

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ



Нестеренко Марина Олександрівна

УДК 517.958:512.816

**Реалізації та контракції алгебр Лі,
орбіт-функції та квазікристали**

01.01.03 — математична фізика

111 — математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2021

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Інституті математики НАН України.

Науковий консультант:

доктор фізико-математичних наук,

старший науковий співробітник

Бойко Вячеслав Миколайович

Інститут математики НАН України,

провідний науковий співробітник відділу математичної фізики.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор

Петравчук Анатолій Петрович,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,

завідувач кафедри алгебри і комп'ютерної математики;

доктор фізико-математичних наук,

старший науковий співробітник

Іоргов Микола Зіновійович,

Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова

НАН України, м. Київ,

завідувач лабораторії теорії інтегровних систем

відділу математичних методів в теоретичній фізиці;

доктор фізико-математичних наук,

старший науковий співробітник

Федорчук Василь Максимович,

Інститут прикладних проблем механіки

і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів,

провідний науковий співробітник відділу алгебри.

Захист відбудеться 5 травня 2021 р. об 11 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий 1 квітня 2021 р.

Вчений секретар

спеціалізованої вченої ради



А.С. Романюк

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дослідження С. Лі та Ф. Клейна ініціювали новий погляд на геометрію і суттєво розширили коло її застосувань. Ідея Клейна про те, що ключовою для геометрії є група перетворень та ті властивості образів у багатьох випадках, що зберігаються при групових перетвореннях, суттєво вплинула на розвиток проективної, афінної, диференціальної та інших видів геометрій. Окрім того, використання груп і алгебр Лі при розв'язуванні диференціальних рівнянь виявилось надзвичайно ефективним інструментом, що дозволяє не лише знаходити точні розв'язки, а й дає істотну інформацію як при розв'язуванні різноманітних задач, зокрема і прикладного характеру, так і для дослідження задач і побудови моделей сучасної математичної та теоретичної фізики. Широкий спектр застосувань алгебр Лі стимулює подальші дослідження, що стосуються їхніх класифікацій, підалгебр, реалізацій, інваріантів, контракцій, деформацій, спеціальних функцій та ряду інших об'єктів.

Контракції алгебр Лі мають застосування у різних галузях теоретичної фізики та математики, наприклад, при вивченні зображень, інваріантів, спеціальних функцій, при дослідженні структури множин алгебр Лі тощо. Зокрема, коефіцієнти Вігнера групи Евкліда $E(3)$ було отримано через контракцію коефіцієнтів Вігнера спеціальної ортогональної групи $SO(4)$. Контракції використовують для встановлення зв'язків між різноманітними кінематичними групами. У такий спосіб між собою пов'язано кілька алгебр Лі, які включають релятивістський оператор положення, та конформна група і група Шредінгера. Контракції також відіграють важливу роль при описі систем із взаємодією за допомогою динамічних груп. Наприклад, граничний процес, при якому стала зчеплення прямує до нуля, призводить до випадку систем без взаємодії.

Усі добре визначені фізичні теорії мають свої певні фундаментальні групи інваріантності, тому реалізації їхніх алгебр Лі диференціальними операторами першого порядку ефективно застосовуються для їх редукцій та інтегрування, а також для побудови нових інваріантних моделей. Область застосування класичних групових методів істотно розширюється завдяки використанню реалізацій алгебр Лі векторними полями при інтегруванні систем, що допускають принцип суперпозиції, та при конструюванні різницевих схем. Побудова реалізацій алгебр Лі — необхідна передумова для знаходження дифе-

ренціальних інваріантів і відповідних математичних моделей із нетривіальною симетрією. Вичерпний опис нееквівалентних реалізацій заданих алгебр Лі векторними полями — це також фундаментальна математична задача, яка має самостійну цінність.

Сучасний груповий аналіз розвивається у провідних університетах і наукових центрах світу, а українська школа групового аналізу, яку започаткував В.І. Фушчич та розвинули А.Г. Нікітін, Р.З. Жданов, М.І. Серов, В.А. Тичинін, В.М. Федорчук, І.М. Цифра, В.І. Лагно, Р.М. Черніга, Р.О. Попович, В.М. Бойко та їхні учні, посідає гідне місце серед них. Окрім традиційних задач групової класифікації, науковці київської школи досліджують низку суміжних задач пов'язаних з алгебрами Лі, зокрема, суперсиметрію та суперінтегровність, контракції зображень (А. Нікітін), контракції алгебр Лі (Р. Попович, М. Нестеренко, Н. Іванова), контракції реалізацій (Р. Попович, О. Ванеєва, Н. Іванова), узагальнені оператори Казіміра (В. Бойко, Р. Попович), реалізації алгебр Лі (Р. Попович, В. Бойко, М. Нестеренко).

У зв'язку з нещодавніми відкриттями виникають нові задачі, пов'язані з групами Вейля простих алгебр Лі, групами Коксетера, скінченними групами та аперіодичними мозаїками. Так 1982 року Даніель Шехтман відкрив фізичні квазікристали. Це відкриття та необхідність досліджень пов'язаних з ними явищ у фізиці твердого тіла вимагають побудови якісних і строгих математичних моделей квазікристалів та розвитку аналізу функцій 'чутливих' до квазікристалів, що можуть бути розв'язані з використанням простих груп та дуальних до них.

У задачах сучасної математики та математичній фізиці, зокрема, все частіше виникає потреба використовувати системи координат та ґратки, що не є прямокутними. Яскравим прикладом є задача дискретизації комплексного аналізу, яку І. Диннікову та С. Новікову вдалось успішно розв'язати, використовуючи трикутні ґратки. Крім цього, інтенсивне зростання кількості тривимірних даних та потреба їхньої обробки та аналізу, обґрунтовують дослідження спеціальних орбіт-функцій, які вперше ввів 2005 року Ї. Патера. Вони мають властивість симетрії відносно дії афінної групи Вейля, тому природнім чином пов'язані з непрямокутними системами координат, можуть застосовуватись для перетворень, аналогічних до перетворення Фур'є, природно узагальнюють відомі поліноми малої кількості змінних до поліномів більшої кількості змінних.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі математичної фізики Інституту математики НАН України в рамках тем “Симетрія та інтегровність нелінійних моделей” (номер держреєстрації 0106U000436), “Симетрія, суперсиметрія та інтегровність диференціальних рівнянь” (номер держреєстрації 0110U008615), “Симетрія, суперсиметрія та суперінтегровність рівнянь математичної фізики” (номер держреєстрації 0116U003059), “Аналітичні та групові методи дослідження математичних моделей сучасного природознавства” (номер держреєстрації 0117U002119), “Класифікація симетрій та точні розв'язки нелінійних моделей фізичних та біологічних процесів” (номер держреєстрації 0118U003803), “Симетрія та інтегровність рівнянь сучасної математичної фізики” (номер держреєстрації 0120U100173).

Мета і завдання дослідження. *Мета* дисертаційної роботи — розвиток теорії контракцій і теорії реалізацій алгебр L_i , а також побудова контракцій, деформацій, реалізацій і диференціальних інваріантів фізично важливих алгебр L_i . Розробка нових методів для дослідження квазікристалів і вивчення властивостей орбіт-функцій, пов'язаних із непрямокутними ґратками.

Об'єктом дослідження є нільпотентні алгебри L_i , алгебри де Сітера, Пуанкаре та Галілея, конформна алгебра, орбіт-функції, квазікристали та майже періодичні функції.

Предмет дослідження — групи й алгебри L_i , реалізації, контракції, деформації, диференціальні інваріанти та S -розширення алгебр L_i , а також множини перерізів та проєкцій, скінченні групи, дуальні групи, групи Вейля, їх ґратки, підгрупи, орбіти та фундаментальні області, ортогональні поліноми багатьох змінних.

Методи дослідження. Теоретико-групові методи, методи алгебраїчних інваріантів та методи лінійної алгебри застосовувались при дослідженні контракцій; інфінітезимальний метод L_i , методи диференціальної геометрії та алгебраїчний метод І. Широкова були використані для побудови реалізацій; методи теорії зображень та теорії простих груп L_i використовувались при дослідженні орбіт-функцій та ортогональних поліномів; теоретико-групові методи, методи скінченних груп та дуальних до них застосовувались для побудови дискретного аналізу майже періодичних функцій.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну й виносяться на захист, такі:

1. Запропоновано дві нові необхідні умови існування контракцій, пов'язані з підалгебрами і розмірністю централізатора похідної, та доведено відповідні теореми.
2. Досліджено S -розширення тривимірних дійсних алгебр Лі. Показано, що процедура S -розширення зберігає властивості розв'язності, нільпотентності та унімодулярності, при цьому S -розширення та редукція алгебр Лі дозволяють отримати неунімодулярні алгебри Лі з унімодулярних.
3. Для комплексних нільпотентних алгебр Лі розмірностей п'ять та шість встановлено переліки необхідних умов, які є достатніми для визначення пар алгебр, що допускають контракції. Доведено, що контракції комплексних нільпотентних алгебр Лі розмірностей п'ять та шість еквівалентні узагальненим контракціям Іньоно–Вігнера.
4. Доведено теорему про зведення реалізації до суттєвих змінних та узагальнено алгебраїчний метод І. Широкова для побудови реалізацій алгебр Лі як проєкцій ліво-інваріантних векторних полів. Запропоновано конструктивний метод побудови параметризованих реалізацій, що є точними та збігаються до реалізацій контрактованої алгебри Лі.
5. Побудовано реалізації алгебр Пуанкаре $\mathfrak{p}(1, 1)$ та $\mathfrak{p}(1, 2)$ у просторах не більше ніж трьох змінних, а також знайдено деформації цих алгебр і їх породжуючі реалізації.
6. Для алгебр Галілея розмірностей не вищих за п'ять побудовано повний набір нееквівалентних реалізацій; зокрема, всі неточні реалізації та всі реалізації п'ятивимірних алгебр Галілея є новими. Також знайдено деформації алгебр Галілея та їх породжуючі реалізації.
7. Отримано нові породжуючі реалізації конформної алгебри Лі та двох алгебр де Сіттера. Побудовано спільну деформацію алгебри Пуанкаре до алгебр де Сіттера.
8. Доведено теорему про нормальну форму інваріантної системи двох рівнянь другого порядку та знайдено деформації, породжуючі реалізації та повні набори диференціальних інваріантів для найменшої алгебри Галілея.

9. Розроблено метод для дискретного Фур'є-аналізу майже періодичних функцій, визначених на квазікристалах. Новий метод протестовано на аперіодичних функціях квазікристала Фібоначчі. Запропоновано симетричний переставний метод шифрування, що використовує всюди розривне перетворення точок квазікристала у точки вікна; метод використано для кодування растрових зображень.
10. Досліджено властивості орбіт-функцій, зокрема тривимірних: побудовано явний вигляд їхніх орбіт, стабілізаторів, фундаментальних областей, розроблено їхню дискретизацію та доведено дискретну ортогональність. Отримано явний вигляд операторів другого порядку, для яких тривимірні C -орбіт-функції та S -орбіт-функції це відповідно, розв'язки крайових задач Неймана та Діріхле.
11. Побудовано правила галуження орбіт групи Вейля простих алгебр $Li\ A_n$ та доведено еквівалентність трьох сімей орбіт-функцій спеціальним експоненційним функціям багатьох змінних, введених А. Клімиком та Ї. Патерою.
12. Запропоновано три методи побудови ортогональних поліномів виходячи з орбіт-функцій. Доведено еквівалентність кількох відомих сімей ортогональних поліномів, зокрема, поліномів Чебишева, Якобі, Макдональда та Курнвіндера поліномам орбіт-функцій. Отримано явний вигляд розв'язних рекурсій, що дозволяють алгоритмічно будувати сім'ї ортогональних поліномів двох та трьох змінних. Знайдено правила редукції поліномів двох та трьох змінних до поліномів інших алгебр за максимальними підгрупами простих груп Li .

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати є новими і можуть бути застосовані для дослідження зв'язків між теоріями і моделями фізики, біології чи економіки, які інваріантні відносно різних алгебр Li , для побудови рівнянь та моделей, інваріантних відносно певних алгебр Li , для аналізу та обчислення функцій на квазікристалах та ґратках напівпростих груп Li .

Особистий внесок здобувачки. Усі результати, що виносяться на захист, одержано дисертанткою самостійно. У роботах, які опубліковано разом з іншими авторами, розподіл особистих внесків такий.

У роботах [1, 3–6, 9] усі основні результати і їхнє доведення дисертантка отримала самостійно, С. Пошта перевіряв обчислення та брав участь в обговоренні результатів.

У роботі [2] усі результати дисертантка отримала самостійно, М. Миронова брала участь у перевірці обчислень та перекладі статті англійською мовою.

У статті [7] постановка задачі, загальний план дослідження й доведення основних результатів належить дисертантці, О.В. Ванєєва показала, що рівняння типу Бюргерса, Кортевега–де Фріза третього й п'ятого порядків, Кавахари та реакції–дифузії є інваріантними відносно алгебр Галілея чи їхніх деформацій, а також перевірила основні результати щодо реалізацій, С. Пошта брав участь у обчисленні реалізацій і обговоренні результатів.

У роботах [21, 22] дисертантці належить уточнення постановки задач, розробка методів дослідження, та доведення теореми про нормальну форму системи, О.В. Гапоновій — опис систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантних відносно дійсних алгебр Лі розмірності не вищої за чотири.

У статтях [12, 13] постановка задачі та загальне керівництво дослідженнями належить І. Патері, основні результати — дисертантці, А. Терешкевич виконала перевірку обчислень.

У роботах [16–18, 20] постановка задачі та обґрунтування актуальності досліджень належить І. Патері, основні результати цих робіт — дисертантці.

У статті [14] постановка задачі належить І. Патері, дисертантка побудувала рекурентні співвідношення та правила редукції для ортогональних поліномів, М. Заєвська побудувала відображення фундаментальних областей для ортогональних поліномів та повторила обчислення редукцій поліномів, А. Терешкевич виконала перевірку обчислень.

У роботі [15] постановка задачі належить І. Патері, дисертантка та М. Ларош незалежно виконали всі обчислення правил галуження та порівняли отримані результати.

У роботі [19] постановка задачі належить І. Патері, уточнення постановки задачі, вибір методів і розробка плану дослідження та загальне керівництво належить Р. Муді, дисертантка вивела необхідні формули, виконала обчислення та протестувала отриманий метод на квазікристалі Фібоначчі.

У роботі [23] постановка задачі належить І. Патері, дисертантці належать розробка методу шифрування, а Д. Жавроцькому належить вибір об'єкта для тестування методу та створення програмного забезпечення.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися на міжнародних конференціях: “Bogolyubov Kyiv Conference: Problems of Theoretical and Mathematical Physics” (Київ, 2019), “Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі” (Київ, 2018); Fourth Conference “Symmetries of Discrete Dystems and Processes” (Дечин, Чеська республіка, 2017), міжнародних симпозиумах: “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” (Протарас, Кіпр, 2008, 2010; Ларнака, Кіпр, 2014, 2016, 2018), XXVth International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries (Пара, Чеська республіка, 2017), “Supersymmetries and Quantum Symmetries” (Дубна, Росія, 2013), CMS–MITACS Joint Conference 2007 (Вінніпег, Канада, 2007), міжнародних семінарах: Lie ALgebra Workshop of University of Ottawa (Оттава, Канада, 2007), CRM–Fields–MITACS Workshop on Lie Groups, Group Transforms and Image Processing (Торонто, Канада, 2008) Workshop on Representation Theory (Нікосія, Кіпр, 2009) “Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики” (Київ, 2011, 2013, 2015, 2016, 2018), “A Century of Noether’s Theorem and Beyond” (Опава, Чеська Республіка, 2018), а також на міжнародних конференціях молодих математиків (Київ, 2015, 2019).

Результати дисертаційної роботи неодноразово доповідалися й обговорювалися на науковому семінарі відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України, професор А.Г. Нікітін, 2007–2021), а також на засіданні Вченої ради Інституту математики НАН України (2012, 2018), науковому семінарі “Алгебраїчний семінар Київського національного університету імені Тараса Шевченка” (керівники семінару — професор Ю.А. Дрозд, професор А.С. Олійник, професор А.П. Петравчук, 2020), науковому семінарі кафедри математичної фізики, механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка “Асимптотичні та аналітичні методи для задач математичної фізики” (керівники семінару — професор Т.А. Мельник, професор В.Г. Самойленко, 2021), науковому семінарі кафедри математики Чеського технічного університету

у Празі (Чехія, 2017), науковому семінарі з математичної фізики Центру математичних досліджень університету Монреалю (Канада, 2008).

Публікації. Результати дисертації висвітлено у 39 наукових публікаціях. Основні результати опубліковано у наукових фахових виданнях України [2, 21] і наукових періодичних виданнях інших держав [1, 3–20]. Роботи [1, 3–10, 12, 14, 15, 17–19] проіндексовані у міжнародній наукометричній базі Scopus, а роботи [3–5, 7, 8, 10, 13–15, 17–19] проіндексовані у міжнародній наукометричній базі Web of Science. Загалом наукові роботи М.О. Нестеренко зібрали на сьогодні 183 та 192 цитування у наукометричних базах Web of Science та Scopus відповідно. Результати дисертації додатково відображено в публікаціях [22, 23], а також у тезах доповідей у матеріалах міжнародних конференцій [24–39]. Кожна зі статей [7, 14, 15, 18, 19], як опублікована у виданні зі квартиля Q1 (відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank), прирівнюється до трьох публікацій, а кожна з робіт [5, 10], як опублікована у виданні зі квартиля Q3, — до двох публікацій (п. 2 Наказу № 1220 МОН України від 23.09.2019), отже, 21 стаття, у яких відображено основні результати дисертації, зараховується як 33 фахові публікації. Роботи [2, 6, 7, 9, 11–19, 22] проіндексовано у базі Zentrablatt Math, а роботи [6, 7, 9, 11–19] проіндексовано у базі MathSciNet. Статті [8, 10, 11] — одноосібні.

Структура й обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 148 найменувань, і трьох додатків. Повний обсяг дисертації становить 327 сторінок, із них список використаних джерел міститься на 13 сторінках, а додатки — на 18 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми, сформульовано задачі, що досліджуються у дисертації, та стисло викладено отримані результати. Основну частину роботи становлять три розділи. На початку кожного розділу коротко наведено основні результати, що містяться в ньому.

У **першому** розділі дисертації досліджуються реалізації та контракції алгебр Лі, а також диференціальні інваріанти та S -розширення.

Параграф 1.1 присвячено теорії контракцій (граничних переходів між алгебрами Лі), у ньому наведено кілька типів означень, розглянуто основні типи контракцій та доведено ряд тверджень.

Задача встановлення існування та побудови контракції для заданої пари алгебр Лі за означенням надзвичайно складна та громіздка, тому ефективним шляхом дослідження контракцій є інтенсивне використання необхідних умов, що базуються на величинах, інваріантних або напівінваріантних відносно контракцій.

У дисертаційній роботі запропоновано дві нові необхідні умови, які доповнюють уже наявний набір необхідних умов до достатнього для комплексних нільпотентних алгебр Лі розмірностей п'ять та шість.

Нехай $\mathfrak{g}'$ — це похідна n -вимірної алгебри Лі $\mathfrak{g}$. *Централізатором похідної $\mathfrak{g}'$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$* (позначатимемо $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}')$) є набір елементів алгебри $\mathfrak{g}$, які комутують з усіма елементами з $\mathfrak{g}'$.

Твердження 1.8. *Якщо алгебра Лі $\mathfrak{g}_0$ є власною контракцією алгебри Лі $\mathfrak{g}$, то має місце нерівність $\dim C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}') \leq \dim C_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{g}_0')$.*

Твердження 1.10. *Нехай алгебра Лі $\mathfrak{g}_0$ є контракцією алгебри Лі $\mathfrak{g}$ та алгебра $\mathfrak{g}$ містить підалгебру $\mathfrak{s}$. Тоді алгебра $\mathfrak{g}_0$ містить підалгебру $\mathfrak{s}_0$ тієї самої розмірності, $\dim \mathfrak{s}_0 = \dim \mathfrak{s}$.*

Систематичне вивчення контракцій алгебр Лі може бути здійснене дослідженням усіх можливих контракцій алгебр Лі заданої розмірності, проте це вимагає попередньої класифікації таких алгебр з точністю до невироджених лінійних перетворень. У загальному випадку така класифікаційна задача є дикуою, хоча і розв'язана для алгебр Лі розмірностей, не вищих за шість. Інший підхід, який може бути застосований, це дослідження контракцій всередині певних класів алгебр Лі, замкнених відносно контракцій; такими є множини нільпотентних, розв'язних, унімодулярних алгебр Лі та множини алгебр Лі з абелевим ідеалом корозмірності один і подібні до них. Саме дослідженню контракцій комплексних нільпотентних алгебр Лі розмірностей п'ять та шість присвячено параграф 1.3, у ньому, зокрема, було доведено такі твердження.

Лема 1.14. *Наступний набір необхідних умов є достатнім для виокремлення пар п'ятивимірних нільпотентних алгебр Лі над полем комплексних чисел, для яких існує контракція.*

Якщо алгебра Лі $\mathfrak{g}_0$ є власною контракцією алгебри Лі $\mathfrak{g}$, то виконуються умови:

- 1) $\dim \mathcal{O}(g_0) < \dim \mathcal{O}(g)$, де $\mathcal{O}(g)$ — це орбіта під дією $\mathrm{GL}(V)$;
- 2) $n_{\mathrm{Ai}}(g_0) \geq n_{\mathrm{Ai}}(g)$, де $n_{\mathrm{Ai}}(g)$ — максимальна розмірність абелевого ідеалу;
- 3) $\dim g_0^l \leq \dim g^l$, $l = 1, 2, 3$, де $g^1 = [g, g]$, $g^2 = [g^1, g]$, $g^3 = [g^2, g]$;
- 4) $\dim Z(g_0) \geq \dim Z(g)$, де $Z(g)$ — центр алгебри;
- 5) $\dim C_g(g') \leq \dim C_g(g'_0)$, де $C_g(g')$ — централізатор похідної алгебри.

Твердження 1.15. *Усі, крім однієї, контракції нільпотентних алгебр $\mathcal{L}_i$ розмірності не вищої за п'ять еквівалентні звичайним контракціям Іньоню–Вігнера.*

Контракція $\mathfrak{g}_{5.6} \rightarrow \mathfrak{g}_{5.4}$ є єдиною контракцією нільпотентних п'ятивимірних алгебр $\mathcal{L}_i$, що не може бути отримана простою контракцією Іньоню–Вігнера. Для цієї пари мінімальною додатною сигнатурою є набір $(1, 0, 1, 2, 1)$.

Два аналогічні твердження доведено для шестивимірних нільпотентних алгебр $\mathcal{L}_i$, але контракції шестивимірних нільпотентних алгебр еквівалентні узагальненим контракціям Іньоню–Вігнера і достатній перелік складається з семи необхідних умов. Також у параграфі 1.3 детально розглянуто випадок контракції між характеристично нільпотентними алгебрами $\mathcal{L}_i$ розмірності сім, що демонструє універсальність узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера навіть для множини нільпотентних алгебр $\mathcal{L}_i$.

1961 року А. Зайцев сформулював гіпотезу про те, що усі розв'язні алгебри $\mathcal{L}_i$ фіксованої розмірності можна отримати за допомогою контракцій з напівпростих алгебр $\mathcal{L}_i$ тієї самої розмірності, та запропонував застосувати контракції для ‘граничної класифікації’ розв'язних алгебр $\mathcal{L}_i$. 1981 року аналогічну гіпотезу сформулювали Селеджіні та Тарліні. Насправді таке припущення хибне, оскільки контракція зберігає властивість унімодулярності, а також тому, що напівпрості алгебри $\mathcal{L}_i$ існують не для всіх розмірностей.

У параграфі 1.2 дисертаційної роботи гіпотезу Зайцева було переглянуто у термінах S -розширень.

Якщо $S = \{\lambda_\alpha\}$ — це абелева напівгрупа порядку N , а індекси α , β та γ змінюються від 1 до N , то $(n \cdot N)$ -вимірна S -розширена алгебра $\mathcal{L}_i \mathfrak{G} := S \times \mathfrak{g}$ породжується базисними елементами $\{e_{(i,\alpha)} = \lambda_\alpha e_i\}$ і

визначається структурними сталими

$$c_{(i,\alpha)(j,\beta)}^{(k,\gamma)} = \begin{cases} c_{ij}^k, & \text{якщо } \lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_\gamma, \\ 0, & \text{у решті випадків.} \end{cases}$$

Проведені у параграфі 1.2 дослідження S -розширень дійсних тривимірних алгебр $\mathbb{L}_i$ дозволили сформулювати таке твердження.

Твердження 1.13. *S -розширення алгебр $\mathbb{L}_i$ зберігають властивості унімодулярності, розв'язності та нільпотентності.*

S -розширення та редукція алгебр $\mathbb{L}_i$ дозволяють отримати неунімодулярні алгебри $\mathbb{L}_i$ з унімодулярних, проте, при цьому порушується відношення порядку на многовиді алгебр $\mathbb{L}_i$ заданої розмірності.

Четвертий параграф першого розділу дисертації присвячено задачам, пов'язаним з реалізаціями алгебр $\mathbb{L}_i$ векторними полями вигляду

$$\sum_{j=1}^m \xi^j(x_1, x_2, \dots, x_m) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \text{де } m \in \mathbb{N} \text{ — фіксоване.}$$

У цьому параграфі сформульовано означення реалізації та їх еквівалентності, запропоновано поняття рангу реалізації та суттєвих змінних. А також розглянуто алгебраїчний метод побудови лівоінваріантних векторних полів запропонований І. Широковим, що полягає у відновленні компонент векторних полів з дуальних компонент лівоінваріантних диференціальних один-форм обчислених для канонічних координат другого роду. Використовуючи опис інваріантних просторів примітивних, транзитивних та інтранзитивних груп $\mathbb{L}_i$, а також загальний вигляд інфінітезимальних генераторів груп $\mathbb{L}_i$, алгебраїчний метод Широкова узагальнено для побудови реалізацій алгебр $\mathbb{L}_i$ методом проєкції лівоінваріантних векторних полів на простори змінних, які комплементарні до інваріантних підпросторів.

Використовуючи інваріанти нульового порядку, доведено теорему про зведення реалізації алгебри $\mathbb{L}_i$ до суттєвих змінних.

Твердження 1.27. *Нехай $R: \mathfrak{g} \rightarrow \text{Vect}(\tilde{M})$ — реалізація рангу $r = \text{rank } R < m$, де $m = \dim \tilde{M}$. Тоді існує еквівалентна їй реалізація $\tilde{R}(y): \mathfrak{g} \rightarrow \text{Vect}(\tilde{M})$, така, що коефіцієнти базисних векторних полів $\xi_i^l(y) = 0$ для всіх $i = 1, \dots, n$, $l = r + 1, \dots, m$.*

У параграфі 1.5 досліджено питання контракції реалізації та запропоновано метод побудови параметризованої реалізації, що збігається до реалізації контрактованої алгебри Лі.

Узагальнений алгебраїчний метод Широкова застосовано для побудови нових реалізацій алгебр Галілея, Пуанкаре, конформної та де Сіттера. А саме, у параграфі 1.6 досліджено п'ять найменших алгебр Галілея: алгебри розмірностей три, чотири та п'ять. Для кожної з алгебр побудовано повний набір нееквівалентних реалізацій, серед них неточні реалізації та реалізації п'ятивимірних алгебр Галілея побудовано вперше. Крім цього, у параграфі побудовано деформації алгебр Галілея та породжуючі реалізації деформацій, частина з деформацій отримана для алгебр Галілея довільної розмірності. Наприкінці розділу наведено ряд фізично цікавих диференціальних рівнянь та їх систем, що інваріантні відносно алгебр Галілея та їх деформацій.

Для прикладу розглянемо дві п'ятивимірні алгебри Галілея: розширену алгебру Галілея $AG_2(1)$ та редуковану спеціальну алгебру Галілея $AG_3(1)$. Алгебра $AG_2(1) = \langle M, P, T, G, D \rangle$ з комутаційними співвідношеннями

$$[G, T] = P, [D, G] = G, [P, D] = P, [T, D] = 2T, [G, P] = M$$

ізоморфна розв'язній алгебрі $\mathfrak{g}_{5.30}^{-2}$ за класифікацією Мубаракзянова, а нерозв'язна нерозкладна алгебра $AG_3(1) = \langle P, T, G, D, S \rangle$ з комутаційними співвідношеннями

$$\begin{aligned} [T, G] &= -P, [D, G] = G, [D, P] = -P, [D, T] = -2T, \\ [S, P] &= G, [D, S] = 2S, [T, S] = D \end{aligned}$$

відповідає алгебрі з розкладом Леві–Мальцева $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \in 2A_1$.

Класифікація реалізацій цих алгебр цікава не лише для фізичних застосувань (алгебра $AG_3(1)$, наприклад, є максимальною алгеброю симетрії рівняння Бюргерса), а також є важливою самостійною математичною задачею, оскільки класифікація реалізацій п'ятивимірних алгебр Лі наразі не отримана. Повний перелік реалізацій цих алгебр є досить громіздким і наведений у додатку Б дисертаційної роботи, наведемо лише їх породжуючі реалізації, що відповідають примітивній дії відповідної локальної групи Лі, або, що те саме, нульовій підалгебрі.

Реалізація алгебри $AG_2(1)$ з комплементарним до підалгебри базисом $\{M, P, T, D, G\}$ має вигляд:

$$\begin{aligned} M &= \partial_1, \quad P = \partial_2, \quad T = \partial_3, \\ G &= -x_2\partial_1 - x_3\partial_2 + e^{x_4}\partial_5, \quad D = x_2\partial_2 + 2x_3\partial_3 + \partial_4. \end{aligned}$$

А реалізація алгебри $AG_3(1)$ з комплементарним до підалгебри базисом $\{G, P, T, D, S\}$ має вигляд:

$$\begin{aligned} D &= -x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + 2x_3\partial_3 + \partial_4, \quad G = \partial_1, \quad P = \partial_2, \\ S &= -x_2\partial_1 + x_3^2\partial_3 + x_3\partial_4 + e^{2x_4}\partial_5, \quad T = x_1\partial_2 + \partial_3. \end{aligned}$$

Усі нееквівалентні реалізації двох алгебр Пуанкаре, а саме $\mathfrak{p}(1, 1)$ та $\mathfrak{p}(1, 2)$, у просторах не більше ніж трьох змінних, побудовано у параграфі 1.7. Крім цього, знайдено деформації цих алгебр та породжуючі реалізації.

У параграфі 1.8 отримано нові породжуючі реалізації конформної алгебри Лі та двох алгебр де Сіттера. Побудовано спільну деформацію алгебри Пуанкаре до алгебр де Сіттера.

Останній параграф першого розділу присвячено диференціальним інваріантам алгебр Лі. У цьому параграфі досліджується алгебра Галілея найменшої розмірності, будуються її деформації, породжуючі реалізації та повні набори диференціальних інваріантів: базиси диференціальних інваріантів, оператори інваріантного диференціювання та визначники Лі. Наприкінці параграфа зібрано диференціальні рівняння та їх системи, що мають важливі застосування та інваріантні відносно найменшої алгебри Галілея та її деформацій.

При дослідженні інваріантних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, зокрема систем ньютонівського типу, виникає питання про можливість запису такої системи у нормальній формі

$$\ddot{x} = F(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad \ddot{y} = G(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}). \quad (1)$$

Аналізуючи множини диференціальних інваріантів було доведено критерій існування інваріантних систем вигляду (1) для заданої алгебри Лі.

Твердження 1.39. *Алгебра Лі векторних полів допускається нормальною регулярною системою типу (1) тоді і тільки тоді, коли ранги першого і другого продовження реалізації співпадають.*

Другий розділ дисертації присвячено квазікристалам (як модельним множинам або множинам, побудованим за допомогою перерізів та проєкцій), пов’язаним з ними майже періодичним функціям та їх застосуванням.

Характерною для квазікристалів є структурована далекоюжність впорядкованість, для якої відсутній періодичний порядок. Квазікристали, квазікристалічні фотонні кристали, хвильові експерименти Фарадея та ряд інших фізичних об’єктів і явищ демонструють властивості майже періодичності. Типовим прикладом є потенціальне поле фізичного квазікристала, у цьому випадку потенціал — це аперіодична функція, що належить до множини майже періодичних функцій (або локальних функцій). Зазвичай подібні структури моделюються вибором частини об’єкта дослідження та накладанням періодичних крайових умов. Такий підхід не є цілком задовільним, оскільки майже періодичний порядок принципово відрізняється від періодичного і неспіврозмірність, що лежить в основі квазікристалів, впливає на кожну з частин теорії.

У параграфі 2.1 розроблено метод для дискретного Фур’є-аналізу майже періодичних (локальних) функцій, визначених на квазікристалах. Тут наведено означення локальної функції, яке спрощено можна пояснити таким чином: функція $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ *локальна відносно квазікристала* Λ має ‘близькі значення’ $f(x) \approx f(y)$ у точках x та y , якщо локальні оточення Λ в точках x та y — ‘подібні’; інакше кажучи, функція ‘відчуває’ точки, що належать квазікристала. У цьому параграфі також доведено теорему про існування та єдиність неперервної функції на локальній оболонці дискретної множини Λ для кожної локальної функції відносно Λ .

У дисертаційній роботі детально досліджуються точкові множини $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, які є множинами перерізів та проєкцій і задаються наступною схемою

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\parallel} & \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\perp} & \mathbb{R}^d \\ & & \cup & & \\ L & \xleftarrow{1-1} & \tilde{L} & \xrightarrow{\text{щільний образ}} & L' \end{array}$$

тут $\tilde{L}$ — це ґратка в $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, яка орієнтована таким чином, що проєкції ґратки на простори $\mathbb{R}^d$ будуть відповідно щільними та взаємно однозначними. Простір $\mathbb{R}^d$ ліворуч на схемі є *фізичним простором*,

тобто простором, якому буде належати квазікристал Λ , а простір $\mathbb{R}^d$ праворуч є *внутрішнім простором*, який буде використовуватися для контролю проєкції ґратки $\tilde{L}$ у фізичний простір. Образ $\tilde{L}$ під дією проєкції у фізичний простір позначається L . Для дискретизації використовується раціональна оболонка $\mathbb{Q}\tilde{L}$, її відповідні проєкції та класи спряженості. Позначивши через $\tilde{x}$, x та x' елементи з $\tilde{L}$, їх ліві та праві проєкції, отримаємо $\tilde{x} = (x, x')$, де x пробігає L . Перетворення $(\cdot)'$ пов'язує фізичний та внутрішній простори: $(\cdot)': L \rightarrow L'$, при цьому $x \mapsto x'$. Обравши компактну підмножину Ω у внутрішньому просторі (вікно), яка співпадає зі своїм замиканням та має границю міри нуль, визначимо *квазікристал* Λ :

$$\Lambda(\Omega) := \{x \mid \tilde{x} \in \tilde{L}, x' \in \Omega\}.$$

У параграфі 2.1 побудовано загальну схему подрібнення для ґраток з цілими коефіцієнтами та дуальних до них. В основі зв'язку між майже періодичністю функції у фізичному просторі та періодичністю у просторі вищої розмірності є природне вкладення евклідового простору у тор $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{T}$, що дозволяє застосувати до майже періодичних функцій на квазікристалах переваги дискретних методів періодичних функцій.

Параграф 2.2 присвячено квазікристалу Фібоначчі та застосуванню теорії, розробленої у параграфі 2.1, до двох аперіодичних тестових функцій на ньому. Детально досліджено двовимірну схему перерізів та проєкцій, що породжує одновимірний квазікристал Фібоначчі, та у явному вигляді побудовано дуальні ґратки і сітки та їх проєкції на фізичний простір квазікристала (точки даних). Отримана дискретизація є універсальною та може бути використана для наближення чи інтерполяції будь-яких локальних функцій квазікристала Фібоначчі. Цю дискретизацію застосовано для кількох різних наближень локальної функції ‘відстань до найближчої точки квазікристала’ та локальної функції ‘тип плитки квазікристала’.

Для ілюстрації стисло розглянемо лише кінцевий етап наближення майже періодичних функцій для одновимірного квазікристала Фібоначчі, коли дискретизацію тора (побудову дуальної ґратки) вже виконано. Позначимо через $f^{\text{exact}}(x)$ скінченні суми, що наближають функцію $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{\text{exact}}(x) = \sum_{k \in K} a_k e^{2\pi i(k|x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тепер замінімо коефіцієнти a_k у $f^{\text{exact}}(x)$ на їхні наближення

$$a_k^{\text{int}} := \frac{1}{R} \int_0^R f(x) e^{-2\pi i(k|x)} dx \quad (2)$$

та позначимо отриману функцію $f^{\text{int}}(x)$. Використовуватимемо різні значення R , які відповідають набору повних шляхів у фундаментальній області.

Інтеграли (2) замінюються на скінченні суми, де інтегрант обчислюється на скінченному наборові точок, які походять з проєкцій $\{u_1, \dots, u_{N^2}\}$ отриманих з N^2 дискретних точок у фундаментальній області C , спроєктованих на обрану (за допомогою числа R) частину фізичного простору:

$$a_k^{\text{sum}} := \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N^2} f(u_j) e^{-2\pi i(k|u_j)}.$$

Остаточна апроксимація функції $f^{\text{exact}}(x)$ позначається $f^{\text{sum}}(x)$, це і є шуканим наближенням:

$$f^{\text{sum}}(x) = \sum_{k \in K} \left\{ \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N^2} f(u_j) e^{-2\pi i(k|u_j)} \right\} e^{2\pi i(k|x)}.$$

Воно обчислюється з точок даних у $\mathbb{R}$, є скінченною сумою експоненційних функцій із частотами з модуля Фур'є функції f , використовує дискретні групи, що походять із періодичності схеми перерізів та проєкцій. За побудовою функція f^{sum} є майже періодичною та наближає підняту функцію $\tilde{F}$ на всій прямій, що обвиває тор.

Отже, маємо чотири функції: f , f^{exact} , f^{int} , f^{sum} , усі визначені для всіх $x \in \mathbb{R}$. Три наближені функції залежать від кількості M частин шляху, що проходять через фундаментальну область, та від кількості N^2 точок сітки $\widetilde{L}_N$ у фундаментальній області C . Кожне з цих чисел обмежує повну суму ряду Фур'є–Бора до однакового скінченного набору частот K .

На рис. 1 наведено приклад наближення функції $f(t)$, що визначає відстань від точки t до найближчої точки квазікристала Фібоначчі Λ . Це неперервна та кусково-лінійна функція, яка є локальною відносно Λ .

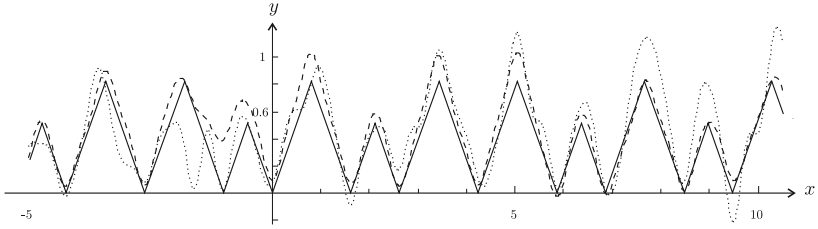


Рис. 1. Суцільна лінія — графік функції f . Пунктирна лінія — наближення f^{sum} , а штрихова лінія — наближення f^{int} . Обидві апроксимації обчислено з використанням $N^2 = 49$ точок сітки у фундаментальній області C та $M = 11$ частин шляху в C , відповідний інтервал інтегрування $R \approx 23,30$.

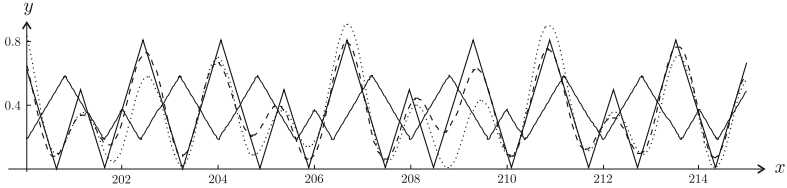


Рис. 2. Суцільна лінія — графік функції f . Пунктирна лінія — наближення f^{sum} , а штрихова лінія — наближення f^{int} . Обидві апроксимації обчислено з використанням $N^2 = 9$ точок сітки у C та $M = 10$ частин шляху в C , відповідний інтервал інтегрування $R \approx 21,64$. Також тонкою лінією зображено періодичну апроксимацію за допомогою косинусів для $n = 50$ доданків. Тут функції зображено на проміжку $[200, 215]$. Спостерігаємо, що аперіодичні наближення продовжують повторювати графік f на відміну від періодичного наближення.

Зауважимо, що відхилення наближених функцій ліворуч від початку координат пов'язане з тим, що у ту саму частину тора перетворюються два простори, розглянутий квазікристал Фібоначчі та множина $\hat{\Lambda}((-1, \frac{1}{\tau}])$, яка відрізняється від нашої Λ у двох точках, що походять з кінців інтервалу $[-1, \frac{1}{\tau}]$.

Варто зазначити, що запропонований метод наближає майже періодичну функцію не на обмеженій області (відрізку, інтервалі), а на усьому евклідовому просторі (див. рис. 2 для наближення на фрагменті прямої, що суттєво віддалений від початку координат).

У параграфі 2.3 запропоновано застосування розривного у кожній точці відображення між фізичним та внутрішнім просторами одновимірних квазікристалів для шифрування інформації. Розроблено симетричний переставний метод шифрування, який є стійким відносно обчислень, оскільки оперує лише цілими числами. У цьому параграфі також наведено важливі властивості одновимірних квазікристалів, що дозволяють швидко генерувати одновимірні квазікристали за допомогою комп'ютера (без проєкцій), і описано множину криптозмінних. Цей метод шифрування застосовано до кодування растрових зображень. Приклад застосування запропонованого методу наведено на рис. 3.

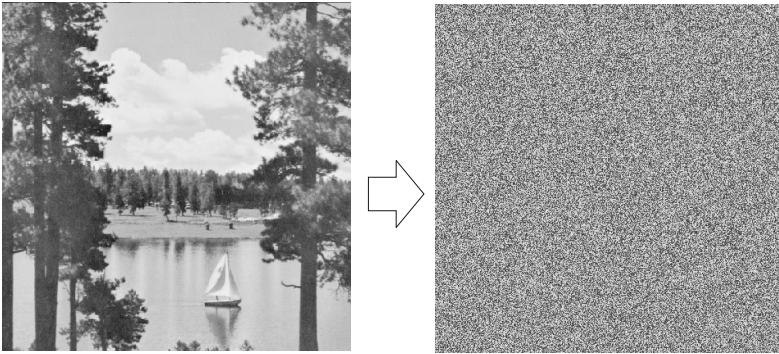


Рис. 3. Шифрування зображення переставним методом.

У **третьому розділі** дисертаційної роботи досліджуються орбіт-функції, ортогональні поліноми та правила галуження орбіт групи Вейля алгебри A_n .

Нехай $\lambda \in P^+$ — конус домінантних ваг, а W — група Вейля напівпростої алгебри Лі, тоді для точок x n -вимірного евклідового простору визначимо C -функцію таким чином

$$C_\lambda(x) := \sum_{w \in W} e^{2\pi i \langle w\lambda, x \rangle}.$$

Якщо в означенні C -функції замінити орбіту групи Вейля на орбіту її парної підгрупи W_e , то отримаємо ще один клас орбіт-функцій, а саме, E -функції, що визначаються для $\lambda \in P_e$, де P_e — об'єднання точок з конуса домінантних ваг P та будь-якого його елементарного

дзеркального відображення $r_i P$

$$E_\lambda(x) := \sum_{w \in W} e^{2\pi i \langle w\lambda, x \rangle}.$$

Останній, третій, клас орбіт-функцій, а саме *S-функції*, визначаються для точок із конуса строго доміантних ваг $\lambda \in P^{++}$ аналогічним чином, але знак кожного з доданків залежить від кількості $p(w)$ елементарних дзеркальних відображень r_i , які необхідні для отримання точки $w\lambda$ з точки λ

$$S_\lambda(x) := \sum_{w \in W} (-1)^{p(w)} e^{2\pi i \langle w\lambda, x \rangle}.$$

Орбіт-функції визначаються виходячи з напівпростих алгебр Лі і кількість змінних співпадає з їх рангом. Очевидно, що у одновимірному випадку (алгебра A_1) *C-функції* та *S-функції* є сумою та різницею двох експонент з степенями протилежних знаків, тому співпадають з тригонометричними функціями косинус та синус відповідно, що і обумовило їх назви. *E-функція* в одновимірному випадку є експонентою з точністю до сталого множника.

Для точок конуса строго доміантних ваг має місце формула

$$E_\lambda(x) = \frac{1}{2}(C_\lambda(x) + S_\lambda(x)).$$

C-, *S*- та *E-функції* є неперервними та мають неперервні похідні всіх порядків, допускають масштабування та мають властивості симетрії відносно дзеркальних відображень r_i , що відповідають i -м простим кореням алгебри Лі:

$$\begin{aligned} C_\lambda(r_i x) &= C_{r_i \lambda}(x) = C_\lambda(x), & S_{r_i \lambda}(x) &= S_\lambda(r_i x) = -S_\lambda(x), \\ E_{r_i \lambda}(x) &= E_\lambda(r_i x) = E_\lambda(x). \end{aligned}$$

У першому параграфі третього розділу отримано явний вигляд операторів другого порядку, для яких тривимірні *C-орбіт-функції* та *S-орбіт-функції* — це, відповідно, розв'язки крайових задач Неймана та Діріхле на фундаментальних областях афінних груп Вейля відповідних напівпростих алгебр Лі.

Твердження 3.5. *Орбіт-функції $C_\lambda(x)$, $E_\lambda(x)$ та $S_\lambda(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, визначені в ω -базисі для напівпростих груп Лі рангу 3, є власними*

функціями наступних диференціальних операторів другого порядку Δ з власними значеннями $-4\pi\langle\lambda, \lambda\rangle$:

$$\begin{aligned} A_1 \times A_1 \times A_1: & \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2, \\ A_2 \times A_1: & \quad \Delta = \partial_1^2 - \partial_1\partial_2 + \partial_2^2 + \partial_3^2, \\ C_2 \times A_1: & \quad \Delta = 2\partial_1^2 - 2\partial_1\partial_2 + \partial_2^2 + \partial_3^2, \\ G_2 \times A_1: & \quad \Delta = 3\partial_1^2 - 5\partial_1\partial_2 + \partial_2^2 + \partial_3^2, \\ A_3: & \quad \Delta = \partial_1^2 - \partial_1\partial_2 + \partial_2^2 - \partial_2\partial_3 + \partial_3^2, \\ B_3: & \quad \Delta = \partial_1^2 - \partial_1\partial_2 + \partial_2^2 - 2\partial_2\partial_3 + 2\partial_3^2, \\ C_3: & \quad \Delta = 2\partial_1^2 - 2\partial_1\partial_2 + 2\partial_2^2 - 2\partial_2\partial_3 + \partial_3^2. \end{aligned}$$

Також у параграфі 3.1 вивчаються властивості орбіт-функцій, зокрема тривимірних: побудовано явний вигляд їхніх орбіт, стабілізаторів, фундаментальних областей, розроблено їхню дискретизацію та доведено дискретну ортогональність.

Розглянемо набір дискретних точок фундаментальної області F_M , $M \in \mathbb{N}$ напівпростої алгебри Лі для $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ та коефіцієнтів $q_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, n$, розкладу старшого кореня за базисом, дуальним до базису простих ваг

$$\Lambda_M = \{t_1\omega_1 + \dots + t_n\omega_n \mid t_0 + t_1q_1 + \dots + t_nq_n = M\}.$$

Має місце теорема про дискретну ортогональність орбіт-функцій.

Твердження 3.7. *C - та S -функції, визначені для $\lambda, \lambda' \in \Lambda_M$, попарно ортогональні*

$$\begin{aligned} \langle C_\lambda(x), C_{\lambda'}(x) \rangle_M &= \det(\mathfrak{C})|W|M^n |\text{Stab}(\lambda)| \delta_{\lambda\lambda'}, \\ \langle S_\lambda(x), S_{\lambda'}(x) \rangle_M &= \det(\mathfrak{C})|W|M^n \delta_{\lambda\lambda'}. \end{aligned}$$

Тут $\mathfrak{C}$ — матриця Картана, $|W|$ — порядок групи Вейля, $|\text{Stab}(\lambda)|$ — порядок групи ізотропії точки $\lambda \in F_M$ під дією групи Вейля, а δ — дельта-символ Кронекера.

У параграфі 3.2 орбіти групи Вейля $W(A_n)$ простих алгебр Лі A_n зведено до об'єднання орбіт груп Вейля максимальних редуктивних підалгебр алгебри A_n . Для всіх випадків $n \leq 8$ та нескінченних серій $A_n \supset A_{n-k-1} \times A_k \times U_1$, $A_{2n} \supset B_n$, $A_{2n-1} \supset C_n$ і $A_{2n-1} \supset D_n$ побудовано матриці, що перетворюють точки орбіт $W(A_n)$ у точки орбіт підалгебр. Таким чином, знайдено правила галуження орбіт групи Вейля, що можуть бути застосовані для розкладу добутків орбіт-функцій та у теорії зображень простих алгебр Лі. Крім цього, у цьому ж параграфі доведено еквівалентність трьох сімей орбіт-функцій

для простої алгебри A_n спеціальним експоненційним функціям багатьох змінних, введеним А.У. Клімиком та І. Патерою.

Останній параграф розділу присвячено побудові нескінченних сімей ортогональних поліномів n змінних. Запропоновано три методи побудови ортогональних поліномів виходячи з орбіт-функцій: експоненційний, тригонометричний та рекурсивний. Доведено еквівалентність кількох відомих сімей ортогональних поліномів, зокрема, поліномів Чебишева, Якобі, Макдональда та Курнвіндера поліномам орбіт-функцій. Отримано явний вигляд розв'язних рекурсій, що дозволяють алгоритмічно будувати сім'ї ортогональних поліномів двох та трьох змінних.

При рекурсивному методі побудови поліномів, у якості нових змінних обираються n C -функцій фундаментальних ваг:

$$u_j = u_j(x) := C_{\omega_j}(x), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

C -поліноми будуються за допомогою розкладу добутку змінних u_j та C -функцій у суму C -поліномів. S -поліноми будуються використовуючи C -поліноми та характери Вейля.

Спочатку знаходимо *породжуючі рекурсії* для точок $a_1, a_2, \dots, a_n$ з конуса строго домінантних ваг. Після чого будуються *додаткові* рекурсії для нижчих ваг, які необхідні, щоб розв'язати породжуючі рекурсії. Ефективний шлях знаходження розкладів добутків орбіт-функцій — це розклад добутків орбіт груп Вейля. Зауважимо, що побудовані рекурсії завжди лінійні, а відповідні матриці — трикутні. Щодо рекурсивних підстановок $u_i = C_{\omega_i}$ доведено наступне твердження.

Твердження 3.16. *Будь-яка C -функція та будь-який характер χ_λ простої групи Лі G може бути представлений у вигляді полінома від C -функцій фундаментальних ваг $\omega_1, \dots, \omega_n$, тобто у вигляді полінома змінних $u_1, u_2, \dots, u_n$.*

Для кожної з простих алгебр Лі рангів два та три виписано початкові набори поліномів у явному вигляді та знайдено правила редукції поліномів двох та трьох змінних до поліномів інших алгебр за максимальними підгрупами простих груп Лі.

Для ілюстрації розглянемо просту алгебру Лі рангу два A_2 , яка відповідає замоцненню площини рівносторонніми трикутниками. Зауважимо, що саме таке покриття площини використали І. Динніков

C -поліноми		S -поліноми	
# = 0		# = 0	
$C_{(1,1)}$	$u_1 u_2 - 3$	$S_{(2,2)}$	$u_1 u_2 - 1$
$C_{(3,0)}$	$u_1^3 - 3u_1 u_2 + 3$	$S_{(1,4)}$	$u_2^3 - 2u_1 u_2 + 1$
$C_{(2,2)}$	$u_1^2 u_2^2 - 2u_1^3 - 2u_2^3 + 4u_1 u_2 - 3$	$S_{(3,3)}$	$u_1^2 u_2^2 - u_1^3 - u_2^3$
# = 1		# = 1	
$C_{(1,0)}$	u_1	$S_{(2,1)}$	u_1
$C_{(0,2)}$	$u_2^2 - 2u_1$	$S_{(1,3)}$	$u_2^2 - u_1$
$C_{(2,1)}$	$u_1^2 u_2 - 2u_2^2 - u_1$	$S_{(3,2)}$	$u_1^2 u_2 - u_2^2 - u_1$
$C_{(1,3)}$	$u_1 u_2^3 - 3u_1^2 u_2 - u_2^2 + 5u_1$	$S_{(2,4)}$	$u_1 u_2^3 - 2u_1^2 u_2 - u_2^2 + 2u_2$
$C_{(4,0)}$	$u_1^4 - 4u_1^2 u_2 + 2u_2^2 + 4u_1$	$S_{(5,1)}$	$u_1^4 - 3u_1^2 u_2 + u_2^2 + u_1 + u_2$

Табл. 1. C - та S -поліноми алгебри A_2 степеня, не вищого за чотири. З усіх поліномів $C_{(a,b)}$ або $S_{(a,b)}$ отримуємо $C_{(b,a)}$ або $S_{(b,a)}$, відповідно помінявши місцями u_1 та u_2 . Поліноми вищих степенів будуються з рекурсії 3.

та С. Новіков 2003 р. при дискретизації комплексного аналізу, а також Т. Курнвіндер 1974 р. при дослідженні ортогональних поліномів.

C -функції фундаментальних ваг $\omega_1 = (1, 0)$, $\omega_2 = (0, 1)$ є новими змінними для ортогональних поліномів, що будуються рекурсивним методом

$$u_1 := C_{(1,0)}(x_1, x_2), \quad u_2 := C_{(0,1)}(x_1, x_2).$$

Оскільки зовнішній автоморфізм алгебри A_2 пов'язує поліноми $C_{(a,b)}$ та $C_{(b,a)}$ перестановкою змінних $u_1 \leftrightarrow u_2$, то досить побудувати та розв'язати єдину породжуючу рекурсію

$$u_1 C_{(a,b)} = C_{(a+1,b)} + C_{(a-1,b+1)} + C_{(a,b-1)}, \quad a, b \geq 2. \quad (3)$$

Додаткові рекурсії, що будуються з розкладу добутків орбіт-функцій, які відповідають непороджуючим точкам, дозволяють отримати необхідні C -поліноми найнижчих степенів, а S -поліноми виводимо за допомогою характеру Вейля для кожного з класів конгруентності $\#$. Поліноми найнижчих степенів наведено у табл. 1.

На рис. 4 наведено область ортогональності та точки сітки дискретизації поліномів алгебри A_2 для $M = 3$.

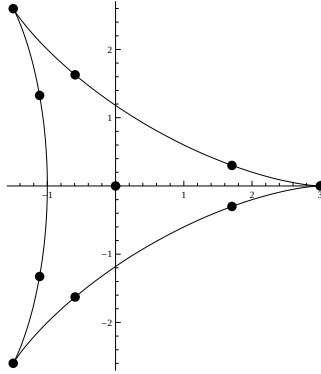


Рис. 4. Область ортогональності $\mathfrak{F}$ поліномів алгебри A_2 та дискретні точки фундаментальної області $\mathfrak{F}_3$.

Наприкінці дисертації наведено основні результати й висновки.

Результати, що ілюструють і доповнюють результати основної частини, виокремлено у два додатки.

У додатку А зібрано результати щодо контракцій комплексних нільпотентних алгебр $\mathcal{L}_i$ розмірностей п'ять та шість.

А у додатку Б наведено результати класифікації нееквівалентних реалізацій двох п'ятивимірних алгебр Галілея.

Список наукових праць, де опубліковано результати дисертації, й інформацію щодо їхньої апробації наведено у додатку В.

ВИСНОВКИ

Основні результати дисертації можна сформулювати так:

- Використовуючи розмірність централізатора похідної алгебри $\mathcal{L}_i$, підалгебри та їх розмірності, сформульовано та доведено дві нові необхідні умови існування контракцій.
- У термінах S -розширень переглянуто гіпотезу А. Зайцева про можливість граничної класифікації розв'язних алгебр $\mathcal{L}_i$. Для цього досліджено S -розширення тривимірних дійсних алгебр $\mathcal{L}_i$ та показано, що S -розширення та редукція алгебр $\mathcal{L}_i$ дозволяють отримати неунімодулярні алгебри $\mathcal{L}_i$ з унімодулярних, проте при цьому порушується відношення порядку на многовиді алгебр $\mathcal{L}_i$ фіксованої розмірності.

- Досліджено контракції комплексних нільпотентних алгебр L_1 розмірностей п'ять та шість, для них встановлено достатні переліки необхідних умов та показано, що ці контракції можна реалізувати за допомогою контракцій Іньоно–Вігнера або узагальнених контракцій Іньоно–Вігнера.
- Узагальнено алгебраїчний метод І. Широкова для побудови реалізацій алгебр L_1 на випадок інтранзитивної дії локальної групи L_1 . Запропоновано спосіб зведення реалізації до суттєвих змінних та метод побудови контракцій реалізацій алгебр L_1 .
- Знайдено реалізації алгебр Пуанкаре $p(1, 1)$ та $p(1, 2)$ у просторах не більше ніж трьох змінних і побудовано деформації цих алгебр.
- Досліджено алгебри Галілея розмірностей, не вищих за п'ять, побудовано їх нееквівалентні реалізації та деформації.
- Для конформної алгебри L_1 та двох алгебр де Сіттера побудовано нові породжуючі реалізації та отримано спільну деформацію алгебри Пуанкаре до алгебр де Сіттера як обернену до контракцій.
- Знайдено повні набори диференціальних інваріантів для найменшої алгебри Галілея та її деформацій, а також доведено теорему про нормальну форму інваріантної системи двох рівнянь другого порядку.
- Вивчено множини перерізів та проєкцій та запропоновано метод для дискретного Фур'є-аналізу майже періодичних функцій, пов'язаних з квазікристалами, цей метод протестовано на аперіодичних функціях квазікристала Фібоначчі. Розроблено та застосовано до растрових зображень симетричний переставний метод шифрування, що базується на одновимірних квазікристалах.
- Досліджено спеціальні C -, S - та E -функції, розроблено їх дискретизацію та доведено дискретну ортогональність. Для функцій, що відповідають напівпростим алгебрам рангу три, побудовано явний вигляд їх орбіт, стабілізаторів, фундаментальних областей та оператори другого порядку, для яких тривимірні C -функції та S -функції — це відповідно, розв'язки крайових задач Неймана та Діріхле.
- Розглянуто спеціальні експоненційні функції багатьох змінних, запропоновані А. Клімиком та Ї. Патерою у вигляді визначників та

перманентів, та показано, що вони еквівалентні орбіт-функціям алгебри A_n . Побудовано правила галуження орбіт групи Вейля простих алгебр $\mathcal{L}i A_n$ за максимальними підгрупами.

- Виходячи з орбіт-функцій побудовано ортогональні поліноми багатьох змінних та показано, що вони еквівалентні відомим наборам ортогональних поліномів, а саме поліномам Чебишева, Якобі, Макдональда та Курнвіндера. Розглянуто три методи побудови поліномів, отримано явний вигляд розв'язних рекурсій і редукції для випадку напівпростих алгебр $\mathcal{L}i$ рангів два та три.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Nesterenko M., Pošta S., Contractions of realizations, *Lie Theory and Its Applications in Physics*, Springer Proc. Math. Stat. **335**, Springer, Singapore, 2020, 447–453.
2. Nesterenko M., Myronova M., Generic realizations of conformal and de Sitter algebras, *Зб. праць Інституту математики НАН України* **16** (2019), no. 1, 100–112.
3. Nesterenko M., Pošta S., Discrete analysis on non-cubic lattices, *J. Phys.: Conf. Ser.* **1416** (2019), 012024, 8 pp.
4. Nesterenko M., Pošta S., Comparison of realizations of Lie algebras, *J. Phys.: Conf. Ser.* **965** (2018), 012028, 6 pp.
5. Nesterenko M., Pošta S., Differential invariants and realizations of the deformed smallest Galilei algebra, *Phys. Part. Nuclei* **49** (2018), 949–951.
6. Nesterenko M., Pošta S., Equivalence of vector field realizations of Lie algebras from the Lie group point of view, *Quantum Theory and Symmetries with Lie Theory and Its Applications in Physics*, Springer Proc. Math. Stat. **263**, Springer, Singapore, 2018, 421–427.
7. Nesterenko M., Pošta S., Vaneeva O., Realizations of Galilei algebras, *J. Phys. A* **49** (2016), 115203, 26 pp.
8. Nesterenko M., The Poincaré algebras $\mathfrak{p}(1, 1)$ and $\mathfrak{p}(1, 2)$: realizations and deformations, *J. Phys.: Conf. Ser.* **621** (2015), 012009, 7 pp.
9. Nesterenko M., Pošta S., Contraction admissible pairs of complex six-dimensional nilpotent Lie algebras, *Lie Theory and its Applications in Physics*, Springer Proc. Math. Stat. **191**, Springer, Singapore, 2016, 539–549.

10. Nesterenko M., Realizations of Lie algebras, *Phys. Part. Nuclei Lett.* **11** (2014), no. 7, 987–989.
11. Nesterenko M., S -expansions of three-dimensional Lie algebras, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2012)*, University of Cyprus, Nicosia, 2012, 147–154.
12. Nesterenko M., Patera J., Tereszkievich A., Orthogonal polynomials of compact simple Lie groups, *Int. J. Math. Math. Sci.* **2011** (2011), 969424, 23 pp.
13. Nesterenko M., Patera J., Tereszkievich A., Orbit functions of $SU(n)$ and Chebyshev polynomials, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2010)*, University of Cyprus, Nicosia, 2010, 133–151.
14. Nesterenko M., Patera J., Szajewska M., Tereszkievich A., Orthogonal polynomials of compact simple Lie groups: branching rules for polynomials, *J. Phys. A* **43** (2010), 495207, 27 pp.
15. Larouche M., Nesterenko M., Patera J., Branching rules for the Weyl group orbits of the Lie algebra A_n , *J. Phys. A* **42** (2009), 485203, 15 pp.
16. Nesterenko M., Patera J., On orbit functions, their properties and applications *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2008)*, University of Cyprus, Nicosia, 2009, 155–163.
17. Nesterenko M., Patera J., Quasicrystal models in cryptography, *AIP Conf. Proc.* **1191** (2009), 148–159.
18. Nesterenko M., Patera J., Three-dimensional C -, S - and E -transforms, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008), 475205, 31 pp.
19. Moody R.V., Nesterenko M., Patera J., Computing with almost periodic functions, *Acta Crystallogr. Sect. A* **64** (2008), 654–669.
20. Patera J., Nesterenko M., Quasicrystals in cryptography, *Aspects of Network and Information Security*, **17** NATO Science for Peace and Security Series – D: Information and Communication Security, IOS Press, 2008, 274–282.
21. Гапонова О.В., Нестеренко М. О., Системи ЗДР другого порядку інваріантні відносно низькорозмірних алгебр Лі, *Зб. праць Інституту математики НАН України* **3** (2006), no. 2, 71–91.

22. Gaponova O.V., Nesterenko M., Systems of second-order ODEs invariant with respect to low-dimensional Lie algebras, *Phys. AUC.* **16** (2006), V.II, 238–256.
23. Nesterenko M., Patera J., Zhavrotskyi D., New families of cryptographic systems, arXiv:0710.0021v1 (2007), 14 pp.
24. Nesterenko M., Pošta S., Contractions of realizations of Lie algebras, Тези доповідей міжнародної конференції молодих математиків, 6–8 червня 2019 р., Ін-т математики НАН України, Київ, с. 38.
25. Nesterenko M., Pošta S., On discrete Fourier analysis for the functions sampled on the weight lattices or model sets of semisimple Lie groups, Abstracts of International Workshop “A Century of Noether’s Theorem and Beyond”, November 30 – December 2, 2018, Opava, Czech Republic, p. 5.
26. Нестеренко М., Еквівалентність реалізацій алгебр Лі, Матеріали міжнародної науково-практичної конференції “Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі”, 21–22 червня, 2018, Київ, НУХТ, с. 65.
27. Nesterenko M., Simple Lie groups in quasicrystals, Book of abstracts of the 9th Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems”, Larnaca, Cyprus, June 10–14, 2018, p. 30.
28. Nesterenko M., Pošta S., Контракції реалізацій алгебр Лі, Онлайн-матеріали міжнародного семінару “Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики”, Київ, 22–23 грудня, 2018, URL: www.imath.kiev.ua/~apppmath/Abstracts2018/Nesterenko_ua.html
29. Nesterenko M., Comparison of realizations of Lie algebras and their differential invariants, Booklet of abstracts ISQS25, XXVth International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries Prague, Czech Republic, June 6–10, 2017, p. 115.
30. Nesterenko M., Pošta S., Vaneeva O., Realizations of Galilei algebras, Онлайн-матеріали міжнародного семінару “Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики”, Київ, 17–20 грудня, 2016, URL: www.imath.kiev.ua/~apppmath/Abstracts2016/Nesterenko.html
31. Nesterenko M., Pošta S., Vaneeva O., Realizations of Galilei algebras, Онлайн-матеріали міжнародного семінару 7th Workshop

- “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems”, Larnaca, Cyprus, June 15–19, 2016, URL: www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2016/Nesterenko.html
32. Nesterenko M. Contractions of nilpotent Lie algebras, Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків, Київ, 3–6 червня, 2015, с. 20.
33. Nesterenko M., Realizations of 3- and 6-dimensional Poincaré algebras, Book of abstracts of the 7th Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems”, Larnaca, Cyprus, June 15–19, 2014, p. 33.
34. Нестеренко М., Контракції алгебр Лі, Онлайн-матеріали міжнародного семінару “Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики”, Київ, 21–24 грудня, 2013, URL: www.imath.kiev.ua/~appmath/AbstractsWIF/Nesterenko2013.html
35. Нестеренко М., Ортогональні поліноми, пов’язані з простими групами Лі, та правила галуження для них, Онлайн-матеріали міжнародного семінару “Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики”, Київ, 18–19 грудня, 2011, URL: www.imath.kiev.ua/~appmath/AbstractsWIF/Nesterenko.html
36. Nesterenko M., Computing with almost periodic functions, Онлайн-матеріали міжнародного семінару “CRM-Fields-MITACS Workshop on Lie Groups, Group Transforms and Image Processing”, Toronto, May 16, 2008, URL: www.fields.utoronto.ca/programs/scientific/07-08/liegroups/abstracts.html
37. Nesterenko M., New families of cryptographic systems, Онлайн-матеріали конференції “CMS-MITACS Joint Conference 2007”, Winnipeg, May 31 – June 3, 2007, URL: www2.cms.math.ca/Events/summer07/abs/posters_by_theme
38. Nesterenko M., Systems of two second order ODEs invariant with respect to the low-dimensional Lie algebras, Онлайн-матеріали семінару “Seminar Physique Mathématique CRM, UdeM”, Montreal, February 13, 2007, URL: www.crm.umontreal.ca/cal/en/mois200702.html
39. Nesterenko M., Contractions of low-dimensional Lie algebras, Онлайн-матеріали семінару “Lie Algebra Workshop

of University of Ottawa”, Ottawa, April 13–15, 2007,
URL: www.fields.utoronto.ca/programs/scientific/06-07/liealgebra/abstracts.pdf

АНОТАЦІЇ

Нестеренко М.О. Реалізації та контракції алгебр Лі, орбіт-функції та квазікристали. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 “математична фізика” (111 — математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2021.

Основними напрямками дисертаційного дослідження є контракції та реалізації алгебр Лі, а також наближення майже періодичних функцій та вивчення орбіт-функцій і пов’язаних з ними ортогональних поліномів.

У роботі запропоновано дві нові необхідні умови існування контракцій та застосовано їх для опису контракцій нільпотентних комплексних алгебр Лі розмірностей п’ять та шість, а також досліджено S -розширення тривимірних алгебр Лі та показано, що в комбінації з редукціями вони дозволяють отримати неунімодулярні алгебри Лі виходячи з унімодулярних.

При дослідженні реалізацій алгебр Лі доведено теорему про зведення реалізації до суттєвих змінних та узагальнено алгебраїчний метод І. Широкова для побудови реалізацій алгебр Лі, як проєкцій ліво-інваріантних векторних полів. Запропоновано конструктивний метод побудови параметризованих реалізацій, що є точними та збігаються до реалізацій контрактованої алгебри Лі. Використовуючи алгебраїчний метод побудовано реалізації алгебр Пуанкаре $\mathfrak{p}(1, 1)$ та $\mathfrak{p}(1, 2)$ у просторах не більше ніж трьох змінних, та реалізації алгебр Галілея розмірностей не вище за п’ять. Також отримано нові породжуючі реалізації конформної алгебри Лі та двох алгебр де Сіттера та певні деформації усіх згаданих алгебр. Використовуючи отримані реалізації були знайдені повні набори диференціальних інваріантів для найменшої алгебри Галілея та доведено теорему про нормальну форму інваріантної системи двох рівнянь другого порядку.

Для майже періодичних функцій, пов’язаних з аперіодичними множинами перерізів та проєкцій (квазікристалами), запропоновано

метод дискретного Фур'є-аналізу. Цей метод протестовано на двох локальних функціях квазікристала Фібоначчі. Як приклад розглянуто використання квазікристалів для шифрування інформації.

Досліджено спеціальні орбіт-функції, зокрема тривимірні, вивчено їх основні властивості та показано, що у випадку алгебри A_n вони еквівалентні експоненційним функціям багатьох змінних, введеним А. Кліміком та І. Патерою. Запропоновано три методи побудови ортогональних поліномів виходячи з орбіт-функцій та доведено еквівалентність кількох відомих сімей ортогональних поліномів поліномам орбіт-функцій. Побудовано правила галуження орбіт групи Вейля простих алгебр Лі A_n та правила галуження для поліномів двох та трьох змінних.

Ключові слова: алгебра Лі, група Лі, реалізація алгебри Лі, векторні поля Лі, диференціальний інваріант, контракція алгебри Лі, орбіт-функція, група Вейля, квазікристал, майже періодична функція, ортогональний поліном, сітка, ґратка, фундаментальна область.

Nesterenko M.O. Realizations and contractions of Lie algebras, orbit-functions and quasicrystals. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.03 “Mathematical Physics” (111 – Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2021.

The thesis is devoted to contractions and realizations of Lie algebras, to Fourier analysis of almost periodic functions and investigation of orbit-functions and respective orthogonal polynomials.

We survey contraction theory and propose two new necessary conditions of contraction existence, that are connected with subalgebras and dimensions of the derived algebra centralizers. These new conditions are applied to the complex nilpotent Lie algebras of dimensions five and six. The complete set of the pairs of 5- and 6-dimensional nilpotent Lie algebras that do not admit contractions is obtained. It is also proven that contractions of complex nilpotent Lie algebras of dimensions five and six are equivalent to generalized Inönü–Wigner contractions.

Zaitsev’s hypothesis is revised in terms of S -expansions. S -expansions of three-dimensional real Lie algebras are considered and it is shown that expansion preserves properties of solvability, nilpotency and unimodularity. At the same time S -expansion and reduction allow one to obtain a non-unimodular Lie algebra from a unimodular one. Nevertheless S -expansions define no ordering on the variety of Lie algebras of a fixed dimension.

Studying realizations of Lie algebras we proved a reduction theorem that transforms realization to the essential variables. Application of the Shirokov’s algebraic method for the construction of differential one-forms was generalized to the case of intransitive action of the local Lie group. In order to avoid improper realizations (when a contraction matrix is directly applied to a realization), we propose a construction of the equivalent parameterized realization that converges to the desired Lie algebra realization.

All inequivalent realizations of the Galilei algebras of dimensions not greater than five are constructed using the algebraic approach. The varieties of the deformed Galilei algebras are discussed and families of one-parametric deformations are presented in the explicit form. It is also shown that a number of well-known and physically interesting equations and systems are invariant with respect to the considered Galilei algebras or their deformations.

Using the same method, all inequivalent realizations of the Poincaré algebras $\mathfrak{p}(1, 1)$ and $\mathfrak{p}(1, 2)$ acting in spaces of not more than three variables are constructed. First-order deformations of $\mathfrak{p}(1, 1)$ and $\mathfrak{p}(1, 2)$ are proposed and the generic realizations for the initial and deformed Poincaré algebras are presented.

New generic realizations of the conformal Lie algebra and two de Sitter algebras are obtained and deformation of the Poincaré algebra to the both de Sitter algebras is constructed.

Complete set of differential invariants for the smallest Galilei algebra is constructed and the theorem on the normal form of an invariant system of two second-order differential equations is proven.

We also develop a method for the discrete Fourier analysis of almost periodic functions defined on cut-and-project sets. The proposed method is tested using two almost periodic functions on the Fibonacci quasicrystal. The respective two-dimensional cut-and-project scheme is considered in all details and can be applied to the approximation of any aperiodic function on this type of quasicrystal. Using the everywhere

discontinuity of the $\star$ -map that relates physical and internal spaces of the one-dimensional quasicrystal, we propose the symmetric encryption cypher and test it on JPG-images.

Finally we define and study new special functions — orbit-functions, orthogonal polynomials and branching rules. For each semisimple Lie algebra, there are three families of special functions: C -, S -, and E -functions. Pertinent properties of the functions are described in detail, such as their continuous and discrete orthogonality. Moreover, it is shown that orbit functions are eigenfunctions of some second-order differential operators.

The orbits of Weyl groups of simple A_n type Lie algebras are reduced to the union of orbits of the Weyl groups of maximal reductive subalgebras of A_n . It also shown that C -, S - and E -functions are equivalent to the special multivariate exponential functions proposed in terms of determinants and anti-determinants by Klimyk and Patera.

Three methods for the construction of orthogonal polynomials related to the orbit functions are proposed. The equivalence of the constructed polynomials to several known families of orthogonal polynomials (the Chebyshev, Jacobi, MacDonald, and Koornwinder polynomials) is proven. An explicit forms of solvable recursions are obtained and the reduction rules are found for the polynomials of the semisimple Lie algebras of the ranks two and three.

Key words: Lie algebra, Lie group, realization, vector field, differential invariant, contraction, orbit-function, Weyl group, quasicrystal, almost periodic function, orthogonal polynomial, greed, lattice, fundamental region.

Підписано до друку 29.03.2021. Формат $60 \times 84/16$. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 2. Умов. друк. арк. 1,8.
Наклад 100 пр. Зам. 42. Безкоштовно.

Інститут математики НАН України,
01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

