ВІДГУК

офіційного опоненту на дисертаційну роботу **Осауленка Романа Юрійовича**
«Сингулярні ніде не монотонні функції та їх фрактальні властивості»,
подану до захисту на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.01 – математичний аналіз

Актуальність теми. Дисертаційна робота Осауленка Р.Ю. присвячена нетрадиційному об'єкту дослідження — неперервним функціям з непростими диференціальними властивостям, а саме функціям сингулярним, ніде не монотонним, недиференційовним. Цей об'єкт актуальний і для теорії функцій, і для теорії фракталів. Саме засоби фрактального аналізу дозволяють аналітично описувати і ґрунтовно вивчати такі функції. Теоретичною основою для задання та вивчення розглянутих об'єктів є різні системи зображення дійсних чисел, які широко культивуються та розвиваються у київській групі дослідників Інституту математики НАНУ та НПУ імені М.П. Драгоманова. У роботі Осауленка Р.Ю. використовуються системи зі змінним алфавітом ($\tilde{Q}-$ зображення), ланцюгові дроби з обмеженим алфавітом (ланцюгові A_2- дроби) та ін. Окрема увага у роботі приділяється неперервним ніде не монотонним сингулярним функціям — функціям, які не мають жодного проміжку монотонності, але мають похідну, рівну нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега. На пальцях однієї руки можна перерахувати статті, у яких вони фігурували (Shukla U. K., Агаджанов А.Н., Працьовитий М.В.), констатуючи факт існування таких. Сьогодні монотонні сингулярні функції представленні великою кількістю цікавих прикладів, які продовжують вивчатися в рамках індивідуальних теорій. Такими є функції канторівського типу, функції, які узагальнюють та є аналогами функції Салема; функції типу Мінковського та ін.

Зазначимо, що цілий клас функцій типу Мінковського наведений у роботі Працьовитого М.В. та Ісаєва Т.М. (2014 р.), немонотонні сингулярні функції канторівського типу, які не мають проміжків монотонності, окрім проміжків сталості вивчались у роботах Працьовитого М.В. та Свинчук О.В. (2014, 2018 р.).

В контексті сказаного об'єкти, задачі і засоби їх розв'язування є сучасними і актуальними.

Аналіз структури та змісту роботи. Робота складається з анотації, вступу, 7 розділів, розбитих на підрозділи, висновків до розділів та загальних висновків, списку використаних джерел (74), додатку, що містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дослідження.

Розділ 1 «Огляд літератури та концептуальні засади дослідження» є вступним. В ньому наводяться значення ключових понять, базові факти та засоби для досліджень в наступних розділах.

Розділ 2 «Частоти цифр зображення числа та функції, пов'язані з ними» присвячено нормальним властивостям чисел за їх $\tilde{Q}$–зображенням, а також неперервним перетворенням одиничного відрізка, які зберігають хвости Q_s–зображення чисел. Основними результатами цього розділу є теорема 2.2 (про нормальну властивість числа), теорема 2.7 (про групу перетворень, які зберігають хвости про Q_s–зображення чисел), конструкція класу неперервних функцій, які зберігають частити цифр Q_s–зображення чисел без збереження хвостів зображення.

Розділ 3 « (u, v)– похідна та її застосування» присвячено узальненню циліндричної похідної як засобу дослідження диференціальних властивостей функцій і застосуванням узагальнення до окремих прикладів функцій (функція Мінковського; сингулярна функція, яка зберігає частоти цифр без збереження хвостів; сингулярна ніде не монотонна функція обмеженої варіації), а також до задач розкриття невизначенностей у теорії границь.

У розділі 4 «Аналог (u,v)-похідної та його застосування» запропоновано аналог (u, v)- похідної і вказані його застосування, що проілюстровано на двох класах функцій (ніде не монотонна сингулярна функція обмеженої варіації, ніде не диференціальна функціє, що є аналогом Трибін–функції).

У розділі 5 «Логарифмічна (u,v)-похідна та її застосування» наведено конструкцію узагальнення оператора диференціювання, який автор називає логарифмічною (u,v)- похідною, вивчаються його властивості і взаємозв'язки, вказуються деякі застосування.

Розділ 6 «Аналог логарифмічної (u,v)-похідної та його застосування» присвячено аналогу логарифмічної (u,v)- похідної, який є засобом здійснення фрактального аналізу множин несталості функції та множин, в яких похідна не дорівнює нулю. Одним із основних об'єктів є теорема 6.6 (про зв'язок розмірності Гаусдорфа–Безиковича) з числовою характеристикою функції, визначеної оператором диференціювання.

У розділі 7 «Дослідження збіжності додатних рядів та невласних інтегралів» запропоновано конструкції різних операторів диференціювання, які застосовуються до задач про збіжність числових рядів та невласних інтегралів. Тут, зокрема, розглядається узагальнений ряд Флінт Гілла.

Наукова новизна результатів дисертаційної роботи. Автором дисертаційної роботи

– створено засоби дослідження неперервних функцій з локально складними диференціальними властивостями ((u, v)–похідна та її аналоги, логарифмічна похідна та її узагальнення), адаптовані до вивчення функцій означених в термінах різних систем представлення (зображення) чисел;

– продемонстровано ефективність запропонованих засобів для дослідження різних класів функцій з локально складною структурою, зокрема суперпозиції класичної сингулярної функції Салема та відомої ніде не диференційовної функції;

– здійснено фрактальний аналіз (задачі про фрактальну розмірність Гаусдорфа–Безиковича) носіїв функцій, які зберігають частоти цифр Q_s– зображення чисел без збереження хвостів зображень;

– встановлено достатні умови збіжності, або ж розбіжності, які узагальнюють відомі ознаки збіжності числових рядів та невласних інтегралів.

Особистий внесок здобувача в отриманні наукових результатів. Всі положення дисертаційного дослідження, які винесені на захист отримані автором самостійно і висвітлені в одноосібних публікаціях.

Достовірність та обґрунтованість отриманих результатів та запропонованих автором вирішення, висновків, рекомендації. Всі основні положення дисертаційного дослідження, включаючи висновки, строго і повно обґрунтовано.

Повнота викладу результатів роботи в наукових публікаціях, зарахованих за темою дисертації. Результати дисертаційного дослідження достатньо повно висвітлено у 5 статтях, опублікованих у фахових наукових виданнях України, одна з яких — у виданні, що входить до наукометричної бази SCOPUS, та 8 тез доповідей на наукових конференціях різного рівня.

Автореферат повно і правильно відображає зміст дисертаційної роботи. Дисертація відповідає паспорту спеціальності та профілю ради.

Зауваження

1. Оформлення роботи вимагає бути кращим (зустрічаються мовні огріхи, стилістичні недоречності, описки у формулах).
2. Огляд літератури вважаю не більш ніж задовільним.
3. Пункти 6.5 та 6.6 містять лише леми, але не містять теорем, то виникає питання: для чого вони є допоміжними твердженнями?
4. На наш погляд, не всі введені автором позначення є вдалими (іноді громіздкими, іноді відображають інформацію, яка добре відома з контексту тощо).
5. На сторінці 121 Наслідки 7.1 – 7. 4 є тривіальними, позначення областей збіжності, або ж розбіжності є невдалими. Там же, поняття частоти підпослідовності числової послідовності краще було означити як границю відношення номера k-го вибраного елементу до k аналогічно до Теореми 2.1.
6. Лему 6.14 на сторінці 112 було б добре довести.
7. У пункті 7.5.1 бажано було б зазначити після леми 7.7, як використовуються функції з таблиці 7.2 для встановлення абсолютної збіжності невласних інтегралів, оскільки лема 7.7 аналогічна до лем 7.1 – 7.3.

Вказані зауваження не знижують загальної позитивної оцінки даній роботі результати якої є суттєвим внеском в теорії неперервних функцій зі складною локальною будовою.

Загальні висновки. Враховуючи актуальність теми, наукову новизну, важливість і перспективність отриманих результатів для теорії функцій та фрактального аналізу, самостійність і завершеність роботи, відсутність академічної недоброчесності, повноту висвітлення основних положень дисертаційного дослідження у публікаціях, їх належну апробацію на семінарах та конференціях, вважаємо, що дисертаційна робота Р.Ю. Осауленка задовольняє всім вимогам п.п. 9, 11, 12-14 «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженою Постановою Кабінету Міністрів України №567 від 24 липня 2013 року (зі змінами, внесеними згідно з Постановами Кабінету Міністрів України № 656 від 19 серпня 2015 року та № 1159 від 30 грудня 2015 року), які висуваються до кандидатських дисертацій, і рекомендується до захисту на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз, а її автор заслуговує на присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук.

Офіційний опонент
завідувач кафедри математики та
інформатики Донбаського державного
педагогічного університету
доктор фізико-математичних наук, професор — Чуйко С.М.

Підпис Чуйка С.М. засвідчую. Начальник відділу
кадрів ДВНЗ «Донбаський державний
педагогічний університет» — Силін Є.С.