1988) 315–325.

52. Guillemin V., Sternberg S., An algebraic model of transitive differential geometry, *Bull. Am. Math. Soc.* **70** (1964) 16–47.

53. Guimond L.S. , Patera J., Patera J., Statistics and implementation of aperiodic pseudorandom number generators, *Appl. Num. Math.* **46** (2003), 295–318.

54. Hakova L., Larouche M., Patera J., Rings of n-dimensional polytopes, *J. Phys. A* **41** (2008), 495202, 21 pp.

55. Heckman G., Schlichtkrull H., Harmonic analysis and special functions on symmetric spaces, *Perspect. Math.* **16**, Academic press, San Diego, 1994, 225 pp.

56. Hegerfeldt G.C., Some properties of a class of generalized Inönu–Wigner contractions, Nuovo Cimento A (10) **51** (1967) 439–447.

57. Hernádez Heredero R., Olver P.J. Classification of invariant wave equations, *J. Math. Phys.* **37** (1996), 6419–6438.

58. Hof A., On diffraction by aperiodic structures, *Commun. Math. Phys.* **169** (1995), 25–43.

59. Hrivnak J., Novotny P., Twisted cocycles of Lie algebras and corresponding invariant functions, *Linear Algebra and its Applications* **3** (2009), 1384–1403.

60. Humphreys J.E., Introduction to Lie algebras and representation theory, New York, Springer, 1972.

61. Humphreys J.E., Reflection groups and Coxeter groups, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

62. Inönü E., Wigner E.P., On the contraction of groups and their representations, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **39** (1953), 510–524.

63. Ivanova N.M., Pallikaros C.A., On degenerations of algebras over an arbitrary field, *Advances in Group Theory and Applications* **7** (2019), 39–83.

64. Ivanova N.M., Pallikaros C.A., On degenerations of algebras over an arbitrary field, *Зб. праць Інституту математики НАН України* **16** (2019), no. 1, 84–99.

65. Ivanova N.M., Popovych R.O., Sophocleous C., Group Analysis of Variable Coefficient Diffusion-Convection Equations. II. Contractions and Exact Solutions, arXiv:0710.3049 (2008) 19 p.

66. Izaurieta F., Rodriguez E. and Patricio Salgado P., Expanding Lie (super)algebras through Abelian semigroups, *J. Math. Phys.* **47** (2006), 123512.

67. Kass S., Moody R.V., Patera J., Slansky R., Affine Lie algebras, weight multiplicities, and branching rules, Vol.1 and Vol.2 Los Alamos Series

in Basic and Applied Sciences, University of California Press, Berkeley, CA, 1990.

68. Kawski M., Nilpotent Lie algebras of vectorfields, *J. reine angew. Math.* **388** (1988), 1–17.
69. Keller G., Equilibrium states in ergodic theory, LMS Student Texts **42** Cambridge U. Press, Cambridge, 1998.
70. Klimyk A., Patera J., Orbit functions *SIGMA* **2** (2006), 006, 60 pp.
71. Klimyk A., Patera J., Antisymmetric orbit functions *SIGMA* **3** (2007), 023, 83 pp.
72. Klimyk A., Patera J., E-orbit functions, *SIGMA* **4** (2008), 002, 57 pp.
73. Klimyk A., Patera J., (Anti)symmetric multidimensional exponential functions and the corresponding Fourier transforms *J. Phys. A* **40** (2007), 10473–10489.
74. Klimyk A., Patera J. Alternating group and multivariate exponential functions, *CRM Proceedings and Lecture Notes* **47** (2009), 14 pp.
75. Koornwinder T.H., Orthogonal polynomials in two variables which are eigenfunctions of two algebraically independent partial differential operators. I–IV, Indag. Math. **36** (1974) 48–66, 357–381.
76. Koornwinder T.H., Askey–Wilson polynomials for root systems of type BC, in Hypergeometric functions on domains of positivity, Jack polynomials, and applications (Tampa, FL, 1991), *Contemp. Math.*, **138**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 189–204.
77. Lapointe L., Lascoux A., Morse J., Determinantal expressions for Macdonald polynomials, *Internat. Math. Res. Notices* **1998** (1998), no. 18, 957–978.
78. Lapointe L., Lascoux A., Morse J., Determinantal expression and recursion for Jack polynomials, *Electron J. Combin.* **7** (2000), Note 1, 7 pp.
79. Larouche M., Nesterenko M., Patera J., Branching rules for the Weyl group orbits of the Lie algebra A_n, *J. Phys. A* **42** (2009), 485203, 15 pp.

80. Lelong-Ferrand J., Fonctions preharmonique et fonctions preholomorphes, *Bull. Sci. Matm.* **568** (1944), 152–180.

81. Lie S., Theory of Transformation groupes I, ed., transl. J. Merker, Springer, 2015.

82. Lie S., Über Differentiation, *Math. Ann.* **24** (1884), 537–578.

83. Macdonald I.G., Symmetric functions and Hull polynomials, Oxford University Press, 1995.

84. Macdonald I.G., A new class of symmetric functions, *Publ. I.R.M.A. Strasbourg*, 372/S-20, Actes 20 (1988), Séminaire Lotharingien, 131–171.

85. Macdonald I.G., Orthogonal polynomials associated with root systems, *Sém. Lothar. Combin.* **45** (2000), Art. B45a, 40 pp.

86. Magazev A.A., Mikheyev V.V., Shirokov I.V., Computation of composition functions and invariant vector fields in terms of structure constants of associated Lie algebras, *SIGMA* **11** (2015), 066, 17 pp.

87. Magnin L., Sur les algebres de Lie nilpotentes de dimension $\leq$ 7ϭ *J. Geom. Phys.* **3** (1986) 119–144.

88. Makedonskyi Ie., Petravchuk A., On finite dimensional Lie algebras of planar vector fields with rational coefficients, *Methods Funct. Anal. Topol.*, **19** (2013), no. 4, 376–388.

89. Masakova Z., Patera J., Pelantova E., Inflation centres of the cut and project quasicrystals, *J. Phys. A* **31** (1998), 1443–1453.

90. Masakova Z., Patera J., Pelantova E., Minimal distances in quasicrystals, *J. Phys. A* **31** (1998), 1539–1552.

91. McKay W.G., Patera J., Tables of dimensions, indices, and branching rules for representations of simple Lie algebras, Marcel Dekker, New York, 1981, 317 pp.

92. Meyer Y., Algebraic numbers and harmonic analysis, North-Holland Publ., Amsterdam–London, 1972.

93. Moody R.V., Patera J., Discrete and coninous graded contractions of representations of Lie algebras, J. Phys. A **24** (1991) 2227–2257.

94. Moody R.V., Model sets and their duals, The mathematics of long-range order, ed. R.V. Moody, NATO ASI **C489**, 239–268, Kluwer, Dordrecht, 1997.

95. Moody R.V., Nesterenko M., Patera J., Computing with almost periodic functions, *Acta Crystallogr. Sect. A* **A64** (2008), 654–669.

96. Moody R., Patera J., Quasicrystals and icosians, *J. Phys. A* **26** (1993), 2829–2853.

97. Moody R.V., Patera J., Fast recursion formula for weight multiplicities, *Bull. Amer. Math. Soc.* **7** (1982), 237–242.

98. Nesterenko M., The Poincaré algebras $p(1,1)$ and $p(1,2)$: realizations and deformations, *J. Phys.: Conf. Ser.* **621** (2015), 012009, 7 pp.

99. Nesterenko M., Realizations of Lie algebras, *Phys. Part. Nuclei Lett.* **11** (2014), no. 7, 987–989.

100. Nesterenko M., S-expansions of three-dimensional Lie algebras, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2012)*, 147–154, University of Cyprus, Nicosia, 2012.

101. Nesterenko M., Myronova M., Generic realizations of conformal and de Sitter algebras, *Зб. праць Інституту математики НАН України* **16** (2019), no 1, 100–112.

102. Nesterenko M., Patera J., Three-dimensional C-, S- and E-transforms, *J. Phys. A* **41** (2008), 475205, 31 pp.

103. Nesterenko M., Patera J., On orbit functions, their properties and applications *Group Analysis of Differential Equations and Int,egrable Systems (Protaras, 2008)*, 155–163, University of Cyprus, Nicosia, 2009.

104. Nesterenko M., Patera J., Szajewska M., Tereszkiewicz A., Orthogonal polynomials of compact simple Lie groups: Branching rules for polynomials, *J. Phys. A* **43** (2010), 495207, 27 pp.

105. Nesterenko M., Patera J., Tereszkiewicz A., Orthogonal polynomials of compact simple Lie groups, *Int. J. Math. Math. Sci.* **2011** (2011), 969424, 23 pp.

106. Nesterenko M., Patera J., Tereszkiewicz A., Orbit functions of SU(n) and Chebyshev polynomials, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2010)*, 133–151, University of Cyprus, Nicosia, 2010.

107. Nesterenko M., Patera J., Quasicrystal models in cryptography, *AIP Conf. Proc.* **1191** (2009), 148, 148–159.

108. Nesterenko M., Popovych R., Contractions of Low-dimensional Lie Algebras *J. Math. Phys.* **47** (2006) 123515, 45 pp.; arXiv:math-ph/0608018.

109. Nesterenko M., Pošta S., Comparison of realizations of Lie algebras, *J. Phys.: Conf. Ser.* **965** (2018), 012028, 6 pp.

110. Nesterenko M., Pošta S., Contractions of realizations, *Lie Theory and Its Applications in Physics*, Springer Proc. Math. Stat. **335**, Springer, Singapore, 2020, 447–453.

111. Nesterenko M., Pošta S., Discrete analysis on non-cubic lattices, *J. Phys.: Conf. Ser.* **1416** (2019), 012024, 8 pp.

112. Nesterenko M., Pošta S., Differential invariants and realizations of the deformed smallest Galilei algebra, *Phys. Part. Nuclei* **49** (2018), no 5, 949–951.

113. Nesterenko M., Pošta S., Equivalence of vector field realizations of Lie algebras from the Lie group point of view *Quantum Theory and Symmetries with Lie Theory and Its Applications in Physics*, 421–427, Springer Proc. Math. Stat. **263**, Springer, Singapore, 2018.

114. Nesterenko M., Pošta S., Contraction admissible pairs of complex six-dimensional nilpotent Lie algebras, *Lie Theory and its Applications in*

Physics, 539–549, Springer Proc. Math. Stat. **191**, Springer, Singapore, 2016.

115. Nesterenko M., Pošta S., Vaneeva O., Realizations of Galilei algebras, *J. Phys. A* **49** (2016), no. 11, 115203, 26 pp.
116. Nikitin A., Matrix superpotentials and superintegrable systems for arbitrary spin, *J. Phys. A* **45** (2012), no. 22, 225205.
117. Nikitin A., Karadzhov Yu., Enhanced classification of matrix superpotentials, *J. Phys. A* **44** (2011), no. 44, 445202.
118. Niederle J., Nikitin A., Involutive symmetries, supersymmetries and reductions of the Dirac equation, *J. Phys. A* **30** (1997), no. 3, 999–1010.
119. Novotny P., Hrivnak J., On (α, β, γ)–derivations of Lie algebras and corresponding invariant functions, *J. Geom. Phys.* **58** (2008), 208–217.
120. Olver P.J., Differential invariants and invariant differential equations, *Lie Groups Appl.* **1** (1994), 177–192.
121. Olver P.J., Pseudo-stabilization of prolonged group actions. I. The order zero case, *J. Nonlinear Math. Phys.* **4** (1997), 271–277.
122. Opdam E.M., Harmonic analysis for certain representations of graded Hecke algebras, *Acta Math.* **175** (1995), 75–121.
123. Ovsiannikov L.V., Group analysis of differential equations, New York, Academic Press, 1982.
124. Patera J., Compact simple Lie groups and theirs C-, S-, and E-transforms *SIGMA* **1** (2005), 025, 6 pp.
125. Patera J., Nesterenko M., Quasicrystals in cryptography, *Aspects of Network and Information Security*, 274–282, **17** NATO Science for Peace and Security Series – D: Information and Communication Security, IOS Press, 2008.
126. Popovych D.R., Popovych R.O., Equivalence of diagonal contractions to generalized IW-contractions with integer exponents, *Linear Algebra Appl.* **431** (2009), 1096–1104.

127. Popovych D.R., Popovych R.O., Lowest dimensional example on non-universality of generalized Inönü–Wigner contractions, *J. Algebra* **324** (2010), 2742–2756.

128. Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.W., Realizations of real low-dimensional Lie algebras, *J. Phys. A* **36** (2003), 7337–7360.

129. Radin C., Wolf M., Space tilings and local isomorphism, *Geometriae Dedicata* **42** (1992), 355–360.

130. Rideau G., Winternitz P., Nonlinear equations invariant under the Poincaré, similitude and conformal groups in two-dimensional space-time, *J. Math. Phys.* **31** (1990), 1095–1105.

131. Rideau G., Winternitz P., Evolution equations invariant under two-dimensional space-time Schrödinger group, *J. Math. Phys.* **34** (1993), 558–570.

132. Saletan E.J., Contraction of Lie groups, J. Math. Phys. **2** (1961), 1–21.

133. Seeley C., Degenerations of 6-dimensional nilpotent Lie algebras over $\mathbb{C}$, *Arch. Math* **56** (1990), 236–241.

134. Segal I.E., A class of operator algebras which are determined by groups, *Duke Math. J.* **18** (1951), 221–265.

135. Schlottmann M., Generalized model sets and dynamical systems, Directions in mathematical quasicrystals, eds. M. Baake and R. Moody, CRM monograph series, **13**, 143–159, 2000.

136. Schneider E., Projectable Lie algebras of vector fields in 3D, *J. Geom. Phys.* **132** (2018), 222–229.

137. Shirokov I.V. Construction of Lie algebras of first-order differential operators. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Fiz.* **40** (1997), no. 6, 25–32.

138. Tresse A., Sur les invariants differentiels des groupes continus de transformations, Acta Math. **18** (1894), 1–88.

139. Tresse A., Determination des invariants ponctuels de l'equation differentielle du second ordre, $y'' = \omega(x, y, y')$, S. Hirzel, Leiptzig, 1896.

140. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C., Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with exponential nonlinearities, *J. of Math. Anal. and Appl.* **396**(1) (2012) 225–242.

141. van Diejen J.F., Lapointe L., Morse J., Determinantal construction of orthogonal polynomials associated with root systems, *Compositio Math.* **140**, (2004), 255–273.

142. van Diejen J.F., Lapointe L., Morse J., Bernstein–Szego polynomials associated with root systems, *Bull. London Math. Soc.* **39**, (2007), 837–847.

143. Vilenkin N.Ja., Klimyk A.U., Representations of Lie groups and special functions: recent advances, Dordrecht, Kluwer, 1995.

144. Weyl H., Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen, *Math. Ann.* **97** (1926), 473–498.

145. Wiener H., On the representation of functions by trigonometrical integrals, *Math. Zeitschr.* **24** (1926), 575–616.

146. Yehorchenko I., Nonlinear representation of the Poincaré algebra and invariant equations, Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics, 62–66, Institute of Mathematics, Kyiv, 1992.

147. Yegorchenko I., Second-order differential invariants for the Poincaré, Galilei and conformal algebras in many-dimensional spaces, in Classical and Quantum Systems (Goslar, 1991), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1993, 738–741.

148. Zhdanov R., Lagno V., Fushchych W., On new realizations of the Poincaré groups $P(1, 2)$ and $P(2, 2)$, *Comm. Math. Phys.* **212** (2000), 535–556.

Додаток А

Нільпотентні алгебри Лі над полем $\mathbb{C}$ та їх допустимі контракції

А.1. Розмірність п'ять

Нееквівалентні нільпотентні алгебр Лі розмірності п'ять над полем комплексних чисел вичерпуються наступним переліком ненульових комутаційних співвідношень у деякому фіксованому базисі $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

$\mathfrak{g}_{5.6}$: $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_2, e_3] = e_5$;

$\mathfrak{g}_{5.5}$: $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5$;

$\mathfrak{g}_{5.4}$: $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_2, e_3] = e_5$;

$\mathfrak{g}_{5.3}$: $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_2, e_3] = e_5$;

$\mathfrak{g}_{5.2}$: $[e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_3] = e_5$;

$\mathfrak{g}_{5.1}$: $[e_1, e_2] = e_5,\ [e_3, e_4] = e_5$;

$\mathfrak{g}_4 \oplus \mathfrak{g}_1$: $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4$;

$\mathfrak{g}_3 \oplus 2\mathfrak{g}_1$: $[e_1, e_2] = e_3$.

$5\mathfrak{g}_1$.

Явний вигляд матриць контракції наведено у таблиці А.1 у вигляді добутку двох матриць I та W, де невироджена матриця I є необхідним перетворенням ізоморфізму, а матриця контракції задана своєю сигнатурою, тобто $W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \mathrm{diag}(\varepsilon^{\alpha_1}, \varepsilon^{\alpha_2}, \varepsilon^{\alpha_3}, \varepsilon^{\alpha_4}, \varepsilon^{\alpha_5})$.

Назви колонок таблиці А.2 вказують початкову алгебру, а стовпці — результуючу. Числа в таблиці позначають необхідні умови існування контракції, які не виконуються: 1-розмірність орбіти, 2-максимальна розмір-

Контракція	Матриця контракції	
$\mathfrak{g}_{5.6} \to \mathfrak{g}_{5.5}$	$W(0,1,1,1,1)$	$I_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_{5.6} \to \mathfrak{g}_{5.4}$	$W(1,0,1,2,1)$	
$\mathfrak{g}_{5.6} \to \mathfrak{g}_{5.3}$	$W(1,0,1,0,1)$	
$\mathfrak{g}_{5.6} \to \mathfrak{g}_{5.2}$	$I_2W(0,1,0,1,0)$	
$\mathfrak{g}_{5.6} \to \mathfrak{g}_{5.1}$	$I_1W(1,0,1,0,1)$	$I_2 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_{5.6} \to \mathfrak{g}_4 \oplus \mathfrak{g}_1$	$W(0,1,1,1,0)$	
$\mathfrak{g}_{5.6} \to \mathfrak{g}_3 \oplus 2\mathfrak{g}_1$	$W(1,0,1,0,0)$	
$\mathfrak{g}_{5.5} \to \mathfrak{g}_{5.2}$	$I_2W(0,1,0,1,0)$	
$\mathfrak{g}_{5.5} \to \mathfrak{g}_4 \oplus \mathfrak{g}_1$	$W(0,1,1,1,0)$	$I_3 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ -1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_{5.5} \to \mathfrak{g}_3 \oplus 2\mathfrak{g}_1$	$W(1,0,1,0,0)$	
$\mathfrak{g}_{5.4} \to \mathfrak{g}_{5.2}$	$I_3W(0,1,0,1,0)$	
$\mathfrak{g}_{5.4} \to \mathfrak{g}_4 \oplus \mathfrak{g}_1$	$W(0,1,1,1,0)$	
$\mathfrak{g}_{5.4} \to \mathfrak{g}_3 \oplus 2\mathfrak{g}_1$	$W(1,0,1,0,0)$	$I_4 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_{5.3} \to \mathfrak{g}_{5.2}$	$I_2W(0,1,0,1,0)$	
$\mathfrak{g}_{5.3} \to \mathfrak{g}_{5.1}$	$I_1W(1,0,1,0,1)$	
$\mathfrak{g}_{5.3} \to \mathfrak{g}_4 \oplus \mathfrak{g}_1$	$I_5W(0,0,0,0,1)$	
$\mathfrak{g}_{5.3} \to \mathfrak{g}_3 \oplus 2\mathfrak{g}_1$	$W(1,0,1,0,0)$	$I_5 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ -1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&-1&0 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_{5.2} \to \mathfrak{g}_3 \oplus 2\mathfrak{g}_1$	$I_2W(0,0,0,1,0)$	
$\mathfrak{g}_{5.1} \to \mathfrak{g}_3 \oplus 2\mathfrak{g}_1$	$I_6W(0,0,0,1,0)$	
$\mathfrak{g}_4 \oplus \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_{5.2}$	$I_4W(0,1,0,1,0)$	
$\mathfrak{g}_4 \oplus \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_3 \oplus 2\mathfrak{g}_1$	$W(1,0,1,0,0)$	$I_6 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}^{*)} \to 5\mathfrak{g}_1$	$W(1,1,1,1,1)$	

*) Будь-яка алгебра контрактує до абелевої.

Табл. А.1. Матриці контракцій п'ятивимірних нільпотентних алгебр Лі над полем $\mathbb{C}$.

ність абелевого ідеалу, 4-розмірність центру, 5-розмірність централізатора похідної алгебри. Місця без позначок у таблиці означають, що контракція існує.

$\mathfrak{g}_0 \backslash g$	$\mathfrak{g}_{5.6}$	$\mathfrak{g}_{5.5}$	$\mathfrak{g}_{5.4}$	$\mathfrak{g}_{5.3}$	$\mathfrak{g}_{5.2}$	$\mathfrak{g}_{5.1}$	$\mathfrak{g}_4 \oplus \mathfrak{g}_1$	$\mathfrak{g}_3 \oplus 2\mathfrak{g}_1$
$\mathfrak{g}_{5.6}$		1	1	1	1	1	1	1
$\mathfrak{g}_{5.5}$			1	1	1	1	1	1
$\mathfrak{g}_{5.4}$		2		1	1	1	1	1
$\mathfrak{g}_{5.3}$		2	1		1	1	1	1
$\mathfrak{g}_{5.2}$						1	1	1
$\mathfrak{g}_{5.1}$		2	4		4		1	1
$\mathfrak{g}_4 \oplus \mathfrak{g}_1$					5	5		1
$\mathfrak{g}_3 \oplus 2\mathfrak{g}_1$								

Табл. А.2. Допустимі контракції нільпотентних алгебр Лі розмірності 5.

А.2. Розмірність шість

Наведемо перелік нееквівалентних нільпотентних алгебр Лі розмірності шість над полем комплексних чисел, відповідно до класифікації Магніна [87]. Кожна з алгебр Лі задана ненульовими комутаційними співвідношеннями у базисі $\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6\}$. У лівому стовпчику вводимо наскрізну нумерацію алгебр, для компактного запису у таблицях.

1 | $g_{6.20}$: $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_2, e_3] = e_5,$
$[e_2, e_5] = e_6,\ [e_3, e_4] = -e_6;$

2 | $g_{6.19}$: $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_1, e_5] = e_6,$
$[e_2, e_3] = e_5,\ [e_2, e_4] = e_6;$

3 | $g_{6.18}$: $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_2, e_5] = e_6,$
$[e_3, e_4] = -e_6;$

4 | $g_{6.17}$: $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_1, e_5] = e_6,$
$[e_2, e_3] = e_6;$

5 | $g_{6.16}$: $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_1, e_5] = e_6;$

6 | $g_{6.15}$: $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_5] = e_6,\ [e_2, e_3] = e_5,$
$[e_2, e_4] = e_6;$

7 | $g_{6.14}\colon [e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_2, e_3] = e_6;$

8 | $g_{6.13}\colon [e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_1, e_5] = e_6,\ [e_2, e_3] = e_5,$
$[e_3, e_4] = -e_6;$

9 | $g_{6.12}\colon [e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_1, e_5] = e_6,\ [e_2, e_3] = e_6,$
$[e_2, e_4] = e_6;$

10 | $g_{6.11}\colon [e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_1, e_5] = e_6,\ [e_2, e_3] = e_6;$

11 | $g_{6.10}\colon [e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_3] = e_5,\ [e_1, e_4] = e_6,\ [e_3, e_5] = e_6;$

12 | $g_{6.9}\colon [e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_3] = e_5,\ [e_2, e_5] = e_6,\ [e_3, e_4] = e_6;$

13 | $g_{6.8}\colon [e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_2, e_3] = e_5,\ [e_2, e_4] = e_6;$

14 | $g_{6.7}\colon [e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_3] = e_5,\ [e_1, e_4] = e_6,\ [e_2, e_3] = -e_6;$

15 | $g_{6.6}\colon [e_1, e_2] = e_4,\ [e_2, e_3] = e_6,\ [e_2, e_4] = e_5;$

16 | $g_{6.5}\colon [e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_2, e_3] = e_6,\ [e_2, e_4] = e_6;$

17 | $g_{6.4}\colon [e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_3] = e_6,\ [e_2, e_4] = e_5;$

18 | $g_{6.3}\colon [e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_3] = e_5,\ [e_2, e_3] = e_6;$

19 | $g_{6.2}\colon [e_1, e_2] = e_5,\ [e_1, e_5] = e_6,\ [e_3, e_4] = e_6;$

20 | $g_{6.1}\colon [e_1, e_2] = e_5,\ [e_1, e_4] = e_6,\ [e_2, e_3] = e_6;$

21 | $g_{5.6} \oplus g_1\colon [e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,$
$[e_2, e_3] = e_5;$

22 | $g_{5.5} \oplus g_1\colon [e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5;$

23 | $g_{5.4} \oplus g_1\colon [e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_2, e_3] = e_5;$

24 | $g_{5.3} \oplus g_1\colon [e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_2, e_3] = e_5;$

25 | $g_{5.2} \oplus g_1\colon [e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_3] = e_5;$

26 | $g_{5.1} \oplus g_1\colon [e_1, e_2] = e_5,\ [e_3, e_4] = e_5;$

27 | $g_4 \oplus 2g_1\colon [e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4;$

28 | $g_3 \oplus g_3\colon [e_1, e_2] = e_3,\ [e_4, e_5] = e_6;$

29 | $g_3 \oplus 3g_1\colon [e_1, e_2] = e_3;$

30 | $6g_1.$

У таблицях A.3, A.4 числа позначають номер необхідної умови з леми 1.17, що суперечить існуванню контракції для пари алгебр $g \to g_0$. Номери стовпчиків позначають початкову алгебру, а номери рядків — результуючу. Літера ‘c’ означає, що котнтакція існує, а літера ‘i’ позначає пару ідентичних алгебр Лі.

$g_0 \backslash g$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	c	i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	c	1	i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	c	c	c	i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	c	c	c	c	i	3	1	3	1	1	1	1	1	1	1
6	c	c	6	1	1	i	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	c	c	c	c	1	c	i	3	1	1	1	1	1	1	1
8	c	c	6	1	1	1	1	i	1	1	1	1	1	1	1
9	c	c	c	7	1	c	1	c	i	1	1	1	1	1	1
10	c	c	c	c	2	c	4	c	c	i	1	3	1	1	1
11	c	c	c	c	2	c	4	c	c	1	i	c	1	1	1
12	c	c	c	6	1	c	1	c	1	1	1	i	1	1	1
13	c	c	c	c	2	c	c	c	c	5	3	3	i	1	1
14	c	c	c	c	2	c	c	c	c	c	c	c	c	i	1
15	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	i
16	c	c	c	c	2	c	c	c	c	1	1	3	1	1	1
17	c	c	c	c	2	c	c	c	c	c	c	c	1	1	1
18	c	c	c	c	2	c	c	c	c	c	c	c	c	c	2
19	c	c	c	c	2	c	c	c	c	c	c	c	4	1	1
20	c	c	c	c	2	c	c	c	c	c	c	c	c	c	2
21	c	c	c	c	2	c	c	c	c	1	1	3	1	1	1
22	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	3	3	1	1	1
23	c	c	c	c	2	c	c	c	c	5	3	3	c	5	2
24	c	c	c	c	2	c	c	c	c	c	c	c	c	c	2
25	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c
26	c	c	c	c	2	c	c	c	c	c	c	c	c	c	2
27	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c
28	c	c	c	c	2	c	c	c	c	c	c	c	7	7	2
29	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c

Табл. А.3. Допустимі контракції нільпотентних алгебр Лі розмірності 6 (I).

$g_0 \backslash g$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	c	1	1	1	1	c	1	1	1	1	1	1	1	1
14	c	c	1	1	1	c	1	1	1	1	1	1	1	1
15	c	c	1	3	1	c	c	1	1	1	1	1	1	1
16	i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17	c	i	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	1	1
18	c	c	i	3	3	c	2	c	3	1	1	2	3	1
19	4	4	1	i	1	4	2	1	1	1	1	1	1	1
20	c	c	1	c	i	c	2	4	c	1	1	1	c	1
21	1	1	1	1	1	i	1	1	1	1	1	1	1	1
22	3	1	1	1	1	c	i	1	1	1	1	1	1	1
23	c	5	1	5	1	c	2	i	1	1	1	1	1	1
24	c	c	1	c	1	c	2	4	i	1	1	1	1	1
25	c	c	c	c	c	c	c	c	c	i	1	c	c	1
26	c	c	4	c	c	c	2	4	c	4	i	2	c	1
27	c	c	1	c	1	c	c	c	c	1	1	i	3	1
28	c	c	1	c	1	7	2	4	7	1	1	1	i	1
29	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	i

Табл. А.4. Допустимі контракції нільпотентних алгебр Лі розмірності 6 (II).

Додаток Б

Реалізації п'ятивимірних алгебр Галілея

Комплементарний базис	Реалізація
$\{M,\, P,\, T,\, D,\, G\}$	$R_{\mathfrak{h}_0}:\ M=\partial_1,\ P=\partial_2,\ T=\partial_3,\ G=-x_2\partial_1-x_3\partial_2+e^{x_4}\partial_5,$ $D=x_2\partial_2+2x_3\partial_3+\partial_4$
$\{P,\, T,\, D,\, G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.1}}:\ M=0,\ P=\partial_1,\ T=\partial_2,\ G=-x_2\partial_1+e^{x_3}\partial_4,$ $D=x_1\partial_1+2x_2\partial_2+\partial_3$
$\{M,\, P,\, T,\, G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.2}}:\ M=\partial_1,\ P=\partial_2,\ T=\partial_3,\ G=-x_2\partial_1-x_3\partial_2+\partial_4,$ $D=x_2\partial_2+2x_3\partial_3-x_4\partial_4$
$\{M,\, G,\, P,\, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.3}}:\ M=\partial_1,\ P=x_2\partial_1+\partial_3,\ T=\frac{1}{2}x_2^2\partial_1+x_2\partial_3,\ G=\partial_2,$ $D=-x_2\partial_2+x_3\partial_3+\partial_4$
$\{M,\, P,\, T,\, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.4}}:\ M=\partial_1,\ P=\partial_2,\ T=\partial_3,\ G=-x_2\partial_1-x_3\partial_2,$ $D=x_2\partial_2+2x_3\partial_3+\partial_4$
$\{M,\, T,\, G,\, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.5}}:\ M=\partial_1,\ P=x_3\partial_1,\ T=\partial_2,\ G=-x_2x_3\partial_1+\partial_3,$ $D=2x_2\partial_2-x_3\partial_3+\partial_4$
$\{P,\, G,\, D,\, T\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.6}}:\ M=-\partial_4,\ P=\partial_1,\ T=x_2\partial_1+\left(\frac{1}{2}x_2^2+e^{-2x_3}\right)\partial_4,$ $G=\partial_2+x_1\partial_4,\ D=x_1\partial_1-x_2\partial_2+\partial_3$
$\{M, P, T, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.7}}:\ M=\partial_1,\ P=\partial_2,\ T=\partial_3,\ G=-x_2\partial_1-x_3\partial_2-e^{3x_4}\partial_3,$ $D=x_2\partial_2+2x_3\partial_3+\partial_4$
$\{G,\, P,\, D,\, T\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.9}}:\ M=\partial_4,\ P=\partial_2+x_1\partial_4,\ T=x_1\partial_2+\left(\frac{1}{2}x_1^2+e^{-2x_3}\right)\partial_4$ $G=\partial_1,\ D=-x_1\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3$
$\{P,\, G,\, T\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.1}}:\ M=0,\ P=\partial_1,\ T=x_2\partial_1+\partial_3,\ G=\partial_2,$ $D=x_1\partial_1-x_2\partial_2+2x_3\partial_3$
$\{P,\, G,\, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.2}}:\ M=0,\ P=\partial_1,\ T=x_2\partial_1,\ G=\partial_2,\ D=x_1\partial_1-x_2\partial_2+\partial_3$
$\{P,\, T,\, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.3}}:\ M=0,\ P=\partial_1,\ T=\partial_2,\ G=-x_2\partial_1,$ $D=x_1\partial_1+2x_2\partial_2+\partial_3$
$\{D,\, T,\, G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.4}}:\ M=0,\ P=0,\ T=e^{-2x_1}\partial_2,\ G=e^{x_1}\partial_3,\ D=\partial_1$

Табл. Б.1. Реалізації розширеної алгебри Галілея $\mathrm{AG}_2(1)$.

Комплементарний базис	Реалізація
$\{M,\, G,\, P\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.5}}\colon\ M=\partial_1,\ P=x_2\partial_1+\partial_3,\ T=\frac{1}{2}x_2^2\partial_1+x_2\partial_3,\ G=\partial_2,$ $D=-x_2\partial_2+x_3\partial_3$
$\{M,\, P,\, T\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.6}}\colon\ M=\partial_1,\ P=\partial_2,\ T=\partial_3,\ G=-x_2\partial_1-x_3\partial_2,$ $D=x_2\partial_2+2x_3\partial_3$
$\{M,\, T,\, G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.7}}\colon\ M=\partial_1,\ P=x_3\partial_1,\ T=\partial_2,\ G=-x_2x_3\partial_1+\partial_3,$ $D=2x_2\partial_2-x_3\partial_3$
$\{M, G, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.8}}\colon\ M=\partial_1,\ P=x_2\partial_1,\ T=\frac{1}{2}x_2^2\partial_1,\ G=\partial_2,\ D=-x_2\partial_2+\partial_3$
$\{G,\, D,\, T\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.9}}\colon\ M=-\partial_3,\ P=-x_1\partial_3,\ T=\left(-\frac{1}{2}x_1^2+e^{-2x_2}\right)\partial_3,\ G=\partial_1,$ $D=-x_1\partial_1+\partial_2$
$\{P,\, T,\, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.10}}\colon\ M=0,\ P=\partial_1,\ T=\partial_2,\ G=-x_2\partial_1-e^{3x_3}\partial_2,$ $D=x_1\partial_1+2x_2\partial_2+\partial_3$
$\{P, G, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.11}}\colon\ M=-\frac{1}{\alpha}\partial_3,\ P=\partial_1,\ T=x_2\partial_1+\frac{1}{2\alpha}x_2^2\partial_3,\ G=\partial_2+\frac{1}{\alpha}x_1\partial_3,$ $D=x_1\partial_1-x_2\partial_2+\partial_3$
$\{P,\, T,\, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.12}}\colon\ M=-\frac{1}{\alpha}\partial_3,\ P=\partial_1,\ T=\partial_2,\ G=-x_2\partial_1+\frac{1}{\alpha}x_1\partial_3,$ $D=x_1\partial_1+2x_2\partial_2+\partial_3$
$\{T,\, G,\, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.13}}\colon\ M=-\frac{1}{\alpha}\partial_3,\ P=-\frac{1}{\alpha}x_2\partial_3,\ T=\partial_1,\ G=\partial_2+\frac{1}{\alpha}x_1x_2\partial_3,$ $D=2x_1\partial_1-x_2\partial_2+\partial_3$
$\{G,\, D,\, T\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.14}}\colon\ M=\partial_3,\ P=x_1\partial_3,\ T=\left(\frac{1}{2}x_1^2+e^{-2x_2}\right)\partial_3,\ G=\partial_1,$ $D=-x_1\partial_1+\partial_2$
$\{P,\, G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{3.1}}\colon\ M=0,\ P=\partial_1,\ T=x_2\partial_1,\ G=\partial_2,\ D=x_1\partial_1-x_2\partial_2$
$\{P,\, T\}$	$R_{\mathfrak{h}_{3.2}}\colon\ M=0,\ P=\partial_1,\ T=\partial_2,\ G=-x_2\partial_1,\ D=x_1\partial_1+2x_2\partial_2$
$\{T,\, G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{3.3}}\colon\ M=0,\ P=0,\ T=\partial_1,\ G=\partial_2,\ D=2x_1\partial_1-x_2\partial_2$
$\{D,\, G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{3.4}}\colon\ M=0,\ P=0,\ T=0,\ G=e^{x_1}\partial_2,\ D=\partial_1$
$\{D,\, T\}$	$R_{\mathfrak{h}_{3.5}}\colon\ M=0,\ P=0,\ T=e^{-2x_1}\partial_2,\ G=0,\ D=\partial_1$
$\{M,\, G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{3.6}}\colon\ M=\partial_1,\ P=x_2\partial_1,\ T=\frac{1}{2}x_2^2\partial_1,\ G=\partial_2,\ D=-x_2\partial_2$
$\{D,\, T\}$	$R_{\mathfrak{h}_{3.7}}\colon\ M=0,\ P=0,\ T=e^{-2x_1}\partial_2,\ G=-e^{x_1}\partial_2,\ D=\partial_1$
$\{G,\, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{3.8}}\colon\ M=-\frac{1}{\alpha}\partial_2,\ P=-\frac{1}{\alpha}x_1\partial_2,\ T=-\frac{1}{2\alpha}x_1^2\partial_2,\ G=\partial_1,$ $D=-x_1\partial_1+\partial_2$
$\{G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{4.1}}\colon\ M=0,\ P=0,\ T=0,\ G=\partial_1,\ D=-x_1\partial_1$
$\{T\}$	$R_{\mathfrak{h}_{4.2}}\colon\ M=0,\ P=0,\ T=\partial_1,\ G=0,\ D=2x_1\partial_1$
$\{D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{4.3}}\colon\ M=0,\ P=0,\ T=0,\ G=0,\ D=\partial_1$

Реалізації розширеної алгебри Галілея $\mathrm{AG}_2(1)$ (продовження).

Комплементарний базис	Реалізація
$\{G,\,P,\,T,\,D,\,S\}$	$R_{\mathfrak{h}_0}\colon\ D=-x_1\partial_1+x_2\partial_2+2x_3\partial_3+\partial_4,\ G=\partial_1,\ P=\partial_2,$ $S=-x_2\partial_1+x_3^2\partial_3+x_3\partial_4+e^{2x_4}\partial_5,\ T=x_1\partial_2+\partial_3$
$\{G,\,P,\,S,\,T\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.1}}\colon\ D=-x_1\partial_1+x_2\partial_2-2x_3\partial_3+2x_4\partial_4,\ G=\partial_1,\ P=\partial_2,$ $S=-x_2\partial_1+\partial_3,\ T=x_1\partial_2+x_3^2\partial_3+(1-2x_3x_4)\partial_4$
$\{G,\,P,\,S,\,D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.2}}\colon\ D=-x_1\partial_1+x_2\partial_2-2x_3\partial_3+\partial_4,\ G=\partial_1,\ P=\partial_2,$ $S=-x_2\partial_1+\partial_3,\ T=x_1\partial_2+x_3^2\partial_3-x_3\partial_4$
$\{S,\,D,\,G,\,T\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.3}}\colon\ D=-2x_1\partial_1+\partial_2,\ G=e^{x_2}\partial_3,\ P=x_1e^{x_2}\partial_3,$ $S=\partial_1,\ T=x_1^2\partial_1-x_1\partial_2+e^{-2x_2}\partial_4$
$\{G,\,P,\,S,\,D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.4}}\colon\ D=-x_1\partial_1+x_2\partial_2-2x_3\partial_3+\partial_4,\ G=\partial_1,\ P=\partial_2,$ $S=-x_2\partial_1+\partial_3,\ T=x_1\partial_2+\left(x_3^2-e^{-4x_4}\right)\partial_3-x_3\partial_4$
$\{G,\,P,\,S,\,D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.5}}\colon\ D=-x_1\partial_1+x_2\partial_2-2x_3\partial_3+\partial_4,\ G=\partial_1,\ P=\partial_2,$ $S=-x_2\partial_1+\partial_3,\ T=-e^{-3x_4}\partial_1+x_1\partial_2+x_3^2\partial_3-x_3\partial_4$
$\{G,\,P,\,S\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.1}}\colon\ D=-x_1\partial_1+x_2\partial_2-2x_3\partial_3,\ G=\partial_1,\ P=\partial_2,$ $S=-x_2\partial_1+\partial_3,\ T=x_3^2\partial_3+x_1\partial_2$
$\{G,\,S,\,T\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.2}}\colon\ D=-x_1\partial_1-2x_2\partial_2+2x_3\partial_3,\ G=\partial_1,\ P=x_2\partial_1,$ $S=\partial_2,\ T=x_1x_2\partial_1+x_2^2\partial_2+(1-2x_2x_3)\partial_3$
$\{S,\,D,\,G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.3}}\colon\ D=-2x_1\partial_1+\partial_2,\ G=e^{x_2}\partial_3,\ P=x_1e^{x_2}\partial_3,$ $S=\partial_1,\ T=x_1^2\partial_1-x_1\partial_2$
$\{T,\,D,\,S\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.4}}\colon\ D=2x_1\partial_1+\partial_2,\ G=0,\ P=0,$ $S=x_1^2\partial_1+x_1\partial_2+e^{2x_2}\partial_3,\ T=\partial_1$
$\{S,\,D,\,G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.5}}\colon\ D=-2x_1\partial_1+\partial_2,\ G=e^{x_2}\partial_3,\ P=x_1e^{x_2}\partial_3,$ $S=\partial_1,\ T=x_1^2\partial_1-x_1\partial_2-e^{-2x_2}\partial_3$
$\{S,\,D,\,G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.6}}\colon\ D=-2x_1\partial_1+\partial_2,\ G=e^{x_2}\partial_3,\ P=x_1e^{x_2}\partial_3,$ $S=\partial_1,\ T=x_1^2\partial_1-x_1\partial_2+e^{-2x_2}\partial_3$
$\{G,\,P\}$	$R_{\mathfrak{h}_{3.1}}\colon\ D=-x_1\partial_1+x_2\partial_2,\ G=\partial_1,\ P=\partial_2,$ $S=-x_2\partial_1,\ T=x_1\partial_2$
$\{G,\,S\}$	$R_{\mathfrak{h}_{3.2}}\colon\ D=-x_1\partial_1-2x_2\partial_2,\ G=\partial_1,\ P=x_2\partial_1,$ $S=\partial_2,\ T=x_1x_2\partial_1+x_2^2\partial_2$
$\{S,\,T\}$	$R_{\mathfrak{h}_{3.3}}\colon\ D=-2x_1\partial_1+2x_2\partial_2,\ G=0,\ P=0,\ S=\partial_1,$ $T=x_1^2\partial_1+(1-2x_1x_2)\partial_2$
$\{S,\,D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{3.4}}\colon\ D=-2x_1\partial_1+\partial_2,\ G=0,\ P=0,\ S=\partial_1,$ $T=x_1^2\partial_1-x_1\partial_2$
$\{S,\,D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{3.5}}\colon\ D=-2x_1\partial_1+\partial_2,\ G=0,\ P=0,\ S=\partial_1,$ $T=\left(x_1^2-e^{-4x_2}\right)\partial_1-x_1\partial_2$
$\{S\}$	$R_{\mathfrak{h}_{4.1}}\colon\ D=-2x_1\partial_1,\ G=0,\ P=0,\ S=\partial_1,\ T=x_1^2\partial_1$

Табл. Б.2. Реалізації редукованої спеціальної алгебри Галілея $\mathrm{AG}_3(1)$.

Додаток В

Список публікацій і апробація результатів

Результати дисертації висвітлено в 21 науковій публікації. Основні результати опубліковано у наукових фахових виданнях України [2, 21] і наукових періодичних виданнях інших держав [1,3–20], проіндексованих у міжнародних наукометричних базах Scopus або Web of Science. Результати дисертації додатково відображено у двох публікаціях, а також у 16 тезах доповідей у матеріалах міжнародних конференцій.

1. Nesterenko M., Pošta S., Contractions of realizations, *Lie Theory and Its Applications in Physics*, Springer Proc. Math. Stat. **335**, Springer, Singapore, 2020, 447–453.

2. Nesterenko M., Myronova M., Generic realizations of conformal and de Sitter algebras, *Зб. праць Інституту математики НАН України* **16** (2019), no. 1, 100–112.

3. Nesterenko M., Pošta S., Discrete analysis on non-cubic lattices, *J. Phys.: Conf. Ser.* **1416** (2019), 012024, 8 pp.

4. Nesterenko M., Pošta S., Comparison of realizations of Lie algebras, *J. Phys.: Conf. Ser.* **965** (2018), 012028, 6 pp.

5. Nesterenko M., Pošta S., Differential invariants and realizations of the deformed smallest Galilei algebra, *Phys. Part. Nuclei* **49** (2018), 949–951.

6. Nesterenko M., Pošta S., Equivalence of vector field realizations of Lie algebras from the Lie group point of view, *Quantum Theory and*

Symmetries with Lie Theory and Its Applications in Physics, Springer Proc. Math. Stat. **263**, Springer, Singapore, 2018, 421–427.

7. Nesterenko M., Pošta S., Vaneeva O., Realizations of Galilei algebras, *J. Phys. A* **49** (2016), 115203, 26 pp.

8. Nesterenko M., The Poincaré algebras $\mathfrak{p}(1,1)$ and $\mathfrak{p}(1,2)$: realizations and deformations, *J. Phys.: Conf. Ser.* **621** (2015), 012009, 7 pp.

9. Nesterenko M., Pošta S., Contraction admissible pairs of complex six-dimensional nilpotent Lie algebras, *Lie Theory and its Applications in Physics*, Springer Proc. Math. Stat. **191**, Springer, Singapore, 2016, 539–549.

10. Nesterenko M., Realizations of Lie algebras, *Phys. Part. Nuclei Lett.* **11** (2014), no. 7, 987–989.

11. Nesterenko M., S-expansions of three-dimensional Lie algebras, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2012)*, University of Cyprus, Nicosia, 2012, 147–154.

12. Nesterenko M., Patera J., Tereszkiewicz A., Orthogonal polynomials of compact simple Lie groups, *Int. J. Math. Math. Sci.* **2011** (2011), 969424, 23 pp.

13. Nesterenko M., Patera J., Tereszkiewicz A., Orbit functions of SU(n) and Chebyshev polynomials, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2010)*, University of Cyprus, Nicosia, 2010, 133–151.

14. Nesterenko M., Patera J., Szajewska M., Tereszkiewicz A., Orthogonal polynomials of compact simple Lie groups: branching rules for polynomials, *J. Phys. A* **43** (2010), 495207, 27 pp.

15. Larouche M., Nesterenko M., Patera J., Branching rules for the Weyl group orbits of the Lie algebra A_n, *J. Phys. A* **42** (2009), 485203, 15 pp.

16. Nesterenko M., Patera J., On orbit functions, their properties and applications *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2008)*, University of Cyprus, Nicosia, 2009, 155–163.

17. Nesterenko M., Patera J., Quasicrystal models in cryptography, *AIP Conf. Proc.* **1191** (2009), 148–159.

18. Nesterenko M., Patera J., Three-dimensional C-, S- and E-transforms, *J. Phys. A* **41** (2008), 475205, 31 pp.

19. Moody R.V., Nesterenko M., Patera J., Computing with almost periodic functions, *Acta Crystallogr. Sect. A* **64** (2008), 654–669.

20. Patera J., Nesterenko M., Quasicrystals in cryptography, *Aspects of Network and Information Security*, **17** NATO Science for Peace and Security Series – D: Information and Communication Security, IOS Press, 2008, 274–282.

21. Гапонова О.В., Нестеренко М. О., Системи ЗДР другого порядку інваріантні відносно низькорозмірних алгебр Лі, *Зб. праць Інституту математики НАН України* **3** (2006), no. 2, 71–91.

22. Gaponova O.V., Nesterenko M., Systems of second-order ODEs invariant with respect to low-dimensional Lie algebras, *Phys. AUC.* **16** (2006), V.II, 238–256.

23. Nesterenko M., Patera J., Zhavrotskyi D., New families of cryptographic systems, arXiv:0710.0021v1 (2007), 14 pp.

24. Nesterenko M., Pošta S., Contractions of realizations of Lie algebras, Тези доповідей міжнародної конференції молодих математиків, 6–8 червня 2019 р., Ін-т математики НАН України, Київ, с. 38.

25. Nesterenko M., Pošta S., On discrete Fourier analysis for the functions sampled on the weight lattices or model sets of semisimple Lie groups, Abstracts of International Workshop "A Century of Noether's Theorem and Beyond", November 30 – December 2, 2018, Opava, Czech Republic, p. 5.

26. Нестеренко М., Еквівалентність реалізацій алгебр Лі, Матеріали міжнародної науково-практичної конференції "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі", 21–22 червня, 2018, Київ, НУХТ, с. 65.

27. Nesterenko M., Simple Lie groups in quasicrystalls, Book of abstracts of the 9th Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems", Larnaca, Cyprus, June 10–14, 2018, p. 30.

28. Nesterenko M., Pošta S., Контракції реалізацій алгебр Лі, Онлайн-матеріали міжнародного семінару "Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики", Київ, 22–23 грудня, 2018, URL: www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2018/Nesterenko_ua.html

29. Nesterenko M., Comparison of realizations of Lie algebras and their differential invariants, Booklet of abstracts ISQS25, XXVth International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries Prague, Czech Republic, June 6–10, 2017, p. 115.

30. Nesterenko M., Pošta S., Vaneeva O., Realizations of Galilei algebras, Онлайн-матеріали міжнародного семінару "Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики", Київ, 17–20 грудня, 2016, URL: www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2016/Nesterenko.html

31. Nesterenko M., Pošta S., Vaneeva O., Realizations of Galilei algebras, Онлайн-матеріали міжнародного семінару 7th Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems", Larnaca, Cyprus, June 15–19, 2016, URL: www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2016/Nesterenko.html

32. Nesterenko M. Contractions of nilpotent Lie algebras, Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків, Київ, 3–6 червня, 2015, с. 20.

33. Nesterenko M., Realizations of 3- and 6-dimensional Poincaré algebras, Book of abstracts of the 7th Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems", Larnaca, Cyprus, June 15–19, 2014, p. 33.

34. Нестеренко М., Контракції алгебр Лі, Онлайн-матеріали міжнародного семінару "Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики", Київ, 21–24 грудня, 2013, URL: www.imath.kiev.ua/~appmath/AbstractsWIF/Nesterenko2013.html

35. Нестеренко М., Ортогональні поліноми, пов'язані з простими групами Лі, та правила галуження для них, Онлайн-матеріали міжнародного семінару "Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики", Київ, 18–19 грудня, 2011, URL: www.imath.kiev.ua/~appmath/AbstractsWIF/Nesterenko.html

36. Nesterenko M., Computing with almost periodic functions, Онлайн-матеріали міжнародного семінару "CRM-Fields-MITACS Workshop on Lie Groups, Group Transforms and Image Processing", Toronto, May 16, 2008, URL: www.fields.utoronto.ca/programs/scientific/07-08/liegroups/abstracts.html

37. Nesterenko M., New families of cryptographic systems, Онлайн-матеріали конференції "CMS-MITACS Joint Conference 2007",

Winnipeg, May 31 – June 3, 2007, URL: www2.cms.math.ca/Events/summer07/abs/posters_by_theme

38. Nesterenko M., Systems of two second order ODEs invariant with respect to the low-dimensional Lie algebras, Онлайн-матеріали семінару "Seminar Physique Mathematique CRM, UdeM", Montreal, February 13, 2007, URL: www.crm.umontreal.ca/cal/en/mois200702.html

39. Nesterenko M., Contractions of low-dimensional Lie algebras, Онлайн-матеріали семінару "Lie Algebra Workshop of University of Ottawa", Ottawa, April 13–15, 2007, URL: www.fields.utoronto.ca/programs/scientific/06-07/liealgebra/abstracts.pdf

Результати роботи доповідались на таких конференціях і семінарах:

- Bogolyubov Kyiv Conference "Problems of Theoretical and Mathematical Physics" (2019, September 24–26, Kyiv, Ukraine);
- XIII International Workshop "Lie Theory and Its Applications in Physics" (2019, June 17–23, Varna, Bulgaria);
- Міжнародна конференція молодих математиків (2019, 6–8 червня, Київ);
- Міжнародний семінар "Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики" (2018, 21–24 грудня, Київ);
- International Workshop "A century of Noether's theorem and beyond" (2018, November 30 – December 2, Opava, Czech Republic);
- Міжнародна конференція "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі" (2018, 21–22 червня, Київ);
- Ninth Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (2018, June 10–14, Larnaca, Cyprus);

- Fourth conference “Symmetries of discrete systems and processes” (2017, June 12-16, Děčín, Czech Republic);
- XXVth International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries (2017, June 6–10, Prague, Czech Republic);
- Eighth Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” (2016, June 12–17, Larnaca, Cyprus);
- Міжнародний семінар “Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики” (2015, 27–29 грудня, Київ);
- XI International Workshop “Lie Theory and Its Applications in Physics” (2015, June 15–21, Varna, Bulgaria);
- Міжнародна конференція молодих математиків (2015, 3–6 червня, Київ);
- Seventh Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” (2014, June 15–19, Larnaca, Cyprus);
- Міжнародний семінар “Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики” (2013, 21–24 грудня, Київ);
- International Workshop “Supersymmetries and Quantum Symmetries – SQS’2013” (2013, July 29 – August 3, Dubna, Russia);
- Міжнародний семінар “Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики” (2011, 18–19 грудня, Київ);
- Fifth Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” (2010, June 6–10, Protaras, Cyprus);
- Workshop on Representation Theory (2009, May 3–9, Nicosia, Cyprus);
- Fourth Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” (2008, October 26–30, Protaras, Cyprus);

- CRM–Fields–MITACS Workshop on Lie Groups, Group Transforms and Image Processing (2008, May 16, Fields Institute, Toronto, Canada);
- Lie ALgebra Workshop of University of Ottawa (2007, April 13–15, Ottawa, Canada);
- CMS–MITACS Joint Conference 2007 (2007, May 31 – June 3, Winnipeg, Canada);
- наукові семінари відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України, професор А.Г. Нікітін, 2007–2021);
- засідання Вченої ради Інституту математики НАН України (2012, 2018);
- науковий семінар "Алгебраїчний семінар Київського національного університету імені Тараса Шевченка" (керівники семінару — професор Ю.А. Дрозд, професор А.С. Олійник, професор А.П. Петравчук, 2020);
- науковий семінар кафедри математичної фізики, механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка "Асимптотичні та аналітичні методи для задач математичної фізики" (керівники семінару — професор Т.А. Мельник, професор В.Г. Самойленко, 2021);
- науковий семінар кафедри математики Чеського технічного університету в Празі (Чехія, 2017);
- науковий семінар з математичної фізики Центру математичних досліджень університету Монреалю (Канада, 2008).