Про лебегівську структуру розподілу одного випадкового степеневого ряду, представленого s-ковим дробом.

Макарчук Олег Петрович – доцент кафедри ПМСЕ, Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка

Розглянемо випадкову величину

$$\xi = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\xi_k}{s^k},$$

де $2 \leq s \in N,$ ξ_k– послідовність незалежних випадкових величин, причому кожна з величин ξ_k набуває s цілих значень:

$$a_{0k}, a_{1k}, \dots, a_{(s-1)k}$$

$$L > 0: \left|a_{ij}\right| \leq L \ \forall i \in \{0; 1; \dots; s-1\}, j \in N,$$

які утворюють повну систему лишків по модулю s.

$$P\left(\xi_k = a_{jk}\right) = q_{jk} (j \in \{0; 1; \dots; s-1\}).$$

Попередні результати.

Нехай $\xi_n -$ *послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень* $0, 1, \dots, s-1$ $(s \in N, s \geq 2)$ *з ймовірностями* $p_{0n}, p_{1n}, \dots, p_{(s-1)n}$ *відповідно,* a_n *−послідовність дійсних чисел. Розглянемо випадкову величину*

$$\xi = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \dots + \xi_n a_n + \dots$$

Наслідок. *Якщо виконуються умови*

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} |s^n a_n| < +\infty$$

$$\lambda(M) > 0 \ \left(M = \left\{\sum_{j=1}^{+\infty} t_j a_j \,\middle|\, t_j \in \{0; \dots; s-1\}\right\}\right).$$

то випадкова величина ξ *має чистий розподіл, причому*

дискретний *тоді і тільки тоді, коли*

$$\prod_{j=1}^{+\infty} \max\left(p_{0j}; \dots; p_{(s-1)j}\right) > 0$$

абсолютно неперервний *тоді і тільки тоді, коли*

$$\prod_{j=1}^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{p_{0j}}{s}} + .. \sqrt{\frac{p_{(s-1)j}}{s}}\right) > 0$$

сингулярний *тоді і тільки тоді, коли*

$$\prod_{j=1}^{+\infty} \max\left(p_{0j}; \dots; p_{(s-1)j}\right) = 0$$

$$\prod_{j=1}^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{p_{0j}}{s}} + .. \sqrt{\frac{p_{(s-1)j}}{s}}\right) = 0$$

<u>Корисна Лема.</u>

$$\prod_{j=1}^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{p_{0j}}{s}} + .. \sqrt{\frac{p_{(s-1)j}}{s}}\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(p_{0n} - \frac{1}{s}\right)^2 + \dots + \left(p_{(s-1)n} - \frac{1}{s}\right)^2\right) < +\infty$$

Аналогічними міркуваннями можливо отримати наступний результат.

Нехай $\xi_n -$ *послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень* $b_{0k}, b_{1k}, \dots, b_{(s-1)k}$ $(s \in N, s \geq 2)$ *з ймовірностями* $p_{0n}, p_{1n}, \dots, p_{(s-1)n}$ *відповідно, причому існує* $L > 0: |b_{ij}| \leq L \ \forall i \in \{0; 1; \dots; s-1\}, j \in N$, a_n *−послідовність дійсних чисел. Розглянемо випадкову величину*

$$\xi = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \dots + \xi_n a_n + \cdots$$

Наслідок. *Якщо виконуються умови*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} |s^n a_n| < +\infty$$

$$\lambda(M) > 0 \ \ \left(M = \left\{\sum_{j=1}^{+\infty} t_j a_j \,\middle|\, t_j \in \{b_{0k}, b_{1k}, \dots, b_{(s-1)k}\}\right\}\right).$$

то випадкова величина ξ *має чистий розподіл, причому*

дискретний *тоді і тільки тоді, коли*

$$\prod_{j=1}^{+\infty} \max(p_{0j}; \dots; p_{(s-1)j}) > 0$$

абсолютно неперервний *тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(p_{0n} - \frac{1}{s}\right)^2 + \dots + \left(p_{(s-1)n} - \frac{1}{s}\right)^2\right) < +\infty$$

сингулярний *тоді і тільки тоді, коли*

$$\prod_{j=1}^{+\infty} \max(p_{0j}; \dots; p_{(s-1)j}) = 0$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}((p_{0n}-\frac{1}{s})^2+\cdots+(p_{(s-1)n}-\frac{1}{s})^2)=+\infty$$

Що необхідно для того, щоб скористатись теоремою?

$$\lambda(M)>0\ \left(M=\left\{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\alpha_k}{s^k},\middle|\alpha_k\in\{\,a_{0k},a_{1k},\dots,a_{(s-1)k}\}\right\}\right).$$

Історичні аспекти проблематики

Річард Кенйон (професор Йельського університету)

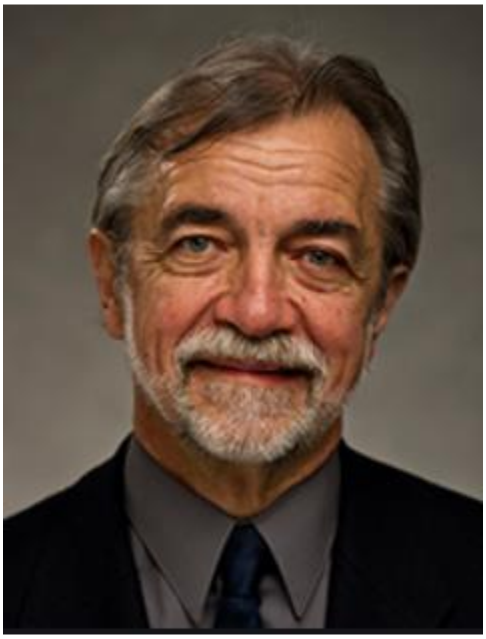
Richard Kenyon. Projecting the one-dimensional Sierpinski gasket. *Israel J. Math.*, 97:221–238, 1997.

Гіпотеза. *Множина*

$$M=\left\{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\alpha_k}{s^k},\middle|\alpha_k\in\{\,d_0,d_1,\dots,d_{s-1}\}\right\}$$

має додатну міру Лебега, якщо $d_0,d_1,\dots,d_{s-1}$ *утворює повну систему лишків по модулю* s.

Zbigniew H. Nitecki (університет Тафтса, штат Массачусетс)



Zbigniew Nitecki. Subsum sets: Intervals, cantor sets, and cantorvals, 2013.

Теорема 1.

Розглянемо випадкову величину

$$\xi = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\xi_k}{s^k},$$

де $2 \leq s \in N$, ξ_k*– послідовність незалежних випадкових величин, причому кожна з величин* ξ_k *набуває* s *цілих значень:*

$$a_{0k}, a_{1k}, \dots, a_{(s-1)k}$$

$$L > 0: \left|a_{ij}\right| \leq L \ \forall i \in \{0; 1; \dots; s-1\}, j \in N,$$

які утворюють повну систему лишків по модулю s.

Якщо виконуються умови

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\max_{0 \leq j \leq s-1} q_{jn} - \frac{1}{s}) < +\infty$$

то $F_\xi(x)$ *задовольняє умову Ліпшиця:*

$$|F_\xi(t) - F_\xi(z)| \leq C|t - z|$$

$$C = \prod_{n=1}^{+\infty} \mathrm{s} \cdot \max_{0 \leq j \leq s-1} q_{jn}$$

Підготовчий крок 1. Нехай b_k найбільше по модулю від'ємне число серед $a_{0k}, a_{1k}, \dots, a_{(s-1)k}$. Перейдемо, до аналізу випадкової величини

$$\tau = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\xi_k}{s^k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{s^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\xi_k + b_k}{s^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\tau_k}{s^k}$$

τ_k– *послідовність незалежних випадкових величин, причому кожна з величин* τ_k *набуває* s *цілих значень:*

$$0 = c_{0k} < c_{1k} < \dots < c_{(s-1)k}$$

$$L^* > 0: c_{ij} \leq L^* \ \forall i \in \{0; 1; \dots; s-1\}, j \in N,$$

які утворюють повну систему лишків по модулю s.

$$P(\xi_k = c_{jk}) = p_{jk} (j \in \{0; 1; \dots; s-1\}).$$

Підготовчий крок 2.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\max_{0 \leq j \leq s-1} p_{jn} - \frac{1}{s} \right) < +\infty \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(s \cdot \max_{0 \leq j \leq s-1} p_{jn} - 1 \right) < +\infty \Rightarrow$$

$$C = \prod_{n=1}^{+\infty} s \cdot \max_{0 \leq j \leq s-1} p_{jn} < +\infty \Rightarrow$$

$$\prod_{n=1}^{k} s \cdot \max_{0 \leq j \leq s-1} p_{jn} \leq C \Rightarrow$$

$$\prod_{n=1}^{k} \max_{0\le j\le s-1} p_{jn} \le \frac{C}{s^k}$$

<u>Підготовчий крок 3.</u> Означення. *Нехай n – натуральне число, r – невід'ємне ціле число.*

Для стохастичної матриці

$$||p|| = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p_{01}} & \cdots & \boldsymbol{p_{(s-1)1}} \\ \boldsymbol{p_{02}} & \cdots & \boldsymbol{p_{(s-1)2}} \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

означимо величину

$$S_{r,n}^{||p||} = \sum_{\substack{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n), \\ \alpha_k \in \{0,1\dots,s-1\}, \\ \frac{c_{\alpha_1 1}}{s^1}+\frac{c_{\alpha_2 2}}{s^2}+\dots+\frac{c_{\alpha_n n}}{s^n}=\frac{r}{s^n}}} \boldsymbol{p_{\alpha_1 1} \cdot p_{\alpha_2 2} \cdot \dots p_{\alpha_n n}}$$

Якщо рівність $\frac{c_{\alpha_1 1}}{s^1}+\frac{c_{\alpha_2 2}}{s^2}+\dots+\frac{c_{\alpha_n n}}{s^n}=\frac{r}{s^n}$ не може виконуватись, то

$$S_{r,n}^{||p||} \overset{\text{def}}{=} 0 .$$

Для конкретного $\boldsymbol{n}$ який діапазон доречно взяти для $\boldsymbol{r}$?

$$0 \le r \le \frac{c_{(s-1)1}}{s^1} + \dots + \frac{c_{(s-1)n}}{s^n}$$

А чи існує для конкретного $\boldsymbol{n}$ деяке $\boldsymbol{r}$ таке, що $S_{r,n}^{||p||}$ не нульове?

Так наприклад:

$$r = s^n(\frac{c_{(s-2)1}}{s^1} + \frac{c_{(s-2)2}}{s^2} + \ldots + \frac{c_{(s-2)n}}{s^n})$$

<u>Підготовчий крок 4.</u>

Розглянемо дробово-степеневу функцію та подивимось, що буде якщо розкрити дужки та згрупувати доданки.

$$f_n(t) = (p_{01}t^{\frac{c_{01}}{s^1}} + \cdots + p_{(s-1)1}t^{\frac{c_{(s-1)1}}{s^1}}) \cdot$$

$$\cdot \left(p_{02}t^{\frac{c_{02}}{s^2}} + \cdots + p_{(s-1)2}t^{\frac{c_{(s-1)2}}{s^2}}\right) \cdot \ldots \cdot$$

$$\left(p_{0n}t^{\frac{c_{0n}}{s^n}} + \cdots + p_{(s-1)n}t^{\frac{c_{(s-1)n}}{s^n}}\right)$$

Зрозуміло, що

$$f_n(t) = \sum S_{r,n}^{||p||} \cdot t^{\frac{r}{s^n}}$$

Розглянемо многочлен

$$h_n(t) = f_n\left(t^{s^n}\right) = \sum S_{r,n}^{||p||} \cdot t^r$$

<u>Наша мета, довести, що</u>

$$S_{r,n}^{||p||} \le \prod_{r=1}^{n} \max_{0 \le j \le s-1} p_{jr}$$

Це теж, саме, що і довести що всі коефіцієнти многочлена $\boldsymbol{h_n(t)}$ менші за

$$\prod_{r=1}^{n} \max_{0 \le j \le s-1} p_{jr}$$

<u>Підготовчий крок 5.</u> Переходимо до аналізу многочлена $h_n(t)$

$$h_n(t) = f_n\left(t^{s^n}\right) = (p_{01}t^{s^{n-1}c_{01}} + \cdots + p_{(s-1)1}t^{s^{n-1}c_{(s-1)1}}) \cdot$$

$$\cdot \left(p_{02}t^{s^{n-2}c_{02}} + \cdots + p_{(s-1)2}t^{s^{n-2}c_{(s-1)2}}\right) \cdot \ldots \cdot$$

$$\left(p_{0n}t^{c_{0n}} + \cdots + p_{(s-1)n}t^{c_{(s-1)n}}\right)$$

Записуємо вираз для $\boldsymbol{h_{n+1}(t)}$

$$h_{n+1}(t) = (p_{01}t^{s^n c_{01}} + \cdots + p_{(s-1)1}t^{s^n c_{(s-1)1}}) \cdot$$

$$\cdot \left(p_{02}t^{s^{n-1}c_{02}} + \cdots + p_{(s-1)2}t^{s^{n-1}c_{(s-1)2}}\right) \cdot \ldots \cdot$$

$$\left(p_{0(n+1)}t^{c_{0(n+1)}} + \cdots + p_{(s-1)(n+1)}t^{c_{(s-1)(n+1)}}\right)$$

Шукаємо зв'язок між $\boldsymbol{h_n(t)}$ та $\boldsymbol{h_{n+1}(t)}$

$$h_{n+1}(t) = \left(p_{0(n+1)}t^{c_{0(n+1)}} + \cdots + p_{(s-1)(n+1)}t^{c_{(s-1)(n+1)}}\right)h_n(t^s)$$

Все готово, для того щоб здійснити індукційний перехід.

Якщо

$$h_n(t) = \sum \beta_j t^j$$

$$h_{n+1}(t) = \sum \gamma_j t^j$$

то маємо:

$$h_n(t^s) = \sum \beta_j t^{sj}$$

$$\sum \gamma_j t^j =$$

$$= \left(p_{0(n+1)} t^{c_{0(n+1)}} + \cdots + p_{(s-1)(n+1)} t^{c_{(s-1)(n+1)}}\right) \sum \beta_j t^{sj}$$

Маємо:

$$\gamma_j = p_{l(n+1)} \beta_r$$

причому

$$j \equiv c_{l(n+1)} (mod\ s)$$

$$j = c_{l(n+1)} + sr$$

Оскільки

$$\beta_j \leq \prod_{r=1}^{n} \max_{0 \leq j \leq s-1} p_{jr}$$

та

$$p_{l(n+1)} \leq \max_{0 \leq j \leq s-1} p_{j(n+1)}$$

то

$$\gamma_j \leq \prod_{r=1}^{n+1} \max_{0 \leq j \leq s-1} p_{jr}$$

Однак дещо було сказано раніше:

$$\prod_{n=1}^{k} \max_{0 \leq j \leq s-1} p_{jn} \leq \frac{C}{s^k}$$

Маємо:

$$S_{r,n}^{||p||} \leq \frac{C}{s^n}$$

База $\boldsymbol{n = 1}$ ***очевидна:***

$$\boldsymbol{p_{l1} \leq \max_{0 \leq j \leq s-1} p_{j1}}$$

<u>Підготовчий крок 6.</u>*Аналог формули повної ймовірності.*

Позначимо

$$W_{n+1} = \frac{\tau_{n+1}}{s^1} + \frac{\tau_{n+2}}{s^2} + \cdots$$

Обрахуємо величину

$$F_\tau\left(\frac{r+1}{s^n}\right) - F_\tau\left(\frac{r}{s^n}\right) = P(\tau \in \left[\frac{r}{s^n}; \frac{r+1}{s^n}\right])$$

Випадки

$$\frac{\tau_1}{s^1} + \cdots + \frac{\tau_n}{s^n} = \frac{r}{s^n} \quad and \quad \frac{\tau_{n+1}}{s^{n+1}} + \frac{\tau_{n+2}}{s^{n+2}} + \cdots \ \in \left[0; \frac{1}{s^n}\right]$$

або $W_{n+1} \in [0; 1]$

$$\frac{\tau_1}{s^1} + \cdots + \frac{\tau_n}{s^n} = \frac{r-1}{s^n} \quad and \quad \frac{\tau_{n+1}}{s^{n+1}} + \frac{\tau_{n+2}}{s^{n+2}} + \cdots \ \in \left[\frac{1}{s^n}; \frac{2}{s^n}\right]$$

або $W_{n+1} \in [1; 2]$

коли ж цей процес точно закінчиться?

Аналізуємо максимальне значення «хвоста»

$$V = \max\left(W_{n+1}\right) = \frac{c_{(s-1)(n+1)}}{s^1} + \frac{c_{(s-1)(n+2)}}{s^2} + \cdots$$

$$v = [V] + 1$$

$$\frac{\tau_1}{s^1} + \cdots + \frac{\tau_n}{s^n} = \frac{r - v + 1}{s^n} \quad and \quad \frac{\tau_{n+1}}{s^{n+1}} + \frac{\tau_{n+2}}{s^{n+2}} + \cdots \in \left[\frac{v-1}{s^n}; \frac{v}{s^n}\right]$$

або $W_{n+1} \in [v-1; v]$

Маємо формулу

$$\boldsymbol{F_\tau}\left(\frac{r+1}{s^n}\right) - \boldsymbol{F_\tau}\left(\frac{r}{s^n}\right) =$$

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{r,n}}^{||\boldsymbol{p}||} \cdot P\{W_{n+1} \in [0;1]\} + \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{r-1,n}}^{||\boldsymbol{p}||} \cdot P\{W_{n+1} \in [1;2]\} \ldots + \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{r-v+1,n}}^{||\boldsymbol{p}||} \cdot P\{W_{n+1} \in [v-1;v]\}$$

<u>Підготовчий крок 7.</u> Оцінка

$$\boldsymbol{F_\tau}\left(\frac{r+1}{s^n}\right) - \boldsymbol{F_\tau}\left(\frac{r}{s^n}\right) \le \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{s^n}}\left(P\{W_{n+1} \in [0;1]\} + \cdots + P\{W_{n+1} \in [v-1;v]\}\right) =$$

$$= \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{s^n}} \cdot P\{W_{n+1} \in [0;v]\} = \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{s^n}}$$

<u>Підготовчий крок 8.</u> Оцінка при $l \ge r$

$$F_\tau\left(\frac{l}{s^n}\right) - F_\tau\left(\frac{r}{s^n}\right) \le \frac{C}{s^n}(l - r)$$

$$F_\tau\left(\frac{l}{s^n}\right) - F_\tau\left(\frac{r}{s^n}\right) = \sum_{j=1}^{l-r} \left(F_\tau\left(\frac{r+j}{s^n}\right) - F_\tau\left(\frac{r+j-1}{s^n}\right)\right)$$

<u>Підготовчий крок 9.</u> Граничний перехід

$$F_\tau\left(\frac{[s^n \cdot x_1]}{s^n}\right) - F_\tau\left(\frac{[s^n \cdot x_2]}{s^n}\right) \leq C \cdot \left(\frac{[s^n \cdot x_1]}{s^n} - \frac{[s^n \cdot x_2]}{s^n}\right)$$

$$s \to +\infty \qquad \Rightarrow \qquad |F_\tau(x_1) - F_\tau(x_2)| \leq C \cdot |x_1 - x_2|$$

Відкрите питання.

Чи обов'язково $F_\tau(x)$ задовольняє умову Ліпшиця лише при умові

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\max_{0 \leq j \leq s-1} p_{jn} - \frac{1}{s}\right) < +\infty$$