

## В І Д Г У К

офіційного опонента про дисертацію **Осауленка Романа Юрійовича** “**Сингулярні ніде не монотонні функції та їх фрактальні властивості**”, подану до захисту на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 “математичний аналіз”.

**1. Актуальність теми.** Робота виконана в галузі конструктивної теорії локально складних неперервних функцій з фрактальними властивостями. Вона присвячена сингулярним (монотонним та ніде не монотонним) функціям і засобам їх вивчення. Оскільки кожна монотонна функція є диференційовною майже скрізь, то кожна неперервна недиференційовна функція є ніде не монотонною. Проте, клас останніх є істотно ширшим. Серед них існують функції обмеженої і необмеженої варіації, а функції обмеженої варіації є також диференційовними майже скрізь. Сингулярною, традиційно, називають функцію обмеженої варіації, яка має похідну що дорівнює нулю майже скрізь в сенсі міри Лебега. Приклади монотонних сингулярних функцій є добре відомі, але вони, як і канторова драбина, є нестрого монотонними. Функції Салема і функція знаку запитання (функція Мінковського) є строго монотонними сингулярними функціями. Н. Okamoto, M. Wunsch (2005, 2007) побудували деякі інші приклади строго монотонних неперервних сингулярних функцій. Ці функції мають ряд чудових властивостей з точки зору теорії фракталів. При цьому практично відсутні загальні підходи до дослідження таких об'єктів і кожна з таких функцій досліджувалася окремо. Водночас виявилось (K. Garg, 1985), що існують ніде не монотонні сингулярні функції. Клас таких функцій широкий, але через згадану причину, вони залишаються мало дослідженими. Тому, безумовно актуальним завданням є розробка засобів їх ефективного дослідження, зокрема, для того, щоб можна було дослідити величину цього класу у просторі неперервних функцій. Зазначимо, що інтенсивний розвиток теорії фракталів (фрактальної геометрії та фрактального аналізу) спонукає істотне зростання інтересу до неперервних ніде не монотонних функцій. M. Kesseböhmer, B.O. Stratmann (2008) провели доволі нескладне, але й ефективне дослідження фрактальних властивостей множини недиференційовності функції Мінковського  $Q(x)$ . Зокрема, довели, що одиничний інтервал  $[0, 1]$  розбивається на три множини  $[0, 1] = \{x : Q'(x) = 0\} \cup \{x : Q'(x) = \infty\} \cup \{x : \nexists Q'(x)\}$ , а також отримали оцінки розмірностей Хаусдорфа (Hausdorff dimensions) цих множин. Зроблена у даному дисертаційному дослідженні спроба розвинути на основі ідей цієї статті загального підходу до дослідження фрактальних властивостей сингулярних функцій безумовно є актуальною і заслуговує на увагу.

**2. Наукова новизна результатів дисертаційної роботи.** Основний зміст дисертаційної роботи Р.Ю. Осауленка складає дослідження фрактальних властивостей сингулярних та ніде не монотонних неперервних функцій, заданих за допомогою різних зображень дійсних чисел, або ж як границя функціональної послідовності чи як композиція ніде не монотонних та сингулярних функцій. Основними новими результатами цієї дисертації на думку автора відгуку є:

- побудова нових прикладів неперервних ніде не монотонних сингулярних функцій необмеженої варіації, залежних від параметрів, які набувають континуальну множину значень;
- опис диференціальних властивостей композиції сингулярної функції Салема і ніде не диференційовної функції;
- дослідження розмірності Гаусдорфа-Безиковича носіїв функцій з континуального класу неперервних функцій, які зберігають частоти цифр  $Q_s$ -зображення числа без збереження хвостів;
- доведення тверджень про достатні умови збіжності/розбіжності узагальненого ряду Флінт

Гілла (Flint Hills).

У розділі 2 дисертаційної роботи розглядаються числа відрізка  $[0; 1] \subset \mathbb{R}$  у довільному фіксованому  $\tilde{Q}$ -зображенні з загальним алфавітом  $A$ ; встановлено нормальну властивість  $Q$ -зображення чисел, побудовано континуальний клас неперервних функцій, які зберігають частоти цифр  $Q_s$ -зображення числа без збереження хвостів.

Основними результатами третього розділу є встановлення факту сингулярності неперервних функцій, які зберігають частоти  $Q_s$ -зображення числа без збереження хвостів та дослідження диференціальних властивостей модельного класу ніде не монотонних функцій, які є границями рекурентних функціональних послідовностей.

У четвертому розділі, зокрема встановлено існування континуального класу ніде не монотонних сингулярних функцій необмеженої варіації та доведено ніде недиференційовність деякого аналогу Трибін-функції.

У шостому розділі доведено, що носії функцій, які зберігають частоти цифр  $Q_s$ -зображення числа без збереження хвостів є суперфрактальними множинами (тобто, їх розмірність Хаусдорфа-Безиковича дорівнює 1). За допомогою описаного аналогу, було проведено дослідження диференційовності композиції ніде не диференційовної функції Н. Окамото та функції Салема. При цьому знайдено достатні умови недиференційовності композиції цих функцій, а також її сингулярності обмеженої і необмеженої варіацій.

Досить точний опис результатів дисертаційної роботи дано у анотації дисертації та в авторефераті, тому їх подальший перелік опустимо.

**3. Особистий внесок здобувача в отриманні наукових результатів.** Дисертаційне дослідження виконано дисертантом самостійно. Основні теоретичні положення та розробки, що характеризують наукову новизну дослідження, теоретичне значення його результатів, одержані дисертантом особисто. Результати досліджень, які наведені у дисертаційній роботі та опубліковані у фахових наукових статтях, належать автору і є його науковим доробком. Порушення академічної доброчесності відсутні.

**4. Достовірність та обґрунтованість отриманих результатів та запропонованих автором вирішень, висновків, рекомендацій.** Достовірність результатів забезпечується строгими доведеннями теорем, які з достатньою повнотою наведені в дисертації. Автор захищає перелічені вище результати роботи.

**5. Повнота викладу результатів роботи в наукових публікаціях, зарахованих за темою дисертації.** Результати дисертаційного дослідження Р.Ю.Осауленка з достатньою повнотою (зокрема, всі основні результати роботи) опубліковані у 13 статтях і наукових повідомленнях, зокрема, у 5 статтях без співавторів у фахових виданнях, в яких слід публікувати результати дисертації, серед яких 1 – у журналі, що відображений у базі даних SCOPUS; 8 у тезах конференцій різного рівня.

**6. Зауваження.** Дисертаційна робота в цілому добре написана, але містить невелику кількість описок, повний список яких ми не наводимо. Вкажемо лише на деякі, на погляд автора віддуку, недоречності.

1) Твердження Наслідку 3.1 є тривіальним, отримується безпосередньо і не вимагає застосування Теорема 3.2; його другий пункт отримується з першого простим міркуванням від супротивного. Теж саме можна сказати про Наслідок 3.2 і Теорему 3.3.

2) Доведення леми 3.2. Нічого не сказано про те, чому повинно існувати розбиття  $T_n^*$ ?

3) Не зрозуміло, про ЩО Лема 3.3, адже її твердження – тривіальне.

4) На ст. 64 прикрі описки: функція Міковського, лангцюговими.

5) Лема 5.4 – тривіальна, для того, щоб її твердження було правильним не потрібно односторонніх зображень у вигляді рядів.

6) п.5.4.1. Висловлену автором дисертації сентенцію (Гіпотеза???) стосовно можливої застосовності ланцюгових дробів до розв'язання диф. рівнянь слід віднести на його непоінформованість, адже ще Леонард Ойлер системно проводив такі дослідження, не говорячи про багатьох авторів з XIX ст.! При цьому важко вказати розділ математики, в якому в ті часи не використовувався метод ланцюгових дробів, незаслужено практично забутий у XX ст.

7) У Прикладі 5.1, написані викладки є абсурдними!

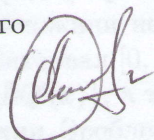
8) Написана у Зауваженні 6.3 сентеція про те, що "... може скластися хибне враження...", виглядає дивно, бо насправді потрібно було просто написати, що наступний приклад показує, що в загальному бажаної рівності з п. 3 у теоремі 6.1, взагалі кажучи, може не бути.

Висловлені щойно зауваження практично ніяк не впливають на позитивне в цілому сприйняття як результатів, отриманих у дисертації, так і самого її тексту.

**7. Висновки.** З огляду на сказане вище, вважаю, що дисертаційна робота відповідає вимогам п.п. 9, 11-14 "Порядку присудження наукових ступенів" (Постанова Кабінету міністрів України № 567 від 24.07.2013) щодо кандидатських дисертацій, а результати дисертаційної роботи відповідають вимогам до наукового рівня її результатів (актуальність, новизна, наукова значущість), є важливим внеском у конструктивну теорію локально складних неперервних функцій з фрактальними властивостями. Основні результати дисертації, отримані автором дисертації самостійно і опубліковані у 5 статтях у виданнях, у яких слід публікувати результати дисертації. Враховуючи, що дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням, виконаним на сучасному науковому рівні, результати якого опубліковані та апробовані на наукових семінарах і конференціях, а порушення академічної доброчесності відсутні, вважаю, що її автор, **Осауленко Роман Юрійович**, заслуговує присудження йому наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Офіційний опонент

професор, доктор фізико-математичних наук,  
в.о. зав.кафедри теорії функцій і функціонального  
аналізу Львівського національного  
університету імені Івана Франка



О.Б. Скасків

Підпис професора О.Б.Скасківа засвідчую,  
Вчений секретар Львівського національного  
університету імені Івана Франка



О.С.Грабовецька