

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ОСАУЛЕНКО Роман Юрійович

УДК 517.5

ДИСЕРТАЦІЯ

**СИНГУЛЯРНІ НІДЕ НЕ МОНОТОННІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ
ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ**

01.01.01 — Математичний аналіз

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ Р. Ю. Осауленко

Науковий керівник: **Працьовитий Микола Вікторович**,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2021

АНОТАЦІЯ

Осауленко Р. Ю. Сингулярні ніде не монотонні функції та їх фрактальні властивості. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — Математичний аналіз. — Інститут математики НАН України, Київ, 2021.

Дисертаційне дослідження виконано у лабораторії фрактального аналізу відділу динамічних систем і фрактального аналізу Інституту математики НАН України.

Робота виконана в галузі конструктивної теорії локально складних неперервних функцій з фрактальними властивостями. Вона присвячена сингулярним (монотонним та ніде не монотонним) функціям і засобам їх вивчення.

Традиційно сингулярною називають функцію обмеженої варіації, яка має похідну, рівну нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега. Клас таких функцій широкий, але вивчені вони мало. Причини цьому різні. Від поширеного хибного стереотипу, що важко вказати реальні процеси, які ними описуються, до відсутності ефективних засобів їх опису та вивчення.

Разом з цим мляве вивчення сингулярних функцій триває уже більше 100 років і значні зрушення інтересу до них спостерігається принаймні останні 30 років. Це відбувається зокрема завдяки Київській групі дослідників сингулярних розподілів ймовірностей і функцій з фрактальними властивостями. Представники цієї групи: Барановський О. М., Віннішин В. Ф., Гончаренко Я. В., Ісаєва Т. М., Лисенко І. М., Макаруч О. П., Нікіфоров Р. О., Працьовитий М. В., Свинчук О. В., Торбін Г. М., Чуй-

ков А. С. та інші.

Дисертаційна робота складається з анотацій українською й англійською мовами, переліку скорочень і умовних позначень, вступу, семи розділів, поділених на підрозділи, висновків до кожного розділу й загальних висновків, списку використаних джерел і додатку.

Основними об'єктами дослідження є:

- ніде не монотонні неперервні функції:
 - задані за допомогою різних зображень дійсних чисел;
 - задані як границя функціональної послідовності;
 - задані як композиція ніде не монотонних та сингулярних функцій (зокрема ті, що є композицією ніде не диференційовної та сингулярної функцій).
- Оператори диференціювання (узагальнення та їх аналоги), що дозволяють спростити дослідження функцій зі складною локальною структурою.
- Фрактальні властивості сингулярних та ніде не монотонних функцій.

У вступі обґрунтовано актуальність дослідження, визначено об'єкт, предмет, мету і завдання, зазначено наукову новизну одержаних результатів, особистий внесок здобувача.

Перший розділ представлено огляд літератури з тем які мають безпосередній зв'язок з темою дослідження, наведено основні поняття і твердження.

Другий розділ присвячений дослідженню частот цифр \tilde{Q} -зображення числа. Отримані результати були використані для встановлення факту існування сингулярної функції необмеженої варіації. У цьому розділі: встановлено нормальну властивість \tilde{Q} -зображення чисел (це така властивість, яка виконується для майже всіх чисел у розумінні міри Лебега); сконструйовано зліченну неабелеву групу неперервних перетворень відрізка $[0; 1]$,

які зберігають хвости Q_s -зображення числа; побудовано континуальний клас неперервних функцій, які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа без збереження хвостів.

У третьому розділі представлено (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідну, як границю

$$\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \mathbf{u}(h)) - f(x_0 - \mathbf{v}(h))}{\mathbf{u}(h) + \mathbf{v}(h)},$$

де (\mathbf{u}, \mathbf{v}) — пара нескінченно малих у нулі функцій, для яких існує проколотий δ -окіл нуля, у якому $\mathbf{u}(h) \neq \mathbf{v}(h)$. Вона є узагальненням класичної та циліндричної похідної. Доведено її властивості та встановлено зв'язок з класичною похідною.

Розглянуто застосування (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідної для:

- розкриття невизначеностей в границях, зокрема вдалось отримати певне узагальнення правила Лопіталя;
- вивчення диференціальних властивостей строго монотонних функцій (на прикладі функції Мінковського, а також встановлення факту сингулярності неперервних функцій, які зберігають частоти Q_s -зображення числа без збереження хвостів);
- дослідження диференціальних властивостей модельного класу ніде не монотонних функцій, які є границями рекурентних функціональних послідовностей.

У четвертому розділі розглянуто аналог (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідної як границю

$$\boxtimes_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0)}{\square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}x},$$

де (\mathbf{u}, \mathbf{v}) — пара невід'ємних нескінченно малих у нулі функцій, для яких існує проколотий δ -окіл нуля, у якому $\mathbf{u}(h) \neq \mathbf{v}(h)$, а $\square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0)$ — коливання функції f на відрізку: $\square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) = \sup_{t \in [x_0 - \mathbf{v}(h); x_0 + \mathbf{u}(h)]} f(t) - \inf_{t \in [x_0 - \mathbf{v}(h); x_0 + \mathbf{u}(h)]} f(t)$.

Вивчено властивості та встановлено зв'язок з класичною та (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідною. Теоретичні результати другого та четвертого розділу дозволили

показати існування континуального класу ніде не монотонних сингулярних функцій необмеженої варіації. Також аналог (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідної застосовано для встановлення ніде не диференційовності аналогу Трибін-функції, означеної в термінах ланцюгових A_2 -дробів та негатрійкового зображення.

У п'ятому розділі означено логарифмічну (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідну як границю

$$\mathfrak{L}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left| f(x_0 + \mathbf{u}(h)) - f(x_0 - \mathbf{v}(h)) \right|}{\ln |\mathbf{u}(h) + \mathbf{v}(h)|},$$

де (\mathbf{u}, \mathbf{v}) — пара нескінченно малих у нулі функцій, для яких існує проколотий δ -окіл нуля, у якому $\mathbf{u}(h) \neq \mathbf{v}(h)$.

Досліджено її властивості та встановлено зв'язок з (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідною та її аналогом. В цьому розділі також описується узагальнення дотичних, що дозволяє будувати розклади деяких функцій у степеневі ряди з дійсними показниками, а також розкладати в ланцюгові дроби розв'язки деяких диференціальних рівнянь.

Розділ 6 присвячений аналогу логарифмічної (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідної, як границі

$$\Lambda_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0)}{\ln \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} x},$$

де (\mathbf{u}, \mathbf{v}) — пара невід'ємних нескінченно малих у нулі функцій, для яких існує проколотий δ -окіл нуля, у якому $\mathbf{u}(h) \neq \mathbf{v}(h)$, а $\square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0)$ — коливання функції f на відрізку $[x_0 - \mathbf{v}(h); x_0 + \mathbf{u}(h)]$.

Вивчено основні властивості, встановлюється зв'язок з (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідною, з її аналогами та модифікаціями, а також зв'язок з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича носія функції. Як наслідок, вдалось показати, що носії функцій, які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа без збереження хвостів є суперфрактальними множинами (їх розмірність Хаусдорфа-Безиковича дорівнює 1). За допомогою описаного аналогу, було проведено дослідження на диференційовність композиції ніде не диференційовної функції (вона розглянута в роботі Н. Okamoto "A remark on continuous,

nowhere differentiable functions”) та функції Салема. У результаті, знайдено достатні умови недиференційовності композиції цих функцій, а також її сингулярності (як обмеженої, так і необмеженої варіації).

У цьому розділі розглянуто адаптацію ідеї використання прямих та обернених відображень, які активно використовувались при побудові (u, v) -похідної разом з її аналогами та модифікаціями, для дослідження збіжності додатних рядів та абсолютної збіжності невластних інтегралів. Отримано нові ознаки збіжності додатних рядів (невластних інтегралів); знайдено достатні умови збіжності-розбіжності узагальненого ряду Флінт Гілла (Flint Hills series) і, як наслідок, встановлено, що міра ірраціональності числа π дорівнює 2.

Додаток містить список публікацій здобувача на тему дисертації й відомості про апробацію результатів дисертації.

Ключові слова: частота цифри числа у його зображенні, \tilde{Q} -зображення числа, ніде не монотонна функція, ніде не диференційовна функція, сингулярна функція, розмірність Хаусдорфа-Безиковича, (u, v) -похідна, аналог (u, v) -похідної, логарифмічна (u, v) -похідна, аналог (u, v) -похідної, додатні ряди, невластні інтеграли, ланцюговий дріб.

ABSTRACT

Osauleiko R. Y. Singular non where monotonic functions and its fractal properties. — Qualification scientific work in the form of manuscript.

Thesis for candidate of physical and mathematical sciences degree in speciality 01.01.01 — Mathematical analysis. — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2021.

Thesis research completed in the laboratory of fractal analysis of the department of dynamic systems and fractal analysis of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

The work has been performed in the field of constructive theory of locally complex continuous functions with properties of fractal. It is dedicated to singular (monotonic and nowhere monotonic) functions and means of their study. The function of bounded variation, which has a derivative equal to zero almost everywhere in Lebesgue's understanding, is traditionally called singular. The class of such functions is wide, but they are less understood. The reasons for this are different. From the widespread false stereotype that it is difficult to indicate the real processes as described by them, to the effective means of describing and studying them. At the same time, the slow study of singular functions has been going on for more than 100 years, and significant shifts in interest in them have been observed for at least the last 30 years. It happens due to a particular Kyiv group of researchers of singular distributions of probabilities and functions with properties of fractal. The representatives of this group are O. M. Baranovsky, V. F. Vinnishin, Y. V. Goncharenko, T. M. Isaeva, I. M. Lysenko, O. P. Makarchuk, R. O. Nikiforov, M. V. Pratsovity, O. V. Shinchuk, G. M. Torbin, A. S. Chuikov and others.

The thesis consists of annotations in Ukrainian and English, a list of abbreviations and conditional designations, introduction, seven distributions, shared for distributions, conclusions to each section and general conclusions, a list of used sources and an application. The main objects of research are:

- nowhere monotonic continuous functions:
 - are specified by different representations of real numbers;
 - are specified as the limit of the functional series;
 - are specified as a composition of nowhere monotonic and singular functions (especially those that are a composition of nowhere differentiated and singular functions).
- Operators of differentiation of their generalization and their analogues, which make it easier to find out the function with a locally complicated structure.
- Fractal's properties of singular and nowhere monotonic functions.

The introduction substantiates the relevance of the study, defines the object, subject, purpose and objectives, indicates the scientific novelty of the results, the personal contribution of the applicant.

The first section presents an overview of the lecture on topics that have a direct relationship with the topic of the link, the basic concepts and statements are given.

The second section is devoted to the study of the frequencies of digits \tilde{Q} -representation if a real number. The obtained results were used to establish the fact of the existence of a singular function of unlimited variation. This section sets the normal property of the \tilde{Q} -representation of real number (such a property, which holds for almost all numbers in the sense of the Lebesgue measure); a countable non-Abelian group of continuous mapping of unit segment, which store the ends of the $Q_s t$ -representation of number is constructed; a continuous class of continuous functions is constructed, which preserve the frequencies of digits of the Q_s -representation of the number

without preserving the ends.

In the third section, the (\mathbf{u}, \mathbf{v}) derivative is presented as a limit

$$\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \mathbf{u}(h)) - f(x_0 - \mathbf{v}(h))}{\mathbf{u}(h) + \mathbf{v}(h)},$$

where (\mathbf{u}, \mathbf{v}) — is a pair of infinitesimally small at zero functions for which there is δ -neighborhood, in which $\mathbf{u}(h) \neq \mathbf{v}(h)$. It is a generalization of the classical and cylindrical derivative. Its properties are proved and the connection with the classical derivative is established. The use of (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -derivative is considered for:

- to solve of uncertainties within the limits, in particular it was possible to obtain a certain generalization of Lopit's rule;
- study of the differential properties of strictly monotonic functions (on the example of the Minkowski function, as well as the establishment of the fact of singularity of continuous functions that preserve the frequencies of digits of Q_s -representation of a number without preserving the ends;
- investigation of the differential properties of the model class of nowhere monotonic functions, which are the limit of recurrent functional sequences.

In the fourth section, the analogue of the (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -derivative is considered as a limit

$$\boxtimes_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0)}{\square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}x},$$

where (\mathbf{u}, \mathbf{v}) is a pair of non-negative infinitesimal functions for which there is δ -neighborhood, in which $\mathbf{u}(h) \neq \mathbf{v}(h)$ and $\square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0)$ is a oscillation of function f at segment $[x_0 - \mathbf{v}(h); x_0 + \mathbf{u}(h)]$.

The properties are studied and a connection is established with the classical and (\mathbf{u}, \mathbf{v}) - derivative.

The theoretical results of this and the second section made it possible to show the existence of a continual class of nowhere monotone singularity of functions of unbounded variation. Also, the analogue of the (\mathbf{u}, \mathbf{v}) - derivative was used to establish nowhere differentiable of the analogue of the Tribine function, denoted in terms of continued A2-fractions and a nega-ternary notation.

In the fifth section, the logarithmic (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -derivative was defined as limit

$$\mathfrak{L}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left| f(x_0 + \mathbf{u}(h)) - f(x_0 - \mathbf{v}(h)) \right|}{\ln |\mathbf{u}(h) + \mathbf{v}(h)|},$$

where (\mathbf{u}, \mathbf{v}) — is a pair of infinitesimally small at zero functions for which there is δ -neighborhood, in which $\mathbf{u}(h) \neq \mathbf{v}(h)$.

Its properties are investigated and a connection with the (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -derivative and its analog is established. This section also describes generalizations of tangents, which allows one to construct schedules of some functions in power series with real exponents, as well as expand solutions of some differential equations into continued fractions.

Section 6 is devoted to an analogue of the logarithmic (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -derivative, as a limit

$$\Lambda_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0)}{\ln \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}x},$$

where (\mathbf{u}, \mathbf{v}) is a pair of non-negative infinitesimal functions for which there is δ -neighborhood, in which $\mathbf{u}(h) \neq \mathbf{v}(h)$ and $\square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0)$ is a oscillation of function f at segment $[x_0 - \mathbf{v}(h); x_0 + \mathbf{u}(h)]$.

The main properties are studied, the connection with the (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -derivative, with its analogues and modifications, as well as the connection with the Hausdorff-Besicovitch dimension of the function carrier are established.

As a result, it was succeeded to show that the carriers of functions that store the frequencies of digits of the Q_s -representation of a number without

preserving ends are super fractal sets (their Hausdorff-Besicovitch dimension is equal to 1).

Using the described analogue, a study was conducted on the differentiation of the composition of the nowhere differentiable function (it was considered in the work of H. Okamoto "A remark on continuous, nowhere differentiable functions") and Salem function. As a result, sufficient conditions were found for the non-differentiability of these compositions of functions, as well as for its singularity (both limited and unlimited variation).

The 7 section was considered as the adaptation of the idea of using direct and inverse mappings (which were actively used in constructing (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -derivative together with its analogues and modifications) to study the convergence of positive series and the absolute convergence of improper integrals. New signs of convergence of positive series (non-proper integrals) are obtained; sufficient conditions for convergence-divergence of the generalized Flint Hills series are found and, as a consequence, it is established that the measure of irrationality of the number π is equal to 2.

The appendix contains a list of the applicant's publications on the topic of the dissertation and information about the approbation of the dissertation results.

Key words: digit frequency of representation, \tilde{Q} -representation of a number, nowhere monotonic function, nowhere differentiable function, singular function, Hausdorff-Besicovitch dimension, (\mathbf{u}, \mathbf{v}) - derivative, analog (\mathbf{u}, \mathbf{v}) - derivative, logarithmic (\mathbf{u}, \mathbf{v}) - derivative, analog of (\mathbf{u}, \mathbf{v}) - derivative, positive series, improper integrals.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

- 1^a. Osaulenko R. Normal properties of q -representation of real numbers from $[0; 1]$ // Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations: Abstracts. — 2018. — С. 17.
- 2^a. Osaulenko R. Y. An analogue of the logarithmic (u, v) -derivative and its application // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2020. — Vol. 26, no. 2. — P. 179–188. — Access mode: <http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=1349>.
- 3^a. Осауленко Р. Ю. Неперервні перетворення одиничного відрізка, які зберігають частоти цифр q_s -зображення числа // Всеукраїнська науково-матодична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі». Збірник тез. — С. 59.
- 4^a. Осауленко Р. Ю. Група неперервних перетворень відрізка $[0; 1]$, які зберігають частоти цифр q_s -зображення числа // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2016. — Т. 46, № 3. — С. 191–204.
- 5^a. Осауленко Р. Ю. Група неперервних перетворень відрізка $[0; 1]$, які зберігають частоти цифр q_s -зображення числа // П'ята Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання. Тези доповідей». — 2016. — С. 39.
- 6^a. Осауленко Р. Ю. Ознаки збіжності додатних рядів // Матеріали Міжнародної наукової конференції "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь". — 2017. — С. 64–65.
- 7^a. Осауленко Р. Ю. Ознаки збіжності додатних числових рядів та абсолютної збіжності деяких невластних інтегралів // Міжнародна конфе-

- ренція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917-2008). Тези доповідей. — 2017. — С. 44.
- 8^a. Осауленко Р. Ю. Частоти та збіжність додатних числових рядів // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2017. — Т. 14, № 4. — С. 65–81.
- 9^a. Осауленко Р. Ю. Узагальнення класичної похідної функції в точці і його застосування // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2018. — Т. 15, № 1. — С. 100–113.
- 10^a. Осауленко Р. Ю. Упаковні в точці функціональні послідовності // Сьома Всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики. — 2018.
- 11^a. Осауленко Р. Ю. Ніде не монотонні сингулярні функції необмеженої варіації // Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Тези доповідей. — 2019. — С. 27.
- 12^a. Осауленко Р. Ю. Один клас ніде не монотонних функцій, який містить сингулярні функції // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2019. — Т. 16, № 3. — С. 148 – 159.
- 13^a. Осауленко Р. Ю. Узагальнення класичної похідної функції й аналог оператора диференціювання як інструментарій для вивчення диференціальних властивостей функцій // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2019. — Т. 16, № 2. — С. 121–139.

ЗМІСТ

Список скорочень та позначень	18
Вступ	19
Розділ 1. Огляд літератури і концептуальні засади дослідження	25
1.1. Зображення дійсного числа	25
1.1.1. Q_s -зображення числа	25
1.1.2. \tilde{Q} -зображення числа	27
1.1.3. G_3^* -зображення числа	28
1.2. Строго зростаючі сингулярні функції	29
1.2.1. Функція Мінковського	29
1.2.2. Функція Салема	30
1.3. Ніде не монотонні функції	31
1.3.1. Функції обмеженої варіації	31
1.3.2. Функції необмеженої варіації	32
1.4. Висновки до розділу	33
Розділ 2. Частоти цифр зображення числа та функції пов'язані з ними	34
2.1. Частота цифри у \tilde{Q} -зображенні числа	34
2.2. Нормальна властивість \tilde{Q} -зображення числа	36
2.3. Група неперервних перетворень відрізка $[0; 1]$, які зберігають хвости Q_s -зображення чисел	38
2.3.1. Перетворення, що зберігають хвости Q_s -зображення чисел	38
2.3.2. Властивості сітки l шарів	42

2.3.3. Група перетворень, які зберігають хвости Q_s - зображення числа	46
2.4. Клас неперервних функцій, які зберігають частоти цифр Q_s - зображення числа без збереження хвостів	47
2.5. Висновки до розділу	51
Розділ 3. (u, v)-похідна та її застосування	52
3.1. Означення та основні властивості	52
3.1.1. Зв'язок (u, v) -похідної зі класичною похідною	54
3.2. Застосування (u, v) -похідної до розкриття невизначеностей у границях	59
3.3. Застосування (u, v) -похідної для вивчення диференціальних властивостей строго монотонних функцій	63
3.3.1. Функція Мінковського	64
3.3.2. Сингулярність функцій, які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа, без збереження хвостів	66
3.4. Приклад класу ніде не монотонних функцій обмеженої варі- ації, який містить сингулярні	67
3.5. Висновки до розділу	71
Розділ 4. Аналог (u, v)-похідної та його застосування	73
4.1. Означення оператора \boxtimes_v^u та основні властивості	73
4.1.1. Зв'язок оператора \boxtimes_v^u з похідною	74
4.2. Ніде не монотонна сингулярна функція необмеженої варіації	79
4.3. Ніде не диференційовність аналогу Трибін-функції означеної в термінах ланцюгових A_2 -дробів та негатрійкового зображе- ння	82
4.4. Висновки до розділу	84
Розділ 5. Логарифмічна (u, v)-похідна та її застосування	85
5.1. Означення та основні властивості	85

	16
5.2. Властивості логарифмічної $(h, 0)$ -похідної	87
5.3. Одне узагальнення дотичних	89
5.3.1. \mathfrak{L} -дотичні та розклад функції в степеневий ряд з дійсними показниками	90
5.4. Алгоритми розкладу розв'язків звичайного диференційного рівняння в ланцюговий дріб	92
5.4.1. Основна ідея	92
5.4.2. Алгоритм із залученням правила Лопіталя	93
5.4.3. Алгоритм на основі розкладу розв'язку в степеневий ряд з цілими показниками	95
5.4.4. Приклади розкладів деяких елементарних функцій в ланцюгові дроби	95
5.5. Висновки до розділу	96
Розділ 6. Аналог логарифмічної (u, v)-похідної та його застосування	97
6.1. Означення та основні властивості	97
6.2. Властивості аналога логарифмічної $(h, 0)$ -похідної	102
6.3. Властивості аналога логарифмічної (h, h) -похідної	106
6.4. Зв'язок Λ , Λ_h^h з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича носія функції	108
6.5. Розмірності Хаусдорфа-Безиковича носіїв побудованих функцій які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа без збереження хвостів	111
6.6. Застосування Λ та Λ_h^h для дослідження диференціальних властивостей композиції сингулярної та ніде недиференційовної функцій	113
6.7. Висновки до розділу	114
Розділ 7. Дослідження збіжності додатних рядів	116

7.1.	Збіжність числових рядів з додатними членами	116
7.1.1.	Чутливість ознак збіжності на основі $g_n^j(x)$	118
7.2.	Додаткові твердження для встановлення збіжності додатних рядів	119
7.3.	Одночасна збіжність-розбіжність додатних числових рядів .	121
7.4.	Узагальнений ряд Флінт Гілла та міра ірраціональності числа π	124
7.5.	Ознаки абсолютної збіжності невластних інтегралів	127
7.5.1.	Ознаки абсолютної збіжності невластних інтегралів першого роду	129
7.6.	Висновки до розділу	130
	Загальні висновки	131
	Список використаних джерел	133
	Додаток А. Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації	141
A.1.	Список публікацій здобувача за темою дисертації	141
A.2.	Відомості про апробацію результатів дисертації	143

СПИСОК СКОРОЧЕНЬ ТА ПОЗНАЧЕНЬ

- \mathbb{N} – множина натуральних чисел;
 \mathbb{R} – множина дійсних чисел;
 $\nu_j^{Q_s}(x)$ – частота цифри j Q_s -зображення числа x ;
 $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_s}$ – циліндр n -го рангу Q_s -зображення числа;
 $\mathbb{V}_{[a;b]} f$ – повна варіація функції f на відрізку $[a; b]$;
 $\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0)$ – (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідна функції f в точці x_0 ;
 $\square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0)$ – коливання функції f на відрізку з кінцями в точках $x_0 + \mathbf{u}$, $x_0 - \mathbf{v}$;
 $\boxtimes_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0)$ – аналог (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідної функції f в точці x_0 ;
 $\mathfrak{L}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0)$ – логарифмічна (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідна функції f в точці x_0 ;
 $\Lambda_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0)$ – аналог логарифмічної (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідної функції f в точці x_0 ;
 \equiv – рівність за означенням.

ВСТУП

Робота виконана в галузі конструктивної теорії локально складних неперервних функцій з фрактальними властивостями. Вона присвячена сингулярним (монотонним та ніде не монотонним) функціям і засобам їх вивчення.

Актуальність теми. Сингулярною, традиційно, називають функцію обмеженої варіації, яка має похідну рівну нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега. Клас таких функцій широкий, але вивчені вони мало. Причини досить різні: від поширеного хибного стереотипу (що важко вказати реальні процеси, які вони описують), до відсутності ефективних засобів їхнього опису і дослідження.

Разом з цим мляве вивчення сингулярних функцій тривало майже століття і значне зрушення інтересу до них спостерігається впродовж принаймні 30 останніх років. Це відбувається зокрема завдяки Київській групі дослідників сингулярних розподілів ймовірностей і функцій зі фрактальними властивостями. Представники цієї групи: Барановський О. М., Віннішин В. Ф., Гончаренко Я. В., Ісаєва Т. М., Лисенко І. М., Макарчук О. П., Нікіфоров Р. О., Працьовитий М. В., Свинчук О. В., Торбін Г. М., Чуйков А. С. та інші.

Завдяки інтенсивному розвитку теорії фракталів (фрактальної геометрії та фрактального аналізу) суттєво зріс інтерес до неперервних ніде не монотонних функцій. Істотно збагатився арсенал засобів їх задання і дослідження, зокрема завдяки появі нових систем кодування (зображення) дійсних чисел (Гончаренко Я. В., Дмитренко С. О., Кюрчев Д. М., Лисенко І. М., Маслова Ю. П., Працьовитий М. В., Торбін Г. М., Фещенко О. Ю.). Кожна неперервна недиференційовна функція є ніде не монотонною, але

клас останніх суттєво ширший. Серед них існують функції обмеженої і необмеженої варіації, а функції обмеженої варіації є диференційовними майже скрізь. Як виявилось (Агаджанов А. М., Гарг К., Працьовитий М. В., Шукла Ю.), існують ніде не монотонні сингулярні функції, які сьогодні є ще достатньо загадковим об'єктом теорії функцій. Цікаво охарактеризувати масивність цього класу у просторі $C_{[0;1]}$, достатньо повно аргументувати інтерес до таких об'єктів і розробити засоби їх ефективного вивчення. В значній мірі дана робота підпорядкована цим завданням, головним з яких є останнє.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дослідження проводились у рамках таких науково-дослідницьких тем Інституту математики Національної академії наук України і Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова:

- фрактальний аналіз неперервних функцій та мір (№ державної реєстрації 0111U000053);
- фрактальний аналіз математичних об'єктів зі складною локальною будовою функцій та мір (№ державної реєстрації 0107U000583);
- фрактальна геометрія числових рядів і фрактальний аналіз стохастичних об'єктів, з ними пов'язаних (№ державної реєстрації 0118U002059);
- статистика сингулярних розподілів ймовірностей і фрактальні неперервні функції випадкових величин (№ державної реєстрації (№ державної реєстрації 0118U002059);

Об'єктом дослідження є сингулярні й неперервні ніде не монотонні функції, засоби й інструментарій їхнього опису і дослідження.

Предметом дослідження є оператори диференціювання, їхні узагальнення й аналоги, властивості і застосування на модельних класах сингулярних і ніде не монотонних неперервних функцій.

Мета дослідження. Розробити систему засобів для вивчення диференціальних і фрактальних властивостей неперервних локально складних функцій (сингулярних, ніде не монотонних, недиференційовних), яка би стала суттєвим розширенням класичних засобів і ефективним знаряддям для встановлення факту належності об'єкта до відповідної категорії. Апробувати створену систему на класах модельних функцій (класичних і нових).

Основними завданнями дисертаційного дослідження є:

1. Побудувати основи теорії циліндричних похідних для Q^* - і \tilde{Q} -зображення дійсних чисел. Окреслити нішу застосовності циліндричної похідної. Навести приклади її ефективності.
2. Знайти еквівалентні означення частоти цифри в зображенні числа і довести нові критерії існування частоти.
3. Створити теорію (u, v) -похідної як узагальнення класичної й циліндричної похідної. Навести приклади ефективного використання. Розглянути аналоги (u, v) -похідної.
4. Створити теорію логарифмічної (u, v) -похідної і вказати на її застосування для вивчення фрактальних властивостей функцій.
5. Знайти застосування запропонованих конструкцій у теоріях додатних рядів і невластивих інтегралів, а також у фрактальному аналізі різних математичних об'єктів.
6. Описати групу неперервних перетворень відрізка, які зберігають хвости Q -зображення чисел, установити їхню масивність.

Методи дослідження. У роботі були використані методи метричної теорії чисел, математичного аналізу, теорії функцій дійсної змінної, теорії фракталів (фрактальної геометрії і фрактального аналізу).

Наукова новизна отриманих результатів.

- Запропоновано конструкцію (u, v) -похідної, яка є узагальненням класичної й циліндричної похідної, знайдено аналоги (u, v) -похідної

- і вивчено їх властивості.
- Наведено приклади неперервних ніде не монотонних сингулярних функцій необмеженої варіації, залежних від параметрів, які набувають континуальну множину значень.
 - Досліджено диференціальні властивості композиції сингулярної функції Салема і ніде не диференційовної.
 - Побудовано два алгоритми, які дозволяють розкладати розв'язки диференціальних рівнянь в ланцюгові дроби.
 - Досліджено розмірність Гаусдорфа-Безиковича носіїв функцій з континуального класу неперервних функцій, які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа без збереження хвостів.
 - Запропоновано конструкції логарифмічної (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідної і її аналогу, проілюстровано їхню продуктивність і вивчено властивості.
 - Встановлено достатні умови збіжності/розбіжності узагальненого ряду Флінт Гілла (Flint Hills).
 - Доведено кілька нових ознак збіжності додатних числових рядів і абсолютної збіжності невластних інтегралів.

Практичне значення отриманих результатів. Робота має теоретичний характер, але отримані результати можуть бути використаними при дослідженні об'єктів неперервної математики зі локально складною структурою (множин, функцій, мір, динамічних систем). Сподіваємось, що запропоновані конструкції різних операторів диференціювання допоможуть в значній частині випадків спростити задачу вивчення диференціальних властивостей функцій і спектральних властивостей ймовірнісних мір, полегшать задачу встановлення їх лебегівської структури. Окремі твердження будуть корисними у задачах відшукування наближених розв'язків звичайних диференціальних рівнянь і встановлення факту збіжності додатних рядів та інтегралів.

Особистий внесок здобувача. Наукові результати, які виносяться на захист, отримано автором самостійно. Всі опубліковані роботи за темою дисертації не мають співавторів. Визначення напрямку досліджень, постановка задач та загальне керівництво роботою належать науковому керівнику доктору фізико-математичних наук, професорові Працьовитому М. В..

Апробація матеріалів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідались на конференціях різних рівнів і наукових семінарах:

1. Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі» (Київ, 2016);
2. П'ята Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 2017);
3. Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвячена 85-річчю відомого українського математика, педагога та організатора освіти Шкіля Миколи Івановича (Київ, 2017);
4. Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю.О. Митропольського (1917-2008) (Київ, 2017);
5. Сьома Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 2018);
6. The Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, September 24-28 (Kyiv, 2018);
7. Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики та фізики» (Київ, 2019);
8. Семінар з фрактального аналізу, Інститут математики НАН України та Національний педагогічний університет імені М. П. Драгома-

нова (керівник: д-р фіз.-мат. наук, проф. М. В. Працьовитий);

9. Львівський міжвузівський семінар з теорії аналітичних функцій (керівники: д-р фіз.-мат. наук, проф. А. А. Кондратюк, д-р фіз.-мат. наук, проф. О. Б. Скасків).
10. Семінар кафедри диференціальних рівнянь Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" (керівник: д-р фіз.-мат. наук, проф. М. Є. Дудкін).

Публікації. Основні результати дисертаційного дослідження опубліковано в шести статтях [27, 45, 49, 50, 53, 54] у наукових виданнях, які входять до переліку фахових видань МОН України, серед них одна стаття [27], яка індексується міжнародною наукометричною базою "Scopus". Короткі відомості по результатам дослідження наведено у матеріалах конференцій [26, 44, 46, 47, 48, 51, 52].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, списку скорочень та позначень, вступу, семи розділів, розбитих на підрозділи, висновків до кожного розділу та й загальних висновків, списку використаних джерел (74 найменувань) і додатка (список публікацій автора, 13 найменувань). Загальний обсяг роботи – 144 сторінки.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І КОНЦЕПТУАЛЬНІ ЗАСАДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для задання сингулярних, ніде не монотонних, ніде не диференційовних функцій використовують функціональні ряди (наприклад, ніде не диференційовна функція Веєрштраса [15, 17]), функціональні послідовності (функція Кантора [58]), ланцюгові дроби (функція Мінковського [15, 58]), різні системи представлення та зображення чисел ([59, 60, 71]) тощо.

У цьому розділі ми наводимо означення базових понять та фактів, а також проводимо огляд літератури, що їх стосується.

1.1. Зображення дійсного числа

У цьому пункті коротко представлено факти про різні способи зображення дійсного числа, які будуть використовуватись в подальшому для побудови неперервних функцій зі складною локальною будовою (сингулярних, ніде не монотонних, майже скрізь недиференційовних та ніде не диференційовних).

1.1.1. Q_s -зображення числа. У роботах [29, 32, 55, 57, 58, 64, 65, 70] вивчаються властивості Q_s -зображення та різні математичні об'єкти, які з ним пов'язані. Нагадаємо його зміст.

Нехай $1 < s$ – фіксоване натуральне число, $A_s \equiv \{0, 1, \dots, s-1\}$ – алфавіт s -ої системи числення, $L = A_s \times A_s \times \dots \times A_s \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавітів, $Q_s \equiv \{q_0, q_1, \dots, q_{s-1}\}$ – заданий набір дійсних чисел, $q_i > 0$, $\sum_{j=0}^{s-1} q_j = 1$, $\beta_0 \equiv 0$, $\beta_k \equiv \sum_{j=0}^{k-1} q_j$, $k = 1, 2, \dots, s-1$.

Відомо [55, 58], що для будь-якого $x \in [0; 1]$ існує нескінченна послідовність $(\alpha_n) \in L$, така, що:

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots}^{Q_s}. \quad (1.1)$$

Подання числа x у вигляді ряду (1.1) називається Q_s -представленням числа x , а скорочений запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots}^{Q_s}$ – його Q_s -зображенням. При цьому $\alpha_k = \alpha_k(x)$ називається k -им Q_s -символом або Q_s -цифрою числа x .

Однією з простих задач, яка приводить до поняття Q_s -зображення числа є задача про вираз функції розподілу випадкової величини, s -ві цифри якої є незалежними і однаково розподіленими, причому вони набувають значень $0, 1, \dots, s-1$ з ймовірностями q_0, q_1, \dots, q_{s-1} відповідно [73].

Якщо послідовність цифр у Q_s -зображенні числа x є періодичною, то період у зображенні символізують круглі дужки.

Зліченна множина чисел має два Q_s -зображення. Це числа виду:

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k(0)}^{Q_s} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots [\alpha_k - 1](s-1)}^{Q_s},$$

вони називаються Q_s -раціональними, а решта Q_s -ірраціональними.

Зауваження 1.1. Якщо $q_0 = q_1 = \dots = q_{s-1} = \frac{1}{s}$, то Q_s -зображення є звичайним s -ковим розкладом числа. Тому Q_s -зображення є узагальненням s -го зображення числа. При цьому Q_s -символи числа є індексами у його представленні, а не коефіцієнти, як у s -ому розкладі.

Означення 1.1. Циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$, $c_i \in A_s$, називається множина $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s}$, що складається з усіх чисел $x \in [0; 1]$, що мають Q_s -зображення, у яких перші m Q_s -символів співпадають з c_1, c_2, \dots, c_m відповідно, тобто $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s} = \{x : \alpha_j(x) = c_i, i = \overline{1, m}\}$.

Очевидною є рівність $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s} = \bigcup_{i=0}^{s-1} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^{Q_s}$.

Зазначимо, що циліндром $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s}$ рангу m є відрізок з кінцями:

$$a = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m(0)}^{Q_s} = \sum_{k=1}^m \left(\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right), \quad b = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m(s-1)}^{Q_s} = a + \prod_{i=1}^m q_{\alpha_i}.$$

Легко довести, що $\max \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s} = \min \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m [i+1]}^{Q_s}$.

Для довільного набору c_1, c_2, \dots, c_m цифр алфавіту Q_s -зображення числа виконується рівність (основна метрична тотожність):

$$\frac{\left| \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s} \right|}{\left| \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s} \right|} = q_i. \quad (1.2)$$

Нормальні властивості чисел відрізка $[0; 1]$ у їх Q_s -зображенні окремо здобуті засобами математичного аналізу та теорії ймовірностей. Вони отримані у термінах частот Q_s -зображень і описані у роботах [58, 63], [70].

1.1.2. \tilde{Q} -зображення числа. \tilde{Q} -зображення дійсного числа з $[0; 1]$ є узагальненням відомих систем зображення дійсних чисел: класичне s -кове зображення, Q_s -зображення. Нагадаємо його зміст [58].

Нехай маємо послідовність алфавітів $A_k = \{0, 1, \dots, m_k\}$, $m_k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $k \in \mathbb{N}$, $L = A_{m_1} \times A_{m_2} \times \dots \times A_{m_k} \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавітів; $\tilde{Q} = \{q_{i,j}\}$ – ”матриця” з нескінченною кількістю стовпців (k -ий стовпець містить m_k елементів), $i \in A_j$, $m_j \in \mathbb{N}_\infty = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $j \in \mathbb{N}$, така, що задовольняє наступні умови:

1. $0 < q_{i,j} < 1$ для всіх $i \in A_j$, $j \in \mathbb{N}$;
2. $\sum_{c=0}^{m_j} q_{c,j} = 1$ для всіх $j \in \mathbb{N}$;
3. $\prod_{j=1}^{\infty} \sup_{i \in A_j} \{q_{i,j}\} = 0$.

Відомо [58], що для будь якого дійсного числа $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$, така що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j j} \right) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{\tilde{Q}},$$

де $\beta_{0,n} = 0$, $\beta_{c,n} = \sum_{i=0}^{c-1} q_{i,n}$, $c \in A_{m_n}$.

Покладемо $A \equiv \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_{m_j}$.

Існує не більш ніж зліченна множина чисел, які мають два зображення, решта — мають єдине зображення (властивість нульової надлишковості). Зауважимо, що коли всі $m_j = s$, то \tilde{Q} -зображення називається Q_s^* -зображенням числа, а коли всі $m_j = \infty$, то Q_∞ -зображенням. В останньому випадку кожне число з проміжку $[0; 1)$ має єдине Q_∞ -зображення.

Основною метричним відношенням для \tilde{Q} -зображення числа є:

$$\frac{\left| \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n m}^{\tilde{Q}} \right|}{\left| \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{\tilde{Q}} \right|} = q_{m, n+1}. \quad (1.3)$$

Якщо послідовність (m_k) є послідовністю натуральних чисел, то \tilde{Q} -представлення є виразом функції розподілу випадкової величини цифри зображення якої рядом Кантора з послідовністю основ (s_k) , де $s_k = m_k + 1$, є незалежними.

1.1.3. G_3^* -зображення числа. Розглянемо матрицю

$$G_3^* = \begin{pmatrix} g_{01} & g_{02} & \dots & g_{0n} & \dots \\ g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} & \dots \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} & \dots \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

де $g_{0n} > 0$, $g_{2n} > 0$, $g_{1n} \leq 0$, $|g_{in}| < 1$, $g_{0n} + g_{1n} + g_{2n} = 1$ і $\prod_{j=1}^{\infty} \max_{i=0,1,2} |g_{ij}| = 0$.

Довільне число $x \in [0; 1]$ можна представити у вигляді:

$$x = \delta_{\alpha_1 1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\delta_{\alpha_n n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j j} \right) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{G_3^*},$$

де $\alpha_i \in A_3$, $\delta_{0n} = 0$, $\delta_{1n} = g_{0n}$, $\delta_{2n} = g_{0n} + g_{1n}$.

Легко довести, що всі $\delta_{in} > 0$ при $i \in A_3$, $n \in \mathbb{N}$.

Зазначимо, що G_3^* -зображення числа має властивість нульової надлишковості лише тоді, коли вироджується в Q_3^* -зображення.

Для G_3^* -зображення числа виконується рівність (основна метрична тождність):

$$\frac{\left| \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n i}^{G_3^*} \right|}{\left| \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{G_3^*} \right|} = |g_{i, n+1}|. \quad (1.5)$$

У разі, коли $g_{i1} = g_{i2} = \dots = g_{in} = \dots = g_i$ будемо замість позначення G_3^* використовувати G_3 .

1.2. Строго зростаючі сингулярні функції

1.2.1. Функція Мінковського. Однією з найбільш відомих строго зростаючих неперервних сингулярних функцій є функція Мінковського [23], яка, як показав Салем [35], в ірраціональних точках аналітично виражається рядом [58] (в раціональних точках він є скінченним):

$$?(x) = ?\left([0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} 2^{1-(a_1+a_2+\dots+a_k)},$$

де $[0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{\dots}}}}}$ – елементарний ланцюговий дріб.

Функція Мінковського $?(x)$ взаємно однозначно відображає:

- раціональні числа в раціональні числа зі скінченною кількістю цифр у двійковому представленні;
- квадратичні ірраціональні числа в раціональні числа з періодичними цифрами у двійковому представленні.

Огляд результатів дослідження функції Мінковського, інтерес до якої не згасає більше століття [7, 19, 20, 23, 25, 58], якісно проведено у дисертаційному дослідженні Ісаєвої Т. М. [38]. У роботах [39, 30] функція Мінковського покладена в основу кодування чисел засобами нескінченного алфавіту, назване Δ^μ -зображенням чисел, яке ефективно використане у розбудові тополого-метричної і ймовірнісної теорії дійсних чисел.

У розділі 3, розглядаючи застосування (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідної, ми використовуємо функцію Мінковського в якості модельного прикладу.

1.2.2. Функція Салема. Сингулярно неперервна строго зростаюча функція Салема, залежна від параметра $q_0 \in (0; 1)$, означається на $[0; 1]$ рівністю

$$\begin{aligned} S(x) &= S\left(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^2\right) = \\ &= \alpha_1 q_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\alpha_k q_{1-\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

де $q_1 \equiv 1 - q_0$, $\alpha_n q_{1-\alpha_n} \equiv \beta_{\alpha_n}$, $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \alpha_n$ – класичне двійкове зображення числа, $\alpha_n \in A_2 = \{0, 1\}$.

При $q_0 = \frac{1}{2}$ функція $S(x) = x$ є лінійною, а при $q_0 \neq \frac{1}{2}$ – сингулярно неперервною. Вона вивчалась в роботах [2, 5, 18, 22, 35, 37, 73].

Функція Салема є розв'язком системи функціональних рівнянь

$$\begin{cases} F\left(\frac{x}{2}\right) = q_0 F(x); \\ F\left(\frac{1+x}{2}\right) = q_0 + q_1 F(x), \end{cases}$$

де $q_1 = 1 - q_0$, $q_0 \in (0; 1)$.

Графік функції Салема є самоафінною множиною з самоафінною розмірністю, яка є розв'язком рівняння:

$$\left(\frac{q_0}{2}\right)^{\frac{x}{2}} + \left(\frac{q_1}{2}\right)^{\frac{x}{2}} = 1.$$

Функція Салема є функцією розподілу випадкової величини, двійкові цифри якої є незалежними, однаково розподіленими випадковими величинами, які набувають значень 0 і 1 з ймовірностями q_0 , $q_1 = 1 - q_0$ відповідно.

У розділі шостому ми використовуємо функцію Салема, під час конструювання сингулярних ніде не монотонних функцій необмеженої варіації.

1.3. Ніде не монотонні функції

Означення 1.2. Функція є ніде не монотонною, якщо не існує жодного як завгодно малого проміжку монотонності.

1.3.1. Функції обмеженої варіації. Нагадаємо означення повної варіації функції на відрізку $[a; b]$ відповідно до [43].

Нехай на відрізку $[a; b]$ задана скінченна функція $f(x)$. Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ і утворимо суму $V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$.

Означення 1.3. Точна верхня грань множини всіх можливих значень сум V називають повною варіацією функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ (далі варіація функції) і позначається $V_{[a;b]} f$.

Якщо $V_{[a;b]} f \in \mathbb{R}$, то кажуть, що функція f – функція обмеженої варіації.

Відомо [43], що неперервна функція обмеженої варіації представляється у вигляді різниці двох неперервних зростаючих функцій. Відома теорема Лебега стверджує, що неперервна монотонна функція майже скрізь (у розумінні міри Лебега) має скінченну похідну. Таким чином, неперервна функція обмеженої варіації має скінченну похідну майже скрізь.

1.3.1.1. Ніде не монотонні сингулярні функції. Нам вдалось знайти лише декілька прикладів сингулярних ніде не монотонних функцій [1, 13, 14, 36, 60]. Конструкції цих функцій [13, 14, 36, 60] ґрунтувались на використанні різних систем зображення чисел, окрім функції з роботи [1], яка є розв'язком системи диференціальних рівнянь.

Розглянемо приклад Працьовитого М. В. з роботи [60]:

$$f(x) = f\left(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^3\right) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{G_3^*}, \quad (1.7)$$

де G_3^* -зображення визначене нескінченною матрицею, стовпці якої задовольняють умови: $g_{0k} = g_{2k} = \frac{1}{2} + a_k$, $g_{1k} = -2a_k$, $a_k \in \left[0; \frac{1}{2}\right)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Функція (1.7) має такі властивості:

- вона є неперервною і коректно означеною;
- є ніде не монотонною;
- у трійково-раціональних точках — недиференційовною;
- у випадку існування похідної в точці $x_0 = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}^3$, вона обчислюється за формулою $f'(x_0) = \prod_{j=1}^{\infty} (3g_{c_j j})$.

За умови $a_k = 6^{-k}$ функція (1.7) є сингулярною ніде не монотонною функцією обмеженої варіації.

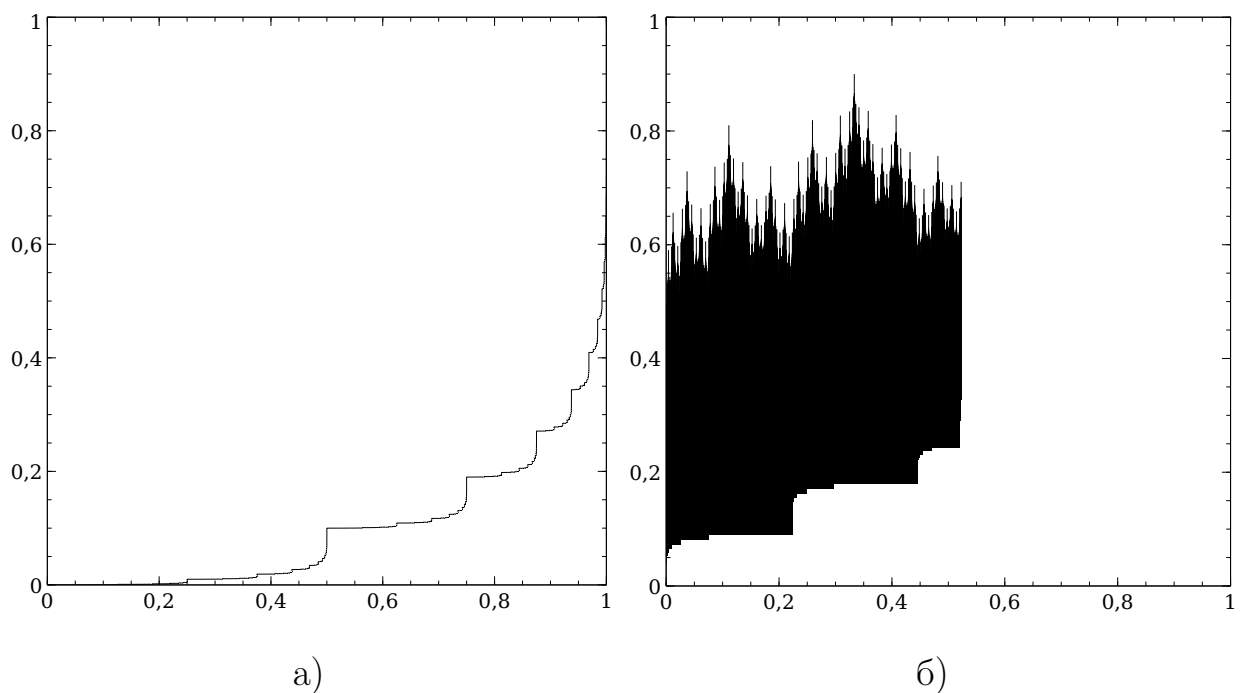


Рис. 1.1. Графіки функцій: а) сингулярна функція Салема, задана (1.6), при $q_0 = 1/10$, $q_1 = 9/10$; б) ніде не диференційовна функція Окамото, задана (1.8), при $g_0 = g_2 = 9/10$, $g_1 = -8/10$.

1.3.2. Функції необмеженої варіації.

1.3.2.1. Ніде недиференційовні функції. Будь-яка ніде не диференційовна функція є функцією необмеженої варіації. Континуальні класи ніде не диференційовних функцій описано у роботі [17].

У цьому розділі ми розглянемо функцію, яка використовувалась в розділі 6 для дослідження функції, яка є комбінацією сингулярної та ніде не монотонної.

Функція Окамото може бути представлена у наступному вигляді:

$$\mathfrak{K}(x) = f\left(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^3\right) = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{G_3}, \quad (1.8)$$

де G_3 -зображення визначене нескінченною матрицею, рядки якої задовільняють наступні умови: $g_{0k} = g_{2k} = \frac{1}{2} + a$, $g_{1k} = -2a$, $a \in [0; \frac{1}{2})$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Ця функція використовувалась у шостому розділі для формування функції, яка є композицією ніде не монотонної та сингулярної функції Салема.

1.4. Висновки до розділу

Цей розділ має вступний характер: містить короткий огляд результатів, які пов'язаних з темою дисертаційного дослідження, а також основні означення та твердження, які використовуються в наступних розділах.

РОЗДІЛ 2

ЧАСТОТИ ЦИФР ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЛА ТА ФУНКЦІЇ ПОВ'ЯЗАНІ З НИМИ

У цьому розділі розглядаються числа відрізка $[0; 1] \subset \mathbb{R}^1$ у довільному фіксованому \tilde{Q} -зображенні з загальним алфавітом A ; вивчаються частоти цифр у зображенні чисел, нормальні властивості чисел і неперервні функції та перетворення відрізка $[0; 1]$, що пов'язані з цими поняттями.

2.1. Частота цифри у \tilde{Q} -зображенні числа

Означення \tilde{Q} -зображення числа наведено в першому розділі.

Означення 2.1. Нехай $N_c(x, n)$ – це кількість цифр c серед перших n цифр \tilde{Q} -зображення числа $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{\tilde{Q}}$. Якщо існує границя

$$\nu_c^{\tilde{Q}}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} N_c(x, n),$$

то її значення $\nu_c^{\tilde{Q}}(x)$ називається *частотою цифри* $c \in A$ в \tilde{Q} -зображенні числа x .

Значення $\overline{\nu}_c^{\tilde{Q}}(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{-1} N_c(x, n)$, $\underline{\nu}_c^{\tilde{Q}}(x) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{-1} N_c(x, n)$ називаються відповідно *верхньою та нижньою частотами цифри* c \tilde{Q} -зображення числа x відповідно.

У роботі [61] наведено критерій існування частоти цифри двійкового зображення дійсного числа, який базується на врахуванні серій одиниць та нулів у записі числа. Нижче доведено теорему 2.1, що дає еквівалентне означення частоти цифри у зображенні числа.

У випадку, коли \tilde{Q} -зображення числа x містить нескінченну кількість цифр c , використовуватимемо лічильники: P_k – порядковий номер місця

k -ої цифри c , тобто $P_k = n$, якщо $\alpha_n = c$ і $N_c(x, n-1) = k-1$. Наприклад, для числа $x = \Delta_{1023012101002410\dots}^{\tilde{Q}}$, у записі якого зустрічається нескінченна кількість цифр 1, то $P_1 = 1, P_2 = 6, P_3 = 8, P_4 = 10, P_5 = 15, \dots$

Теорема 2.1. *Якщо в зображенні числа x використовується нескінченна кількість цифр c , то справедлива рівність:*

$$\nu_c(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} N_c^{\tilde{Q}}(x, n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{P_k}, \quad (2.1)$$

де k – порядковий номер цифри c .

Доведення. Якщо існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} N_c^{\tilde{Q}}(x, n)$, то вона, очевидно, рівна $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k^{-1} N_c(x, P_k)$, тобто виконується (2.1).

З іншого боку. Нехай існує границя $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{P_k} = \mu_0$. Покажемо, що вона рівна границі $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} N_c^{\tilde{Q}}(x, n)$. Далі, для скорочення запису в доведенні замість $N_c^{\tilde{Q}}(x, n)$ будемо використовувати $N_c(n)$.

Для членів послідовності (P_k) виконується рівність $N_c(P_k) = k$ і для довільного $n \in [P_k; P_{k+1})$ справедлива нерівність: $N_c(P_k) = N_c(n) < N_c(P_{k+1})$.

$$\frac{N_c(n)}{P_{N_c(n)}} \geq \frac{N_c(n)}{n} = \frac{N_c(n)}{P_{N_c(n)} + (n - P_{N_c(n)})} > \frac{N_c(n)}{P_{N_c(n)+1}}.$$

Перейдемо до границі:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_c(n)}{P_{N_c(n)}} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_c(n)}{n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_c(n)}{P_{N_c(n)+1}}.$$

Враховуючи рівність:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_c(n)}{P_{N_c(n)+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_c(n) + 1}{P_{N_c(n)+1}},$$

а також використавши тотожності $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{P_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_c(n)}{P_{N_c(n)}}$, отримаємо:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{P_k} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_c(n)}{n} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{P_{k+1}}.$$

тобто

$$\mu_0 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_c(n)}{n} \geq \mu_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{P_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_c(n)}{n}.$$

Нехай границя $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{P_k}$ не існує, тоді існують хоча би дві підпослідовності (P_{m_k}) і (P'_{m_k}) , такі, що існують границі $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_k}{P_{m_k}} \neq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_k}{P'_{m_k}}$. Враховуючи те, що підпослідовності (P_{m_k}) і (P'_{m_k}) також є підпослідовностями послідовності (n) , то отримуємо, що границі $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_c(n)}{n}$ також не існує. \square

Відповідна теорема для Q_s -зображення була доведена в роботі [49].

Твердження, аналогічне теоремі 2.1, для верхньої та нижньої частоти цифр у зображенні числа також є істинним.

2.2. Нормальна властивість \tilde{Q} -зображення числа

Нехай $c \in A$, $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{\tilde{Q}}$. Покладемо

$$\chi_{c,j} = \chi_{c,j}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha_j = c; \\ 0 & \text{при } \alpha_j \neq c; \end{cases} \quad (2.2)$$

$$p_{c,j} = \begin{cases} q_{c,j} & \text{при } c \leq m_j; \\ 0 & \text{при } c > m_j. \end{cases} \quad (2.3)$$

Теорема 2.2. *Для майже всіх (у розумінні міри Лебега) чисел $x \in [0; 1]$ є істинною рівність*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\chi_{c,j} - p_{c,j}) = 0 \quad (2.4)$$

для всіх $c \in A$.

Доведення. Нехай $A \ni c$ – довільна цифра.

З геометрії \tilde{Q} -зображення дійсних чисел:

$$\int_0^1 \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \chi_{c,j}(x) dx = \frac{1}{n} \int_0^1 \sum_{j=1}^n \chi_{c,j}(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p_{c,j}.$$

Нехай $g_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\chi_{c,j}(x) - p_{c,j})$, тоді $\int_0^1 g_n(x) dx = 0$. Покажемо, що

майже скрізь $\lim_{n \rightarrow \infty} |g_n(x)| = 0$. Для цього розглянемо

$$I_n^c = \int_0^1 g_n^2(x) dx = \int_0^1 \left(n^{-1} \sum_{j=1}^n (\chi_{c,j}(x) - p_{c,j}) \right)^2 dx.$$

Інтеграл I_n^c можна представити у вигляді суми інтегралів таких двох типів:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \int_0^1 (\chi_{c,j} - p_{c,j})^2 dx = \int_0^1 \chi_{c,j}^2 dx - 2p_{c,j} \int_0^1 \chi_{c,j} dx + p_{c,j}^2 \int_0^1 dx = p_{c,j} - p_{c,j}^2. \\ 2. \quad & \int_0^1 \left((\chi_{c,j} - p_{c,j}) (\chi_{c,t} - p_{c,t}) \right) dx = \int_0^1 \chi_{c,j} \chi_{c,t} dx - p_{c,j} \int_0^1 \chi_{c,t} dx - \\ & - p_{c,t} \int_0^1 \chi_{c,j} dx + p_{c,j} p_{c,t} \int_0^1 dx = 0, \quad j \neq t. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } I_n^c = n^{-2} \sum_{j=1}^n (p_{c,j} - p_{c,j}^2) \leq n^{-1}.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ позначимо $F_n^c := F_n^c(\varepsilon)$ множину дійсних чисел з $[0; 1]$ такі, що задовольняють умову $\left| n^{-1} \sum_{j=1}^n (\chi_{c,j} - p_{c,j}) \right| > \varepsilon$. Тоді

$$n^{-1} \geq \int_0^1 g_n^2(x) dx \geq \int_0^1 \varepsilon^2 dx = \varepsilon^2 \lambda F_n^c,$$

де λF_n^c – міра Лебега множини F_n^c . Отже, $\lambda F_n^c \leq (n\varepsilon^2)^{-1}$, а тому для кожного фіксованого $\varepsilon > 0$ виконується $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda F_n^c = 0$.

$$\text{Нехай } G_k^c = F_{k^2}^c \cup F_{(k+1)^2}^c \cup F_{(k+2)^2}^c \cup \dots$$

Оцінимо $\lambda G_k^c \leq \sum_{j=k}^{\infty} \lambda F_{j^2}^c \leq \varepsilon^{-2} \sum_{j=k}^{\infty} j^{-2}$, отже, $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda G_k^c = 0$, що рівносильно $\lim_{k \rightarrow \infty} g_{k^2}(x) = 0$ майже скрізь, у розумінні міри Лебега.

Для всіх натуральних n існують k, t такі, що $n = t^2 + k$, $t^2 \leq n < (t+1)^2$, що рівносильно $0 \leq n - t^2 \leq 2t + 1$. Тоді

$$\int_0^1 |g_n(x)| dx \leq \frac{t^2}{n} \int_0^1 |g_{t^2}(x)| dx + \int_0^1 \left| \frac{1}{n} \sum_{j=t^2+1}^n (\chi_{c,j} - p_{c,j}) \right| dx,$$

тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |g_n(x)| dx = 0$, що і треба було довести. \square

При доведенні теореми використовувались підходи наведені в [70, 63].

Наслідок 2.1. *Для майже всіх чисел $x \in [0; 1]$ (у розумінні міри Лебега) виконуються наступні рівності:*

$$\bar{\nu}_c(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p_{c,j}, \quad \underline{\nu}_c(x) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p_{c,j}.$$

Доведення. Нехай $a_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \chi_{c,j}$, $b_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p_{c,j}$. Враховуючи те, що $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \bar{\nu}_c(x)$ і нерівність $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$ маємо

$$0 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) \geq \bar{\nu}_c(x) - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p_{c,j} \geq \bar{\nu}_c(x) \quad (2.5)$$

З іншого боку,

$$0 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n - \bar{\nu}_c(x) \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p_{c,j} \leq \bar{\nu}_c(x). \quad (2.6)$$

Отже, $\bar{\nu}_c(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p_{c,j}$. Друга частина твердження доводиться аналогічно. \square

2.3. Група неперервних перетворень відрізка $[0; 1]$, які зберігають хвости Q_s -зображення чисел

2.3.1. Перетворення, що зберігають хвости Q_s -зображення чисел. Розглядається фіксоване Q_s -зображення чисел відрізка $[0; 1]$.

Нагадаємо, що перетворенням відрізка $[0; 1]$ називається кожне бієктивне відображення цього відрізка на себе. Неперервні перетворення відрізка $[0; 1]$ вичерпуються неперервними строго монотонними функціями f , такими, що: $f(0) = 0$ і $f(1) = 1$ або $f(0) = 1$ і $f(1) = 0$.

Кажуть, що Q_s -зображення $\Delta_{a_1 a_2 \dots}^{Q_s}$ і $\Delta_{b_1 b_2 \dots}^{Q_s}$ двох дійсних чисел мають однаковий хвіст, якщо існують $k, n \in \mathbb{Z}_0$: такі, що $a_{k+j} = b_{n+j}$, $\forall j \in \mathbb{N}$ (символічно: $\Delta_{a_1 a_2 \dots}^{Q_s} \sim \Delta_{b_1 b_2 \dots}^{Q_s}$).

Кажуть, що функція f , яка визначена на відрізку $[0; 1]$ і набуває значень з цього ж відрізка, зберігає хвости Q_s -зображення дійсних чисел, якщо $\forall x \in [0; 1], \exists k = k(x), m = m(x) \in N : \alpha_{n+k}(x) = \alpha_{n+m}(f(x)), \forall n \in N$, де $\alpha_n(x)$ – це n -та цифра Q_s -зображення числа x .

Означення 2.2. Оператором лівостороннього зсуву цифр Q_s -зображення числа (далі оператор лівостороннього зсуву) у просторі зображень називається відображення, яке означене рівністю:

$$\omega(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\dots}^{Q_s}) = \Delta_{\alpha_2\alpha_3\alpha_4\dots}^{Q_s}. \quad (2.7)$$

При домовленості використовувати лише одне з двох існуючих зображень Q_s -раціональних чисел, а саме: те, що містить період (0), оператор лівостороннього зсуву породжує коректно означену функцію на $[0; 1]$, якщо покласти $\omega(1) = 1$.

Означення 2.3. Оператором правостороннього зсуву цифр Q_s -зображення числа з параметром $j \in A_s$ (далі – оператор правостороннього зсуву з параметром j) називається відображення, означене рівністю:

$$\delta_j(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots}^{Q_s}) = \Delta_{j\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots}^{Q_s}. \quad (2.8)$$

Легко довести рівності: $\omega(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\dots}^{Q_s}) = (x - \beta_{\alpha_1}) q_{\alpha_1}^{-1}$,

$$\delta_j(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots}^{Q_s}) = \beta_j + q_j x,$$

$$\omega(\delta_j(x)) = x, \quad \delta_{\alpha_1(x)}(\omega(x)) = x.$$

Далі: $\omega^2(x) = \omega(\omega(x)), \omega^k(x) = \omega(\omega^{k-1}(x))$;

$$\delta_{j_1 j_2 \dots j_k}(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots}^{Q_s}) \equiv \delta_{j_1} \left(\delta_{j_2} \left(\dots \left(\delta_{j_k} \left(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots}^{Q_s} \right) \right) \right) \right) = \Delta_{j_1 j_2 \dots j_k \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots}^{Q_s}$$

Для всіх зображень чисел, які буде розглянуто далі, означення операторів правостороннього та лівостороннього зсувів є аналогічними.

Слід відмітити, що оператори ω , δ_j зберігають хвости Q_s -зображення числа x .

Прикладом функції, яка зберігає хвости Q_s -зображення, є така:

$$f(x) = \begin{cases} \omega(x) = q_0^{-1}x & \text{при } 0 \leq x < a; \\ \delta_{s-1}(x) = \beta_{s-1} + q_{s-1}x & \text{при } a \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (2.9)$$

де $a = \Delta_{(0[s-1])}^{Q_s} = \frac{q_0\beta_{s-1}}{1-q_0q_{s-1}}$.

Оскільки розв'язком рівняння $q_0^{-1}x = \beta_{s-1} + q_{s-1}x$ є число $a = \frac{q_0\beta_{s-1}}{1-q_0q_{s-1}}$, то функція (2.9) є результатом "склеювання" двох функцій $f_1(x) = q_0^{-1}x$ та $f_2(x) = \beta_{s-1} + q_{s-1}x$ у точці, абсциса якої рівна a .

Функцію φ , яка залежить від цілих невід'ємних параметрів n та k , упорядкованого набору цифр (a_1, a_2, \dots, a_n) , $a_j \in A_s$, означимо на відрізку $[0;1]$ рівністю:

$$\varphi(x, n, (a_1, a_2, \dots, a_n), k) = \begin{cases} x & \text{при } n = 0 = k, \\ \omega^k(x) & \text{при } n = 0 \neq k, \\ \delta_{a_1 a_2 \dots a_n}(x) & \text{при } k = 0 \neq n, \\ \delta_{a_1 a_2 \dots a_n}(\omega^k(x)) & \text{при } n \neq 0 \neq k. \end{cases} \quad (2.10)$$

Рангом функції (2.10) називатимемо число $r = n + k$.

Функцією l шарів ($l \in Z_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$) будемо називати функцію типу (2.10), ранг якої не більший за l .

Розглянемо множину всіх функцій l шарів:

$$\Phi^l = \{\varphi(x, n, (a_1, a_2, \dots, a_n), k) \mid n + k \leq l, a_j \in A_s\}, \quad l \in Z_0. \quad (2.11)$$

Множина функцій Φ^l , $l \in Z_0$ – скінченна, причому при $l = 0$ складається з однієї функції $e(x) = x$. Будь-яка функція з множини (2.11) зберігає хвости Q_s -зображення чисел, але жодна, окрім $e(x) = x$, не є неперервним перетворенням відрізка $[0;1]$. Для побудови множини таких неперервних перетворень оберемо $l_0 \in Z_0$. Далі утворюємо сітку, лініями якої є графіки

функцій з Φ^{l_0} , а вузлами є точки перетину ліній сітки. Використовуючи утворену сітку, будемо неперервне перетворення відрізка $[0;1]$.

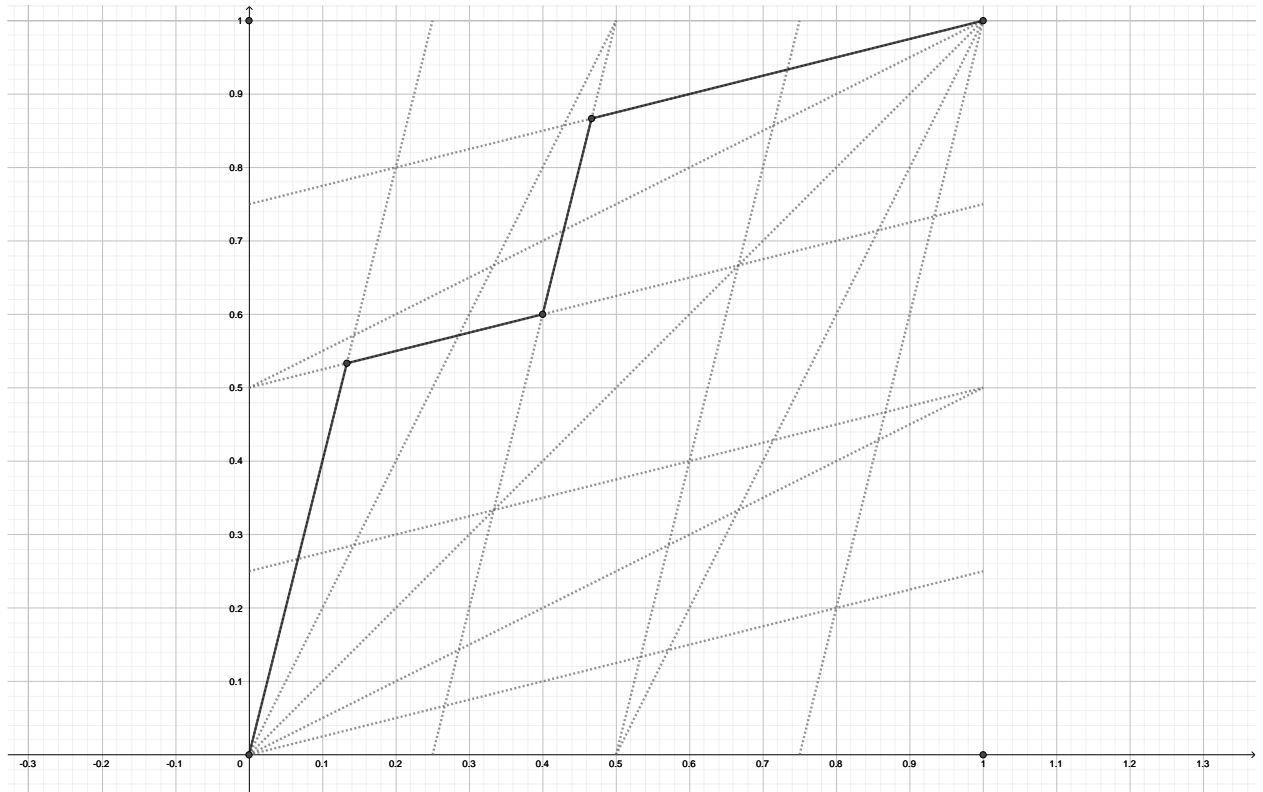


Рис. 2.1. Ілюстрація побудови функції, яка зберігає хвости двійкового зображення числа (суцільний, чорний колір) на основі ліній сітки 2 шарів (пунктир, сірий колір).

Зазначимо, що зі зростанням кількості шарів, кількість неперервних перетворень відрізка $[0;1]$, які зберігають хвости Q_s -зображення швидко зростає. Наприклад, для Q_2 при $l_0 = 0$ маємо лише одну функцію, при $l_0 = 1$ – це 3 функції, а при $l_0 = 2$ маємо 189 функцій.

Позначимо множину неперервних перетворень $H_{Q_s} = \bigcup_{j \in Z_0} H_{Q_s}^j$, де $H_{Q_s}^l$ – множина усіх неперервних функцій l шарів, які зберігають хвости Q_s -зображення чисел.

2.3.2. Властивості сітки l шарів. Розглянемо одну просту, але доволі важливу для визначення властивостей сітки лему.

Лема 2.1. Відношення $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\dots}^{Q_s} \ast \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\beta_{k+1}\beta_{k+2}\dots}^{Q_s}$ і $\Delta_{\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\dots}^{Q_s} \ast \Delta_{\beta_{k+1}\beta_{k+2}\dots}^{Q_s}$ – рівносильні (символ $\ast \in \{<, \leq, =, \neq, >, \geq\}$).

Доведення. Нехай $a = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\dots}^{Q_s}$, $a_{k+1} = \Delta_{\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\dots}^{Q_s}$, $b = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\beta_{k+1}\beta_{k+2}\dots}^{Q_s}$, $b_{k+1} = \Delta_{\beta_{k+1}\beta_{k+2}\dots}^{Q_s}$. Тоді, згідно з означенням Q_s -зображення числа, числа a , b представимо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} a &= \beta_{\alpha_1} + q_{\alpha_1} \left(\beta_{\alpha_2} + q_{\alpha_2} \left(\dots \beta_{\alpha_k} + q_{\alpha_k} (a_{k+1}) \right) \right), \\ b &= \beta_{\alpha_1} + q_{\alpha_1} \left(\beta_{\alpha_2} + q_{\alpha_2} \left(\dots \beta_{\alpha_k} + q_{\alpha_k} (b_{k+1}) \right) \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Використовуючи (2.12) і враховуючи властивості числових нерівностей, легко показати, що $a \ast b \Leftrightarrow a_{k+1} \ast b_{k+1}$. \square

Твердження 2.3 – 2.6 описують властивості сітки l шарів.

Теорема 2.3. Координати будь-якого вузла сітки l шарів мають періодичне Q_s -зображення.

Доведення. Достатньо показати, що абсциси вузлів мають періодичне Q_s -зображення, оскільки абсциса та ордината вузла сітки мають однаковий хвіст.

Лініями сітки l шарів є графіки функцій l шарів. Оберемо дві різні функції $f_1(x) = \delta_{a_1a_2\dots a_n}(\omega^k(x))$ та $f_2(x) = \delta_{b_1b_2\dots b_m}(\omega^r(x))$, $m \geq n$. Розглянемо два випадки: $m = n$ та $m > n$.

У першому випадку $m = n$, але $r \neq k$ (оскільки $f_1(x) \neq f_2(x)$). Згідно з лемою 2.1: $a_j = b_j$, а отже, рівняння $f_1(x) = f_2(x)$ і $\omega^k(x) = \omega^r(x)$ – рівносильні. Розв'язками останнього рівняння будуть усі числа x , Q_s -зображення яких задовольняє рівності: $\alpha_{k+t+1}(x) = \alpha_{r+t+1}(x)$, $t \in \mathbb{N}$, тобто розв'язки мають періодичне Q_s -зображення.

Аналогічно до першого, другий випадок, при якому $m > n$ рівняння

$f_1(x) = f_2(x)$ можна представити у вигляді:

$$\omega^k(x) = \delta_{b_{n+1} \dots b_m} \left(\omega^r(x) \right). \quad (2.13)$$

Покажемо, що розв'язки рівняння (2.13) мають періодичне Q_s -зображення. Нехай $k \geq r$, тоді $x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_r \alpha_{r+1} \dots \alpha_k \alpha_{k+1} \dots}^{Q_s}$. Перетворимо обидві частини рівняння (2.13), використовуючи Q_s -зображення числа:

$$\Delta_{\alpha_{k+1} \alpha_{k+2} \dots}^{Q_s} = \Delta_{b_{n+1} \dots b_m \alpha_{r+1} \dots \alpha_k \alpha_{k+1} \dots}^{Q_s}. \quad (2.14)$$

У результаті бачимо, що розв'язки рівняння (2.14) задовольняють наступним рівностям: $\alpha_{k+\tau} = b_{n+\tau}$, де $\tau = 1, 2, \dots, m - n$ та $\alpha_{k+m-n+t} = \alpha_{r+t}$ при $t \in N$, тобто розв'язки мають періодичне Q_s -зображення. Аналогічно проводимо міркування при $k < r$. \square

Теорема 2.4. *Через будь-який вузол сітки проходить зліченна кількість функцій типу (2.10).*

Доведення. Розглянемо координати деякого вузла A сітки:

$$A \left(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k (c_1 c_2 \dots c_n)}^{Q_s}; \Delta_{\beta_1 \dots \beta_m (c_1^* c_2^* \dots c_n^*)}^{Q_s} \right),$$

де $c_j^* = c_{[\varsigma(j-1)+1]}$, $\varsigma(t) = (\xi + t) \bmod n$, а ξ – це фіксоване натуральне значення для вузла A , яке використовується для опису зсуву цифр періоду.

Задамо початкові функції ϕ_j ($j = 0, \dots, n - 1$):

$$\phi_0(x) = \delta_{\beta_1 \dots \beta_m} \left(\omega^{k+\varsigma(0)}(x) \right), \quad \phi_j(x) = \delta_{\beta_1 \dots \beta_m c_1^* \dots c_j^*} \left(\omega^{k+\varsigma(j)}(x) \right). \quad (2.15)$$

Введемо додаткове позначення:

$$/p_1 \dots p_h /^n = \underbrace{p_1 \dots p_h p_1 \dots p_h \dots p_1 \dots p_h}_{hn}. \quad (2.16)$$

За допомогою функції $\phi_0(x)$ задамо множину функцій:

$$\Psi_0 = \left\{ \psi_0(x, t, r) = \delta_{\beta_1 \dots \beta_m / c_1^* \dots c_n^* /^t} \left(\omega^{k+\varsigma(0)+nr}(x) \right) \mid t, r \in Z_0 \right\}, \quad (2.17)$$

де $\psi_0(x, t = 0, r = 0) = \phi_0(x)$. Таким чином, при різних значеннях параметрів t, r ми отримуємо різні функції.

Покажемо, що множина функцій типу (2.17) є зліченною. Як бачимо, кожна функція множини (2.17) залежить від двох невід'ємних цілих параметрів, які можна представити у вигляді цілих невід'ємних координат деякої точки площини. Добре відомо, що множина точок з цілими невід'ємними координатами – є зліченною, а отже зліченною також є множина функцій Ψ_0 .

Аналогічно, до множини Ψ_0 ми можемо на основі $\phi_j(x)$ утворити зліченні множини Ψ_j :

$$\Psi_j = \left\{ \psi_j(x, t, r) = \delta_{\beta_1 \dots \beta_m / c_1^* \dots c_n^* / t c_1^* \dots c_j^*} \left(\omega^{k+c(j)+nr}(x) \right) \middle| t, r \in Z_0 \right\}, \quad (2.18)$$

де $\psi_j(x, t = 0, r = 0) = \phi_j(x)$, $j = 1, \dots, n - 1$.

Із форми запису функцій множин Ψ_j , $j = 0, 1, \dots, n - 1$, очевидно, що ці множини є попарно неперетинними. Нехай $\Psi = \bigcup_{j=0}^{n-1} \Psi_j$, тоді Ψ є зліченною множиною як об'єднання скінченної кількості злічених множин. Також вона містить усі можливі функції, які проходять через вузол A . \square

При доведенні останньої теореми ми встановили ще один факт: *будь-яка точка площини $B(0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1)$, координати якої мають однаковий хвіст та періодичне Q_s -зображення, є вузлом сітки.*

Теорема 2.5. *Зі зростанням шарів кількість вузлів зростає, а відстань між сусідніми вершинами сітки зменшується.*

Доведення. Очевидно, що будь-яка функція l шарів між двома сусідніми вузлами є функцією типу (2.10) рангу не більшого ніж l . Розглянемо довільну функцію $f(x) \in H^l$.

Оскільки функції $\omega^{l+1}(x)$ та $f(x)$ набувають значень з $[0; 1]$, при $x \in \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_l \alpha_{l+1}}^{Q_s}$ для $\omega^{l+1}(x)$ та при $x \in [0; 1]$ для $f(x)$, то очевидно, що у кожному циліндрі існує хоча б одна вузлова точка $l + 1$ шару. Аналогічно $\omega^{l+2}(x)$

на кожному циліндрі $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{l+1} \alpha_{l+2}}^{Q_s}$ має спільну точку з $f(x)$. Враховуючи те, що $|\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{l+1} \alpha_{l+2}}^{Q_s}| < |\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_l \alpha_{l+1}}^{Q_s}|$, а функції $\omega^{l+1}(x)$ та $\omega^{l+2}(x)$ є функціями $l+1$ та $l+2$ шарів, то ми отримали, що для довільної функції l шарів кількість вузлових точок зі зростанням шару зростає і відстань між ними зменшується. Оскільки ми розглядали довільну функцію $f(x) \in H^l$, графік якої складається лише з ліній сітки l шарів, то цей результат можна застосувати до всієї сітки. \square

Теорема 2.6. *Для будь-яких двох функцій $f(x)$ та $g(x)$ з множини $H_{Q_s}^l$ завжди існує відмінна від $f(x)$ та $g(x)$ функція $\tau(x)$ з множини $H_{Q_s}^{l'}$, де $l' > l$ така, що: $|f(x) - g(x)| = |f(x) - \tau(x)| + |g(x) - \tau(x)|$.*

Доведення. Позначимо x_1 та x_2 – абсциси відповідних точок перетину функцій $f(x)$, $g(x)$ з функцією $\omega^{l'}(x)$, де $l' > l$, на одному такому фіксованому циліндрі рангу l' , який міститься між двома найближчими спільними вузлами функцій $f(x)$ та $g(x)$, щоб $x_1 \neq x_2$. Існування таких точок випливає з доведення попередньої властивості та з способу побудови функцій $f(x)$ та $g(x)$.

Утворимо функцію $\tau(x)$:

$$\begin{aligned} \text{— якщо } x_1 < x_2, \text{ то } \tau(x) &= \begin{cases} f(x) & \text{при } x < x_1; \\ \omega^{l'}(x) & \text{при } x_1 \leq x < x_2; \\ g(x), & \text{при } x > x_2. \end{cases} \\ \text{— якщо } x_1 > x_2, \text{ то } \tau(x) &= \begin{cases} g(x) & \text{при } x < x_2; \\ \omega^{l'}(x) & \text{при } x_2 \leq x < x_1; \\ f(x), & \text{при } x > x_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Покажемо правильність рівності

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - \tau(x)| + |g(x) - \tau(x)|.$$

Розглянемо перший випадок, коли $x_1 < x_2$, тоді для $x < x_1$: $\tau(x) \equiv f(x)$, для $x > x_2$: $\tau(x) \equiv g(x)$ виконання рівності стає очевидним. Згідно

з побудовою функції $\tau(x)$ графік функції $\omega'(x)$ на проміжку $[x_1; x_2]$ буде лежати між графіками $f(x)$ та $g(x)$, тобто $f(x) \leq \omega'(x) \leq g(x)$, що забезпечує виконання рівності. Аналогічно доводиться правильність твердження для другого випадку, коли $x_1 > x_2$. \square

Враховуючи описані властивості сітки та саму побудову функцій, нескладно показати зліченність множини H_{Q_s} . Справді, пронумеруємо спочатку функції 1-их шарів, на наступному кроці пронумеруємо функції 2-х шарів без перших, потім функцій 3-х шарів без попередніх і так далі.

2.3.3. Група перетворень, які зберігають хвости Q_s -зображення числа. Множину всіх чисел $x \in [0; 1]$, які мають частоти всіх цифр відповідного Q_s -зображення, позначатимемо через E . Добре відомо [58, 70], що міра Лебега цієї множини рівна 1.

Кажуть, що функція $y = f(x)$ зберігає частоти цифр Q_s -зображення числа, якщо для $\forall x \in E$ виконується система рівностей: $\nu_j(f(x)) = \nu_j(x)$, $j \in A_s$. У джерелах [66, 67] вивчалися розривні функції, які зберігають частоти та асимптотичне середнє значення цифр.

Теорема 2.7. Множина H_{Q_s} всіх неперервних перетворень відрізка $[0; 1]$, які зберігають хвости Q_s -зображення чисел є зліченною некомутативною групою G_H відносно операції композиції перетворень $(f(g(x)) = g \circ f)$.

Доведення. Добре відомо, що множина всіх перетворень, заданої множини, утворює групу відносно операції композиції. Множина H_{Q_s} є підмножиною множини всіх перетворень. Скористаємось ознакою підгруп, а саме доведемо лише замкненість і існування симетричного елемента.

1. Множина H_{Q_s} є замкненою оскільки очевидним є той факт, що композиція будь-яких двох функцій, які зберігають хвости Q_s -зображення буде також зберігати їх.
2. Існує симетричний (обернений) елемент $f^{-1}(x)$, оскільки всі фун-

кції з множини H_{Q_s} є строго зростаючими, а тому кожна з них має обернену строго зростаючу функцію, яка і буде симетричним елементом.

3. Не виконується комутативність: $f \circ g \neq g \circ f$. Розглянемо дві функції з множини H_{Q_s} :

$$f(x) = \begin{cases} \delta_0(x) \text{ при } 0 \leq x < c = \Delta_{([s-1]0)}^{Q_s}, \\ \omega(x) \text{ при } c \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (2.19)$$

$$g(x) = \begin{cases} \omega^2(x) \text{ при } 0 \leq x < b = \Delta_{(00[s-1])}^{Q_s}, \\ \delta_{[s-1]}(x) \text{ при } b \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (2.20)$$

□

Наслідок 2.2. *Будь-який елемент $f_j(x) \neq x$ з множини H_{Q_n} є твірним для нескінченної циклічної підгрупи групи G_H відносно операції композиції.*

Наслідок 2.3. *На множині $x \in [0; 1]$ множина F_{Q_s} функцій, які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа x – утворює неабелеву групу G_F відносно операції композиції ($f(g(x)) = g \circ f$).*

Залишається відкритим питання скінченнопородженості групи G_H .

2.4. Клас неперервних функцій, які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа без збереження хвостів

Зафіксуємо довільне натуральне число l .

Підмножину $\mathcal{B}_l \subseteq H_{Q_s}^l$ впорядкуємо таким чином, щоб $\mathcal{B}_l = \{b_{-\kappa_l}, \dots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \dots, b_{\kappa_l}\}$, де $b_0(x) = x$ і відповідні функції з протилежними індексами були оберненими, а κ_l – найбільший номер індексу елементів множини \mathcal{B}_l .

Розглянемо нескінченну послідовність цілих чисел (ϕ_k) таких, що $\phi_k \in \{-\kappa_l, \dots, -1, 0, 1, \dots, \kappa_l\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_0(\phi_k, n)}{n} = 1$, де $N_0(\phi_k, n)$ – кількість ϕ_k

рівних нулю серед перших n елементів і послідовність (ϕ_k) містить нескінченну кількість не нульових елементів. Позначимо множину всіх таких послідовностей через Φ_l .

Задамо на відрізку $[0; 1]$ дві строго монотонні функції $((\phi_k) \in \Phi_l)$:

$$\begin{aligned} \xi_n(x, \phi_k) &= x + \left(b_{\phi_n}(\omega^n(x)) - \omega^n(x) \right) \prod_{j=1}^n q_{\alpha_j(x)} = \\ &= \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n(0)}^{Q_s} + b_{\phi_n}(\omega^n(x)) \prod_{j=1}^n q_{\alpha_j(x)}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_n(x, \phi_k) &= x + \left(b_{-\phi_n}(\omega^n(x)) - \omega^n(x) \right) \prod_{j=1}^n q_{\alpha_j(x)} = \\ &= \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n(0)}^{Q_s} + b_{-\phi_n}(\omega^n(x)) \prod_{j=1}^n q_{\alpha_j(x)}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Враховуючи те, що $\omega^n(\xi_n(x, \phi_k)) = b_{\phi_n}(\omega^n(x))$ можна показати, що функції $\xi_n(x, \phi_k)$ і $\bar{\xi}_n(x, \phi_k)$ будуть оберненими.

Лема 2.2. *Нехай послідовність строго зростаючих (спадних) неперервних функцій (f_n) рівномірно прямує до строго монотонної функції f , тоді послідовність (g_n) , обернених до відповідних функції з (f_n) , буде також рівномірно прямувати до функції оберненої до f .*

Доведення. Функції f_n можна задати параметрично: $f_n = \begin{cases} x = t; \\ y = f_n(t). \end{cases}$

Відповідно обернені до f_n функції $g_n = \begin{cases} x = f_n(t); \\ y = t. \end{cases}$ Завдяки такому заданню стає зрозуміло, що функції f і g є оберненими.

Доведення рівномірної збіжності (g_n) проведемо методом від супротивного. Нехай $[a; b]$ — відрізок на якому послідовність (f_n) рівномірно прямує до f , при цьому $f : [a; b] \rightarrow [c; d]$, тоді виконується рівність:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a; b]} |f(x) - f_n(x)| = 0. \quad (2.23)$$

Припустимо, що послідовність функцій (g_n) нерівномірно прямують до g . А раз так, то для кожного $n \in \mathbb{N}$ існують свої значення $t_n \in [c; d]$, $\xi_n \in \mathbb{R}$ такі що $g(t_n) - g_n(t_n) = \xi_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \neq 0$. Тобто $x_n = g(t_n) = g_n(t_n) + \xi_n$.

Розглянемо значення різниці:

$$\left| f(x_n) - f_n(x_n) \right| = \left| f(g(t_n)) - f(g_n(t_n) + \xi_n) \right|.$$

Враховуючи неперервність функції f_n , можна записати таке:
 $f_n(x + \delta) = f_n(x) + \alpha_n(x, \delta)$.

$$\begin{aligned} \left| f(x_n) - f_n(x_n) \right| &= \left| f_n(g_n(t_n) + \xi_n) - f_n(g_n(t_n)) - \alpha(x_n, \xi_n) \right| = \left| \alpha(x_n, \xi_n) \right| = \\ &= \left| f_n(x_n + \xi_n) - f_n(x_n) \right| = \left| f(x_n + \xi_n) + \beta(x_n + \xi_n) - (f(x_n) + \beta(x_n)) \right|. \end{aligned}$$

В останньому перетворенні із-за рівномірної збіжності виконується рівність $f_n(x) = f(x) + \beta_n(x)$, де $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n(x) = 0$ для всіх $x \in [a; b]$. Враховуючи строгу монотонність функції f значення $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| f(x_n) - f_n(x_n) \right| \neq 0$, отже, послідовність (f_n) нерівномірно прямує f , що суперечить умові теореми. Ми прийшли до суперечності, а тому припущення, що послідовність (g_n) прямує до g нерівномірно — хибне. \square

Теорема 2.8. *Наступні функції*

$$\begin{aligned} \Upsilon(x, \phi_k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Upsilon_n(x, \phi_k), \quad \Upsilon_{n+1}(x, \phi_k) = \Upsilon_n(\xi_n(x, \phi_k), \phi_k), \\ \Upsilon_0(x, \phi_k) &= x, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \Omega(x, \phi_k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n(x, \phi_k), \quad \Omega_{n+1}(x, \phi_k) = \bar{\xi}_n(\Omega_n(x, \phi_k), \phi_k), \\ \Omega_0(x, \phi_k) &= x, \end{aligned} \quad (2.25)$$

є коректно означеними, існують при заданій послідовності $(\phi_k) \in \Phi_l$.

Доведення. Покажемо, що для заданої послідовності $(\phi_k) \in \Phi_l$ функціональна послідовність $(\Omega_n(x, \phi_k))$ рівномірно збіжна до неперервної функції $\Omega(x, \phi_k)$.

Очевидно, що

$$\Omega(x, \phi_k) - x = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n(x, \phi_k) - x = \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_{n+1}(x, \phi_k) - \Omega_n(x, \phi_k)). \quad (2.26)$$

Перетворимо утворений ряд використовуючи (2.22) і (2.25)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_{n+1}(x, \phi_k) - \Omega_n(x, \phi_k)) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{\xi}_n(\Omega_n(x, \phi_k), \phi_k) - \Omega_n(x, \phi_k)) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((b_{-\phi_n}(\omega^n(\Omega_n(x, \phi_k))) - \omega^n(\Omega_n(x, \phi_k))) \prod_{j=1}^{n+1} q_{\alpha_j(\Omega_n(x, \phi_k))} \right). \end{aligned}$$

Оскільки $\left| b_{-\phi_n}(\omega^n(\Omega_n(x, \phi_k))) - \omega^n(\Omega_n(x, \phi_k)) \right| \leq 1$ (згідно з побудовою функцій з множини \mathcal{B}_l), то

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \Omega_{n+1}(x, \phi_k) - \Omega_n(x, \phi_k) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{n+1} q_{\alpha_j(\Omega_n(x, \phi_k))} \leq \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1},$$

де $q = -\max_{i \in A_s} q_i$.

Отже, побудований ряд є абсолютно і рівномірно збіжним (за ознакою Веєрштраса), відповідно і функціональна послідовність $(\Omega_n(x, \phi_k))$ рівномірно збіжна до неперервної функції $\Omega(x, \phi_k)$.

Оскільки, функції $\Omega_n(x, \phi_k)$ і $\Upsilon_n(x, \phi_k)$ є взаємооберненими, то згідно з лемою 2.2 функціональна послідовність $(\Upsilon_n(x, \phi_k))$ є також рівномірно збіжною до неперервної функції $\Upsilon(x, \phi_k)$. При цьому функції $\Omega(x, \phi_k)$ і $\Upsilon(x, \phi_k)$ є взаємооберненими. \square

Згідно з побудовою функції $\Omega(x, \phi_k)$ і $\Upsilon_n(x, \phi_k)$ є строго зростаючими.

Теорема 2.9. *Для заданої послідовності $(\phi_k) \in \Phi_l$ функція $\Upsilon(x, \phi_k)$ зберігає частоти Q_s -зображення аргументу.*

Доведення. Нехай P_m – індекс m -го не нульового елементу послідовності (ϕ_k) . З того, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_0(\phi_k, n)}{n} = 1$ та згідно з теоремою 2.1 маємо, що $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{P_m} = 0$.

Для кожної цифри $i \in A_s$

$$\nu_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_i(\Upsilon(x, \phi_k), n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_i(x, n) + s_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{N_i(x, n)}{n} + \frac{s_n}{n} \right).$$

Згідно з побудовою при $n = P_m$ відбувається зміна кількості цифр, то $|s_n| \leq l \cdot m$, а тому $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{s_n}{n} \right| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{l \cdot m}{P_m} = 0$. Отже, $\nu_i(\Upsilon(x, \phi_k)) = \nu_i(x)$. \square

При фіксуванні послідовності $(\phi_k) \in \Phi_l$ функції $\Omega(x, \phi_k)$ і $\Upsilon(x, \phi_k)$ є взаємно оберненими, а тому з того, що функція функція $\Upsilon_n(x, \phi_k)$ зберігає частоти Q_s -зображення аргументу, то відповідно функція $\Omega(x, \phi_k)$ також буде зберігати частоти. Дослідження на диференційованість та розмірності носіїв функцій $\Omega(x, \phi_k)$ і $\Upsilon(x, \phi_k)$ наведено в підпункті 3.3.2 і в пункті 6.5 відповідно.

2.5. Висновки до розділу

Основними результатами, які було відображено в цьому розділі є:

- знайдено еквівалентне означення частоти цифр Q_s -зображення числа;
- в теоремі 2.2 та в наслідку 2.1 доведено нормальну властивість \tilde{Q} -зображення числа;
- побудовано зліченну некомутативну групу неперервних перетворень відрізка $[0; 1]$, які зберігають хвости Q_s -зображення числа;
- побудовано континуальний клас неперервних функцій, які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа без збереження хвостів.

РОЗДІЛ 3

(U, V)-ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

3.1. Означення та основні властивості

Позначимо через \mathcal{P} множину пар $(\mathbf{u}; \mathbf{v})$ всіх нескінченно малих у нулі функцій, таких, що для кожної пари існує таке число $\delta > 0$, що для $\forall h \in O_\delta^*$ справедлива нерівність $\mathbf{u}(h) \neq -\mathbf{v}(h)$.

$$\begin{aligned} & \text{Наприклад пара функції } (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{P}, \text{ де } \mathbf{u}(h) = \begin{cases} ah, & h \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & h \in \mathbb{Q}, \end{cases} \mathbf{v}(h) = \\ = & \begin{cases} \frac{\sin(1/h)}{|\sin(1/h)|}h, & h \neq (\pi n)^{-1}; \\ 0, & h = (\pi n)^{-1}; \end{cases} \text{ і } \mathbb{R} \ni |a| \neq 1, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Нехай $\Delta_{\mathbf{v}(h)}^{\mathbf{u}(h)} f(x_0) := f(x_0 + \mathbf{u}(h)) - f(x_0 - \mathbf{v}(h))$, $\Delta_{\mathbf{v}(h)}^{\mathbf{u}(h)} x := \mathbf{u}(h) + \mathbf{v}(h)$.

Означення 3.1. Якщо для заданих пар функцій $(\mathbf{u}; \mathbf{v}) \in \mathcal{P}$ і заданої в деякому околі x_0 функції $f(x)$ існує границя (скінченна чи нескінченна)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_{\mathbf{v}(h)}^{\mathbf{u}(h)} f(x_0)}{\Delta_{\mathbf{v}(h)}^{\mathbf{u}(h)} x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \mathbf{u}(h)) - f(x_0 - \mathbf{v}(h))}{\mathbf{u}(h) + \mathbf{v}(h)}, \quad (3.1)$$

то її значення називатимемо (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідною функції f у точці x_0 і позначатимемо через $\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0)$.

Зазначимо, що у випадку, коли $\mathbf{u}(h) = h$, $\mathbf{v}(h) = 0$, отримуємо класичне означення похідної. Якщо ж $\mathbf{u}(h) = \mathbf{v}(h) = h$, то маємо означення симетричної похідної.

Зауважимо, що якщо існує числова послідовність (a_n) , то, взявши за $\mathbf{u}(h) = a_n$ при $h \in (2^{-n-1}; 2^{-n}]$, $\mathbf{v}(h) = 0$, отримаємо значення $\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0)$, яке буде дорівнювати похідному числу за послідовністю (a_n) .

Зауважимо, що раніше розглядалися конструкції, які мають певну блискість до (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідної:

- Wen Chen означував "fractaltal derivative", як границю $\lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{u(t_1) - u(t)}{t_1^\alpha - t^\alpha}$ в [4, 6]. Легко показати, що $\lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{u(t_1) - u(t)}{t_1^\alpha - t^\alpha} = \frac{t^{1-\alpha}}{\alpha} \cdot \mathfrak{D}_0^{t_1-t} u(t)$ при $t \neq 0$.
- В [24] "the conformable fractional derivate" було означено як границю $T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$. Незавжно отримати таку рівність: $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \mathfrak{D}_0^{\varepsilon t^{1-\alpha}} f(t)$.

Надалі $\mathbf{u} = \mathbf{u}(h)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(h)$.

Лема 3.1. *Якщо в точці x функція $f(x)$ має скінченну (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідну, то*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(f(x + \mathbf{u}(h)) - f(x - \mathbf{v}(h)) \right) = 0. \quad (3.2)$$

Теорема 3.1. *Нехай A, B – довільні дійсні числа і в околі точки x задано функції $f(x)$ та $g(x)$, такі, що для пари функцій $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{P}$ існують $\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x)$ і $\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} g(x)$. Тоді*

1. $\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} (Af + Bg)(x) = A\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x) + B\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} g(x)$.
2. $\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} (fg)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x + \mathbf{u}(h)) \cdot \mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} g(x) + \lim_{h \rightarrow 0} g(x + \mathbf{u}(h)) \cdot \mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x)$ при $\lim_{h \rightarrow 0} f(x + \mathbf{u}(h)) \in \mathbb{R} \ni \lim_{h \rightarrow 0} g(x + \mathbf{v}(h))$.
3. $\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} \left(\frac{1}{f} \right) (x) = -\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} f^{-2}(x + \mathbf{u}(h))$ при $f(x) \neq 0 \neq \lim_{h \rightarrow 0} f(x + \mathbf{u}(h))$.

Доведення. Легко перевірити, використовуючи означення, такі рівності:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} (Aa + Bb)(x) &= A\Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} a(x) + B\Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} b(x); \\ \Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} (ab)(x) &= a(x + \mathbf{u}(h)) \Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} b(x) + b(x - \mathbf{v}(h)) \Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} a(x) = \\ &= a(x - \mathbf{v}(h)) \Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} b(x) + b(x + \mathbf{u}(h)) \Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} a(x); \\ \Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} \left(\frac{1}{a} \right) (x) &= -\frac{\Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} a(x)}{a(x + \mathbf{u}(h)) a(x - \mathbf{v}(h))}. \end{aligned}$$

Поділивши попередні рівності на $\Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} x$ та з урахуванням леми 3.1, перейшовши до границь, отримуємо відповідні рівності. Зауважимо, що у

випадку добутку, з $\lim_{h \rightarrow 0} f(x + \mathbf{u}(h)) \in \mathbb{R} \ni \lim_{h \rightarrow 0} g(x + \mathbf{v}(h))$ та леми 3.1, маємо рівність границь $\lim_{h \rightarrow 0} f(x + \mathbf{u}(h)) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x - \mathbf{v}(h))$ та $\lim_{h \rightarrow 0} g(x + \mathbf{u}(h)) = \lim_{h \rightarrow 0} g(x - \mathbf{v}(h))$. \square

Якщо функції $f, g \in \mathcal{C}^1$, то

1. $\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}(Af + Bg)(x) = A\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x) + B\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}g(x)$.
2. $\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}(fg)(x) = f(x)\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}g(x) + g(x)\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x)$.
3. $\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}\left(\frac{1}{f}\right)(x) = -\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x) \cdot f^{-2}(x)$ при $f(x) \neq 0$.

3.1.1. Зв'язок (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідної зі класичною похідною. Нехай

$$\mathcal{P}^* = \left\{ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{P} : \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\mathbf{u}(h)}{\mathbf{u}(h) + \mathbf{v}(h)} \right| < \infty \right\}, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{P}^+ = \{ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{P} : \mathbf{u}(h) \cdot \mathbf{v}(h) \geq 0, \forall h \in O(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \}, \quad (3.4)$$

$$\mathcal{P}^- = \{ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{P} : \mathbf{u}(h) \cdot \mathbf{v}(h) < 0, \forall h \in O(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \}, \quad (3.5)$$

де $O(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ – проколтий окіл нуля, в кожній точці якого функції \mathbf{u}, \mathbf{v} є визначеними і виконується нерівність $\mathbf{u}(h) \neq -\mathbf{v}(h), \forall h \in O(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Покажемо, що $\mathcal{P}^+ \subset \mathcal{P}^*$. Враховуючи те, що $\mathbf{u}(h) \cdot \mathbf{v}(h) \geq 0 \Rightarrow \frac{\mathbf{v}(h)}{\mathbf{u}(h)} \geq 0$ маємо

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\mathbf{u}(h)}{\mathbf{u}(h) + \mathbf{v}(h)} \right| = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \left| \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{v}(h)}{\mathbf{u}(h)}} \right| \leq 1.$$

Покажемо, що задання множини \mathcal{P}^* є коректним незалежно відносно перестановки функцій \mathbf{u}, \mathbf{v} :

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\mathbf{v}(h)}{\mathbf{u}(h) + \mathbf{v}(h)} \right| = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \left| 1 - \frac{\mathbf{u}(h)}{\mathbf{u}(h) + \mathbf{v}(h)} \right| \leq 1 + \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\mathbf{u}(h)}{\mathbf{u}(h) + \mathbf{v}(h)} \right| < \infty.$$

Теорема 3.2. *Нехай функція f задана в околі точки x_0 і $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, тоді для довільної пари $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{P}^*$ виконується рівність $\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) = f'(x_0)$.*

Доведення. Нехай $f'(x_0) = c \in \mathbb{R}$, тоді

$$\frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} = c + \alpha(t), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = 0 \Rightarrow$$

$$f(x_0 + t) = f(x_0) + (c + \alpha(t))t. \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \text{Враховуюючи (3.6), маємо } \Delta_v^u f(x_0) &= f(x_0 + u) - f(x_0 - v) = \\ &= f(x_0) + (c + \alpha(u))u - \left(f(x_0) - (c + \alpha(-v))v \right) = \\ &= c(u + v) + \alpha(u)u + \alpha(-v)v. \end{aligned}$$

Перетворимо вираз

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(u)u + \alpha(-v)v}{u + v} &= \frac{\alpha(u)u - \alpha(-v)u + \alpha(-v)v + \alpha(-v)u}{u + v} = \\ &= \frac{u}{u + v} \left(\alpha(u) - \alpha(-v) \right) + \alpha(-v), \end{aligned}$$

тоді $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(u)u + \alpha(-v)v}{u + v} = 0$, а отже, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_v^u f(x_0)}{\Delta_v^u x} = c = f'(x_0)$. \square

Наслідок 3.1. *Нехай в околі точки x_0 задано функцію f і послідовність дійсних чисел (a_n, b_n) , таких, що*

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n; \quad 2) a_j \neq b_j \text{ при } j \in \mathbb{N}; \quad 3) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n - x_0}{a_n - b_n} \right| < \infty.$$

Тоді

- якщо $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, то вона дорівнює $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n) - f(b_n)}{a_n - b_n}$.
- якщо не існує скінченної границі $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n) - f(b_n)}{a_n - b_n}$, то f — не диференційовна в точці x_0 (не має скінченної похідної).

Доведення. Нехай $u(h) = a_n - x_0$, $v(h) = x_0 - b_n$, при $h \in (2^{-n-1}; 2^{-n}]$.

Нескладно перевірити, що пара функції $(u, v) \in \mathcal{P}^*$. Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n) - f(b_n)}{a_n - b_n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_{v(h)}^{u(h)} f(x_0)}{\Delta_{v(h)}^{u(h)} x} = \mathfrak{D}_v^u f(x_0). \quad (3.7)$$

Припустімо, що не існує скінченної границі $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n) - f(b_n)}{a_n - b_n}$, але існує скінченна $f'(x)$. Хоча, згідно з (3.7) і теоремою 3.2, має існувати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n) - f(b_n)}{a_n - b_n}$, а отже, припущення, що існує $f'(x) \in \mathbb{R}$ — хибне. \square

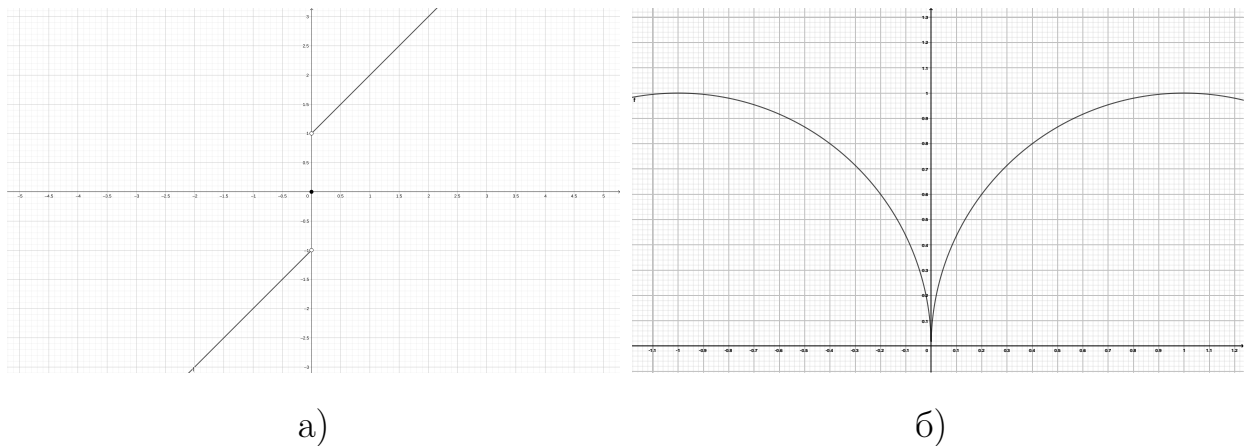


Рис. 3.1. Графічні коментарі: а) до теореми 3.2: для функції

$$f(x) = x + \begin{cases} x/|x|, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad \text{значення } \mathfrak{D}_v^u f(0) \text{ при } (u, v) \in \mathcal{P}^* \text{ може бути як}$$

рівне 1 так і $+\infty$; б) до теореми 3.3: для функції $g(x) = \sqrt{1 - (|x| - 1)^2}$ значення $g'(0) = \infty$, але $\mathfrak{D}_h^h g(0) = 0$.

Теорема 3.3. *Нехай f — функція, задана в околі точки x_0 і $f'(x_0) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, тоді для довільної пари $(u, v) \in \mathcal{P}^+$ виконується рівність $\mathfrak{D}_v^u f(x_0) = f'(x_0)$.*

Доведення. Враховуючи те, що $\mathcal{P}^+ \subset \mathcal{P}^*$, то у випадку, коли $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, умови задовольняють теорему 3.2, а отже, $\mathfrak{D}_v^u f(x_0) = f'(x_0)$.

Нехай $f'(x) = +\infty$ або $f'(x) = -\infty$, тоді

$$\frac{\Delta_v^u f(x_0)}{\Delta_v^u x} = \frac{u}{u+v} \cdot \frac{f(x_0+u) - f(x_0)}{u} + \frac{v}{u+v} \cdot \frac{f(x_0-v) - f(x_0)}{-v}. \quad (3.8)$$

Враховуючи те, що величини $\frac{u}{u+v}$ і $\frac{v}{u+v}$ є невід'ємними, а також $\frac{u}{u+v} + \frac{v}{u+v} = 1$, маємо $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\Delta_v^u f(x_0)}{\Delta_v^u x} = \mathfrak{D}_v^u f(x_0) = f'(x_0)$. \square

Наслідок 3.2. *Нехай в околі точки x_0 задано функцію f і послідовності дійсних чисел (l_n) і (r_n) , такі, що $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$, і $l_j \leq x_0 \leq r_j$, $l_j \neq r_j$ при $j \in \mathbb{N}$. Тоді:*

- якщо $f'(x_0) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, то вона дорівнює $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(r_n) - f(l_n)}{r_n - l_n}$;
- якщо не існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(r_n) - f(l_n)}{r_n - l_n}$, то в точці x_0 не існує похідної.

Доведення наслідку 3.2 аналогічне до доведення наслідку 3.1.

Зазначимо, якщо у наслідку 3.2 замість l_n узяти лівий край циліндра n -го рангу, який містить x_0 , а за r_n – правий, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(r_n) - f(l_n)}{r_n - l_n}$ буде циліндричною похідною в точці x_0 [58].

Теорема 3.4. *Якщо для функції $f(x)$ існує $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, то для всіх $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{P}^-$ справедлива рівність $\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.*

Доведення. Нехай $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = c \in \mathbb{R}$, тоді існує такий проколений окіл нуля, в кожній точці якого існує скінченна похідна, тому за теоремою Лагранжа

$$\frac{f(x_0 + \mathbf{u}) - f(x_0 - \mathbf{v})}{(x_0 + \mathbf{u}) - (x_0 - \mathbf{v})} = f'(x_0 - \mathbf{v} + \theta(\mathbf{u} + \mathbf{v})), \quad (3.9)$$

де $\theta = \theta(h) \in [0; 1]$.

Покажемо, що нерівність $\theta \neq \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{u} + \mathbf{v}}$ виконується для всіх h зі проколеного околу нуля, в кожній точці якого визначені \mathbf{u} , \mathbf{v} і має місце нерівність $\mathbf{u}(h) \neq \mathbf{v}(h)$.

Нехай $\mathbf{u}(h) > 0$, тоді $\mathbf{v}(h) < 0$, бо $\mathbf{v}(h) \cdot \mathbf{u}(h) < 0$, а тоді можливі два випадки:

1. якщо $\mathbf{u} + \mathbf{v} > 0$, то $\theta = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{u} + \mathbf{v}} < 0$, але $\theta \in [0; 1]$;
2. якщо $\mathbf{u} + \mathbf{v} < 0$, то покажемо, що $\theta = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{u} + \mathbf{v}} > 1$, $\mathbf{v} < \mathbf{u} + \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{u}(h) > 0$, отже, в цьому випадку $\theta = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{u} + \mathbf{v}} > 1$ завжди виконується, але $\theta \in [0; 1]$.

Аналогічно, рівність $\theta = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{u} + \mathbf{v}}$ не виконуються при $\mathbf{u}(h) < 0$.

Перейшовши до границі в (3.9), маємо $\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} f'(x_0 - \mathbf{v} + \theta(\mathbf{u} + \mathbf{v})) = c$. Випадки, коли $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \pm\infty$, фактично є наслідками вже доведеного твердження. \square

Наслідок 3.3. *Якщо f' існує у точці x_0 і є неперервною, то для всіх $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{P}$ справедлива рівність $\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0) = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} (f'(x_0 + \mathbf{u}(h)) + f'(x_0 - \mathbf{v}(h)))$.*

Функція $\text{Sign}(x) = \begin{cases} x + x/|x|, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ задовольняє умову попередньої теореми, хоча $\text{Sign}'(0) = +\infty$ і $\lim_{x \rightarrow 0} \text{Sign}'(x) = 1$.

Нагадаємо, що у випадку неперервності функції f й існування $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ відомо, що виконується рівність $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$.

Теорема 3.5. *Нехай для функції f існує послідовність (x_n) , така, що $x_j \neq x_0, \forall j \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = c$, тоді завжди існує пара функції $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{P}^-$, що $\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0) = c$.*

Доведення. Згідно з умовою теореми існує послідовність додатних чисел (ε_n) така, що $|f'(x_n) - c| < \varepsilon_n$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Для кожної точки x_j оберемо Δ_j , таке, щоб $\left| \frac{f(x_j + \Delta_j) - f(x_j)}{\Delta_j} - f'(x_j) \right| < \varepsilon_j^2$ і x_0 не належав відрізьку з кінцями $x_j, x_j + \Delta_j$, а раз так, то точки $x_j, x_j + \Delta_j$ лежатимуть із одного боку щодо x_0 .

Утворимо пару функції (\mathbf{u}, \mathbf{v}) таким чином $\mathbf{u}(h) = x_0 - x_n, \mathbf{v}(h) = x_n + \Delta_n - x_0$ при $h \in (2^{-n-1}; 2^{-n}]$. Згідно з побудовою, для всіх достатньо малих $h \neq 0$ справедливі такі нерівності: $\mathbf{u}(h) \neq -\mathbf{v}(h), \mathbf{u}(h)\mathbf{v}(h) < 0$ і $\lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{u}(h) = 0 = \lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{v}(h)$, а отже, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{P}^-$.

Нехай $\mu(h) = n$ при $h \in (2^{-n-1}; 2^{-n}]$, тоді

$$\frac{\Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0)}{\Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} x} = \frac{f(x_{\mu(h)} + \Delta_{\mu(h)}) - f(x_{\mu(h)})}{\Delta_{\mu(h)}} \Rightarrow \left| \frac{\Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0)}{\Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} x} - c \right| < \varepsilon_{\mu(h)} + \varepsilon_{\mu(h)}^2.$$

Отже, $\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0) = c$. □

Прикладом функції f , яка задовольняє умову теореми 3.5, але не задовольняє теорему 3.4 є $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

3.2. Застосування (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідної до розкриття невизначеностей у границях

Враховуючи теореми 3.2 – 3.5 і їхні наслідки, можемо сформулювати такі твердження:

Наслідок 3.4. Границя

$$\lim_{\substack{p \rightarrow t_0 \\ q \rightarrow t_0 \\ p \neq q}} \frac{f(p) - f(q)}{p - q} \quad (3.10)$$

існує тоді і тільки тоді, коли f' неперервна в точці t_0 . У випадку існування вона дорівнює $f'(t_0)$.

Доведення. Розглянемо довільний шлях $(p(h), q(h))$ такий, що при прямуванні $h \rightarrow 0$ маємо $(p(h), q(h)) \rightarrow (t_0, t_0)$.

Нехай, $p(h) = t_0 + \mathbf{u}(h)$, $q(h) = t_0 - \mathbf{v}(h)$, тоді з $p(h) \neq q(h)$ отримуємо $\mathbf{u}(h) \neq -\mathbf{v}(h)$, оскільки $\lim_{h \rightarrow 0} p(h) = t_0$, $\lim_{h \rightarrow 0} q(h) = t_0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{u}(h) = 0$ і $\lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{v}(h) = 0$, то пара $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{P}$.

Розглянемо множини $A \subset O(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ та $\tilde{A} = O(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \setminus A$ такі, що при $h \in A$: $\mathbf{u}(h) \cdot \mathbf{v}(h) \geq 0$, але при $h \in \tilde{A}$: $\mathbf{u}(h) \cdot \mathbf{v}(h) < 0$, де $O(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ – проколотивий окіл нуля, в кожній точці якого функції \mathbf{u}, \mathbf{v} є визначеними і виконується нерівність $\mathbf{u}(h) \neq -\mathbf{v}(h)$, $\forall h \in O(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Тоді, для того щоб існувала границя

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p(h)) - f(q(h))}{p(h) - q(h)},$$

необхідно і достатньо, щоб існували та були рівні границі

$$\lim_{A \ni h \rightarrow 0} \frac{f(p(h)) - f(q(h))}{p(h) - q(h)}, \quad \lim_{\tilde{A} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(p(h)) - f(q(h))}{p(h) - q(h)}.$$

Згідно з теоремами 3.3 – 3.5, f' має бути неперервною в т. t_0 . \square

Зазначимо, що у випадку неперервності похідної, твердження наслідку

впливає з застосування добре відомої теореми Лагранжа, оскільки

$$\frac{f(p) - f(q)}{p - q} = f'(c(p, q)), \quad \lim_{\substack{p \rightarrow t_0 \\ q \rightarrow t_0 \\ p \neq q}} c(p, q) = t_0.$$

Наслідок 3.5. *Нехай задано функцію $f(t)$ і пару функцій $p(x)$ і $q(x)$, які визначені в кожній точці певного проколеного околу $\Theta^*(p, q)$ точки x_0 , і при цьому виконується нерівність $p(x) \neq q(x)$, $\forall x \in \Theta^*(p, q)$, а також $\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} q(x) = t_0$.*

Якщо визначена й існує

$$\xi = \begin{cases} f'(t_0), & \text{якщо } \left((p(x) - t_0) \cdot (q(x) - t_0) \right) \leq 0, \quad \forall x \in \Theta(u, v); \\ \lim_{t \rightarrow t_0} f'(t), & \text{якщо } \left((p(x) - t_0) \cdot (q(x) - t_0) \right) > 0, \quad \forall x \in \Theta(u, v); \end{cases}$$

$$\text{то } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(p(x)) - f(q(x))}{p(x) - q(x)} = \xi.$$

Доведення. Розглянемо заміну $u(h) = p(h) - t_0$, $v(h) = t_0 - q(h)$, тоді

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(p(x)) - f(q(x))}{p(x) - q(x)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + u(h)) - f(t_0 - v(h))}{u(h) - v(h)}. \quad (3.11)$$

Застосувавши теореми 3.2 – 3.4, отримуємо необхідні твердження. \square

Наслідок 3.5 можна адаптувати до функцій двох змінних (наслідок 3.6).

Наслідок 3.6. *Нехай задано функцію $f(t)$, точку $M_0(x_0, y_0)$ і функції $p(x, y)$, $q(x, y)$ визначені в кожній точці $M(x, y) \in \Theta(M_0)$ (проколеного околу точки M_0), при цьому $p(M) \neq q(M)$ і $\lim_{M \rightarrow M_0} p(M) = t_0 = \lim_{M \rightarrow M_0} q(M)$.*

Якщо визначена й існує

$$\xi = \begin{cases} f'(t_0), & \text{якщо } (p(M) - t_0) \cdot (q(M) - t_0) \leq 0, \quad \forall M \in \Theta(M_0); \\ \lim_{t \rightarrow t_0} f'(t), & \text{якщо } (p(M) - t_0) \cdot (q(M) - t_0) > 0, \quad \forall M \in \Theta(M_0); \end{cases}$$

$$\text{то } \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(p(M)) - f(q(M))}{p(M) - q(M)} = \xi.$$

Доведення. Розглянемо довільний шлях $\Upsilon(h) = (x(h), y(h))$ такий, що $\lim_{h \rightarrow 0} (x(h), y(h)) = (x_0, y_0)$ або в іншій формі $\lim_{h \rightarrow 0} \Upsilon(h) = M_0$.

Нехай $u(h) = p(\Upsilon(h)) - t_0$, $v(h) = t_0 - q(\Upsilon(h))$, тоді

$$\frac{f(p(\Upsilon(h))) - f(q(\Upsilon(h)))}{p(\Upsilon(h)) - q(\Upsilon(h))} = \frac{f(t_0 + u(h)) - f(t_0 - v(h))}{u(h) + v(h)}. \quad (3.12)$$

Застосувавши теореми 3.2 – 3.4 отримуємо необхідні твердження. \square

Приклад 3.1. Знайдемо значення границі застосувавши наслідок 3.5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p^2 \sin p^{-1} - q^2 \sin q^{-1}}{p - q} = \left\| \begin{array}{l} f(t) = t^2 \sin t^{-1}; \\ f(0) = 0; f'(0) = 0; \end{array} \right\| = f'(0) = 0,$$

де $p(x) \cdot q(x) < 0$ при $0 < |x| < 1$ і $\lim_{x \rightarrow 0} p(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} q(x)$, $p(x) \neq q(x)$.

Зауважимо, що в розглянутому і в інших прикладах цього розділу кожна з функцій p та q може бути розривною в околі нуля.

Теорема 3.6. *Нехай функції p, q, f, g задовольняють наступні умови:*

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = t_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} q(x)$;
2. існує проколтий окіл x_0 , для кожної точки x якого виконується нерівність $p(x) \neq q(x)$;
3. виконуються $f^{(j)}(t_0) = 0 = g^{(j)}(t_0)$, для всіх $j \in \{0; 1, \dots, n-1\}$;
4. існують скінченні $f^{(n)}(t_0)$, $g^{(n)}(t_0) \neq 0$;
5. $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{(p(x)-t_0)^n}{(p(x)-t_0)^n - (q(x)-t_0)^n} \right| = c \in \mathbb{R}$.

Тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(p(x)) - f(q(x))}{g(p(x)) - g(q(x))} = \frac{f^{(n)}(t_0)}{g^{(n)}(t_0)}. \quad (3.13)$$

Доведення. Нехай $p = p(x)$, $q = q(x)$.

Спочатку покажемо, що з $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{(p(x)-t_0)^n}{(p(x)-t_0)^n - (q(x)-t_0)^n} \right| = c \in \mathbb{R}$ маємо $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{(q(x)-t_0)^n}{(p(x)-t_0)^n - (q(x)-t_0)^n} \right| \in \mathbb{R}$. Справді

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{(q(x) - t_0)^n}{(p(x) - t_0)^n - (q(x) - t_0)^n} \right| = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{(p(x) - t_0)^n}{(p(x) - t_0)^n - (q(x) - t_0)^n} - 1 \right| \leq$$

$$\leq 1 + \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{(p(x) - t_0)^n}{(p(x) - t_0)^n - (q(x) - t_0)^n} \right| = 1 + c.$$

Функцію f представимо в околі точки t_0 за допомогою формули Тейлора

$$f(t) = \frac{f^{(n)}(t_0) + \gamma(t)}{n!} (t - t_0)^n, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \gamma(t) = 0. \quad (3.14)$$

Тоді

$$f(p) - f(q) = \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} ((p - t_0)^n - (q - t_0)^n) + \frac{\gamma(p)(p - t_0)^n - \gamma(q)(q - t_0)^n}{n!},$$

$$\frac{n!(f(p) - f(q))}{((p - t_0)^n - (q - t_0)^n)} = f^{(n)}(t_0) + \frac{\gamma(p)(p - t_0)^n - \gamma(q)(q - t_0)^n}{p^n - q^n}.$$

Враховуючи умови теореми маємо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{\gamma(p)(p - t_0)^n - \gamma(q)(q - t_0)^n}{(p - t_0)^n - (q - t_0)^n} \right| = 0. \quad (3.15)$$

Виконавши аналогічні дії для функції g отримаємо, що

$$\frac{n!(g(p) - g(q))}{(p - t_0)^n - (q - t_0)^n} = g^{(n)}(t_0) + \frac{\beta(p)(p - t_0)^n - \beta(q)(q - t_0)^n}{p^n - q^n},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{\beta(p)(p - t_0)^n - \beta(q)(q - t_0)^n}{p^n - q^n} \right| = 0.$$

$$\text{Тоді } \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(p) - f(q)}{p^n - q^n} : \frac{g(p) - g(q)}{p^n - q^n} \right) = \frac{f^{(n)}(t_0)}{g^{(n)}(t_0)}. \quad \square$$

Зазначимо, що у випадку коли $q(x) = t_0$ і $p(x) = x$ в кожній точці деякому околу точки x_0 теорема 3.6 стає відомою теоремою (правилом Лопітала).

Звернемо увагу на умову $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{(p(x) - t_0)^n}{(p(x) - t_0)^n - (q(x) - t_0)^n} \right| = c \in \mathbb{R}$, вона аналогічна умові для визначення множини \mathcal{P}^* , а тому маємо простий наслідок, якщо $(p(x) - t_0)^n \cdot (q(x) - t_0)^n \leq 0$ в кожній точці околу точки x_0 , то $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{(p(x) - t_0)^n}{(p(x) - t_0)^n - (q(x) - t_0)^n} \right| \leq 1$.

Приклад 3.2. Нехай $f(t) = t \sin t$, $g(t) = \cos t$, $p(x) = x \cdot \sin x^{-1}$,
 $q(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$ Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(p(x)) - f(q(x))}{\cos p(x) - \cos q(x)}$.

Легко переконатися, що функції p, q задовольняють умови теореми 3.6. Для функцій $f(t) = t \sin t$ і $g(t) = \cos t$ знайдемо похідні: $f'(t) = \sin t + t \cos t$, $f''(t) = 2 \cos t - t \sin t$, $g'(t) = -\sin t$, $g''(t) = -\cos t$.

Застосуємо теорему 3.6 до шуканої границі:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p \sin p - q \sin q}{\cos(p) - \cos(q)} = \frac{2 \cos t - t \sin t}{-\cos t} \Big|_{t=0} = -2. \quad (3.16)$$

3.3. Застосування (u, v) -похідної для вивчення диференціальних властивостей строго монотонних функцій

Лема 3.2. Нехай функціональна послідовність (φ_n) рівномірно збігається до φ на $[a; b]$. Для $\mathbf{V}_{[a;b]} \varphi$ (варіації функції φ) справедлива нерівність

$$\mathbf{V}_{[a;b]} \varphi \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{V}_{[a;b]} \varphi_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{V}_{[a;b]} \varphi_n.$$

Доведення. Для натурального n позначимо через T_n^* таке розбиття відрізка $[a; b]$ n точками, що $\mathbf{V}_{[a;b]}(f, T_n^*) = \sup_{T_n} \mathbf{V}_{[a;b]}(\varphi, T_n)$.

Оскільки (φ_k) рівномірно прямує до φ , то для довільного натурального k існує $\varepsilon_k > 0$, таке, що $|\varphi_k(x) - \varphi(x)| < \varepsilon_k$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$. Тобто $\varphi(x) = \varphi_k(x) + \alpha_k(x)$, $|\alpha_k(x)| < \varepsilon_k$. Тоді $|\varphi(x_{l+1}) - \varphi(x_l)| \leq |\varphi_{k_n}(x_{l+1}) - \varphi_{k_n}(x_l)| + |\alpha_{k_n}(x_{l+1}) - \alpha_{k_n}(x_l)| \leq |\varphi_{k_n}(x_{l+1}) - \varphi_{k_n}(x_l)| + 2\varepsilon_k$, де $x_l \in T_n^*$.

$$\mathbf{V}_{[a;b]}(\varphi, T_n^*) < \mathbf{V}_{[a;b]}(\varphi_{k_n}, T_n^*) + 2\varepsilon_{k_n} n.$$

Перейшовши до границі, отримуємо:

$$\mathbf{V}_{[a;b]} \varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{V}_{[a;b]}(f, T_n^*) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbf{V}_{[a;b]}(\varphi_{k_n}, T_n^*) + 2\varepsilon_{k_n} n \right).$$

Обравши послідовність k_n таким чином, щоб $\varepsilon_{k_n} < n^{-2}$, маємо $\mathbf{V}_{[a;b]} \varphi \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{V}_{[a;b]} \varphi_{k_n}$.

Випадок, коли $\lim_{n \rightarrow \infty} \bigvee_{[a,b]} \varphi_n(x)$ – не існує, а $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \bigvee_{[a,b]} \varphi_n(x) < \infty$ доводимо виділенням підпослідовності n_k : $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \bigvee_{[a,b]} \varphi_n(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bigvee_{[a,b]} \varphi_{n_k}(x)$ і розглядаємо функціональну послідовність $g_k(x) = \varphi_{n_k}(x)$. Аналогічним чином і для випадку $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \bigvee_{[a,b]} \varphi_n(x) < \infty$. \square

Лема 3.3. *Нехай (a_n) і (b_n) – нескінченна послідовність дійсних чисел існують такі числа a, b , такі, що нерівності $|a_n| \leq a < 1$, $|b_n| > b > 1$ виконуються при всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді для довільної послідовності (t_j) , де $t_j \in \{0, 1\}$, границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n \mu_j$ може або не існувати, або дорівнювати*

$$\text{нулю чи нескінченності, де } \mu_j = \begin{cases} a_j & \text{при } t_j = 0; \\ b_j & \text{при } t_j = 1. \end{cases}$$

Доведення. Нескладно показати, що залежно від вибору послідовності (t_n) границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n \mu_j$ може дорівнювати 0 або $\pm\infty$ або взагалі не існувати.

Методом від супротивного покажемо, що не існує такого $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, щоб $\prod_{j=1}^{\infty} \mu_j = c$. Припустимо, що таке c існує, але тоді згідно з необхідною умовою збіжності нескінчених добутоків послідовності (a_n) і (b_n) мають прямувати до 1, а це суперечить умові леми, а, отже, такого числа не існує. \square

3.3.1. Функція Мінковського. Задамо функцію Міковського на $[0; 1]$ використовуючи представлення аргументу елементарними лангцюговими дробами

$$?(x = [0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) = \sum_{j=1}^{\infty} \left((-1)^{j-1} 2^{1-a_1-a_2-\dots-a_j} \right). \quad (3.17)$$

Оберемо довільне ірраціональне $x \in [0; 1] \setminus \mathbb{Q}$, і побудуємо дві послідовності $l_n = [0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ та $r_n = [0, a_1, a_2, \dots, a_n + 1]$. Обчислимо значення різниці $(r_n - l_n)$

$$\begin{aligned} & \frac{P_{n-1}(a_n + 1) + P_{n-2}}{Q_{n-1}(a_n + 1) + Q_{n-2}} - \frac{P_{n-1}a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}a_n + Q_{n-2}} = \\ & = \frac{P_{n-2}Q_{n-1} - P_{n-1}Q_{n-2}}{Q_n^2 + Q_nQ_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_n^2 + Q_nQ_{n-1}}. \end{aligned}$$

Відповідно

$$?(r_n) - ?(l_n) = (-1)^{n-1} 2^{-\sum_{j=1}^n a_j}.$$

Тоді

$$J_n(x) = \frac{?(r_n) - ?(l_n)}{r_n - l_n} = 2^{-\sum_{j=1}^n a_j} (Q_n^2 + Q_n Q_{n-1}).$$

Розглянемо відношення

$$\phi_n = \frac{J_n(x)}{J_{n-1}(x)} = 2^{-a_n} (a_n + \tau) \left(1 + \frac{a_n}{1 + \tau} \right),$$

де $\tau = \frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}}$ і $\tau \in [0; 1]$, $J_0(x) = 1$, тоді

$$J_n(x) = \prod_{j=1}^n \phi_j. \quad (3.18)$$

Величину ϕ_n можна розглянути, як функцію від τ . Оцінимо значення $\phi_n(\tau)$ при цілих a_n і $\tau \in [0; 1]$, результат представимо у вигляді таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

Оцінка значень $\phi_n(\tau)$

a_n	1	2	3	4	≥ 5
$\phi_n(\tau)$	≥ 1	$\geq \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2$	$\left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$	$\left[\frac{15}{16}, \frac{5}{4}\right]$	$\leq \frac{15}{16}$

Нехай B - множина всіх дійсних чисел з відрізка $[0; 1]$, в зображенні яких ланцюговим дробом починаючи з деякого місця n_0 всі цифри зображення є виключно 1 та 4. Тоді для кожного $x \in B$ величина ϕ_n , враховуючи оцінки вище, може прямувати до 1, а отже, нескінченний добуток $\prod_{j=1}^{\infty} \phi_n$ може мати скінченне значення відмінне від нуля.

Враховуючи теорему 4.2.1 [58]: "Множина всіх чисел відрізка $[0; 1]$ з обмеженими елементами ланцюгового представлення має міру Лебега нуль" отримуємо, що міра множини B є також нульовою. З іншого боку, множина B є зліченим об'єднанням нульмірних множин, відповідно вона сама є нульмірною.

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n \phi_n = \begin{cases} 0; \\ \infty; \\ \mathcal{A}. \end{cases}$$

Отже, майже скрізь, у розумінні міри Лебега, похідна функції Мінковського може набувати лише двох значень: нуль, нескінченність, або взагалі не існувати.

Оскільки функція Мінковського є функцією обмеженої варіації (більше того є строго зростаючою), то майже скрізь вона має скінченну похідну. Враховуючи те, що перетин двох множин повної міри є множиною повної міри, маємо, що майже скрізь похідна дорівнює нулю.

3.3.2. Сингулярність функцій, які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа, без збереження хвостів. Нехай для кожної функції b_m з множини \mathcal{B}_l похідна в жодній точці не дорівнює одиниці, окрім функції $b_0(x) = x$. Згідно з таким припущенням маємо, що для всіх функцій з множини \mathcal{B}_l похідна може набувати лише скінченну кількість значень і всі вони відокремлені від одиниці.

Нехай \mathbb{X}_n^Ω множина розв'язків рівняння $\Omega(x, \phi_k) = \Omega_n(x, \phi_k)$, а \mathbb{X}_n^Υ – множина розв'язків рівняння $\Upsilon(x, \phi_k) = \Upsilon_n(x, \phi_k)$. Легко показати, що $\mathbb{X}_n^\Omega \subset \mathbb{X}_{n+1}^\Omega$, $\mathbb{X}_n^\Upsilon \subset \mathbb{X}_{n+1}^\Upsilon$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і те, що множини $\mathbb{X}^\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{X}_n^\Omega$, $\mathbb{X}^\Upsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{X}_n^\Upsilon$ є всюди щільними.

Покажемо, що функція $\Omega(x, \phi_k)$ є сингулярною (для функції $\Upsilon(x, \phi_k)$ показується аналогічно).

Для кожної точки x з області визначення побудуємо послідовність пар (l_n, r_n) наступним чином: $l_n, r_n \in \mathbb{X}_n^\Omega$, $l_n \leq x \leq r_n$, l_n і r_n є сусідніми елементами з множини \mathbb{X}_n^Ω .

Функція $\Omega_n(x, \phi_k)$ є лінійною між будь-якими двома сусідніми точками з множини \mathbb{X}_n^Ω (теж стосується функції $\Upsilon_n(x, \phi_k)$), а раз так, то

$\frac{\Omega(r_n, \phi_k) - \Omega(l_n, \phi_k)}{r_n - l_n} = \frac{\Omega_n(r_n, \phi_k) - \Omega_n(l_n, \phi_k)}{r_n - l_n} = \Omega'(t, \phi_k)$, $t \in (l_n; r_n)$. Враховуючи завдання функції $\Omega_n(x, \phi_k)$, маємо, що $\Omega'(t, \phi_k)$ буде представлятися у вигляді добутків значень похідних функцій з множини \mathcal{B}_l , тому при граничному переході отримуємо нескінченний добуток елементи якого не прямують до одиниці і набувають скінченну кількість можливих значень відмінних від одиниці. Такий добуток може або дорівнювати нулю, або нескінченності, або взагалі не існувати. Оскільки функція Ω майже скрізь має скінченну похідну, то, згідно з наслідком 3.2, значення її дорівнює нулю (адже інших скінченних значень серед можливих значень добутку не існує). Отже, функція Ω – сингулярна.

3.4. Приклад класу ніде не монотонних функцій обмеженої варіації, який містить сингулярні

Розглянемо додаткову функцію χ , задання якої залежить від двох параметрів p, q

$$\chi(x, p, q) = [x] + \begin{cases} 3p\{x\}, & 0 \leq \{x\} < \frac{1}{3}; \\ 2p + q - 1 - 3(p + q - 1)\{x\}, & \frac{1}{3} \leq \{x\} < \frac{2}{3}; \\ 1 - 3q + 3q\{x\}, & \frac{2}{3} \leq \{x\} < 1, \end{cases} \quad (3.19)$$

де $[x]$ – ціла частина від числа x , $\{x\}$ – дробова частина. Нагадаємо, що будь-яке дійсне число $x = [x] + \{x\}$, $\{x\} \in [0; 1)$. Легко переконатись, що при $p, q \in [0; 1]$ різниця

$$(\chi(x, p, q) - x) \in [-1; 1], x \in \mathbb{R}. \quad (3.20)$$

Нехай задано нескінченну послідовність пар параметрів $(p_n, q_n) = P$ таких, що $p_n, q_n \in [0, 1]$. Розглянемо рекурентно задану послідовність функції

$$\Omega_{k+1}(x, P) = 3^{-k} \chi(3^k \Omega_k(x, P), p_k, q_k), \quad \Omega_0(x, P) = x. \quad (3.21)$$

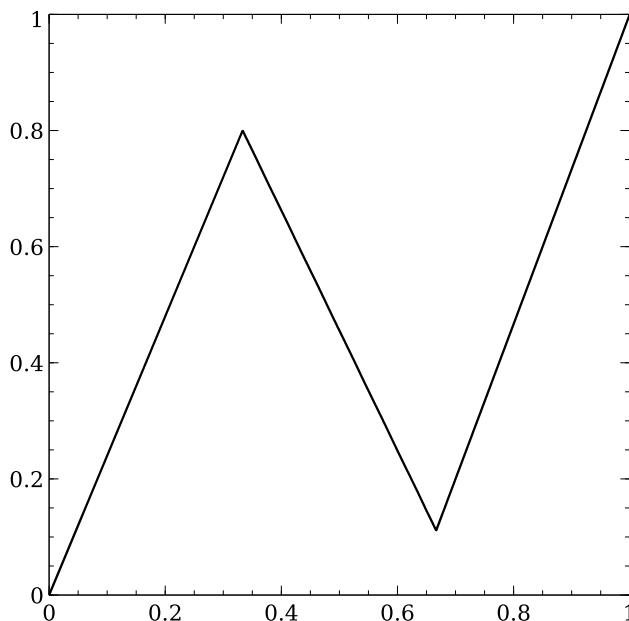


Рис. 3.2. Графік функції χ при $p = 0.8$ і $q = 0.6$

Теорема 3.7. Для заданої послідовності пар параметрів P

— завжди існує неперервна $\Omega(x, P) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k(x, P)$;

— послідовність (Ω_k) є рівномірно збіжною до Ω на $[0; 1]$.

Доведення. Розглянемо різницю

$$\Omega_k(x, P) - \Omega_0(x, P) = \Omega_k(x, P) - x = \sum_{n=0}^{k-1} (\Omega_{n+1}(x, P) - \Omega_n(x, P)). \quad (3.22)$$

Перейшовши до границь в останніх рівностях отримаємо, що

$$\Omega(x, P) = x + \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_{n+1}(x, P) - \Omega_n(x, P)). \quad (3.23)$$

Враховуючи ознаку Веєрштраса рівномірної збіжності функціональних рядів та оцінку (3.20) покажемо рівномірну збіжність ряду з рівності (3.23)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\Omega_{n+1}(x, P) - \Omega_n(x, P)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| 3^{-n} \left(\chi \left(3^n \Omega_n(x, P), p_n, q_n \right) - \Omega_n(x, P) \right) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}.$$

Враховуючи властивості рівномірно збіжних рядів отримуємо існування неперервної функції Ω при заданій послідовності пар $P = (p_k, q_k)$. \square

Теорема 3.8. Якщо для послідовності пар $P = (p_k, q_k)$ є збіжним додатний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n - 1 + |p_n + q_n - 1|),$$

то, відповідна цій послідовності пар функція Ω буде функцією обмеженої варіації.

Доведення. Функція $\chi(x, p, q)$ має варіацію у $(p_n + q_n + |p_n + q_n - 1|)$ разів більшу ніж функція $f(x) = x$ на тому ж проміжку.

Якщо f – кусково-лінійна функція, тоді маємо оцінку $\mathbf{V}_{[a;b]} \chi(f(x), p, q) \leq \leq (p_n + q_n + |p_n + q_n - 1|) \mathbf{V}_{[a;b]} f(x)$.

Враховуючи те, що в попередній теоремі 3.7 було встановлено, що послідовність кусково-лінійних функцій (Ω_k) рівномірно прямує до Ω , то застосовною є лема 3.2. Отже,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{[a;b]} \Omega(x, P) &\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \mathbf{V}_{[a;b]} \Omega_k(x, P) \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left((b - a) \cdot \prod_{n=1}^k (p_n + q_n + |p_n + q_n - 1|) \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Знайдемо умови, коли $\prod_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n + |p_n + q_n - 1|)$ існує і є скінченним.

Для цього розглянемо додатній ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(p_n + q_n + |p_n + q_n - 1|)$. Застосовуючи граничний випадок ознаки порівняння легко показати, що ряд збігається одночасно з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n - 1 + |p_n + q_n - 1|)$. \square

Теорема 3.9. Якщо для заданої послідовності пар $P = (p_n, q_n)$ відповідна функція Ω є функцією обмеженої варіації, при цьому існує нескінченна підпослідовність (n_j) , що значення $\underline{\lim}_{j \rightarrow \infty} |3p_{n_j} - 1|$, $\underline{\lim}_{j \rightarrow \infty} |3q_{n_j} - 1|$, $\underline{\lim}_{j \rightarrow \infty} |3|p_{n_j} + q_{n_j} - 1| - 1|$ одночасно відмінні від нуля, то функція Ω – сингулярна.

Доведення. Зазначимо наступне: якщо при x значення $3^n \Omega_n(x, P)$ є цілим числом, то для всіх $k > n$ виконується рівність: $\Omega_k(x, P) = \Omega_n(x, P) =$

$= \Omega(x, P)$. Тобто розглядаючи Ω_n як n -те наближення до Ω маємо набори точок які стають "нерухомими".

Позначимо $\Phi_n = \{x_j \mid 3^n \Omega_n(x_j, P) \in \mathbb{Z}\}$. Тим самим ми утворили послідовність вкладених множин (Φ_n) , при цьому $\Phi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n$ буде всюди щільною множиною (впливає з неперервності функції Ω і власне побудови множин Φ_n).

Для кожної точки x утворимо послідовності $l_n = l_n(x) = \max \{x_j \mid x_j \leq x, x_j \in \Phi_n\}$, $r_n = r_n(x) = \min \{x_j \mid x_j > x, x_j \in \Phi_n\}$. Маємо, що $l_n(x) \leq x < r_n(x)$, а також згідно з побудовою множин Φ_n монотонність послідовностей (l_n) , (r_n) .

Побудуємо додаткову послідовність функцій

$$K_n = \begin{cases} \Omega_n, & \text{якщо } \sup_{t \in [l_n(x); r_n(x)]} \Omega_n(t, P) - \inf_{t \in [l_n(x); r_n(x)]} \Omega_n(t, P) = 3^{-n}; \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Особливістю побудованої функції є те, що розв'язками рівняння $\Omega(x, P) = \Omega_n(x, P)$ є всі числа з множини Φ_n . Згідно з побудовою маємо:

$$\frac{\Omega(r_n(x), P) - \Omega(l_n(x), P)}{r_n(x) - l_n(x)} = \frac{K_n(r_n) - K_n(l_n)}{r_n(x) - l_n(x)} = \begin{cases} \Omega_n'^+(x, P), \\ 0. \end{cases}$$

$(\Omega_n'^+(x))$ це правостороння похідна функції Ω_n в точці x

Оскільки Ω є функцією обмеженої варіації, то майже скрізь у розумінні міри Лебега вона має скінченну похідну (позначимо множину таких значень аргументу через \mathbb{X}).

Для всіх x , для яких існує нескінченна підпослідовність натуральних чисел n_j таких, що $K_{n_j}(x) \neq 0$ покажемо, що $\lim_{j \rightarrow \infty} \Omega_{n_j}'^+(x, P) = \begin{cases} 0, \\ \pm \infty, \\ \text{не існує.} \end{cases}$

Оскільки Ω_{n_j} – кусково-лінійна функція, то $\Omega(r_{n_j}, P) - \Omega(l_{n_j}, P) = \Omega_{n_j}(r_{n_j}, P) - \Omega_{n_j}(l_{n_j}, P) = \Omega_{n_j}'^+(t, P)$, для всіх $t \in [l_{n_j}; r_{n_j})$.

Враховуючи задання Ω_n очевидним стає рекурентне співвідношення:

$$\Omega'_{n+1}(x, P) = a_n \Omega'_n(x, P), \quad a_n \in \{3p_n, 3q_n, 3|p_n + q_n - 1|\}.$$

Враховуючи існування підпослідовності (n_j) (з умов теореми) маємо, можливі випадки:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Omega'_{n_j}(x, P) = \begin{cases} 0, \\ \pm \infty, \\ \text{не існує.} \end{cases}$$

Враховуючи наслідок 3.2, для всіх $x \in \mathbb{X}$ маємо

$$\begin{aligned} \Omega'(x, P) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\Omega(r_{n_j}(x, P)) - \Omega(l_{n_j}(x, P))}{r_{n_j}(x) - l_{n_j}(x)} = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{K_{n_j}(r_{n_j}(x)) - K_{n_j}(l_{n_j}(x))}{r_{n_j}(x) - l_{n_j}(x)} = \begin{cases} 0, \\ \pm \infty, \\ \text{не існує.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Оскільки \mathbb{X} – це множина тих значень аргументу, при яких існує скінченна похідна від функції Ω , то з (3.25) маємо, що для всіх $x \in \mathbb{X}$ $\Omega'(x, P) = 0$, отже функція Ω – сингулярна. \square

Згідно з побудовою, можна говорити, що клас всеможливих функцій Ω містить в собі ніде не монотонні сингулярні функції обмеженої варіації.

3.5. Висновки до розділу

В цьому розділі відображено такі результати:

- побудовано (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідну, яка є узагальненням класичної та циліндричної похідних;
- вивчено властивості (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідної та зв'язки її з класичною та циліндричною похідними;

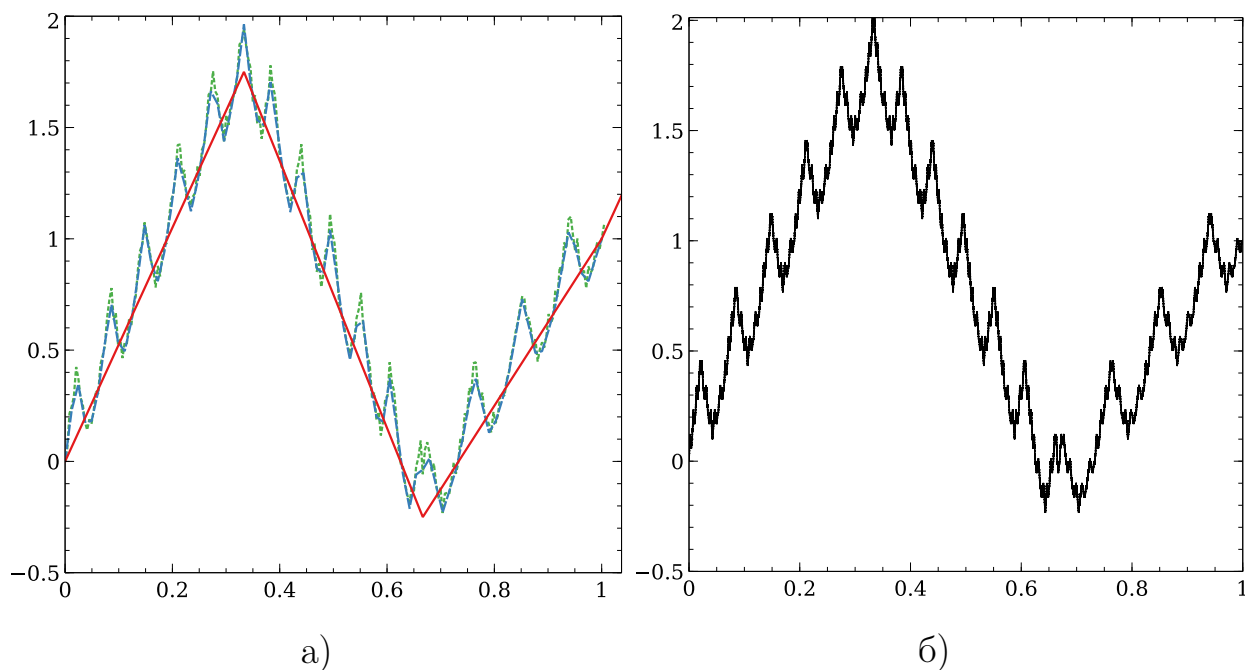


Рис.3.3. Графіки функцій при $P = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{n^{1.2}}; \frac{1}{4} + \frac{1}{n^{1.2}}\right)$: а) $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$; б) Ω .

- сформульовано і доведено теорему 3.6 узагальнення відповідного правила Лопіталія;
- доведено сингулярність функцій класу функцій які зберігаються частоти цифр Q_s -зображення числа, без збереження хвостів;
- в теоремі 3.9 встановлено достатні умови сингулярності неперервних ніде не монотонних функцій заданих (3.21).

РОЗДІЛ 4

АНАЛОГ (u, v) -ПОХІДНОЇ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ4.1. Означення оператора \boxtimes_v^u та основні властивості

(u, v) -похідна для монотонно зростаючої функції f може бути по іншому введена: не як відношення різниці значень функції на кінцях відрізка з кінцями в точках $x_0 + u(h)$, $x_0 - v(h)$ до його довжини, а як відношення коливання функції f на вказаному вказаному відрізку до його довжини. Такий підхід в деяких випадках спрощує дослідження ніде не монотонних функцій.

Далі будемо використовувати наступні позначення при $(u, v) \in \mathcal{P}^+$:

$$- \square_{v(h)}^u f(x) = \sup_{t \in \Theta_{v(h)}^u(x)} f(t) - \inf_{t \in \Theta_{v(h)}^u(x)} f(t) = \sup_{t_1, t_2 \in \Theta_{v(h)}^u(x)} (f(t_1) - f(t_2)),$$

де $\Theta_{v(h)}^u(x)$ – відрізок з кінцями в точках $x + u(h)$, $x - v(h)$;

$$- \boxtimes_{v(h)}^u f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\square_{v(h)}^u f(x)}{\square_{v(h)}^u x} - \text{аналог } (u, v)\text{-похідної, } \boxtimes f(x_0) = \boxtimes_0^h f(x_0);$$

$$- \overline{\boxtimes_{v(h)}^u f(x)} = \overline{\square_{v(h)}^u f(x)}, \quad \underline{\boxtimes_{v(h)}^u f(x)} = \underline{\square_{v(h)}^u f(x)}.$$

Зауважимо, що $\square_{v(h)}^u f(x) \in$ коливанням функції f на відрізку $\Theta_{v(h)}^u(x)$.

Лема 4.1. *Нехай пара функцій $(u, v) \in \mathcal{P}^+$ така, що існує нескінченна послідовність (h_n) , для елементів якої справедливі нерівності $u(h_n) \neq 0 \neq v(h_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Якщо $\boxtimes_v^u f(x_0) = c \in \mathbb{R}$, то f – неперервна в точці x_0 функція.*

Доведення. Згідно з означенням:

$$\frac{\square_v^u f(x_0)}{\square_v^u x} = c + \alpha(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0 \Rightarrow \square_v^u f(x_0) = (c + \alpha(h)) \square_v^u x$$

Отже, $\lim_{h \rightarrow 0} \square_v^u f(x_0) = 0$, а тому f – неперервна в точці x_0 функція. \square

Теорема 4.1. Нехай $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{P}^+$ і a, b – функції для яких існують скінченні значення $\boxtimes_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}a(x_0), \boxtimes_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}b(x_0)$. Тоді

- $\boxtimes_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}(Aa + B)(x_0) = |A| \boxtimes_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}a(x_0)$, де $A, B \in \mathbb{R}$;
- $\boxtimes_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}(a + b)(x_0) \leq \boxtimes_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}a(x_0) + \boxtimes_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}b(x_0)$.

Отже, як оператор $\boxtimes_{\mathbf{v}(h)}^{\mathbf{u}(h)}$ – нелінійний. Більше того, для аналогу (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідної є хибним наступне твердження: ”якщо існує скінченне значення $\boxtimes f(x_0)$, то для всіх $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{P}^+$ виконується рівність $\boxtimes_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) = \boxtimes f(x_0)$ ”. Наприклад, $\boxtimes|x|(0) = 1$, а $\boxtimes_h^h|x|(0) = 1/2$.

4.1.1. Зв’язок оператора $\boxtimes_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}$ з похідною.

Лема 4.2. Якщо існує похідна $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, то для всіх $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{P}^+$ справедлива рівність $\boxtimes_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) = |f'(x_0)|$.

Доведення. Згідно з означенням похідної $f(x_0 + t) = f(x_0) + ct + \alpha(t)t$, $\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = 0$.

Очевидно існують функції $a := a(h)$ та $b := b(h)$ такі, що $f(x_0 + a) = \sup_{t \in \Theta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}(x)} f(t)$ і $f(x_0 + b) = \inf_{t \in \Theta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}(x)} f(t)$.

Тоді

$$\begin{aligned} \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) &= f(x_0 + a) - f(x_0 + b) = f(x_0) + ac + a\alpha(a) - f(x_0) - bc - b\alpha(b) = \\ &= c(a - b) + a\alpha(a) - b\alpha(b) \geq 0 \Rightarrow \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) = |c(a - b) + a\alpha(a) - b\alpha(b)|. \end{aligned}$$

Оскільки $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{P}^+$, то згідно з теоремою 3.3 має місце рівність $\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) = f'(x_0)$. Враховуючи те, що $|a - b| \leq |\mathbf{u} + \mathbf{v}|$ маємо

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x_0 + \mathbf{u}) - f(x_0 - \mathbf{v})}{\mathbf{u} + \mathbf{v}} \right| &\leq \frac{\square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0)}{\square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}x} = \frac{|c(a - b) + a\alpha(a) - b\alpha(b)|}{|\mathbf{u} + \mathbf{v}|} \leq \\ &\leq \frac{|c(a - b)| + |\alpha(a)||a - b| + |b||\alpha(a) - \alpha(b)|}{|\mathbf{u} + \mathbf{v}|} \leq \\ &\leq c + |\alpha(a)| + \frac{\max\{|\mathbf{u}|, |\mathbf{v}|\}}{|\mathbf{u} + \mathbf{v}|} |\alpha(a) - \alpha(b)|. \end{aligned}$$

Отже, $|\mathfrak{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0)| \leq \boxtimes_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) \leq |c| \Rightarrow \boxtimes_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) = |c|$. □

Теорема 4.2. Для дійсної функції f визначеної в околі точки x_0 істинними є наступні твердження:

1. $f'(x_0) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\boxtimes f(x_0) = 0$;
2. $f'(x_0) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\boxtimes_h^h f(x_0) = 0$.

Доведення. Спочатку покажемо, що $\boxtimes f(x_0) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\boxtimes_h^h f(x_0) = 0$. Нехай $\mu = \mu(h) = \begin{cases} h, & \text{якщо } \square_0^h f(x_0) \geq \square_h^0 f(x_0); \\ -h, & \text{якщо } \square_0^h f(x_0) < \square_h^0 f(x_0); \end{cases}$ тоді виконується нерівність $\square_0^\mu f(x_0) \leq \square_h^\mu f(x_0) \leq 2\square_0^\mu f(x_0)$, а тому

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\square_0^\mu f(x_0) \cdot \square_0^\mu x}{\square_0^\mu x \cdot \square_h^\mu x} &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\square_h^\mu f(x_0)}{\square_h^\mu x} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\square_0^\mu f(x_0) \cdot \square_0^\mu x}{\square_0^\mu x \cdot \square_h^\mu x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \boxtimes f(x_0) \leq \boxtimes_h^h f(x_0) \leq \boxtimes f(x_0). \end{aligned}$$

Тобто, якщо $\boxtimes f(x_0) = 0$ то $\boxtimes_h^h f(x_0) = 0$. Покажемо, що виконується обернене твердження.

$$\boxtimes f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\square f(x_0)}{\square x} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\square_h^h f(x_0)}{\square x} = 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\square_h^h f(x_0)}{\square_h^h x} = \boxtimes_h^h f(x_0).$$

Отже, $\boxtimes f(x_0) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\boxtimes_h^h f(x_0) = 0$.

З леми 4.2 маємо, що з того, що $f'(x_0) = 0$ істинною є рівність $\boxtimes f(x_0) = 0$. Покажемо, що обернене твердження також є істинним.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\square f(x_0)}{\square x} = \boxtimes f(x_0) = 0.$$

Отже, $f'(x_0) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\boxtimes f(x_0) = 0$. □

Лема 4.3. Якщо для фіксованої пари функцій $(u, v) \in \mathcal{P}^+$ і дійсної функції f значення $\overline{\boxtimes}_v^u f(x_0) = \infty$, то $\overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| = \infty$.

Доведення. Нехай $a = a(h)$ і $b = b(h)$ такі, що $f(a(h)) = \sup_{t \in \Theta_{v(h)}^{u(h)}(x)} f(t)$,

$f(b(h)) = \inf_{t \in \Theta_{v(h)}^{u(h)}(x)} f(t)$, тоді

$$\frac{\square_v^u f(x_0)}{\square_v^u x} = \left| \frac{(f(x_0 + a) - f(x_0)) - (f(x_0 + b) - f(x_0))}{\square_v^u x} \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{f(x_0 + a) - f(x_0)}{a} \right| \cdot \frac{|a|}{\square_v^u x} + \left| \frac{f(x_0 + b) - f(x_0)}{b} \right| \cdot \frac{|b|}{\square_v^u x}.$$

Нехай $c = c(h) = \begin{cases} a, & \left| \frac{f(x_0 + a) - f(x_0)}{a} \right| \geq \left| \frac{f(x_0 + b) - f(x_0)}{b} \right|; \\ b, & \left| \frac{f(x_0 + a) - f(x_0)}{a} \right| < \left| \frac{f(x_0 + b) - f(x_0)}{b} \right|. \end{cases}$ Ма-

ємо наступну оцінку:

$$\begin{aligned} \frac{\square_v^u f(x_0)}{\square_v^u x} &\leq \left(\frac{|a| + |b|}{\square_v^u x} \right) \left| \frac{f(x_0 + c) - f(x_0)}{c} \right| \leq \\ &\leq \frac{2 \cdot \max\{|u|, |v|\}}{\square_v^u x} \cdot \left| \frac{f(x_0 + c) - f(x_0)}{c} \right| \leq 2 \cdot \left| \frac{f(x_0 + c) - f(x_0)}{c} \right|. \end{aligned}$$

Для завершення доведення достатньо перейти до границь. \square

Лема 4.4. *Нехай f – монотонна функція. Тоді для всіх $(u, v) \in \mathcal{P}^+$ маємо*

$$\boxtimes_v^u f(x_0) = \begin{cases} \mathfrak{D}_v^u f(x_0), & \text{якщо } f \text{ – зростаюча;} \\ -\mathfrak{D}_v^u f(x_0), & \text{якщо } f \text{ – спадна.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Доведення. Оскільки f – монотонна функція, то вона набуває свого найбільшого та найменшого значення на кінцях відрізка. А тому $\frac{\square_v^u f(x_0)}{\square_v^u x} = \frac{\Delta_v^u f(x_0)}{\Delta_v^u x}$, якщо f – зростаюча, в іншому випадку маємо $\frac{\square_v^u f(x_0)}{\square_v^u x} = -\frac{\Delta_v^u f(x_0)}{\Delta_v^u x}$. Достатньо перейти до границь в утворених рівностях, щоб отримати необхідні висновки. \square

Нехай

$$\mathcal{P}^\oplus = \left\{ (u, v) \in \mathcal{P}^+ \mid u(h) \geq 0, h \in O(u, v) \right\}. \quad (4.2)$$

Зауваження 4.1. Для пари функцій $(u, v) \in \mathcal{P}^+$ позначимо $p(h) = \max\{u(h), -v(h)\}$, $q(h) = -\min\{u(h), -v(h)\}$. Тоді справедлива рівність $\square_{v(h)}^{u(h)} f(x) = \square_{q(h)}^{p(h)} f(x)$, а отже, для кожної пари функції $(u, v) \in \mathcal{P}^+$ існує єдина пара $(p, q) \in \mathcal{P}^\oplus$.

Теорема 4.3. *Якщо для пари $(u, v) \in \mathcal{P}^\oplus$ виконуються*

$$- 0 < \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h)}{v(h)} \leq \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{u(h)}{v(h)} < \infty;$$

$$- \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \left(\left| \frac{\overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \sup_{t \in [-\xi; \xi]} u(h+t)}{\underline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \inf_{t \in [-\xi; \xi]} u(h+t)} \right| \right) < \infty;$$

то $\boxtimes_{\nu}^u f(x_0) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $f'(x_0) = 0$.

Доведення. Якщо $f'(x_0) = 0$, то згідно з лемою 4.2 маємо $\boxtimes_{\nu}^u f(x_0) = 0$.

Нехай $\boxtimes_{\nu}^u f(x_0) = 0$ розглянемо нерівності:

$$\frac{\square_{\nu}^0 f(x_0)}{\square_{\nu}^0 x} \leq \frac{\square_{\nu}^u f(x_0) \cdot \square_{\nu}^u x}{\square_{\nu}^0 x \cdot \square_{\nu}^u x}; \quad \frac{\square_0^u f(x_0)}{\square_0^u x} \leq \frac{\square_{\nu}^u f(x_0) \cdot \square_{\nu}^u x}{\square_0^u x \cdot \square_{\nu}^u x}. \quad (4.3)$$

З першої нерівності маємо $\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{\square_{\nu}^u x}{\square_{\nu}^0 x} = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{u+v}{v} = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{u}{v}\right) < \infty$, тобто $\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{u}{v} < \infty$, відповідно з другої – $\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{v}{u} < \infty$, тобто $0 < \underline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{u(h)}{v(h)} \leq \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{u(h)}{v(h)} < \infty$. Остання нерівність є умовою того, що при переході до границі вирази справа в нерівностях (4.3) прямуватимуть до нуля.

Нехай

$$\eta(h) = \overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \sup_{t \in [-\xi; \xi]} u(h+t); \quad \mu(h) = \underline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \inf_{t \in [-\xi; \xi]} u(h+t).$$

Розглянемо довільну функцію $\tau(h)$, таку що $\tau(h) \in [\mu(h); \eta(h)]$, тоді

$$\left| \frac{f(x_0 + \tau(h)) - f(x_0)}{\tau(h)} \right| \leq \frac{\square_0^{\eta(h)} f(x_0)}{\square_0^{\mu(h)} x} = \frac{\square_0^{\eta(h)} f(x_0) \cdot \square_0^{\eta(h)} x}{\square_0^{\mu(h)} x \cdot \square_0^{\eta(h)} x}. \quad (4.4)$$

Отже, якщо $\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{\square_0^{\eta(h)} x}{\square_0^{\mu(h)} x} \in \mathbb{R}$, то зі $\boxtimes_0^{u(h)} f(x_0) = 0$ маємо, що правостороння похідна рівна нулю.

Нехай

$$\eta_1(h) = \overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \sup_{t \in [-\xi; \xi]} v(h+t); \quad \mu_1(h) = \underline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \inf_{t \in [-\xi; \xi]} v(h+t).$$

З умов $0 < \underline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{u(h)}{v(h)} \leq \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{u(h)}{v(h)} < \infty$ і $\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \left(\left| \frac{\overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \sup_{t \in [-\xi; \xi]} u(h+t)}{\underline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \inf_{t \in [-\xi; \xi]} u(h+t)} \right| \right) < \infty$ має-

мо, що виконується нерівність $\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \left(\left| \frac{\overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \sup_{t \in [-\xi; \xi]} v(h+t)}{\underline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \inf_{t \in [-\xi; \xi]} v(h+t)} \right| \right) < \infty$, а тому, якщо $\boxtimes_{\nu(h)}^0 f(x_0) = 0$, то лівостороння похідна рівна нулю. \square

Наслідок 4.1. Нехай $(l_n), (r_n)$ такі, що

- $l_n < l_{n+1} < x, x > r_{n+1} > r_n, n \in \mathbb{N}$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n$;
- $0 < \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - x}{x - l_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - x}{x - l_n} < \infty$;
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - x}{r_{n+1} - x} < \infty, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{l_{n+1} - x}{l_n - x} < \infty$.

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sup_{t_1, t_2 \in [l_n, r_n]} (f(t_1) - f(t_2))}{r_n - l_n} = 0$, то $f'(x) = 0$.

Доведення. Розглянемо пару функції $u(h) = r_n - x, v(h) = x - l_n$, при $h \in (2^{-n-1}; 2^{-n}]$. Легко перевірити, що пара функції $(u, v) \in \mathcal{P}^\oplus$ і задовольняє умови теореми 4.3, а тому $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sup_{t_1, t_2 \in [l_k, r_k]} (f(t_1) - f(t_2))}{r_k - l_k} = \boxtimes_v^u f(x_0) = 0$. \square

Теорема 4.4. Нехай (u_k, v_k) – послідовність пар нескінченно малих числових послідовностей, таких, що $u_k \geq u_{k+1} > 0 < v_{k+1} \leq v_k$ і $0 < \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k}{v_k} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k}{v_k} < \infty$.

Якщо $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\square_{v_k}^{u_k} f(x)}{\square_{v_{k+1}}^{u_{k+1}} x} = 0$, то $f'(x) = 0$.

Доведення. Умова $0 < \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k}{v_k} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k}{v_k} < \infty$ адаптована умова $0 < \underline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{u(h)}{v(h)} \leq \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{u(h)}{v(h)} < \infty$ з теореми 4.3.

Розглянемо довільну функцію $\tau(h) \in [u_{k+1}, u_k]$ при $h \in (2^{-k-1}, 2^{-k}]$.

$$\left| \frac{f(x + \tau(h)) - f(x)}{\tau(h)} \right| \leq \frac{\square_0^{u_k} f(x)}{\square_0^{u_{k+1}} x} \leq \frac{\square_{v_k}^{u_k} f(x)}{\square_0^{u_{k+1}} x}.$$

Покажемо, що $\frac{\square_{v_k}^{u_k} f(x)}{\square_0^{u_{k+1}} x} \rightarrow 0$ тоді і тільки тоді, коли $\frac{\square_{v_k}^{u_k} f(x)}{\square_{v_{k+1}}^{u_{k+1}} x} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Справді, згідно з умовою теореми існує $M \in \mathbb{R}$, що $\frac{v_k}{u_k} \leq M$. Тоді

$$\frac{\square_{v_k}^{u_k} x}{\square_0^{u_k} x} = \frac{u_k + v_k}{u_k} = \left(1 + \frac{v_k}{u_k} \right) \in [1; M + 1], \quad (4.5)$$

тому $\frac{\square_{v_k}^{u_k} f(x)}{\square_0^{u_{k+1}} x} \rightarrow 0$ тоді і тільки тоді, коли $\frac{\square_{v_k}^{u_k} f(x)}{\square_{v_{k+1}}^{u_{k+1}} x} \rightarrow 0$.

Отже, якщо $\frac{\square_{v_k}^{u_k} f(x)}{\square_{v_{k+1}}^{u_{k+1}} x} \rightarrow 0$, то правостороння похідна рівна нулю.

Аналогічно, якщо $\frac{\square_{v_k}^{u_k} f(x)}{\square_{v_{k+1}}^{u_{k+1}} x} \rightarrow 0$, то лівостороння похідна рівна нулю. Отже, якщо $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\square_{v_k}^{u_k} f(x)}{\square_{v_{k+1}}^{u_{k+1}} x} = 0$, то $f'(x) = 0$. \square

4.2. Ніде не монотонна сингулярна функція необмеженої варіації

Розглянемо функцію

$$f\left(x \equiv \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^{Q_3^*}\right) = \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^{G_3^*}, \quad (4.6)$$

де $\alpha_j(x)$ – це j -та цифра Q_3^* -зображення числа x .

Обґрунтування коректності задання, неперервності, ніде не монотонності функцій, знаходження екстремумів функції було розглянуто в [41].

Теорема 4.5. *Функція $f(x)$ буде функцією обмеженої варіації тоді і тільки тоді, коли є збіжним ряд: $\sum_{j=1}^{\infty} (g_{0j} + |g_{1j}| + g_{2j} - 1)$.*

Доведення. Побудуємо збіжну до f функціональну послідовність (f_n) , графіки яких є ламаними з вершинами в точках $\left(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n(0)}^{Q_3^*}; \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n(0)}^{G_3^*}\right)$ і $\left(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n(2)}^{Q_3^*}; \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n(2)}^{G_3^*}\right)$.

Враховуючи рівності $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots[\alpha_n+1](0)}^{Q_3^*} = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n(2)}^{Q_3^*}$ та $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots[\alpha_n+1](0)}^{G_3^*} = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n(2)}^{G_3^*}$ маємо неперервність кожної функції f_n на відрізку $[0; 1]$.

Згідно з побудовою функції f та відповідної послідовності f_n , для довільного $x \in [0; 1]$ виконується нерівність $|f_n(x) - f(x)| \leq \prod_{j=1}^n \max_{i=0,1,2} |q_{ij}|$, отже, маємо рівномірну збіжність, а тому застосуємо лему 3.2. Враховуючи те, що графіки f_n – є ламаними, з переходом до наступного індексу варіація кожної ланки попередньої ламаної зростає у $(g_{0j} + |g_{1j}| + g_{2j})$ разів, то маємо

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{V}_{[0;1]} f_j(x) = \prod_{j=1}^{\infty} (g_{0j} + |g_{1j}| + g_{2j}). \quad (4.7)$$

Враховуючи $g_{0j} + |g_{1j}| + g_{2j} \geq 1$ і використавши логарифмічну ознаку збіжності нескінченних добутків, а також граничний випадок ознаки

порівняння для додатних рядів отримаємо

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(g_{0j} + |g_{1j}| + g_{2j} \right)}{g_{0j} + |g_{1j}| + g_{2j} - 1} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + (g_{0j} + |g_{1j}| + g_{2j} - 1) \right)}{g_{0j} + |g_{1j}| + g_{2j} - 1} = 1.$$

Враховуючи, те, що розв'язками рівняння $f_n(x) = f(x)$ є точки злomu (точками у яких існують нерівні односторонні похідні), нескладно довести: якщо $\lim_{j \rightarrow \infty} \bigvee_{[0;1]} f_j(x) = \infty$, то f – функція необмеженої варіації. \square

Теорема 4.6. *Нехай f – функція обмеженої варіації при цьому існує таке $\varepsilon > 0$, що $\left| \frac{g_{k,j}}{q_{k,j}} \right| \geq 1 + \varepsilon$ або $\left| \frac{g_{k,j}}{q_{k,j}} \right| \leq 1 - \varepsilon$ для всіх $j \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, 2\}$, то f – сингулярна.*

Доведення. Розглянемо послідовність пар чисел (l_n, r_n) , де $l_n = \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)}^{Q_3^*}(0)$, $r_n = \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)}^{Q_3^*}(2)$. Нескладно перевірити, що вони задовольняють умову наслідку 3.2. Враховуючи лему 3.3, розглянемо границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(r_n) - f(l_n)}{r_n - l_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n \frac{|g_{\alpha_j j}|}{q_{\alpha_j j}} = \begin{cases} 0; \\ \infty; \\ \text{Д.} \end{cases}$$

Оскільки кожна функція обмеженої варіації має майже скрізь скінченну похідну, то маємо, що майже скрізь $f'(x) = 0$. \square

Теорема 4.7. *Якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що $\left| \frac{g_{k,j}}{q_{k,j}} \right| \geq 1 + \varepsilon$ для всіх $j \in \mathbb{N}$ і $k \in \{0, 1, 2\}$, то f – ніде не диференційовна (не має скінченної похідної).*

Доведення. Розглянемо послідовність пар чисел (l_n, r_n) , де $l_n = \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)}^{Q_3^*}(0)$, $r_n = \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)}^{Q_3^*}(2)$. Нескладно перевірити, що вони задовольняють умову наслідку 3.2. Розглянемо границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(r_n) - f(l_n)}{r_n - l_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n \frac{|g_{\alpha_j j}|}{q_{\alpha_j j}} = \begin{cases} \infty; \\ \text{Д.} \end{cases}$$

Отже, згідно з наслідком 3.2, функція f не має скінченної похідної. \square

З наслідку теореми 2.2 маємо, що для майже всіх чисел з відрізка $[0; 1]$ виконуються рівності $\overline{\nu}_c^{Q_3^*}(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_{c,k} \right) = \overline{\eta}_c$, $\underline{\nu}_c^{Q_3^*}(x) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_{c,k} \right) = \underline{\eta}_c$, множину таких чисел позначимо E .

Нехай при $c \in A$:

$$p_c := \begin{cases} \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{g_{c,j}}{q_{c,j}} \right| \right)^{\overline{\nu}_c} & \text{при } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{g_{c,j}}{q_{c,j}} \right| \geq 1; \\ \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{g_{c,j}}{q_{c,j}} \right| \right)^{\underline{\nu}_c} & \text{при } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{g_{c,j}}{q_{c,j}} \right| < 1; \end{cases}$$

Теорема 4.8. *Нехай існує таке $\xi > 0$, що $q_{c,n} \geq \xi$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $c \in A_3$. Якщо $\xi^{\overline{\eta}_1^{-1} - \underline{\eta}_1^{-1}} \prod_{c=0}^2 p_c < 1$, тоді майже скрізь, у розумінні міри Лебега, $f'(x) = 0$.*

Доведення. Для доведення використаємо теорему 4.4.

Враховуючи умову теореми, справедлива оцінка $\underline{\nu}_c^{Q_3^*}(x) \geq \xi$ для всіх $c \in A_3$.

Розглянемо довільне $x \in E$ та побудуємо для нього пару послідовностей (l_n, r_n) за наступним правилом

$$l_n = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{P_n-1}}^{Q_3^*}(0), \quad r_n = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{P_n-1}}^{Q_3^*}(2),$$

де P_n – номер позиції запису n -ої одиниці Q_3^* -зображення числа x . Утворимо пару послідовностей (u_k, v_k) наступним чином

$$v_n = x - l_n = \Delta_{\underbrace{00 \dots 0}_{P_n-1}}^{Q_3^*} 1^{\alpha_{P_n+1}} 1^{\alpha_{P_n+2}} \dots;$$

$$u_n = r_n - x = \Delta_{\underbrace{00 \dots 0}_{P_n-1}}^{Q_3^*} 1^{[2-\alpha_{P_n+1}]} 1^{[2-\alpha_{P_n+2}]} \dots.$$

Очевидно, що послідовності (u_k) , (v_k) є нескінченно малими.

Враховуючи той факт, що $\xi \leq q_{c,j} \leq 1$, для всіх $j \in \mathbb{N}$ і $c \in A_3$, стає очевидним, що

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} \leq \xi^{-1}, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} \geq \xi,$$

а отже, виконуються нерівності $0 < \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k}{v_k} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k}{v_k} < \infty$ і $u_k \geq u_{k+1} > 0 < v_{k+1} \leq v_k$.

Покажемо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\square_{v_n}^{u_n} f(x)}{\square_{v_{n+1}}^{u_{n+1}} x} = 0$.

Згідно з побудовою функції f і вибором послідовності пар (u_n, v_n) маємо

$$\square_{v_n}^{u_n} f(x) = \prod_{j=1}^{P_n-1} |g_{\alpha_j, j}|, \quad \square_{v_{n+1}}^{u_{n+1}} x = \prod_{j=1}^{P_{n+1}-1} q_{\alpha_j, j}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\square_{v_n}^{u_n} f(x)}{\square_{v_{n+1}}^{u_{n+1}} x} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{j=1}^{P_n-1} \left| \frac{g_{\alpha_j, j}}{q_{\alpha_j, j}} \right| \cdot \prod_{j=P_n}^{P_{n+1}-1} q_{\alpha_j, j}^{-1} \right) \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{j=1}^{P_n-1} \left| \frac{g_{\alpha_j, j}}{q_{\alpha_j, j}} \right| \cdot \xi^{P_n - P_{n+1} + 1} \right) = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{P_n-1} \left| \frac{g_{\alpha_j, j}}{q_{\alpha_j, j}} \right|} \cdot \xi^{\frac{P_n - P_{n+1} + 1}{n}} \right)^n &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\xi^{\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_1}} \cdot \prod_{c=0}^2 p_c \right)^n = 0. \end{aligned}$$

Отже, згідно з теоремою 4.4, $f'(x) = 0$ майже скрізь. \square

Зауважимо, що серед класу побудованих функцій f є сингулярні ніде немонотонні функції необмеженої варіації. Наприклад, при $q_{c,j} = 1/3$, $1/2 < g_{0,j} = g_{2,j} = g_0 \leq \frac{1}{6} \left(1 + \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} \right) \approx 0,559$, $g_1 = 1 - 2g_0$ для всіх $c \in A_3$ та $j \in \mathbb{N}$, якраз отримаємо таку функцію.

4.3. Ніде не диференційовність аналогу Трибін-функції означеної в термінах ланцюгових A_2 -дробів та негатрійкового зображення

В роботі [71] розглядалась функція $y = f(x)$ аргумент якої має негатрійкове зображення

$$x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{-3} \equiv \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-3)^n}, \quad \alpha_n \in A_3 = \{0, 1, 2\}, \quad (4.8)$$

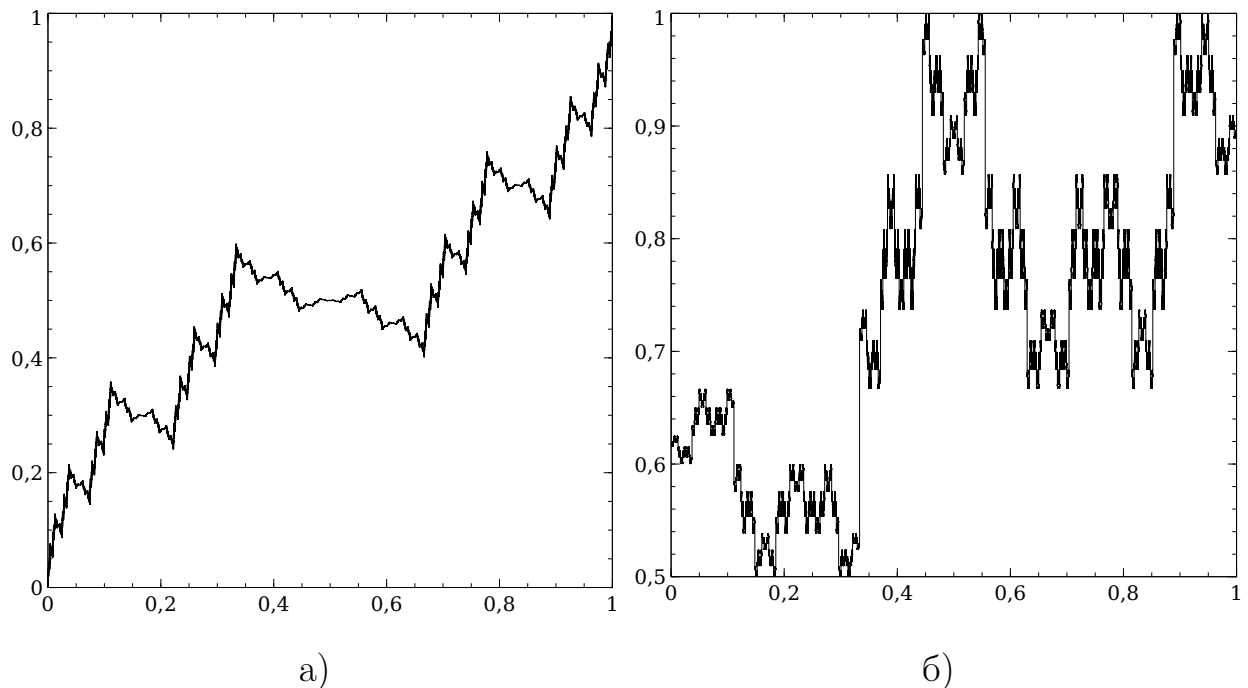


Рис. 4.1. Графіки функцій необмежених варіацій: а) сингулярна ніде не монотонна функція задана (4.6) при $q_{c,j} = \frac{1}{3}$, $g_{0,j} = g_{2,j} = 0,559$; б) ніде не диференційовна функція задана (4.8).

а значення функції має ланцюгове A_2 -зображення $f(x) = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}^{A_2}$, причому

$$\beta_1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha_1 = 2; \\ 0, & \text{якщо } \alpha_1 \neq 2; \end{cases} \quad \beta_{k+1} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha_{k+1} + \alpha_k = 2; \\ 0, & \text{якщо } \alpha_{k+1} + \alpha_k \neq 2; \end{cases}$$

$$\Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}^{A_2} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}, \quad a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{якщо } \beta_n = 0; \\ 1, & \text{якщо } \beta_n = 1. \end{cases}$$

Чуйковим А.С. була доведена така оцінка:

$$\frac{3}{8} < \frac{\left| \Delta_{c_1c_2\dots c_n}^{A_2} \right|}{\left| \Delta_{c_1c_2\dots c_n} \right|} < \frac{5}{8}. \quad (4.9)$$

Лема 4.5 ([71]). Для амплітуди δ коливання функції діє рівність:

$$\delta(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}^{-3}) = \max_{\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}^{-3}} f(x) - \min_{\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}^{-3}} f(x) = \left| \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_m}^{A_2} \right|.$$

Якщо взяти замість u_n значення таке, щоб $(x + u_n)$ відповідало правому кінцю циліндра n -го рангу негa-трійкового зображення числа x , а за v_n таке, щоб $(x - v_n)$ відповідало лівому кінцю циліндра n -го рангу негa-трійкового зображення числа x , тоді лему 4.5 можна записати в іншому вигляді: $\square_{v_n}^{u_n} f(x) = \left| \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}^{A_2} \right|$.

Покажемо, що функція f ніде не диференційовна. Оберемо довільну точку x з області задання функції. Побудуємо послідовність вкладених циліндрів негa-трійкового зображення числа x і оцінимо границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\square_{v_n}^{u_n} f(x)}{\square_{v_n}^{u_n} x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}^{A_2} \right|}{\left| \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{-3} \right|} = \frac{\left| \Delta_{\beta_1}^{A_2} \right|}{\left| \Delta_{\alpha_1}^{-3} \right|} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3^n \cdot \prod_{j=2}^n \left(\frac{\left| \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_j}^{A_2} \right|}{\left| \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{j-1}}^{A_2} \right|} \right) \right),$$

враховуючи (4.9) маємо

$$\frac{\left| \Delta_{\beta_1}^{A_2} \right|}{\left| \Delta_{\alpha_1}^{-3} \right|} \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \cdot \left(\frac{3}{8} \right)^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\square_{v_n}^{u_n} f(x)}{\square_{v_n}^{u_n} x} \leq \frac{\left| \Delta_{\beta_1}^{A_2} \right|}{\left| \Delta_{\alpha_1}^{-3} \right|} \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \cdot \left(\frac{5}{8} \right)^n.$$

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\square_{v_n}^{u_n} f(x)}{\square_{v_n}^{u_n} x} = \infty$. Згідно з лемою 4.3 маємо, що функція f є ніде не диференційовною в області задання.

4.4. Висновки до розділу

У четвертому розділі відображено такі результати:

- сформульовано означення аналога (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідної, знайдено його властивості;
- встановлено зв'язок аналога з похідною (леми: 4.2, 4.3; теореми: 4.2, 4.3, 4.4; наслідок 4.1);
- знайдено достатні умови ніде не монотонності (теорема 4.7) та сингулярності (теореми 4.6, 4.8) класу функцій, які є узагальненням функцій Працьовитого [60];
- показано ніде не диференційовність аналогу Трибін-функції означеної в термінах ланцюгових A_2 -дробів та негa-трійкового зображення.

РОЗДІЛ 5

ЛОГАРИФМІЧНА (u, v) -ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

У цьому розділі представлено модифікацію (u, v) -похідної, яка будувалась для дослідження композиції функцій зі складною локальною будовою (ніде немонотонних, ніде не диференційовних, сингулярних, тощо). Як з'ясувалось, для цих цілей краще підходить модифікація аналога (u, v) -похідної, про що більш детально описано в наступному розділі. Тому в цьому розділі буде представлено приклади застосування побудованої конструкції для наближених обчислень.

5.1. Означення та основні властивості

Означення 5.1. Нехай задано функцію f і пару функції $(u, v) \in \mathcal{P}$. Фіксованому x_0 з області визначення f поставимо у відповідність число (якщо воно існує)

$$\mathfrak{L}_v^u f(x_0) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln |\Delta_v^u f(x_0)|}{\ln |\Delta_v^u x|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln |f(x_0 + u(h)) - f(x_0 - v(h))|}{\ln |u(h) + v(h)|}, \quad (5.1)$$

яке називатимемо *логарифмічною (u, v) -похідною* функції f в точці x_0 .

Зауважимо, що раніше розглядалися конструкції, які мають певну близькість до логарифмічної (u, v) -похідної:

1. Працьовитим М. В. у роботі [73] розглядалась конструкція $D_\alpha^\pm F(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^\pm} \frac{|F(x+\Delta x) - F(x)|}{|\Delta x|^\alpha}$. Очевидно, що при $\alpha < \mathfrak{L}_0^{\pm|h|} F(x)$ значення $D_\alpha^\pm F(x) = 0$, а при $\alpha > \mathfrak{L}_0^{\pm|h|} F(x)$ маємо, що $D_\alpha^\pm F(x) = \infty$.
2. Як відзначалось у розділі 3, Wen Chen означував "fractaltal derivative", як границю $\lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{u(t_1) - u(t)}{t_1^\alpha - t^\alpha}$ в [4, 6]. При $t = \mathfrak{L}_0^{t_1-t} u(t)$ можливе скінченне значення "fractaltal derivative" відмінне від нуля.

3. У роботі [34] "fractal velocity" дробового порядку $0 \leq \beta \leq 1$ означувалось як: $v_{\pm}^{\beta}[f](x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{\pm h^{\beta}}$. Нескладно показати, що $\mathfrak{L}_0^{\pm|h|} f(x)$ — це таке значення, що для всіх $\beta < \mathfrak{L}_0^{\pm|h|} f(x)$ отримаємо, що $v_{\pm}^{\beta}[f](x) = 0$, а при $\beta > \mathfrak{L}_0^{\pm|h|} f(x)$ отримаємо $v_{\pm}^{\beta}[f](x) = \infty$.
4. Розширюючи логарифмічну (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідну на вектор-функції, можна отримати схожий зв'язок з "fractal gradient", означеного в [16] як $\nabla T = \Gamma(1 + \alpha) \lim_{x_B - x_A \rightarrow L_0} \frac{T_B - T_A}{(x_B - x_A)^{\alpha}}$.

Специфіку логарифмічної (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідної ілюструє приклад: для функції $f(x) = x^2$ маємо $\mathfrak{L}_0^h f(0) = 2$, $\mathfrak{L}_h^h f(0) = +\infty$. Безпосередньо з означення випливає наступне твердження.

Теорема 5.1. *Нехай для функцій f, g та пари функцій $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{P}$ існують скінченні значення $\mathfrak{L}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0) \geq 0$ і $\mathfrak{L}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} g(x_0) \geq 0$. Тоді*

- для всіх $f(x) = a \in \mathbb{R}$, тоді $\mathfrak{L}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x) = +\infty$;
- для будь яких $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ і $b \in \mathbb{R}$ виконується $\mathfrak{L}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} (af(x_0) + b) = \mathfrak{L}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0)$;
- якщо $\mathfrak{L}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0) \neq \mathfrak{L}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} g(x_0)$, то $\mathfrak{L}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} (f(x_0) + g(x_0)) = \min \{ \mathfrak{L}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0), \mathfrak{L}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} g(x_0) \}$;
- якщо f, g — неперервні і при цьому $\mathfrak{L}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0) \neq \mathfrak{L}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} g(x_0)$, $f(x_0) \neq 0 \neq g(x_0)$, то $\mathfrak{L}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} (f(x_0) \cdot g(x_0)) = \min \{ \mathfrak{L}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0), \mathfrak{L}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} g(x_0) \}$.

Доведення. Враховуючи те, що $\Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} (af(x) + b) = a\Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x)$ маємо

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} (af(x) + b) &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} (af(x) + b)|}{\ln |\Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} x|} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\ln |a\Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x)|}{\ln |\Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} x|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\ln |a| + \ln |\Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x)|}{\ln |\Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} x|} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x)|}{\ln |\Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} x|} = \mathfrak{L}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x). \end{aligned}$$

Нехай $\mathfrak{L}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x) = c$, $\mathfrak{L}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} g(x) = d$, при чому $0 < c < d$. Тоді

$$\frac{\ln |\Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x)|}{\ln |x|} = c + \alpha(h) \Rightarrow \Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x) = a(h) |\Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} x|^{c+\alpha(h)}, \quad (5.2)$$

$$\frac{\ln |\Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} g(x)|}{\ln |x|} = d + \beta(h) \Rightarrow \Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} g(x) = b(h) |\Delta_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} x|^{d+\beta(h)}, \quad (5.3)$$

де $a(h), b(h) \in \{-1, 1\}$, $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0 = \lim_{h \rightarrow 0} \beta(h)$.

Оскільки $\Delta_v^u(f(x) + g(x)) = \Delta_v^u f(x) + \Delta_v^u g(x)$, то

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_v^u(f(x) + g(x)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln |\Delta_v^u f(x) + \Delta_v^u g(x)|}{\ln |\Delta_v^u x|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left| |\Delta_v^u x|^{c+\alpha(h)} + q(h) |\Delta_v^u x|^{d+\beta(h)} \right|}{\ln |\Delta_v^u x|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(c + \alpha(h) + \frac{\ln \left| 1 + q(h) |\Delta_v^u x|^{d-c+\alpha(h)+\beta(h)} \right|}{\ln |\Delta_v^u x|} \right) = c, \end{aligned}$$

де $q(h) \in \{-1, 1\}$.

Враховуючи умови теореми і те, що $\Delta_v^u(f(x)g(x)) = g(x+u)\Delta_v^u f(x) + f(x+v)\Delta_v^u g(x)$, легко показати, що $\mathfrak{L}_v^u(f(x) \cdot g(x)) = c$. \square

Лема 5.1. Для функції f і пари функцій $(u, v) \in \mathcal{P}$ існує $\mathfrak{L}_v^u f(x_0)$, то

$$\mathfrak{D}_v^u f(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } \mathfrak{L}_v^u f(x_0) > 1; \\ \infty & \text{при } \mathfrak{L}_v^u f(x_0) < 1. \end{cases} \quad (5.4)$$

Доведення. Нехай $\mathfrak{L}_v^u f(x) = c$. Згідно з означенням $|\Delta_v^u f(x)| = |\Delta_v^u h|^{c+\alpha(h)}$, де $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$. Тоді

$$|\mathfrak{D}_v^u f(x)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|^{c+\alpha(h)}}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} |h|^{c-1+\alpha(h)} = \begin{cases} 0 & \text{при } c > 1; \\ \infty & \text{при } c < 1. \end{cases}$$

\square

5.2. Властивості логарифмічної $(h, 0)$ -похідної

Далі $\mathfrak{L}f(x) \equiv \mathfrak{L}_0^h f(x)$.

Лема 5.2. Якщо $\mathfrak{L}f(x) > 0$, то функція f – неперервна.

Доведення. Нехай $\mathfrak{L}f(x) = c > 0$, тоді $|f(x+h) - f(x)| = |h|^{c+\alpha(h)}$, де $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$. Очевидно, що $\lim_{h \rightarrow 0} |f(x+h) - f(x)| = 0$. Отже, функція f – неперервна. \square

Лема 5.3. Якщо $f'(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то $\mathfrak{L}f(x) = 1$.

Доведення. Згідно з означенням оператора

$$\mathfrak{L}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln |\Delta_0^h f(x)|}{\ln |\Delta_0^h x|} = 1 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left| \frac{\Delta_0^h f(x)}{\Delta_0^h x} \right|}{\ln |\Delta_0^h x|} = 1 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln |f'(x) + \alpha(h)|}{\ln |\Delta_0^h x|} = 1,$$

де $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$. □

Теорема 5.2. Якщо для функцій f та g існують скінченні значення $\mathfrak{L}f(x_0) \geq 0$ і $\mathfrak{L}g(x_0) \geq 0$, причому $f(x_0) = g(x_0) = 0$, то $\mathfrak{L}(f(x_0)g(x_0)) = \mathfrak{L}f(x_0) + \mathfrak{L}g(x_0)$.

Доведення. Нехай $\mathfrak{L}f(x_0) = c$, $\mathfrak{L}g(x_0) = d$.

Враховуючи, що $f(x_0) = 0 = g(x_0)$, маємо $|\Delta_0^h f(x_0)| = |f(x_0 + h) - f(x_0)| = |f(x_0)| = |h|^{c+\alpha(h)}$, $|\Delta_0^h g(x_0)| = |h|^{d+\beta(h)}$, тоді

$$|\Delta_0^h (f(x_0)g(x_0))| = |f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)| = |h|^{c+\alpha(h)+d+\beta(h)}.$$

Тому

$$\mathfrak{L}(f(x)g(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln |\Delta_0^h (f(x)g(x))|}{\ln |\Delta_0^h x|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln |h|^{c+\alpha(h)+d+\beta(h)}}{\ln |h|} = c+d. \quad (5.5)$$

□

Теорема 5.3. Нехай задано дійсні функції f та g такі, що існують скінченні значення $\mathfrak{L}f(\tau_0)$, $\mathfrak{L}g(x_0)$, де $\tau_0 = g(x_0)$.

Тоді виконується рівність $\mathfrak{L}f(g(x_0)) = \mathfrak{L}f(\tau_0) \cdot \mathfrak{L}g(x_0)$.

Доведення. Згідно з означенням $\mathfrak{L}f(g(x_0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln |\Delta_0^h f(g(x_0))|}{\ln |\Delta_0^h x|} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\ln |f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))|}{\ln |h|} \cdot \frac{\ln |g(x_0 + h) - g(x_0)|}{\ln |g(x_0 + h) - g(x_0)|} \right) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\ln |\Delta_0^{u(h)} f(\tau_0)|}{\ln |\Delta_0^{u(h)} \tau|} \cdot \frac{\ln |\Delta_0^h g(x_0)|}{\ln |\Delta_0^{u(h)} x|} \right) = \mathfrak{L}f(\tau_0) \cdot \mathfrak{L}g(x_0),$$

де $u(h) = g(x_0 + h) - g(x_0) = g(x_0 + h) - \tau$.

Зауважимо, що зі скінченності $\mathfrak{L}g(x_0)$ маємо, що існує окіл точки x_0 в якому рівність $g(x_0 + h) = g(x_0)$ виконується не більш ніж скінченну кількість разів. \square

Зазначимо, що у випадку диференційовності функції f й існування границі $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{hf'(x_0+h)}{f(x_0+h)-f(x_0)}$ виконується рівність:

$$\mathfrak{L}f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hf'(x_0+h)}{f(x_0+h) - f(x_0)}. \quad (5.6)$$

5.3. Одне узагальнення дотичних

Означення 5.2. \mathfrak{L}_{\pm} -дотичною до графіка функції f в точці x_0 будемо називати (якщо існує)

$$\mathfrak{T}_{\pm}(x, f, x_0) = \begin{cases} a_+(x - x_0)^{\lambda_+} + b_+, & x \geq x_0; \\ a_-(x_0 - x)^{\lambda_-} + b_-, & x < x_0; \end{cases}, \quad (5.7)$$

де $a_+, a_-, b_+, b_- \in \mathbb{R}$, $\lambda_{\pm} = \mathfrak{L}_{\pm}f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0_{\pm}} \frac{\ln|\Delta_0^h f(x_0)|}{\ln|h|}$.

Коефіцієнти a_{\pm}, b_{\pm} виражаються у вигляді границь

$$a_{\pm} = \lim_{h \rightarrow 0_{\pm}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{|h|^{\lambda_{\pm}}}, \quad b_{\pm} = \lim_{h \rightarrow 0_{\pm}} \left(f(x_0 + h) - a_{\pm}|h|^{\lambda_{\pm}} \right).$$

Якщо $f(x_0 \pm 0) = \infty$, то в точці x_0 коефіцієнти обчислюються таким чином: $\lambda_{\pm} = \mathfrak{L}_{\pm}f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0_{\pm}} \frac{\ln|f(x_0+h)|}{\ln|h|}$, $a = \lim_{h \rightarrow 0_{\pm}} \frac{f(x_0+h)}{|h|^{\lambda_{\pm}}}$, $b = \lim_{h \rightarrow 0_{\pm}} \left(f(x_0 + h) - a|h|^{\lambda_{\pm}} \right)$.

Слід зазначити, якщо $f'(x_0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то \mathfrak{L} -дотична співпадає з класичною. Спосіб обчислення коефіцієнтів при $f(x_0 \pm 0) = \infty$ природно виникає при розгляді логарифмічної (u, v) -похідної, коли $(u, v) \in \mathcal{P}^-$.

5.3.1. \mathfrak{L} -дотичні та розклад функції в степеневий ряд з дійсними показниками.

Лема 5.4. *Нехай функція f така, що $f(x_0) = 0$ або $f(x_0) = \infty$ і в околі x_0 розкладається в ряд*

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{p_n}, & x \geq x_0; \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x_0 - x)^{q_n}, & x < x_0; \end{cases} \quad (5.8)$$

де $a_n, b_n, p_n, q_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ і для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконуються $0 \leq p_n < p_{n+1}$, $0 \leq q_n < q_{n+1}$.

Тоді $p_1 = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln |f(x_0+h)|}{\ln h}$, $q_1 = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\ln |f(x_0-h)|}{\ln(-h)}$, $a_1 = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h)}{h^{p_1}}$, $b_1 = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0-h)}{(-h)^{q_1}}$.

Доведення. Розглянемо розклад функції f справа від точки x_0 (для іншого випадку схема доведення аналогічна):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^{p_n} = (x - x_0)^{p_1} \left(a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (x - x_0)^{p_n - p_1} \right).$$

Тоді

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln |(f(x_0 + h))|}{\ln h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln |h|^{p_1} + \ln |a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n h^{p_n - p_1}|}{\ln h} = p_1,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h)}{h^{p_1}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n h^{p_n - p_1} \right) = a_1.$$

□

Якщо в (5.8) залишити тільки перші члени рядів, то отримаємо \mathfrak{L}_{\pm} -дотичну, при $f(x_0) = 0$.

Доведення наступної леми аналогічне до відповідного твердження про єдиність розкладу в степеневий ряд функції.

Лема 5.5. Якщо функція f в околі точки x_0 розкладається в ряд

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{p_n}, & x \geq x_0; \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x_0 - x)^{q_n}, & x < x_0; \end{cases} \quad (5.9)$$

де $a_n, b_n, p_n, q_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ і для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконуються $p_n < p_{n+1}$, $q_n < q_{n+1}$.
То цей розклад єдиний.

Суму складену з елементів ряду (5.9) з недодатними показниками будемо називати *головною частиною ряду*.

Використання дійсних показників та леми 5.4 дозволяє представляти функцій в околі точки x_0 (при цьому похідна або значення функції в точці x_0 може бути нескінченною). Для цього побудуємо додаткову функцію

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(x_0), & f(x_0) \in \mathbb{R}, \\ f(x), & f(x_0) = \infty. \end{cases}$$

Алгоритм побудови розкладу функції g в ряд (5.8) справа від x_0 , якщо $g(x_0) = 0$ або $g(x_0) = \infty$:

1. $n = 1$, $g_1 = g$;
2. $p_n = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln |(g_n(x_0+h))|}{\ln h}$, $a_n = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g_n(x_0+h)}{h^{p_n}}$;
3. $g_{n+1}(x) = g_n(x) - a_n(x - x_0)^{p_n}$, $n := n + 1$;
4. Виконати пункт 2.

Розглянемо розклад функції $f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$ в точці $x_0 = 0$.

$$p_1 = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sqrt[3]{\sin h})}{\ln h} = \frac{1}{3}, \quad a_1 = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{\sin h}}{\sqrt[3]{h}} = 1.$$

Отже, маємо перше наближення $\sqrt[3]{\sin x} \approx \sqrt[3]{x}$.

Нехай $f_2(x) = f(x) - \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[3]{x}$, тоді

$$p_2 = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left| \sqrt[3]{\sin h} - \sqrt[3]{h} \right|}{\ln |h|} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln \left| \sqrt[3]{h} \right|}{\ln |h|} + \frac{\ln \left| \sqrt[3]{\frac{\sin h}{h}} - 1 \right|}{\ln |h|} \right) = \frac{7}{3},$$

$$a_2 = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(h)}{h^{7/3}} = -\frac{1}{18}.$$

Маємо наступне наближення $\sqrt[3]{\sin x} \approx \sqrt[3]{x} - \frac{\sqrt[3]{x^7}}{18}$.

Інколи процедуру знаходження розкладу можна спростити. Для $f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$ утворимо додаткову функцію $w(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t)}{\sqrt[3]{t}}$, яку вже можна розкласти в ряд Тейлора.

Представимо функцію $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ в ряд (5.8) в околі точки $x_0 = 0$ справа.

$$p_1 = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln |f(h)|}{\ln h} = -1, \quad a_1 = \lim_{h \rightarrow 0} hf(h) = 1.$$

Враховуючи те, що функція $g(x) = \lim_{t \rightarrow x} (t \cdot f(t))$ розкладається в ряд Тейлора, тоді функція $f(x) = \frac{g(x)}{x}$.

5.4. Алгоритми розкладу розв'язків звичайного диференційного рівняння в ланцюговий дріб

5.4.1. Основна ідея. Нагадаємо класичний алгоритм розкладу дійсного числа в ланцюговий дріб:

$$x = [x] + \{x\} = [x] + \frac{1}{\frac{1}{\{x\}}} = [x] + \frac{1}{\left[\frac{1}{\{x\}} \right] + \left\{ \frac{1}{\{x\}} \right\}} = \dots$$

Для адаптації вище описаного алгоритму до розкладу функцій (розв'язків диференціальних рівнянь) замість цілої частини будемо використовувати головну частину формального розкладу в степеневий ряд з дійсними показниками, а в якості дробової частини братимемо відповідний залишок ряду.

Наведемо в описовій формі найпростішу версію алгоритму розкладу $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ відповідно многочлени, в околі точки x_0 у

вигляді

$$f(x) = a_0(x) + \frac{1}{a_1(x) + \frac{1}{a_2(x) + \frac{1}{\dots}}}$$

1. $p(x) = f(x)$, $i = 0$, $a_i(x) = 0$.
2. Якщо $\lim_{h \rightarrow 0} p(x_0 + h) = 0$ виконати дії пункту 4. Інакше – виконати дії наступного пункту.
3. Якщо $p(x) \equiv 0$ завершити розклад. Інакше $p(x) = \frac{1}{p(x)}$, $i = i + 1$, $a_i = 0$. Виконати пункт 2.
4. $t(x) = (x - x_0)^{\mathcal{L}p(x_0)} \cdot \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{p(x_0 + h)}{h^{\mathcal{L}p(x_0)}}$, $p(x) = p(x) - t(x)$, $a_i(x) = a_i(x) + t(x)$. Виконати пункт 2.

Використовуючи тотожні перетворення над ланцюговими дробами, описаний алгоритм можна модифікувати для отримання менших чисел в розкладах. Наведемо результат застосування такого алгоритму на прикладі раціональної функції:

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 4x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 4} &= \frac{1}{4} + \frac{15}{-\frac{16}{x^2} + \frac{16}{x} + \frac{84}{25} + \frac{416}{\frac{125}{x} + 25}} = \\ &= \left\langle \frac{1}{4}; \frac{15}{-16x^{-2} + 16x^{-1} + \frac{84}{25}}; \frac{416}{125x^{-1} + 25} \right\rangle. \end{aligned}$$

Виникає гіпотеза, про те, що будь-який раціональний дріб єдиним чином розкладається в скінченний ланцюговий дріб за описаним алгоритмом.

5.4.2. Алгоритм із залученням правила Лопіталя. Нехай задано диференціальне рівняння:

$$y^{(n+1)}(x) = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}), \quad y^{(k)}(x_0) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (5.10)$$

І нехай рівняння (5.10) таке, що всі $y^n(x_0) \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Наведемо в описовій формі найпростішу версію алгоритму розкладу розв'язку $y = f(x)$ в околі точки x_0 у вигляді

$$y(x) = a_0(x) + \frac{1}{a_1(x) + \frac{1}{a_2(x) + \frac{1}{\dots}}} = [a_0(x); a_1(x); a_2(x); \dots].$$

1. $p(x) = y(x), i = 0, a_i(x) = 0$.
2. Якщо $\lim_{h \rightarrow 0} p(x_0 + h) = 0$ (границю знаходимо правилом Лопіталя, взявши за y невідому функцію, значення якої разом з її похідними в точці x_0 є відомим) виконати дії пункту 4. Інакше – виконати дії наступного пункту.
3. Якщо $p(x) \equiv 0$ завершити розклад. Інакше $p(x) = \frac{1}{p(x)}, i = i + 1, a_i = 0$. Виконати пункт 2.
4. $t(x) = (x - x_0)^{\mathfrak{L}p(x_0)} \cdot \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{p(x_0 + h)}{h^{\mathfrak{L}p(x_0)}}$, $p(x) = p(x) - t(x), a_i(x) = a_i(x) + t(x)$ (границю знаходимо аналогічним чином, як і у пункті 2). Виконати пункт 2.

Приклад 5.1. $p(x) = y(x) - y(0) = y(x) - 1$. Знайдемо значення $\mathfrak{L}p(0) =$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\ln |p(0 + h)|}{\ln |h|} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\ln |y(h) - 1|}{\ln |h|} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{h \cdot (y(h) - 1)'}{y(h) - 1} = \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{h \cdot y'(h)}{y(h) - 1} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{y'(h) + h y''(h)}{y'(h)} = 1 + \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{h \cdot y''(h)}{y'(h)} = \\ &= 1 + \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{y''(h) + h \cdot y''(h)}{y''(h)} = 2. \end{aligned}$$

Недоліком цього алгоритму є те, що кількість елементів, які потрібно опрацювати та виконати на кожній ітерації при застосуванні правила Лопіталя постійно зростає. Це спричинить додаткові затрати пам'яті та збільшить час виконання алгоритму для отримання наступного елемента.

5.4.3. Алгоритм на основі розкладу розв'язку в степеневий ряд з цілими показниками. Нехай задано диференціальне рівняння (5.10) таке, що існує розклад розв'язку в околі точки x_0 в (формальний) степеневий ряд з цілими показниками:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^{\lambda_j}, \quad \lambda_j < \lambda_{j+1}, \quad \lambda_j \in \mathbb{Z}, \quad a_j \neq 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (5.11)$$

Розглянемо $S_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j (x - x_0)^{\lambda_j}$ утворену з ряду (5.11). Тоді, взявши за $f(x) = \frac{S_n}{1}$, легко застосувати алгоритм розкладу в ланцюговий дріб раціонального виразу в околі точки x_0 .

5.4.4. Приклади розкладів деяких елементарних функцій в ланцюгові дроби. Наведемо приклади розкладів деяких елементарних функцій з відомими правилами задання розкладів, які було отримано за допомогою описаних алгоритмів.

$$\operatorname{tg} x = [0; x^{-1}; -3x^{-1}; 5x^{-1}; -7x^{-1}; 9x^{-1}; -11x^{-1}; \dots]$$

$$\operatorname{th} x = [0; x^{-1}; 3x^{-1}; 5x^{-1}; 7x^{-1}; 9x^{-1}; 11x^{-1}; 13x^{-1}; \dots].$$

$$\operatorname{arctg} x = \left\langle 0; \frac{1}{x^{-1}}; \frac{1^2}{3x^{-1}}; \frac{2^2}{5x^{-1}}; \frac{3^2}{7x^{-1}}; \frac{4^2}{9x^{-1}}; \dots \right\rangle.$$

$$\operatorname{arcthx} = \left\langle 0; \frac{1}{x^{-1}}; \frac{1^2}{-3x^{-1}}; \frac{2^2}{5x^{-1}}; \frac{3^2}{-7x^{-1}}; \frac{4^2}{9x^{-1}}; \dots \right\rangle.$$

$$\sqrt{x+1} = [1; 2x^{-1} + 1/2; (-8x^{-1} - 4; 2x^{-1} + 1)].$$

$$\ln |1+x| = \left\langle 0; \frac{1}{x^{-1} + 1/2}; \frac{a_1}{b_1 x^{-1} + c_1}; \frac{a_2}{b_2 x^{-1} + c_2}; \dots \right\rangle,$$

$$a_n = n^2, \quad c_n = \frac{b_n}{2}, \quad \begin{cases} b_{2n-1} = 4n - 3; \\ b_{2n} = 16n - 4; \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\ln \left| \frac{x+1}{1-x} \right| = 2 \operatorname{arcthx} = \left\langle 0; \frac{2}{x^{-1}}; \frac{1^2}{-3x^{-1}}; \frac{2^2}{5x^{-1}}; \frac{3^2}{-7x^{-1}}; \frac{4^2}{9x^{-1}}; \dots \right\rangle.$$

Зазначимо, що всі попередньо наведені розклади, отримані при використанні попередньо описаних алгоритмів, співпадають з розкладами представленими у [9, 28, 74]. Натомість розклад експоненти відрізняється від нам відомих:

$$e^x = \left[1; x^{-1} - \frac{1}{2}; a_{2l}x^{-1}; a_{2l+1}x^{-1} \right],$$

де $l = 0, 1, \dots$, $a_{2l} = 16l + 12$, $a_{2l+1} = 4l + 5$.

5.5. Висновки до розділу

У цьому розділі відображено такі результати:

- було побудовано логарифмічну (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідну та вивчено її властивості;
- встановлено зв'язок логарифмічної (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідної з класичною;
- побудовано \mathfrak{L} -дотичні для формування розкладів деяких функцій в степеневі ряди з дійсними показниками;
- описано два алгоритми для розкладу розв'язків звичайного диференціального рівняння в ланцюговий дріб.

Знайдене практичне застосування логарифмічної (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідної є мотивом для подальшого вивчення та пошуку більш оптимальних способів розкладу функцій в степеневі ряди з дійсними показниками.

РОЗДІЛ 6
АНАЛОГ ЛОГАРИФМІЧНОЇ (u, v) -ПОХІДНОЇ ТА ЙОГО
ЗАСТОСУВАННЯ

6.1. Означення та основні властивості

Означення 6.1. Нехай $(u, v) \in \mathcal{P}^+$. Покладемо

$$\Lambda_v^u f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \square_v^u f(x_0)}{\ln \square_v^u x}. \quad (6.1)$$

Описана границя є аналогом логарифмічної (u, v) -похідної.

Лема 6.1. *Границя $\Lambda_v^u f(x_0)$ в залежності від функції f і точки x_0 може набувати лише невід'ємних значень, а також $\pm\infty$.*

Доведення. З області визначення функції f зафіксуємо точку x_0 . Нехай $\Lambda_v^u f(x_0) = c$, $-\infty < c < 0$. Тоді згідно з означенням $\square_v^u f(x) = (\square_v^u x)^{c+\alpha(h)}$, де $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$ маємо, що $\lim_{h \rightarrow 0} \square_v^u f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (\square_v^u x)^{c+\alpha(h)} = +\infty$. Отже, функція f має нескінченне коливання на всіх (u, v) -околах точки x_0 . Це означає, що $\square_v^u f(x_0) = +\infty$, а тому $\Lambda_v^u f(x_0) = -\infty$, що суперечить $-\infty < \Lambda_v^u f(x) < 0$. Ми прийшли до суперечності, отже множина значень, які може набувати $\Lambda_v^u f$ є всі невід'ємні числа та $\pm\infty$ (наступні твердження описують ті випадки, які не розглядались в цьому доведенні). \square

Лема 6.2. *Якщо існує скінченна похідна $f'(x_0)$ відмінна від нуля, то $\Lambda_v^u f(x_0) = 1$. Якщо $\Lambda_v^u f(x_0) < 1$, то функція є недиференційовною в точці x_0 . Якщо $\Lambda_v^u f(x_0) > 1$, то $\mathfrak{D}_v^u(x_0) = 0$.*

Доведення. З леми 4.2 маємо, що $\boxtimes_v^u f(x_0) = |f'(x_0)|$. Згідно з означенням аналога логарифмічної (u, v) -похідної

$$\Lambda_v^u f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \square_v^u f(x_0)}{\ln \square_v^u x} = 1 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\square_v^u f(x_0)}{\square_v^u x}}{\ln \square_v^u x} = 1.$$

Нехай $\Lambda_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) = c \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Згідно з означенням:

$$\frac{\ln \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0)}{\ln \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}x} = c + \alpha(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0 \Rightarrow \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) = (\square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}x)^{c+\alpha(h)}.$$

Знайдемо $\boxtimes_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0)}{\square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}x} = \lim_{h \rightarrow 0} (\square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}x)^{c-1+\alpha(h)}$. □

Лема 6.3. *Нехай для пари функцій $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{P}^+$ існує нескінченно мала послідовність (h_n) така, що $\mathbf{u}(h_n)\mathbf{v}(h_n) > 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.*

Істинними є наступні твердження:

1. *Якщо $\Lambda_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) > 0$, то функція f – неперервна в точці x_0 .*
2. *$\Lambda_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}A = +\infty$, де $A \in \mathbb{R}$.*
3. *Якщо значення різниці $J(x_0) = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) - \underline{\lim}_{h \rightarrow 0} f(x_0-h)$ є дійсним числом, відмінним від нуля, то $\Lambda_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) = 0$.*
4. *Якщо $J(x_0) = \infty$, то $\Lambda_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) = -\infty$.*

Доведення. Згідно з означенням $\Lambda_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}$, коливання функції можна представити у вигляді $\square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) = (\square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}x)^{\Lambda_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0)+\alpha(h)}$, де $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$. Спрямувавши h до нуля, отримаємо, що коливання буде прямувати до нуля, а тому функція є неперервною.

Оскільки $\lim_{h \rightarrow 0} \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x) = J(x_0)$, то очевидними стають два останні твердження теореми. □

Лема 6.4. *Якщо f – неперервна в точці x_0 , то $\Lambda_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) = \Lambda_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}|f|(x_0)$.*

Доведення. Якщо існує (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -окіл x_0 , такий, що $f \geq 0$, то з рівності $|f| = f$, маємо $\Lambda_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) = \Lambda_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}|f|(x_0)$. З іншого боку, якщо $f \leq 0$, то враховуючи $\square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) = \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}(-1 \cdot f)(x_0)$ знову приходимо до рівності $\Lambda_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) = \Lambda_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}|f|(x_0)$.

Нехай в деякому (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -околі точки x_0 функція f набуває різних за знаком значень. Тоді виконується $\frac{1}{2}\square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) \leq \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}|f|(x_0) \leq \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0)$. Оскільки $\frac{1}{2}\square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0) = \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}\left(\frac{1}{2}f\right)(x_0)$, то

$$\ln \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}\left(\frac{1}{2}f\right)(x_0) \leq \ln \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}|f|(x_0) \leq \ln \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}f(x_0);$$

$$\frac{\ln \square_v^u \left(\frac{1}{2}f\right)(x_0)}{\ln \square_v^u x} \geq \frac{\ln \square_v^u |f|(x_0)}{\ln \square_v^u x} \geq \frac{\ln \square_v^u f(x_0)}{\ln \square_v^u x}.$$

Перейшовши в останніх нерівностях до границь при h прямує до нуля, отримаємо рівність $\Lambda_v^u f(x_0) = \Lambda_v^u |f|(x_0)$. \square

Теорема 6.1. *Нехай для неперервних в точці x_0 функцій f , g і пари функцій $(u, v) \in \mathcal{P}^+$ існують скінченні значення $\Lambda_v^u f(x_0) \geq 0$ і $\Lambda_v^u g(x_0) \geq 0$.*

Виконуються наступні твердження:

1. Для всіх $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ і $b \in \mathbb{R}$ маємо $\Lambda_v^u (a \cdot f + b)(x_0) = \Lambda_v^u f(x_0)$.
2. Якщо $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\square_v^u f(x_0)}{\square_v^u g(x_0)} \neq 1$ (зокрема якщо $\Lambda_v^u f(x_0) \neq \Lambda_v^u g(x_0)$), то $\Lambda_v^u (f + g)(x_0) = \min \{ \Lambda_v^u f(x_0), \Lambda_v^u g(x_0) \}$.
3. Якщо $f(x_0) = 0 = g(x_0)$, то $\Lambda_v^u (f \cdot g)(x_0) \geq \Lambda_v^u f(x_0) + \Lambda_v^u g(x_0)$.
4. При $\xi > 0$ маємо $\Lambda_v^u |f|^\xi(x_0) = \begin{cases} \xi \cdot \Lambda_v^u f(x_0) & \text{при } f(x_0) = 0, \\ \Lambda_v^u f(x_0) & \text{при } f(x_0) \neq 0. \end{cases}$

Доведення. 1. Враховуючи те, що $\square_v^u (a \cdot f + b)(x_0) = |a| \square_v^u f(x_0)$ згідно з означенням маємо $\Lambda_v^u (a \cdot f + b)(x_0) = \Lambda_v^u f(x_0)$.

2. Не втрачаючи загальності, нехай $\Lambda_v^u f(x_0) = c$, $\Lambda_v^u g(x_0) = d$, $c \geq d$. Якщо $c > d$, тоді $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\square_v^u f(x_0)}{\square_v^u g(x_0)} = 0$, бо $\square_v^u f(x_0) = (\square_v^u x)^{c+\alpha(h)}$, $\square_v^u g(x_0) = (\square_v^u x)^{d+\beta(h)}$, де $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0 = \lim_{h \rightarrow 0} \beta(h)$.

Оскільки $\square_v^u f(x_0) = \sup_{t_1, t_2 \in \Theta_{v(h)}^u(x_0)} (f(t_1) - f(t_2))$, тоді, враховуючи нерівність для точної верхньої межі, маємо $\square_v^u (f + g)(x_0) \leq \square_v^u f(x_0) + \square_v^u g(x_0)$.

Отже,

$$\begin{aligned} \ln \square_v^u (f + g)(x_0) &\leq \ln(\square_v^u f(x_0) + \square_v^u g(x_0)) \Rightarrow \\ \Lambda_v^u (f + g)(x_0) &\geq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(\square_v^u f(x_0) + \square_v^u g(x_0))}{\ln \square_v^u x} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \square_v^u g(x_0) + \ln\left(1 + \frac{\square_v^u f(x_0)}{\square_v^u g(x_0)}\right)}{\ln \square_v^u x} = \Lambda_v^u g(x_0). \end{aligned} \quad (6.2)$$

З іншого боку $\square_v^u (f + g)(x_0) \geq |\square_v^u f(x_0) - \square_v^u g(x_0)|$.

$$\Lambda_v^u (f + g)(x_0) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln |\square_v^u f(x_0) - \square_v^u g(x_0)|}{\ln \square_v^u x} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \square_{\vee}^u g(x_0) + \ln \left| 1 - \frac{\square_{\vee}^u f(x_0)}{\square_{\vee}^u g(x_0)} \right|}{\ln \square_{\vee}^u x} = \Lambda_{\vee}^u g(x_0). \quad (6.3)$$

З (6.2) і (6.3) маємо, що $\Lambda_{\vee}^u (f + g)(x_0) = \min\{\Lambda_{\vee}^u f(x_0), \Lambda_{\vee}^u g(x_0)\}$.

3. Враховуючи те, що значення функції f та g в точці x_0 дорівнюють нулю, маємо $\inf_{t \in \Theta_{\vee}^u(x_0)} |f(t)| = 0$, $\inf_{t \in \Theta_{\vee}^u(x_0)} |g(t)| = 0$. Розглянемо вирази

$$\square_{\vee}^u |f|(x_0) = \sup_{t \in \Theta_{\vee}^u(x_0)} |f(t)| - \inf_{t \in \Theta_{\vee}^u(x_0)} |f(t)| = \sup_{t \in \Theta_{\vee}^u(x_0)} |f(t)|,$$

$$\square_{\vee}^u |g|(x_0) = \sup_{t \in \Theta_{\vee}^u(x_0)} |g(t)| - \inf_{t \in \Theta_{\vee}^u(x_0)} |g(t)| = \sup_{t \in \Theta_{\vee}^u(x_0)} |g(t)|.$$

Оскільки $\sup_{t \in \Theta_{\vee}^u(x_0)} |f(t)g(t)| \leq \sup_{t \in \Theta_{\vee}^u(x_0)} |f(t)| \cdot \sup_{t \in \Theta_{\vee}^u(x_0)} |g(t)|$, то

$$\Lambda_{\vee}^u |f \cdot g|(x_0) \geq \Lambda_{\vee}^u |f|(x_0) + \Lambda_{\vee}^u |g|(x_0). \quad (6.4)$$

4.1. Розглянемо випадок, коли $f(x_0) = 0$.

Оскільки $\sup_{t \in \Theta_{\vee}^u(x)} |f(t)|^{\xi} = \left(\sup_{t \in \Theta_{\vee}^u(x_0)} |f(t)| \right)^{\xi}$ (впливає зі строгої монотонності степеневі функції), то, враховуючи попереднє, маємо, що

$$\Lambda_{\vee}^u |f|^{\xi}(x_0) = \xi \Lambda_{\vee}^u |f|(x_0) = \xi \Lambda_{\vee}^u f(x_0).$$

4.2. Нехай $|f(x_0)| = d \neq 0$. Утворимо функції $a = a(h)$ і $b = b(h)$, такі, щоб виконувались рівності $|f(a(h))| = \sup_{t \in \Theta_{\vee}^u(x)} |f(t)|$ і $|f(b(h))| = \inf_{t \in \Theta_{\vee}^u(x)} |f(t)|$. Враховуючи наслідок 3.4 маємо, що

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\square_{\vee}^u |f|^{\xi}(x_0)}{\square_{\vee}^u |f|(x_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a)|^{\xi} - |f(b)|^{\xi}}{|f(a)| - |f(b)|} = \xi \cdot d^{\xi-1}.$$

$$\Lambda_{\vee}^u |f|^{\xi}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \square_{\vee}^u |f|(x_0) + \ln \frac{\square_{\vee}^u |f|^{\xi}(x_0)}{\square_{\vee}^u |f|(x_0)}}{\ln \square_{\vee}^u x} = \Lambda_{\vee}^u f(x_0).$$

□

Зауваження 6.1. Пункти 1, 2 теореми 6.1 виконуються і для розривних функцій.

Зауваження 6.2. У пункті 2 попередньої теореми умова $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\square_v^u f(x_0)}{\square_v^u g(x_0)} \neq 1$ є достатньою, щоб виконувалась рівність $\Lambda_v^u(f+g)(x_0) = \min\{\Lambda_v^u f(x_0), \Lambda_v^u g(x_0)\}$. Нехай $f(x) = x - \sqrt[3]{x}$ і $g(x) = \sqrt[3]{x}$ де $\Lambda_v^u f(0) = \frac{1}{3} = \Lambda_v^u g(0)$. Тоді $\Lambda_v^u(f+g)(x_0) = \Lambda_v^u(x - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x})(0) = \Lambda_v^u(x)(0) = 1$. Отже, у цьому випадку $\Lambda_v^u(f+g)(x_0) \neq \min\{\Lambda_v^u f(x_0), \Lambda_v^u g(x_0)\}$, хоча $\Lambda_v^u(f-g)(x_0) = \min\{\Lambda_v^u f(x_0), \Lambda_v^u g(x_0)\}$.

Зауваження 6.3. При розгляді простих прикладів може скластися хибне враження, що пункт 3 теореми 6.1 можна уточнити до більш простої формули: $\Lambda_v^u(f \cdot g)(x_0) = \Lambda_v^u f(x_0) + \Lambda_v^u g(x_0)$. Розглянемо контрприклад.

Приклад 6.1. Нехай $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$, Нехай $g(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0; \\ x^2, & x < 0. \end{cases}$

Легко показати, що $\Lambda_h^h f(0) = 2 = \Lambda_h^h g(0)$, хоча $\Lambda_h^h(f \cdot g)(0) = +\infty$.

Бачимо, що, неперервність функцій в околі точки x_0 не гарантує виконання рівності $\Lambda_v^u(f \cdot g)(x_0) = \Lambda_v^u f(x_0) + \Lambda_v^u g(x_0)$.

Теорема 6.2. Для дійсної функції f визначеної в околі точки x_0 і пари функцій $(u, v) \in \mathcal{P}^+$ істинними є наступні твердження:

1. Якщо $\boxtimes_v^u f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то $\Lambda_v^u f(x_0) = 1$;
2. Якщо $\Lambda_v^u f(x_0) < 1$, то функція f – недиференційовна в точці x_0 ;
3. Якщо $\Lambda_v^u f(x_0) > 1$, то $\boxtimes_v^u f(x_0) = 0$.

Доведення. 1. Згідно з означеннями

$$\Lambda_v^u f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \square_v^u f(x_0)}{\ln \square_v^u x} = 1 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{\square_v^u f(x_0)}{\square_v^u x} \right)}{\ln \square_v^u x} = 1.$$

Нехай $\Lambda_v^u f(x_0) = c$, тоді $\square_v^u f(x_0) = (\square_v^u x)^{c+\alpha(h)}$, де $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$, то тоді

$$\boxtimes_v^u f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\square_v^u f(x_0)}{\square_v^u x} = \lim_{h \rightarrow 0} (\square_v^u x)^{c-1+\alpha(h)}.$$

Враховуючи леми 4.2 і 4.3, теорему 4.2 отримаємо необхідне твердження. □

6.2. Властивості аналога логарифмічної $(h, 0)$ -похідної

Під записом $\Lambda f(x_0)$ будемо розуміти $\Lambda_0^h f(x_0)$.

Лема 6.5. Якщо $\Lambda f(x_0) > 0$, то функція f – неперервна в точці x_0 .

Доведення. Згідно з означенням $\square_0^h f(x_0) = |h|^{\Lambda f(x_0) + \alpha(h)}$, $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$.

Тоді $\lim_{h \rightarrow 0} \square_0^h f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} |h|^{\Lambda f(x_0) + \alpha(h)} = 0$. Отже, f – неперервна в точці x_0 . \square

Лема 6.6. Якщо існує $\Lambda f(x_0)$, то для всіх пар $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{P}^+$ виконується рівність $\Lambda_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0) = \Lambda f(x_0)$.

Доведення. Якщо $\Lambda f(x_0) = -\infty$, то в точці x_0 маємо нескінченний стрибок функції f , а тому і $\Lambda_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0) = -\infty$.

Далі, не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{P}^{\oplus}$.

Покажемо, що у випадку існування $\Lambda f(x_0)$ виконується рівність $\Lambda_h^h f(x_0) = \Lambda f(x_0)$. Справді, нехай $\sigma(h) = \max\{\square_0^h f(x_0), \square_h^0 f(x_0)\}$, тоді виконується подвійна нерівність $\sigma(h) \leq \square_h^h f(x_0) \leq 2\sigma(h)$, а отже,

$$\frac{\ln \sigma(h)}{\ln |2h|} \geq \frac{\square_h^h f(x_0)}{\ln |2h|} \geq \frac{\ln (2\sigma(h))}{\ln |2h|};$$

Перейшовши до границі, отримаємо рівність $\Lambda f(x_0) = \Lambda_h^h f(x_0)$.

Нехай $\mu = \mu(h) = \max\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Тоді з нерівностей $\square_0^{\mu} f(x_0) \leq \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0) \leq \square_{\mu}^{\mu} f(x_0)$ і $\frac{1}{2} \leq \left| \frac{\mu}{\mathbf{u} + \mathbf{v}} \right| \leq 1$ маємо

$$\frac{\ln \square_0^{\mu} f(x_0) \cdot \ln \square_0^{\mu} x}{\ln \square_0^{\mu} x \cdot \ln \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} x} \geq \frac{\ln \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0)}{\ln \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} x} \geq \frac{\ln \square_{\mu}^{\mu} f(x_0) \cdot \ln \square_{\mu}^{\mu} x}{\ln \square_{\mu}^{\mu} x \cdot \ln \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} x}.$$

Достатньо перейти до границі в останніх нерівностях, спрямувавши h до нуля, щоб отримати рівність $\Lambda_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0) = \Lambda f(x_0)$.

Нехай $\Lambda f(x_0) = +\infty$. Відповідно $\square_0^h f(x_0) = |h|^{\alpha(h)}$, $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = +\infty$ і тоді $\square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x) \leq 2\mu^{\min\{\alpha(h), \alpha(-h)\}}$, а отже,

$$\frac{\ln \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0)}{\ln \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} x} \geq \frac{\ln 2}{\ln \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} x} + \min\{\alpha(h), \alpha(-h)\} \frac{\ln \mu}{\ln \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} x}. \quad (6.5)$$

Перейшовши в (6.5) до границь, отримаємо $\Lambda_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_0) = +\infty$. \square

Теорема 6.3. Якщо існують $\Lambda f(\tau) \in \mathbb{R}$, $\Lambda g(x_0) \in \mathbb{R}$, де $\tau = g(x_0)$, то

$$\Lambda(f(g))(x_0) = \Lambda f(\tau) \cdot \Lambda g(x_0).$$

Доведення. Згідно з означенням

$$\Lambda(f(g))(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \square_0^h(f(g))(x_0)}{\ln \square_0^h x} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\ln \square_0^h(f(g))(x_0)}{\ln \square_0^h g(x_0)} \cdot \frac{\ln \square_0^h g(x_0)}{\ln \square_0^h x} \right).$$

Розглянемо вираз $\frac{\ln \square_0^h(f(g))(x_0)}{\ln \square_0^h g(x_0)}$.

При $x \in \Theta_0^h(x_0)$ відповідне значення $g(x) \in \left[\inf_{t \in \Theta_0^h(x_0)} g(t); \sup_{t \in \Theta_0^h(x_0)} g(t) \right]$.
Нехай $u = u(h) = \sup_{t \in \Theta_0^h(x_0)} g(t) - g(x_0)$, $v = v(h) = g(x_0) - \inf_{t \in \Theta_0^h(x_0)} g(t)$. Очевидно, що пара утворених функцій $(u, v) \in \mathcal{P}^\oplus$. При $\tau = g(x_0)$ виконуються рівності $\square_0^h g(x_0) = \square_v^u \tau$, $\square_0^h(f(g))(x_0) = \square_v^u f(\tau)$. Тому

$$\Lambda(f(g))(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\ln \square_v^u f(\tau)}{\ln \square_v^u \tau} \right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\ln \square_0^h g(x_0)}{\ln \square_0^h x} \right) = \Lambda f(\tau) \cdot \Lambda g(x_0). \quad (6.6)$$

□

Зауваження 6.4. Поки що залишається відкритим питанням залишається питання чи істинним є твердження: ”якщо функції f , g неперервні в околі точки x_0 і при цьому $\Lambda f(x_0) \geq 0$, $\Lambda g(x_0) \geq 0$, $f(x_0) = 0 = g(x_0)$, то $\Lambda(f \cdot g)(x_0) = \Lambda f(x_0) + \Lambda g(x_0)$ ”. Описане твердження не виконується у випадку неперервності функцій f і g в точці x_0 , але розривних в проколеному околі точки x_0 . Наступний приклад це демонструє.

Приклад 6.2. Нехай $g(x) = x(1 - D(x))$, $f(x) = xD(x)$, де $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$ Тоді $f(0) = 0$, $g(0) = 0$, $\Lambda_v^u f(0) = 1$, $\Lambda_v^u g(0) = 1$. Добуток функцій $f(x)g(x) = 0$, отже, $\Lambda_v^u(f \cdot g)(0) = +\infty \geq \Lambda_v^u f(0) + \Lambda_v^u g(0)$.

Лема 6.7. Якщо існує скінченна $\mathfrak{L}f(x_0) \geq 0$, то $\Lambda f(x_0) = \mathfrak{L}f(x_0)$.

Доведення. Нехай $\mathfrak{L}f(x_0) = c$. Тоді $|\Delta_0^h f(x_0)| = |h|^{c+\alpha(h)}$, $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$, $f(x_0 + h) = f(x_0) + s(h) |h|^{c+\alpha(h)}$, де $s(h) \in \{\pm 1\}$.

Існують $a = a(h)$, $b = b(h)$ такі, що $f(x_0 + a) = \sup_{t \in \Theta_0^h(x_0)} f(t)$, $f(x_0 + b) = \inf_{t \in \Theta_0^h(x_0)} f(t)$. Тому

$$\square_0^h f(x_0) = f(x_0 + a) - f(x_0 + b) = s(a) |a|^{c+\alpha(a)} - s(b) |b|^{c+\alpha(b)} \leq 2 |h|^{c+\mu(h)},$$

де $\mu(h) = \min\{\alpha(a), \alpha(b)\}$. Тоді

$$\ln |\Delta_0^h f(x_0)| \leq \ln \square_0^h f(x_0) \leq \ln 2 + (c + \mu(h)) \ln |h|.$$

Оскільки $|\Delta_0^h x| = |h| = \square_0^h x$, то

$$\frac{\ln |\Delta_0^h f(x_0)|}{\ln |\Delta_0^h x|} \geq \frac{\ln \square_0^h f(x_0)}{\ln \square_0^h x} \geq \frac{\ln 2}{\ln |h|} + (c + \mu(h)) \frac{\ln |h|}{\ln |h|}.$$

Спрямувавши h до нуля, перейдемо до границь в останніх нерівностях

$$\mathfrak{L}f(x_0) \geq \Lambda f(x_0) \geq \mathfrak{L}f(x_0) \Rightarrow \Lambda f(x_0) = \mathfrak{L}f(x_0). \quad (6.7)$$

□

Теорема 6.4. *Нехай задано пару нескінченно малих послідовностей $(l_n; r_n)$ таких, що $l_n < l_{n+1} < x_0 < r_{n+1} < r_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(r_{n+1}-x_0)}{\ln(r_n-x_0)} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(x_0-l_{n+1})}{\ln(x_0-l_n)}$. Для того, щоб існувала $\Lambda f(x_0)$, необхідно і достатньо, щоб існували і були рівними границі $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_0^{r_n-x_0} f(x_0)}{\ln(r_n-x_0)}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_0^{x_0-l_n} f(x_0)}{\ln(x_0-l_n)}$. У випадку існування вони рівні.*

Доведення. Якщо існує скінченне чи нескінченне значення $\Lambda f(x_0)$, то границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_0^{r_n-x_0} f(x_0)}{\ln(r_n-x_0)}$ (відповідно $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_0^{x_0-l_n} f(x_0)}{\ln(x_0-l_n)}$) існує і рівна $\Lambda f(x_0)$ як границя за підпослідовністю $h_n = x_0 - r_n$ ($h_n = x_0 - l_n$).

Очевидно, що для будь-якого додатного $h \leq u_0$ існує таке $n = n(h)$, що виконується нерівність $u_{n+1} < h \leq u_n$, де $u_n \equiv r_n - x_0$. Оскільки $\square_0^a x = a$ і $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln u_{n+1}}{\ln u_n} = 1$, то легко показати, що $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln u_{n+1}}{\ln h} = 1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln u_n}{\ln h}$.

З іншого боку, $\square_0^{u_{n+1}} f(x_0) \leq \square_0^h f(x_0) \leq \square_0^{u_n} f(x_0)$, тоді

$$\frac{\ln \square_0^{u_{n+1}} f(x_0)}{\ln \square_0^h x} \geq \frac{\ln \square_0^h f(x_0)}{\ln \square_0^h x} \geq \frac{\ln \square_0^{u_n} f(x_0)}{\ln \square_0^h x}. \quad (6.8)$$

Спрямувавши h до нуля, переходом до границь в (3.10) отримуємо, що границі $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \square_0^{r_n - x_0} f(x_0)}{\ln \square_0^{r_n - x_0} x}$ і $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\ln \square_0^h f(x_0)}{\ln \square_0^h x}$ існують (не існують) одночасно, причому у випадку існування вони рівні.

Аналогічно доводиться, що границі $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \square_{x_0 - l_n}^0 f(x_0)}{\ln \square_{x_0 - l_n}^0 x}$ і $\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\ln \square_0^h f(x_0)}{\ln \square_0^h x}$ існують (не існують) одночасно і у випадку існування вони рівні. \square

Далі для спрощення будемо писати $\square_{x_0 - l_n}^{r_n - x_0} f(x_0) = \square_{[l_n, r_n]} f(x_0)$.

Лема 6.8. *Нехай задано дві пари послідовностей (l_n, r_n) і $(\tilde{l}_n, \tilde{r}_n)$, для яких виконуються наступні умови*

1. $l_n \leq x_0 < r_n$, $x_0 < \tilde{l}_n < \tilde{r}_n$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{l}_n = x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{r}_n$;
3. $[\tilde{l}_n; \tilde{r}_n] \subset [x_0; r_n] \subset [l_n; r_n]$, для всіх $n \in \mathbb{N}$;
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{[l_n; r_n]} f(x_0)}{\ln \square_{[\tilde{l}_n; \tilde{r}_n]} f(x_0)} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(r_n - l_n)}{\ln(\tilde{r}_n - \tilde{l}_n)} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(r_n - l_n)}{\ln(r_{n+1} - l_{n+1})} = 1$.

Значення правосторонньої границі $\Lambda f(x_0)$ і значення границі $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{[l_n; r_n]} f(x_0)}{\ln(r_n - l_n)}$ існують (не існують) одночасно. У випадку існування, вони рівні.

Доведення. Очевидно, що виконуються наступні нерівності

$$\square_{[l_n, r_n]} f(x_0) \geq \square_{[x_0, r_n]} f(x_0) \geq \square_{[\tilde{l}_n, \tilde{r}_n]} f(x_0); \quad r_n - l_n \geq r_n - x_0 \geq \tilde{r}_n - \tilde{l}_n. \quad (6.9)$$

Враховуючи умови теореми маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{[l_n, r_n]} f(x_0)}{\ln \square_{[\tilde{l}_n, \tilde{r}_n]} f(x_0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{[x_0, r_n]} f(x_0)}{\ln \square_{[l_n, r_n]} f(x_0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{[x_0, r_n]} f(x_0)}{\ln \square_{[\tilde{l}_n, \tilde{r}_n]} f(x_0)} = 1; \quad (6.10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(r_n - l_n)}{\ln(\tilde{r}_n - \tilde{l}_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(r_n - x_0)}{\ln(r_n - l_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(r_n - x_0)}{\ln(\tilde{r}_n - \tilde{l}_n)} = 1. \quad (6.11)$$

Згідно з теоремою 6.4 отримуємо

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln \square_0^h f(x_0)}{\ln \square_0^h x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{[x_0, r_n]} f(x_0)}{\ln(r_n - x_0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{[l_n, r_n]} f(x_0)}{\ln(r_n - l_n)}. \quad (6.12)$$

□

Аналогічним чином доводиться наступна лема.

Лема 6.9. Нехай задано дві пари послідовностей (l_n, r_n) і $(\tilde{l}_n, \tilde{r}_n)$, для яких виконуються наступні умови

1. $l_n \leq x_0 < r_n, \tilde{l}_n < \tilde{r}_n < x_0$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{l}_n = x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{r}_n$;
3. $[\tilde{l}_n, \tilde{r}_n] \subset [l_n; x_0] \subset [l_n, r_n]$ для всіх $n \in \mathbb{N}$;
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{[l_n, r_n]} f(x_0)}{\ln \square_{[\tilde{l}_n, \tilde{r}_n]} f(x_0)} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(r_n - l_n)}{\ln(\tilde{r}_n - \tilde{l}_n)} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(r_n - l_n)}{\ln(r_{n+1} - l_{n+1})} = 1$.

Значення лівосторонньої границі $\Lambda f(x_0)$ і значення границі $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{[l_n, r_n]} f(x_0)}{\ln(r_n - l_n)}$ існують (неіснують) одночасно, у випадку існування, вони рівні.

6.3. Властивості аналога логарифмічної (h, h) -похідної

Лема 6.10. Нехай задано строго спадну нескінченно малу послідовність пар додатних дійсних чисел (τ_n) , таку, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \tau_{n+1}}{\ln \tau_n} = 1$.

Для того щоб існувала границя $\Lambda_h^h f(x_0)$, необхідно і достатньо, щоб існувала границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{\tau_n}^{\tau_n} f(x_0)}{\ln \square_{\tau_n}^{\tau_n} x}$. У випадку існування вони рівні.

Доведення. З існування $\Lambda_h^h f(x_0)$ маємо, що границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{\tau_n}^{\tau_n} f(x_0)}{\ln \square_{\tau_n}^{\tau_n} x}$ також існує.

Нехай $n = n(h)$ така залежність, що $\tau_{n+1} < h \leq \tau_n$. Тоді

$$\square_{\tau_{n+1}}^{\tau_{n+1}} f(x_0) \leq \square_h^h f(x_0) \leq \square_{\tau_n}^{\tau_n} f(x_0);$$

$$\frac{\ln \square_{\tau_{n+1}}^{\tau_{n+1}} f(x_0) \cdot \ln \square_{\tau_{n+1}}^{\tau_{n+1}} x}{\ln \square_{\tau_{n+1}}^{\tau_{n+1}} x \cdot \ln \square_h^h x} \geq \frac{\ln \square_h^h f(x_0)}{\ln \square_h^h x} \geq \frac{\ln \square_{\tau_n}^{\tau_n} f(x_0) \cdot \ln \square_{\tau_n}^{\tau_n} x}{\ln \square_{\tau_n}^{\tau_n} x \cdot \ln \square_h^h x}; \quad (6.13)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \square_{\tau_{n+1}}^{\tau_{n+1}} f(x_0)}{\ln \square_{\tau_{n+1}}^{\tau_{n+1}} x} \geq \Lambda_h^h f(x_0) \geq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \square_{\tau_n}^{\tau_n} f(x_0)}{\ln \square_{\tau_n}^{\tau_n} x}.$$

Отже, якщо існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{\tau_n}^{\tau_n} f(x_0)}{\ln \square_{\tau_n}^{\tau_n} x}$, то існує і $\Lambda_h^h f(x_0)$, при цьому вони рівні. \square

Зауважимо, що з нерівності (6.13) маємо

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{\tau_n}^{\tau_n} f(x_0)}{\ln \square_{\tau_n}^{\tau_n} x} = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \square_h^h f(x_0)}{\ln \square_h^h x}, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{\tau_n}^{\tau_n} f(x_0)}{\ln \square_{\tau_n}^{\tau_n} x} = \underline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \square_h^h f(x_0)}{\ln \square_h^h x}. \quad (6.14)$$

Теорема 6.5. *Нехай задано послідовність пар дійсних чисел (l_n, r_n) таких, що $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$. При цьому $l_n < l_{n+1} < x_0 < r_{n+1} < r_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \max \{r_n - x_0, x_0 - l_n\}}{\ln \min \{r_n - x_0, x_0 - l_n\}} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln (r_{n+1} - l_{n+1})}{\ln (r_n - l_n)}. \quad (6.15)$$

Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{[l_n; r_n]} f(x_0)}{\ln (r_n - l_n)}$ і $\Lambda_h^h f(x_0)$ існують (не існують) одночасно. У випадку існування вони рівні.

Доведення. Нехай $u_n = r_n - x_0$, $v_n = x_0 - l_n$, $\mu_n = \min \{u_n, v_n\}$, $\eta_n = \max \{u_n, v_n\}$.

Покажемо, що за заданих умов $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu_{n+1}}{\ln \mu_n} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \eta_{n+1}}{\ln \eta_n}$.

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln (r_{n+1} - l_{n+1})}{\ln (r_n - l_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \eta_{n+1} + \ln \left(1 + \frac{\mu_{n+1}}{\eta_{n+1}}\right)}{\ln \eta_n + \ln \left(1 + \frac{\mu_n}{\eta_n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \eta_{n+1}}{\ln \eta_n}.$$

З $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \max \{r_n - x_0, x_0 - l_n\}}{\ln \min \{r_n - x_0, x_0 - l_n\}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \eta_n}{\ln \mu_n} = 1$ маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu_{n+1}}{\ln \mu_n} = 1$.

Розглянемо подвійну нерівність

$$\square_{\mu_n}^{\mu_n} f(x_0) \leq \square_{v_n}^{u_n} f(x_0) \leq \square_{\eta_n}^{\eta_n} f(x_0);$$

$$\frac{\ln \square_{\mu_n}^{\mu_n} f(x_0)}{\ln \square_{v_n}^{u_n} x} \geq \frac{\ln \square_{v_n}^{u_n} f(x_0)}{\ln \square_{v_n}^{u_n} x} \geq \frac{\ln \square_{\eta_n}^{\eta_n} f(x_0)}{\ln \square_{v_n}^{u_n} x}. \quad (6.16)$$

Перейдемо до границь

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{\mu_n}^{\mu_n} f(x_0)}{\ln \square_{v_n}^{u_n} x} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{v_n}^{u_n} f(x_0)}{\ln \square_{v_n}^{u_n} x} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{\eta_n}^{\eta_n} f(x_0)}{\ln \square_{v_n}^{u_n} x};$$

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{\mu_n}^{\mu_n} f(x_0)}{\ln \square_{v_n}^{u_n} x} \geq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{v_n}^{u_n} f(x_0)}{\ln \square_{v_n}^{u_n} x} \geq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{\eta_n}^{\eta_n} f(x_0)}{\ln \square_{v_n}^{u_n} x}.$$

Згідно з лемою 6.10 та рівністю (6.14) маємо

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{\mu_n}^{\mu_n} f(x_0)}{\ln \square_{v_n}^{u_n} x} = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \square_h^h f(x_0)}{\ln \square_h^h x} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{\eta_n}^{\eta_n} f(x_0)}{\ln \square_{\eta_n}^{\eta_n} x}, \quad (6.17)$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{\mu_n}^{\mu_n} f(x_0)}{\ln \square_{v_n}^{u_n} x} = \underline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \square_h^h f(x_0)}{\ln \square_h^h x} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{\eta_n}^{\eta_n} f(x_0)}{\ln \square_{\eta_n}^{\eta_n} x}. \quad (6.18)$$

Тобто $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_h^h f(x_0)}{\ln \square_h^h x} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{v_n}^{u_n} f(x_0)}{\ln \square_{v_n}^{u_n} x}$ і $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_h^h f(x_0)}{\ln \square_h^h x} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{v_n}^{u_n} f(x_0)}{\ln \square_{v_n}^{u_n} x}$. Отже, з існування $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{v_n}^{u_n} f(x_0)}{\ln \square_{v_n}^{u_n} x}$ отримуємо факт існування $\Lambda_h^h f(x_0)$. □

Лема 6.11. Виконується рівність $\Lambda_h^h f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \max\{\square_0^h f(x_0); \square_h^0 f(x_0)\}}{\ln |h|}$.

Доведення. Очевидними є наступні нерівності

$$\max\{\square_0^h f(x_0); \square_h^0 f(x_0)\} \leq \square_h^h f(x_0) \leq 2 \max\{\square_0^h f(x_0); \square_h^0 f(x_0)\}.$$

$$\frac{\ln \max\{\square_0^h f(x_0); \square_h^0 f(x_0)\}}{\ln 2 + \ln |h|} \geq \frac{\ln \square_h^h f(x_0)}{\ln 2 + \ln |h|} \geq \frac{\ln (2 \max\{\square_0^h f(x_0); \square_h^0 f(x_0)\})}{\ln 2 + \ln |h|}.$$

Достатньо перейти до границь, щоб отримати необхідне твердження. □

6.4. Зв'язок Λ , Λ_h^h з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича носія функції

Означення 6.2. Носієм функції f (неперервної й обмеженої варіації на $[a, b]$) називається множина \mathcal{N}_f всіх значень аргументу для яких $f'(x) \neq 0$ або не існує [58].

Лема 6.12. Якщо для функції f – неперервної й обмеженої варіації на $[a; b]$ існує таке скінченне число λ_0 , що для всіх $x \in \mathcal{N}_f$ виконується рівність $\Lambda_h^h f(x) = \lambda_0$, то $\dim_H \mathcal{N}_f = \lambda_0$.

Доведення. Розглянемо довільну послідовність покриттів відрізками $(\{U_i\}_j)$ множини \mathcal{N}_f .

Для кожного $j \in \mathbb{N}$ відрізки покриття $\{U_i\}_j$ можемо розглядати, як (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -околи $\Theta_{\mathbf{v}(h, x_k)}^{\mathbf{u}(h, x_k)} x_k$, де $x_k \in \mathbb{X}_j \subset \mathcal{N}_f$, при цьому послідовність множин (\mathbb{X}_j) є монотонною, тобто $\mathbb{X}_j \subset \mathbb{X}_{j+1}$. Під записами $\mathbf{u}(h, x_k)$, $\mathbf{v}(h, x_k)$ розуміємо, що для кожного $x_k \in \mathcal{N}_f$ існує своя пара функцій $(u, v) \in \mathcal{P}^\oplus$. Далі в доведенні $\mathbf{u} = \mathbf{u}(h, x_k)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(h, x_k)$.

Виконуючи покриття множини \mathcal{N}_f відрізками $\{U_i\}_j$ ми одночасно виконуємо покриття множини значень функції f відрізками $\{V_i\}_j$, довжини яких відповідно відповідно рівні $\square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_k)$, $x_k \in \mathbb{X}_j$.

Очевидно, що $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{x_k \in \mathbb{X}_j} \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_k) \geq \mathbf{V}_{[a;b]} f$ (із-за можливих накладань). Оскільки головною ціллю є знаходження розмірності Хаусдорфа-Безиковича, то значення суми $\sum_{x_k \in \mathbb{X}_j} (\square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} x_k)^\alpha$ потрібно мінімізувати, зокрема це досягається тим, що ми повинні зменшити накладання, а тому границя $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{x_k \in \mathbb{X}_j} \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_k)$ є скінченною.

$$\text{Нехай } \eta = \eta(h, x) = \max\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}, \xi = \xi(h, x) = \begin{cases} \mathbf{u}, & \square_0^{\mathbf{u}} f(x) \geq \square_0^{\mathbf{v}} f(x); \\ -\mathbf{v}, & \square_0^{\mathbf{u}} f(x) < \square_0^{\mathbf{v}} f(x). \end{cases}$$

Спочатку покажемо, що $\dim_H \mathcal{N}_f \leq \lambda_0$.

З нерівності $\square_0^\xi f(x) \leq \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x) \leq 2\square_0^\xi f(x)$ маємо, що границі $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{x_k \in \mathbb{X}_j} \square_0^{\xi_k} f(x_k)$ і $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{x_k \in \mathbb{X}_j} \square_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} f(x_k)$ є одночасно скінченними. Враховуючи лему 6.11 з $\Lambda_h^h f(x) = \lambda_0$ маємо, що $\square_0^\xi f(x) = |\xi|^{\lambda_0 + \alpha(x, \xi)}$, де $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(x, h) = 0$. А тому для довільного $\varepsilon > 0$ значення границь $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{x_k \in \mathbb{X}_j} |\xi_k|^{\lambda_0 + \varepsilon} = 0$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{x_k \in \mathbb{X}_j} |\xi_k|^{\lambda_0 - \varepsilon} = \infty$. Відповідно з нерівності $\xi \leq \mathbf{u} + \mathbf{v}$ маємо, що $\dim_H \mathcal{N}_f \geq \lambda_0$.

Покажемо, що $\dim_H \mathcal{N}_f \geq \lambda_0$. Побудуємо таке спеціальне покриття, щоб $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{x_k \in \mathbb{X}_j} \square_\eta^\eta f(x_0) < \infty$. Оскільки $\square_\eta^\eta f(x) = (\square_\eta^\eta x)^{\lambda_0 + \beta(\eta, x)}$, $\lim_{h \rightarrow 0} \beta(\eta, x) = 0$,

то маємо, що для довільного $\varepsilon > 0$ маємо рівності $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{x_k \in \mathbb{X}_j} \left(\square_{\eta}^{\eta} x \right)^{\lambda_0 + \varepsilon} = 0$,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{x_k \in \mathbb{X}_j} \left(\square_{\eta}^{\eta} x \right)^{\lambda_0 - \varepsilon} = \infty.$$

Очевидною є нерівність $\square_{\nu}^{\nu} x \leq \square_{\eta}^{\eta} x \leq 2\square_{\nu}^{\nu} x$. Тоді

$$\sum_{x_k \in \mathbb{X}_j} \left(\square_{\nu}^{\nu} x_k \right)^{\lambda_0 \pm \varepsilon} \leq \sum_{x_k \in \mathbb{X}_j} \left(\square_{\eta}^{\eta} x_k \right)^{\lambda_0 \pm \varepsilon} \leq 2^{\lambda_0 \pm \varepsilon} \sum_{x_k \in \mathbb{X}_j} \left(\square_{\nu}^{\nu} x_k \right)^{\lambda_0 \pm \varepsilon}.$$

При переході до границь (спрямувавши j до нескінченності) отримуємо необхідну нерівність. \square

Теорема 6.6. *Нехай для неперервної, строго монотонної, сингулярної функції $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$ існує таке λ_0 , що для майже всіх чисел з $[c, d]$ виконується рівність $\Lambda g(x) = \lambda_0$. Тоді $\dim_H \mathcal{N}_f = \frac{1}{\lambda_0}$.*

Доведення. Оскільки функція g сингулярна, а тому має майже скрізь (у розумінні міри Лебега) похідну рівну нулю, тому $\Lambda g(x) = \lambda_0 \geq 1$.

Нехай B – множина всіх тих значень аргументу з $[c, d]$ для яких $\Lambda g(x) = \lambda_0$, тоді A – множина значень, які набуває функція g на множині B . Тоді, згідно з теоремою 6.3, виконується рівність $\Lambda f(t) = \frac{1}{\lambda_0}$, $t \in A$. Зауважимо, що множина A є всюди щільною, а відповідно \mathcal{N}_f є також всюди щільною множиною ($A \subset \mathcal{N}_f$).

Покажемо, що $\dim_H A = \frac{1}{\lambda_0} = \lambda_1$.

Аналогічно доведенню леми 6.12, розглянемо послідовність покриттів $\{U_i\}_j$. Для кожного $j \in \mathbb{N}$ відрізки покриття $\{U_i\}_j$ можемо розглядати, як (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -околи $\Theta_{\mathbf{v}(h, x_k)}^{\mathbf{u}(h, x_k)} x_k$, де $x_k \in \mathbb{X}_j \subset A$, при цьому послідовність множин (\mathbb{X}_j) є монотонною, тобто $\mathbb{X}_j \subset \mathbb{X}_{j+1}$. Під записами $\mathbf{u}(h, x_k)$, $\mathbf{v}(h, x_k)$ слід розуміти, що для кожного $x_k \in \mathcal{N}_f$ існує своя пара функцій $(u, v) \in \mathcal{P}^{\oplus}$. Далі в доведенні $\mathbf{u} = \mathbf{u}(h, x_k)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(h, x_k)$.

Виконуючи покриття множини A відрізками $\{U_i\}_j$ ми одночасно виконуємо покриття множини значень функції f відрізками $\{V_i\}_j$, довжини яких відповідно дорівнюють $\square_{\nu}^{\nu} f(x_k)$, $x_k \in \mathbb{X}_j$.

Згідно з лемою 6.6, виконуються рівності $\Lambda_v^u f(x) = \Lambda f(x) = \lambda_1, \forall x \in A$. Зокрема, $\square_v^u f(x_k) = (\square_v^u x_k)^{\lambda_1 + \alpha_k}$ і $\sum_{x_k \in \mathbb{X}_j} \square_v^u f(x_k) = \sum_{x_k \in \mathbb{X}_j} (\square_v^u x_k)^{\lambda_1 + \alpha_k} < \infty$, де всі $\alpha_k \in$ нескінченно малими при $j \rightarrow \infty$. Тому для довільного $\varepsilon > 0$ виконуються рівності $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{x_k \in \mathbb{X}_j} (\square_v^u x_k)^{\lambda_1 - \varepsilon} = \infty$ і $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{x_k \in \mathbb{X}_j} (\square_v^u x_k)^{\lambda_1 + \varepsilon} = 0$.

Отже, $\dim_H A = \lambda_1$. Враховуючи те, що $A \subset \mathcal{N}_f$, то $\dim_H \mathcal{N}_f \geq \dim_H A$. З іншого боку, враховуючи всюди щільність множин A, \mathcal{N}_f , то при побудові покриття \mathcal{N}_f , використовуючи виключно елементи з множини A , отримуємо, що $\dim_H \mathcal{N}_f \leq \dim_H A$, що і треба було показати. \square

6.5. Розмірності Хаусдорфа-Безиковича носіїв побудованих функцій які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа без збереження хвостів

Побудовані функції в пункті 2.3 є неперервними сингулярними функціями. Із означення сингулярної функції маємо, що її носій має нульову міру Лебега. Використовуючи лему 6.12 та теорему 6.6 виконаємо дослідження розмірності носія функції, описаних в пункті 2.3.

Лема 6.13. *Нехай задано нескінченно малі (великі) числові послідовності $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ такі, що виконується рівності*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{\ln b_n} = \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln c_n}{\ln d_n}, \quad \gamma > 0. \quad (6.19)$$

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(a_n + c_n)}{\ln(b_n + d_n)} = \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(a_n \cdot c_n)}{\ln(b_n \cdot d_n)}. \quad (6.20)$$

Доведення. Легко перевірити виконання подвійної нерівності $(-1)^{l_n} \frac{A_n}{B_n} \leq (-1)^{l_n} \frac{A_n + C_n}{B_n + D_n} \leq (-1)^{l_n} \frac{C_n}{D_n}$, де $l_n \in \{0; 1\}$. Тоді

$$(-1)^{l_n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{\ln b_n} \leq (-1)^{l_n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n + \ln c_n}{\ln b_n + \ln d_n} \leq (-1)^{l_n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln c_n}{\ln d_n}.$$

Тим самим ми показали, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(a_n \cdot c_n)}{\ln(b_n \cdot d_n)} = \gamma$.

Покажемо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(a_n + c_n)}{\ln(b_n + d_n)} = \gamma$. З рівностей (6.19) можемо записати рівності $a_n = b_n^{\gamma + \alpha_n}$, $c_n = d_n^{\gamma + \beta_n}$, де $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$.

Нехай $\mu_n = \max\{\alpha_n, \beta_n\}$, $\eta_n = \min\{\alpha_n, \beta_n\}$, $M_n = \max\{b_n, d_n\}$, $m_n = \min\{b_n, d_n\}$.

$$\frac{\ln(b_n^{\gamma + \eta_n} + d_n^{\gamma + \eta_n})}{\ln(b_n + d_n)} \leq \frac{\ln(a_n + c_n)}{\ln(b_n + d_n)} \leq \frac{\ln(b_n^{\gamma + \mu_n} + d_n^{\gamma + \mu_n})}{\ln(b_n + d_n)}.$$

$$\frac{\ln\left(M_n^{\gamma + \eta_n} \left(1 + \left(\frac{m_n}{M_n}\right)^{\gamma + \eta_n}\right)\right)}{\ln M_n + \ln\left(1 + \frac{m_n}{M_n}\right)} \leq \frac{\ln(a_n + c_n)}{\ln(b_n + d_n)} \leq \frac{\ln\left(M_n^{\gamma + \mu_n} \left(1 + \left(\frac{m_n}{M_n}\right)^{\gamma + \mu_n}\right)\right)}{\ln M_n + \ln\left(1 + \frac{m_n}{M_n}\right)}.$$

Для завершення доведення достатньо зробити граничний перехід в останніх нерівностях, спрямувавши n до нескінченності. \square

Враховуючи побудову функції $\Upsilon(x, \phi_k)$ нескладно довести наступну лему.

Лема 6.14. *Для функції $\Upsilon(x, \phi_k)$ виконується рівність*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{[l_n, r_n]} \Upsilon(x, \phi_k)}{\ln(r_n - l_n)} = 1$$
, *де l_n і r_n відповідні кінці циліндру n -го порядку.*

Враховуючи попередню лему а також леми 6.8, 6.9 отримуємо, що для всіх $x \in (0; 1)$ виконується рівність $\Lambda \Upsilon(x, \phi_k) = 1$. Згідно з лемою 6.6 маємо, що $\Lambda_h^h \Upsilon(x, \phi_k) = 1$. Отже, згідно з лемою 6.13 $\dim_H \mathcal{N}_{\Upsilon(x, \phi_k)} = 1$.

З іншого боку, враховуючи те, що $\Upsilon(x, \phi_k)$ і $\Omega(x, \phi_k)$ є взаємно оберненими функціями, а тому згідно з теоремою 6.6 маємо, що $\dim_H \mathcal{N}_{\Omega(x, \phi_k)} = 1$.

Отже, носії сингулярних функцій $\Upsilon(x, \phi_k)$ і $\Omega(x, \phi_k)$ є супер фрактальними множинами.

6.6. Застосування Λ та Λ_h^h для дослідження диференціальних властивостей композиції сингулярної та ніде недиференційовної функцій

У цьому пункті розглянемо композицію функції Салема $S(x)$ заданої (1.2.2) та ніде не диференційовної функції $\mathfrak{K}(x)$ заданої (1.8) описаних в першому розділі.

Лема 6.15. *Для майже всіх чисел з відрізка $[0; 1]$ для функції Салема $S(x)$ виконується рівність $\Lambda S(x) = -\frac{\ln(q_0(1-q_0))}{2 \ln 2}$.*

Для обчислення правостороннього значення $\Lambda S(x_0)$ при $x_0 \in E_2$ була застосована лема 6.8, де $l_n = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{P_n}}^2(0)$, $r_n = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{P_n}}^2(1)$, $\tilde{l}_n = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{P_n}}^2(0)$, $\tilde{r}_n = r_n$, де P_n – номер позиції першої цифри n -ої пари цифр (00) в двійковому записі числа x_0 .

Для обчислення лівостороннього значення $\Lambda S(x_0)$ при $x_0 \in E_2$ була застосована лема 6.9, де $l_n = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{P_n}}^2(0)$, $r_n = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{P_n}}^2(1)$, $\tilde{l}_n = l_n$, $\tilde{r}_n = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{P_n}}^2(0)$, де P_n – номер позиції першої цифри n -ої пари цифр (11) в двійковому записі числа x_0 .

Лема 6.16. *Для всіх $x \in [0; 1]$ має місце оцінка $\frac{\ln(2g_0-1)}{-\ln 3} \geq \Lambda \mathfrak{K}(x) \geq \frac{\ln g_0}{-\ln 3}$.*

Для обчислення оцінки значення $\Lambda \mathfrak{K}(x_0)$, де $x_0 \in E_3$ використовувалась теорема 6.5 де $l_n = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{P_n}}^3(0)$, $r_n = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{P_n}}^3(2)$, де P_n – номер позиції n -ої цифри 1 в трійковому записі числа x_0 .

З урахуванням нерівності $\Lambda \mathfrak{K}(x) \geq \Lambda_h^h \mathfrak{K}(x)$, є очевидними такі твердження:

Наслідок 6.1. *Якщо $\frac{\ln g_0 \cdot \ln(q_0(1-q_0))}{2 \ln 3 \cdot \ln 2} > 1$, то функція $S(\mathfrak{K}(x))$ є сингулярною функцією необмеженої варіації.*

Наслідок 6.2. *Якщо $\frac{\ln(2g_0-1) \cdot \ln(q_0(1-q_0))}{2 \ln 3 \cdot \ln 2} < 1$, то функція $S(\mathfrak{K}(x))$ є майже скрізь є недиференційовною.*

Наслідок 6.3. Якщо $S(\mathfrak{K}(x))$ – сингулярна функція необмеженої варіації, то $q_0 \in \left(0; \frac{3-\sqrt{5}}{6}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{6}; 1\right)$.

За допомогою геометричних ймовірностей можна показати, що при довільному виборі параметрів p і q з одиничного інтервалу з ймовірністю $\approx 43.98\%$ отримаємо сингулярну функцію (при цьому $\approx 2.49\%$ – це сингулярні функції необмеженої варіації), $\approx 28\%$ – майже скрізь недиференційовні, і стільки ж відсотків потребують додаткового дослідження.

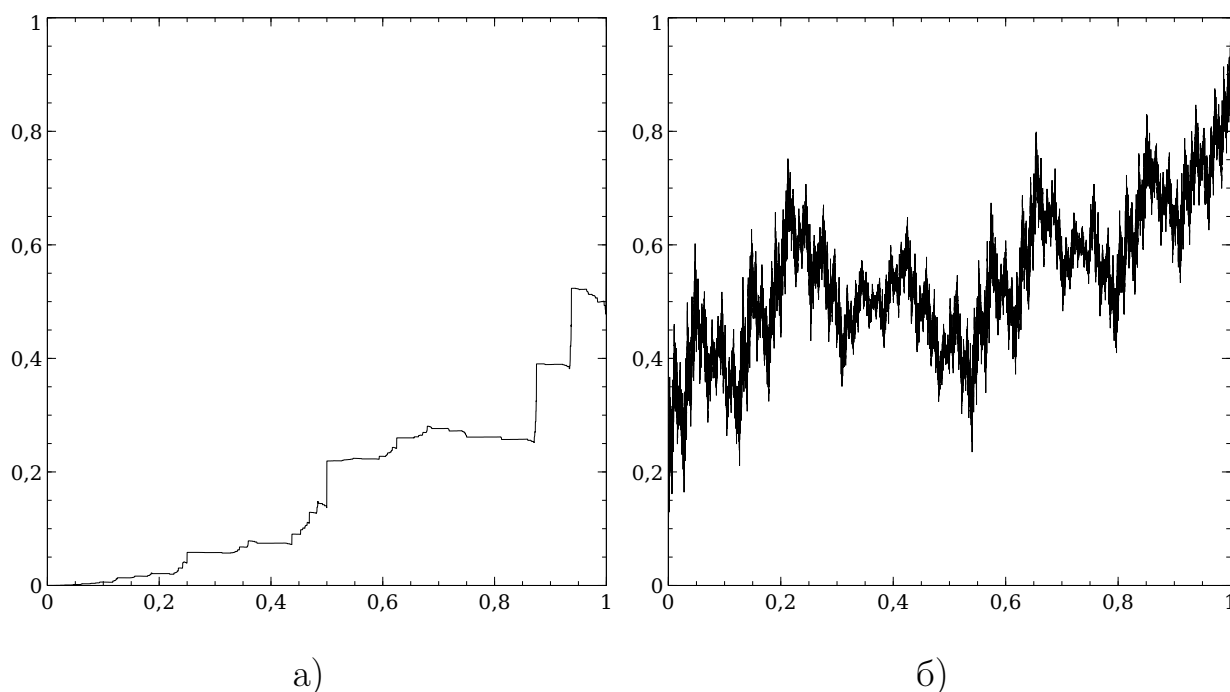


Рис. 6.1. Графіки функцій необмежених варіацій: а) сингулярна ніде не монотонна функція $S(\mathfrak{K}(x))$ при $q_0 = \frac{1}{10}$, $g_0 = \frac{53}{100}$; б) майже скрізь недиференційовна функція $S(\mathfrak{K}(x))$ при $q_0 = \frac{3}{5}$, $g_0 = \frac{4}{5}$.

6.7. Висновки до розділу

У цьому розділі відображаються такі результати:

- побудовано аналог логарифмічної (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідну та вивчено його властивості;

- встановлено зв'язок аналога логарифмічної (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідної з логарифмічної (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідною та класичною;
- встановлено зв'язок розмірності Хаусдорфа-Безиковича носія монотонної функції f і операторів $\Lambda_h^h f$ та $\Lambda_0^h f$ за допомогою леми 6.12 і теореми 6.6;
- показано суперфрактальність носіїв функцій які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа без збереження хвостів, побудованих у пункті 2.3;
- знайдено достатні умови сингулярності та ніде не диференційовності одного класу функцій, кожна з яких є композицією ніде не диференційовної та сингулярної функцій.

Таким чином дослідження потрібно продовжувати далі. Можливо надалі ми зможемо знайти більш зручний апарат для вивчення сингулярності, ніде не монотонності функцій, а також обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича множин, які пов'язані з ними.

РОЗДІЛ 7

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ ДОДАТНИХ РЯДІВ

7.1. Збіжність числових рядів з додатними членами

Лема 7.1. *Нехай дано додатний числовий ряд:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \quad (7.1)$$

Якщо існує послідовність строго спадних функцій $g_n(x)$ така, що існує

$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(u_n) = \mu$, а також існує таке $\varepsilon_0 > 0$, що

— ряд $\sum_{n=a}^{\infty} f_n(\mu - \varepsilon_0)$ збіжний, тоді ряд (7.1) збіжний.

— ряд $\sum_{n=a}^{\infty} f_n(\mu + \varepsilon_0)$ розбіжний, тоді ряд (7.1) розбіжний.

Де $f_n(x)$ — обернені до $g_n(x)$.

Доведення. Добре відомо, що збіжність ряду не зміниться, якщо відкинути скінченну кількість перших членів ряду. Згідно з означенням границі та умовою леми, для $\varepsilon_0 > 0$ існує номер $n'_0 = n_0(\varepsilon_0)$ такий, що довільного натурального $n > n'_0$ виконується нерівність: $|g_n(u_n) - \mu| < \varepsilon_0$. Виконаємо тотожні перетворення:

$$-\varepsilon_0 < g_n(u_n) - \mu < \varepsilon_0 \Rightarrow \mu - \varepsilon_0 < g_n(u_n) < \mu + \varepsilon_0.$$

Якщо ряд $\sum_{n=a}^{\infty} f_n(\mu - \varepsilon_0)$ є збіжним, то покажемо збіжність ряду (7.1) використавши нерівність $\mu - \varepsilon_0 < g_n(u_n)$:

$$f_n(g_n(u_n)) < f_n(\mu - \varepsilon_0) \Rightarrow u_n < f_n(\mu - \varepsilon_0) \Rightarrow$$

$$\sum_{n=n_0(\varepsilon_0)}^{\infty} u_n < \sum_{n=n_0(\varepsilon_0)}^{\infty} f_n(\mu - \varepsilon_0),$$

Отже, згідно з ознакою порівняння, маємо збіжність ряду (7.1).

Якщо ряд $\sum_{n=a}^{\infty} f_n(\mu + \varepsilon_0)$ є розбіжним, то, для того щоб показати розбіжність ряду (7.1), достатньо використати нерівність $g_n(u_n) < \mu + \varepsilon_0$ та виконати аналогічні дії, як у попередньому випадку. \square

Лема 7.2. *Нехай дано додатний числовий ряд:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \quad (7.2)$$

Якщо існує послідовність строго зростаючих функцій $g_n(x)$ така, що існує $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(u_n) = \mu$, а також існує таке $\varepsilon_0 > 0$, що

— ряд $\sum_{n=a}^{\infty} f_n(\mu + \varepsilon_0)$ збіжний, тоді ряд (7.2) збіжний.

— ряд $\sum_{n=a}^{\infty} f_n(\mu - \varepsilon_0)$ розбіжний, тоді ряд (7.2) розбіжний.

Де $f_n(x)$ – обернені до $g_n(x)$.

Доведення аналогічне до доведення леми 7.1.

Лема 7.3. *Нехай дано додатний числовий ряд $\sum_{n=a}^{\infty} u_n$, якщо існує послідовність строго монотонних функцій $g_n(x)$ така, що існує $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(u_n) = \mu$, а також існує таке $\varepsilon_0 > 0$, що ряди $\sum_{n=a}^{\infty} f_n(\mu - \varepsilon_0)$ і $\sum_{n=a}^{\infty} f_n(\mu + \varepsilon_0)$ є збіжними, тоді ряд $\sum_{n=a}^{\infty} u_n$ буде збіжним, де $f_n(x)$ – обернені функції до $g_n(x)$.*

Доведення леми 7.3 базується на ідеї доведення леми 7.1.

Приклади відомих ознак, які утворюються на основі лем, якщо замість $f_n(x)$ взяти конкретну функціональну послідовність:

Розглянемо застосування вище описаного для формування ознак збіжності додатних числових рядів. Для того, щоб розрізняти різні функціональні послідовності, ми будемо використовувати додатковий верхній індекс.

Наприклад, для побудови ознаки збіжності оберемо $f_n^1(x) = n^x$ – послідовність функцій, тоді обернена до неї буде $g_n^1(x) = \frac{\ln x}{\ln n}$. Використовуючи

Таблиця 7.1

Приклади генерації відомих ознак

$f_n(x)$	$g_n(x)$	Назва ознаки (в граничній формі)
x^n	$\sqrt[n]{x}$	Ознака Коші
n^x	$\frac{\ln x}{\ln n}$	Логарифмічна ознака
$\left(1 - \frac{x \ln n}{n}\right)^n$	$\frac{n}{\ln n} (1 - \sqrt[n]{x})$	Ознака ЖКаме

інтегральну ознаку збіжності легко встановити, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^1(x)$ буде збіжним при $x \in (-\infty; -1)$ і розбіжним при $x \in [-1; +\infty)$.

Покажемо, що ознака на основі $g_n^1(x)$ є більш чутливою, ніж ознака Коші в граничному випадку. Припустимо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = q \neq 1$ і виконаємо перетворення:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n^1(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln u_n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(\sqrt[n]{u_n})}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln q}{\ln n} = \pm \infty.$$

В таблиці 7.2 наведено приклади функціональних послідовностей, на основі яких можна побудувати ознаки збіжності додатних рядів, при чому при $x \in (-\infty; -1)$ всі ряди $\sum_{n=[e \uparrow \uparrow j]+1}^{\infty} f_n^j(x)$, $j \in \mathbb{N}$ є збіжними, а при $x \in (-1; +\infty)$ – розбіжними (впливає з інтегральної ознаки збіжності додатних числових рядів), де $[e \uparrow \uparrow j]$ це ціла частина від $e \uparrow \uparrow j$, а $e \uparrow \uparrow 1 = e$, $e \uparrow \uparrow 2 = e^e$, $e \uparrow \uparrow 3 = e^{e^e}$, ..., також в таблиці фігурують функції $\mathcal{L}_k(x) = \underbrace{\ln \ln \dots \ln x}_k = \ln \mathcal{L}_{k-1}(x)$, $\mathcal{L}_0(x) = x$ і $L_j(x) = \prod_{k=0}^{j-1} \mathcal{L}_k(x) = L_{j-1}(x) \cdot \mathcal{L}_{j-1}(x)$, $L_0(x) = 1$.

7.1.1. Чутливість ознак збіжності на основі $g_n^j(x)$. Покажемо, що чутливість ознак на основі функцій $g_n^j(x)$ покращується при зростанні індексу j . Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n^j(u_n) = \mu \neq -1$, тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n^{j+1}(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(u_n L_j(n))}{\mathcal{L}_{j+1}(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(u_n L_{j-1}(n) \mathcal{L}_{j-1}(n))}{\mathcal{L}_{j+1}(n)} =$$

Таблиця 7.2

Приклади функцій для генерації ознак збіжності

j	$f_n^j(x)$	$g_n^j(x)$
1	n^x	$\frac{\ln x}{\ln n}$
2	$\frac{\ln^x n}{n}$	$\frac{\ln(xn)}{\ln \ln n}$
3	$\frac{(\ln \ln n)^x}{n \ln n}$	$\frac{\ln(xn \ln n)}{\ln \ln \ln n}$
...
k	$\frac{(\mathcal{L}_{k-1}(n))^x}{L_{k-1}(n)}$	$\frac{\ln(\tau L_{k-1}(n))}{\mathcal{L}_k(n)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}_j(n) \cdot \left(\frac{\ln(u_n L_{j-1}(n))}{\mathcal{L}_j(n)} + 1 \right)}{\mathcal{L}_{j+1}(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}_j(n) \cdot (\mu + 1)}{\mathcal{L}_{j+1}(n)} = \pm \infty,$$

Оскільки зі зростанням індексу j кожна наступна ознака збіжності на основі $g_n^j(x)$ є більш чутливою, то при дослідженні додатного ряду на збіжність ми можемо починати з ознаки на основі $g_n^1(x)$, а далі, за необхідності, збільшувати індекс функціональної послідовності, на основі якої можна побудувати ознаки збіжності рядів.

7.2. Додаткові твердження для встановлення збіжності додатних рядів

Теорема 7.1. Нехай дано додатний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, існує функціональний ряд $\sum_{n=a}^{\infty} f_n(x)$, де $f_n(x)$ – строго зростаюча функція, для всіх $n \in \mathbb{N}$, D є областю збіжності.

Нехай (n_k) і (h_k) – дві послідовності натуральних чисел, причому об'єднання множин $\{n_k | k \in \mathbb{N}\}$ і $\{h_k | k \in \mathbb{N}\}$ є множиною натуральних чисел, а їх перетин є пустою множиною, при цьому послідовності (n_k) і (h_k) задовольняють умови:

1. Якщо $\sup D \in D$, тоді $g_{n_k}(u_{n_k}) \in D$ і $g_{h_k}(u_{h_k}) \notin D$.
2. Якщо $\sup D \notin D$, тоді $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(u_{n_k}) \in D \ni \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(u_{n_k})$.

Де $g_n(x)$ – обернена функція до $f_n(x)$.

Тоді ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{k=1}^{\infty} u_{h_k}$ збігаються або розбігаються одночасно.

Доведення. Оскільки члени додатних числових рядів ми можемо переставляти довільним чином під час підсумовування, то очевидна рівність:

$$\sum_{n=a}^{\infty} u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k} + \sum_{k=1}^{\infty} u_{h_k}. \quad (7.3)$$

Для того, щоб показати, що ряди $\sum_{n=a}^{\infty} u_n$ і $\sum_{k=1}^{\infty} u_{h_k}$ збігаються або розбігаються одночасно, достатньо показати збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k}$.

Побудуємо додаткову числову послідовність (v_n) таку, щоб $v_{n_k} = u_{n_k}$ і $v_{h_k} = 0$, тоді справедлива рівність $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Розглянемо перший випадок, коли $\sup D \in D$ і $g_n(u_{n_k}) \in D$, всі члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ задовольняють умові $g_n(v_n) \in D$, тоді:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(g_n(v_n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\sup D). \quad (7.4)$$

Отже, згідно ознаки порівняння ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k}$ – збіжний.

Розглянемо другий випадок, коли $\sup D \notin D$ і $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(u_{n_k}) = \mu_1 \in D \ni \ni \mu_2 = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(u_{n_k})$. Тоді існує таке додатне $\varepsilon_0 > 0$, що $(\mu_1 + \varepsilon_0) \in D$ і виконується нерівність:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}(g_{n_k}(u_{n_k})) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\mu_1 + \varepsilon_0). \quad (7.5)$$

Отже, і в цьому випадку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k}$ – збіжний. □

Зауважимо, що для строго спадних функцій $f_n(x)$ в теоремі 7.1 достатньо $\sup D$ замінити на $\inf D$, щоб отримати справедливе твердження.

Для наслідків 7.1 - 7.3: якщо функції $g_n(x)$ є строго спадними, тоді $d = \inf D_1$; якщо ж $g_n(x)$ є строго зростаючими, тоді $d = \sup D_1$, де D_1

і D_2 – відповідно області збіжності і розбіжності ряду $\sum_{n=a}^{\infty} f_n(x)$ і $f_n(x)$ – функції обернені до $g_n(x)$.

Наслідок 7.1. Якщо $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} g_n(u_n) \in D_1 \setminus \{d\} \ni \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} g_n(u_n)$, тоді ряд $\sum_{n=a}^{\infty} u_n$ – збіжний.

Наслідок 7.2. Якщо $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} g_n(u_n) \in D_2 \setminus \{d\} \ni \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} g_n(u_n)$, тоді ряд $\sum_{n=a}^{\infty} u_n$ – розбіжний.

Наслідок 7.3. Якщо $d \in D_2$ і починаючи з деякого номера n_0 виконується умова: $g_n(u_n) \in D_2$, тоді ряд $\sum_{n=a}^{\infty} u_n$ – розбіжний.

Наслідок 7.4. Якщо існує така підпоследовність чисел (η_k) , що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{\eta_k}$ – розбіжний, тоді ряд $\sum_{n=a}^{\infty} u_n$ також буде розбіжним.

Доведення. Оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{\eta_k}$ є підрядом ряду $\sum_{n=a}^{\infty} u_n$, то справедлива нерівність: $\sum_{n=a}^{\infty} u_n \geq \sum_{k=1}^{\infty} u_{\eta_k}$, а тому згідно з ознакою порівняння ми отримуємо, що ряд $\sum_{n=a}^{\infty} u_n$ є розбіжним.

7.3. Одночасна збіжність-розбіжність додатних числових рядів

Поняття частоти цифри легко розширюється на поняття частоти елемента послідовності.

Нехай задано послідовність (τ_n) , утворимо підпоследовність (τ_{n_k}) на основі бінарної послідовності (θ_n) , де (n_k) – зростаюча послідовність, $\theta_n = 1$, якщо τ_n обрано елементом підпоследовності (τ_{n_k}) і $\theta_n = 0$ в іншому випадку; тоді під фразою ”нижня частота підпоследовності (τ_{n_k}) послідовності (τ_n) ” будемо розуміти нижню частоту числа 1 в послідовності (θ_n) і позначати $\nu(\tau_{n_k})$.

Означення 7.1. Якщо існує границя $\overline{\mathcal{A}}\varphi_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n}{n}$, то її значення

називається *верхньою асимптотою* числової послідовності (φ_n) . Аналогічним чином означається поняття *нижньої асимптоти* числової послідовності, як $\underline{A}\varphi_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n}{n}$.

Лема 7.4. *Нехай функція $u(x) \geq 0$ є неперервною, строго спадною при $x \geq 0$, $u(0) \neq 0$, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u(n)$ – розбіжний. Тоді для довільної послідовності (φ_n) , де $\mathbb{R} \ni \varphi_n \geq 0$, і $\overline{A}\varphi_n < \infty$, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u(\varphi_n)$ розбігається.*

Доведення. Спочатку покажемо, що для довільного невід’ємного дійсного числа x ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u(xn)$ розбігається. Із того, що функція $u(x)$ є строго спадною і невід’ємною, тоді розбіжність ряду при $x = 0$ стає очевидною, адже $u(0) \neq 0$.

Нехай, $x \in \mathbb{N}$. Покажемо розбіжність ряду $\sum_{n=0}^{\infty} u(xn)$:

$$\begin{aligned} \infty < \sum_{n=0}^{\infty} u(n) &= \left(\sum_{k=0}^{x-1} u(k) \right) + \left(\sum_{k=x}^{2x-1} u(k) \right) + \left(\sum_{k=2x}^{3x-1} u(k) \right) + \dots \leq \\ &\leq x(u(x \cdot 0) + u(x \cdot 1) + u(x \cdot 2) + \dots) = x \sum_{n=0}^{\infty} u(xn). \end{aligned}$$

Нехай $\mathbb{R} \ni x \geq 0$, тоді для цілої частини від цього числа x має місце нерівність: $u([x]n) \geq u(xn) > u(([x] + 1)n)$, а тому, згідно ознаки порівняння, і отримуємо, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u(xn)$ – розбіжний.

Легко показати, що функція $f_n(x) = u(xn)$ – є монотонною, тоді $g_n(x) = \frac{v(x)}{n}$ – відповідно обернена, де $v(x)$ – обернена до $u(x)$. На основі наслідку 7.2 маємо: якщо $0 \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{v(a_n)}{n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{v(a_n)}{n} < \infty$, тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається. Застосуємо утворену ознаку до ряду $\sum_{k=1}^{\infty} u(\varphi_n)$:

$$\infty > \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{v(u(\varphi_n))}{n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n}{n} = \overline{A}\varphi_n.$$

Отже, якщо $\sum_{n=1}^{\infty} u(n)$ розбіжний, тоді ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u(n_k)$ – розбіжний. \square

Наслідок 7.5. Для довільної строго спадної неперервної функції $u(x)$, при $x \geq 0$ і натурального ξ справедлива нерівність:

$$\xi \sum_{n=0}^{\infty} u(\xi(n+1) - 1) \leq \sum_{n=0}^{\infty} u(n) \leq \xi \sum_{n=0}^{\infty} u(\xi n). \quad (7.6)$$

Теорема 7.2. Нехай дано послідовність дійсних чисел (φ_n) , така, що $0 < \underline{A}\varphi_n \leq \overline{A}\varphi_n < \infty$, тоді для довільної строго спадної неперервної функції $u(x)$ при $x \geq 0$, ряди $\sum_{k=1}^{\infty} u(k)$ і $\sum_{k=1}^{\infty} u(\varphi_k)$ збігаються (розбігаються) одночасно.

Доведення. Спочатку покажемо одночасну розбіжність рядів.

Якщо $\sum_{k=1}^{\infty} u(k)$ – розбіжний, то згідно з лемою 7.4 і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u(\varphi_k)$ – також розбіжний.

Нехай ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u(\varphi_k)$ – розбіжний. Враховуючи, що $0 < \underline{A}\varphi_n \leq \overline{A}\varphi_n < \infty$ не складно показати, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 , що для всіх натуральних $n \geq n_0$ виконується нерівність:

$$n\underline{A}\varphi_n - \varepsilon \leq \varphi_n \leq n\overline{A}\varphi_n + \varepsilon.$$

Для скорочення запису виконаємо заміну: $\underline{A}\varphi_n = a > 0$, а раз так, то існують взаємно прості натуральні числа p, q такі, що $\frac{p}{q} \leq a$. Далі виконаємо тотожні перетворення на основі ідеї доведення першої частини леми 7.4 та її наслідку.

$$\begin{aligned} \sum_{n=q}^{\infty} u(\varphi_n) &\leq \sum_{n=q}^{\infty} u(an - \varepsilon) \leq \sum_{n=q}^{\infty} u([an - \varepsilon]) \leq \sum_{n=q}^{\infty} u\left[\left[n\frac{p}{q} - \varepsilon\right]\right] = \\ &= \left(\sum_{n=q}^{2q-1} u\left[\left[n\frac{p}{q} - \varepsilon\right]\right]\right) + \left(\sum_{n=2q}^{3q-1} u\left[\left[n\frac{p}{q} - \varepsilon\right]\right]\right) + \dots \leq \\ &\leq q \sum_{k=1}^{\infty} u\left[\left[pk - \varepsilon\right]\right] \leq q \sum_{k=1}^{\infty} u(pk - 1) \leq \frac{q}{p} \sum_{k=0}^{\infty} u(k), \end{aligned}$$

де $[x]$ – ціла частина від числа x , а $\varphi[t] = \varphi([t])$.

Збіжність доводиться методом від супротивного. □

Наслідок 7.6. *Нехай дано строго зростаюча підпоследовність (n_k) послідовності натуральних чисел, така, що $\underline{\nu}(n_k) > 0$, тоді для довільної строго спадної функції $u(x)$, при $x \geq 0$, ряди $\sum_{k=1}^{\infty} u(k)$ і $\sum_{k=1}^{\infty} u(n_k)$ збігаються (розбігаються) одночасно.*

Для доведення наслідку 7.6 достатньо відмітити, що для заданої послідовності (n_k) справедлива рівність: $\overline{\mathcal{A}}n_k = \left(\underline{\nu}(n_k)\right)^{-1}$.

Використовуючи наслідок 7.6 можна частково дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\xi+\cos n}$ при $\xi \in [-2; 0]$. Для цього розглянемо нерівність:

$$n^{\xi+\cos n} \geq n^{-1} \Rightarrow \cos n \geq -1 - \xi.$$

Розв'язком нерівності $\cos x \geq a \in [-\arccos a + 2\pi n; \arccos a + 2\pi n]$ довжина якого складає $l = 2 \arccos a$, тоді, якщо $l \geq 1$, тобто при $a \leq \cos 0.5$, хоча б одне ціле число буде міститися у кожному з відрізків розв'язку нерівності, тоді ми можемо оцінити нижню частоту n_k всіх цілих розв'язків нерівності $\cos x \geq a$: $\underline{\nu}(n_k) \geq (2\pi)^{-1} > 0$, а отже ряд $\sum_{k=0}^{\infty} n_k^{-1}$ буде розбіжним. Оскільки $\cos 0.5 \geq a = -1 - \xi$ тоді маємо, що при $\xi \geq -1 - \cos 0.5$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\xi+\cos n}$ є також розбіжним.

7.4. Узагальнений ряд Флінт Гілла та міра ірраціональності числа π

В роботі [3] наведено приклад рядів, збіжність яких не встановлена. Спробуємо їх дослідити. Нехай дано узагальнений ряд Флінт Гілла (Flint Hills series):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-u} |\sin n|^{-v}, \quad u > 0, \quad v > 0. \quad (7.7)$$

Узагальнений ряд Флінт Гілла пов'язаний із питанням існування міри ірраціональності числа π , це число позначають $\mu(\pi)$ і $\mu(\pi) \geq 2$. Згідно з

означенням міри ірраціональності числа α [11] має виконуватись нерівність:

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| > q^{-\mu(\alpha) - \varepsilon}, \quad (7.8)$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$ і всіх достатньо великих цілих p і q .

Лема 7.5. *Справедлива рівність:*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{-v \ln |\sin n|}{\ln n} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{-v \ln |\sin P_k|}{\ln P_k}, \quad (7.9)$$

де $v > 0$, а P_k – це чисельник k -го підхідного дроби до числа π .

Доведення. Оскільки послідовність P_k є чисельниками найкращих наближень до числа π , тоді нескладно довести нерівність $|\sin n| \geq |\sin P_k|$, де $P_{k-1} < n \leq P_k$.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{-v \ln |\sin n|}{\ln n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{-v \ln |\sin P_k|}{\ln n} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{-v \ln |\sin P_k|}{\ln P_k}.$$

З іншого боку верхня границя завжди не менша за верхню границю по довільній підпослідовності, тобто

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{-v \ln |\sin n|}{\ln n} \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{-v \ln |\sin P_k|}{\ln P_k}.$$

Отже виконується рівність (7.9). □

Теорема 7.3. *Узагальнений ряд Флінт Гілла при $v \geq u$, а також при $0 < u \leq 1$ – розбіжний, та збіжний при $v < u - 1$.*

Доведення. Розглянемо послідовність підхідних дроби $\frac{P_k}{Q_k}$ до числа π , та виконаємо ряд перетворень над оцінкою точності наближення:

$$\left| \frac{P_k}{Q_k} - \pi \right| < \frac{1}{Q_k Q_{k+1}} \Rightarrow |P_k - \pi Q_k| < \frac{1}{Q_{k+1}} < \frac{1}{Q_k}. \quad (7.10)$$

Враховуючи і те, що $|\sin P_k| = |\sin (P_k - \pi Q_k)|$, і $|\sin x| < |x|$, отримуємо нерівність:

$$|\sin P_k| \leq \frac{1}{Q_{k+1}}, \quad (7.11)$$

перейшовши до границі, спрямувавши k до нескінченності ми встановили існування підпослідовності натуральних чисел, синус яких прямує до нуля.

Використаємо наслідки 7.4 і 7.2, взявши за підпослідовність (P_k) – послідовність чисельників підхідних дробів до числа π і за основу функцію $g_k^1(x)$.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln (P_k^{-u} |\sin P_k|^{-v})}{\ln k} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{P_k^{-u}}{Q_k^{-v}}}{\ln k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\left(\frac{Q_k}{P_k} \right)^u \cdot Q_k^{v-u} \right)}{\ln k} =$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\pi^{-u} \cdot Q_k^{v-u} \right)}{\ln k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln Q_k^{v-u}}{\ln k} \geq 0,$$

якщо $v \geq u$ то підряд розбіжний, а тому узагальнений ряд Фінт Гілла розбіжний при $v \geq u$.

Побудуємо підряд, який задовольняє наслідок 7.3:

$$\frac{\ln (n^{-u} |\sin n|^v)}{\ln n} \geq -1 \Rightarrow |\sin n|^{-v} \geq n^{u-1} \Rightarrow |\sin n| \leq n^{-\frac{u-1}{v}}.$$

Отже, при $0 < u \leq 1$ остання нерівність виконується, а тому в цьому випадку узагальнений ряд Флінт Гілла є розбіжним.

Враховуючи наслідок з означення міри ірраціональності числа, для нашої підпослідовності натуральних чисел отримаємо:

$$\left| \frac{P_k}{Q_k} - \pi \right| > Q_k^{-\mu(\pi)-\varepsilon} \Rightarrow |P_k - \pi Q_k| > Q_k^{1-\mu(\pi)-\varepsilon}. \quad (7.12)$$

Використаємо наслідок 7.1.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln (n^{-u} |\sin n|^{-v})}{\ln n} = -u + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-v \ln |\sin P_k|}{\ln P_k} =$$

$$= -u + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-v \ln |\sin (P_k - \pi Q_k)|}{\ln P_k} \leq -u + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-v \ln Q_k^{1-\mu(\pi)-\varepsilon}}{\ln P_k} =$$

$$= -u + (\mu(\pi) + \varepsilon - 1)v \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln Q_k}{\ln P_k} = -u + (\mu(\pi) + \varepsilon - 1)v < -1.$$

Виконаємо тотожні перетворення над останньою нерівністю:

$$(\mu(\pi) + \varepsilon - 1)v < u - 1 \Rightarrow u - 1 > (\mu(\pi) + \varepsilon - 1)v \geq (2 + \varepsilon - 1)v \geq v.$$

Отже, при $v < u - 1$ узагальнений ряд Флінт Гілла є збіжним. \square

Лема 7.6. *Якщо справедливий наслідок теореми 2 в [3], то міра ірраціональності числа π рівна 2.*

Доведення. Нехай виконується умова $v < u - 1$, тоді ми можемо записати рівність $v + \delta = u - 1$, де $\delta > 0$. Згідно з теоремою 2 в роботі [3], а також враховуючи необхідну умову збіжності рядів, отримуємо, що

$$\mu(\pi) \leq 1 + \frac{u}{v} = 1 + \frac{v + \delta + 1}{v} = 2 + \frac{\delta + 1}{v}.$$

Оскільки параметри v та δ можна підібрати таким чином, щоб дріб $\frac{\delta+1}{v}$ був як завгодно малим, то очевидно, що буде справедлива нерівність $\mu(\pi) \leq 2$, а оскільки $\mu(\pi) \geq 2$, то $\mu(\pi) = 2$. \square

Застосуємо теорему 7.3 для визначення збіжності ряду $a(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\xi - |\sin n|}$ при $\xi \in [-1; 0)$. Знайдемо умови виконання нерівності для всіх $n \in \mathbb{N}$:

$$n^{\xi - |\sin n|} \geq n^{-u} |\sin n|^{-v} \Rightarrow |\sin n| \leq n^{\frac{-u - \xi + |\sin n|}{v}} \Rightarrow u \leq -\xi + |\sin n|.$$

Довільне $u \in (0; \xi]$ задовольняє нерівність $u < -\xi + |\sin n|$, а тому $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\zeta - |\sin n|} \geq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-u} |\sin n|^{-v} > \infty$. Отже, ряд $a(\xi)$ збіжний при $\xi < -1$ і розбіжний при $\xi \geq -1$.

7.5. Ознаки абсолютної збіжності невластних інтегралів

Нехай функція $f(x, t)$ визначена при $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ та набуває значень з множини $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}$, тобто $f : \mathbb{X} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}$.

Означення 7.2. Функцію $f(x, t)$ називають строго монотонною по другій змінній t , якщо для довільного $x \in \mathbb{X}$ та довільних $\mathbb{T} \ni t_1 > t_2 \in \mathbb{T}$ справедлива нерівність: $(-1)^\theta f(x, t_1) > (-1)^\theta f(x, t_2)$, де $\theta = 0$ або $\theta = 1$ в залежності від зростання(спадання) функції відповідно і незалежно від значень x, t .

Означення 7.3. Функцію $g(x, \tau)$, $\tau \in \mathbb{E}$, називають оберненою по другій змінній до функції $f(x, t)$, якщо $g : \mathbb{X} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{T}$ і $g(x, f(x, t)) = t$.

Властивості функції оберненої по другій змінній до строго монотонної $f(x, t)$:

1. $g(x, \tau)$ є **строго монотонною по τ** . Це випливає з того, що при кожному фіксованому значенні x_0 ми отримуємо, що $f(x_0, t)$ є строго монотонною функцією, а оскільки $g(x_0, \tau)$ – обернена до неї, то вона також буде монотонною.
2. $g(x, \tau_1) = g(x, \tau_2) \Leftrightarrow \tau_1 = \tau_2$. Є наслідком строгої монотонності по τ функції $g(x, \tau)$.
3. **Справедлива рівність:** $f(x, g(x, \tau)) = \tau$.

Доведення. Доведемо рівність від супротивного. Нехай рівність не виконується, тоді в силу строгої монотонності по τ ми можемо записати наступне:

$$g\left(x, f\left(x, g(x, \tau)\right)\right) \neq g(x, \tau). \quad (7.13)$$

Згідно означення оберненої функції по другому параметру, маємо, що

$$g(x, f(x, t)) = t \Rightarrow g\left(x, f\left(x, g(x, \tau)\right)\right) = g(x, \tau), \quad (7.14)$$

що суперечить (7.13), отже припущення, що рівність не виконується є помилковим. \square

Щоб знайти обернену функцію по t до функції $f(x, t)$ записуємо рівняння $\tau = f(x, t)$, над обома частинами рівності одночасно виконуємо тотожні

перетворення так, щоб у правій частині рівності було просто t , тоді зліва утвориться вираз, який задає функцію $g(x, \tau)$.

Надалі ми вважатимемо, що існує таке дійсне число x_0 , що для будь-якого $x > x_0$ та довільного $t \in \mathbb{T}$ виконується нерівність $f(x, t) > 0$ і $g(x, \tau)$ – обернена по другій змінній до $f(x, t)$

7.5.1. Ознаки абсолютної збіжності невластних інтегралів першого роду. У подальшому ми будемо розглядати невластні інтеграли першого роду від невід’ємних функцій. Розглянемо невластний інтеграл:

$$\mathcal{I} = \int_{a \in \mathbb{R}}^{\infty} u(x) dx, \quad u(x) \geq 0. \quad (7.15)$$

Як з’ясувалось, ідея використання строго монотонних та обернених по другій змінній функцій може бути застосована і до випадку встановлення збіжності невластного інтеграла \mathcal{I} .

Лема 7.7. *Нехай невластний інтеграл*

$$S(t) = \int_{a \in \mathbb{R}}^{\infty} f(x, t) \quad (7.16)$$

є абсолютно збіжним (розбіжним) при $t \in D \subset \mathbb{T}$. Дано невластний інтеграл \mathcal{I} такий, що $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x, |u(x)|) = \mu \in D$. Якщо існує таке $\varepsilon_0 > 0$, що $(\mu - \varepsilon_0)$ і $(\mu + \varepsilon_0) \in D$, тоді інтеграл \mathcal{I} буде збіжним (розбіжним).

Теорема 7.4. *Нехай інтеграл $S(t)$ збіжний при $t \in D_1$ і розбігається при $t \in D_2$. Позначимо $\mu_1 = \underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} g(x, u(x))$ і $\mu_2 = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} g(x, u(x))$.*

Тоді якщо відрізок $[\mu_1; \mu_2] = D_3 \subset D_1$, то інтеграл \mathcal{I} – збігається.

Якщо $D_3 \cap D_2 \neq \emptyset$ та існує така неспадна послідовність дійсних чисел (x_j) , що виконується нерівність

$$\int_{x_{2j}}^{x_{2j+1}} (u(x) - f(x, \alpha_j)) dx \geq 0, \quad \alpha_j \in D_3 \cap D_2$$

i ряд

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \int_{x_{2j}}^{x_{2j+1}} f(x, \alpha_j) dx,$$

є розбіжним, то інтеграл \mathcal{I} – розбігається.

7.6. Висновки до розділу

Не зважаючи на те, що сьомий розділ містить результати, які є адаптацією ідеї використання прямого та оберненого відображення – вдалось отримати нові ознаки збіжності додатних рядів та ще одну умову одночасної збіжності/розбіжності додатних рядів. Знайдено достатні умови збіжності/розбіжності узагальненого ряду Флінг Гілла (Flint Hills), який тісно пов'язаний з мірою ірраціональності числа π . Як наслідок, було встановлено, що міра ірраціональності числа π рівна двом.

Аналогічні ознаки вдалось утворити для встановлення абсолютної збіжності невластних інтегралів першого типу.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Дослідження функцій за складною локальною будовою є доволі складною задачею, яка часто потребує використання способів, що спеціально утворені для конкретного випадку. Сингулярні ніде не монотонні функції є рідкістю в наукових публікаціях, як було зазначено раніше, нам вдалось знайти лише декілька публікацій, де про них згадувалось. Основні результати дисертаційного дослідження:

- знайдено еквівалентне означення частоти цифр Q_s -зображення числа;
- знайдено нормальну властивість \tilde{Q} -зображення числа у термінах частот;
- конструктивно описано зліченну некомутативну групу неперервних перетворень відрізка $[0; 1]$ які зберігають хвости Q_s -зображення чисел;
- побудовано континуальний клас неперервних сингулярних функцій, які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа без збереження хвостів;
- запропоновано конструкцію (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідну, що є узагальненням класичної і циліндричної похідних;
- вивчено властивості (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідної і зв'язки її зі класичною й циліндричною похідними;
- знайдено узагальнення правила Лопіталя для розкриття невизначеностей у теорії границь;
- запропоновано конструкцію аналога (\mathbf{u}, \mathbf{v}) -похідної, вивчено його властивості;
- знайдено достатні умови ніде не монотонності й сингулярності кла-

- су функцій, що є узагальненням неперервних ніде не монотонних функцій Працьовитого;
- показано ніде не диференційовність аналогу Трибін-функції, означеної в термінах ланцюгових A_2 -дробів і негатрійкового зображення;
 - запропоновано конструкцію логарифмічної (u, v) -похідної й вивчено її властивості;
 - встановлено зв'язок логарифмічної (u, v) -похідної зі класичною;
 - побудовано \mathfrak{L} -дотичні для формування розкладів деяких функцій у степеневі ряди з дійсними показниками;
 - описано два алгоритми для розкладу розв'язків звичайного диференціального рівняння в ланцюговий дріб;
 - побудовано аналог логарифмічної (u, v) -похідної й вивчено його властивості;
 - встановлено зв'язки аналога логарифмічної (u, v) -похідної з логарифмічною (u, v) -похідною і класичною похідною;
 - встановлено зв'язок розмірності Гаусдорфа-Безиковича носія монотонної функції f і операторів $\Lambda_h^h f$ і $\Lambda_0^h f$;
 - доведено суперфракทัลність носіїв функцій, які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа без збереження хвостів;
 - знайдено достатні умови сингулярності й ніде не диференційовності композиції ніде не диференційовної та сингулярної функцій;
 - знайдено нові ознаки збіжності/розбіжності додатних рядів та абсолютної збіжності невластивих інтегралів;
 - знайдено достатні умови збіжності/розбіжності узагальненого ряду Флінт Гілла (Flint Hills), а також показано, що міра ірраціональності числа π дорівнює 2.

Враховуючи отримані результати, ми плануємо в майбутньому продовжувати дослідження у отриманих напрямках.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Agadzhanov A. N. Nowhere monotone singular functions in problems of finite control of distributed systems // *Doklady Mathematics*. — 2014. — jan. — Vol. 89, no. 1. — P. 84–87.
2. Albeverio S., Goncharenko Y., Pratsiovytyi M. Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits // *Random Operators and Stochastic Equations*. — 2007. — apr. — Vol. 15, no. 1. — P. 89–104.
3. Alekseyev M. A. On convergence of the flint hills series. — 2011. — Apr. — 1104.5100v1.
4. Anomalous diffusion modeling by fractal and fractional derivatives / Wen Chen, Hongguang Sun, Xiaodi Zhang, Dean Korošak // *Computers & Mathematics with Applications*. — 2010. — mar. — Vol. 59, no. 5. — P. 1754–1758.
5. Chatterji S. D. Certain induced measures on the unit interval // *Journal of the London Mathematical Society*. — 1963. — Vol. s1-38, no. 1. — P. 325–331.
6. Chen W. Time–space fabric underlying anomalous diffusion // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2006. — may. — Vol. 28, no. 4. — P. 923–929.
7. Denjoy A. Sur une fonction de minkowski // *C. R. Acad. Sci.* — 1932. — Vol. 194. — P. 44–46.
8. Dmytrenko S. O., Kyurchev D. V., Prats'ovytyi M. V. A 2-continued fraction representation of real numbers and its geometry // *Ukrainian Mathematical Journal*. — 2009. — apr. — Vol. 61, no. 4. — P. 541–555.
9. Elementary functions, wolfram. — Access mode: <https://functions.wolfram.com/ElementaryFunctions/>.

10. Falconer K. *Fractal Geometry*. — John Wiley and Sons Ltd, 2014. — 398 p. — ISBN: 111994239X.
11. Fischler S., Rivoal T. Irrationality exponent and rational approximations with prescribed growth // *Proceedings of the American Mathematical Society*. — 2010. — march. — Vol. 138, no. 3. — P. 799–808.
12. Fischler S., Rivoal T. Irrationality exponent and rational approximations with prescribed growth // *Proceedings of the American Mathematical Society*. — 2010. — 03. — Vol. 138. — P. 799–808.
13. Garg K. M. On singular functions // *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* — 1969. — Vol. 14. — P. 1441–1454.
14. Garg K. M. Construction of absolutely continuous and singular functions that are nowhere of monotonic type // *Contemp. Math. Amer. Math.Soc., Providence, R.I.* — 1985. — Vol. 42. — P. 61–67.
15. Hardy G. H. Weierstrass's non-differentiable function // *Transactions of the American Mathematical Society*. — 1916. — Jul. — Vol. 17, no. 3. — P. 301–325.
16. He J.-H. Fractal calculus and its geometrical explanation // *Results in Physics*. — 2018. — sep. — Vol. 10. — P. 272–276.
17. Jarnicki M., Pflug P. *Continuous Nowhere Differentiable Functions. The Monsters of Analysis*. Springer Monographs in Mathematics. — 1 edition. — Springer International Publishing, 2015. — P. XII, 299. — ISBN: 978-3-319-12669-2.
18. Jessen–wintner type random variables and fractal properties of their distributions / S. Albeverio, Ya. Gontcharenko, Pratsiovytyi M, G. Torbin // *Mathematische Nachrichten*. — 2006. — nov. — Vol. 279, no. 15. — P. 1619–1633.
19. Kessebohmer M., Stratmann B. O. Fractal analysis for sets of non-differentiability of minkowski's question mark function // *Journal of Number Theory*. — 2008. — sep. — Vol. 128, no. 9. — P. 2663–2686.
20. Kinney J. R. Note on a singular function of minkowski // *Proceedings of the American Mathematical Society*. — 1960. — may. — Vol. 11, no. 5. — P. 788–

- 788.
21. Knopp K. Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1996. — ISBN: 9783642614064.
 22. Marsaglia G. Random variables with independent binary digits // Ann. Math. Statist. — 1971. — 12. — Vol. 42, no. 6. — P. 1922–1929. — Access mode: <https://doi.org/10.1214/aoms/1177693058>.
 23. Minkowski H. Gesammelte abhandlungen. — 1911. — Vol. 2. — P. 50–51.
 24. A new definition of fractional derivative / R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, M. Sababheh // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2014. — jul. — Vol. 264. — P. 65–70.
 25. Okamoto H., Wunsch M. A geometric construction of continuous, strictly increasing singular functions // Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences. — 2007. — jul. — Vol. 83, no. 7. — P. 114–118.
 26. Osaulenko R. Normal properties of q -representation of real numbers from $[0; 1]$ // Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations: Abstracts. — 2018. — C. 17.
 27. Osaulenko R. Y. An analogue of the logarithmic (u, v) -derivative and its application // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2020. — Vol. 26, no. 2. — P. 179–188. — Access mode: <http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=1349>.
 28. Pahiry M. M. Continued-fractions representations of the functions $\operatorname{sh}z, \operatorname{ch}z, \operatorname{sin}z, \operatorname{cos}z$ // Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal. — 2018. — May. — Vol. 70, no. 5. — P. 682–698. — Access mode: <http://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/1587>.
 29. Random variables determined by polybasic Q -representation digits distributions and their fractal properties / Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — Kyiv, 1998.
 30. Pratsiovytyi M., Isaieva T. Transformations of $(0, 1]$ preserving tails of δ^μ -representation of number // Algebra and Discrete Mathematics. —

2016. — Vol. 22, no. 1. — P. 102–115.
31. Pratsiovytyi M., Vasylenko N. Fractal properties of functions defined in terms of q -representation // International Journal of Mathematical Analysis. — 2013. — Vol. 7, no. 64. — P. 3155–3167.
 32. Pratsiovytyi M., Makarchuk O., Skrypnyk S. Rational and algebraic q_2 -representations of real numbers // Siauliai Math. Sem. — 2015. — Vol. 10, no. 18. — P. 119–211.
 33. Prats'ovytyi M. V., Kalashnikov A. V. Self-affine singular and nowhere monotone functions related to the q -representation of real numbers // Ukrainian Mathematical Journal. — 2013. — Vol. 65, no. 3. — P. 448–462.
 34. Prodanov D. Fractional velocity as a tool for the study of non-linear problems // Fractal and Fractional. — 2018. — 01. — Vol. 2. — P. 23.
 35. Salem R. On some singular monotonic functions which are strictly increasing // Transactions of the American Mathematical Society. — 1943. — mar. — Vol. 53, no. 3. — P. 427–427.
 36. Shukla U. K. On points of non-symmetrical differentiability of continuous function iii // Ganita. — 1957. — Vol. 8. — P. 81–107.
 37. Takács L. An increasing continuous singular function // The American Mathematical Monthly. — 1978. — jan. — Vol. 85, no. 1. — P. 35–37.
 38. Ісаєва Т. М. Одне кодування дійсних чисел засобами нескінченного алфавіту та його застосування : дис. канд. фіз.-мат. наук : 01.01.06 / Тетяна Миколаївна Ісаєва. — Київ, 2017. — 147 с.
 39. Ісаєва Т. М., Працьовитий М. В. Фрактальні функції, пов'язані з δ^μ -зображення чисел // Буковинський математичний журнал. — 2015. — Т. 3, № 3-4. — С. 156–165.
 40. Воробьев Н. Теория рядов / Под ред. перераб. и доп. Изд. 4-е. — Москва : Наука, 1979. — 408 с.
 41. Климчук С. О., Працьовитий М. В. Про один клас ніде не монотонних функцій з фрактальними властивостями, який містить підклас син-

- гулярних // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2017. — Т. 14, № 4. — С. 19–33.
42. Кравченко В. Ф., Масюк В. М. Современные методы аппроксимации в теории антенн. Кн. 3. Новый класс фрактальных функций в задачах анализа и синтеза антенн. — ИПРЖР (Издательское предприятие редакции журнала «Радиотехника») Москва, 2002. — ISBN: 5-93108-021-X.
43. Натансон И. Теория функций вещественной переменной. — 3-е изд. — Москва : Наука, 1974. — 408 с.
44. Осауленко Р. Ю. Неперервні перетворення одиничного відрізка, які зберігають частоти цифр q_s -зображення числа // Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі». Збірник тез. — С. 59.
45. Осауленко Р. Ю. Група неперервних перетворень відрізка $[0; 1]$, які зберігають частоти цифр q_s -зображення числа // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2016. — Т. 46, № 3. — С. 191–204.
46. Осауленко Р. Ю. Група неперервних перетворень відрізка $[0; 1]$, які зберігають частоти цифр q_s -зображення числа // П'ята Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання. Тези доповідей». — 2016. — С. 39.
47. Осауленко Р. Ю. Ознаки збіжності додатних рядів // Матеріали Міжнародної наукової конференції "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь". — 2017. — С. 64–65.
48. Осауленко Р. Ю. Ознаки збіжності додатних числових рядів та абсолютної збіжності деяких невластних інтегралів // Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917-2008). Тези доповідей. — 2017. — С. 44.

49. Осауленко Р. Ю. Частоти та збіжність додатних числових рядів // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2017. — Т. 14, № 4. — С. 65–81.
50. Осауленко Р. Ю. Узагальнення класичної похідної функції в точці і його застосування // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2018. — Т. 15, № 1. — С. 100–113.
51. Осауленко Р. Ю. Упаковні в точці функціональні послідовності // Сьома Всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики. — 2018.
52. Осауленко Р. Ю. Ніде не монотонні сингулярні функції необмеженої варіації // Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх начання». Тези доповідей. — 2019. — С. 27.
53. Осауленко Р. Ю. Один клас ніде не монотонних функцій, який містить сингулярні функції // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2019. — Т. 16, № 3. — С. 148 – 159.
54. Осауленко Р. Ю. Узагальнення класичної похідної функції й аналог оператора диференціювання як інструментарій для вивчення диференціальних властивостей функцій // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2019. — Т. 16, № 2. — С. 121–139.
55. Працевитый Н. В. Случайные величины с независимыми q_2 -символами // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. — 1987. — С. 92–102.
56. Працевитый Н. В. Непрерывные канторовские проекторы // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — 1989. — С. 95–105.
57. Працьовитий М. В. Поліосновне q_s -представлення і фрактальні математичні об'єкти з ним пов'язані // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — 1998. — Т. 2. — С. 14–35.

58. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ : Вид-во НПУ імені Драгоманова, 1998. — С. 296.
59. Працьовитий М. В. Фрактальні властивості однієї неперервної ніде недиференційовної функції // Наукові записки НПУ ім. М.П. Драгоманова. — 2002. — Т. 3. — С. 351–362.
60. Працьовитий М. В. Ніде не монотонні сингулярні функції // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки. — 2011. — Т. 12. — С. 24–33.
61. Працьовитий М. В. Геометрія класичного двійкогвого зображення дійсних чисел. — Київ : Вид-во НПУ імені Драгоманова, 2012. — С. 698.
62. Працьовитий М. В., Барановський О. М., Маслова Ю. П. Узагальнення Трибін-функції. — 2019. — Т. 22. — С. 380–390.
63. Працьовитий М. В., Замрій І. В. Інверсор цифр q_3 -зображення дробової частини дійсного числа як розв'язок системи трьох функціональних рівнянь // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки. — 2013. — Т. 15. — С. 156–167.
64. Працьовитий М. В., Замрій І. В. Неперервні функції, які зберігають цифру 1 в q_3 -зображенні числа // Буковинський математичний журнал. — 2015. — Т. 3, № 3-4. — С. 142–159.
65. Працьовитий М. В., Замрій І. В. Сингулярність інверсора цифр q_3 -зображення дробової частини дійсного числа, його фрактальні та інтегральні властивості // Нелінійні коливання. — 2015. — Т. 18, № 1. — С. 55–70.
66. Працьовитий М. В., Климчук С. О., Макарчук О. П. Перетворення і функції, які зберігають середнє значення цифр трійкового зображення числа // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки. — 2013. — Т. 15. — С. 87–89.
67. Працьовитий М. В., Климчук С. О., Макарчук О. П. Частоти та цифри у зображенні числа і його асимптотичне середнє значення цифр //

- Український математичний журнал. — 2014. — Т. 3. — С. 302–310.
68. Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Один клас неперервних ніде не монотонних функцій з автомоделними властивостями // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки. — 2014. — Т. 16, № 2. — С. 81–93.
69. Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Розсіювання значень однієї фрактальної неперервної немонотонної функції канторівського типу // Нелінійні коливання. — 2018. — Т. 21, № 1. — С. 116–130.
70. Працьовитий М. В., Феценко О. Ю. Математичні моделі двосторонніх динамічних конфліктів і q -представлення чисел // Наукові записки НПУ ім. М.П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. — 2003. — Т. 4. — С. 260–269.
71. Працьовитий М. В., Чуйков А. С. Неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах нега-трийкових і ланцюгових \tilde{a}_2 дробів // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2018. — Т. 15, № 1. — С. 147 – 161.
72. Терещенко И. В. История развития теории бесконечных положительных рядов с монотонно убывающими членами // Научные труды КубГТУ. — 2016. — Т. 8. — С. 440–453.
73. Турбин А. Ф., Працевитый Н. В. Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев : Наукова думка, 1992. — С. 205.
74. Хованский А. Н. Приложение цепных дробей и их обобщения к вопросам приближенного анализа. — Москва : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. — 203 с.

Додаток А

Список публікацій здобувача за темою дисертації
та відомості про апробацію результатів дисертації

А.1. Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. Osaulenko R. Normal properties of q -representation of real numbers from $[0; 1]$ // Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations: Abstracts. — 2018. — С. 17.
2. Osaulenko R. Y. An analogue of the logarithmic (u, v) -derivative and its application // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2020. — Vol. 26, no. 2. — P. 179–188. — Access mode: <http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=1349>.
3. Осауленко Р. Ю. Неперервні перетворення одиничного відрізка, які зберігають частоти цифр q_s -зображення числа // Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі». Збірник тез. — С. 59.
4. Осауленко Р. Ю. Група неперервних перетворень відрізка $[0; 1]$, які зберігають частоти цифр q_s -зображення числа // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2016. — Т. 46, № 3. — С. 191–204.
5. Осауленко Р. Ю. Група неперервних перетворень відрізка $[0; 1]$, які зберігають частоти цифр q_s -зображення числа // П'ята Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання. Тези доповідей». — 2016. — С. 39.
6. Осауленко Р. Ю. Ознаки збіжності додатних рядів // Матеріали Міжнародної наукової конференції "Асимптотичні методи в теорії диферен-

- ціальних рівнянь”. — 2017. — С. 64–65.
7. Осауленко Р. Ю. Ознаки збіжності додатних числових рядів та абсолютної збіжності деяких невласних інтегралів // Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917-2008). Тези доповідей. — 2017. — С. 44.
 8. Осауленко Р. Ю. Частоти та збіжність додатних числових рядів // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2017. — Т. 14, № 4. — С. 65–81.
 9. Осауленко Р. Ю. Узагальнення класичної похідної функції в точці і його застосування // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2018. — Т. 15, № 1. — С. 100–113.
 10. Осауленко Р. Ю. Упаковні в точці функціональні послідовності // Сьома Всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики. — 2018.
 11. Осауленко Р. Ю. Ніде не монотонні сингулярні функції необмеженої варіації // Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх начання». Тези доповідей. — 2019. — С. 27.
 12. Осауленко Р. Ю. Один клас ніде не монотонних функцій, який містить сингулярні функції // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2019. — Т. 16, № 3. — С. 148 – 159.
 13. Осауленко Р. Ю. Узагальнення класичної похідної функції й аналог оператора диференціювання як інструментарій для вивчення диференціальних властивостей функцій // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2019. — Т. 16, № 2. — С. 121–139.

A.2. Відомості про апробацію результатів дисертації

Результати дисертаційного дослідження доповідались на конференціях різних рівнів і наукових семінарах:

1. Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі» (Київ, 2016);
2. П'ята Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 2017);
3. Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвячена 85-річчю відомого українського математика, педагога та організатора освіти Шкіля Миколи Івановича (Київ, 2017);
4. Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю.О. Митропольського (1917-2008) (Київ, 2017);
5. Сьома Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 2018);
6. The Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, September 24-28 (Kyiv, 2018);
7. Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики та фізики» (Київ, 2019);
8. Семінар з фрактального аналізу, Інститут математики НАН України та Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова (керівник: д-р фіз.-мат. наук, проф. М. В. Працьовитий);
9. Львівський міжвузівський семінар з теорії аналітичних функцій (керівники: д-р фіз.-мат. наук, проф. А. А. Кондратюк, д-р фіз.-мат. наук, проф. О. Б. Скасків).
10. Семінар кафедри диференціальних рівнянь Національний техні-

чний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" (керівник: д-р фіз.-мат. наук, проф. М. Є. Дудкін).

Публікації. Основні результати дисертаційного дослідження опубліковано в шести статтях [27, 45, 49, 50, 53, 54] у наукових виданнях, які входять до переліку фахових видань МОН України, серед них одна стаття [27], яка індексується міжнародною наукометричною базою "Scopus". Короткі відомості по результатам дослідження наведено у матеріалах конференцій [26, 44, 46, 47, 48, 51, 52].