

Інститут прикладної математики і механіки НАН України

Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова

праця на правах рукопису

Васильєва Ірина Геннадіївна

УДК 531.39, 517.977, 519.217.4

ДИСЕРТАЦІЯ

СТАБІЛІЗАЦІЯ РУХУ КЕРОВАНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ З ВИПАДКОВИМ ВПЛИВОМ У КРИТИЧНИХ ВИПАДКАХ

Спеціальність 01.02.01 – "Теоретична механіка"

(фізико-математичні науки)

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ Васильєва І.Г.

Науковий керівник: **Зуєв Олександр Леонідович**,

доктор фізико-математичних наук, професор.

Слов'янськ– 2021

Анотація

Васильєва І.Г. Стабілізація руху керованих механічних систем з випадковим впливом у критичних випадках. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.02.01 – "Теоретична механіка". – Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ, 2021. Захист відбудеться в Інституті математики НАН України, Київ.

Дисертаційну роботу присвячено актуальним задачам теоретичної механіки, які виникають при дослідженні стійкості та стабілізації руху механічних систем, що описуються нелінійними диференціальними рівняннями із випадковим впливом.

Тематика дослідження пов'язана з планами наукових досліджень відділу технічної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України на 2012-2014 роки та відділу прикладної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України на 2017-2020 роки.

Дисертація складається зі вступу, шістьох розділів, списку використаних джерел із 100 найменувань вітчизняних та зарубіжних авторів. Загальний обсяг дисертації становить 126 сторінок.

У вступі детально обґрунтовано актуальність наряду дисертаційного дослідження, а також сформульовано мету та завдання дослідження, зазначено наукову новизну отриманих результатів, зв'язок роботи з науковими темами й особистий внесок здобувача, вказано, де було апробовано та опубліковано результати.

У першому розділі наведено огляд вітчизняних та закордонних публікацій, близьких до тематики дисертаційного дослідження.

У другому розділі викладено методику дослідження, а саме наведені основні означення, теореми та теоретичні відомості з теорії стохастичних диференціальних рівнянь та теорії стійкості руху механічних систем, які пов'язані з дисертаційною роботою.

У третьому розділі розглянуто питання збіжності розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь Іто до інваріантної множини за майже всіх початкових умов. Слід зазначити, що ця задача є певним узагальненням проблеми про достатні умови притягання особливої точки динамічної системи без припущення строгої додатності дивергенції функції щільності, дослідженої в роботі В.В. Грушківської та О.Л. Зуєва [22], на випадок системи нелінійних диференціальних рівнянь із випадковими впливами. У цьому розділі встановлено достатні умови збіжності до інваріантної множини в термінах функції щільності міри, яка є монотонною на фазовому потоці для системи стохастичних диференціальних рівнянь Іто.

Четвертий розділ присвячено питанню стабілізації інваріантних множин нелінійних систем із випадковими впливами. Для системи стохастичних диференціальних рівнянь Іто отримано достатні умови асимптотичної стійкості за ймовірністю інваріантної множини вигляду $M = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n | y = 0 \right\}$. Крім того, запропоновано спосіб побудови стабілізуючого керування зі зворотним зв'язком із використанням функції Ляпунова.

Також розглянута можливість практичного застосування отриманих теоретичних відомостей до задач часткової стабілізації руху твердого тіла та систем тіл. Досліджено дві механічні системи, які описують рух твердого тіла навколо центру його мас під дією реактивних моментів та рух твердого тіла, що містить пару симетричних маховиків. Обидві системи знаходяться під випадковими впливами у вигляді вінерівських процесів. Слід зауважити, що ці системи неможливо стабілізувати у класичному сенсі відносно всіх фа-

зових змінних. Для кожної системи в явному вигляді побудовано керування, яке дозволяє забезпечити асимптотичну стійкість системи відносно частини змінних і гарантувати при цьому стохастичну обмеженість траєкторій відповідних замкнених систем майже напевно. Ефективність запропонованого керування проілюстровано за допомогою чисельного моделювання у програмі Maple з використанням функції `ItoProcess()`.

У п'ятому розділі отримані достатні умови стабілізованості за ймовірністю стану рівноваги системи нелінійних диференціальних рівнянь із випадковими впливами, спираючись на метод керованих функцій Ляпунова. Запропоновано конструктивний алгоритм побудови керування із використанням y -стохастичної функції Ляпунова.

Отриманий результат застосовано до нелінійних систем із стохастичними впливами, що описують коливання перевернутого маятника з рухомою масою та рух колісного візка з додатковим ступенем волі. Наведено результати моделювання, які ілюструють поведінку вибіркової траєкторії відповідних замкнених систем.

Останній розділ дисертації присвячено проблемі часткової стабілізації нелінійних систем вздовж заданої траєкторії. Поширено концепцію стійкості сім'ї множин на випадок стійкості відносно частини змінних. Отримано достатні умови асимптотичної стійкості однопараметричної сім'ї множин із застосуванням залежного від часу керування у вигляді тригонометричних поліномів. Отримані результати застосовано до модельних прикладів механічних систем та проведено симуляцію руху відповідних замкнених систем засобами комп'ютерної алгебри.

Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Вони можуть знайти своє застосування в теорії нелінійних керованих систем із випадковими впливами. Алгоритми, отримані у роботі, в перспективі можуть

мати практичне застосування в системах комп'ютерного керування рухом робототехнічних систем для прикладних задач у різноманітних галузях промисловості.

Ключові слова: асимптотична стійкість руху відносно частини змінних, стохастичне диференціальне рівняння Іто, функція Ляпунова, асимптотична стійкість інваріантної множини, асимптотична стійкість за ймовірністю, рандомізоване керування, керування зі зворотнім зв'язком, системи твердих тіл.

Abstract

I.G. Vasylieva. Motion stabilization of mechanical control systems with random influence in critical cases. – The Manuscript.

Dissertation for the degree of a Candidate of Physical and Mathematical Sciences (PhD) in the specialty 01.02.01 - "Theoretical mechanics".– Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Sloviansk, 2021. The defense will be held at the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv.

This thesis is devoted to actual problems of theoretical mechanics which arise in the study of the stability of motion of mechanical systems described by nonlinear differential equations with random influence.

The research topic is related to the research plans of the department of technical mechanics of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics NAS of Ukraine (2012-2014) and the department of applied mechanics of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics NAS of Ukraine (2017-2020).

The main part of the thesis consists of the introduction, six chapters and the list of references (100 references). The dissertation contains 126 pages.

The relevance and current state of the research topic is justified in the introduction. Also the goal and tasks of this research, scientific novelty of the obtained results, connection of the work with scientific topics and the personal contribution of the applicant are indicated there.

The first section of the thesis is devoted to the survey of known results related to the subject.

The second section presents the research methodology, namely the basic theoretical information on the theory of stochastic differential equations and stability theory of mechanical systems.

The problem of attraction of solutions of the Ito type stochastic differential

equations to an invariant set under almost all initial conditions is considered in the third section. It should be noted that this problem is a generalization of the deterministic result of V. Grushkovskaya and A. Zuyev [22] on sufficient conditions for the attraction of an equilibrium of a dynamical system without assuming that the divergence of the density function is strictly positive. In this section, the class of nonlinear differential equations with random effects that admit invariant manifolds of an arbitrary dimension are considered. Sufficient conditions for the attraction to the invariant set in terms of the density function of a measure that has the property of monotonicity on the flow are proved.

The fourth section is devoted to the problem of stabilization of invariant sets of nonlinear systems with random effects. A system of Ito stochastic differential equations is considered. Sufficient conditions for the asymptotic stability in probability of an invariant set of the form $M = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n | y = 0 \right\}$ for a given system are obtained. This result allows us to construct a stabilizing feedback control with the use of a Lyapunov function.

It is shown that the above results can be applied to the partial stabilization problem for nonlinear control systems with stochastic effects. Problems of stabilizing the motion of a rigid body around its center of mass under the action of jet control torques and a pair of flywheels are considered. It should be noted that both of these systems cannot be stabilized in the classical sense with respect to all state variables. We proposed the controls which allows to ensure the partial asymptotic stability in probability and to guarantee the stochastic boundedness of trajectories of the corresponding closed-loop system. The efficiency of the proposed controls is illustrated by numerical simulations in Maple using the ItoProcess () function.

The fifth section concludes the results on asymptotic stability in probability of the equilibrium for systems of nonlinear differential equations with random

effects. This result is based on the development of control Lyapunov functions method. The proposed control design uses the notion of a y -stochastic Lyapunov function. The main theorem is applied to nonlinear systems with stochastic effects that describe the dynamics of the inverted pendulum with moving mass and a three-wheeled trolley with an additional degree of freedom. The simulation results illustrate the required behavior of sampled paths of the corresponding closed-loop systems.

The last section is devoted to the problem of partial stabilization of nonlinear systems along a given trajectory. The concept of stability of a family of sets in case of stability concerning a part of variables is widespread. Sufficient conditions for the asymptotic stability of a one-parameter family of sets using time-dependent control in the form of trigonometric polynomials are obtained. The obtained results are applied to model examples of mechanical systems. The motion of the corresponding closed systems is simulated by means of computer algebra.

This thesis is a theoretical investigation. Its results and the developed methods can be used in the theory of nonlinear control systems with stochastic effects. The obtained algorithms can have further implementations in computer-aided control design for robotic systems in various industrial applications.

Keywords: asymptotic stability of motion with respect to a part of variables, Ito stochastic differential equation, Lyapunov function, asymptotic stability of an invariant set, asymptotic stability in probability, randomized control, feedback law, systems of rigid bodies.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті в наукових фахових виданнях, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

- 1а. Васильева И.Г., Зуев А.Л. Частичная стабилизация нелинейных систем со случайными воздействиями. *Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины*. 2012. Т. 25. С. 33–41.
- 2а. Васильева И.Г., Зуев А.Л. Анализ предельного множества траекторий нелинейной системы со случайными воздействиями для почти всех начальных условий. *Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины*. 2014. Т. 28. С. 20–26.
- 3а. Zuyev A.L., Vasylieva I.G. Partial stabilization of stochastic systems with application to rotating rigid bodies. *IFAC PapersOnLine*. 2019. V. 52. P. 162–167.
- 4а. Vasylieva I.G., Zuyev A.L. Control design for partial stabilization of nonlinear mechanical systems with random disturbances. *Збірник праць Інституту математики НАН України*. 2019. Т. 16(2). С.209-223.

Тези наукових доповідей, які засвідчують апробацію результатів дисертації

- 5а. Vasylieva I.G., Zuyev A.L. Partial stabilization of nonlinear stochastic differential equations with application to nonholonomic systems. *2nd International Conference “Differential Equations & Control Theory” (DECT-2017)*: Book of Abstracts, Świnoujście, Poland, 27-30 September 2017. Szczecin: University of Szczecin, 2017. P. 22.
- 6а. Vasylieva I.G., Zuyev A.L. Stability analysis for a nonholonomic mechanical

- system using Sussmann-type processes. *International Conference “Differential Equations, Mathematical Physics and Applications”*: Book of Abstracts, Cherkasy, Ukraine, 17–19 October, 2017. P. 51–52.
- 7а. Васильева И.Г., Зуев А.Л. Задача стабилизации неголономных механических систем при наличии стохастической компоненты управления. *Международная научная конференция “Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация”*, посвященная 100-летию со дня рождения академика Е.А. Барбашина: материалы конференции, Минск, Белорусь, 24-29 сентября 2018. Минск: БГУ, 2018. С. 85–86.
- 8а. Васильева И.Г., Зуев А.Л. Устойчивость инвариантных множеств систем нелинейных дифференциальных уравнений со случайными воздействиями. *XIX International Conference “Dynamical system modeling and stability investigation”*: Abstract of Conf. reports, Київ, Україна, 22-24 травня 2019 р. Київ: Київський національний університет ім. Т. Шевченка, 2019. С. 236–237.
- 9а. Васильєва І.Г. Дослідження стійкості неголономної механічної системи із використанням випадкових процесів типу Суссманна. *Міжнародна конференція молодих математиків*: тези доповідей, 6-8 червня 2019 р. Київ: Інститут математики НАН України, 2019. С. 51.
- 10а. Vasylieva I.G., Zuyev A.L. Partial stabilization of nonlinear control system by stochastic feedback laws. *4th International Conference “Differential Equations & Control Theory” (DECT-2019)* Book of Abstracts, Kołobrzeg, Poland, 23-26 September 2019. Szczecin: University of Szczecin, 2019. P. 18.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на наступних наукових конференціях і семінарах.

1. Другій Міжнародній конференції “Differential Equation and Control Theory”, Świnoujście, Poland, 27-30 вересня 2017 р.;
2. Міжнародній конференції “International Conference on Differential Equations, Mathematical Physics and Applications (DEMPH A - 2017)”, Черкаси, Україна, 17-19 жовтня 2017 р.;
3. Міжнародній конференції “Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация”, присвяченій 100-річчю зі дня народження академіка Е.О. Барбашина, Мінськ, Білорусь, 24-29 вересня 2018 р. ;
4. Четвертій міжнародній конференції “Differential Equation and Control Theory”, Kołobrzeg, Poland, 23-26 вересня 2019 р.;
5. Міжнародній конференції молодих математиків, Київ, Україна, 6-8 червня 2019 р.;
6. Міжнародній конференції “Dynamical System Modeling and Stability Investigation”, Київ, Україна, 24-29 травня 2019 р.;
7. Семінарах відділів прикладної та технічної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України, Донецьк, 2012-2014;
8. Розширений семінар відділу прикладної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України, Слов’янськ, 2018, 2020;
9. Семінарі відділу теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України, Київ, 2019;

10. Семінарі Інституту математики Альпійсько-адриатичного університету, м. Клагенфурт, Австрія, 2020;
11. Семінарі Інституту динаміки складних технічних систем ім. Макса Планка, м. Магдебург, Німеччина, 2020;
12. Семінарі молодих вчених Інституту прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ, 2020;
13. Спільному семінарі з математичних проблем механіки та обчислювальної математики за участю відділу теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України, Київ, 2021.

ЗМІСТ

Вступ	15
1 Історія задачі та огляд літератури	20
1.1 Дослідження стійкості систем із випадковими впливами	20
1.2 Стійкість руху механічних систем відносно частини змінних . .	22
1.3 Стабілізація детермінованих систем за допомогою рандомізова-	
ного керування	25
1.4 Стабілізація руху вздовж заданої кривої	27
2 Методика досліджень	28
2.1 Основи теорії стохастичних диференціальних рівнянь	28
2.2 Метод функцій Ляпунова	32
3 Аналіз граничної множини розв'язків нелінійних систем, що	
описуються стохастичними диференціальними рівняннями	38
3.1 Постановка задачі	38
3.2 Дослідження умов збіжності розв'язків системи до інваріантної	
множини	39
3.3 Висновки.	48
4 Стабілізація інваріантних множин нелінійних систем із ви-	
падковими впливами	49
4.1 Достатні умови асимптотичної стійкості	49
4.2 Побудова стабілізуючого керування	54
4.3 Одноосьова стабілізація супутника за допомогою реактивних	
двигунів орієнтації	56
4.4 Одноосьова стабілізація супутника за допомогою двох маховиків	
	64
4.5 Висновки.	71

5	Стабілізація нелінійних систем за допомогою рандомізованого керування	72
5.1	Постановка задачі	72
5.2	Стабілізація перевернутої маятникової системи	79
5.3	Стабілізація колісного візка за допомогою стохастичного керування зі зворотнім зв'язком	83
5.4	Балансуючий робот	88
5.5	Висновки.	92
6	Стабілізація руху за частиною змінних вздовж заданих траєкторій	93
6.1	Постановка задачі	93
6.2	Побудова стабілізуючого керування	95
6.3	Часткова стабілізація підводного апарату в околі заданої кривої	106
6.4	Висновки	109
	Загальні висновки	110
	Додаток А	123

Вступ

Актуальність теми

Проблема стабілізації руху неголономних механічних систем досліджується протягом декількох десятиріч. Це зумовлено передусім тим, що практичні задачі керування рухом багатьох транспортних засобів за умов кочення без ковзання описуються математичними моделями з неголономними в'язами. Крім того, багато неголономних механічних систем неможливо стабілізувати за допомогою неперервного керування зі зворотнім зв'язком через те, що вони не задовольняють необхідну умову стабілізованості Брокетта [13]. Для таких систем розглянуто можливість стабілізації за допомогою розривного керування [6], [16] та за допомогою керування зі зворотнім зв'язком, що залежить від часу [4], [47]. Але ці підходи містять один суттєвий недолік: вони розглядаються для систем спеціального вигляду, а отже запропоновані у роботах керування не можуть бути застосовані до загального класу систем такого роду. Властивість стабілізованості станів рівноваги загальних нелінійних керованих систем доведено у роботах [15, 18], але зазначені результати є теоремами існування, які не передбачають конструктивного визначення законів керування. Тому залишається актуальним питання розробки універсального алгоритму побудови керування для загальних класів неголономних механічних систем.

Питання стійкості руху систем відносно частини змінних (часткової стійкості) було започатковано в роботі [92] і систематично досліджено в роботах [98], [64], [76] та ін. Воно виникає природним чином у прикладних задачах, коли для нормального функціонування системи необхідно забезпечити її стійкість лише відносно частини фазових змінних. Також ця задача становить інтерес для класу систем, які не є стійкими у сенсі Ляпунова, але в той же час є асимптотично стійкими відносно частини змінних.

Вагомим обґрунтуванням обраного напрямку дослідження є те, що у реаль-

ному часі об'єкти знаходяться під дією різних впливів, у тому числі випадкових. Тому для моделювання поведінки тих чи інших об'єктів вкрай важливо враховувати випадкові збурення. Саме із потреб задач стабілізації систем із випадковими впливами виникла теорія стійкості стохастичних диференціальних рівнянь у роботах [33], [100] та ін. У теорії випадкових процесів є багато різних динамічних моделей, які відображають ті чи інші ймовірнісні особливості досліджуваних реальних систем. У даній дисертаційній роботі розглядається класична модель - система стохастичних диференціальних рівнянь Іто. Цей напрям досліджень доповнює підхід теорії робастного керування системами з невідомими обмеженими збуреннями. Конструктивні методи розв'язання задач робастної стійкості та стабілізації руху класів лінійних і нелінійних систем за наявності інтервальних меж параметричних збурень запропоновано в [93].

Мета і завдання дослідження

Метою дослідження є отримання ефективних умов асимптотичної стійкості систем нелінійних стохастичних диференціальних рівнянь (у тому числі за частиною змінних) та застосування цих умов до задач стабілізації нелінійних керованих механічних систем.

Для досягнення цієї мети у дисертаційній роботі поставлено наступні три основні завдання.

Першим завданням є опис граничної поведінки траєкторій для класу нелінійних диференціальних рівнянь із випадковими впливами, які мають інваріантні множини довільної вимірності. Досліджується питання стійкості таких множин для майже всіх початкових значень фазового простору і доводяться достатні умови прямування до інваріантної множини в термінах функції щільності, монотонної на фазовому потоці.

Другим – отримання нових достатніх умов асимптотичної стійкості від-

носно частини змінних тривіального розв'язку нелінійних систем диференціальних рівнянь із випадковими впливами у термінах стохастичної функції Ляпунова. У цьому напрямі узагальнюється результат, отриманий в [72], на клас систем, що описуються стохастичними диференціальними рівняннями Іто.

Третім завданням є розробка нового підходу до стабілізації неголономних механічних систем з використанням функцій керування у вигляді суми неперервного зворотного зв'язку за станом та випадкового процесу. Для виконання цього завдання застосовується певне узагальнення метода керування функцій Ляпунова. Перевагою такої схеми синтеза зворотного зв'язку є неперервність керування відносно фазових змінних. Більш того, додавання до детермінованої компоненти керування випадкового процесу, який розглядається як збурення системи, дозволяє уникнути проблеми притягання траєкторій системи до небажаної інваріантної множини.

Наукова новизна отриманих результатів

Усі положення дисертації, що виносяться на захист, є новими, а саме вперше отримано наступні результати:

1. встановлено достатні умови збіжності розв'язків системи нелінійних стохастичних диференціальних рівнянь до інваріантної множини за майже всіх початкових умов з фазового простору;
2. для систем стохастичних диференціальних рівнянь Іто доведено теорему про асимптотичну стійкість за ймовірністю відносно частини змінних із застосуванням функції Ляпунова зі знакосталою похідною;
3. за допомогою стохастичної версії принципу інваріантності Ла-Салля доведено теорему про асимптотичну стійкість інваріантної множини для системи нелінійних диференціальних рівнянь із випадковими впливами;

4. досліджено проблеми часткової стабілізації руху твердого тіла навколо його центру мас під дією реактивних моментів та твердого тіла, що містить пару симетричних маховиків. Відмінною особливістю розглянутих систем є наявність випадкових впливів при керуванні. У явному вигляді побудовані керування, що дозволяють забезпечити асимптотичну стійкість руху досліджуваних систем відносно частини змінних;
5. запропоновано конструктивний алгоритм побудови керування із використанням y — стохастичної функції Ляпунова, який застосовано до нелінійних систем із стохастичними впливами, що описують динаміку перевернутого маятника з рухомою масою та колісного візка із додатковим ступенем волі;
6. одержані нові стратегії керування, що дозволили розв'язати задачу стабілізації класу афінних за керуванням систем вздовж заданої траєкторії. Отримано достатні умови стійкості розв'язку зазначених систем відносно частини змінних в термінах стійкості сім'ї множин.

Практичне значення отриманих результатів

Дане дослідження має насамперед теоретичне значення. Результати дисертаційної роботи розвивають теорію нелінійних керованих систем із випадковими впливами. Проте, алгоритми, отримані у роботі, в перспективі можуть мати практичне застосування в системах комп'ютерного керування рухом робототехнічних систем для прикладних задач різноманітних галузей промисловості.

Особистий внесок здобувача

Усі положення дисертації, що виносяться на захист, одержані здобувачем особисто. Науковому керівнику, професору О.Л. Зуєву, належать постановки задач та обговорення результатів.

У роботах [1а.-4а.] здобувачеві належать доведення всіх теорем та дослідження механічних прикладів, а також комп'ютерне моделювання руху всіх розглянутих систем.

Апробація результатів дисертації

Основні результати дисертаційної роботи доповідались та були обговорені на 6 міжнародних наукових конференціях та 7 наукових семінарах.

Публікації

Основні результати дисертації опубліковано в 10 роботах, з яких 1 наукова стаття [3а.] у міжнародному фаховому виданні, що входить до наукометричної бази Scopus, 3 статті [1а., 2а., 4а.] у наукових фахових виданнях України та 6 робіт [5а.-10а.] у збірниках тез міжнародних конференцій.

Структура дисертації

Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, 6 розділів, висновків, списку використаних джерел (що містить 100 найменувань) та додатку. Повний обсяг роботи становить 126 сторінок друкованого тексту.

1 Історія задачі та огляд літератури

У цьому розділі наведено огляд результатів досліджень, пов'язаних з тематикою дисертаційної роботи.

Теорія стійкості отримала широкий розвиток після виходу фундаментальної роботи О.М. Ляпунова [91]. У ній було започатковано два методи до дослідження проблеми стійкості:

- перший базується на безпосередньому дослідженні збуреного руху і пошуку загальних або часткових розв'язків відповідних диференціальних рівнянь;
- другий дозволяє відповісти на питання стійкості руху системи без пошуку розв'язків, для чого будуються допоміжні функції V , які задовольняють певні припущення.

Ці функції пізніше отримали назву функцій Ляпунова, а такий підхід має назву методу функцій Ляпунова.

У даний час метод Ляпунова - це універсальний засіб аналізу стійкості руху загальних класів механічних систем. Він є невід'ємною складовою методології математичної теорії керування рухом.

1.1 Дослідження стійкості систем із випадковими впливами

Теорію стійкості стохастичних диференціальних рівнянь було започатковано та детально досліджено в 60-х роках ХХ-го сторіччя в роботах [33, 85, 100]. У цих дослідженнях було розвинуто якісну теорію диференціальних рівнянь із випадковою правою частиною, а саме розв'язано наступні питання:

- коли кожен розв'язок системи визначено із ймовірністю 1,
- якщо система має тривіальний розв'язок, то за яких умов він є стійким в деякому стохастичному сенсі,

- якщо система має стаціонарний (або періодичний) розв'язок, то за яких умов кожен інший розв'язок буде збігатися до нього.

У вищевказаних роботах були отримані важливі результати теорії стійкості за першим наближенням, узагальнено детермінований метод функцій Ляпунова на випадок систем стохастичних диференціальних рівнянь і отримано значну кількість критеріїв стійкості, які стали теоретичним фундаментом аналізу стійкості стохастичних систем.

Систематичне узагальнення концепцій стохастичної стійкості та методів дослідження стійкості стохастичних систем, що базуються на методі функцій Ляпунова, запропоновано в монографії [37]. У статті Х. Мао [39] отримано аналог принципу інваріантності Ла-Салля для систем стохастичних диференціальних рівнянь, який став важливим інструментом для подальших досліджень багатьох авторів.

Автором роботи [20] розглянуто систему нелінійних стохастичних диференціальних рівнянь Іто і запропоновано конструктивний алгоритм побудови гладкого керування зі зворотнім зв'язком у термінах функції Ляпунова. Також він довів можливість використання неперервного керування такого роду для стабілізації нелінійних стохастичних систем. Цей результат є узагальненням відомої теореми Артстейна [5] для стохастичної теорії.

Дослідженню стійкості за ймовірністю систем нелінійних стохастичних диференціальних рівнянь із "запізненням" присвячена робота Л.Ю. Шайхета [54].

Р. Ван Хандел [63] розглянув системи стохастичних диференціальних рівнянь Іто і запропонував достатні умови, коли для майже всіх початкових умов тривіальний розв'язок системи таких рівнянь є глобально стійким майже напевно. Такий тип стійкості є слабшим за глобальну стійкість в сенсі Р.З. Хасьмінського [100], проте має більш широке застосування у випадках, коли

глобальну стійкість отримати неможливо.

Авторами [69] запропоновано критерій стійкості за скінчений проміжок часу із використанням функції Ляпунова та досліджено роль броунівського руху у питанні стохастичної стійкості за скінчений час.

1.2 Стійкість руху механічних систем відносно частини змінних

О.М. Ляпунов відмітив в [91], що “можно рассматривать более общую задачу: об устойчивости того же движения, но по отношению не ко всем, а только к некоторым из определяющих его величин”. Саме це стало поштовхом до виникнення і детального дослідження теорії стійкості відносно частини фазових змінних.

На початку XX сторіччя питання часткової стійкості лінійних систем було досліджено в [3]. У роботі [94] І.Г. Малкін сформулював без доведень певні умови для узагальнення теорем Ляпунова на випадок часткової стійкості нелінійних систем.

Пізніше було отримано модифікації відомих результатів Ляпунова на проблеми стійкості і стабілізації відносно частини змінних для систем диференціальних рівнянь із неперервною правою частиною в роботах [17, 46, 50, 81, 83, 96, 97].

В.В. Румянцев [96] отримав фундаментальні результати у дослідженні проблеми часткової стабілізації нелінійних систем із неперервною правою частиною загального вигляду. А саме, ним було математично сформульовано загальну задачу стійкості відносно частини змінних, вперше введено означення знакододатної відносно частини змінних функції типу Ляпунова, було доведено теореми стійкості та асимптотичної стійкості, що узагальнюють результати О.М. Ляпунова на випадок часткової стійкості.

У роботах [65, 98] авторами узагальнено метод функцій Ляпунова і от-

римано теореми про стійкість, асимптотичну стійкість, нестійкість відносно частини змінних.

Варто відзначити вагомий внесок О.Л. Зуєва із співавторами у розвиток теорії стійкості та керування відносно частини змінних [70, 72–76, 79, 80, 84]. Монографії [76, 84] присвячено дослідженню питань стійкості, часткової стійкості, розробці методів побудови керування для певних класів нелінійних динамічних процесів, асимптотичної стійкості відносно частини змінних для моделей, що описуються нелінійними диференціальними рівняннями та диференціальними рівняннями з частинними похідними.

У низці статей авторами досліджено питання існування стаціонарного керування зі зворотнім зв'язком, що забезпечує асимптотичну стійкість відносно частини змінних [70]; отримано достатні умови строгої асимптотичної стійкості відносно частини змінних для нелінійних динамічних систем у банаховому просторі [74]; доведено достатні умови часткової стійкості із використанням функції Ляпунова з недодатною похідною, для задачі одноосової стабілізації супутника у явному вигляді побудовано стабілізуюче керування зі зворотнім зв'язком [73]; розвинуто метод функцій Ляпунова для асимптотичної стійкості відносно частини змінних абстрактних динамічних процесів [75]; отримано достатні умови практичної асимптотичної стійкості відносно частини змінних для афінних керованих систем у рамках задачі пошуку екстремуму [79]; побудовано залежне від часу керування зі зворотнім зв'язком для стабілізації відносно частини змінних нелінійних керованих систем [80].

Майже кожна прикладна задача, що приводить до вивчення стійкості відносно частини змінних, у тій чи іншій мірі потребує урахування випадкових впливів на систему. Тому природним чином виникла потреба дослідження часткової стійкості систем, що описуються стохастичними диференціальни-

ми рівняннями. Цьому питанню присвячено багато досліджень [28–30, 59, 60, 64, 66]. Зупинимося більш детально на деяких з них.

В.І. Воротніков [64] узагальнив детермінований результат М.М. Красовського [89] і отримав умови часткової асимптотичної стійкості за ймовірністю для систем стохастичних диференціальних рівнянь Іто.

Роботу О.О. Ігнат'єва [29] присвячено дослідженню часткової асимптотичної стійкості систем стохастичних диференціальних рівнянь з інваріантними відносно часу векторними полями, в ній було доведено аналог теореми Барбашина–Красовського для стохастичної асимптотичної стійкості тривіального розв'язку відносно частини змінних.

Стійкість стохастичних систем реакції-дифузії з марківськими перемиканнями відносно частини змінних розглянуто авторами в [30] і отримано достатні умови стійкості для досліджуваних систем.

У статті [59] обговорюється питання стійкості гібридних систем, що описуються стохастичними диференціальними рівняннями з марковськими процесами і отримано критерії експоненціальної y - стійкості для лінійних та нелінійних систем.

Умови стійкості відносно частини змінних систем стохастичних диференціальних рівнянь Іто було отримано в [66] на основі прямого методу Ляпунова.

Дуже близькою до концепції стійкості відносно частини змінних є фундаментальна задача в теорії керування - стабілізація інваріантних множин [9, 10].

Зв'язок між властивостями стійкості інваріантних множин та стійкості за всіма та за частиною змінних у сенсі Ляпунова досліджено в роботах [50, 90, 98].

О.М. Ковальов в [86] дослідив задачі стійкості та нестійкості тривіального розв'язку автономної системи диференціальних рівнянь, отримав теорему

про побудову функції Ляпунова, похідна якої дорівнює нулю лише на деякій інваріантній множині. Цей результат було узагальнено в [87] для отримання умов асимптотичної стійкості динамічних систем.

А.С. Ширяєв та О.Л. Фрадков в [56, 57] отримали достатні умови для глобальної асимптотичної стабілізації інваріантної множини для класу нелінійних каскадних систем та в явному вигляді побудували функції керування, що забезпечують необхідний тип стійкості.

Інваріантні множини та атрактори для систем нелінійних диференціальних рівнянь із "запізненнями" розглянуто авторами в [68] і встановлено достатні умови існування інваріантної множини.

О.М. Станжицький в статті [62] дослідив питання інваріантності множин та їх стохастичної стійкості для систем диференціальних рівнянь Іто із використанням знакосталої функції Ляпунова.

1.3 Стабілізація детермінованих систем за допомогою рандомізованого керування

Добре відомо про неможливість стабілізувати певні класи суттєво нелінійних керованих систем за допомогою неперервного зворотного зв'язку через те, що для цих систем не виконано необхідну умову стабілізованості Брокетта [13].

Для такого роду систем застосовують різні підходи. Наприклад, роботи [6, 16] присвячені можливості використання розривного керування для стабілізації. Цей метод є ефективним, проте питання про робастність замкненою системи залишається відкритим. У роботі [47] запропоновано використання залежного від часу керування зі зворотнім зв'язком. Суттєвим недоліком цього методу є те, що він не має загального конструктивного алгоритму побудови керування, за винятком систем без зсуву.

Довгий час поняття "шум" сприймалося виключно як перешкода, як де-

структивний чинник, наявність якого погіршує функціонування будь-якої системи.

Проте, саме використання випадкового “шуму” вперше було запропоновано в роботі Р.З. Хасьмінського [27], який стабілізував систему звичайних диференціальних рівнянь за допомогою двох джерел білого шуму.

Пізніше Л. Арнольд зі співавторами [4] показали можливість стабілізації лінійної системи із використанням тільки одного джерела “шуму”.

Окремі класи нелінійних систем було розглянуто в [53], для яких наведено приклади стабілізації та дестабілізації за допомогою додавання білого шуму.

Х. Мао детально дослідив питання стабілізації та дестабілізації із використанням броунівського руху в [38], а пізніше в [2] було отримано достатні умови експоненційної стабілізації нелінійних функціонально-диференціальних рівнянь.

В роботі [88] досліджено задачу про вплив параметричних випадкових збурень на асимптотичну стійкість у середньому квадратичному квазілінійних динамічних систем. Доведено, що застосування параметричного білого шуму до стабільної динамічної системи має дестабілізуючий ефект і приводить від зменшення асимптотичної стійкості зазначеної системи до навіть повної втрати стійкості.

Протягом декількох останніх років було одержано певне узагальнення результатів зі стабілізації нелінійних керованих систем з використанням штучних випадкових процесів [44, 45]. Ю. Нішімура зі співавторами використовують неперервне керування із додаванням випадкового впливу для глобальної асимптотичної стабілізації нелінійних керованих систем. Застосування до початкової системи керування у вигляді двох компонент (детермінованої та стохастичної) дозволяє досліджувати відповідну замкнену систему як систему стохастичних диференціальних рівнянь.

1.4 Стабілізація руху вздовж заданої кривої

Незважаючи на те, що стабілізація тривіального розв'язку нелінійних механічних систем була предметом багатьох досліджень протягом останніх десятиріч і в цьому напрямку отримано велику кількість важливих результатів, проблема стабілізації зазначених систем до заданої траєкторії залишається досить складною і нетривіальною.

Дуже багато досліджень в цьому напрямі проведено для окремих класів систем. Зокрема в [42] авторами отримано результати зі стабілізації стану рівноваги та стабілізації вздовж еталонної траєкторії мобільного робота. Пізніше в роботі [1] наведено результати з керованості та відстеження траєкторії руху кінематичної моделі передньопривідного транспортного засобу. Статтю [67] присвячено використанню залежного від часу керування для відстеження траєкторії неголономних мобільних роботів.

Результати із відстеження довільної кривої в просторі станів для загального класу афінних за керуванням систем було отримано в роботі В.В.Грушковської, О.Л. Зуєва [26]. Для вирішення цієї задачі авторами використовується залежне від часу високочастотне керування. Варто зазначити, що для синтезу законів керування у зазначеній роботі застосовано зображення розв'язків нелінійних керованих систем у термінах функціональних рядів Чена-Фліса з ітерованими інтегралами [77, 78]. При обчисленні коефіцієнтів цих рядів використовуються дужки Лі (комутатори) векторних полів. Методи комутаторного числення також застосовано у статті [58] для одержання умов стійкості та стабілізованості періодичних систем.

2 Методика досліджень

2.1 Основи теорії стохастичних диференціальних рівнянь

Цей підрозділ присвячено основам теорії стохастичних динамічних систем. Оскільки у дисертаційній роботі розглядаються механічні системи, що знаходяться під впливом випадкових процесів, ми звертаємося до основних фактів з теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів та теорії стохастичних диференціальних рівнянь для опису властивостей досліджуваних систем. Наведемо фундаментальні відомості, використовуючи роботи [33, 41, 82, 95, 100].

Означення 2.1. Нехай задано множину Ω . Множина $\mathcal{F}$, елементами якої є підмножини Ω , називається σ -алгеброю, якщо виконуються наступні умови:

- 1) $\Omega \in \mathcal{F}$;
- 2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$;
- 3) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \dots \in \mathcal{F}$.

Означення 2.2. Для множини Ω та σ -алгебри $\mathcal{F}$ на Ω функція $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ називається ймовірністю, якщо виконуються наступні умови:

- 1) $P(A) \geq 0$ для всіх $A \in \mathcal{F}$, $P(\Omega) = 1$;
- 2) $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ для довільної послідовності $A_i \in \mathcal{F} : A_k \cap A_p = \emptyset$ при $k \neq p$.

Означення 2.3. Множина Ω з визначеною на ній σ -алгеброю $\mathcal{F}$ і ймовірнісною мірою P , заданою на $\mathcal{F}$, називається ймовірнісним простором $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$.

Означення 2.4. Нехай задано ймовірнісний простір $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$. Випадковою величиною називається функція $X = X(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ така, що:

$$\{\omega \in \Omega | X(\omega) < x\} \in \mathcal{F},$$

для кожного $x \in \mathbb{R}$.

Означення 2.5. Функція

$$F_X(x) = P\{\omega | X(\omega) < x\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

називається функцією розподілу випадкової величини $X(\omega)$.

Означення 2.6. На ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ математичним сподіванням випадкової величини $X(\omega)$ називається наступний інтеграл Лебега від X по простору Ω :

$$E[X] = \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega).$$

Означення 2.7. Якщо функцію розподілу F_X випадкової величини $X(\omega)$ можна записати у вигляді:

$$F_X = \int_{-\infty}^x p(t) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

то випадкова величина $X(\omega)$ має абсолютно неперервний розподіл. А функція $p(x)$ є щільністю розподілу випадкової величини $X(\omega)$.

Означення 2.8. Нехай T — деяка множина $T \subset \mathbb{R}$. Тоді набір $X = (X_t(\omega), t \in T)$ випадкових величин, заданих на одному ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, P\} \forall t \in T$, називається випадковим процесом на множині T .

Означення 2.9. Монотонно неспадне сімейство σ —алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ ($\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$, якщо $t_1 < t_2, \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$) називається потоком σ —алгебр. Кажуть, що сімейство випадкових величин $\{X(t, \omega), t \in T\}$ підпорядковується потоку $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$, якщо $X(t, \omega)$ для всіх $t \in T$ є $\mathcal{F}_t$ — вимірною.

Означення 2.10. Нехай випадкові величини $X = X(\omega)$ та $\eta = \eta(\omega)$ мають сумісну щільність розподілу $f(x, y)$. Умовною функцією розподілу випадкової величини $X(\omega)$ за умови $\eta = y$ називають функцію $F_{X/y}$ визначену рівністю

$$F_{X/y} = \frac{\int_{-\infty}^x f(s, y) ds}{f_{\eta}(y)},$$

де $f_\eta(y)$ — щільність розподілу випадкової величини η .

Означення 2.11. Умовним математичним сподіванням $E[X|\eta = y]$ випадкової величини X за умови $\eta = y$ називають значення інтеграла

$$E[X|\eta = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|\eta}(x|y) dx,$$

якщо він абсолютно збігається.

Тут $f_{X|\eta}(x|y)$ — умовна щільність розподілу X за умови $\eta = y$, що визначається наступним чином:

$$f_{X|\eta}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_\eta(y)}.$$

Означення 2.12. Сімейство $\{X(t, \omega), \mathcal{F}_t, t \in T\}$, у якому випадкові величини $X(t, \omega)$ підпорядковуються потоку σ -алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ і $E|X(t, \omega)| < \infty$ називають:

- 1) мартингалом, якщо $E[X(t, \omega)|\mathcal{F}_s] = X(s, \omega)$ при всіх $s, t \in T, s < t$;
- 2) субмартингалом, якщо $E[X(t, \omega)|\mathcal{F}_s] \geq X(s, \omega)$ при всіх $s, t \in T, s < t$;
- 3) супермартингалом, якщо $E[X(t, \omega)|\mathcal{F}_s] \leq X(s, \omega)$ при всіх $s, t \in T, s < t$.

Означення 2.13. Випадкова величина $X(\omega)$ має нормальний розподіл з параметрами (a, σ^2) , якщо її щільність розподілу має наступний вигляд:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

При цьому будемо також надалі використовувати позначення $X \sim N(a, \sigma^2)$.

Означення 2.14. Випадковий процес $W(t), t \geq 0$ називається стандартним вінерівським випадковим процесом, якщо виконані наступні умови:

- 1) $W(t)$ має незалежні прирости;
- 2) $W(0)=0$;

3) $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s), \forall t \geq s \geq 0$.

Означення 2.15. Нехай $W(t)$ — стандартний вінерівський процес на ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$. Розглянемо функцію $f : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Припускаємо, що $f(t, \omega) \in \mathfrak{B} \times \mathcal{F}$ — вимірною, де $\mathfrak{B}$ — клас борелівських підмножин відрізка $[0, T]$, $E[\int_{t_0}^t f^2(t, \omega) dt] < \infty$ і $f(t, \omega)$ неперервна для майже усіх $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega, t$. Тоді стохастичний інтеграл Іто визначається наступним чином:

$$\int_{t_0}^T f(t, \omega) dW(t) = \lim_{\max_i(t_{i+1} - t_i) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i, \omega) [W(t_{i+1}) - W(t_i)],$$

де t_i — розбиття інтервалу $[0, T]$.

Означення 2.16. Розглянемо неперервні відображення $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ та стандартний m — вимірний вінерівський процес $W(t)$. Випадковий процес $X(t), t \in I$ є розв'язком стохастичного диференціального рівняння Іто

$$dX(t) = G(X(t))dt + K(X(t))dW(t), \quad t \in I, \quad (2.1)$$

якщо він задовольняє рівність:

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t G(X(s))ds + \int_{t_0}^t K(X(s))dW(s), \quad t_0, t \in I, \quad (2.2)$$

де останній інтеграл в формулі (2.2) розуміється у сенсі стохастичного інтегралу Іто.

Означення 2.17. Нехай $X(t), t \in [0, T]$ — розв'язок рівняння (2.1), що задовольняє початкову умову $X(0) = x_0$. Інфінітезимальний генератор процесу $X(t)$ визначається як лінійний оператор, що діє на фінітні функції $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ наступним чином:

$$Af(x) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{E[f(X(t))] - f(x)}{t}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 2.1. [99, с.239] Нехай X — випадкова величина з математичним сподіванням $E[X] = \mu$ і дисперсією $D[X] = \sigma^2$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ виконано нерівність Чебишова:

$$P\{|X - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Теорема 2.2. (лема Динкіна) [95, с.155] В умовах означення 2.17, нехай $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ і τ — момент зупинки такий, що $E[\tau] < \infty$. Тоді

$$E[f(x(\tau))] = f(x) + E \int_0^\tau Af(x(s))ds.$$

2.2 Метод функцій Ляпунова

У цьому підрозділі наведено основні означення та теореми методу функцій Ляпунова для детермінованих [31, 43, 61, 91] та стохастичних [100] систем.

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0 \quad (2.3)$$

з початковою умовою

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (2.4)$$

де $f(0) = 0$. Будемо припускати, що для кожного x_0 з деякого околу початку координат існує єдиний розв'язок задачі Коші (2.3)-(2.4) на $t \in [0, +\infty)$. Тоді властивість стійкості тривіального розв'язку $x = 0$ системи (2.3) за Ляпуновим визначається наступним чином.

Означення 2.18. Тривіальний розв'язок $x = 0$ системи (2.3) називається стійким, якщо для всіх $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon)$, що при кожному $\|x_0\| < \delta$ виконується нерівність

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Означення 2.19. Тривіальний розв'язок $x = 0$ системи (2.3) називається асимптотично стійким, якщо він є стійким і існує таке $\delta = \delta(\varepsilon)$, що при кожній $\|x_0\| < \delta$ виконується наступна рівність

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0.$$

Означення 2.20. Додатно визначена неперервно диференційована в деякому околі початку координат U функція $V(x) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ називається локальною функцією Ляпунова для системи (2.3), якщо

$$\frac{dV}{dt} \leq 0 \quad \text{для всіх } x \in U,$$

де $\frac{dV(x)}{dt} = (\nabla V(x), f(x))$ — похідна $V(x)$ в силу системи (2.3).

Означення 2.21. Додатно визначена неперервно диференційована функція $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ називається глобальною функцією Ляпунова для системи (2.3), якщо

$$\frac{dV}{dt} \leq 0 \quad \text{для всіх } x \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 2.3. [91], [31, с.124] Якщо існує локальна (глобальна) функція Ляпунова для системи (2.3), то тривіальний розв'язок $x = 0$ системи (2.3) є локально (відповідно глобально) стійким.

Оскільки дана робота спрямована на дослідження стійкості систем диференціальних рівнянь із випадковими впливами, слід приділити увагу стохастичному методу Ляпунова [19, 33, 85, 100].

Розглянемо систему стохастичних диференціальних рівнянь: Розглянемо рівняння

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dW(t), \quad x^{\xi,s}(s) = \xi, \quad (2.5)$$

де $W(t) = (W_1(t), \dots, W_m(t))^T$ — стандартний m -вимірний вінерівський процес.

Припускаємо, що функції $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ та $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ системи (2.5) задовольняють локальну умову Ліпшиця та умову лінійного зростання. Тобто, для кожного $k = 1, 2, \dots$ існує $c_k > 0$ таке, що

$$\|f(x) - f(y)\| + \|g(x) - g(y)\| \leq c_k \|x - y\|$$

для $x, y \in \mathbb{R}^n$ таких, що $\|x\| + \|y\| \leq k$. Крім того, існує таке $c > 0$, що

$$\|f(x)\| + \|g(x)\| \leq c(1 + \|x\|)$$

для всіх $x \in \mathbb{R}^n$.

За цих умов існує єдиний строго марківський процес $x^{\xi,s}(t)$, який є розв'язком системи (2.5). [82, 95]

Теорема 2.4. [100, с.113] Нехай на кожній обмеженій множині $K \subset \mathbb{R}^n$ функції $f(x)$ та $g(x)$ задовольняють умову Ліпшиця і, крім того, існує така невід'ємна функція $V \in C^2$, що $\mathcal{L}V \leq kV$, з деякою константою $k > 0$ та $V(x) \rightarrow \infty$ при $\|x\| \rightarrow \infty$.

Тоді існує єдиний строго марківський процес $x^{\xi,s}(t)$, який є розв'язком системи (2.5).

Означення 2.22. Розв'язок $x(t)$ системи (2.5) називається стохастично обмеженим при $t > s$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $N > 0$, що

$$P\{\sup_{t>s} \|x(t)\| > N\} < \varepsilon.$$

Означення 2.23. Тривіальний розв'язок $x = 0$ системи (2.5) називається стійким за ймовірністю, якщо для всіх $s \geq 0, \varepsilon > 0, \gamma > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при кожному $\|\xi\| < \delta$ виконується наступне

$$P\{\sup_{t \geq s} \|x^{\xi,s}(t)\| > \varepsilon\} < \gamma.$$

Означення 2.24. Тривіальний розв'язок $x = 0$ системи (2.5) називається асимптотично стійким за ймовірністю, якщо він є стійким за ймовірністю і крім того

$$P\left\{\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x^{\xi,s}(t)\| = 0\right\} = 1$$

для всіх $s \geq 0$ і $\|\xi\| < \Delta$ при деякому $\Delta > 0$.

Теорема 2.5. [100, с.207] Нехай існує додатно визначена функція $V(x)$, яка є двічі неперервно диференційованою в деякому околі початку координат U і задовольняє умову $\mathcal{L}V(x) < 0$ для всіх $x \in U \setminus \{0\}$, тут

$$\mathcal{L}V = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j},$$

$[a_{ij}] = \sigma \sigma^T$. Тоді тривіальний розв'язок $x = 0$ системи (2.5) є стійким за ймовірністю.

Теорема 2.6. [100, с.211] Нехай існує додатно визначена функція $V \in C^2(U)$, яка має нескінченно малу верхню границю і задовольняє $\mathcal{L}V \leq 0$. Припустимо, що кожен розв'язок системи (2.5), що починається в деякому кільці $\varepsilon_1 < \|x\| < \varepsilon_2$ майже напевно досягає границю цього кільця за скінченний час для будь-яких досить малих $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$. Тоді тривіальний розв'язок $x = 0$ системи (2.5) є асимптотично стійким за ймовірністю.

У подальшому будемо вести мову про стійкість тривіального розв'язку системи (2.5) по відношенню до змінних $x_1, x_2, \dots, x_m$. Позначимо ці змінні $y = (y_1, \dots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m$, а усі інші $z = (z_1, \dots, z_p)^T \in \mathbb{R}^p$, $m + p = n$, тоді $x = (y^T, z^T)^T$, $x_0 = (y_0^T, z_0^T)^T$, та $\|x\| = (\|y\|^2 + \|z\|^2)^{1/2}$.

Розширимо поняття функції Ляпунова на проблему часткової стабілізації стохастичних систем наступним чином [29, 55, 66].

Означення 2.25. Розв'язок $x = 0$ системи (2.5) називається y -стійким за ймовірністю, якщо для всіх $s \geq 0, \varepsilon > 0, \gamma > 0$, існує $\delta > 0$ таке, що для всіх

$\|\xi\| < \delta$ виконується

$$P\{\sup_{t \geq s} \|y^{\xi,s}(t)\| > \varepsilon\} < \gamma.$$

Означення 2.26. Розв'язок $x = 0$ системи (2.5) називається асимптотично y -стійким за ймовірністю, якщо він є y -стійким за ймовірністю і крім того виконується рівність

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} \|y^{\xi,s}(t)\| = 0\} = 1$$

для всіх $s \geq 0$, $\|\xi\| < \Delta$ і деякого $\Delta > 0$.

Теорема 2.7. [55] Нехай в області $U_\Delta(0)$ існує y - додатно визначена функція $V(x)$, яка задовольняє нерівність $\mathcal{L}V(x) \leq 0$. Тоді тривіальний розв'язок системи (2.5) є y - стійким за ймовірністю. Тут

$$U_\Delta(0) = \{x : \|y\| < \Delta, -\infty < z_j < \infty, \Delta > 0\}.$$

Концепції стійкості відносно частини змінних та стійкості інваріантних множин, є схожими між собою, проте вони не є тотожними. Тому наведемо ще деякі необхідні відомості [39, 40].

Означення 2.27. Множину $M \subseteq \mathbb{R}^n$ будемо називати інваріантною для системи (2.5), якщо для-будь якого початкового стану $\xi \in M$ має місце властивість $x^{\xi,s}(t) \in M$ при всіх $t \in \mathbb{R}$ майже напевно.

Запишемо один з важливих результатів, на який ми будемо спиратись при дослідження стійкості інваріантних множин: стохастичну версію принципу інваріантності Ла-Салля.

Нехай G — інваріантна множина відносно розв'язків системи (2.5). Тоді має місце наступний результат.

Теорема 2.8. [39, с.190] Нехай існує така функція $V \in C^2(G; \mathbb{R}^+)$, що:

$$\mathcal{L}V(x) \leq 0, \quad x \in G.$$

Якщо множина G не обмежена, то додатково припустимо, що

$$\lim_{\substack{x \in G \\ |x| \rightarrow \infty}} V(x) = \infty$$

і для кожного початкового значення $\xi \in \mathbb{R}^n$ існує таке $p > 2$, що

$$\sup_{0 \leq t < \infty} E|x^{\xi,s}(t)|^p < \infty.$$

Тоді для кожного $\xi \in G$ існує і майже напевно є скінченою наступна границя:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x^{\xi,s}(t)).$$

Крім того, майже напевно $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}V(x^{\xi,s}(t)) = 0$.

3 Аналіз граничної множини розв'язків нелінійних систем, що описуються стохастичними диференціальними рівняннями

3.1 Постановка задачі

Розглянемо систему стохастичних диференціальних рівнянь Іто у наступному вигляді:

$$dx = f_0(x)dt + \sum_{k=1}^m f_k(x)dW^k(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.1)$$

де $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — функції класу C^2 , що задовольняють умову Ліпшиця на кожному компактi $K \subset \mathbb{R}^n$, $k = 0, \dots, m$ та умову лінійного зростання, $W(t) = (W^1(t), \dots, W^m(t))$ — стандартний m - вимірний вінерівський процес.

Введемо наступні позначення:

- 1) $x(t; x_0, s)$ — розв'язок рівняння (3.1), визначений для $t \geq s$, що задовольняє початкову умову $x(s; x_0, s) = x_0$;
- 2) $\rho(b, M)$ — відстань від точки $b \in \mathbb{R}^n$ до множини $M \subset \mathbb{R}^n$, що визначається стандартним чином: $\rho(b, M) = \inf_{x \in M} \|x - b\|$;
- 3) $B_\varepsilon(M) = \{x \in \mathbb{R}^n | \rho(x, M) < \varepsilon\}$ — ε — окіл множини M , $\varepsilon > 0$.

Із системою (3.1) будемо пов'язувати диференціальний оператор $\mathcal{L}^*$, дія якого на функцію $g \in C^2$ визначається наступним чином:

$$\mathcal{L}^*g = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(f_k^i(x) f_k^j(x) g(x) \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f_0^i(x) g(x) \right). \quad (3.2)$$

Означення 3.1. Множину $M \subset \mathbb{R}^n$ називають інваріантною для системи (3.1), якщо для всіх $b \in M, s \in \mathbb{R}$ виконується властивість $x(t; b, s) \in M$ майже напевно для $t \geq s$.

3.2 Дослідження умов збіжності розв’язків системи до інваріантної множини

А. Рантцер в статті [49] запропонував новий підхід до дослідження множини притягальних точок у термінах функції щільності міри й отримав критерій збіжності траєкторій детермінованої системи для майже усіх початкових станів. Цей підхід описує якісну поведінку сім’ї траєкторій, зокрема, у випадках, коли система не є глобально стійкою за Ляпуновим.

В.В. Грушковською і О.Л. Зуєвим в [22] узагальнено цей результат при послаблених вимогах на міру та відповідну функцію щільності.

Для систем із випадковими впливами, коли стан системи не може бути передбачено із ймовірністю 1, також виникає питання притягання траєкторій системи за майже всіх початкових умов.

У цьому розділі дисертаційного дослідження розглядається задача збіжності розв’язків системи стохастичних диференціальних рівнянь до інваріантної множини за майже всіх початкових умов з фазового простору. Отримані достатні умови збіжності до інваріантної множини в термінах функції щільності міри, яка є монотонною на фазовому потоці, розповсюджують результати [22, 49] на випадок нелінійних диференціальних рівнянь із випадковими впливами. Методика досліджень ґрунтується на підході статті [63], де вивчено питання про притягання траєкторій до особливих точок у стохастичному сенсі.

Перш ніж перейти до викладення основної теореми цього розділу, сформулюємо декілька допоміжних результатів.

Лема 3.1. Розглянемо систему (3.1). Припустимо, що M — компактна множина та функції $f_j(x), j = \overline{0, m}$ задовольняють умову лінійного зростання: $\|f_0(x)\|^2 + \sum_{k=1}^m \|f_k(x)\|^2 \leq L(1 + \|x\|^2)$. Тоді існує така функція $\alpha \in$

$C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $\alpha(0) = 0$, що для всіх $t \in [s, s+1]$ справедлива наступна оцінка:

$$E\rho(x(t; x_0, s), M) \leq \alpha(\rho(x_0, M)).$$

Доведення.

Для доведення справедливості твердження, будемо використовувати наступну нерівність:

$$\|x(t; x_0, s) - y(t; y_0, s)\| \leq \|x(t; x_0, s) - x_0\| + \|y(t; y_0, s) - y_0\| + \|x_0 - y_0\|.$$

Отримаємо спочатку оцінки для компоненти вищевказаної нерівності.

$$|x(t; x_0, s) - x_0|^2 \leq 2 \left| \int_s^t f_0(x(\tau)) d\tau \right|^2 + 2 \sum_{k=1}^m \left| \int_s^t f_k(x(\tau)) dW(\tau) \right|^2.$$

Застосуємо математичне сподівання до обох частин нерівності. Отримаємо:

$$E|x(t; x_0, s) - x_0|^2 \leq 2E \left| \int_s^t f(x(\tau)) d\tau \right|^2 + 2E \sum_{k=1}^m \left| \int_s^t f_k(x(\tau)) dW(\tau) \right|^2.$$

Згідно до Теорема 1.7.1 [41], має місце наступна рівність:

$$E \sum_{k=1}^m \left| \int_s^t f_k(x(\tau)) dW(\tau) \right|^2 = \sum_{k=1}^m \int_s^t |f_k(\tau)|^2 d\tau.$$

З нерівності Гельдера маємо:

$$\left| \int_s^t f_0(x(\tau)) d\tau \right|^2 \leq (t-s) \int_s^t |f_0(x(\tau))|^2 d\tau.$$

Тоді:

$$\begin{aligned} E|x(t; x_0, s) - x_0|^2 &\leq 2(t-s)E \int_s^t |f_0(x(\tau))|^2 d\tau + 2E \sum_{k=1}^m \int_s^t |f_k(\tau)|^2 d\tau \\ &\leq 2L(t-s)E \int_s^t (1 + |x(\tau)|^2) d\tau. \end{aligned}$$

Використаємо наступну відому нерівність [41]:

$$E \left([1 + |x(t)|^2]^{\frac{p}{2}} \right) \leq 2^{\frac{p-2}{2}} (1 + E|x_0|^p) e^{p\beta(t-s)},$$

де $\beta = \sqrt{L} + L\frac{p-1}{2}$. При $p = 2$ та отримаємо:

$$E|x(t; x_0, s) - x_0|^2 \leq 2L(1 + E|x_0|^2)(t - s) \int_s^t e^{2\beta(\tau-s)} d\tau.$$

Оскільки $t \in [s, s + 1]$, маємо наступний результат:

$$E|x(t; x_0, s) - x_0|^2 \leq c_1(t - s), \quad \text{де } c_1 = 2L(1 + E|x_0|^2)e^{2\beta}.$$

Аналогічно

$$E|y(t; y_0, s) - y_0|^2 \leq c_2(t - s), \quad \text{де } c_2 = 2L(1 + E|y_0|^2)e^{2\beta}.$$

Визначимо $\Delta = \max\{\delta, t - s\}$, тоді

$$E\|x(t; x_0, s) - y(t; y_0, s)\| \leq C\Delta,$$

де $C = \sqrt{c_1} + \sqrt{c_2} + \frac{3}{2}$. З чого випливає твердження Лема.

Також ми будемо використовувати наступний результат.

Лема 3.2. [2а.] Припустимо, що в рівнянні (3.1) функції f_i , $i = 0, \dots, m$, задовольняють умову

$$|f_i(b)| \leq \tilde{c}_i + c_i \rho(b, M), \quad \forall b \in \mathbb{R}^n, \tilde{c}_i > 0, c_i > 0, i = 0, \dots, m.$$

Тоді

$$\begin{aligned} P\left[\sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} |x(s + \delta; b, s) - b| \geq \lambda\right] &\leq \frac{8\Delta}{\lambda^2} [\tilde{c}_0^2 \Delta + \tilde{c}_i^2 m] + \frac{16\tilde{c}_i c_i \alpha m}{\lambda^2} \Delta \rho(b, M) + \\ &+ \left[\frac{8c_0^2 \alpha^2 \Delta}{\lambda^2} + \frac{8c_i^2 \alpha^2 m}{\lambda^2} \right] \Delta \rho^2(b, M). \end{aligned}$$

Доведення. Розв'язок рівняння (3.1) можна записати у вигляді

$$x(t; b, s) = b + \int_s^t f_0(x(\tau; b, s)) d\tau + \sum_{k=1}^m \int_s^t f_k(x(\tau; b, s)) dW_\tau^k. \quad (3.3)$$

Тоді

$$\begin{aligned} P\left[\sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} |x(s + \delta; b, s) - b| \geq \lambda\right] &\leq \frac{E[\sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} |x(s + \delta; b, s) - b|^2]}{\lambda^2} \leq \\ &\leq \frac{4}{\lambda^2} \sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} E|x(s + \delta; b, s) - b|^2. \end{aligned}$$

Підставимо $x(s + \delta; b, s)$ з (3.3) і виконаємо перетворення:

$$\begin{aligned} \frac{4}{\lambda^2} \sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} E |x(s + \delta; b, s) - b|^2 &= \frac{4}{\lambda^2} \sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} E \left[\left| \int_s^t f_0(x(\tau; b, s)) d\tau + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sum_{k=1}^m \int_s^t f_k(x(\tau; b, s)) dW_\tau^k \right|^2 \right] \leq \frac{8}{\lambda^2} \sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} E \left[\int_s^t f_0(x(\tau; b, s)) d\tau \right]^2 + \\ &+ m \sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} E \left[\sum_{k=1}^m \int_s^t f_k(x(\tau; b, s)) dW_\tau^k \right]^2. \end{aligned}$$

З останньої рівності та з того, що $|f_i(b)| \leq \tilde{c}_i + c_i \rho(b, M)$ випливає:

$$\begin{aligned} \frac{8}{\lambda^2} \sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} E \left[\int_s^t f_0(x(\tau; b, s)) d\tau \right]^2 &+ m \sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} E \left[\sum_{k=1}^m \int_s^t f_k(x(\tau; b, s)) dW_\tau^k \right]^2 \leq \\ &\leq \frac{8}{\lambda^2} \left[\tilde{c}_0^2 \Delta + 2\tilde{c}_0 c_0 \sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} E \alpha \int_s^t \rho(b, M) d\tau + c_0^2 \alpha^2 \sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} E \int_s^t \rho^2(b, M) d\tau \right] + \\ &+ \frac{8m}{\lambda^2} \left[\tilde{c}_i^2 \Delta + 2\tilde{c}_i c_i \alpha \sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} E \alpha \int_s^t \rho(b, M) d\tau + c_i^2 \alpha^2 \sup_{0 \leq \delta \leq \Delta} E \int_s^t \rho^2(b, M) d\tau \right] \leq \\ &\leq \frac{8\Delta}{\lambda^2} [\tilde{c}_0^2 \Delta + \tilde{c}_i^2 m] + \frac{16\tilde{c}_i c_i \alpha m}{\lambda^2} \Delta \rho(b, M) + \left[\frac{8c_0^2 \alpha^2 \Delta}{\lambda^2} + \frac{8c_i^2 \alpha^2 m}{\lambda^2} \right] \Delta \rho(b, M). \end{aligned}$$

Що доводить твердження леми 3.2.

Сформулюємо достатні умови збіжності розв'язків системи (3.1) до довільної інваріантної множини за майже всіх початкових умов.

Теорема 3.1. [2а.] Розглянемо $M \subset \mathbb{R}^n$ — інваріантну множину для (3.1) і функцію з невід'ємними значеннями $D \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus M)$.

Нехай виконано усі умови Леми 3.1. Крім того, припустимо виконання наступних умов:

- 1) $D \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(M))$ для всіх $\varepsilon > 0$;
- 2) $\mathcal{L}^* D < 0$ для майже всіх $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$;

Тоді для довільного $s \geq 0$ і для μ — майже кожного $b \in \mathbb{R}^n$ виконується наступна властивість

$$\rho(x(t; b, s), M) \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$ майже напевно.

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$ та $Z = \{b \in \mathbb{R}^n : |b| > \varepsilon\}$. Почнемо з застосування Лема 5.2 [63]. Визначимо $S_l = \{b \in \mathbb{R}^n : \rho(b, M) > l^{-1}\}$, $S = \cup_l S_l = \mathbb{R}^n \setminus M$, $\tau_l = \sup \{s < t : x^{-1}(t; b, s) \notin S_l\}$. Тоді D інтегровна на Z .

Задамо

$$D_l = \begin{cases} D, & b \in M, \\ 0, & b \notin M. \end{cases}$$

При такому визначенні $D_l \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus M, \mathbb{R}^+)$. Необхідно перевірити, що $\tau_l \rightarrow -\infty$.

Доведемо це від супротивного. Нехай $\tau_l \not\rightarrow -\infty$. Тоді з додатною ймовірністю виконується умова $x^{-1}(t; b, s) \in M$ для деякого $b \in S$, $-\infty < s < t$. Проте $x^{-1}(t; b, s) \in M$ для всіх $b \in M$, отже $S \subseteq M$, що є неможливим. Таким чином, $\tau_l \rightarrow -\infty$. Усі умови Лема 5.2 [63] виконано, отже:

$$0 \leq \int_Z D(b)db + \int_s^t E \int_{x^{-1}(t; \tau, Z)} \mathcal{L}^* D(b)dbd\tau \quad (3.4)$$

Цей вираз не зростає при спаданні s , оскільки $\mathcal{L}^* D \leq 0$, і є скінченим, оскільки D інтегровна на Z .

З монотонної збіжності випливає, що існує скінчений $\lim_{s \rightarrow -\infty}$. Звідси

$$\int_{-\infty}^t D(x^{-1}(t; \tau, Z))d\tau < \infty,$$

$$D(A) = - \int_A \mathcal{L} D(b)(P(dw) \times \mu dx),$$

$$D(x^{-1}(t; \tau, Z)) = D\{(b, w) \in \Omega \times S : x^{-1}(t; \tau, b, w) \in Z\}.$$

Зауважимо, що $\mathcal{L}^* D \leq 0$ означає, що D задає міру на $\Omega \times S$ та є τ -скінченою, оскільки для будь-якого $l > 1$ $D(\Omega \times \{b \in S : \frac{1}{l} < \rho(b, M) < l\}) < \infty$ та $\cup_{l=2}^{\infty} (\Omega \times \{b \in S : \frac{1}{l} < \rho(b, M) < l\}) = \Omega \times S$.

Зафіксуємо $m \in N$ і задамо $S_k^m = \{(k-1)2^{-m}, k2^{-m}\}, k \in N$. З кожного S_k^m обираємо час t_k^m :

$$D(x^{-1}(t; t - t_k^m, Z)) \leq \inf_{s \in S_k^m} D(x^{-1}(t; t - s, Z)) + 2^{-k}.$$

Позначимо $T_m = \{t_k^m : k \in N\}$ для фіксованого m . Маємо

$$2^{-m} \sum_{k=1}^{\infty} D(x^{-1}(t; t - t_k^m, Z)) \leq 2^{-m} + \int_{-\infty}^t D(x^{-1}(t; \tau, Z)) d\tau < \infty.$$

Оскільки D - щільність τ - скінченої міри, застосуємо лему Бореля-Кантеллі:

$$D(\limsup_{k \rightarrow \infty} x(s + t_k^m; s, Z)) = (P \times \mu)(\limsup_{k \rightarrow \infty} x(s + t_k^m; s, Z)) = 0.$$

Ми показали, що для всіх початкових умов b , окрім множини $N \subset \mathbb{R}^n$ міри 0, та для всіх m майже напевно за ймовірністю існує лише скінченна кількість моментів часу $t \in T_m : x(s + t; s, b) \in Z$.

Нехай $b \notin N$. Із доведеної властивості випливає, що

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} [\rho(x(s + t; s, b), M)] \leq \varepsilon$$

майже напевно за ймовірністю.

Нехай $\limsup_{t \rightarrow \infty} [\rho(x(s + t; s, b), M)] = \delta > 0$.

З монотонної збіжності маємо при $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$:

$$E[\chi \limsup [\rho(x(t; s, b), M) > \varepsilon']] \rightarrow \delta.$$

Отже, існує таке $\varepsilon' > \varepsilon$, що

$$P\{w : \limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(x(t; s, b), M) > \varepsilon'\} > 0.$$

Ми вже довели, що майже напевно $\rho(x(t; s, b), M) \leq \varepsilon$ для нескінченної кількості $t_n \rightarrow \infty$. Отже з твердження $P\{w : \limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(x(t; s, b), M) > \varepsilon'\} > 0$ випливає

$$P\{w : x(t; s, b) \text{ перетинає } S_\varepsilon \text{ та } S'_\varepsilon \text{ нескінченну кількість раз} \} > 0,$$

де $S_\varepsilon = \{b : \rho(b, M) = \varepsilon\}$, $S'_\varepsilon = \{b : \rho(b, M) = \varepsilon'\}$.

Як тільки ми доведемо останнє твердження, доведення теореми буде завершено.

Для цього введемо наступну послідовність моментів зупинки. Нехай $\sigma_0 = \inf\{t > s : \rho(x(t; s, b), M) \leq \varepsilon\}$, $\tau_0 = \inf\{t > \sigma_0 : \rho(x(t; s, b), M) \leq \varepsilon'\}$ і для кожного $n > 0$ покладемо $\sigma_n = \inf\{t > \tau_{n-1} : \rho(x(t; s, b), M) \leq \varepsilon\}$, $\tau_n = \inf\{t > \sigma_n : \rho(x(t; s, b), M) \leq \varepsilon'\}$.

Визначимо

$$\Omega_n(\Delta) = \{w \in \Omega : \tau_n < \infty, \rho(x(\tau_n + \delta; s, b), M) > \varepsilon, \forall \delta : 0 \leq \delta \leq \Delta\}.$$

Для кожного $\Delta > 0$ множина $w \in \Omega$ таких, що $w \in \Omega_n(\Delta)$ для нескінченної кількості n має бути міри нуль за ймовірністю. Ми можемо обрати достатньо велике m так, щоб кожен інтервал часу довжини Δ містив принаймні одну точку з T_m і для точок $t \in T_m$ маємо $\rho(x(t; s, b), M) > \varepsilon$ тільки скінчену кількість раз майже напевно за ймовірністю.

Таким чином, $\sum_n \chi_{\Omega_n(\Delta)} < \infty$ майже напевно за ймовірністю.

Продовжуючи доведення, будемо використовувати наступну побудову [36]. Введемо дискретну фільтрацію $B_k = F_s^{\tau_k+1}$ і визначимо $Z_k = X_k - Y_k$ з

$$X_k = \sum_{n=1}^k \chi_{\Omega_n(\Delta)},$$

$$Y_k = \sum_{n=1}^k E[\chi_{\Omega_n(\Delta)} | B_{n-1}].$$

Оскільки $\Omega_n(\Delta) \in B_n$ для всіх $k < n$, то $Z_k \in B_K$ — мартингалом. Визначимо для $a > 0$ момент зупинки $\kappa(a) = \inf\{n : Z_n > a\}$. Оскільки $|Z_k - Z_{k-1}| \leq 1$ майже напевно, то зупинений процес $Z'_K = Z_{k \wedge \kappa(a)}$ є обмеженим згори мартингалом і за теоремою про збіжність для мартингалів Z'_K збігається майже напевно при $k \rightarrow \infty$ до скінченної випадкової змінної Z'_∞ . Однак, оскільки

Z'_K та Z_K співпадають на $\{w : \sup_n Z_n < a\}$ та a було обрано випадково, $Z_k \rightarrow Z_\infty < \infty$ на $\{w : \sup_n Z_n < \infty\}$.

Зазначимо, що X_n та Y_n додатні зростаючі процеси і вище було встановлено, що $\sup_n X_n < \infty$ майже напевно за ймовірністю. Отже, $\sup_n Z_n < \infty$ майже напевно за ймовірністю. Однак, це означає, що Z_k і, відповідно, Y_k збігаються до скінченного значення майже напевно за ймовірністю. Отже, встановлено, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[\chi \Omega_n(\Delta) | f_s^{\tau_n}] < \infty$$

для будь-якого $\Delta > 0$ майже напевно за ймовірністю.

Оскільки траєкторії системи (3.1) неперервні, $\rho(x(\tau_n; s, b), M) = \varepsilon'$ при $\tau_n < \infty$.

За лемою 3.2 ми можемо обрати $\bar{\Delta}$ достатньо малим для виконання

$$P(y) = P \left[\sup_{0 \leq \delta \leq \bar{\Delta}} |x(s + \delta, s, y) - y| < \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{2} \right] \geq \frac{1}{2}$$

для всіх $|y| = \varepsilon'$.

Використовуючи строгу марковість, можемо записати

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} E[\chi \Omega_n(\bar{\Delta}) | F_s^{\tau_n}] \geq \sum_{n=1}^{\infty} P(x(\tau_n; s)) \chi_{\tau_n} < \infty$$

майже напевно. Проте це означає, що $\tau_n < \infty$ скінченну кількість раз майже напевно, що суперечить твердженню

$$P\{w : x(t; s, b) \text{ перетинає } S_\varepsilon \text{ та } S'_\varepsilon \text{ нескінченну кількість раз} \} > 0.$$

Ми показали, що для μ - майже всіх $b \in \mathbb{R}^n$ майже напевно за ймовірністю виконується наступна властивість

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(x(t; s, b), M) \leq \varepsilon,$$

тобто для μ - майже всіх $b \in \mathbb{R}^n$ майже напевно за ймовірністю існує таке $t_e > \varepsilon$, що $\rho(x(t; s, b), M) \leq \varepsilon$ при $t \geq t_e$. Проте, оскільки це виконується для будь-якого $\varepsilon > 0$, потік $x(t; s, b)$ має збігатися до множини M .

Якщо умова Ліпшиця не обов'язково виконується, то, відповідно до методології роботи [63], доводимо наступний наслідок з теореми.

Наслідок 3.1. Припустимо, що функції $f_k(x), k = \overline{0, m}$ є вимірними і $f_k(0) = 0$. Також нехай існує таке вимірне відображення $c : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, +\infty)$, що $c(x)$ та $\frac{1}{c(x)}$ є локально обмеженими. Крім того, припускаємо, що $c(x)f_0(x)$ і $\sqrt{c(x)}f_k(x), k = \overline{1, m}$ є двічі неперервно диференційовними та задовольняють глобальну умову Ліпшиця.

Нехай існує така функція з невід'ємними значеннями D , що $\frac{D(x)}{c(x)} \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus M)$, $\frac{D(x)}{c(x)} \in L^1(\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon(M))$ для всіх $\varepsilon > 0$ і $\mathcal{L}^*(D) < 0$ для майже всіх $x \in \mathbb{R}^2 \setminus M$.

Тоді для довільного $s \geq 0$ і для μ - майже кожного $b \in \mathbb{R}^n$ виконується наступна властивість:

$$\rho(x(t; b, s), M) \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$ майже напевно.

Доведення.

Розглянемо рівняння Іто:

$$y(t) = y_0 + \int_s^t c(y(\tau))f_0(y(\tau))d\tau + \sum_{k=1}^m \int_s^t \sqrt{c(y(\tau))}f_k(y(\tau))dW^k(\tau). \quad (3.5)$$

Введемо наступні позначення: $g_0(y) = c(y)f_0(y)$, $g_k(y) = \sqrt{c(y)}f_k(y)$, $\tilde{D}(y) = \frac{D(y)}{c(y)}$, $k = \overline{1, m}$.

Тоді рівняння (3.5) набуває вигляду:

$$y(t) = y_0 + \int_s^t g_0(y(\tau))d\tau + \sum_{k=1}^m \int_s^t g_k(y(\tau))dW^k(\tau). \quad (3.6)$$

Слід відзначити, що за побудовою $\mathcal{L}^*(\tilde{D}(y)) = \mathcal{L}^*(D(y))$. Отже можна застосувати теорему 3.1 до рівняння (3.6). Тоді для всіх $y_0 \in \mathbb{R}^n$, окрім множини N міри нуль, $\rho(y(t; y_0, s), M) \rightarrow 0$ майже напевно при $t \rightarrow \infty$.

Оберемо довільне $y_0 \notin N$ і визначимо $\beta_t = \int_s^t c(y(\tau))d\tau$ та момент зупинки $\alpha_t = \inf\{s : \beta_s > t\}$ для кожного t . Тоді згідно до [51, 63] масштабований за

часом розв'язок y_{α_t} є еквівалентним до розв'язку $x(t)$ рівняння (3.1). З цих міркувань випливає доведення наслідку 3.1.

3.3 Висновки.

Сформулюємо основні результати розділу:

1. Отримано достатні умови збіжності розв'язків системи нелінійних стохастичних диференціальних рівнянь до інваріантної множини для майже всіх початкових умов фазового простору.
2. При дослідженні асимптотичної поведінки розв'язків системи використана функція щільності міри, яка є монотонною на потоці.

4 Стабілізація інваріантних множин нелінійних систем із випадковими впливами

4.1 Достатні умови асимптотичної стійкості

Розглянемо систему стохастичних диференціальних рівнянь Іто у вигляді:

$$dx(t) = f(x)dt + \sigma(x)dW(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.1)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор стану системи, функції $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ та $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times k}$ задовольняють умову Ліпшиця на кожній компактній множині $K \subset \mathbb{R}^n$.

При цьому $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ та $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$ — це вектори стовпці, а $\sigma(x)$ — це матриця розміру $n \times k$.

Система (4.1) містить k -мірний вінерівський процес $W(t)$, компоненти якого $w_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, k$) є незалежними стандартними одномірними вінерівськими процесами.

Надалі будемо припускати, що для кожних $x_0 \in \mathbb{R}^n$ та $s \in \mathbb{R}$ існує єдиний строго марківський процес $x(t; x_0, s)$, який є розв'язком системи (4.1) при $t \geq s$ і задовольняє початкову умову $x(s; x_0, s) = x_0$.

Оскільки у загальному випадку права частина системи (4.1) може не задовольняти умову лінійного зростання, то глобальне існування розв'язку буде встановлено за допомогою теореми Р.З. Хасьминського (теореми 2.4).

Надалі будемо вважати, що вектор стану системи (4.1) можна задати у вигляді $x = (y^T, z^T)^T$, де $y = (y_1, \dots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m$ та $z = (z_1, \dots, z_p)^T \in \mathbb{R}^p$, $m + p = n$.

Із системою (4.1) будемо пов'язувати наступний диференціальний оператор

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad [a_{ij}] = \sigma \sigma^T. \quad (4.2)$$

У цьому розділі дисертаційного дослідження ми будемо використовувати наступні означення.

Означення 4.1. Розв'язок $x(t; x_0, s)$ системи (4.1) називається y -стохастично обмеженим при $t > s$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $N > 0$, що

$$P\{\sup_{t>s} \|y(t; x_0, s)\| > N\} < \varepsilon.$$

Означення 4.2. Непорожню множину $M \subset \mathbb{R}^n$ називають інваріантною множиною для системи (4.1), якщо при $x^0 \in M$ та $s \in \mathbb{R} : x(t; x^0, s) \subseteq M$ для всіх $t \geq s$ майже напевно.

Означення 4.3. Множина $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y = 0\}$ називається стійкою за ймовірністю, якщо для будь-яких $s \geq 0$, $\epsilon_1 > 0$ та $\epsilon_2 > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що наступна нерівність виконується за будь-яких початкових умов $x_0 \in \mathbb{R}^n$ при $\|y_0\| < \delta$:

$$P\{\sup_{t \geq s} \|y(t; x_0, s)\| > \epsilon_1\} < \epsilon_2. \quad (4.3)$$

Означення 4.4. Множина $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y = 0\}$ називається асимптотично стійкою за ймовірністю, якщо вона є стійкою за ймовірністю і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$ таке, що

$$P\{\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t; y_0, s)\| = 0\} > 1 - \varepsilon, \quad (4.4)$$

для всіх $x_0 \in \mathbb{R}^n$ таких, що $\|y_0\| < \Delta$.

Для дослідження стійкості інваріантних множин розглянемо клас функцій $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ = [0; +\infty)$, $V(0) = 0$, які є двічі неперервно диференційовними.

Будемо розглядати клас неперервних функцій $\mathcal{K}$, який складається з усіх неперервних строго зростаючих функцій $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\alpha(0) = 0$.

Також позначимо $\mathcal{K}^* = \{\alpha \in \mathcal{K} \mid \alpha(s) \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow \infty\}$.

Перш ніж перейти до основного результату розділу, сформулюємо допоміжну лему.

Лема 4.1. Розв'язки системи (4.1) є y -стохастично обмеженими, якщо існує така двічі неперервно диференційована функція $V(x)$, що $V(x) \geq \alpha(\|y\|)$, $\alpha \in \mathcal{K}^*$ та $\mathcal{L}V(x) \leq 0$.

Доведення. Нехай $x(t; x_0, s)$ – розв'язок системи (4.1), $t \geq s$.

Для довільного $\varepsilon > 0$ оберемо додатне число N з умови $\alpha(N) > \frac{V(x_0)}{\varepsilon}$.

Із застосуванням формули Динкіна (теорема 2.2) одержимо, що

$$EV(x(t; x_0, s)) = V(x_0) + E \int_s^t \mathcal{L}V(x(q; x_0, s)) dq \leq V(x_0), \quad t \geq s. \quad (4.5)$$

Оскільки $V(x) \geq \alpha(\|y\|)$, то з (4.5) випливає:

$$\begin{aligned} V(x_0) &\geq EV(x(t; x_0, s)) \geq E\alpha(\|y(t; x_0, s)\|) = \\ &= E\{\alpha(\|y(t; x_0, s)\|)\chi_{\|y(t; x_0, s)\| > N} + \alpha(\|y(t; x_0, s)\|)\chi_{\|y(t; x_0, s)\| \leq N}\}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

де $\chi_{\|y(t; x_0, s)\| > N}$ позначає випадкову величину

$$\chi_{\|y(t; x_0, s)\| > N} = \begin{cases} 1, & \|y(t; x_0, s)\| > N; \\ 0, & \|y(t; x_0, s)\| \leq N. \end{cases}$$

Оскільки $\alpha(p)$ є строго зростаючою функцією, то можемо записати наступну оцінку:

$$\begin{aligned} V(x_0) &\geq E(\alpha(N)\chi_{\|y(t; x_0, s)\| > N}) = \alpha(N)P\{\omega \mid \|y(t; x_0, s)\| > N\} > \\ &> \frac{V(x_0)}{\varepsilon}P\{\omega \mid \|y(t; x_0, s)\| > N\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

для всіх $t \geq s$.

З нерівності (4.7) випливає, що

$$P\{\omega \mid \sup_{t \geq s} \|y(t; x_0, s)\| > N\} \leq \varepsilon. \quad (4.8)$$

Завдяки довільному вибору $\varepsilon > 0$ одержана оцінка (4.8) доводить y -стохастичну обмеженість розв'язку $x(t; x_0, s)$.

Лема 4.1 розповсюджує теорему 39.1 з [98] на клас стохастичних диференціальних рівнянь.

Визначимо достатні умови асимптотичної стійкості інваріантних множин системи (4.1).

Теорема 4.1. [За.] Припустимо, що множина $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y = 0\}$ є інваріантною множиною системи (4.1) і функції $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^+)$, $W \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^+)$ задовольняють наступні властивості:

- 1) $\alpha_1(\|y\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|y\|)$ з $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}^*$;
- 2) $\alpha(\|z\|) \leq W(x)$ з $\alpha \in \mathcal{K}^*$;
- 3) $\mathcal{L}V(x) \leq 0$;
- 4) $\mathcal{L}W(x) \leq 0$;
- 5) множина $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{L}V(x) = 0\} \setminus M$ не містить цілих траєкторій системи (4.1) майже напевно.

Тоді множина $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y = 0\}$ є асимптотично стійкою за ймовірністю для системи (4.1).

Доведення. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Нехай $\|y_0\| < \varepsilon$ і нехай

$$\tau_\varepsilon = \inf_{t \geq s} \{t \mid \|y(t; x_0, s)\| > \varepsilon\}, \quad \tau_\varepsilon(t) = \min(\tau_\varepsilon, t).$$

Використовуючи особливий випадок формули Динкіна (теорема 2.2), отримаємо:

$$EV(x(\tau_\varepsilon(t); x_0, s)) = V(x_0) + E \int_s^{\tau_\varepsilon(t)} \mathcal{L}V(x(u; x_0, s)) du.$$

Внаслідок цього

$$EV(x(\tau_\varepsilon(t); x_0, s)) \leq V(x_0) \quad \text{для всіх } t > s, \quad (4.9)$$

де E є математичним сподіванням за ймовірнісною мірою $P_{x_0, s}\{\cdot\}$

Перепишемо нерівність (4.9) у наступному вигляді:

$$\int_{\tau_\varepsilon < t} \alpha_1(\|y(\tau_\varepsilon; x_0, s)\|) P_{x_0, s}(d\omega) + \int_{\tau_\varepsilon \geq t} \alpha_1(\|y(\tau_\varepsilon; x_0, s)\|) P_{x_0, s}(d\omega) \leq V(x_0).$$

Таким чином, $\alpha_1(\varepsilon) P_{x_0, s}\{\tau_\varepsilon < t\} \leq V(x_0)$. З цього випливає, в силу неперервності функції $V(x)$ і рівності $V(0) = 0$, що

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} P_{x_0, s}\{\tau_\varepsilon < t\} = 0,$$

а отже, умова (4.3) виконується.

Залишилось довести, що

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} P\{\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t; x_0, s)\| = 0\} = 1.$$

Для цього з множини вибірових траєкторій процесу $x(t; x_0, s)$ виберемо підмножину таких вибірових траєкторій $\mathcal{B}$, що рівність $\tau_\varepsilon(t) = t$ виконується для кожної компоненти $y_i(t; x_0, s)$ для всіх $t \geq s$.

Тоді

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} P(\mathcal{B}) = 1. \quad (4.10)$$

За умовами 2), 4) Теорема 4.1 існує $\Delta > 0$ таке, що розв'язок $x(t; x_0, s)$ системи (4.1) при $\|y_0\| < \Delta$ є стохастично обмеженим для $t > s$. Нехай $\|y_0\| < \Delta$, покажемо, що $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t; x_0, s)\| = 0$.

Через обмеженість $x(t; x_0, s)$ існує послідовність $t_k \rightarrow +\infty$:

$$x(t_k; x_0, s) \rightarrow x^* = (y^*, z^*) \in G^+,$$

де G^+ — множина ω -граничних точок розв'язку $x(t; x_0, s)$.

Оскільки умови стохастичної версії принципу інваріантності Ла-Салля виконані (див. [39, 40]), $G^+ \subset \{x \mid \mathcal{L}V(x) = 0\}$.

Покажемо тепер, що $y^* = 0$. З інваріантності множини G^+ отримаємо $x(t; x^*, s) \in G^+$ для всіх $t \geq s$. Припустимо, що $y^* \neq 0$. Тоді множина M є інваріантною і $x^* \in G^+ \subset \{x \mid \mathcal{L}V(x) = 0\}$, тоді $x(t; x^*, s) \in \{x \mid \mathcal{L}V(x) =$

$0\} \setminus M, t \geq s$. Вищевказана властивість суперечить четвертій умові теореми.

Таким чином, $y^* = 0$ і

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t; x_0, s)\| = 0. \quad (4.11)$$

Тоді з (4.11) випливає твердження теореми 4.1.

4.2 Побудова стабілізуючого керування

Для подальшого дослідження розглянемо керовану систему, що описується диференціальними рівняннями Іто:

$$dx(t) = (f(x) + g(x)u)dt + \sum_{i=1}^k \sigma_i(x)dW_i(t). \quad (4.12)$$

Як і раніше, $x = (y^T, z^T)^T \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ — вектор стану, де $y = (y_1, \dots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m$ та $z = (z_1, \dots, z_p)^T \in \mathbb{R}^p$, $m + p = n$, $W(t)$ — стандартний k -мірний вінерівський процес, а $u = (u_1, \dots, u_k)^T \in U = \mathbb{R}^k$ — керування.

Будемо вважати $(0, z) \in D$, $\sigma_i(0, z) = 0$ для всіх $z \in \mathbb{R}^p$ та $i = 1, \dots, k$ та відображення $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}^{n \times k}$, $\sigma_i : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ задовольняють умову Ліпшиця на кожній обмеженій множині $X \subset D$.

Задамо диференціальний оператор $\mathcal{L}_u$:

$$\mathcal{L}_u = \sum_{i=1}^n (f(x) + g(x)u)_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$[c_{ij}(x)] = \sigma(x)\sigma^T(x).$$

Для відображення $h : D \rightarrow U$, $h(0, z) = 0$, запишемо замкнену для (4.12) систему зі зворотнім зв'язком $u = h(x)$:

$$dx(t) = (f(x) + g(x)h(x))dt + \sum_{i=1}^k \sigma_i(x)dW_i(t). \quad (4.13)$$

Задамо функції:

$$\begin{aligned}
a(x) &= \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x) \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_i \partial x_j}, \\
b_i(x) &= \sum_{j=1}^n g_{ji}(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x_j}, \\
b(x) &= (b_1(x), \dots, b_k(x)).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

У наступній теоремі пропонується конструктивний спосіб побудови керування, яке забезпечує асимптотичну стійкість множини $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y = 0\}$ відповідної замкненої системи (4.13)

Теорема 4.2. Припустимо, що:

1. Існує така функція $V \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^+)$, що $\alpha_1(\|y\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|y\|)$ для всіх $x \in \mathbb{R}^n$ з $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}^*$;
2. Рівняння $a(x) + \sum_{i=1}^k u_i^0 b_i(x) = 0$ має локально ліпшицев розв'язок $u_i^0 = u_i^0(x)$, для якого множина $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid b(x) = 0, y \neq 0\}$ не містить цілих траєкторій системи (4.12) з керуванням $u = u^0(x)$ майже напевно.

Функції $a(x), b_i(x)$ задаються рівняннями (4.14);

3. Існує функція $W \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^+)$ та ліпшицева функція $q(x) \geq 0$ такі, що $W(x) \geq \alpha(\|z\|)$, $\alpha \in \mathcal{K}^*$, та $\mathcal{L}_{u(x)^0 - qb(x)} W(x) \leq 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}^n$;
4. Множина M є інваріантною для системи (4.12), (4.15).

Тоді зворотній зв'язок

$$u_i = u_i^0 - q(x)b_i(x), \quad i = 1, \dots, k, \tag{4.15}$$

забезпечує асимптотичну стійкість за ймовірністю множини

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y = 0\}$$

для системи (4.12).

Доведення.

Обчислимо оператор $\mathcal{L}V(x)$ для (4.12), використовуючи керування (4.15):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}V(x) &= \sum_{i=1}^n (f(x) + g(x)u)_i \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \\
 &= \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n g_i(x) u_i^0(x) \frac{\partial V}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n g_i(x) q(x) b_i(x) \frac{\partial V}{\partial x_i} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = a(x) + \sum_{i=1}^n u_i^0(x) b_i(x) - \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n g_i(x) q(x) b_i(x) \frac{\partial V}{\partial x_i} = -q(x) \|b(x)\|^2.
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

З додатної визначеності функції $q(x)$ випливає, що $\mathcal{L}V(x) \leq 0$. Отже виконано другу умову теореми 4.1.

Із z -обмеженості розв'язків системи (4.13) на множині $\mathcal{D}_H$ майже напевно випливає обмеженість розв'язку $x(t; x_0, s)$ при $t \geq s$.

Друга умова теореми 4.2 еквівалентна четвертій умові теореми 4.1.

Таким чином, бачимо, що для замкненої системи (4.13)- (4.15) виконані всі умови теореми 4.1. Отже, множина $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y = 0\}$ є асимптотично стійкою за ймовірністю для системи (4.13) із побудованим керуванням (4.15).

У наступних підрозділах покажемо можливість застосування доведених теорем до проблем часткової стабілізації нелінійних керованих систем із випадковими впливами.

4.3 Одноосьова стабілізація супутника за допомогою реактивних двигунів орієнтації

Розглянемо проблему стабілізації руху твердого тіла навколо його центру мас під дією реактивних моментів сил без урахування зміни маси (див. Рис.4.1).

Рівняння руху можна записати у формі Ейлера – Пуассона з випадковими

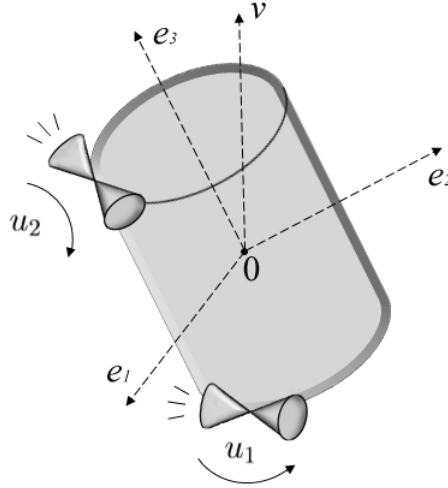


Рис. 4.1: Супутник з реактивними двигунами орієнтації.

впливами наступним чином:

$$\begin{aligned}
 d\omega_1 &= \left(\frac{A_2 - A_3}{A_1} \omega_2 \omega_3 + u_1 \right) dt + \omega_1 \sigma dW(t), \\
 d\omega_2 &= \left(\frac{A_3 - A_1}{A_2} \omega_1 \omega_3 + u_2 \right) dt + \omega_2 \sigma dW(t), \\
 d\omega_3 &= \frac{A_1 - A_2}{A_3} \omega_1 \omega_2 dt, \\
 d\nu_1 &= (\omega_3 \nu_2 - \omega_2 \nu_3) dt, \\
 d\nu_2 &= (\omega_1 \nu_3 - \omega_3 \nu_1) dt, \\
 d\nu_3 &= (\omega_2 \nu_1 - \omega_1 \nu_2) dt.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Тут $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — проекції вектора кутової швидкості ω на відповідні головні осі інерції тіла, (ν_1, ν_2, ν_3) — проекції нерухомого орта ν на відповідні головні осі інерції тіла, (A_1, A_2, A_3) — головні центральні моменти інерції тіла, а (u_1, u_2) — керуючі впливи. При подальшому аналізі будемо вважати всі величини безрозмірними.

Слід відзначити, що математичну модель супутника з вінеровськими процесами використано в роботі [48] для моделювання руху супутника на орбітах з висотою до 600 км з урахуванням збурень атмосферного опору. В статті [52] використовуються рівняння Іто для розв'язання задачі стабілізації твердого тіла за наявності стохастичного вхідного моменту.

Система (4.17) при $u_1 = u_2 = 0$ припускає наступний частковий розв'язок:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \omega_2 = \omega_3 = 0, \\ \nu_1 &= \nu_2 = 0, \nu_3 = 1.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Розв'язок (4.18) відповідає стану рівноваги, при якому третю головну вісь інерції тіла направлено вздовж нерухомого вектора ν .

Зауважимо, що розв'язок (4.18) не може бути асимптотично стабілізовано відносно всіх змінних, оскільки у системи (4.17) існує геометричний інтеграл $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = \text{const.}$

Застосуємо Теорему 4.1 та 4.2 для стабілізації множини

$$M = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3) : \nu_1 = \nu_2 = \omega_1 = \omega_2 = 0\}$$

системи (4.17).

Такий вибір множини відповідає задачі одноосьової стабілізації твердого тіла, тобто випадку, коли проекції ν_1, ν_2 компоненти кутової швидкості ω_1, ω_2 мають бути малими та прямувати до нуля при $t \rightarrow +\infty$, в той же час інші компоненти розв'язку мають бути обмеженими.

Визначимо наступну функцію Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2}(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2) + \frac{1}{2}(\nu_1^2 + \nu_2^2).$$

Для побудови керування спочатку обчислимо функції $a(x), b_1(x), b_2(x)$ за формулами (4.14). Отримаємо:

$$a(x) = (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2\omega_3 + \nu_3(\omega_1\nu_2 - \omega_2\nu_1) + \frac{1}{2}\sigma^2(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2),$$

$$b_1(x) = A_1\omega_1,$$

$$b_2(x) = A_2\omega_2.$$

Згідно з Теоремою 4.2, визначимо u_1^0, u_2^0 з рівняння

$$\omega_1(A_1u_1^0 - A_1\omega_2\omega_3 + \nu_2\nu_3 + \frac{1}{2}\sigma^2 A_1\omega_1) + \omega_2(A_2u_2^0 + A_2\omega_1\omega_3 - \nu_1\nu_3 + \frac{1}{2}\sigma^2 A_2\omega_2) = 0.$$

Отримаємо наступний частковий розв'язок

$$\begin{aligned} u_1^0 &= \omega_2 \omega_3 - \frac{1}{A_1} \nu_2 \nu_3 - \frac{1}{2} \sigma^2 \omega_1, \\ u_2^0 &= -\omega_1 \omega_3 + \frac{1}{A_2} \nu_1 \nu_3 - \frac{1}{2} \sigma^2 \omega_2. \end{aligned}$$

Далі визначимо керування зі зворотнім зв'язком, використовуючи формулу (4.15) , наступним чином:

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega_2 \omega_3 - \frac{1}{A_1} \nu_2 \nu_3 - \left\{ \frac{|A_1 - A_2|}{2A_1} |\omega_3| + A_1 h + \frac{1}{2} \sigma \sigma^T \right\} \omega_1, \\ u_2 &= -\omega_1 \omega_3 + \frac{1}{A_2} \nu_1 \nu_3 - \left\{ \frac{|A_1 - A_2|}{2A_2} |\omega_3| + A_2 h + \frac{1}{2} \sigma \sigma^T \right\} \omega_2, \end{aligned} \quad (4.19)$$

де функція h буде визначена пізніше.

Обчислюючи дію оператора $\mathcal{L}$ на функцію V , отримаємо:

$$\mathcal{L}V = -\frac{|A_1 - A_2|}{2} |\omega_3| \omega_1^2 - \frac{|A_1 - A_2|}{2} |\omega_3| \omega_2^2 - A_1^2 h \omega_1^2 - A_2^2 h \omega_2^2 \leq 0.$$

Таким чином, виконано другу умову Теорема 4.1.

Усі розв'язки системи (4.17) є обмеженими відносно змінних ν_i завдяки наявності геометричного інтегралу $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = \text{const}$.

Залишилось перевірити стохастичну обмеженість розв'язку відносно змінних ω_i . Для цього застосуємо Лему 4.1. Відповідно до цієї леми, для стохастичної обмеженості розв'язку відносно ω_i достатньо, існування такої функції $W(x)$, щоб $W(x) \geq \alpha(\|\omega\|)$, $\alpha \in \mathcal{K}^*$ і $\mathcal{L}W(x) \leq 0$.

У якості такої функції оберемо

$$W(x) = \frac{1}{2} (A_1 \omega_1^2 + A_2 \omega_2^2 + A_3 \omega_3^2) + \frac{1}{2} (\nu_1^2 + \nu_2^2).$$

Тоді

$$\mathcal{L}W(x) = (A_1 - A_2) \omega_1 \omega_2 \omega_3 - \frac{|A_1 - A_2|}{2} |\omega_3| (\omega_1^2 + \omega_2^2) - h (A_1^2 \omega_1^2 + A_2^2 \omega_2^2).$$

Згідно з Лемою 4.1, достатньо виконання нерівності $\mathcal{L}W(x) \leq 0$, тобто функція $h(x) > 0$ має задовольняти наступну умову:

$$h(x) (A_1^2 \omega_1^2 + A_2^2 \omega_2^2) \geq (A_1 - A_2) \omega_1 \omega_2 \omega_3. \quad (4.20)$$

Використовуючи нерівність $2A_1A_2\omega_1\omega_2 \leq A_1^2\omega_1^2 + A_2^2\omega_2^2$, бачимо, що для виконання (4.20) достатньо покласти

$$h(x) = \left| \frac{A_1 - A_2}{2A_1A_2} \omega_3 \right| + \varepsilon, \quad (4.21)$$

де ε довільна додатна константа.

Тоді керування (4.19) набуває вигляду

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega_2\omega_3 - \frac{1}{A_1}\nu_2\nu_3 - \left\{ \frac{|A_1 - A_2|}{2A_1} |\omega_3| + A_1 \left(\left| \frac{A_1 - A_2}{2A_1A_2} \omega_3 \right| + \varepsilon \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sigma \sigma^T \right\} \omega_1, \\ u_2 &= -\omega_1\omega_3 + \frac{1}{A_2}\nu_1\nu_3 - \left\{ \frac{|A_1 - A_2|}{2A_2} |\omega_3| + A_2 \left(\left| \frac{A_1 - A_2}{2A_1A_2} \omega_3 \right| + \varepsilon \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sigma \sigma^T \right\} \omega_2, \end{aligned} \quad (4.22)$$

Перевіримо інваріантність множини M . Достатньо показати, що система (4.17), (4.22) на множині M має розв'язок при будь-яких початкових умовах.

Перепишемо систему (4.17), (4.22), поклавши $\nu_1 = \nu_2 = \omega_1 = \omega_2 = 0$:

$$\begin{aligned} d\omega_3 &= 0, \\ d\nu_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Розв'язком системи буде

$$\begin{aligned} \omega_3(t) &= \text{const}, \\ \nu_3(t) &= \text{const}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Таким чином, четверту умову Теорема 4.2 виконано.

Залишилось перевірити виконання другої умови.

Множина $M_v = \{x | \mathcal{L}V(x) = 0\}$ має вигляд $M_v = \{x | \omega_1 = \omega_2 = 0\}$, тобто

$$\begin{aligned} d\nu_1 &= \omega_3 \nu_2 dt, \\ d\nu_2 &= -\omega_3 \nu_1 dt, \\ x(t) \in M_v : \quad 0 &= -\frac{1}{A_1} \nu_2 \nu_3 dt, \\ 0 &= \frac{1}{A_2} \nu_1 \nu_3, \\ d\omega_3 &= 0. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Нескладно перевірити, що для досить близьких до (4.18) початкових умов усі траєкторії замкненої системи (4.17) з керуванням (4.22) мають властивість $\nu_1 = \nu_2 = 0$.

Більш того, розв'язком системи (4.25) є

$$\begin{aligned} \nu_1(t) &= 0, \\ \nu_2(t) &= 0, \\ \omega_3(t) &= \text{const}, \\ \nu_3(t) &= \text{const}. \end{aligned}$$

Цей самий розв'язок задовольняє систему (4.23).

Тобто, $M_v \setminus M$ не містить цілих траєкторій замкненої системи майже напевно.

Таким чином, за допомогою Теорем 4.1 - 4.2 отримано керування (4.22), що дозволяє розв'язати задачу асимптотичної стабілізації за ймовірністю інваріантної множини $M = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3) : \nu_1 = \nu_2 = \omega_1 = \omega_2 = 0\}$ системи (4.17).

Нижче представлено результати чисельного моделювання замкненої системи (4.17), (4.22) з наступними параметрами: $A_1 = 1, A_2 = 3, A_3 = 2, \varepsilon = 0.01$.

Ці симуляції було виконано в Maple із використанням функції *ItoProcess*(·).

Рисунки 4.2 - 4.3 ілюструють, що компоненти $\omega_1, \omega_2, \nu_1, \nu_2$ прямують до нуля при зростанні часу t , а компоненти ω_3, ν_3 прямують до деякого граничного значення.

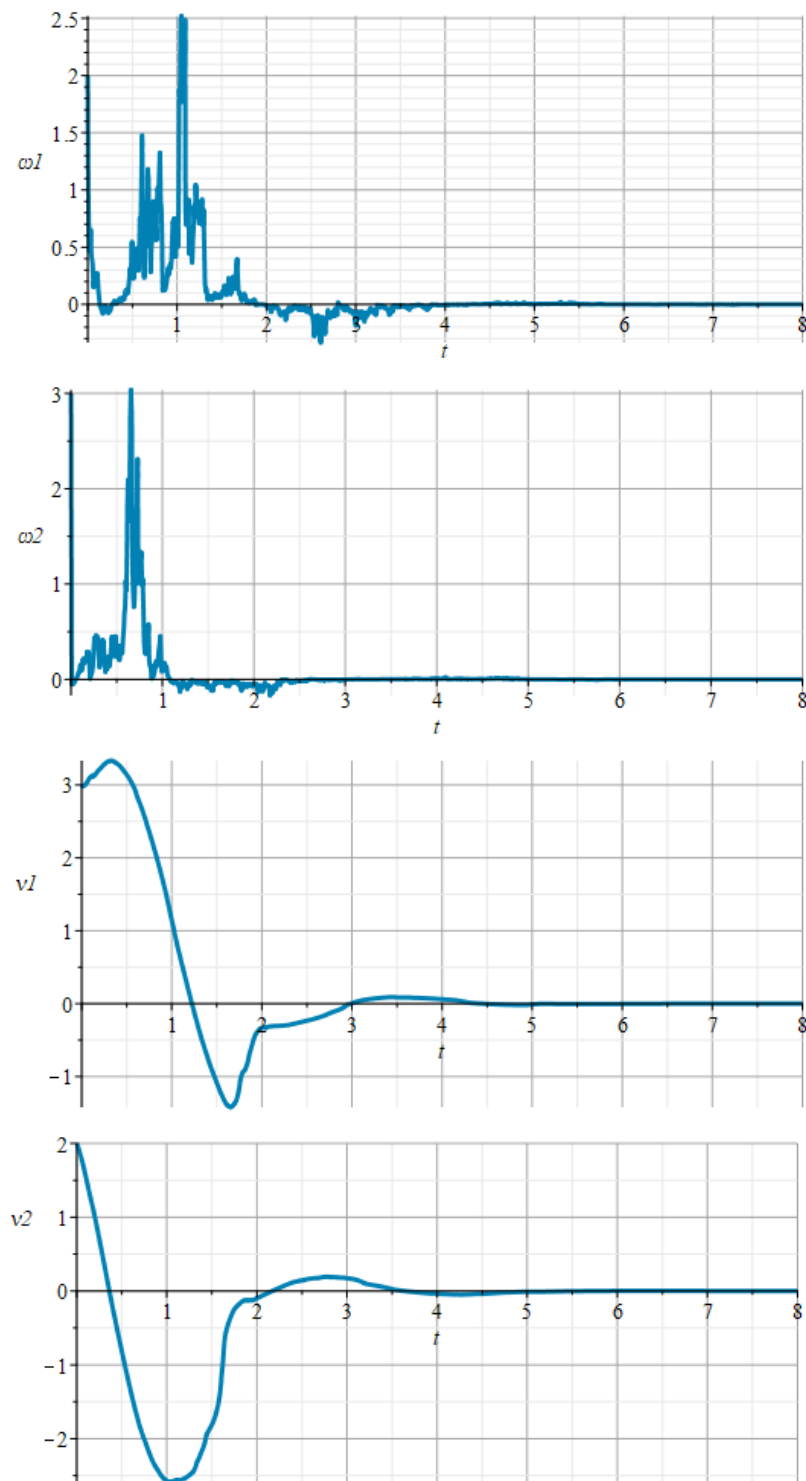


Рис. 4.2: Компоненти $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\nu_1(t)$, $\nu_2(t)$ вибіркової траєкторії замкненої системи (4.17), (4.22).

Таким чином, граничні рухи тіла є рівномірними обертаннями навколо нерухомого вектора орієнтації, що є колінеарним до третьої головної осі інерції.

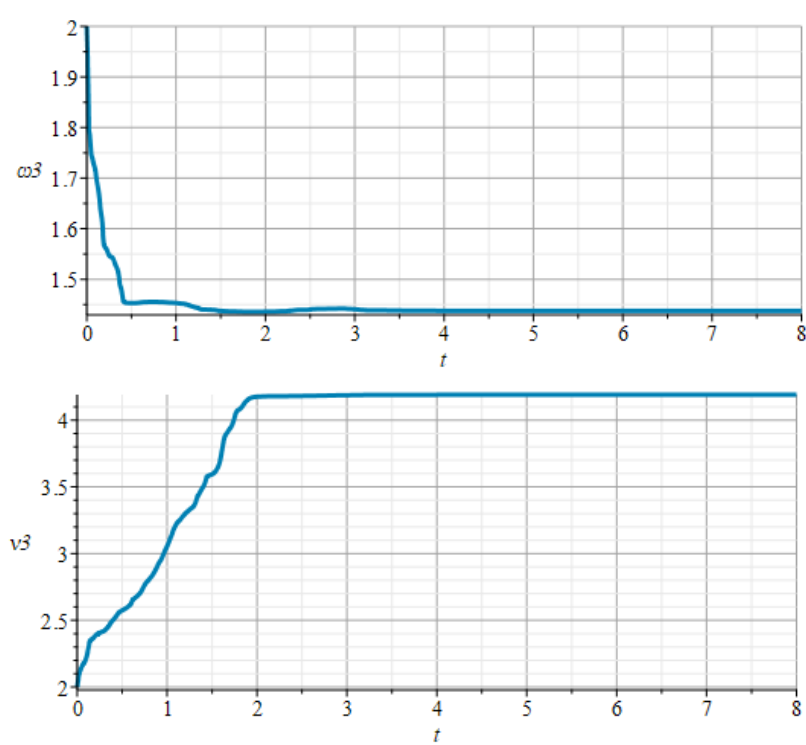


Рис. 4.3: Компоненти $\omega_3(t), \nu_3(t)$ вибіркової траєкторії замкненої системи (4.17), (4.22).

4.4 Одноосьова стабілізація супутника за допомогою двох маховиків

Розглянемо модель супутника, що містить пару симетричних маховиків (див. Рис. 4.4).

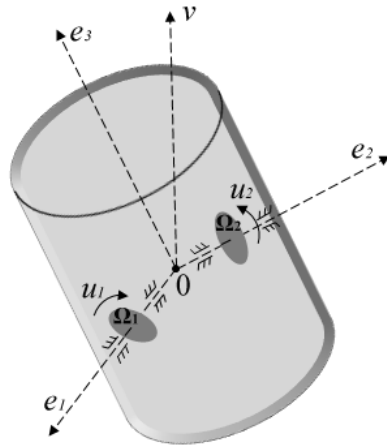


Рис. 4.4: Супутник з двома маховиками.

Рівняння руху із випадковими впливами можуть бути записані у вигляді:

$$\begin{aligned}
 d\omega_1 &= \left(\frac{A_2 - A_3}{A_1 - I_1} \omega_2 \omega_3 + \frac{I_2 \Omega_2}{A_1 - I_1} \omega_3 - \frac{1}{A_1 - I_1} u_1 \right) dt + \omega_1 sdW(t), \\
 d\omega_2 &= \left(\frac{A_3 - A_1}{A_2 - I_2} \omega_1 \omega_3 - \frac{I_1 \Omega_1}{A_2 - I_2} \omega_3 - \frac{1}{A_2 - I_2} u_2 \right) dt + \omega_2 sdW(t), \\
 d\omega_3 &= \left(\frac{A_1 - A_2}{A_3} \omega_1 \omega_2 + \frac{I_1 \Omega_1}{A_3} \omega_2 - \frac{I_2 \Omega_2}{A_3} \omega_1 \right) dt, \\
 d\Omega_1 &= \left(\frac{A_1}{I_1(A_1 - I_1)} u_1 - \frac{A_2 - A_3}{A_1 - I_1} \omega_2 \omega_3 - \frac{I_2 \Omega_2}{A_1 - I_1} \omega_3 \right) dt - \omega_1 sdW(t), \\
 d\Omega_2 &= \left(\frac{A_2}{I_2(A_2 - I_2)} u_2 - \frac{A_3 - A_1}{A_2 - I_2} \omega_1 \omega_3 + \frac{I_1 \Omega_1}{A_2 - I_2} \omega_3 \right) dt - \omega_2 sdW(t), \\
 d\nu_1 &= (\omega_3 \nu_2 - \omega_2 \nu_3) dt, \\
 d\nu_2 &= (\omega_1 \nu_3 - \omega_3 \nu_1) dt, \\
 d\nu_3 &= (\omega_2 \nu_1 - \omega_1 \nu_2) dt,
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

де ω_i — координати вектора кутової швидкості тіла-носія в головній системі координат, Ω_1, Ω_2 — відносні кутові швидкості першого і другого маховиків, відповідно, A_1, A_2, A_3 — головні моменти інерції усієї системи, що складається з тіла-носія і маховиків, I_1, I_2 — моменти інерції першого і другого маховиків,

відповідно, та u_1, u_2 — моменти сил керування, що застосовано до першого та другого маховиків, відповідно. Ми припускаємо, що $A_1 > I_1, A_2 > I_2$. Детермінований випадок систем (4.17), (4.26) було детально досліджено в [72].

Керована система (4.26) з $u_1 = u_2 = 0$ припускає наступний стан рівноваги:

$$\begin{aligned}\omega_i &= 0, \quad \Omega_1 = \text{const}, \quad \Omega_2 = \text{const}, \\ \nu_1 &= \nu_2 = 0, \quad \nu_3 = 1.\end{aligned}\tag{4.27}$$

Розглянута механічна система має геометричний інтеграл:

$$W_1 = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = \text{const},$$

а також інтеграл енергії з $u_1 = u_2 = 0$:

$$W_2 = (A_1\omega_1 + I_1\Omega_1)^2 + (A_2\omega_2 + I_2\Omega_2)^2 + (A_3\omega_3)^2 = \text{const}.$$

Для існування інтегралу моментів

$$W_3 = (A_1\omega_1 + I_1\Omega_1)\nu_1 + (A_2\omega_2 + I_2\Omega_2)\nu_2 + (A_3\omega_3)\nu_3 = \text{const}$$

необхідно, щоб вектор σ , що характеризує випадкові впливи, задовольняв наступну умову: $\sigma \in N$, де N — інваріантний підпростір лінійного оператора Q , що відповідає нульовому власному значенню.

Лінійний оператор Q задано матрицею Гессе функції W_2 :

$$Q = \begin{pmatrix} 2A_1^2 & 0 & 0 & 2A_1I_1 & 0 \\ 0 & 2A_2^2 & 0 & 0 & 2A_2I_2 \\ 0 & 0 & 2A_3^2 & 0 & 0 \\ 2I_1A_1 & 0 & 0 & 2I_2^2 & 0 \\ 0 & 2I_2A_2 & 0 & 0 & 2I_2^2 \end{pmatrix}.\tag{4.28}$$

Знайдемо власні значення даної матриці і власні вектори, що відповідають нульовому власному значенню. Ці вектори мають вигляд

$$\sigma = \left(-\frac{I_1}{A_1}\Omega_1, -\frac{I_2}{A_2}\Omega_2, 0, \Omega_1, \Omega_2 \right)^T.$$

Таким чином, множина N має вигляд

$$N = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \Omega_1, \Omega_2)^T : \omega_1 = -\frac{I_1}{A_1}\Omega_1, \quad \omega_2 = -\frac{I_2}{A_2}\Omega_2, \quad \omega_3 = 0\}.$$

Для стабілізації множини $M = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \Omega_1, \Omega_2, \nu_1, \nu_2, \nu_3) : \nu_1 = \nu_2 = \omega_1 = \omega_2 = 0\}$ системи (4.26) застосуємо Теорему 4.1 з такою функцією Ляпунова:

$$2V(x) = (A_1 - I_1)\omega_1^2 + (A_2 - I_2)\omega_2^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2.$$

Обчислимо функції $a(x), b_1(x), b_2(x)$:

$$\begin{aligned} a(x) &= (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2\omega_3 + I_2\Omega_2\omega_1\omega_3 - I_1\Omega_1\omega_2\omega_3 + \nu_2\omega_1\nu_3 - \\ &\quad - \nu_1\omega_2\nu_3 + \frac{1}{2}\sigma\sigma^T[(A_1 - I_1) + (A_2 - I_2)], \\ b_1(x) &= -\omega_1, \quad b_2(x) = -\omega_2. \end{aligned}$$

Рівняння $a(x) + \sum_{i=1}^k u_i^0 b_i(x) = 0$ запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} &\omega_1 \left\{ A_2\omega_2\omega_3 + I_2\Omega_2\omega_3 + \nu_2\nu_3 + \frac{1}{2}(A_1 - I_1)\sigma\sigma^T - u_1^0 \right\} + \\ &+ \omega_2 \left\{ -A_1\omega_1\omega_3 - I_1\Omega_1\omega_3 - \nu_1\nu_3 + \frac{1}{2}(A_2 - I_2)\sigma\sigma^T - u_2^0 \right\} = 0. \end{aligned}$$

Звідси отримаємо наступний розв'язок

$$\begin{aligned} u_1^0 &= \nu_2\nu_3 + A_2\omega_2\omega_3 + I_2\Omega_2\omega_3 + \frac{1}{2}(A_1 - I_1)\sigma\sigma^T, \\ u_2^0 &= -\nu_1\nu_3 - A_1\omega_1\omega_3 - I_1\Omega_1\omega_3 + \frac{1}{2}(A_2 - I_2)\sigma\sigma^T. \end{aligned}$$

Визначимо керування таким чином:

$$\begin{aligned} u_1 &= \nu_2\nu_3 + (A_2\omega_2 + I_2\Omega_2)\omega_3 + \omega_1\left(h + \frac{1}{2}\sigma\sigma^T(A_1 - I_1) + \frac{|A_1 - A_2|}{2}|\omega_3|\right), \\ u_2 &= -\nu_1\nu_3 - (A_1\omega_1 + I_1\Omega_1)\omega_3 + \omega_2\left(h + \frac{1}{2}\sigma\sigma^T(A_2 - I_2) + \frac{|A_1 - A_2|}{2}|\omega_3|\right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Як і в попередньому прикладі перевіримо виконання умов Теорем 4.1, 4.2.

Маємо:

$$\mathcal{L}V(x) = -\omega_1^2\left(h + \frac{|A_1 - A_2|}{2}|\omega_3|\right) - \omega_2^2\left(h + \frac{|A_1 - A_2|}{2}|\omega_3|\right) \leq 0.$$

Наявність інтегралів W_1, W_2, W_3 та умова $\mathcal{L}V(x) \leq 0$ забезпечують обмеженість розв'язків системи (4.26) з керуванням (4.29).

Замкнена система (4.26), (4.29) на множині M має вигляд:

$$\begin{aligned} d\omega_3 &= 0, \\ d\Omega_1 &= \Omega_2\omega_3 dt, \\ d\Omega_2 &= \Omega_1\omega_3 dt, \\ d\nu_3 &= 0. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Знайдемо розв'язок системи (4.30):

$$\begin{aligned} \omega_3(t) &= c_1 \sqrt{\frac{(A-1-I_1)(A_2-I_2)}{I_1 I_2}} \neq 0, \\ \nu_3(t) &= c_2, \\ \Omega_1(t) &= c_3 \cos(c_1 t) + c_4 \sin(c_1 t), \\ \Omega_2 &= \sqrt{\frac{I_2(A_2-I_2)}{I_1(A_1-I_1)}} c_4 \cos(c_1 t) - c_3 \sin(c_1 t). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Таким чином, для довільних початкових умов з M вираз (4.31) визначає розв'язок системи (4.30) на M при всіх дійсних t , і саме це доводить інваріантність множини M .

Множина M_v має вигляд: $M_v = \{x \mid \omega_1 = \omega_2 = 0\}$, тобто

$$\begin{aligned} d\nu_1 &= \omega_3 \nu_2 dt, \\ d\nu_2 &= -\omega_3 \nu_1 dt, \\ x(t) \in M_v : \quad \nu_2 \nu_3 &= 0, \\ \nu_1 \nu_3 &= 0, \\ d\omega_3 &= 0, \\ d\nu_3 &= 0. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Для досить близьких до стану рівноваги (4.27) початкових умов, усі розв'язки системи (4.26) з керуванням (4.29) задовольняють властивість $\nu_1 = \nu_2 = 0$ майже напевно. Тоді відповідний розв'язок системи (4.32) задається співвідношеннями $\nu_1(t) = 0$, $\nu_2(t) = 0$ і (4.31). Цей розв'язок задовольняє і систему

(4.30). Таким чином, $M_v \setminus M$ майже напевно не містить жодної напівтраєкторії розглянутої замкненої системи, що означає виконання останньої умови Теорема 4.1.

Отже, множина

$$M = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \Omega_1, \Omega_2, \nu_1, \nu_2, \nu_3) : \nu_i = \omega_i = 0, i = 1, 2\}$$

є асимптотично стійкою за ймовірністю для замкненої системи (4.26) з керуванням (4.29).

Продемонструємо результати чисельного моделювання замкненої системи (4.26), (4.29) з параметрами $A_1 = 10, A_2 = 31, A_3 = 22, I_1 = 8, I_2 = 27, \varepsilon = 0.001$.

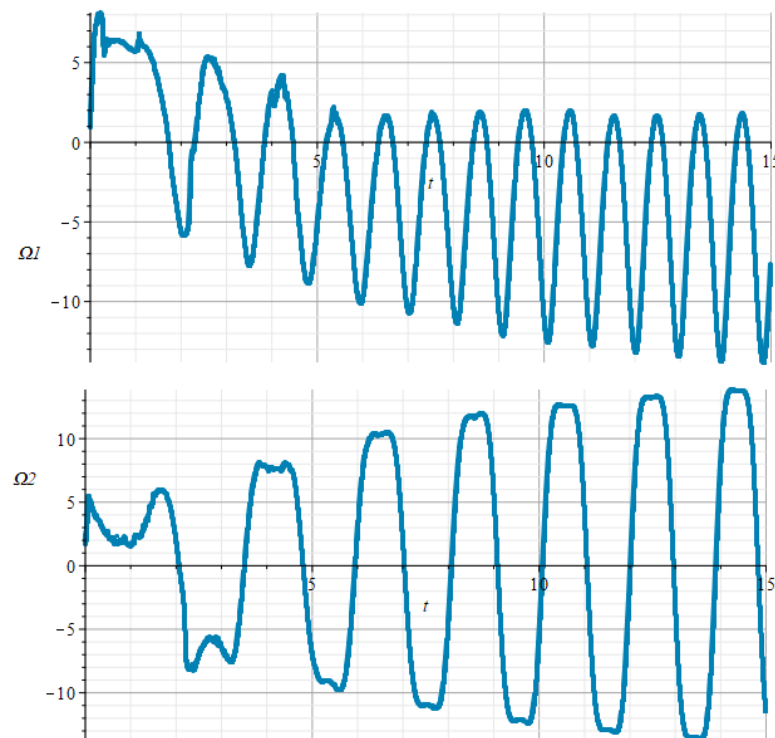


Рис. 4.5: Компоненти $\Omega_i(t)$ вибіркової траєкторії замкненої системи (4.26), (4.29).

Рис. 4.5–4.7 показують, що стабілізовані змінні прямують до нуля з ростом часу.

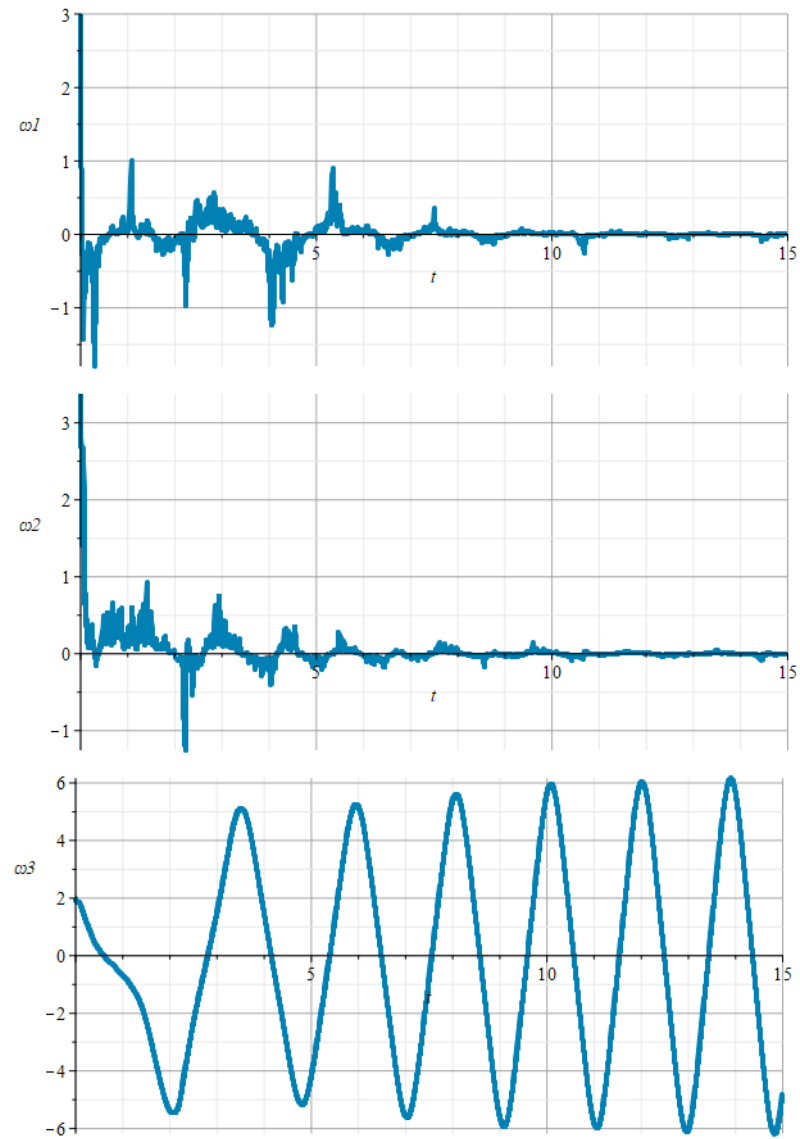


Рис. 4.6: Компоненти $\omega_i(t)$ вибіркової траєкторії замкненої системи (4.26), (4.29).

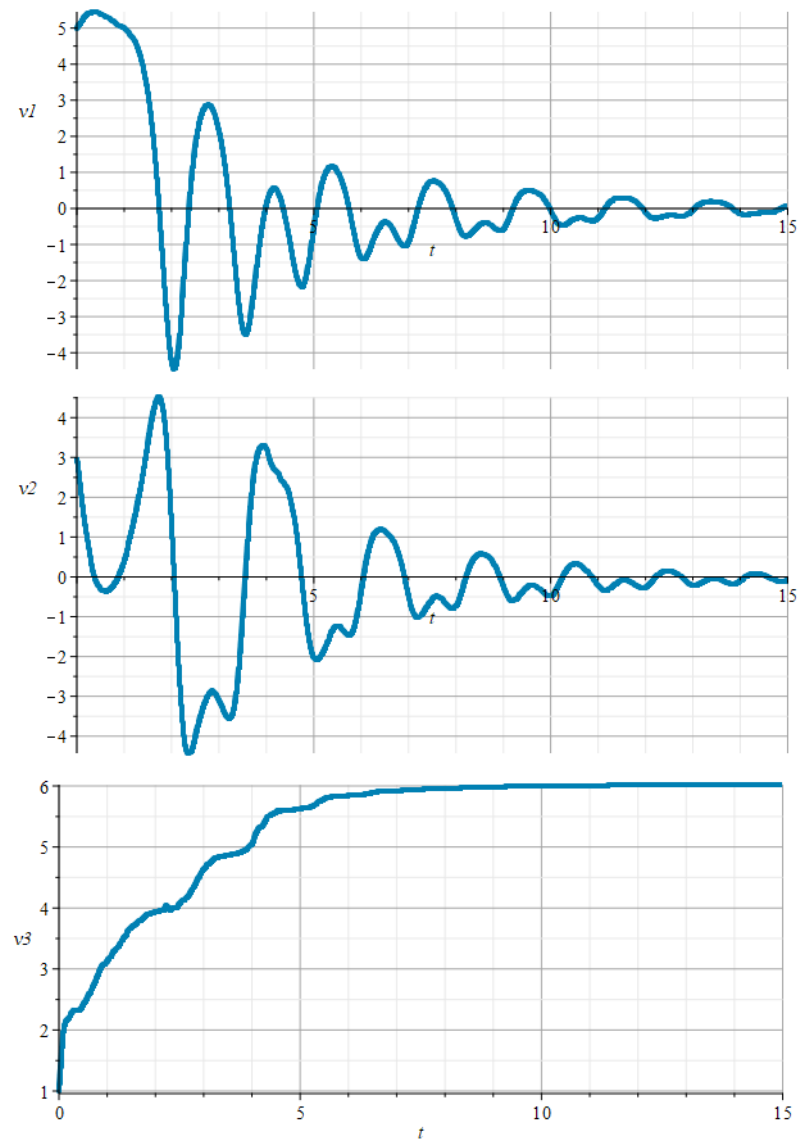


Рис. 4.7: Компоненти $\nu_i(t)$ вибіркової траєкторії замкненої системи (4.26), (4.29).

4.5 Висновки.

Сформулюємо основні результати розділу:

1. Стохастичну модифікацію принципу інваріантності Ла-Салля застосовано для отримання достатніх умов асимптотичної стійкості інваріантних множин систем диференціальних рівнянь з випадковими впливами.
2. Запропоновано конструктивний алгоритм побудови керування для стабілізації інваріантних множин нелінійних диференціальних рівнянь із випадковими впливами.
3. Досліджено проблеми часткової стабілізації руху твердого тіла навколо його центру мас під дією реактивних крутних моментів та руху твердого тіла, що містить пару симетричних маховиків. Відмінною особливістю розглянутих систем є наявність випадкових впливів при керуванні. Ці системи неможливо стабілізувати у класичному сенсі відносно усіх фазових змінних. Тому було в явному вигляді побудовано керування, що дозволяють досягнути асимптотичної стійкості досліджуваних систем відносно частини змінних.
4. Результати стабілізації твердих тіл проілюстровано за допомогою чисельного моделювання.

5 Стабілізація нелінійних систем за допомогою рандомізованого керування

5.1 Постановка задачі

Розглянемо систему нелінійних диференціальних рівнянь в детермінованому випадку:

$$\dot{x}(t) = f(x, u), \quad (5.1)$$

де $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in D = \mathbb{R}^n$ – вектор стану, а $u = (u_1, \dots, u_k)^T \in U = \mathbb{R}^k$ – керування.

Взагалі кажучи, систему (5.1) неможливо стабілізувати за допомогою неперервного керування зі зворотнім зв'язком, оскільки виникає необхідна умова стабілізованості Брокетта [13].

Найбільш відомим прикладом нелінійної повністю керованої системи, що не задовольняє необхідну умову стабілізованості, є інтегратор Брокетта:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2, \\ \dot{x}_3 = x_2 u_1 - x_1 u_2. \end{cases} \quad (5.2)$$

Для стабілізації системи (5.2) в роботах [7, 12] було запропоновано синтез розривного керування; в монографії [84] встановлено, що інтегратор Брокетта можливо стабілізувати в класі імпульсних керувань.

У роботах [44, 45] для дослідження задачі стабілізації системи (5.2) авторами використано неперервне керування із додаванням випадкового процесу.

Нехай задано систему

$$\dot{x}(t) = f(x)dt + g(x)u, \quad (5.3)$$

для якої розглянемо (формально) керування u у вигляді суми детермінованої і стохастичної компонент: $u_i = h_i + k_i(x)\frac{dW_i(t)}{dt}$, де $h, k : D \rightarrow U$, $h(0) = 0$,

$W_i(t)$ — стандартний одновимірний вінерівський процес. Тоді система (5.3) набуває вигляду:

$$dx(t) = (f(x) + g(x)h(x))dt + \sum_{i=1}^k \sigma_i(x)dW_i(t). \quad (5.4)$$

Оператор $\mathcal{L}_h$ будемо визначати наступним чином:

$$\mathcal{L}_h = \sum_{i=1}^n (f(x) + g(x)h)_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$[c_{ij}(x)] = \sigma(x)\sigma^T(x).$$

У подальшому будемо вивчати стійкість тривіального розв'язку (5.4) відносно змінних $x_1, x_2, \dots, x_m$. Позначимо ці змінні $y = (y_1, \dots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m$, а всі інші $z = (z_1, \dots, z_p)^T \in \mathbb{R}^p$, $m + p = n$, тоді $x = (y^T, z^T)^T$, $x_0 = (y_0^T, z_0^T)^T$, та $\|x\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} = (\|y\|^2 + \|z\|^2)^{1/2}$.

Наведене у підрозділі 4.1 припущення про існування глобальних розв'язків систем стохастичних диференціальних рівнянь для всіх $t \geq s$ стикається з прийнятим у теорії стійкості за частиною змінних припущенням про z — продовжуваність розв'язків [98, За], що зазвичай виконується для коректних моделей фізичних процесів, у яких z — компонента розв'язків не прямує до нескінченості за скінченний час.

У цьому розділі буде запропоновано конструктивну побудову керування для рандомізованої системи (5.4), яке дозволить встановити асимптотичну стійкість за ймовірністю стану рівноваги зазначеної системи відносно частини змінних.

У подальшому нам знадобляться такі означення.

Означення 5.1. Функція $V \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ називається y -стохастичною функцією Ляпунова для системи (2.5), якщо існують $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in \mathcal{K}^*$ такі, що

$$\beta_1(\|y\|) \leq V(x) \leq \beta_2(\|y\|),$$

$$\inf_{u \in U} \mathcal{L}_u V(x) \leq -\alpha(\|y\|),$$

для всіх $x \in \mathbb{R}^n$.

Означення 5.2. Функція $V \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ задовольняє властивість малості керування y якщо для кожного $\epsilon > 0$ та $x_0 \in M = \{x | y = 0\}$, існує $\delta > 0$ таке, що

$$x \in B(x_0; \delta) \Rightarrow \inf_{\|u\| < \epsilon} \mathcal{L}_u V(x) \leq -\alpha(\|y\|),$$

де $B(x; \delta)$ позначає δ -окіл точки $x \in \mathbb{R}^n$.

Наступна теорема узагальнює конструктивне доведення теореми Арцтейна [5, 19] на задачу часткової стабілізації стохастичних систем.

Теорема 5.1. [4а.] Нехай $V \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ є y -стохастичною функцією Ляпунова, що задовольняє властивість малості керування.

Тоді існує неперервне керування зі зворотнім зв'язком $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $h(0, z) = 0$, таке, що тривіальний розв'язок відповідної замкненої системи (5.4) з $u = h(x)$ є y -асимптотично стійким за ймовірністю.

Керування $h(x)$ задається наступним чином:

$$h_i(x) = \begin{cases} 0, & b = 0, \\ -\frac{b_i}{\|b\|^2}(a + (a^2 + \|b\|^4)^{\frac{1}{2}}), & b \neq 0, 2(a^2 + \|b\|^4)^{\frac{1}{2}} \geq \alpha(\|y\|), \\ -\frac{b_i}{2\|b\|^2}(2a + \alpha(\|y\|)), & \text{в іншому випадку,} \end{cases} \quad (5.5)$$

де

$$\begin{aligned} a(x) &= \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x) \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_i \partial x_j}, \\ b_i(x) &= \sum_{j=1}^n g_{ji}(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x_j}, \\ b(x) &= (b_1(x), \dots, b_k(x)). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Доведення. Доведення неперервності за ймовірністю керування $h(x)$ в (5.5) відбувається аналогічно до [71]. Для цього будемо використовувати наступне означення.

Означення 5.3. Випадкова функція $h(x)$ є неперервною за ймовірністю в точці $x = x_0$, якщо для будь-якого $\vartheta > 0$ $\lim_{x \rightarrow x_0} P(|h(x) - h(x_0)| > \vartheta) = 0$.

Можна бачити, що керування $h(x)$ є неперервним в кожній точці $D \setminus S$, де $S = \{x \in D | b(x) = 0\}$ і $h(x_0) = 0$.

Тоді для доведення неперервності $h(x)$ достатньо показати:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D \setminus S}} P\{|h(x)| > \vartheta\} = 0, \quad \forall x_0 \in S.$$

Знайдемо спочатку оцінку для $|h(x)|$. Для цього розглянемо два випадки.

1) $y_0 \neq 0$.

$a(x_0) \leq -\alpha(\|y\|) < 0$, оскільки $V(x)$ є y -стохастичною функцією Ляпунова і $b(x) = 0$.

Завдяки безперервності функцій $a(x), b_i(x), \alpha(\|y\|)$ існує достатньо маленький окіл x_0 , в якому $2\sqrt{a^2(x) + \|b\|^4} \geq \alpha(\|y\|)$.

Тоді при $x \notin S$ виконується наступне:

$$|h(x)| = \frac{a(x) + \sqrt{a^2(x) + \|b(x)\|^4}}{\|b(x)\|} \leq \frac{a(x) + |a(x)| + \|b(x)\|^2}{\|b(x)\|} = \|b(x)\|.$$

Отже, $|h(x)| \rightarrow 0$ при $b(x) \rightarrow 0$, тобто при $x \rightarrow x_0$.

2) $y_0 = 0$. За властивістю малості керування для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta(\varepsilon)$, що для всіх $x \in B(x_0; \delta) \cap D$ існує $h(x) : |h(x)| < \varepsilon$, яке задовольняє нерівності

$$a(x) + \sum_{i=1}^m h_i b_i \leq -\frac{1}{2}\alpha(\|y\|).$$

Використовуючи нерівність Коші-Буняковського, отримуємо:

$$a(x) - \varepsilon\|b(x)\| < -\frac{1}{2}\alpha(\|y\|) \Rightarrow \frac{2a(x) + \alpha(\|y\|)}{2b(x)} < \varepsilon,$$

при $x \in B(x_0; \delta) \cap D, b(x) \neq 0$.

Якщо $2\sqrt{(a^2(x) + \|b(x)\|^4)} < \alpha(\|y\|)$, то

$$|h(x)| = \frac{2a(x) + \alpha(\|y\|)}{2\|b(x)\|} < \varepsilon,$$

при $x \in B(x_0; \delta) \cap D, b(x) \neq 0$.

Якщо $2\sqrt{(a^2(x) + \|b(x)\|^4)} \geq \alpha(\|y\|)$, то

$$|h(x)| = \frac{a(x) + \sqrt{(a^2(x) + \|b(x)\|^4)}}{\|b(x)\|} \leq \frac{a(x) + \|a(x)\| + \|b(x)\|^2}{\|b(x)\|} = \|b\|,$$

при $a(x) < 0$.

При $a(x) > 0$:

$$|h(x)| \leq \frac{2a(x)}{\|b(x)\|} + \|b(x)\| \leq (2\varepsilon + \|b(x)\|).$$

Оскільки $b(x)$ неперервна і $b(0) = 0$, то існує таке $\delta_1 > 0$, що $\|b(x)\| < \varepsilon$ при $x \in B(x_0; \delta_1) \cap D$.

Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ при $x \in B(x_0; \delta_2) \cap D$ виконується нерівність $|h(x)| < 3\varepsilon$. Тут $\delta_2(\varepsilon) = \min(\delta(\varepsilon), \delta_1(\varepsilon))$.

Таким чином, у кожному випадку існує таке $\vartheta > 0$ що $|h(x)| < \vartheta$. Отже $\lim_{x \rightarrow x_0} P(|h(x)| > \vartheta) = 0$ і $h(x) \in C(D)$.

Обчислимо оператор $\mathcal{L}_h V$ для (5.4):

$$\mathcal{L}_h V = \begin{cases} a(x), & b = 0, \\ -(a^2(x) + \|b(x)\|^4)^{\frac{1}{2}}, & b \neq 0, 2(a^2 + \|b\|^4)^{\frac{1}{2}} \geq \alpha(\|y\|), \\ -\frac{1}{2}\alpha(\|y\|), & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Оскільки $V(x)$ є y -стохастичною функцією Ляпунова, виконується наступна нерівність:

$$\mathcal{L}_h V \leq -\frac{1}{2}\alpha(\|y\|) \text{ для всіх } x \in \mathbb{R}^n.$$

Використовуючи нерівність Гронвулла, отримаємо:

$$E\|y(t; \xi, s)\|^2 \leq k_1(t - s)e^{\int_s^t k_2 E\|y(p; \xi, s)\|^2 dp} \leq N_1 e^{N_2 \delta^2},$$

де E — математичне сподівання за ймовірнісною мірою $P_{\xi,s}$, $y(t; \xi, s)$ — компоненти y -розв'язку $x(t; \xi, s)$ системи (5.4) за початкових умов $x(s; \xi, s) = \xi$.

Поклавши $\delta = \ln\left(\frac{\epsilon_2 \epsilon_1^2}{N_1}\right)^{\frac{1}{2N_2}}$, отримаємо

$$P\{\sup_{t \geq t_0} \|y(t)\| > \epsilon_1\} \leq \frac{E\|y(t)\|^2}{\epsilon_1^2} < \epsilon_2.$$

Нехай $\tau_\varepsilon = \inf\{t : \|y(t; \xi, s)\| > \varepsilon\}$, $\tau_\varepsilon(t) = \min(\tau_\varepsilon, t)$.

З формули Динкіна (теорема 2.2) випливає, що

$$EV(x(\tau_\varepsilon(t); \xi, s)) - V(\xi) = E \int_s^{\tau_\varepsilon(t)} \mathcal{L}_h V(x(u; \xi, s)) du.$$

Оскільки $\mathcal{L}_h V(x) \leq -\frac{1}{2}\alpha(\|y\|)$, отримаємо

$$EV(x(\tau_\varepsilon(t); \xi, s)) \leq V(\xi), \quad t \geq s. \quad (5.7)$$

Нерівність вище можна записати наступним чином:

$$\int_{\tau_\varepsilon < t} \alpha_1(\|y(\tau_\varepsilon; \xi, s)\|) P_{\xi,s}(d\omega) + \int_{\tau_\varepsilon \geq t} \alpha_1(\|y(t; \xi, s)\|) P_{\xi,s}(d\omega) \leq V(\xi).$$

Отже,

$$\alpha_1(\varepsilon) P_{\xi,s}\{\tau_\varepsilon < t\} \leq V(\xi).$$

З останньої нерівності з урахуванням неперервності функції $V(x)$ та рівності $V(0) = 0$ випливає, що

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} P_{\xi,s}\{\tau_\varepsilon < t\} = 0.$$

Таким чином, розв'язок $x = 0$ системи (5.4) є y -стійким за ймовірністю.

З (5.7) випливає, що випадковий процес $V(x(\tau_\varepsilon(t); \xi, s))$ є невід'ємним супермартінгалом та існує наступна границя

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(\tau_\varepsilon(t); \xi, s)) = \eta \quad (5.8)$$

з ймовірністю 1.

З множини вибірових траєкторій процесу $x(t; \xi, s)$ візьмемо підмножину B вибірових траєкторій таких, що для кожного $x_i(t; \xi, s)$ ($i = 1, \dots, n$) виконується наступна рівність: $\tau_\varepsilon(t) = t, t \in \mathbb{R}^+$.

Тоді з наведених припущень випливає, що

$$\lim_{\xi_y \rightarrow 0} P_{\xi, s} \{B\} = 1, \quad (5.9)$$

де $\xi^T = (\xi_y^T, \xi_z^T)$.

З (5.8) та (5.9) отримаємо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(\tau_\varepsilon(t); \xi, s)) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t; \xi, s)) = \eta. \quad (5.10)$$

Зауважимо, що $V(x)$ є y -стохастичною функцією Ляпунова, отже для всіх траєкторій множини B , крім множини ймовірності 0, виконується наступна властивість:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t; \xi, s)\| = 0.$$

З припущення z -продовжуваності розв'язків та (5.10) маємо: $\eta = 0$.

Таким чином, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t; \xi, s)\| = 0$. З цієї властивості випливає, що тривіальний розв'язок замкненої системи (5.4) є y -асимптотично стійким за ймовірністю.

У наступних підрозділах ми покажемо, що алгоритм побудови керування (5.5), (5.6) може бути застосовано до нелінійних систем із випадковими впливами, що описують динаміку перевернутого маятника з рухомою масою та колісного візка з додатковим ступенем свободи.

5.2 Стабілізація перевернутої маятничкової системи

Для ілюстрації можливого застосування теореми 5.1 розглянемо механічну систему, що складається з перевернутого маятника (тіло-носій) та точкової маси m , що рухається перпендикулярно до вісі симетрії тіла-носія.

Передбачається, що маса m підвішена за допомогою пружини з коефіцієнтом жорсткості κ .

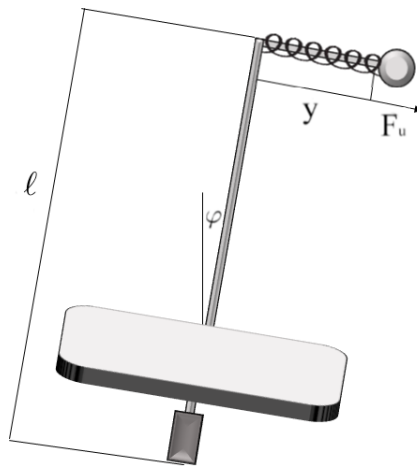


Рис. 5.1: Перевернутий маятник з рухомою масою.

Будемо використовувати наступні позначення: M — маса тіла-носія, φ — кут між віссю симетрії тіла та вертикаллю, y — переміщення точкової маси, та ℓ — відстань між фіксованою точкою та точковою масою m .

Спочатку отримаємо рівняння руху цієї механічної системи, використовуючи рівняння Лагранжа другого роду.

Кінетична енергія системи має вигляд

$$T = \left(\frac{I}{2} + \frac{m(\ell^2 + y^2)}{2} \right) \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} \dot{y}^2 + m\ell\dot{\varphi}\dot{y},$$

де I — момент інерції тіла-носія відносно нерухомої точки.

Потенціальна енергія системи:

$$U = \frac{M\ell g}{2} \cos \varphi + \frac{\kappa}{2} y^2 + mg(\ell \cos \varphi - y \sin \varphi).$$

Тоді лагранжіан цієї системи має вигляд:

$$L = T - U = \left(\frac{I}{2} + \frac{m(\ell^2 + y^2)}{2} \right) \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} \dot{y}^2 + m\ell\dot{\varphi}\dot{y} - \\ - \frac{\kappa}{2} y^2 - \left(\frac{M}{2} + m \right) \ell g \cos \varphi + mgy \sin \varphi.$$

Запишемо рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = F_u,$$

де F_u — керуюча сила, прикладена то маси m .

У розгорнутому виді ці рівняння наведено нижче:

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{I+my^2} (-2my\dot{\varphi}\dot{y} - m\ell y\dot{\varphi}^2 + \kappa\ell y + \frac{M\ell g}{2} \sin \varphi + \\ + mgy \cos \varphi - \ell F_u), \\ \ddot{y} = \frac{\ell}{I+my^2} (2my\dot{\varphi}\dot{y} + m\ell y\dot{\varphi}^2 - \kappa\ell y - \frac{M\ell g}{2} \sin \varphi + \\ + \ell F_u - mgy \cos \varphi) + \frac{I}{I+my^2} (y\dot{\varphi}^2 - \frac{\kappa y}{m} + g \sin \varphi) + \\ + \frac{1}{I+my^2} ((\frac{I}{m} + y^2)F_u + my^3\dot{\varphi}^2 + y^3\kappa + y^2mg \sin \varphi).$$

Зробимо заміну

$$v = \frac{1}{I+my^2} (-2my\dot{\varphi}\dot{y} - m\ell y\dot{\varphi}^2 + \kappa\ell y + \frac{M\ell g}{2} \sin \varphi + mgy \cos \varphi - \ell F_u),$$

тоді отримаємо наступні рівняння з новим параметром керування v :

$$\ddot{\varphi} = v, \\ \ddot{y} = -(\ell + \frac{I+my^2}{m\ell})v + \frac{1}{I+my^2} (2y^3\kappa + \frac{2m+M}{2m}(\frac{I}{m} + y^2)g \sin \varphi) - \frac{2y\dot{y}\dot{\varphi}}{\ell} + \frac{gy \cos \varphi}{\ell}.$$

Перепишемо вищевказані рівняння руху у формі $\dot{x} = f(x) + g(x)v$, де

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi \\ y \\ \dot{\varphi} \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ 0 \\ q(x) \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\ell - \frac{I+my^2}{m\ell} \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

$$q(x) = \frac{1}{I + mx_2^2} \left(2x_2^3 \varkappa + \frac{2m + M}{2m} \left(\frac{I}{m} + x_2^2 \right) g \sin x_1 \right) - \frac{2x_2 x_3 x_4}{\ell} + \frac{gx_2 \cos x_1}{\ell}.$$

Система (5.11) допускає стан рівноваги $x = 0$ при $v = 0$ (верхня рівновага).

Будемо розглядати стабілізацію верхньої рівноваги тіла-носія у сенсі задачі часткової стабілізації відносно змінних (x_1, x_3) , застосуючи керування до точкової маси.

Для урахування випадкових впливів розглянемо керування у вигляді суми детермінованої та стохастичної компонент: $v = u + \lambda x_3 \dot{w}(t)$, де $w(t)$ — стандартний одновимірний вінерівський процес. У результаті цього отримаємо наступну систему стохастичних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_3 dt, \\ dx_2 &= x_4 dt, \\ dx_3 &= u dt + \lambda x_3 dw(t), \\ dx_4 &= \left((-\ell - \frac{I+my^2}{m\ell})u + q(x) \right) dt - (\ell + \frac{I+my^2}{m\ell})\lambda x_3 dw(t), \end{aligned} \tag{5.12}$$

де u розглядається в якості керування.

Надалі будемо вважати всі фазові зміни та механічні параметри безрозмірними.

Оскільки нашою задачею є прямування змінних φ та $\dot{\varphi}$ (тобто x_1 та x_3) до нуля, пропонуємо наступного кандидата у функції Ляпунова:

$$2V(x) = (k_1^2 + k_2^2 + k_2)x_3^2 + 2k_1x_1x_3 + (k_2 + 1)^2x_1^2,$$

де k_1 та k_2 — додатні константи.

Визначимо функції $a(x)$ та $b(x)$ відповідно до (5.6):

$$\begin{aligned} a(x) &= \sum_{i=1}^4 f_i(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 c_{ij}(x) \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \\ &= (k_1x_3 + (k_2 + 1)x_1)x_3 + (k_2^2 + k_1^2 + k_2)\lambda^2x_3^2, \\ b(x) &= (k_2^2 + k_1^2 + k_2)x_3 + k_1x_1. \end{aligned}$$

Згідно з Теоремою 5.1, запропонуємо закон керування зі зворотнім зв'язком для системи (5.12) у вигляді (5.5) з $\alpha(\|y\|) = \gamma\|y\|^2$, $\|y\|^2 = x_1^2 + x_3^2$, $\gamma > 0$.

Усі умови зазначеної теореми виконано, отже стан рівноваги $x = 0$ відповідної замкненої системи (5.5), (5.12) є асимптотично стійким за ймовірністю відносно змінних (x_1, x_3) .

На Рис. 5.2 представлено результати моделювання руху для замкненої системи (5.12), (5.5) при $k_1 = 2$, $k_2 = 1$. Ці обчислення було виконано в програмі Maple із використанням функції *ItoProcess*(·).

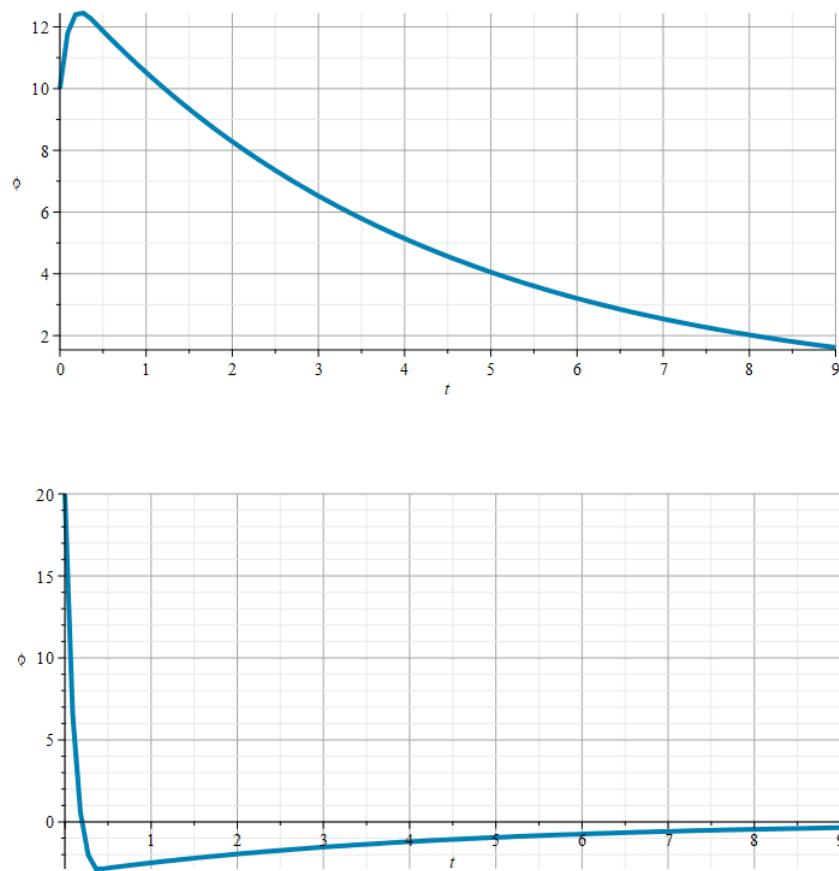


Рис. 5.2: Компоненти x_1 та x_3 вибіркової траєкторії замкненої системи (5.5), (5.12).

5.3 Стабілізація колісного візка за допомогою стохастичного керування зі зворотнім зв'язком

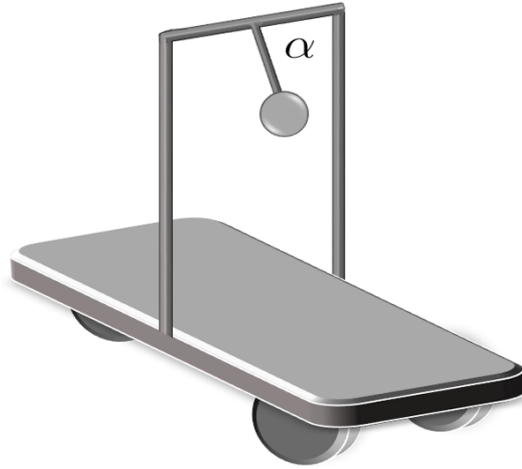


Рис. 5.3: Колісний візок з рухомою масою.

Розглянемо математичну модель колісного візка, позиція якого визначається трьома координатами: (x_1, x_2) — координати точки перетину осі симетрії візка з віссю, на яку насаджені колеса, x_3 — кут між віссю симетрії та віссю x_1 [32]. Над точкою (x_1, x_2) встановлено циліндричний шарнір, вісь якого направлено по вісі симетрії візка (Рис. 5.3). На цьому шарнірі може обертатися невагомий стрижень, до іншого кінця якого прикріплена точкова маса. Позначимо кут між вертикаллю та ланкою шарніра через α .

Рух візка описується наступними рівняннями:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (u_1 + u_2) \cos x_3, \\ \dot{x}_2 &= (u_1 + u_2) \sin x_3, \\ \dot{x}_3 &= (u_1 - u_2),\end{aligned}\tag{5.13}$$

тут вектор $u = (u_1, u_2)^T \in \mathbb{R}^2$ розглядається у якості керування.

Запишемо рівняння Лагранжа другого роду відносно кута α :

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l} \sin \alpha + \cos \alpha (u_1 - u_2) \left((u_1 - u_2) \sin \alpha - \frac{u_1 + u_2}{l} \right).\tag{5.14}$$

Зауважимо, що представлена модель належить до класу неголономних систем, котрі, як добре відомо, неможливо стабілізувати в околі стану рівно-

ваги за допомогою стаціонарного неперервного детермінованого керування зі зворотнім зв'язком (див. [11]). Виходячи з цього, у подальшому ми будемо вивчати задачу стабілізації даної системи відносно частини змінних у стохастичному сенсі.

Позначимо відносну кутову швидкість стрижня через $\omega = \dot{\alpha}$ і виконаємо наступну заміну змінних у (5.13), (5.14):

$$\begin{aligned} z_1 &:= x_3, \\ z_2 &:= x_1 \cos x_3 + x_2 \sin x_3, \\ z_3 &:= x_1 \sin x_3 - x_2 \cos x_3, \\ z_4 &:= \alpha, \\ z_5 &:= \omega, \\ \nu_1 &:= u_1 - u_2, \\ \nu_2 &:= (u_1 + u_2) - (u_1 - u_2)z_3. \end{aligned}$$

Тоді рівняння руху набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \nu_1, \\ \dot{z}_2 &= \nu_2, \\ \dot{z}_3 &= \nu_1 z_2, \\ \dot{z}_4 &= z_5, \\ \dot{z}_5 &= (\nu_2 + \nu_1 z_3 + \nu_1 \sin z_4)\nu_1 \cos z_4 - \sin z_4. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Рандомізуємо систему (5.15) шляхом додавання випадкового процесу при синтезі керування

$$\begin{aligned} \nu_1 &= v_1, \\ \nu_2 &= v_2 + \lambda z_2 \dot{w}(t), \end{aligned}$$

де $\dot{w}(t)$ розглядається формально як похідна від стандартного одновимірного вінерівського процесу $w(t)$.

Перепишемо стохастичну систему із керуванням наступним чином:

$$\begin{aligned}
dz_1 &= v_1 dt, \\
dz_2 &= v_2 dt + \lambda z_2 dw(t), \\
dz_3 &= v_1 z_2 dt, \\
dz_4 &= z_5 dt, \\
dz_5 &= ((v_2 + v_1 z_3 + v_1 \sin z_4) v_1 \cos z_4 - \sin z_4) dt + \lambda z_2 v_1 \cos z_4 dw(t).
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Розглядаємо задачу часткової стабілізації системи (5.16) відносно змінних z_1, z_2, z_3 .

Для синтезу стабілізуючого керування v_1, v_2 , оберемо таку функцію Ляпунова [44]:

$$V(z) = 2z_3^2 - \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2)(1 + z_3^2) + 2 \left(\frac{|z_1^2 + z_2^2|}{2} \right)^{1 + \frac{z_3^2}{2}}.$$

Визначимо функції $a(z), b_1(z), b_2(z)$ згідно з (5.6):

$$\begin{aligned}
a(z) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^5 c_{ij}(z) \frac{\partial^2 V(z)}{\partial z_i \partial z_j} = \frac{1}{2} \lambda^2 z_2^2 \frac{\partial^2 V(z)}{\partial z_2^2}, \\
b_1(z) &= -z_1(z_3^2 + 1) + \frac{4 \left(\frac{|z_1^2 + z_2^2|}{2} \right)^{1 + \frac{z_3^2}{2}} (1 + \frac{z_3^2}{2}) z_1}{|z_1^2 + z_2^2|} + z_2 (2 - (z_1^2 + z_2^2) z_3 + \\
&\quad + z_2 \left(2 - (z_1^2 + z_2^2) z_3 + 2 \left(\frac{|z_1^2 + z_2^2|}{2} \right)^{1 + \frac{z_3^2}{2}} z_3 \ln \left(\frac{|z_1^2 + z_2^2|}{2} \right) \right), \\
b_2(z) &= -z_2(z_3^2 + 1) + \frac{4 \left(\frac{|z_1^2 + z_2^2|}{2} \right)^{1 + \frac{z_3^2}{2}} (1 + \frac{z_3^2}{2}) z_2}{|z_1^2 + z_2^2|}, \\
b(z) &= (b_1(z), b_2(z)).
\end{aligned}$$

Таким чином, умови Теорема 5.1 виконуються при вищевказаному визначенні $a(x), b(x)$, та $\alpha(\|y\|) = \gamma \|y\|^2$, $\|y\|^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$, $\gamma > 0$.

Отже, тривіальний розв'язок розглянутої замкненої системи є асимптотично стійким відносно змінних z_1, z_2, z_3 .

Результати чисельного моделювання системи (5.16) зі зворотнім зв'язком (5.5) представлено на Рис. 5.4-5.5.

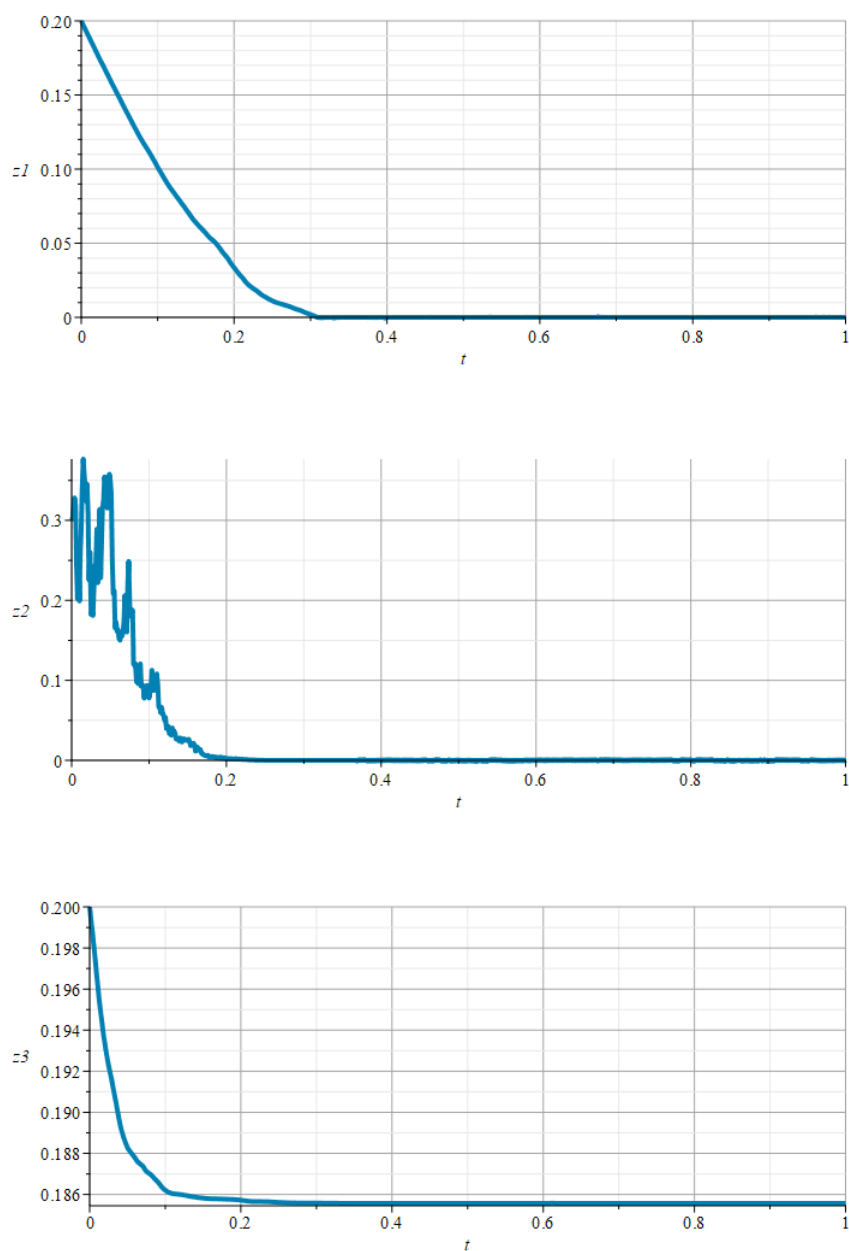


Рис. 5.4: Компоненти z_1, z_2, z_3 вибіркової траєкторії замкненої системи (5.5), (5.16).

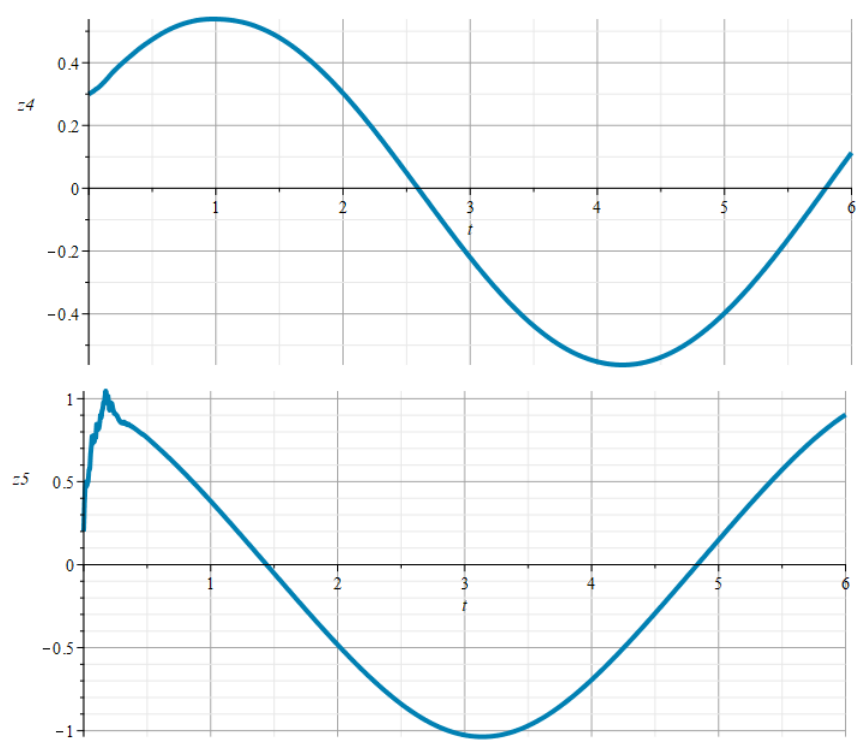


Рис. 5.5: Компоненти z_4, z_5 вибіркової траєкторії замкненої системи (5.5), (5.16).

5.4 Балансуючий робот

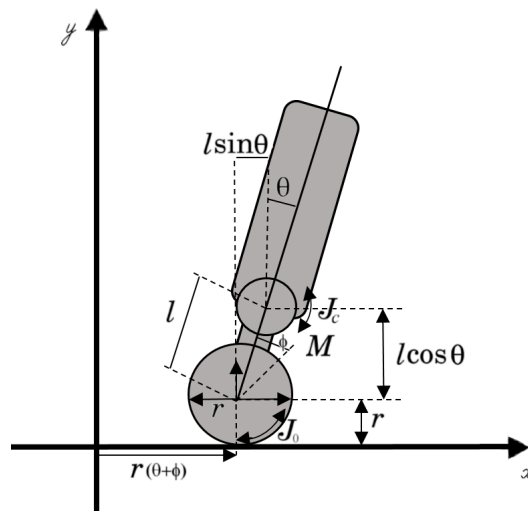


Рис. 5.6: Балансуючий робот.

Розглянемо математичну модель балансуєчого робота (Рис. 5.6). Будемо використовувати наступні позначення:

m_0 — маса колеса;

m — маса тіла-носія;

θ —кут відхилення тіла-носія від вертикальної вісі;

ϕ — кут повороту колеса відносно тіла-носія;

J_c —центральний момент інерції тіла-носія;

J_0 —центральний момент інерції колеса;

l — відстань від вісі обертання колеса до центру мас тіла-носія;

r —радіус колеса.

Запишемо вираз для кінетичної K та потенціальної U енергій системи:

$$K = \frac{1}{2}(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2[(m_0 + m)r^2 + J_0] + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2(ml^2 + J_c) + mlr\dot{\theta}(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \cos \theta.$$

$$U = mgl \cos \theta.$$

Тоді лагранжіан системи має вигляд:

$$L = K - U = \frac{1}{2}(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2[(m_0 + m)r^2 + J_0] + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2(ml^2 + J_c) + ml \cos \theta[r(\dot{\theta} + \dot{\phi}) - g].$$

Залишемо рівняння Лагранжа другого роду розглянутої механічної системи:

$$\begin{aligned} (J_0 + m_0 r^2 + m(r^2 + lr \cos \theta))\ddot{\theta} + (J_0 + (m + m_0)r^2)\ddot{\phi} - mlr\dot{\theta}^2 \sin \theta &= M, \\ (J_0 + J_c + m_0 r^2 + m(l^2 + r^2 + 2lr \cos \theta))\ddot{\theta} + (J_0 + m_0 r^2 + mr(r + l \cos \theta))\ddot{\phi} \\ - mlr\dot{\theta}^2 \sin \theta - mgl \sin \theta &= 0. \end{aligned}$$

Тоді рівняння руху, роз'язані відносно старшої похідної, можна записати у наступному вигляді:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ \frac{q_1(x)}{q(x)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{q_2(x)}{q(x)} \end{pmatrix} u, \quad (5.17)$$

де $q_1(x) = ml(rx_4^2 + g) \sin x_3$, $q_2(x) = mlr \cos x_3 + (m + m_0)r^2 + J_0$, $q(x) = 2mlr \cos x_3 + ml^2 + (m + m_0)r^2 + J_0 + J_c$, $u \in \mathbb{R}$ — керування, $x \in \mathbb{R}^4$ — вектор

стану: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}.$

Рандомізуємо систему (5.17) шляхом додавання випадкового процесу при синтезі керування: $u = v + \lambda x_4 \dot{w}(t)$, де $\dot{w}(t)$ розглядається формально як похідна від стандартного одновимірного вінерівського процесу $w(t)$.

Перепишемо отриману стохастичну систему із керуванням наступним чином:

$$d \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \\ x_4 \\ \frac{q_1(x) - q_2(x)u}{q(x)} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda x_4 \\ 0 \\ -\frac{q_2(x)}{q(x)} \lambda x_4 \end{pmatrix} dw(t). \quad (5.18)$$

Надалі будемо вивчати задачу часткової стабілізації системи (5.18) відносно змінних x_3, x_4 .

Для синтезу стабілізуючого керування v будемо вважати всі фазові змінні та механічні параметри безрозмірними величинами й оберемо таку функцію Ляпунова:

$$V = x_3^2 + 5x_4^2 + 20x_3x_4.$$

Визначимо функції $a(x), b(x)$ згідно з (5.6):

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{10(mlr \cos x_3 - (m + m_0)r^2 + J_0)^2 \lambda^2 x_4^2 + ml(r^2 x_4 + g) \sin x_3 (20x_3 + 10x_4)}{2mlr \cos x_3 + ml^2 + (m + m_0)r^2 + J_0 + J_c} \\ &\quad + x_4(2x_3 + 20x_4), \\ b(x) &= \frac{(20x_3 + 10x_4)(mlr \cos x_3 + (m + m_0)r^2 + J_0)}{2mlr \cos x_3 + ml^2 + (m + m_0)r^2 + J_0 + J_c}. \end{aligned}$$

Тоді детермінована компонента керування набуває вигляду:

$$v = -\frac{1}{b}(a + (a^2 + \|b\|^4)^{\frac{1}{2}}), \quad (5.19)$$

де функції $a(x)$ та $b(x)$ визначено вище.

Усі умови теореми 6.1 виконано, отже стан рівноваги $x = 0$ відповідної замкненої системи (5.18), (5.19) є асимптотично стійким за ймовірністю відносно змінних (x_1, x_3) .

На Рис. 5.7 представлено результати моделювання для замкненої системи (5.18), (5.19). Ці чисельні ілюстрації було виконано в програмі Maple із використанням функції *ItoProcess*(·).

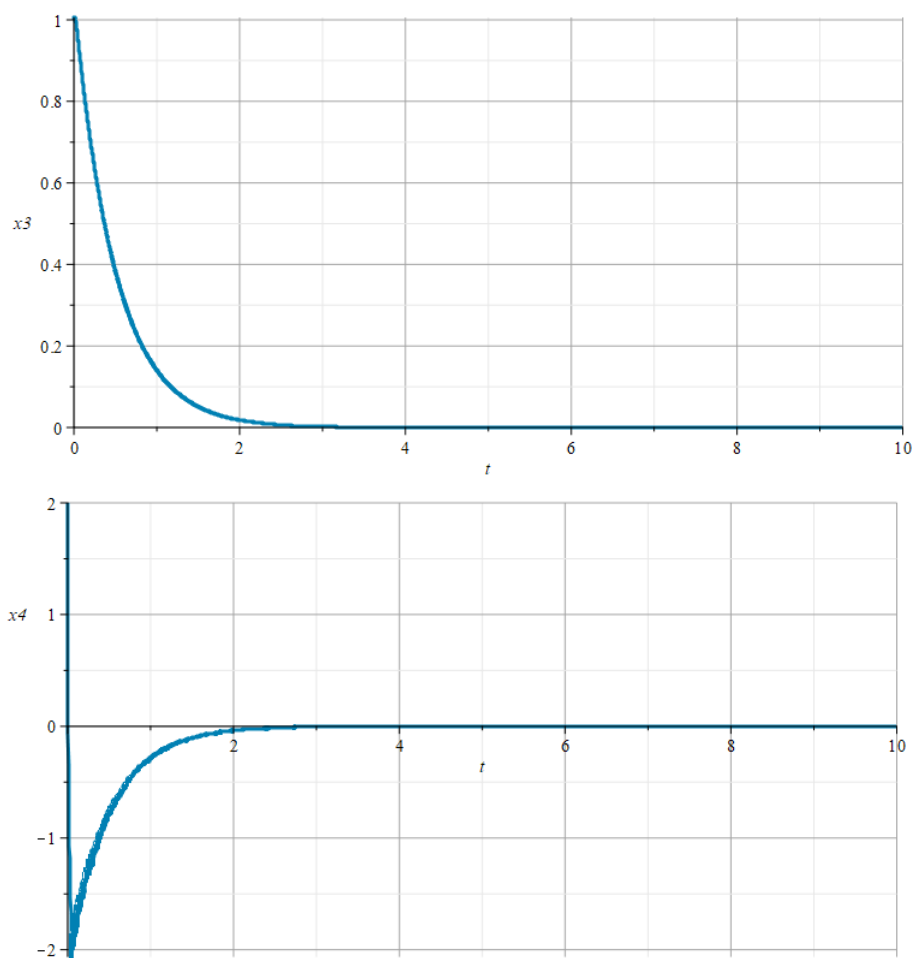


Рис. 5.7: Компоненти x_3, x_4 вибіркової траєкторії системи (5.18), (5.19).

5.5 Висновки.

1. Конструктивне доведення теореми Арцтейна узагальнено на проблему часткової стабілізації стохастичних диференціальних рівнянь Іто.
2. Показано можливість застосування запропонованого методу побудови керування для нелінійних систем із випадковими впливами, що описують динаміку перевернутого маятника, колісного візка з рухомою масою та балансуючого робота.
3. Ефект стабілізації руху із випадковими впливами проілюстровано за допомогою чисельного моделювання в програмі Maple із використанням функції `ItoProcess()`.

6 Стабілізація руху за частиною змінних вздовж заданих траєкторій

6.1 Постановка задачі

У даному розділі досліджується клас нелінійних систем вигляду

$$\dot{x}(t) = f_0(t, x) + \sum_{k=1}^m f_k(x)u_k, \quad (6.1)$$

де $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ позначає вектор стану, $u = (u_1, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$ — керування, $m < n$, $f_0 \in C(\mathbb{R}^+ \times D)$, $f_i \in C^2(D)$. Основною метою розділу є дослідження задач часткової стабілізації траєкторій системи вздовж заданої кривої.

Вектор стану будемо представляти, як було зазначено у попередніх розділах, у вигляді $x = (y^T, z^T)^T \in \mathbb{R}^n$, де $y \in \mathbb{R}^{n_1}$, $z \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$.

Введемо також наступні позначення

Для функцій $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ визначатимемо:

1) похідну Лі

$$\mathcal{L}_g f(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x + sg(x)) - f(x)}{s};$$

2) дужки Лі

$$[f, g](x) = \mathcal{L}_f g(x) - \mathcal{L}_g f(x).$$

Функцію $f : \mathbb{R}^+ \times D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ будемо називати такою, що

- 1) задовольняє умову Ліпшиця відносно x рівномірно по t на множині $\tilde{D} \subseteq D$, якщо існує таке $L > 0$, що $\|f(t, x) - f(t, \tilde{x})\| \leq L\|x - \tilde{x}\|$ для всіх $x, \tilde{x} \in \tilde{D}$, $t \geq 0$;
- 2) є обмеженою рівномірно по t на множині $\tilde{D} \subseteq D$, якщо існує таке $M > 0$, що $\|f(t, x)\| \leq M$ для всіх $x \in \tilde{D}$, $t \geq 0$.

Наведемо також декілька означень.

Означення 6.1. Нехай задано функцію $y^* : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$ та керування зі зворотнім зв'язком $u^\varepsilon(t, x, y^*) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^m$, що залежить від параметру $\varepsilon > 0$.

Тоді π_ε — розв'язком системи (6.1) з початковими умовами $x_0 \in \mathbb{R}^n$ та керуванням $u = u^\varepsilon(t, x, y^*)$ називається така абсолютно неперервна функція $x(t) \in \mathbb{R}^n$, визначена при $t \in [0, +\infty)$, що $x(0) = x^0$ та

$$\dot{x}(t) = f_0(t, x) + \sum_{k=1}^m u_k^\varepsilon(t, x(t_j), y^*(t_j)) f_k(x(t)), \quad t \in I_j = [t_j, t_{j+1}]. \quad (6.2)$$

для кожного $j = 0, 1, 2, \dots$

Означення 6.2.

Однопараметрична сім'я непорожніх множин $\{Y_t\}_{t \geq 0}$, $Y_t \subset \mathbb{R}^n$ називається асимптотично стійкою для системи (6.1) зі зворотним зв'язком $u^\varepsilon(t; x, y^*)$, якщо виконуються наступні умови:

- 1) для кожного $\Delta > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при кожному $t_0 \geq 0$ та $x^0 \in B_\delta(Y_{t_0})$ π_ε — розв'язок $x(t)$ системи (6.1) з початковою умовою $x(t_0) = x^0$ є однозначно визначеним та $x(t) \in B_\Delta(Y_t)$ для всіх $t \in [t_0; +\infty)$;
- 2) для деякого $\delta > 0$ і для кожного $\Delta > 0$ існує таке $t_1 \geq 0$, що при кожному $t_0 \geq 0$ та $x^0 \in B_\delta(t_0)$, π_ε — розв'язок $x(t)$ системи (6.1) з початковою умовою $x(t_0) = x^0$ задовольняє властивість $x(t) \in B_\Delta(Y_t)$ для всіх $t \in [t_0 + t_1, \infty)$.

Зауважимо, що означення π_ε розв'язків для задач стабілізації руху неголономних систем використовується, наприклад, в роботах [15, 26, 77]. Концепцію стійкості сім'ї множин запропоновано в роботах [23, 24, 35]. У данному розділі наведені означення застосовуються для розвинення нового методу часткової стабілізації руху афінних за керуванням систем вздовж заданої кривої.

А саме, основна задача цього розділу формулюється наступним чином.

Для заданої кривої $y^* \in C(\mathbb{R}^+; D_y)$, $D_y \subseteq \mathbb{R}^n$ та значення $p > 0$, метою є побудова такого керування $u^\varepsilon(t, x, y^*)$, що сім'я множин

$$Y_t^p = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \|y^*(t) - y\| < p, z \in \mathbb{R}^{n_2} \right\}_{t \geq 0}. \quad (6.3)$$

є асимптотично стійкою у сенсі Означення 6.2 для відповідної замкненої системи (6.1) з $u = u^\varepsilon(t, x, y^*)$. Зауважимо, що визначення сім'ї множин у вигляді (6.3) гарантує саме стабілізацію за частиною змінних (у-стабілізацію).

Тут і далі вважатимемо D_y непорожньою областю, а значення $p > 0$ таким, що $B_p(y^*(t)) \subset D_y$ для всіх $t \geq 0$.

6.2 Побудова стабілізуючого керування

Для наочності перепишемо систему (6.1) наступним чином:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= g_0(t, x) + \sum_{k=1}^m g_k(x) u_k, \\ \dot{z}(t) &= h_0(t, x) + \sum_{k=1}^m h_k(x) u_k, \end{aligned} \quad (6.4)$$

де функції $g_0 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$, $h_0 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$, $g_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$, $h_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$, $k = \overline{1, m}$, є такими, що векторні поля системи (6.1) мають вигляд

$$f_0(x) = \begin{pmatrix} g_0(t, x) \\ h_0(t, x) \end{pmatrix}, \quad f_k(x) = \begin{pmatrix} g_k(x) \\ h_k(x) \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Введемо деякі припущення щодо векторних полів системи (6.4) та кривої $y^*(t) \subset D_y$.

Припущення. Нехай D — множина вигляду $D = D_y \times \mathbb{R}^{n_2}$. Припускаємо, що

- 1.1) Функція $f_0(t, x)$ є неперервною при $t \geq 0$, $x \in D$, функції $g_0 \in C^1(\mathbb{R}^+ \times D)$, $g_k \in C^2(D)$, $h_k \in C^1(D)$.

1.2) Для всіх $x \in D$ виконується наступна рангова умова керованості за змінними y :

$$\text{span} \left\{ (g_i(x))_{i \in S_1}, (I_{n_1 \times n} [f_{i_1}, f_{i_2}])_{(i_1, i_2) \in S_2} \right\} = \mathbb{R}^{n_1}, \quad (6.5)$$

де $S_1 \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$, $S_2 \subseteq \{1, 2, \dots, m\}^2$.

1.3) Функція $y^* : \mathbb{R}^+ \rightarrow D_y$ є ліпшицевою в $\mathbb{R}^+$.

Крім того, на кожній компактній множині $\tilde{D}_y \subset D_y$ виконуються властивості:

- функції f_{k_1} , $L_{f_{k_2}} g_{k_1}$, $L_{f_{k_3}} L_{f_{k_2}} f_{k_1}$ є обмеженими в $\tilde{D} = \tilde{D}_y \times \mathbb{R}^{n_2}$ для всіх $k_1, k_2, k_3 \in \overline{1, m}$;
- функції f_k задовольняють умову Ліпшиця в $\tilde{D}$ $k \in \overline{1, m}$;
- функції f_0 , $L_{f_0} g_0$, $L_{f_{k_1}} g_0$, $L_{f_0} g_{k_1}$, $L_{f_0} L_{f_{k_2}} g_{k_1}$ та $\frac{\partial g_0}{\partial t}$ є обмеженими рівномірно по t в $\tilde{D}$ $k_1, k_2 \in \overline{1, m}$;
- функція f_0 задовольняють умову Ліпшиця відносно x рівномірно по t в $\tilde{D}$.

Для y -стабілізації системи (6.1) вздовж заданої кривої $y^*(t)$ будемо використовувати наступне залежне від часу керування зі зворотнім зв'язком:

$$u_k^\varepsilon(t, x, y^*) = \sum_{i \in S_1} \phi_i^k(t, x, y^*) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{(i_1, i_2) \in S_2} \phi_{i_1, i_2}^k(t, x, y^*), \quad k = \overline{1, m}, \quad (6.6)$$

де

$$\begin{aligned} \phi_i^k(t, x, y^*) &= \delta_{ki} a_i(x, y^*), \\ \phi_{i_1, i_2}^k(t, x, y^*) &= 2\sqrt{\pi \kappa_{i_1 i_2} |a_{i_1 i_2}(x, y^*)|} \left(\delta_{ki_1} \cos \left(\frac{2\pi \kappa_{i_1 i_2} t}{\varepsilon} \right) \right. \\ &\quad \left. + \delta_{ki_2} \text{sign}(a_{i_1 i_2}(x, y^*)) \sin \left(\frac{2\pi \kappa_{i_1 i_2} t}{\varepsilon} \right) \right). \end{aligned}$$

Тут ε — достатньо малий додатний параметр, який буде визначено далі, $\kappa_{i_1 i_2} \in \mathbb{N}$ є попарно різними, δ_{ij} — символ Кронекера та

$\left((a_i(x, y^*))_{i \in S_1}, (a_{i_1 i_2}(x, y^*))_{(i_1 i_2) \in S_2}\right)^T = a(x, y^*)$ – вектор-стовпець коефіцієнтів керування, який визначається наступним чином:

$$a(x, y^*) = -\alpha \mathcal{F}^{-1}(x)(y - y^*), \quad \alpha > 0. \quad (6.7)$$

У формулі (6.7), $\mathcal{F}^{-1}(x)$ позначає матрицю, обернену до $n_1 \times n_1$ матриці

$$\mathcal{F}(x) = \left((g_i(x))_{i \in S_1}, (I_{n_1 \times n}[f_{i_1}, f_{i_2}])_{(i_1 i_2) \in S_2}\right).$$

Підкреслимо, що рангова умова керованості (6.5) забезпечує невинродженість матриці $\mathcal{F}(x)$.

Слід зазначити, що керування типу (6.6) було запропоновано для задачі стабілізації руху в статті [77] та застосовано до низки задач планування руху та відстеження траєкторій в роботах [26, 78] та ін.

Основним результатом цього розділу є наступна теорема.

Теорема 6.1. Припустимо, що система (6.4) та крива $y^* \in C(\mathbb{R}^+; D_y)$ задовольняють припущення 1.1)-1.3) і нехай множини $\{Y_t^p\}_{t \geq 0}$ визначено формулою (6.3) з заданим $p > 0$.

Тоді існує таке $\bar{\varepsilon} > 0$, що для кожного $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ сімейство множин $\{Y_t^p\}_{t \geq 0}$ є асимптотично стійким для системи (6.4) з керуванням $u_k = u_k^\varepsilon(t, x, y^*)$, заданим формулами (6.6).

Доведення.

У доведенні вважатимемо $t_0 = 0$. Через припущення 1.3) про рівномірну обмеженість функцій $g_0(t, x)$, $\frac{\partial g_0}{\partial t}(t, x)$, такий вибір t_0 не обмежує загальності.

Введемо кілька позначень, які будуть використовуватися в доведенні.

Для заданого $p > 0$, оберемо δ, δ' таким чином, що $0 < \delta < \delta'$ та $B_{\delta'}(y^*(t)) \subset D_y$ для всіх $t \geq 0$, позначимо $D' = B_{\delta'}(y^*(t)) \times \mathbb{R}^{n_2}$. Зазначимо, що δ, δ' можуть бути довільними додатними параметрами, а вимога $B_{\delta'}(y^*(t)) \subset D_y$ лише забезпечує коректність визначення множини початкових значень.

З припущення 1.3) випливає існування таких додатних констант $M_g, M_h, M_{g_0}, M_{h_0}, L_g, L_h, L_{g_0}, L_{h_0}, M_{g_2}, M_{g_{20}}, L_{g_{20}}, M_{g_3}, M_{g_{30}}$, що для всіх $x, \tilde{x} \in D', t, \tilde{t} \geq 0$ та $k_1, k_2, k_3 \in \overline{1, m}$,

$$\begin{aligned}
\|y^*(t) - y^*(\tilde{t})\| &\leq L^*|t - \tilde{t}|, \\
\|g_0(t, x)\| &\leq M_{g_0}, \quad \|g_k(x)\| \leq M_g, \\
\|h_0(t, x)\| &\leq M_{h_0}, \quad \|h_k(x)\| \leq M_h, \\
\|g_0(t, x) - g_0(t, \tilde{x})\| &\leq L_{g_0}\|x - \tilde{x}\|, \\
\|g_k(x) - g_k(\tilde{x})\| &\leq L_g\|x - \tilde{x}\|, \\
\|h_0(t, x) - h_0(t, \tilde{x})\| &\leq L_{h_0}\|x - \tilde{x}\|, \\
\|h_k(x) - h_k(\tilde{x})\| &\leq L_h\|x - \tilde{x}\|, \\
\|L_{f_{k_2}}g_{k_1}\| &\leq M_{g_2}, \\
\max \{ \|L_{f_0}g_0(t, x)\|, \|L_{f_k}g_0(t, x)\|, \|L_{f_0}g_k(t, x)\| \} &\leq M_{g_{20}}, \\
\left\| \frac{\partial g_0(t, x)}{\partial t} \right\| &\leq L_{g_{20}}, \\
\|L_{f_{k_3}}L_{f_{k_2}}g_{k_1}(x)\| &\leq M_{g_3}, \\
\|L_{f_0}L_{f_{k_2}}g_{k_1}(t, x)\| &\leq M_{g_{30}}.
\end{aligned}$$

Крім того, з припущення 1.2) випливає існування такої додатної константи μ , що $\|\mathcal{F}^{-1}(x)\| \leq \mu$ для всіх $x \in D'$ де $\mathcal{F}^{-1}(x)$ – матриця обернена до $\mathcal{F}(x)$.

Нехай $x^0 = (y^{0T}, z^{0T})^T \in \overline{B_\delta(Y_\theta^p)}$, позначимо

$$U^\varepsilon = \max_{0 \leq t \leq \varepsilon} \sum_{i=1}^m |u_i^\varepsilon(t, x^0, y_0^*)|.$$

Використовуючи (6.7) та нерівність Гельдера, можна показати, що для будь-якого $x^0 \in \overline{B_\delta(Y_\theta^p)}$ значення U^ε можна оцінити наступним чином:

$$U^\varepsilon \leq c_1\|y^0 - y_0^*\| + \frac{c_2}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\|y^0 - y_0^*\|} \leq c_u\sqrt{\frac{\|y^0 - y_0^*\|}{\varepsilon}}, \quad (6.8)$$

де $c_1 = \sqrt{|S_1|}\alpha\mu$, $c_2 = 2\sqrt{2\alpha\pi\mu} \left(\sum_{(j_1j_2) \in S_2} (\kappa_{j_1j_2})^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{4}}$ та $c_u = c_1\sqrt{\varepsilon(p + \delta)} + c_2$.

На першому кроці доведення покажемо, що всі розв'язки системи (6.4) з початковими умовами з $\overline{B_\delta(Y_\theta^p)}$ є коректно визначеними на інтервалі часу $[0, \varepsilon]$ з деяким достатньо малим $\varepsilon > 0$.

Використовуюючи інтегральне представлення y -компоненти розв'язків системи (6.4) з початковими умовами $x^0 \in B_\delta(Y_\theta^p)$, отримаємо

$$\begin{aligned} \|y(t) - y^0\| &= \left\| \int_0^t g_0(s, x(s)) ds + \sum_{k=1}^m \int_0^t g_k(x(s)) u_k(s) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|g_0(s, x^0)\| ds + \int_0^t \|g_0(s, x(s)) - g_0(s, x^0)\| ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \int_0^t \|g_k(x(s)) - g_k(x^0)\| |u_k(s)| ds + \sum_{k=1}^m \int_0^t \|g_k(x^0) u_k(s)\| ds \\ &\leq (M_{g_0} + M_g U^\varepsilon) t + (L_0 + L_g U^\varepsilon) \left(\int_0^t \|y(s) - y^0\| ds + \int_0^t \|z(s) - z^0\| ds \right). \end{aligned}$$

Аналогічно, маємо:

$$\|z(t) - z^0\| \leq (M_{h_0} + U^\varepsilon M_h) t + (L_{h_0} + U^\varepsilon L_h) \int_0^t (\|y(s) - y^0\| + \|z(s) - z^0\|) ds.$$

Застосовуючи нерівність Гронуолла–Беллмана до обох отриманих нами оцінок, отримуємо:

$$\begin{aligned} \|y(t) - y^0\| &\leq \left((M_{g_0} + U^\varepsilon M_g) t + (L_{g_0} + U^\varepsilon L_g) \int_0^t \|z(s) - z^0\| ds \right) e^{(L_0 + L_g U^\varepsilon) t}, \\ \|z(t) - z^0\| &\leq \left((M_{h_0} + U^\varepsilon M_h) t + (L_{h_0} + U^\varepsilon L_h) \int_0^t \|y(s) - y^0\| ds \right) e^{(L_{h_0} + U^\varepsilon L_h) t}. \end{aligned}$$

Таким чином, для будь-якого $t \in [0, \varepsilon]$, $x^0 \in B_\delta(Y_\theta^p)$

$$\|y(t) - y^0\| \leq e^{c_g} \left(M_{g_0} \varepsilon + M_g c_u \sqrt{\varepsilon \|y^0 - y_0^*\|} + c_g \int_0^t \|z(s) - z^0\| ds \right), \quad (6.9)$$

$$\|z(t) - z^0\| \leq e^{c_h} \left(M_{h_0} \varepsilon + M_h c_u \sqrt{\varepsilon \|y^0 - y_0^*\|} + c_h \int_0^t \|y(s) - y^0\| ds \right), \quad (6.10)$$

де $c_g = L_{g_0} \varepsilon + L_g c_u \sqrt{\varepsilon(p + \delta)}$, $c_h = L_{h_0} \varepsilon + L_h c_u \sqrt{\varepsilon(p + \delta)}$.

Підставимо (6.10) в (6.9), отримаємо:

$$\|y(t) - y^0\| \leq e^{c_g} \left(M_{g_0} \varepsilon + M_g c_u \sqrt{\varepsilon \|y^0 - y_0^*\|} + c_g e^{c_h} (M_{h_0} \varepsilon^2 \right.$$

$$+M_h c_u \varepsilon \sqrt{\varepsilon \|y^0 - y_0^*\|} + c_h \int_0^t \int_0^s \|y(p) - y^0\| dp ds \Big) \Big) .$$

Тоді інтегрування частинами в останньому члені наведеної оцінки дає наступний результат:

$$\begin{aligned} \|y(t) - y^0\| \leq e^{c_g} \Big(M_{g_0} \varepsilon + c_g e^{c_h} M_{h_0} \varepsilon^2 + c_u \sqrt{\varepsilon \|y^0 - y_0^*\|} (M_g + c_g e^{c_h} M_h \varepsilon) \\ + c_g c_h e^{c_g + c_h} \varepsilon \int_0^t \|y(s) - y^0\| ds \Big) . \end{aligned}$$

Знову застосуємо нерівність Гронуолла—Беллмана. Бачимо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ і для всіх $t \in [0, \varepsilon]$

$$\|y(t) - y^0\| \leq c_{y_1} \sqrt{\varepsilon \|y^0 - y_0^*\|} + c_{y_2} \varepsilon, \quad (6.11)$$

де

$$c_{y_1} = e^{\varepsilon c_g c_h e^{c_g + c_h}} c_u (M_g + c_g e^{c_h} M_h \varepsilon) e^{c_g},$$

$$c_{y_2} = e^{\varepsilon c_g c_h e^{c_g + c_h}} c_u (M_{g_0} + c_g e^{c_h} M_{h_0} \varepsilon) e^{c_g}.$$

З урахуванням отриманої оцінки нерівність (6.10) набуває вигляд:

$$\|z(t) - z^0\| \leq c_{z_1} \sqrt{\varepsilon \|y^0 - y_0^*\|} + \varepsilon c_{z_2}, \quad (6.12)$$

де $c_{z_1} = e^{c_h} (M_h c_u + \varepsilon c_h c_{y_1})$, $c_{z_2} = e^{c_h} (M_{h_0} + \varepsilon c_h c_{y_2})$.

Зауважимо, що в оцінках (6.11) і (6.12) коефіцієнти $c_{y_1}, c_{y_2}, c_{z_1}, c_{z_2}$ є монотонно зростаючими по відношенню до ε і δ .

Оцінки (6.11) і (6.12) забезпечують коректну визначеність розв'язків системи (6.4) в D' на часовому інтервалі $t \in [0, \varepsilon]$. А саме, оцінка (6.12) свідчить, що z -компоненти розв'язків системи (6.4) з початковими умовами $x^0 \in \overline{B_\delta(Y_\theta^p)}$ не виходить на нескінченність за скінчений проміжок часу (тобто відсутній так званий ефект "blow-up").

Для того, щоб показати, що $y(t) \in B_\delta(y^*(t))$ для всіх $t \in [0, \varepsilon]$ застосуємо оцінку (6.11).

Тому для всіх $t \in [0, \varepsilon]$,

$$\begin{aligned} \|y(t) - y^*(t)\| &\leq \|y(t) - y^0\| + \|y^*(t) - y_0^*\| + \|y^0 - y_0^*\| \\ &\leq c_{y_1} \sqrt{\varepsilon \|y^0 - y_0^*\|} + c_{y_2} \varepsilon + L^* \varepsilon + p + \delta. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Тож для забезпечення коректної визначеності розв'язків на D' , залишається показати, що для кожного $t \in [0, \varepsilon]$

$$\|y(t) - y^*(t)\| \leq \text{dist}(y^*(t), \partial D') = p + \delta'.$$

Оскільки $\delta < \delta'$, можемо визначити ε_0 як додатний корінь рівняння

$$c_{y_1} \sqrt{\varepsilon(p + \delta')} + \varepsilon(c_{y_2} + L^*) = \delta' - \delta.$$

А саме,

$$\varepsilon_0 = \left(\sqrt{\left(\frac{c_{y_1} \sqrt{p + \delta'}}{2(c_{y_2} + L^*)} \right)^2 + \frac{\delta' - \delta}{c_{y_2} + L^*} - \frac{c_{y_1} \sqrt{p + \delta'}}{2(c_{y_2} + L^*)}} \right)^2.$$

Тоді для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, розв'язки системи (6.4) з керуванням (6.6) та початковими умовами $x^0 \in B_\delta(Y_0^p)$ є коректно визначеними на D' для всіх $t \in [0, \varepsilon]$.

Наступним кроком є вибір такого ε , з яким відстань між $y(t)$ та $y^*(t)$ не зростає, тобто $\|y(\varepsilon) - y^*(\varepsilon)\| < \|y^0 - y_0^*\|$ після $t = \varepsilon$.

Для цього відзначимо, що кожен розв'язок системи (6.4) з початковими умовами $x^0 \in B_\delta(Y_0^p)$ та керуванням (6.6) можна розкласти в ряд Чена—Флісса [25, 34]. Розглянемо y -компоненту відповідного зображення розв'язку за допомогою ряду Чена—Флісса:

$$\begin{aligned} y(\varepsilon) &= y^0 + \varepsilon \mathcal{F}(x^0) a(x^0, y_0^*) + \int_0^\varepsilon \left(g_0(t, x) + \sum_{k=1}^m g_k(x) u_k^\varepsilon(t, x, y^*) \right) dt \\ &\quad - \varepsilon \mathcal{F}(x^0) a(x^0, y_0^*) = y^0 - \varepsilon \alpha(y - y^*) + \varepsilon g_0(0, x^0) \\ &\quad + \sigma_1(\varepsilon, x^0) + r_0(\varepsilon) + r_1(\varepsilon), \end{aligned} \quad (6.14)$$

де

$$\begin{aligned}
\sigma_1(\varepsilon, x^0) &= -\varepsilon \mathcal{F}(x^0) a(x^0, y_0^*) + \sum_{k=1}^m g_k(x^0) \int_0^\varepsilon u_k(s_1) ds_1 \\
&+ \sum_{k_1, k_2=1}^m L_{f_{k_2}} g_{k_1}(x^0) \int_0^\varepsilon \int_0^{s_1} u_{k_1}(s_2) u_{k_2}(s_2) ds_2 ds_1, \\
r_0(\varepsilon) &= \int_0^\varepsilon \int_0^{s_1} \left(L_{f_0} g_0(s_2, x(s_2)) + \frac{\partial g_0(s_2, x(s_2))}{\partial s_2} \right. \\
&+ \left. \sum_{k=1}^m L_{f_k} g_0(s_2, x(s_2)) u_k(s_2) + L_{f_0} g_k(s_2, x(s_2)) u_k(s_1) \right) ds_2 ds_1, \\
r_1(\varepsilon) &= \sum_{k_1, k_2=1}^m \int_0^t \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} (L_{f_0} L_{f_{k_2}} g_{k_1}(x(s_3)) \\
&+ \sum_{k_3=1}^m L_{f_{k_3}} L_{f_{k_2}} g_{k_1}(x(s_3)) u_{k_3}(s_3)) u_{k_1}(s_1) u_{k_2}(s_2) ds_3 ds_2 ds_1.
\end{aligned}$$

Побудуємо оцінки для $\|\sigma_1(\varepsilon, x^0)\|$, $\|r_0(\varepsilon)\|$, $\|r_1(\varepsilon)\|$.

Обчислюючи інтеграли в $\sigma_1(\varepsilon, x^0)$ та враховуючи (6.6), отримуємо

$$\begin{aligned}
\sigma_1(\varepsilon, x^0) &= -\varepsilon \mathcal{F}(x^0) a(x^0, y_0^*) + \sum_{k=1}^m \varepsilon g_k(x^0) a_k(x^0, y_0^*) \\
&+ \varepsilon \sum_{(k_1, k_2) \in S_2} I_{[n_1 \times n]}[f_{k_1}, f_{k_2}] a_{k_1 k_2}(x^0, y_0^*) + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{(k_1, k_2) \in S_1} L_{f_{k_2}} g_{k_1}(x^0) a_{k_1}(x^0, y_0^*) a_{k_2}(x^0, y_0^*) \\
&+ \frac{\varepsilon^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{k_1 \in S_1} a_{k_1}(x^0, y_0^*) \sum_{k_2=1}^m I_{[n_1 \times n]}[f_{k_1}, f_{k_2}] \sum_{j: (j, k_2) \in S_2} \sqrt{\frac{\|a_{jk_2}(x^0, y_0^*)\|}{\kappa_{jk_2}}} \text{sign}(a_{jk_2}(x^0, y_0^*)) \\
&= \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{(k_1, k_2) \in S_1} L_{f_{k_2}} g_{k_1}(x^0) a_{k_1}(x^0, y_0^*) a_{k_2}(x^0, y_0^*) \\
&+ \frac{\varepsilon^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{k_1 \in S_1} a_{k_1}(x^0, y_0^*) \sum_{k_2=1}^m I_{[n_1 \times n]}[f_{k_1}, f_{k_2}] \sum_{j: (j, k_2) \in S_2} \sqrt{\frac{\|a_{jk_2}(x^0, y_0^*)\|}{\kappa_{jk_2}}} \text{sign}(a_{jk_2}(x^0, y_0^*)).
\end{aligned}$$

Тоді з припущення 1.3),

$$\|\sigma_1(\varepsilon, x^0)\| \leq \frac{\varepsilon^2 M_{g_2}}{2} \|a(x^0, y_0^*)\|^2 + \frac{2\varepsilon^{\frac{3}{2}} M_{g_2}}{\sqrt{\pi}} \|a(x^0, y_0^*)\|^{\frac{3}{2}} \sum_{j_1=1}^m \left(\sum_{(j_2, j_1) \in S_2} \kappa_{j_2 j_1}^{-\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{4}}.$$

Використовуючи визначення $a(x^0, y_0^*)$, маємо

$$\|\sigma_1(\varepsilon, x^0)\| \leq c_\sigma \varepsilon^{3/2} \|y_0^* - y^0\|^{3/2},$$

де

$$c_\sigma = \frac{\sqrt{\varepsilon} M_{g_2} \alpha^2 \mu^2}{2} \sqrt{p + \delta} + \frac{2 M_{g_2} (\alpha \mu)^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{j_1=1}^m \left(\sum_{(j_2, j_1) \in S_2} \kappa_{j_2 j_1}^{-\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{4}},$$

за умови, що $x^0 \in B_\delta(Y_0^p)$.

Для отримання оцінок виразів $\|r_0(\varepsilon)\|$ та $\|r_1(\varepsilon)\|$ застосуємо припущення 1.3):

$$\|r_0(\varepsilon)\| \leq c_{r_0} \varepsilon^{\frac{3}{2}}.$$

$$\|r_1(\varepsilon)\| \leq c_{r_1} \varepsilon^{\frac{3}{2}} \|y^0 - y_0^*\|,$$

де $c_{r_0} = \frac{1}{2}(\varepsilon L_{2_0} + \sqrt{\varepsilon} M_{2_0}(\sqrt{\varepsilon} + c_u \sqrt{p + \delta}))$, $c_{r_1} = \frac{1}{6} c_u^2 (M_{g_{3_0}} \sqrt{\varepsilon} + M_{g_3} c_u \sqrt{p + \delta})$.

Проаналізуємо значення $\|y(\varepsilon) - y^*(\varepsilon)\|$. З (6.2),

$$\begin{aligned} y(\varepsilon) - y^*(\varepsilon) &= y^0 - \varepsilon \alpha (y^0 - y_0^*) + \varepsilon g_0(0, x^0) + \sigma_1(\varepsilon, x^0) + r_0(\varepsilon) + r_1(\varepsilon) - y^*(\varepsilon) + y_0^* - y_0^* \\ &= (1 - \varepsilon \alpha)(y^0 - y_0^*) - (y^*(\varepsilon) - y_0^*) + \varepsilon g_0(0, x^0) + \sigma_1(\varepsilon, x^0) + r_0(\varepsilon) + r_1(\varepsilon). \end{aligned}$$

З припущення 1.3) та отриманих вище оцінок для $\|\sigma_1(\varepsilon, x^0)\|$, $\|r_0(\varepsilon)\|$, $\|r_1(\varepsilon)\|$,

$$\begin{aligned} \|y(\varepsilon) - y^*(\varepsilon)\| &\leq (1 - \varepsilon \alpha) \|y^0 - y_0^*\| + L^* \varepsilon + \varepsilon M_{g_0} \\ &\quad + c_\sigma \varepsilon^{\frac{3}{2}} \|y^0 - y_0^*\|^{\frac{3}{2}} + c_{r_0} \varepsilon^{\frac{3}{2}} + c_{r_1} \varepsilon \frac{3}{2} \|y^0 - y_0^*\| \\ &\leq \|y^0 - y_0^*\| (1 - \varepsilon(\alpha - c_\sigma \sqrt{\varepsilon(p + \delta)} - c_{r_1} \sqrt{\varepsilon})) + \varepsilon(L^* + M_{g_0} + c_{r_0} \sqrt{\varepsilon}), \end{aligned}$$

за умов, що $\varepsilon < \varepsilon_1 = \frac{1}{\alpha}$ та $x^0 \in B_\delta(y_0^p)$.

Таким чином ми маємо наступну оцінку:

$$\|y(\varepsilon) - y^*(\varepsilon)\| \leq (1 - \varepsilon(\alpha - \sqrt{\varepsilon} q)) \|y_0 - y_0^*\| + \varepsilon d,$$

де $q = c_\sigma \sqrt{p + \delta} + c_{r_1}$ та $d = L^* + M_{g_0} + c_{r_0} \sqrt{\varepsilon}$ монотонно зростають відносно ε та δ .

Покажемо притягання y -компонент розв'язку до p -околу кривої $y^*(t)$.

Слід відзначити, що використовуючи оцінку (6.13), вибором достатньо малого $\varepsilon > 0$ можна забезпечити наступну властивість: якщо $x^0 \in Y_0^{\frac{p}{2}}$, то $x(t) \in Y_t^p$ для всіх $t \in [0, \varepsilon]$. Для цього визначимо ε_2 як додатний корінь рівняння

$$c_{y_1} \sqrt{\frac{\varepsilon p}{2}} + \varepsilon(c_{y_2} + L^*) = \frac{p}{2},$$

тобто

$$\varepsilon_2 = \frac{p(\sqrt{c_{y_1}^2 + 4(c_{y_2} + L^*)} - c_{y_1})^2}{8(c_{y_2} + L^*)^2}.$$

Тоді з (6.13)

$$\begin{aligned} \|y(t) - y^*(t)\| &\leq \|y(t) - y^0\| + \|y^*(t) - y_0^*\| + \|y^0 - y_0^*\| \\ &\leq c_{y_1} \sqrt{\varepsilon \|y^0 - y_0^*\|} + \varepsilon c_{y_2} + \varepsilon L^* + \frac{p}{2} \leq p, \end{aligned}$$

за умови, що $\|y^0 - y_0^*\| \leq \frac{p}{2}$ та $\varepsilon \leq \varepsilon_2$.

Визначимо $\varepsilon_3 = \left(\frac{\alpha - \lambda p - 2d}{pq}\right)^2$ для довільного $\lambda \in (0, \alpha - \frac{2d}{p})$.

Тоді для будь-якого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$, $x^0 \in B_\delta(Y_0^p)$,

$$\|y(\varepsilon) - y^*(\varepsilon)\| \leq \left(1 - \varepsilon \left(\lambda + \frac{2d}{p}\right)\right) \|y^0 - y_0^*\| + \varepsilon d. \quad (6.15)$$

Розглянемо два можливих випадки:

- 1) Якщо $x^0 \in Y_0^{\frac{p}{2}}$, тоді, як зазначено вище, $\|y(t) - y^*(t)\| \leq p$ для всіх $t \in [0, \varepsilon]$, тобто $x(t) \in Y_t^p$ для всіх $t \in [0, \varepsilon]$
- 2) Припустимо, що $\|y^0 - y_0^*\| \geq \frac{p}{2}$. Тоді

$$\begin{aligned} \|y(\varepsilon) - y^*(\varepsilon)\| &\leq \left(1 - \varepsilon \left(\lambda + \frac{2d}{p}\right)\right) \|y^0 - y_0^*\| + \frac{\varepsilon d \|y^0 - y_0^*\|}{\|y^0 - y_0^*\|} \\ &\leq \left(1 - \varepsilon \left(\lambda + \frac{2d}{p}\right)\right) \|y^0 - y_0^*\| + \frac{2d\varepsilon \|y^0 - y_0^*\|}{p} = (1 - \varepsilon\lambda) \|y^0 - y_0^*\|. \end{aligned}$$

Таким чином, $\|y(\varepsilon) - y^*(\varepsilon)\| \leq \|y^0 - y_0^*\| \leq p + \delta$ та $x(\varepsilon) \in B_\delta(Y_\varepsilon^p) \subset D'$.

Застосовуючи знову наведену вище аргументацію для $x(\varepsilon)$ з таким самим вибором $\lambda \in \left(0, \alpha - \frac{2d}{p}\right)$ та $\varepsilon \ln \varepsilon = \{\frac{1}{\lambda}, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_3\}$ отримуємо, що розв'язки системи (6.4) з $x^0 \in B_\delta(Y_0^p)$ є коректно визначеними на D при $t \in [0, 2\varepsilon]$.

Крім того, ми можемо знову розглянути два випадки:

2.1) якщо $x(\varepsilon) \in Y_0^{\frac{p}{2}}$, тобто $\|y(\varepsilon) - y^*(\varepsilon)\| \leq \frac{p}{2}$, то $\|y(t) - y^*(t)\| \leq p$ при $t \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$;

2.2) якщо $\|y(\varepsilon) - y^*(\varepsilon)\| \geq \frac{p}{2}$, то

$$\|y(2\varepsilon) - y^*(2\varepsilon)\| \leq (1 - \varepsilon\lambda)\|y(\varepsilon) - y^*(\varepsilon)\|.$$

Повторюючи всі наведені кроки, можна зробити висновок, що розв'язки системи (6.4) з керуванням (6.6) та початковими умовами $x^0 \in \overline{B_\delta(Y_0^p)}$ є коректно визначеними на D для всіх $t \geq 0$. Крім того, якщо $x^0 \in Y_0^{\frac{p}{2}}$, то $x(t) \in Y_0^p$ для всіх $t \geq 0$. Якщо $x^0 \in \overline{B_\delta(Y_0^p)} \setminus Y_0^{\frac{p}{2}}$, тоді існує таке $N \in \mathbb{N}$, що $\|y(t) - y^*(t)\| > p$ для кожного $t = 0, \varepsilon, 2\varepsilon, \dots, (N-1)\varepsilon$ і $\|y(t) - y^*(t)\| \leq \frac{p}{2}$ для всіх $t \in [N\varepsilon, \infty]$.

Залишилось описати поведінку $y(t)$ при $t \in [0, N\varepsilon]$.

Як доведено раніше, при $t = 0, \varepsilon, 2\varepsilon, \dots, (N-1)\varepsilon$ маємо такі оцінки:

$$y(j\varepsilon) - y^*(j\varepsilon) \leq (1 - \varepsilon\lambda)^j \|y^0 - y_0^*\| \leq e^{-\lambda j \varepsilon} \|y^0 - y_0^*\|,$$

для $j = 0, 1, \dots, N-1$.

Для довільного $t \in [0, N\varepsilon]$, позначимо через $t_{in} = \left[\frac{t}{\varepsilon}\right]$ цілу частину $\frac{t}{\varepsilon}$.

Зауважимо, що $t - t_{in}\varepsilon < \varepsilon$, тоді

$$\begin{aligned} \|y(t) - y^*(t)\| &\leq \|y(t_{in}\varepsilon) - y^*(t_{in}\varepsilon)\| + \|y(t) - y(t_{in}\varepsilon)\| + \|y^*(t) - y^*(t_{in}\varepsilon)\| \leq \\ &\sqrt{\|y(t_{in}\varepsilon) - y^*(t_{in}\varepsilon)\|} \left(\sqrt{\|y(t_{in}\varepsilon) - y^*(t_{in}\varepsilon)\|} + c_{y_1} \sqrt{\varepsilon} \right) + \varepsilon(c_{y_2} + L^*) \\ &\leq \kappa_1(\|y^0 - y_0^*\|) e^{-\sigma t} + \kappa_2, \end{aligned}$$

де $\kappa_1(\|y^0 - y_0^*\|) = e^{\frac{\varepsilon\lambda}{2}} \sqrt{\|y^0 - y_0^*\|} (e^{\frac{\varepsilon\lambda}{2}} \sqrt{\|y^0 - y_0^*\|} + c_{y_1} \sqrt{\varepsilon})$ є монотонно зростаючою функцією відносно $\|y^0 - y_0^*\|$, та $\kappa_2 = \varepsilon(c_{y_2} + L^*)$ може бути обрано довільно малим шляхом відповідного вибору ε .

На цьому доведення теореми 6.1 завершено.

6.3 Часткова стабілізація підводного апарату в околі заданої кривої

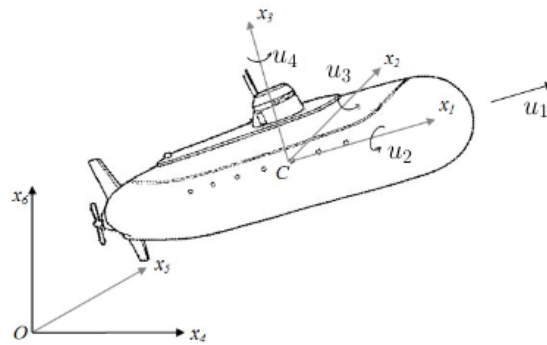


Рис. 6.1: Підводний апарат.

Розглянемо приклад системи з дефіцитом керуючих впливів, що описує рівняння руху автономного підводного 3D апарату (див. Рис. 6.1):

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^4 f_i(x) u_i, \quad x \in \mathbb{R}^6, \quad u \in \mathbb{R}^4, \quad (6.16)$$

де (x_1, x_2, x_3) позначають координати центру мас, (x_4, x_5, x_6) описують орієнтацію апарату (кути Ейлера), u_1 — поступальна швидкість вздовж вісі Ox_1 , (u_2, u_3, u_4) — компоненти кутової швидкості, а векторні f_1, f_2, f_3, f_4 поля мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (\cos x_5 \cos x_6, \cos x_5 \sin x_6, -\sin x_5, 0, 0, 0)^T, \\ f_2(x) &= (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T, \\ f_3(x) &= (0, 0, 0, \sin x_4 \operatorname{tg} x_5, \cos x_4, \sin x_4 \sec x_5)^T, \\ f_4(x) &= (0, 0, 0, \cos x_4 \operatorname{tg} x_5, -\sin x_4, \cos x_4 \sec x_5)^T. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Такі рівняння руху використовуються, наприклад, в роботі [8].

Нашою метою є стабілізація (x_1, x_2, x_3) — компонент розв'язків системи (6.16) вздовж кривої $y^*(t) = (t \cos \frac{t}{2}, t \sin \frac{t}{2}, 0.3t)^T$.

Рангову умову (6.5) виконано при наступному виборі векторних полів: $f_1, [f_1, f_3], [f_1, f_4]$. Тобто $\text{span}\{f_1(x), [f_1, f_3](x), [f_1, f_4](x)\} = \mathbb{R}^3$ для всіх $x \in \mathbb{R}^6$.

Матриця $\mathcal{F}(x)$ має вигляд:

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} \cos x_5 \cos x_6 & \cos x_4 \sin x_5 \cos x_6 + \sin x_4 \sin x_6 & -\sin x_4 \sin x_5 \cos x_6 + \cos x_4 \sin x_6 \\ \cos x_5 \sin x_6 & \cos x_4 \sin x_5 \sin x_6 - \sin x_4 \cos x_6 & \sin x_4 \sin x_5 \sin x_6 - \cos x_4 \cos x_6 \\ -\sin x_5 & \cos x_4 \cos x_5 & -\sin x_4 \cos x_5 \end{pmatrix}.$$

Вочевидь, матриця $\mathcal{F}(x)$ є невиродженою, $\det(\mathcal{F}(x)) = 1$.

Для прикладу розглянемо випадок, коли неможливо керувати креном апарату, а саме, вважатимемо $u_2 = \text{const}$.

Побудуємо керування згідно до формул (6.6):

$$\begin{aligned} u_1^\varepsilon(t, x, y^*) &= a_1(x, y^*) + \sqrt{\frac{4\pi\kappa_{13}|a_{13}(x, y^*)|}{\varepsilon}} \cos \frac{2\pi\kappa_{13}t}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{4\pi\kappa_{14}|a_{14}(x, y^*)|}{\varepsilon}} \cos \frac{2\pi\kappa_{14}t}{\varepsilon}, \\ u_3^\varepsilon(t, x, y^*) &= \text{sign}(a_{13}(x)) \sqrt{\frac{4\pi\kappa_{13}|a_{13}(x, y^*)|}{\varepsilon}} \sin \frac{2\pi\kappa_{13}t}{\varepsilon}, \\ u_4^\varepsilon(t, x, y^*) &= \text{sign}(a_{14}(x)) \sqrt{\frac{4\pi\kappa_{14}|a_{14}(x, y^*)|}{\varepsilon}} \sin \frac{2\pi\kappa_{14}t}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

де $a(x, y^*) = \alpha \mathcal{F}^{-1}(x)(y - y^*)$.

Нижче наведено результати чисельної симуляції часткової стабілізації траєкторій системи вздовж заданої кривої. На рис.6.2 - 6.3 представлено графіки розв'язків системи (6.16) з керуванням (6.18) з параметрами $\varepsilon = 0.1$, $\alpha = 15$ та початковими умовами $x^0 = (0, 0, -1, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})^T$.

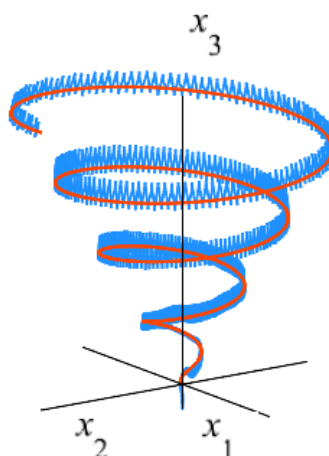


Рис. 6.2: Синій графік (x_1, x_2, x_3) — компоненти розв'язку системи (6.16)-(6.18). Червоний графік - крива $y^*(t)$.

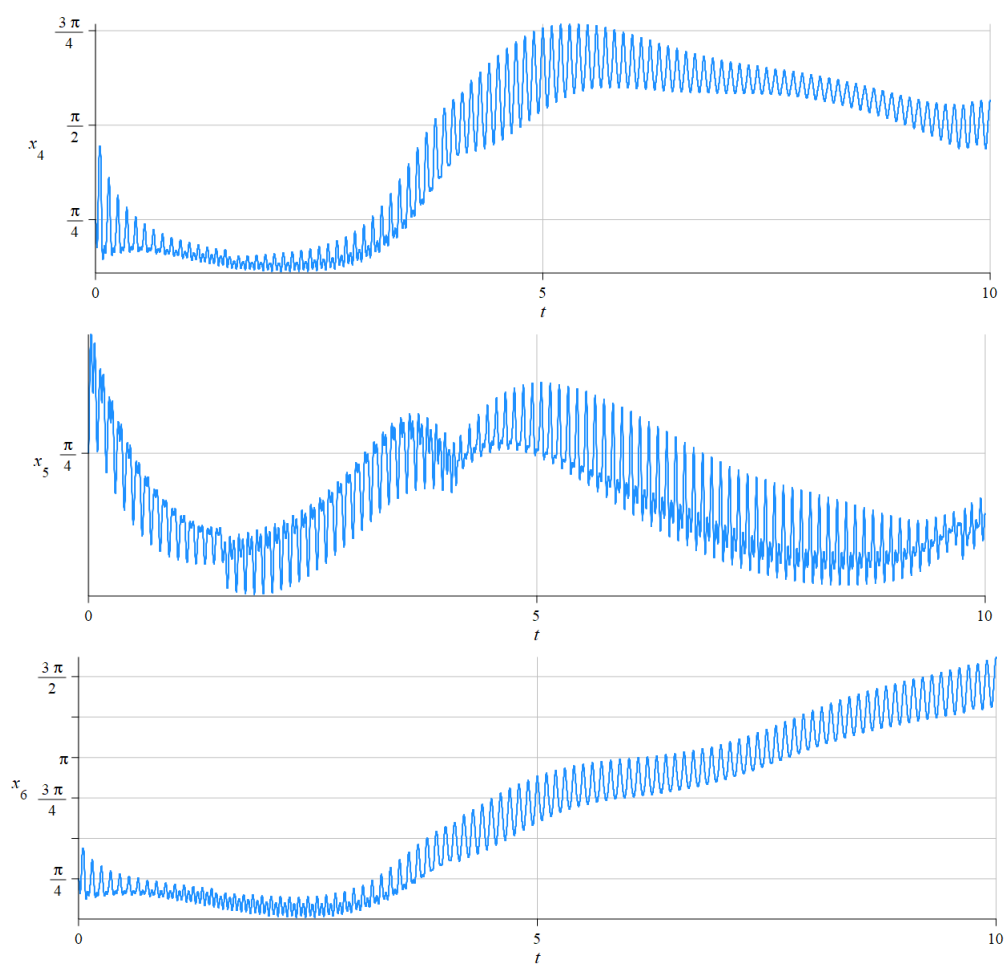


Рис. 6.3: Компоненти x_4, x_5, x_6 , розв'язку системи (6.16)-(6.18).

6.4 Висновки

Основні результати цього розділу полягають у наступному.

1. Уперше сформульовано і розв'язано задачу часткової стабілізації вздовж заданої траєкторії для загального класу афінних за керуванням систем, векторні поля яких задовольняють певну рангову умову керованості.
2. Для дослідження задачі часткової стабілізації вздовж заданої траєкторії поширено концепцію стійкості сімей множин, яку вперше застосовано в контексті саме стійкості за частиною змінних.
3. Для розв'язання поставленої задачі запропоновано узагальнення методу синтезу функцій керування, запропонованого, наприклад в [77]. У результаті отримано нові конструктивні достатні умови асимптотичної стійкості однопараметричної сім'ї множин для досліджуваного класу систем, для чого побудовано залежне від часу керування у вигляді тригонометричних поліномів.

Загальні висновки

Одержані в дисертаційній роботі результати є новими і полягають у наступному.

1. Розглянуто клас систем нелінійних диференціальних рівнянь із випадковими впливами, які мають інваріантну множину довільної вимірності. Досліджено питання про стійкість таких множин за майже всіх початкових умов з фазового простору. Отримано достатні умови збіжності траєкторій системи нелінійних стохастичних диференціальних рівнянь до інваріантної множини. При дослідженні асимптотичної поведінки розв'язків системи використана функція щільності міри, яка є монотонною на потоці.
2. Стохастичну модифікацію принципу інваріантності Ла-Салля застосовано для отримання достатніх умов асимптотичної стійкості інваріантних множин систем диференціальних рівнянь із випадковими впливами. Запропоновано конструктивний алгоритм побудови керування для стабілізації інваріантних множин зазначених систем із застосуванням функції Ляпунова зі знакосталою похідною.
3. Досліджено проблеми часткової стабілізації руху твердого тіла навколо його центру мас під дією реактивних крутних моментів та руху твердого тіла, що містить пару симетричних маховиків. Відмінною особливістю розглянутих систем є наявність випадкових впливів при керуванні. Ці системи неможливо стабілізувати у класичному сенсі відносно усіх фазових змінних. Тому було в явному вигляді побудовано керування, що дозволяють досягнути асимптотичної стійкості стану рівноваги досліджуваних систем відносно частини змінних.
4. Конструктивне доведення теореми Арцтейна було узагальнено на про-

блему часткової стабілізації стохастичних диференціальних рівнянь Іто. Показано можливість застосування запропонованого методу побудови керування для нелінійних систем із випадковими впливами, що описують динаміку руху перевернутого маятника та колісного візка з рухомою масою.

5. Вперше сформульовано і розв'язано задачу часткової стабілізації вздовж заданої траєкторії для загального класу афінних за керуванням систем, векторні поля яких задовольняють певну рангову умову керованості, для чого поширено концепцію стійкості сімей множин, яку вперше застосовано в контексті саме стійкості за частиною змінних. Отримано нові конструктивні достатні умови асимптотичної стійкості однопараметричної сім'ї множин для досліджуваного класу систем, для чого побудовано залежне від часу керування у вигляді тригонометричних поліномів.
6. Результати стабілізації усіх розглянутих механічних систем проілюстровано за допомогою чисельного моделювання в програмі Maple із використанням функції `ItoProcess()`.

Список використаних джерел

- [1] Ailon A., Berman N., Arogeti S. On controllability and trajectory tracking of a kinematic vehicle model. *Automatica*. 2005. Vol. 41, No. 5. P. 889-896.
- [2] Appleby J. A., Mao X. Stochastic stabilisation of functional differential equations. *Systems and Control Letters*. 2005 Vol. 54(11). P. 1069-1081.
- [3] Armellini G. Sopra un'equazione differenziale della dinamica. *Rend. Accd. Naz. Lincei*. 1935. Vol. 21. P. 111--116.
- [4] Arnold L., Crauel H., Wihstutz V. Stabilization of linear systems by noise. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 1983. Vol. 21, No. 3. P. 451--461.
- [5] Arstein Z. Stabilization with relaxed controls. *Nonlinear Analysis*. 1983. Vol. 7, No. 11. P. 1163--1173.
- [6] Astolfi A. Discontinuous control of nonholonomic systems. *Systems and Control Letters*. 1996. Vol. 27, No. 1. P. 37--45.
- [7] Astolfi A. Discontinuous Control of the Brockett Integrator. *European Journal of Control*. 1998. Vol. 4, No. 1. P. 49--63.
- [8] Barraquand J., Latombe J. C. On nonholonomic mobile robots and optimal maneuvering. *Stanford University, Center for Integrated Facility Engineering*. 1989. Vol. 15. P. 340--347.
- [9] Blanchini F. Set invariance in control. *Automatica*. 1999. Vol. 35. P. 1747 -- 1767.
- [10] Blanchini F., Miani S. Set-Theoretic Methods in Control. Systems & Control: Foundations & Applications: Birkhauser Basel, 2015. 487 p.
- [11] Bloch A. M. Nonholonomic Mechanics and Control: Springer, 2003. 484 p.

- [12] Bloch A. M., Drakunov S.V. Stabilization and tracking in nonholonomic integrator via sliding modes. *Systems and Control Letters*. 1996. Vol. 29. P. 91–99.
- [13] Brockett R. W. Asymptotic stability and feedback stabilization. *Differential geometric control theory*. 1983. Vol. 27, No. 1. P. 181–191.
- [14] Caraballo T., Liu K., Mao X. On stabilization of partial differential equations by noise. *Nagoya Mathematical Journal*. 2001. Vol. 161. P. 155–170.
- [15] Clarke, F. H., Ledyaev, Y. S., Sontag, E. D., Subbotin, A. I. Asymptotic controllability implies feedback stabilization. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1997. Vol. 42(10). P. 1394–1407.
- [16] Clarke F. Discontinuous feedback and nonlinear systems. *IFAC Proceedings Volumes*. 2010. Vol. 43, No. 14. P. 1–29.
- [17] Corduneanu C. Sur la stabilite partielle. *Rev. Roumaine math. Pures. Appl.* 1964. Vol. 9(3). P. 229–236.
- [18] Coron J.-M. On the stabilization in the finite time of locally controllable systems by means of continuous time-varying feedback law. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 1995. Vol. 33, No. 3. P. 804–833.
- [19] Florchinger P. Lyapunov-like techniques for stochastic stability. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 1995. Vol. 33, No. 4. P. 1151–1169.
- [20] Florchinger P. A stochastic version of Artstein’s theorem. *IEEE Conference on Decision and Control*. 2002. Vol. 2. P. 1888–1889.
- [21] Friedman A. Stochastic Differential Equations and Their Applications: Academic Press, 1976. 528 p.

- [22] Grushkovskaya V., Zuyev A. Attractors of nonlinear dynamical systems with a weakly monotone measure. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2015. Vol. 422. P. 559–570.
- [23] Grushkovskaya V., Durr H.-B., Ebenbauer C., Zuyev A. Extremum seeking for time-varying functions using Lie bracket approximations. *IFAC-PapersOnLine*. 2017. Vol. 50. P.5522–5528.
- [24] Grushkovskaya V., Michalowsky S., Zuyev A., May M., Ebenbauer C. A family of extremum seeking laws for a unicycle model with a moving target: theoretical and experimental studies. in *Proc. 18th European Control Conf.* 2018. P.912–917.
- [25] Grushkovskaya V., Zuyev A., Ebenbauer C., On a class of generating vector fields for the extremum seeking problem: Lie bracket approximation and stability properties. *Automatica*. 2018. Vol. 94. P.151–160.
- [26] Grushkovskaya V., Zuyev A. Stabilization of non-admissible curves for a class of nonholonomic systems. In *2019 18th European Control Conference (ECC)*. 2019. P. 656-661.
- [27] Hasminskii R.Z. Stochastic Stability of Differential Equations: Sijthoff and Noordhoff, 1981. 360 p.
- [28] Ignatyev O. Partial asymptotic stability in probability of stochastic differential equations. *Statist. Probab. Lett.* 2009. Vol.79. P. 597–601.
- [29] Ignatyev O. New criterion of partial asymptotic stability in probability of stochastic differential equations. *Applied Mathematics and Computation*. 2013. Vol. 219. P. 10961–10966.

- [30] Kao Y., Wang C., Zha F., Cao H. Stability in mean of partial variables for stochastic reaction–diffusion systems with markovian switching. *Journal of the Franklin Institute*. 2014. Vol. 351, No. 1. P. 500–512.
- [31] Khalil H. K., Grizzle J. W.: Nonlinear systems. Third edition: Prentice Hall, 2002. 750 p.
- [32] Kovalev A., Kravchenko N., Nesporny V. Necessary condition for the stabilizability of nonlinear systems with respect to a part of variables in the class of discontinuous controls. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2006. Vol. 58, No. 10. P. 1626–1634.
- [33] Kushner H. J. Stochastic Stability and Control: Academic Press, 1967. 161p.
- [34] Lamnabhi-Lagarrigue F. Volterra and Fliess series expansions for nonlinear systems. in *The Control Handbook*, W. S. Levine, ed. CRC press. 1996. P.879–888.
- [35] Langa J. A., Robinson J. C., Suarez A.. Stability, instability, and bifurcation phenomena in non-autonomous differential equations. *Nonlinearity*. 2002. Vol. 15, No. 3. P.887–903.
- [36] Loeve M. Probability theory: Springer, 1963. 685 p.
- [37] Mao X. Exponential stability of stochastic differential equations: Marcel Dekker, 1994. 307 p.
- [38] Mao X. Stochastic stabilisation and destabilisation. *Systems and Control Letters*. 1994. Vol. 23. P. 279–290.
- [39] Mao X. Stochastic version of the LaSalle theorem. *Journal of Differential Equations*. 1999. Vol. 153. P. 175–195.

- [40] Mao X. Some contributions to stochastic asymptotic stability and boundedness via multiple Lyapunov functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2000. Vol. 260. P. 325–340.
- [41] Mao X. Stochastic differential equations and applications: Elsevier, 2007. 440p.
- [42] Murray R. M., Walsh G., Sastry S. S. Stabilization and tracking for nonholonomic control systems using time-varying state feedback. *Nonlinear Control Systems Design* 1993.P. 109-114.
- [43] Nijmeijer H., van der Schaft A. J. Nonlinear Dynamical Control Systems: Springer-Verlag, 1990. 467 p.
- [44] Nishimura Y., Tanaka K., Wakasa Y., Yamashita Y. Stochastic asymptotic stabilizers for deterministic input-affine systems based on stochastic control Lyapunov functions. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*. 2013. Vol. 96, No. 8. P. 1695–1702.
- [45] Nishimura Y. Stabilization by artificial Wiener processes. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2016. Vol. 61. P. 3574–3579.
- [46] Peiffer K., Rouché N. Liapounov's second method applied to partial stability. *J. Mecanique*. 1969. Vol. 8(2). P. 323–334.
- [47] Pomet J.-B. Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift. *Systems and Control Letters*. 1992. Vol. 18, No. 2. P. 147–158.
- [48] Rajpurohit T., Haddad W. M. Partial-state stabilization and optimal feedback control for stochastic dynamical systems *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*. 2017. Vol. 139. – No. 9.

- [49] Rantzer A. A dual to Lyapunov's stability theorem. *Systems and Control Letters*. 2001. Vol. 42, No. 3. P. 161–168.
- [50] Risito C. Sulla stabilita asintotica parziale. *Ann. Math. Pura Appl.* 1970. Vol. 84. P. 279–292.
- [51] Rogers L. C. G., Williams D. *Diffusions, Markov processes and martingales*, Volume 2, Itô calculus: Cambridge university press, 2000. 455 p.
- [52] Samiei E., Izadi M., Viswanathan S. P., Sanyal A. K., Butcher E. A. Robust stabilization of rigid body attitude motion in the presence of a stochastic input torque. *In 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. 2015. P. 428–433.
- [53] Scheutzow M. Stabilisation and destabilisation by noise in the plane. *Stoch. Anal. Appl.* 1993. Vol. 11. P. 97–113.
- [54] Shaikhet L.E. Stability in probability of nonlinear stochastic systems with delay. *Mathematical Notes*. 1995. Vol.57(1). P.103–106.
- [55] Sharov V. F. Stability and stabilization of stochastic systems with respect to a part of variables. *Automation and Remote Control*. 1978. Vol. 11. P. 63–71.
- [56] Shiriaev A.S. and Fradkov A.L. Stabilization of invariant sets of cascaded nonlinear systems. *In Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*. 1999. Vol. 2. P. 1296–1301.
- [57] Shiriaev A.S. and Fradkov A.L. Stabilization of invariant sets for nonlinear non-affine systems. *Automatica*. 2000. Vol. 36(11). P.1709–1715.
- [58] Slyn'ko V., Bivziuk V. Stability and stabilization of linear periodic systems: A commutator calculus approach *Automatica*. 2021. Vol. 125. Id.109478.

- [59] Socha V., Zhu Q. Exponential stability with respect to part of the variables for a class of nonlinear stochastic systems with markovian switchings. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2018. Vol. 155. P. 2–14.
- [60] Sontag E.D. and Wang Y. Lyapunov characterizations of input to output stability. *SIAM J. Control Optim.* 2001. Vol.39. P. 226–249.
- [61] Sontag E. D. Mathematical Control Theory: Springer Science and Business Media, 2013. Vol. 6. 396 p.
- [62] Stanzhitskii A. M. Investigation of invariant sets of Ito stochastic systems with the use of Lyapunov functions. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2001. Vol. 53. P. 323–327.
- [63] Van Handel R. Almost global stochastic stability. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2006. Vol. 45, No. 4. P. 1297–1313.
- [64] Vorotnikov V. I. Partial stability and control: Birkhauser, 1998. 442 p.
- [65] Vorotnikov V. I. Partial stability and control: The state-of-the-art and development prospects. *Automation and Remote Control*. 2005. Vol. 66, No. 4. P. 511–561.
- [66] Vorotnikov V. I., Martyshenko Y. G. On the partial stability in probability of nonlinear stochastic systems. *Automation and Remote Control*. 2019. Vol. 80, No. 5. P. 856–866.
- [67] Wang Y., Miao Z., Zhong H., Pan Q. Simultaneous stabilization and tracking of nonholonomic mobile robots: A Lyapunov-based approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 2015. Vol 23, No.4. P. 1440–1450.

- [68] Xu D., Zhao H. Invariant set and attractivity of nonlinear differential equations with delays. *Applied Mathematics Letters*. 2002. Vol. 15(3). P. 321–325.
- [69] Yu X., Yin J., Khoo S. Generalized Lyapunov criteria on finite-time stability of stochastic nonlinear systems. *Automatica*. 2019. Vol. 107. P. 183–189.
- [70] Zuiev A.L. On Brockett’s condition for smooth stabilization with respect to a part of the variables. *European Control Conference (ECC)*. 1999. P.1729–1732.
- [71] Zuyev A.L. Stabilization of non-autonomous systems with respect to a part of variables by means of control Lyapunov functions. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2000. Vol. 32, No. 10. P. 18–25.
- [72] Zuyev A.L. Application of control Lyapunov functions technique for partial stabilization. *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications (CCA’01)*. 2001. P. 509–513.
- [73] Zuyev A.L. On partial stabilization of satellite orientation by means of two control torques. *Space Science and Technology*. 2001. Vol. 7(1). P. 76–81.
- [74] Zuyev A.L. Partial asymptotic stabilization of nonlinear distributed parameter systems. *Automatica*. 2005. Vol. 41(1). P. 1–10.
- [75] Zuyev A.L. Partial asymptotic stability of abstract dynamical processes. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2006. Vol. 58 (5). P. 709–717.
- [76] Zuyev A.L. Partial stabilization and control of distributed parameter systems with elastic elements: Springer, 2015. 245 p.
- [77] Zuyev A. Exponential Stabilization of Nonholonomic Systems by Means of Oscillating Controls *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2016. Vol. 54 (3). P.1678–1696

- [78] Zuyev A., Grushkovskaya V. Motion planning for control-affine systems satisfying low-order controllability conditions. *International Journal of Control*. 2017. Vol. 90, No. 11. P. 2517–2537.
- [79] Zuyev A., Grushkovskaya V. Partial stability concept in extremum seeking problems. *IFAC-PapersOnLine*. 2019. Vol. 52. P. 682–687.
- [80] Zuyev A., Grushkovskaya V. Partial stabilization of nonholonomic systems with application to multi-agent coordination. *Proc. European Control Conference*. 2020. P. 1665–1670.
- [81] Гальперин Е.А., Ярославцев А.А. О частичной стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем. *Изв.АН СССР. Техн. киберн.* 1969. No 5. С. 140–147.
- [82] Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. Москва: Наука, 1965. 654 с.
- [83] Зубов В.И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Ленинград: Судпромгиз, 1959. 327 с.
- [84] Зуев А.Л., Игнатъев А.О., Ковалев А.М. Устойчивость и стабилизация нелинейных систем. Киев: Наукова думка, 2013. 431 с.
- [85] Кац И.Я., Красовский Н.Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами. *Прикладная математика и механика*. 1960.— Вып. 24, № 5. С. 809–823.
- [86] Ковалев А.М. Инвариантность и неустойчивость. *Механика твердого тела*. 2010. Вып. 40. С. 3–11.
- [87] Ковалев А.М. Инвариантность и асимптотическая устойчивость. *Прикладная математика и механика*. 2011. Вып. 75, № 3. С. 449–456.

- [88] Корневский Д. Г. Дестабилизирующий эффект параметрических случайных возмущений типа "белого" шума в некоторых квазилинейных непрерывных динамических системах. *Доклады Академии наук* Вып. 408, №. 1. С. 22–24.
- [89] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Москва: Физматлит, 1959. 211 с.
- [90] Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. Москва: Мир, 1967. 548 с.
- [91] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М-Л: ГИТТЛ, 1950. 427 с.
- [92] Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Ленинград: Изд-во ленинградского ун-та, 1963. 117 с.
- [93] Мазко А.Г. Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств. Київ: Праці інституту математики НАН України, 2016. 332 с.
- [94] Малкин И.Г. Об устойчивости движения в смысле Ляпунова. *Математический сборник*. 1938. Вып. 3-1. С. 47—101.
- [95] Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. Москва: Мир, 2003. 406 с.
- [96] Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных. *Вестник МГУ*. 1957. № 1. С. 9–16.
- [97] Румянцев В.В. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по отношению к части переменных. *Прикладная математика и механика*. 1971. Вып.35, № 1. С. 147–152.

- [98] Румянцев В. В., Озиранер А. С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. Москва: Наука, 1987. 256 с.
- [99] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения (Т.1). Москва: Мир, 1967. 499 с.
- [100] Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. Москва: Наука, 1969. 367 с.

Додаток А. Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті в наукових фахових виданнях, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

- 1а. Васильева И.Г., Зуев А.Л. Частичная стабилизация нелинейных систем со случайными воздействиями. *Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины*. 2012. Т. 25. С. 33–41.
- 2а. Васильева И.Г., Зуев А.Л. Анализ предельного множества траекторий нелинейной системы со случайными воздействиями для почти всех начальных условий. *Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины*. 2014. Т. 28. С. 20–26.
- 3а. Zuyev A.L., Vasylieva I.G. Partial stabilization of stochastic systems with application to rotating rigid bodies. *IFAC PapersOnLine*. 2019. V. 52. P. 162–167.
- 4а. Vasylieva I.G., Zuyev A.L. Control design for partial stabilization of nonlinear mechanical systems with random disturbances. *Збірник праць Інституту математики НАН України*. 2019. Т. 16(2). С.209-223.

Тези наукових доповідей, які засвідчують апробацію результатів дисертації

- 5а. Vasylieva I.G., Zuyev A.L. Partial stabilization of nonlinear stochastic differential equations with application to nonholonomic systems. *2nd International Conference “Differential Equations & Control Theory” (DECT-2017)*: Book of Abstracts, Świnoujście, Poland, 27-30 September 2017. Szczecin: University of Szczecin, 2017. P. 22.

- 6a. Vasylieva I.G., Zuyev A.L. Stability analysis for a nonholonomic mechanical system using Sussmann-type processes. *International Conference “Differential Equations, Mathematical Physics and Applications”*: Book of Abstracts, Cherkasy, Ukraine, 17–19 October, 2017. P. 51–52.
- 7a. Васильева И.Г., Зуев А.Л. Задача стабилизации неголономных механических систем при наличии стохастической компоненты управления. *Международная научная конференция “Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация”, посвященная 100-летию со дня рождения академика Е.А. Барбашина*: материалы конференции, Минск, Беларусь, 24-29 сентября 2018. Минск: БГУ, 2018. С. 85–86.
- 8a. Васильева И.Г., Зуев А.Л. Устойчивость инвариантных множеств систем нелинейных дифференциальных уравнений со случайными воздействиями. *XIX International Conference “Dynamical system modeling and stability investigation”*: Abstract of Conf. reports, Київ, Україна, 22-24 травня 2019 р. Київ: Київський національний університет ім. Т. Шевченка, 2019. С. 236–237.
- 9a. Васильєва І.Г. Дослідження стійкості неголономної механічної системи із використанням випадкових процесів типу Суссманна. *Міжнародна конференція молодих математиків*: тези доповідей, 6-8 червня 2019 р. Київ: Інститут математики НАН України, 2019. С. 51.
- 10a. Vasylieva I.G., Zuyev A.L. Partial stabilization of nonlinear control system by stochastic feedback laws. *4th International Conference “Differential Equations & Control Theory” (DECT-2019)* Book of Abstracts, Kołobrzeg, Poland, 23-26 September 2019. Szczecin: University of Szczecin, 2019. P. 18.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на наступних наукових конференціях і семінарах.

1. Другій Міжнародній конференції “Differential Equation and Control Theory”, Świnoujście, Poland, 27-30 вересня 2017 р.;
2. Міжнародній конференції “International Conference on Differential Equations, Mathematical Physics and Applications (DEMPH A - 2017)”, Черкаси, Україна, 17-19 жовтня 2017 р.;
3. Міжнародній конференції “Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация”, присвяченій 100-річчю зі дня народження академіка Е.О. Барбашина, Мінськ, Білорусь, 24-29 вересня 2018 р. ;
4. Четвертій міжнародній конференції “Differential Equation and Control Theory”, Kołobrzeg, Poland, 23-26 вересня 2019 р.;
5. Міжнародній конференції молодих математиків, Київ, Україна, 6-8 червня 2019 р.;
6. Міжнародній конференції “Dynamical System Modeling and Stability Investigation”, Київ, Україна, 24-29 травня 2019 р.;
7. Семінарах відділів прикладної та технічної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України, Донецьк, 2012-2014;
8. Розширений семінар відділу прикладної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ, 2018, 2020;
9. Семінарі відділу теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України, Київ, 2019;

10. Семінарі Інституту математики Альпійсько-адриатичного університету, м. Клагенфурт, Австрія, 2020;
11. Семінарі Інституту динаміки складних технічних систем ім. Макса Планка, м. Магдебург, Німеччина, 2020;
12. Семінарі молодих вчених Інституту прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ, 2020;
13. Спільному семінарі з математичних проблем механіки та обчислювальної математики за участю відділу теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України, Київ, 2021.