

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ОСАУЛЕНКО Роман Юрійович



УДК 517.5

**СИНГУЛЯРНІ НІДЕ НЕ МОНОТОННІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ
ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ**

01.01.01 — Математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2021

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в відділі динамічних систем та фрактального аналізу Інституту математики Національної академії наук України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Працьовитий Микола Вікторович,
Національний педагогічний університет імені
М.П. Драгоманова, декан
фізико-математичного факультету; Інститут
математики НАН України, в.о. завідувача
відділу динамічних систем та фрактального
аналізу.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Скасків Олег Богданович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка, в.о. завідувача кафедри
теорії функцій і функціонального аналізу;
доктор фізико-математичних наук, професор
Чуйко Сергій Михайлович,
Донбаський державний педагогічний
університет, завідувач кафедри математики та
інформатики.

Захист відбудеться «23» квітня 2021 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «19» березня 2021 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради



Романюк А. С.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Робота виконана в галузі конструктивної теорії локально складних неперервних функцій зі фрактальними властивостями. Вона присвячена сингулярним (монотонним і ніде не монотонним) функціям і засобам їх вивчення.

Актуальність теми. Традиційно сингулярною називають функцію обмеженої варіації, яка має похідну, рівну нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега. Клас таких функцій широкий, але вивчені вони мало. Причини цього різні. Від поширеного хибного стереотипу, що важко вказати реальні процеси, які вони описують, до відсутності ефективних засобів їхнього опису і дослідження.

Разом з цим мляве вивчення сингулярних функцій тривало майже століття і значне зрушення інтересу до них спостерігається впродовж принаймні 30 останніх років. Це відбувається зокрема завдяки Київській групі дослідників сингулярних розподілів ймовірностей і функцій зі фрактальними властивостями. Представники цієї групи: Барановський О. М., Віннішин В. Ф., Гончаренко Я. В., Ісаєва Т. М., Лисенко І. М., Макачук О. П., Нікіфоров Р. О., Працьовитий М. В., Свинчук О. В., Торбін Г. М., Чуйков А. С. та інші.

Завдяки інтенсивному розвитку теорії фракталів (фрактальної геометрії та фрактального аналізу) суттєво зріс інтерес до неперервних ніде не монотонних функцій. Істотно збагатився арсенал засобів їх задання і дослідження, зокрема завдяки появі нових систем кодування (зображення) дійсних чисел (Гончаренко Я. В., Дмитренко С. О., Кюрчев Д. М., Лисенко І. М., Маслова Ю. П., Працьовитий М. В., Торбін Г. М., Феценко О. Ю.). Кожна неперервна недиференційовна функція є ніде не монотонною, але клас останніх суттєво ширший. Серед них існують функції обмеженої і необмеженої варіації, а функції обмеженої варіації є диференційовними майже скрізь. Як виявилось (Агаджанов А. М., Гарг К., Працьовитий М. В., Шукла Ю.), існують ніде не монотонні сингулярні функції, які сьогодні є ще достатньо загадковим об'єктом теорії функцій. Цікаво охарактеризувати масивність цього класу у просторі $C_{[0,1]}$, достатньо повно аргументувати інтерес до таких об'єктів і розробити засоби їх ефективного вивчення. В значній мірі дана робота підпорядкована цим завданням, головним з яких є останнє.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження проводились у рамках таких науково-дослідницьких тем Інституту математики Національної академії наук України і Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова:

- фрактальний аналіз неперервних функцій та мір (№ державної реєстрації 0111U000053);
- фрактальний аналіз математичних об'єктів зі складною локальною будовою функцій та мір (№ державної реєстрації 0107U000583);
- фрактальна геометрія числових рядів і фрактальний аналіз стохастичних об'єктів, з ними пов'язаних (№ державної реєстрації 0118U002059);
- статистика сингулярних розподілів ймовірностей і фрактальні неперервні функції випадкових величин (№ державної реєстрації (№ державної реєстрації 0118U002059);

Об'єктом дослідження є сингулярні й неперервні ніді не монотонні функції, засоби й інструментарій їхнього опису і дослідження.

Предметом дослідження є оператори диференціювання, їхні узагальнення й аналогі, властивості і застосування на модельних класах сингулярних і ніді не монотонних неперервних функцій.

Мета дослідження. Розробити систему засобів для вивчення диференціальних і фрактальних властивостей неперервних локально складних функцій (сингулярних, ніді не монотонних, недиференційовних), яка би стала суттєвим розширенням класичних засобів і ефективним знаряддям для встановлення факту належності об'єкта до відповідної категорії. Апробувати створену систему на класах модельних функцій (класичних і нових).

Основними завданнями дисертаційного дослідження є:

1. Побудувати основи теорії циліндричних похідних для Q^* - і Q -зображення дійсних чисел. Окреслити нішу застосовності циліндричної похідної. Навести приклади її ефективності;
2. Знайти еквіваленті означення частоти цифри в зображенні числа і довести нові критерії існування частоти;
3. Створити теорію (u, v) -похідної як узагальнення класичної й циліндричної похідної. Навести приклади ефективного використання. Розглянути аналогі (u, v) -похідної;

4. Створити теорію логарифмічної (u, v) -похідної і вказати на її застосування для вивчення фрактальних властивостей функцій;
5. Знайти застосування запропонованих конструкцій у теоріях додатних рядів і невластивих інтегралів, а також у фрактальному аналізі різних математичних об'єктів;
6. Описати групу неперервних перетворень відрізка, які зберігають хвости Q -зображення чисел, установити їхню масивність.

Методи дослідження. У роботі були використані методи метричної теорії чисел, математичного аналізу, теорії функцій дійсної змінної, теорії фракталів (фрактальної геометрії і фрактального аналізу).

Наукова новизна отриманих результатів.

- Запропоновано конструкцію (u, v) -похідної, яка є узагальненням класичної й циліндричної похідної, знайдено аналоги (u, v) -похідної і вивчено їх властивості.
- Наведено приклади неперервних ніде не монотонних сингулярних функцій необмеженої варіації, залежних від параметрів, які набувають континуальну множину значень.
- Досліджено диференціальні властивості композиції сингулярної функції Салема й ніде не диференційовної.
- Побудовано два алгоритми, які дозволять розкласти розв'язки диференціальних рівнянь в ланцюгові дроби.
- Досліджено розмірність Гаусдорфа-Безиковича носіїв функцій з континуального класу неперервних функцій, які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа без збереження хвостів.
- Запропоновано конструкції логарифмічної (u, v) -похідної і її аналогу, проілюстровано їх продуктивність і вивчено властивості.
- Встановлено достатні умови збіжності/розбіжності узагальненого ряду Флінт Гілла (Flint Hills).
- Доведено кілька нових ознак збіжності додатних числових рядів і абсолютної збіжності невластивих інтегралів.

Практичне значення отриманих результатів. Робота має теоретичний характер, але отримані результати можуть бути використаними при дослідженні об'єктів неперервної математики зі локально складною структурою (множин, функцій, мір, динамічних систем). Сподіваємось, що запропоновані конструкції різних операторів диференціювання допоможуть в значній частині випадків спростити задачу вивчення диференціальних властивостей функцій і спектральних властивостей ймовірнісних мір, полегшать задачу встановлення їх лебегівської структури. Окремі твердження будуть корисними у задачах відшукування наближених розв'язків звичайних диференціальних рівнянь і встановлення факту збіжності додатних рядів та інтегралів.

Особистий внесок здобувача. Наукові результати, які виносяться на захист, отримано автором самостійно. Всі опубліковані роботи за темою дисертації не мають співавторів. Визначення напрямку досліджень, постановка задач та загальне керівництво роботою належать науковому керівнику доктору фізико-математичних наук, професорові Працьовитому М. В..

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідались на конференціях різних рівнів і наукових семінарах:

1. Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі» (Київ, 2016);
2. П'ята Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 2017);
3. Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвячена 85-річчю відомого українського математика, педагога та організатора освіти Шкіля Миколи Івановича (Київ, 2017);
4. Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю.О. Митропольського (1917-2008) (Київ, 2017);
5. Сьома Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 2018);

6. The Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, September 24-28 (Kyiv, 2018);
7. Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики та фізики» (Київ, 2019);
8. Семінар з фрактального аналізу, Інститут математики НАН України та Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова (керівник: д-р фіз.-мат. наук, проф. М. В. Працьовитий);
9. Львівський міжвузівський семінар з теорії аналітичних функцій (керівники: д-р фіз.-мат. наук, проф. А. А. Кондрагук, д-р фіз.-мат. наук, проф. О. Б. Скасків).
10. Семінар кафедри диференціальних рівнянь Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" (керівник: д-р фіз.-мат. наук, проф. М. Є. Дудкін).

Публікації. Основні результати дисертаційного дослідження опубліковано в 6 статтях [1, 2, 3, 4, 5, 6] у наукових виданнях, які входять до переліку фахових видань МОН України, серед них одна стаття [1] надрукована у виданні, що включено до міжнародної наукометричної бази "Scopus". Короткі відомості щодо результатів дослідження наведено у матеріалах конференцій різних рівнів[7, 8, 9, 10, 11, 12, 13].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, списку скорочень та позначень, вступу, семи розділів, розбитих на підрозділи, висновків до кожного розділу та й загальних висновків, списку використаних джерел (74 найменувань), додатка (список публікацій автора, 13 найменувань). Загальний обсяг роботи – 144 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У розділі 1 "Огляд літератури та концептуальні засади дослідження" наведено огляд літератури на теми, які мають безпосередній зв'язок із темою дослідження, а також основні поняття і твердження. Оскільки частина функцій, розглянутих у дисертацій-

ному дослідженні, можна зручно представити за допомогою різних систем зображення чисел, то нагадаємо означення основних понять і формулювання базових тверджень.

$\tilde{Q}$ -зображення дійсного числа з $[0; 1]$ є узагальненням відомих систем зображення дійсних чисел: класичне s -кове зображення, Q_s- , Q_s^* , Q_∞ -зображення.

Нехай маємо послідовність алфавітів $A_k = \{0, 1, \dots, m_k\}$, $m_k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $k \in \mathbb{N}$, $L = A_{m_1} \times A_{m_2} \times \dots \times A_{m_k} \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавітів; $\tilde{Q} = \|q_{i,j}\|$ – ”матриця” з нескінченною кількістю стовпців (k -ий стовпець містить m_k елементів), $i \in A_j$, $m_j \in \mathbb{N}_\infty = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $j \in \mathbb{N}$, така, що задовольняє умови

1. $0 < q_{i,j} < 1$ для всіх $i \in A_j$, $j \in \mathbb{N}$;
2. $\sum_{c=0}^{m_j} q_{c,j} = 1$ для всіх $j \in \mathbb{N}$;
3. $\prod_{j=1}^{\infty} \sup_{i \in A_j} \{q_{i,j}\} = 0$.

Відомо, що для будь-якого числа $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$, така, що

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_n n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j j} \right) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{\tilde{Q}}, \quad (1)$$

де $\beta_{0,n} = 0$, $\beta_{c,n} = \sum_{i=0}^{n-1} q_{i,n}$, $c \in A_n$.

Подання числа x у вигляді ряду (1) називається $\tilde{Q}$ -представленням числа x , а скорочений запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots}^{\tilde{Q}}$ – його $\tilde{Q}$ -зображенням. При цьому $\alpha_k = \alpha_k(x)$ називається k -им $\tilde{Q}$ -символом або $\tilde{Q}$ -цифрою числа x .

Циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$, $c_i \in A_s$, називається множина $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{\tilde{Q}}$, що складається з усіх чисел $x \in [0; 1]$, що мають $\tilde{Q}$ -зображення, у яких перші m $\tilde{Q}$ -символів співпадають з $c_1, c_2, \dots, c_m$ відповідно, тобто $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{\tilde{Q}} = \{x : \alpha_j(x) = c_i, i = \overline{1, m}\}$.

Для $\tilde{Q}$ -зображення числа виконується рівність (основна метричне

відношення):

$$\frac{\left| \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n m}^{\tilde{Q}} \right|}{\left| \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{\tilde{Q}} \right|} = q_{m, n+1}. \quad (2)$$

Якщо послідовність алфавітів (A_n) є сталою, тобто $m_k = s - 1 = \text{const}$, то $\tilde{Q}$ -зображення називається Q_s^* -зображенням числа. Якщо крім цього $q_{ik} = q_i$, $i \in \{0, 1, \dots, s - 1\}$, то зображення називається Q_s -зображенням.

Розглянемо ще одне зображення чисел, визначене нескінченною трирядковою матрицею

$$G_3^* = \begin{pmatrix} g_{01} & g_{02} & \dots g_{0n} & \dots \\ g_{11} & g_{12} & \dots g_{1n} & \dots \\ g_{21} & g_{22} & \dots g_{2n} & \dots \end{pmatrix}, \quad (3)$$

де $g_{0n} > 0$, $g_{2n} > 0$, $g_{1n} \leq 0$, $|g_{in}| < 1$, $g_{0n} + g_{1n} + g_{2n} = 1$ і $\prod_{j=1}^{\infty} \max_{i=0,1,2} |g_{ij}| = 0$.

Довільне число $x \in [0; 1]$ можна представити у вигляді:

$$x = \delta_{\alpha_1 1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\delta_{\alpha_n n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j j} \right) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{G_3^*},$$

де $\alpha_i \in A_3$, $\delta_{0n} = 0$, $\delta_{1n} = g_{0n}$, $\delta_{2n} = g_{0n} + g_{1n}$.

Для G_3^* -зображення числа виконується рівність (основна метрична тотожність):

$$\frac{\left| \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n m}^{G_3^*} \right|}{\left| \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{G_3^*} \right|} = |g_{m, n+1}|. \quad (4)$$

У випадку, коли $g_{i1} = g_{i2} = \dots = g_{in} = \dots = g_i$, замість G_3^* використовуватимемо позначення G_3 .

Другий розділ "Частоти цифр зображення числа та функції пов'язані з ними" присвячено поняттю частоти цифри $\tilde{Q}$ -зображення числа. У цьому розділі встановлюється нормальна властивість $\tilde{Q}$ -зображення чисел (властивість, що виконується для майже всіх у розумінні міри Лебега чисел відрізка $[0; 1]$); доведено, що

множина всіх неперервних перетворень відрізка $[0; 1]$, які зберігають хвости Q_s -зображення чисел відносно операції "суперпозиція" перетворень, утворює зліченну неабелеву групу; побудовано континуальний клас неперервних функцій, які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа без збереження хвостів.

Означення 2.1. Нехай $N_c(x, n)$ – це кількість цифр $c \in A$ серед перших n цифр $\tilde{Q}$ -зображення числа $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{\tilde{Q}}$. Якщо існує границя $\nu_c^{\tilde{Q}}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} N_c(x, n)$, то вона називається частотою цифри c у $\tilde{Q}$ -зображенні числа x .

У разі, коли $\tilde{Q}$ -зображення числа x містить нескінченну кількість цифр c , використовуватимемо лічильники: P_k – порядковий номер k -ої цифри c , тобто $P_k = n$, якщо $\alpha_n = c$ і $N_c(x, n - 1) = k - 1$.

Теорема 2.1. Якщо зображення числа x містить нескінченну кількість цифр c , то справедлива рівність:

$$\nu_c(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} N_c^{\tilde{Q}}(x, n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{P_k},$$

де k – порядковий номер цифри c .

Нехай $c \in A$ і

$$\chi_{c,j} = \chi_{c,j}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha_j = c; \\ 0 & \text{при } \alpha_j \neq c; \end{cases} \quad (5)$$

$$p_{c,j} = \begin{cases} q_{c,j} & \text{при } c \leq m_j; \\ 0 & \text{при } c > m_j. \end{cases} \quad (6)$$

Теорема 2.2. Нехай c – довільний елемент загального алфавіту. Для майже всіх (у розумінні міри Лебега) чисел $x \in [0; 1]$ істинна рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{j=1}^n (\chi_{c,j} - p_{c,j}) = 0$.

Наслідок 2.1. Для майже всіх чисел $x \in [0; 1]$ (у розумінні міри Лебега) виконуються рівності $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{-1} N_c(x, n) \equiv \bar{\nu}_c(x) =$
 $= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p_{c,j}, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{-1} N_c(x, n) \equiv \underline{\nu}_c(x) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p_{c,j}.$

В розділі 3 "(u, v)-похідна та її застосування" введено поняття (u, v)-похідної, яка є узагальненням класичної та циліндричної

похідної, її властивості та зв'язок з класичною похідною. Розглянуто застосування (u, v) -похідної для:

- розкриття невизначеностей в границях, доведено узагальнення правила Лопітала;
- вивчення диференціальних властивостей строго монотонних функцій (на прикладі функції Мінковського, а також встановлення факту сингулярності неперервних функцій, які зберігають частоти Q_s -зображення числа без збереження хвостів);
- дослідження диференціальних властивостей модельного класу піде не монотонних функцій, які є границями рекурентних функціональних послідовностей.

Позначмо через $\mathcal{P}$ множину пар $(u; v)$ всіх нескінченно малих у нулі функцій, таких, що для кожної пари існує таке число $\delta > 0$, що для $\forall h \in O_\delta^*$ справедлива нерівність $u(h) \neq -v(h)$.

Означення 3.1. *Якщо для заданих пар функцій $(u; v) \in \mathcal{P}$ й заданої в деякому околі x_0 функції $f(x)$ існує границя (скінченна чи нескінченна)*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_{v(h)}^{u(h)} f(x_0)}{\Delta_{v(h)}^{u(h)} x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + u(h)) - f(x_0 - v(h))}{u(h) + v(h)}, \quad (7)$$

то її значення називатимемо (u, v) -похідною функції f у точці x_0 і позначатимемо через $\mathfrak{D}_v^u f(x_0)$.

Зазначимо, що при $u(h) = h$, $v(h) = 0$, отримуємо класичне означення похідної. Якщо ж $u(h) = v(h) = h$, то маємо означення симетричної похідної.

Надалі $u = u(h)$, $v = v(h)$.

Теорема 3.1. *Нехай A, B – довільні дійсні числа і в околі точки x задано функції $f(x)$ та $g(x)$, такі, що для пари функцій $(u, v) \in \mathcal{P}$ існують $\mathfrak{D}_v^u f(x)$ і $\mathfrak{D}_v^u g(x)$. Тоді*

1. $\mathfrak{D}_v^u (Af + Bg)(x) = A\mathfrak{D}_v^u f(x) + B\mathfrak{D}_v^u g(x)$.
2. $\mathfrak{D}_v^u (fg)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x + u(h)) \cdot \mathfrak{D}_v^u g(x) + \lim_{h \rightarrow 0} g(x + u(h)) \cdot \mathfrak{D}_v^u f(x)$
при $\lim_{h \rightarrow 0} f(x + u(h)) \in \mathbb{R} \ni \lim_{h \rightarrow 0} g(x + v(h))$.

$$3. \mathfrak{D}_v^u\left(\frac{1}{a}\right)(x) = -\mathfrak{D}_v^u f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} f^{-2}(x + u(h)) \text{ при } f(x) \neq 0 \neq \lim_{h \rightarrow 0} f(x + u(h)).$$

Нехай

$$\mathcal{P}^* = \left\{ (u, v) \in \mathcal{P} : \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \left| \frac{u(h)}{u(h) + v(h)} \right| < \infty \right\}, \quad (8)$$

$$\mathcal{P}^+ = \{ (u, v) \in \mathcal{P} : u(h) \cdot v(h) \geq 0, \forall h \in O(u, v) \}, \quad (9)$$

$$\mathcal{P}^- = \{ (u, v) \in \mathcal{P} : u(h) \cdot v(h) < 0, \forall h \in O(u, v) \}, \quad (10)$$

де $O(u, v)$ – проколотий окіл нуля, в кожній точці якого функції u , v визначені й виконується нерівність $u(h) \neq -v(h)$, $\forall h \in O(u, v)$.

Теорема 3.2 *Нехай функція f має скінченну похідну в точці x_0 , тоді для довільної пари $(u, v) \in \mathcal{P}^*$ виконується $\mathfrak{D}_v^u f(x_0) = f'(x_0)$.*

Наслідок 3.1 *Нехай ув околі точки x_0 задано функцію f і послідовність дійсних чисел (a_n, b_n) , таких, що*

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n; \quad 2) a_j \neq b_j \text{ при } j \in \mathbb{N}; \quad 3) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n - x_0}{a_n - b_n} \right| < \infty.$$

Тоді

- якщо $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, то вона дорівнює $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n) - f(b_n)}{a_n - b_n}$;
- якщо не існує скінченної границі $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n) - f(b_n)}{a_n - b_n}$, то f – не диференційовна в точці x_0 (не має скінченної похідної).

Теорема 3.3. *Нехай f – функція, задана в околі точки x_0 і $f'(x_0) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, тоді для довільної пари $(u, v) \in \mathcal{P}^+$ виконується рівність $\mathfrak{D}_v^u f(x_0) = f'(x_0)$.*

Наслідок 3.2. *Нехай в околі точки x_0 задано функцію f і послідовності дійсних чисел (l_n) і (r_n) , такі, що $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$, і $l_j \leq x_0 \leq r_j$, $l_j \neq r_j$ при $j \in \mathbb{N}$. Тоді*

- якщо $f'(x_0) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, то вона дорівнює $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(r_n) - f(l_n)}{r_n - l_n}$.
- якщо не існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(r_n) - f(l_n)}{r_n - l_n}$, то в точці x_0 не існує похідної.

Зазначимо, що якщо у наслідку 3 замість l_n узяти лівий край циліндра n -го рангу, який містить x_0 , а за r_n – відповідно правий, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(r_n) - f(l_n)}{r_n - l_n}$ буде циліндричною похідною в точці x_0 .

Теорема 3.4. Якщо для функції f існує $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, то для всіх $(u, v) \in \mathcal{P}^-$ справедлива рівність $\mathfrak{D}_v^u f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x_0)$.

Наслідок 3.3. Якщо f' існує у точці x_0 і є неперервною, то для всіх $(u, v) \in \mathcal{P}$ виконується рівність $\mathfrak{D}_v^u f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0+u(h)) + f'(x_0-v(h))}{2}$.

Теорема 3.5. Нехай для функції f існує послідовність (x_n) , така, що $x_j \neq x_0$, $\forall j \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = c$, тоді завжди існує пара функції $(u, v) \in \mathcal{P}^-$, що $\mathfrak{D}_v^u f(x_0) = c$.

Ідеї, використані для доведення фактів, пов'язаних із (u, v) -похідною дозволили отримати узагальнення правила Лопітала (у дисертації наведено найпростіше доведення за допомогою рядів Тейлора):

Теорема 3.6. Нехай функції p, q, f, g задовольняють наступні умови:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = t_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} q(x)$;
2. існує проколтий окіл x_0 , для кожної точки x якого виконується нерівність $p(x) \neq q(x)$;
3. виконуються $f^{(j)}(t_0) = 0 = g^{(j)}(t_0)$, для всіх $j \in \{0; 1, \dots, n-1\}$;
4. існують скінченні $f^{(n)}(t_0), g^{(n)}(t_0) \neq 0$;
5. $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{(p(x)-t_0)^n}{(p(x)-t_0)^n - (q(x)-t_0)^n} \right| = c \in \mathbb{R}$.

Тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(p(x)) - f(q(x))}{g(p(x)) - g(q(x))} = \frac{f^{(n)}(t_0)}{g^{(n)}(t_0)}.$$

За допомогою описаних тверджень вдалось показати сингулярність функцій, які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа без збереження хвостів, а також сингулярність ніде не монотонної функції обмеженої варіації, яка є границею функціональної послідовності керованою послідовностями параметрів.

У розділі 4 "Аналог (u, v) -похідної та його застосування" розглядається аналог (u, v) -похідної, його означення, властивості і зв'язок зі класичною й (u, v) -похідною. Теоретичні результати цього і другого розділу дозволили показати існування континуального

класу ніде не монотонних сингулярних функцій необмеженої варіації. Також аналог (u, v) -похідної ми застосовували для встановлення ніде не диференційовності аналогу Трибін-функції, означеної в термінах ланцюгових A_2 -дробів та негатрійкового зображення.

Далі використовуватимемо такі позначення при $(u, v) \in \mathcal{P}^+$:

1. $\square_{v(h)}^{u(h)} f(x) = \sup_{t \in \Theta_{v(h)}^{u(h)}(x)} f(t) - \inf_{t \in \Theta_{v(h)}^{u(h)}(x)} f(t) =$
 $= \sup_{t_1, t_2 \in \Theta_{v(h)}^{u(h)}(x)} (f(t_1) - f(t_2)),$ де $\Theta_{v(h)}^{u(h)}(x)$ – відрізок із кінцями в точках $x + u(h)$, $x - v(h)$;
2. $\boxtimes_{v(h)}^{u(h)} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\square_{v(h)}^{u(h)} f(x)}{\square_{v(h)}^{u(h)} x}$ – аналог (u, v) – похідної, $\boxtimes f(x_0) = \boxtimes_0^h f(x_0)$ – аналог $(h, 0)$ – похідної;
3. $\overline{\boxtimes_{v(h)}^{u(h)} f(x)} = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{\square_{v(h)}^{u(h)} f(x)}{\square_{v(h)}^{u(h)} x}$, $\underline{\boxtimes_{v(h)}^{u(h)} f(x)} = \underline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{\square_{v(h)}^{u(h)} f(x)}{\square_{v(h)}^{u(h)} x}$.

Зауважимо, що $\square_{v(h)}^{u(h)} f(x)$ – це коливання функції f на відрізку $\Theta_{v(h)}^{u(h)}(x)$.

Теорема 4.1. Нехай $(u, v) \in \mathcal{P}^+$ і a, b – функції, для яких існують скінченні значення $\boxtimes_v^u a(x_0)$, $\boxtimes_v^u b(x_0)$. Тоді

1. $\boxtimes_v^u (Aa + B)(x_0) = |A| \boxtimes_v^u a(x_0)$, де $A, B \in \mathbb{R}$;
2. $\boxtimes_v^u (a + b)(x_0) \leq \boxtimes_v^u a(x_0) + \boxtimes_v^u b(x_0)$.

Лема 4.2. Якщо існує похідна $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, то для всіх $(u, v) \in \mathcal{P}^+$ справедлива рівність $\boxtimes_v^u f(x_0) = |f'(x_0)|$.

Теорема 4.2. Для дійсної функції f , визначеної в околі точки x_0 , істинні такі твердження:

1. $f'(x_0) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\boxtimes f(x_0)$;
2. $f'(x_0) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\boxtimes_h^h f(x_0)$.

Лема 4.3. Якщо для фіксованої пари функцій $(u, v) \in \mathcal{P}^+$ і дійсної функції f значення $\overline{\boxtimes_v^u f(x_0)} = \infty$, то $\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| = \infty$.

Теорема 4.3. Якщо для пари $(u, v) \in \mathcal{P}^\oplus$ виконуються

1. $0 < \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h)}{v(h)} \leq \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{u(h)}{v(h)} < \infty$;
2. $\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \left(\left| \frac{\overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \sup_{t \in [-\xi; \xi]} u(h+t)}{\underline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \inf_{t \in [-\xi; \xi]} u(h+t)} \right| \right) < \infty$;

то $\boxdot_{\mathbf{v}}^u f(x_0) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $f'(x_0) = 0$.

Наслідок 4.1. Нехай $(l_n), (r_n)$ такі, що

1. $l_n < l_{n+1} < x, x > r_{n+1} > r_n, n \in \mathbb{N}$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n$;
3. $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - x}{x - l_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - x}{x - l_n} < \infty$;
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - x}{r_{n+1} - x} < \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_{n+1} - x}{l_n - x} < \infty$.

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sup_{t_1, t_2 \in [l_n, r_n]} (f(t_1) - f(t_2))}{r_n - l_n} = 0$, то $f'(x) = 0$.

Теорема 4.4. Нехай (u_k, v_k) – послідовність пар нескінченно малих числових послідовностей, таких, що

$$u_k \geq u_{k+1} > 0 < v_{k+1} \leq v_k \text{ і } 0 < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k}{v_k} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k}{v_k} < \infty.$$

Якщо $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\boxdot_{v_{k+1}}^{u_k} f(x)}{\boxdot_{v_{k+1}}^{u_{k+1}} f(x)} = 0$, то $f'(x) = 0$.

Завдяки описаним твердженням, ми змогли побудувати і довести перший приклад існування сингулярних ніде не монотонних функцій необмеженої варіації (на будь-якому відрізку не нульової довжини побудовані функції мають необмежену варіацію). Також удалось показати ніде не диференційовність функції, яка є аналогом Трибін-функції, означеної в термінах ланцюгових A_2 -дробів і негатрійкового зображення числа.

У розділі 5 ”Логарифмічна (u, v) -похідна та її застосування” дано означення логарифмічної (u, v) -похідної, досліджено її властивості та встановлено зв’язок із (u, v) -похідною і її аналогом. У цьому розділі також описане узагальнення дотичних, що дозволяє будувати розклади деяких функцій в степеневі ряди з дійсними показниками, а також розкладати в ланцюгові дроби розв’язки деяких диференціальних рівнянь.

Означення 5.1. Нехай задано функцію f і пару функцій $(u, v) \in \mathcal{P}$. Фіксованому x_0 із області визначення f поставимо у відповідність число (якщо воно існує)

$$\mathfrak{L}_{\mathbf{v}}^u f(x_0) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln |\Delta_{\mathbf{v}}^u f(x_0)|}{\ln |\Delta_{\mathbf{v}}^u x|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln |f(x_0 + u(h)) - f(x_0 - v(h))|}{\ln |u(h) + v(h)|}, \quad (11)$$

яке називатимемо логарифмічною (u, v) -похідною функції f у точці x_0 .

Специфіку логарифмічної (u, v) -похідної ілюструє приклад: для функції $f(x) = x^2$ маємо $\mathfrak{L}_0^h f(0) = 2$, $\mathfrak{L}_h^h f(0) = +\infty$. Безпосередньо з означення випливає таке твердження.

Теорема 5.1. *Нехай для функцій f, g і пари функцій $(u, v) \in \mathcal{P}$ існують скінченні значення $\mathfrak{L}_v^u f(x_0) \geq 0$ і $\mathfrak{L}_v^u g(x_0) \geq 0$. Тоді*

1. *для всіх $f(x) = a \in \mathbb{R}$, тоді $\mathfrak{L}_v^u f(x) = +\infty$;*
2. *для будь-яких $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ і $b \in \mathbb{R}$ виконується $\mathfrak{L}_v^u (af(x_0) + b) = \mathfrak{L}_v^u f(x_0)$;*
3. *якщо $\mathfrak{L}_v^u f(x_0) \neq \mathfrak{L}_v^u g(x_0)$, то $\mathfrak{L}_v^u (f(x_0) + g(x_0)) = \min \{ \mathfrak{L}_v^u f(x_0), \mathfrak{L}_v^u g(x_0) \}$;*
4. *якщо f, g — неперервні і при цьому $\mathfrak{L}_v^u f(x_0) \neq \mathfrak{L}_v^u g(x_0)$, $f(x_0) \neq 0 \neq g(x_0)$, то $\mathfrak{L}_v^u (f(x_0) \cdot g(x_0)) = \min \{ \mathfrak{L}_v^u f(x_0), \mathfrak{L}_v^u g(x_0) \}$.*

Лема 5.1. *Для функції f і пари функцій $(u, v) \in \mathcal{P}$ існує $\mathfrak{L}_v^u f(x_0)$, то*

$$\mathfrak{D}_v^u f(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } \mathfrak{L}_v^u f(x_0) > 1; \\ \infty & \text{при } \mathfrak{L}_v^u f(x_0) < 1. \end{cases} \quad (12)$$

Лема 5.2. *Якщо $f'(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то $\mathfrak{L}f(x) = \mathfrak{L}_0^h f(x) = 1$.*

Теорема 5.2. *Якщо для функцій f і g існують скінченні значення $\mathfrak{L}f(x_0) \geq 0$ і $\mathfrak{L}g(x_0) \geq 0$, причому $f(x_0) = g(x_0) = 0$, то $\mathfrak{L}(f(x_0)g(x_0)) = \mathfrak{L}f(x_0) + \mathfrak{L}g(x_0)$.*

Теорема 5.3 *Нехай задано дійсні функції f і g , такі, що існують скінченні значення $\mathfrak{L}f(\tau_0)$, $\mathfrak{L}g(x_0)$, де $\tau_0 = g(x_0)$. Тоді виконується рівність $\mathfrak{L}f(g(x_0)) = \mathfrak{L}f(\tau_0) \cdot \mathfrak{L}g(x_0)$.*

За допомогою описаної конструкції і твердженням ми побудували узагальнення дотичних, які використовуються для розкладу деяких функцій в степеневі ряди з дійсними показниками і в ланцюгові дробі. Таким чином ми отримали розклади деяких елементарних функцій, які або співпадають або зводяться до вже відомих розкладів у ланцюгові дробі. Винятком стала експонента:

$$e^x = \left[1; x^{-1} - \frac{1}{2}; a_{2l}x^{-1}; a_{2l+1}x^{-1}; \dots \right] = 1 + \frac{1}{\left(x^{-1} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\dots}},$$

де $l = 0, 1, \dots$, $a_{2l} = 16l + 12$, $a_{2l+1} = 4l + 5$. Нам не вдалося знайти схожого розкладу.

Розділ 6 "Аналог логарифмічної (u, v) -похідної та його застосування" присвячений аналогу логарифмічної (u, v) -похідної: дано його означення, основні властивості, зв'язок із (u, v) -похідною і її аналогами й модифікаціями, а також зв'язок з розмірністю Гаусдорфа-Безиковича носія функції. Як наслідок, вдалось показати, що носії раніше побудованих функцій, які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа без збереження хвостів є суперфрактальними множинами (їх розмірність Хаусдорфа-Безиковича дорівнює 1). Використовуючи описаний аналог, було проведено дослідження на диференційовність композиції ніде не диференційовної функції (вона розглянута в роботі Н. Okamoto "A remark on continuous, nowhere differentiable functions") і функції Салема. Було знайдено достатні умови недиференційовності цих композицій функцій, а також її сингулярності (як обмеженої, так і необмеженої варіації).

Нехай $(u, v) \in \mathcal{P}^+$ і $\Lambda_v^u f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \square_v^u f(x_0)}{\ln \square_v^u x}$. Описана границя є аналогом логарифмічної (u, v) -похідної.

Лема 6.1. Границя $\Lambda_v^u f(x_0)$ в залежності від функції f і точки x_0 може набувати лише невід'ємних значень, а також $\pm\infty$.

Лема 6.2. Якщо існує скінченна похідна $f'(x_0)$, відмінна від нуля, то $\Lambda_v^u f(x_0) = 1$. Якщо $\Lambda_v^u f(x_0) < 1$, то функція недиференційовна в точці x_0 . Якщо $\Lambda_v^u f(x_0) > 1$, то $\mathfrak{D}_v^u(x_0) = 0$.

Лема 6.3. Нехай для пари функцій $(u, v) \in \mathcal{P}^+$ існує нескінченно мала послідовність (h_n) така, що $u(h_n)v(h_n) > 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Істинні такі твердження:

1. якщо $\Lambda_v^u f(x_0) > 0$, то функція f – неперервна в точці x_0 ;
2. $\Lambda_v^u A = +\infty$, де $A \in \mathbb{R}$;
3. якщо значення різниці $J(x_0) = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) - \underline{\lim}_{h \rightarrow 0} f(x_0 - h)$ є дійсним числом, відмінним від нуля, то $\Lambda_v^u f(x_0) = 0$;
4. якщо $J(x_0) = \infty$, то $\Lambda_v^u f(x_0) = -\infty$.

Лема 6.4. Якщо f – неперервна у точці x_0 , то $\Lambda_v^u f(x_0) = \Lambda_v^u |f|(x_0)$.

Теорема 6.1. Нехай для неперервних в точці x_0 функцій f, g і пари функції $(u, v) \in \mathcal{P}^+$ існують скінченні значення $\Lambda_v^u f(x_0) \geq 0$ і $\Lambda_v^u g(x_0) \geq 0$. Виконуються такі твердження:

1. для всіх $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ і $b \in \mathbb{R}$ маємо $\Lambda_v^u(a \cdot f + b)(x_0) = \Lambda_v^u f(x_0)$;
2. якщо $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\square_v^u f(x_0)}{\square_v^u g(x_0)} \neq 1$ (зокрема якщо $\Lambda_v^u f(x_0) \neq \Lambda_v^u g(x_0)$), то $\Lambda_v^u(f + g)(x_0) = \min\{\Lambda_v^u f(x_0), \Lambda_v^u g(x_0)\}$;
3. якщо $f(x_0) = 0 = g(x_0)$, то $\Lambda_v^u(f \cdot g)(x_0) \geq \Lambda_v^u f(x_0) + \Lambda_v^u g(x_0)$;
4. при $\xi > 0$ маємо $\Lambda_v^u |f|^\xi(x_0) = \begin{cases} \xi \cdot \Lambda_v^u f(x_0) & \text{при } f(x_0) = 0, \\ \Lambda_v^u f(x_0) & \text{при } f(x_0) \neq 0. \end{cases}$

Теорема 6.2. Для дійсної функції f , визначеної в околі точки x_0 і пари функцій $(u, v) \in \mathcal{P}^+$, істинні такі твердження:

1. якщо $\boxtimes_v^u f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то $\Lambda_v^u f(x_0) = 1$;
2. якщо $\Lambda_v^u f(x_0) < 1$, то функція f – недиференційовна в точці x_0 ;
3. якщо $\Lambda_v^u f(x_0) > 1$, то $\boxtimes_v^u f(x_0) = 0$.

Під записом $\Lambda f(x_0)$ розумітимемо $\Lambda_0^h f(x_0)$.

Лема 6.5. Якщо $\Lambda f(x_0) > 0$, то функція f – неперервна в точці x_0 .

Лема 6.6. Якщо існує $\Lambda f(x_0)$, то для всіх пар $(u, v) \in \mathcal{P}^+$ виконується рівність $\Lambda_v^u f(x_0) = \Lambda f(x_0)$.

Теорема 6.3. Якщо існують $\Lambda f(\tau) \in \mathbb{R}$, $\Lambda g(x_0) \in \mathbb{R}$, де $\tau = g(x_0)$, то

$$\Lambda(f(g))(x_0) = \Lambda f(\tau) \cdot \Lambda g(x_0).$$

Лема 6.6. Якщо існує скінченна $\mathfrak{L} f(x_0) \geq 0$, то $\Lambda f(x_0) = \mathfrak{L} f(x_0)$.

Теорема 6.4. Нехай задано пару нескінченно малих послідовностей $(l_n; r_n)$, таких, що $l_n < l_{n+1} < x_0 < r_{n+1} < r_n$ для всіх $n \in N$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(r_{n+1} - x_0)}{\ln(r_n - x_0)} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(x_0 - l_{n+1})}{\ln(x_0 - l_n)}$. Для того, щоб існувала $\Lambda f(x_0)$, необхідно і достатньо, щоб існували і були рівними границі $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{x_0 - l_n}^{r_n - x_0} f(x_0)}{\ln(r_n - x_0)}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{x_0 - l_n}^{x_0} f(x_0)}{\ln(x_0 - l_n)}$. У випадку існування вони рівні.

Далі для спрощення писатимемо $\square_{x_0 - l_n}^{r_n - x_0} f(x_0) = \square_{[l_n, r_n]} f(x_0)$.

Лема 6.8. Нехай задано дві пари послідовностей (l_n, r_n) і $(\tilde{l}_n, \tilde{r}_n)$, для яких виконуються такі умови

1. $l_n \leq x_0 < r_n$, $x_0 < \tilde{l}_n < \tilde{r}_n$;

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{l}_n = x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{r}_n;$
3. $[\tilde{l}_n; \tilde{r}_n] \subset [x_0; r_n] \subset [l_n; r_n],$ для всіх $n \in \mathbb{N};$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{[l_n; r_n]} f(x_0)}{\ln \square_{[\tilde{l}_n; \tilde{r}_n]} f(x_0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(r_n - l_n)}{\ln(\tilde{r}_n - \tilde{l}_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(r_n - l_n)}{\ln(r_{n+1} - l_{n+1})} = 1.$

Значення правосторонньої границі $\Lambda f(x_0)$ і значення границі $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{[l_n; r_n]} f(x_0)}{\ln(r_n - l_n)}$ існують (не існують) одночасно, у разі існування, вони рівні.

Лема 6.9. Нехай задано дві пари послідовностей (l_n, r_n) і $(\tilde{l}_n, \tilde{r}_n)$, для яких виконуються умови

1. $l_n \leq x_0 < r_n, \tilde{l}_n < \tilde{r}_n < x_0;$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{l}_n = x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{r}_n;$
3. $[\tilde{l}_n, \tilde{r}_n] \subset [l_n; x_0] \subset [l_n, r_n]$ для всіх $n \in \mathbb{N};$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{[l_n; r_n]} f(x_0)}{\ln \square_{[\tilde{l}_n; \tilde{r}_n]} f(x_0)} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(r_n - l_n)}{\ln(\tilde{r}_n - \tilde{l}_n)} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(r_n - l_n)}{\ln(r_{n+1} - l_{n+1})} = 1.$

Значення лівосторонньої границі $\Lambda f(x_0)$ і значення границі $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{[l_n; r_n]} f(x_0)}{\ln(r_n - l_n)}$ існують (неіснують) одночасно, у випадку існування, вони рівні.

Лема 6.10. Нехай задано строго спадну нескінченно малу послідовність пар додатних дійсних чисел (τ_0) , таку, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \tau_{n+1}}{\ln \tau_n} = 1.$

Щоб існувала границя $\Lambda_h^h f(x_0)$, необхідно і достатньо, щоб існувала границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{\tau_n}^{\tau_n} f(x_0)}{\ln \square_{\tau_n}^{\tau_n} x}$. У разі існування вони рівні.

Теорема 6.5. Нехай задано послідовність пар дійсних чисел (l_n, r_n) , таких, що $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$. При цьому $l_n < l_{n+1} < x_0 < r_{n+1} < r_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \max \{r_n - x_0, x_0 - l_n\}}{\ln \min \{r_n - x_0, x_0 - l_n\}} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(r_{n+1} - l_{n+1})}{\ln(r_n - l_n)}. \quad (13)$$

Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \square_{[l_n; r_n]} f(x_0)}{\ln(r_n - l_n)}$ і $\Lambda_h^h f(x_0)$ існують (не існують) одночасно. У разі існування вони рівні.

Лема 6.11. *Виконується рівність*

$$\Lambda_h^h f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \max\{\square_0^h f(x_0); \square_h^0 f(x_0)\}}{\ln |h|}.$$

Цікавим є зв'язок Λ і Λ_h^h із розмірністю Гаусдорфа-Безиковича.

Означення 6.2. *Носієм функції f (неперервної й обмеженої варіації на $[a, b]$) називається множина $\mathcal{N}_f$ усіх значень аргументу, для яких $f'(x) \neq 0$ або не існує.*

Лема 6.12. *Якщо для функції f – неперервної й обмеженої варіації на $[a, b]$ існує таке скінченне число λ_0 , що для всіх $x \in \mathcal{N}_f$ виконується рівність $\Lambda_h^h f(x) = \lambda_0$, то $\dim_H \mathcal{N}_f = \lambda_0$.*

Теорема 6.6. *Нехай для неперервної, строго монотонної, сингулярної функції $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$ існує таке λ_0 , що для майже всіх чисел із $[c, d]$ виконується рівність $\Lambda g(x) = \lambda_0$. Тоді $\dim_H \mathcal{N}_f = \frac{1}{\lambda_0}$.*

Використовуючи описані конструкції і твердження вдалось дослідити диференціальні властивості значної кількості функцій, які є композицією ніде не диференційовної функції $\mathfrak{K}(x \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^3) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{G_3}$ і сингулярної функції Салема $S(x \equiv \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots}^2) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots}^{Q_2}$. Було показано суперактуальність носіїв функції, які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа без збереження хвостів.

В розділі 7 "Дослідження збіжності додатних рядів та невластних інтегралів" розглядається адаптація ідеї використання прямих та обернених відображень (які активно використовувались при побудові (u, v) -похідної разом з її аналогами та модифікаціями) для дослідження збіжності додатних рядів та абсолютної збіжності невластних інтегралів. Отримано нові ознаки збіжності додатних рядів (невластних інтегралів); знайдено достатні умови збіжності-розбіжності узагальненого ряду Флінт Гілла (Flint Hills series) і завдяки цьому встановлено, що міра ірраціональності π дорівнює 2.

ВИСНОВКИ

Дослідження функцій зі складною локальною будовою вимагають адекватних, часто тонких індивідуальних прийомів і засобів,

узгоджених зі способом задання. Запропоновані конструкції операторів диференціювання урізноманітнюють знаряддя дослідження функції. Сингулярні ніде не монотонні функції сьогодні є маловивченим математичним об'єктом. Наведені конструкції функцій цього класу певним чином збагачують їхню індивідуальну теорію.

Основні результати дисертаційного дослідження:

- знайдено еквівалентне означення частоти цифр Q_s -зображення числа;
- знайдено нормальну властивість $\tilde{Q}$ -зображення числа у термінах частот;
- конструктивно описано зліченну некомутативну групу неперервних перетворень відрізка $[0; 1]$ які зберігають хвости Q_s -зображення чисел;
- побудовано континуальний клас неперервних сингулярних функцій, які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа без збереження хвостів;
- запропоновано конструкцію (u, v) -похідну, що є узагальненням класичної і циліндричної похідних;
- вивчено властивості (u, v) -похідної і зв'язки її зі класичною й циліндричною похідними;
- знайдено узагальнення правила Лопітала для розкриття невизначеностей у теорії границь;
- запропоновано конструкцію аналога (u, v) -похідної, вивчено його властивості;
- знайдено достатні умови ніде не монотонності й сингулярності класу функцій, що є узагальненням неперервних ніде не монотонних функцій Працьовитого;
- показано ніде не диференційовність аналогу Трибін-функції, означеної в термінах ланцюгових A_2 -дробів і негатрійкового зображення;
- запропоновано конструкцію логарифмічної (u, v) -похідної й вивчено її властивості;
- встановлено зв'язок логарифмічної (u, v) -похідної зі класичною;
- побудовано $\mathfrak{L}$ -дотичні для формування розкладів деяких функцій у степеневі ряди з дійсними показниками;

- описано два алгоритми для розкладу розв'язків звичайного диференціального рівняння в ланцюговий дріб;
- побудовано аналог логарифмічної (u, v) -похідної й вивчено його властивості;
- встановлено зв'язки аналога логарифмічної (u, v) -похідної з логарифмічною (u, v) -похідною і класичною похідною;
- встановлено зв'язок розмірності Гаусдорфа-Безиковича носія монотонної функції f і операторів $\Lambda_h^h f$ і $\Lambda_0^h f$;
- доведено суперфракทัลність носіїв функцій, які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа без збереження хвостів;
- за допомогою аналога логарифмічної $(h, 0)$ -похідної знайдено достатні умови сингулярності й ніде не диференційовності композиції ніде не диференційовної та сингулярної функцій;
- знайдено нові ознаки збіжності/розбіжності додатних рядів та абсолютної збіжності невластних інтегралів;
- знайдено достатні умови збіжності/розбіжності узагальненого ряду Флінт Гілла (Flint Hills), а також показано, що міра ірраціональності числа π дорівнює 2.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Osaenko R. Y. An analogue of the logarithmic (u, v) -derivative and its application // *Methods of Functional Analysis and Topology*. — 2020. — Vol. 26, no. 2. — P. 179–188. — Access mode: <http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=1349>.
2. Осауленко Р. Ю. Група неперервних перетворень відрізка $[0; 1]$, які зберігають частоти цифр q_s -зображення числа // *Збірник праць Інституту математики НАН України*. — 2016. — Т. 46, № 3. — С. 191–204.
3. Осауленко Р. Ю. Частоти та збіжність додатних числових рядів // *Збірник праць Інституту математики НАН України*. — 2017. — Т. 14, № 4. — С. 65–81.
4. Осауленко Р. Ю. Узагальнення класичної похідної функції в точці і його застосування // *Збірник праць Інституту математики НАН України*. — 2018. — Т. 15, № 1. — С. 100–113.

5. Осауленко Р. Ю. Один клас ніде не монотонних функцій, який містить сингулярні функції // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2019. — Т. 16, № 3. — С. 148 – 159.
6. Осауленко Р. Ю. Узагальнення класичної похідної функції й аналог оператора диференціювання як інструментарій для вивчення диференціальних властивостей функцій // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2019. — Т. 16, № 2. — С. 121–139.
7. Осауленко Р. Ю. Неперервні перетворення одиничного відрізка, які зберігають частоти цифр q_s -зображення числа // Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі». Збірник тез. — С. 59.
8. Осауленко Р. Ю. Група неперервних перетворень відрізка $[0; 1]$, які зберігають частоти цифр q_s -зображення числа // П'ята Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання. Тези доповідей». — 2016. — С. 39.
9. Осауленко Р. Ю. Ознаки збіжності додатних рядів // Матеріали Міжнародної наукової конференції "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь". — 2017. — С. 64–65.
10. Осауленко Р. Ю. Ознаки збіжності додатних числових рядів та абсолютної збіжності деяких невластних інтегралів // Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917-2008). Тези доповідей. — 2017. — С. 44.
11. Осауленко Р. Ю. Упаковні в точці функціональні послідовності // Сьома Всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики. — 2018.
12. Osaulenko R. Normal properties of q -representation of real numbers from $[0; 1]$ // Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations: Abstracts. — 2018. — С. 17.
13. Осауленко Р. Ю. Ніде не монотонні сингулярні функції необмеженої варіації // Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Тези доповідей. — 2019. — С. 27.

АНОТАЦІЇ

Осауленко Р. Ю. Сингулярні ніде не монотонні функції та їх фрактальні властивості. — Кваліфікаційна робота на правах рукопису

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз (111 — математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2021.

Робота виконана в галузі конструктивної теорії локально складних неперервних функцій з фрактальними властивостями. Вона присвячена сингулярним (монотонним та ніде не монотонним) функціям і засобам їх вивчення.

Для дослідження таких функцій запропоновано конструкції операторів диференціювання:

1) (u, v) -похідної:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_{v(h)}^{u(h)} f(x_0)}{\Delta_{v(h)}^{u(h)} x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + u(h)) - f(x_0 - v(h))}{u(h) + v(h)};$$

2) логарифмічної (u, v) -похідної:

$$\mathfrak{L}_v^u f(x_0) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln |\Delta_v^u f(x_0)|}{\ln |\Delta_v^u x|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln |f(x_0 + u(h)) - f(x_0 - v(h))|}{\ln |u(h) + v(h)|};$$

де $(u; v)$ — пара нескінченно малих у нулі функцій, для яких існує проколотиий δ -окілі нуля, у якому $u(h) \neq -v(h)$.

Вивчено властивості цих понять, встановлено їхній зв'язок зі класичною й циліндричною похідними; на нових класах ніде не монотонних (сингулярних і недиференційовних) функцій, продемонстровано їх продуктивність та ефективність; знайдено узагальнення й аналогії.

Указано застосування логарифмічної (u, v) -похідної та (u, v) -похідної у теоріях фракталів, звичайних диференціальних рівнянь, рядів, невластних інтегралів.

Ключові слова: Q -зображення числа, частота цифри зображення числа, ніде не монотонна функція, ніде не диференційовна функція, сингулярна функція, розмірність Гаусдорфа-Безиковича, (u, v) -похідна, логарифмічна (u, v) -похідна

Osaulenko R. Y. Singular non where monotonic functions and its fractal properties. — Manuscript

Candidate of Sciences (PhD) Thesis, Physical and Mathematical Sciences, specialty 01.01.01 — Mathematical Analysis (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2021.

The work is performed in the field of constructive theory of locally complicated continuous functions with fractal properties. It is dedicated to singular (monotonic and nowhere monotonic) functions and ways of their study.

To study the following functions, the constructions of differentiation operators are proposed:

1) (u, v) -derivative as

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_{v(h)}^{u(h)} f(x_0)}{\Delta_{v(h)}^{u(h)} x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + u(h)) - f(x_0 - v(h))}{u(h) + v(h)};$$

2) logarithmic (u, v) -derivative as

$$\mathfrak{L}_v^u f(x_0) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln |\Delta_v^u f(x_0)|}{\ln |\Delta_v^u x|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln |f(x_0 + u(h)) - f(x_0 - v(h))|}{\ln |u(h) + v(h)|};$$

3) analogue of (u, v) -derivative as

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\square_{v(h)}^{u(h)} f(x_0)}{\square_{v(h)}^{u(h)} x};$$

4) analogue of logarithmic (u, v) -derivative as

$$\mathfrak{L}_v^u f(x_0) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \square_v^u f(x_0)}{\ln \square_v^u x};$$

where (u, v) — is a pair of infinitesimals at zero of functions for which is exist a δ -neighborhood of zero, in which hold $u(h) \neq -v(h)$; the notice $\square_v^u f(x_0)$ is oscillation of function f :

$$\square_v^u f(x_0) = \sup_{t \in [x_0 - v(h); x_0 + u(h)]} f(t) - \inf_{t \in [x_0 - v(h); x_0 + u(h)]} f(t).$$

The properties of these concepts are studied, their connection with classical and cylindrical derivatives is established; in the new classes there are no monotonous (singular and non differentiable) functions, their fruitful and efficiency are demonstrated.

The use of logarithmic (u, v) - derivative, (u, v) - derivative and their analogues in theories of fractals, ordinary differential equations, series, improper integrals is indicated.

Key words: $\tilde{Q}$ -representation of a number, frequency of a digit of representation of a number, nowhere monotonic function, nowhere differential function, singular function, Hausdorff-Besicovitch dimension, (u, v) -derivative, logarithmic (u, v) -derivative

Підписано до друку 16.03.2021. Формат $60 \times 84/16$. Папір друк.
Офсет. друк. Фіз. друк. арк. 1,6. Умовн. друк. арк. 1,5.
Тираж 100 пр. Зам. 40.

Інститут математики НАН України,
01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.