

Відгук

про дисертацію Салімова Руслана Радіковича "Метод неконформного модуля у теорії відображень зі скінченним спотворенням", подану до захисту на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

1. Актуальність дослідження і його мета. Добре відомо, що розв'язки системи рівнянь Коші-Рімана, якщо їх трактувати як дійсну та уявну частини деякої функції $f = u + iv: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, у випадку їхньої диференційовності як функцій від двох змінних, здійснюють конформне відображення $(u(x, y), v(x, y)): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ у кожній точці $z_0 = x_0 + iy_0$ такій, що $f'(z_0) \neq 0$, тобто мають цілий ряд чудових геометричних властивостей, як ось: існування скінченного лінійного розтягу в точці, консервативність кутів, конформна еквівалентність кожної однозв'язної області, межа якої містить більше, ніж дві точки, до одиничного круга (теорема Рімана), збереження вигляду (інваріантність) диференційного оператора Лапласа і т.д. Дещо подібне можна стверджувати про геометричні властивості відображень, що є розв'язками рівняння Бельтрамі $f_{\bar{z}} = \mu(z)f_z$ за умови еліптичності рівняння, тобто, за умови $\sup_z |\mu(z)| < 1$ на вимірній комплекснозначний коефіцієнт μ . Власне, у цьому зв'язку вживається термін квазіконформність. Основні висновки загальної теорії квазіконформних відображень спираються на той факт, що кожен розв'язок рівняння Бельтрамі є гомеоморфізмом скінченної комплексної площини самої на себе і нормування $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, робить розв'язок єдиним. Апарат квазіконформних відображень продемонстрував свою силу при розв'язанні проблем з різних розділів математики. Відомо багато прикладів застосування таких відображень, зокрема, D. Drasin у 1977 р. (Acta Math, 1977, v.138, p.83–151) ефективно застосував квазіконформні гомеоморфізми комплексної площини самої на себе при розв'язанні у загальній постановці оберненої задачі теорії Неванлінни (теорії розподілу значень), яка мала на той час тривалу 50-річну історію і була розв'язана лише у дуже вузьких постановках (власне, він розглянув квазімероморфні функції вигляду $g = f \circ h$, f — мероморфна функція, h — квазіконформний гомеоморфізм). Зазначимо, що квазіконформні відображення (як і ті, що здійснюються аналітичними функціями) є відкритими і дискретними відображеннями площини. Як і у випадку конформних відображень, поняття квазіконформності можна вводити, виділяючи їх основні геометричні властивості. Першими це зробили, напевно, L. Ahlfors, а також A. Berling та F. Gehring.

Природним узагальненням поняття квазіконформності для відображень n -вимірних просторів є поняття квазірегулярного відображення, запроваджене у 1966 р. Ю.Г. Решетняком. Власне, неперервне відображення $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$, G — область в \mathbb{R}^n , є квазірегулярним, якщо f належить до локального простору Соболева $W_{loc}^{1,n}(G)$ і існує стала така, що $1 \leq K'' < +\infty$ і майже скрізь (м.с.) виконується нерівність $\|f'(x)\|^n \leq K'' \cdot J_f(x)$, де f' — формальна похідна відображення f , означена в термінах частинних похідних у точці x , а $J_f(x)$ — якобіан відображення у точці x . Найменша стала в останній нерівності називається зовнішньою дилатацією $K_O(f)$. Величина $K_I(f) = \min\{K': J_f(x) \leq K' \min\{\|f'(x)h\|^n: \|h\| = 1\}\}$ — внутрішня дилатація, $K = \max\{K_O(f), K_I(f)\}$ — (максимальна) дилатація. При $n = 2$ кожне квазірегулярне відображення є композицією квазіконформного гомеоморфізму площини і аналітичної функції (і $K'' = 1$), але для $n \geq 3$ істотним є випадок $K'' > 1$, позаяк при $K'' = 1$ у випадку \mathbb{R}^n , $n \geq 3$ за теоремою типу Ліувілля кожне квазірегулярне відображення на \mathbb{R}^n є перетворенням Мебіуса. У 1980 р. С. Рікман довів, що для кожної пари $K'', n \geq 3$ існує ціле число $q = q(K'', n)$ таке, що кожне K'' -регулярне відображення $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, яке пропускає q різних значень, є сталим. Він же у ряді публікацій протягом 1983-1992 р.р. розвинув теорію розподілу значень квазірегулярних відображень, отримавши, як початкове твердження у цьому

колі питань — теорему Пікара, так і співвідношення дефектів (див. Seppo Rickman, Lect. Not. Math., 1992, v.1508, p.93–103).

Варто зазначити, що перелік прізвищ математиків, що присвятили свої дослідження, як описанню властивостей, згаданих вище класів відображень, так і їх застосуванням, є дуже великим. Вкажемо лише, що практично протягом всього ХХ ст. в різних наукових установах України увага до цих класів була дуже серйозною. Так, наприклад, у 50-х – 70-х роках ці дослідження у м. Львові проводили Л.І. Волковиський, а також фактичні його учні Д.Б. Потягайло, П.П. Белінський, А.А. Гольдберг і І.М. Песін, учні останнього А.П. Копилов і С.П. Пономарьов. Популярними були і активно використовувались у подальші роки теореми типу М.В. Келдиша і С.Е. Варшавського про конформні відображення криволінійних смуг. Зрештою, і цей перелік прізвищ і питань, пов'язаних з геометрією відображень, навіть у цьому контексті досліджень, що проводились у Львові, є далеко неповним.

Наступним важливим кроком, що зумовив подальший погрес у дослідженні властивостей відображень $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, стало запровадження поняття Q -гомеоморфізму, в основу якого покладено модульну нерівність (О. Мартіо, 2000 р.). В останні два десятиріччя проводились інтенсивні дослідження введеного поняття, як з точки зору встановлення властивостей таких відображень, знаходження його специфікацій для різних відомих класів відображень, поширення на нові класи відображень (кільцеві Q -гомеоморфізми і, більш загально, Q -відображення), так і з точки зору пошуку подальших його узагальнень шляхом відмови від деяких, можливо надмірних обмежень. Один з центрів таких досліджень протягом тривалого часу був зосереджений у м. Донецьку, де активно проводили свої дослідження В.Я. Гутлянський, В.І. Рязанов, Є.О. Севостьянов, Р.Р. Салімов та інші. Зокрема, авторів даної дисертації Р.Р. Салімову належить один з центральних результатів у цьому напрямку: якщо функція Q , за допомогою якої визначається Q -гомеоморфізм є локально інтегрованою, то кожний Q -гомеоморфізм є абсолютно неперервним на лініях, майже скрізь диференційовним (у випадку квазірегулярного відображення) і належить до простору Соболева $W_{loc}^{1,1}$. У подальшому повний аналог цього результату було отримано спільно Є.О. Севостьяновим і Р.Р. Салімовим для відкритих дискретних кільцевих Q -відображень, власне, по-суті встановлено, що умова гомеоморфності є зайвою. Важливий інструмент в руки дослідника в цьому колі питань дає поняття p -модуля. Вкажемо, що кожний Q -гомеоморфізм $f: D \rightarrow D'$ відносно p -модуля є кільцевим Q -гомеоморфізмом відносно p -модуля в області D .

Варто зазначити, що поняття кільцевих Q -відображень відносно p -модуля з'явилося відносно недавно як під впливом дуже результативних досліджень властивостей згаданих вище відображень, так і під впливом якісно подібних властивостей у K -квазіконформних відображень (це поняття ввів F. Gehring у 1962 р., як таких відображень, що змінюють модуль кільцевої області не більше, ніж в K разів). В актуальності проблеми описання властивостей таких відображень та встановлення їхніх зв'язків з іншими важливими класами відображень, що розглядаються у дисертаційній роботі Р.Р. Салімова, не повинно викликати сумніву. А результативність, проведених у дисертації Р.Р. Салімова таких досліджень і поява цікавих і глибоких застосувань, зокрема, до комплексного рівняння Бельтрамі, переконують у безумовній їхній актуальності.

2. Наукова новизна результатів дисертаційної роботи.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню властивостей відображень зі скінченним спотворенням. У дисертації розвивається метод неконформного модуля (тобто, p -модуля, що, взагалі кажучи, не зберігається при конформних відображеннях), на відміну від методу конформного p -модуля, який в основному і застосовувався попередниками в зазначеному колі питань. Зокрема у дисертації Р.Р. Салімова метод неконформного p -модуля застосовується для дослідження диференціальних, локальних, асимпто-

тичних та граничних властивостей відображень зі скінченим спотворенням, кільцевих та нижніх Q -гомеоморфізмів, визначених в термінах неконформного p -модуля. Дисертаційна робота складається зі вступу, шести розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. У вступі визначено об'єкт і предмет дослідження, зроблено не дуже вдалу, на наш погляд, спробу обґрунтувати актуальність теми дисертаційного дослідження. Сформульовані там мета, завдання, описані методи проведених досліджень, дають значно краще уявлення про актуальність теми дисертаційного дослідження.

У *першому розділі* автором написано, що там дається короткий огляд літератури за темою дисертації. Дозволю собі запитати: 45 ст. дисертаційної роботи – це короткий огляд? А що ж тоді – великий? Зазначу, що насправді там сформульовано доволі значну кількість результатів досліджень інших авторів, які як мають безпосереднє відношення до результатів даної дисертації, так і доволі віддалено і опосередковано стосуються її результатів. При цьому практично відсутнє, як у цій частині дисертації, так і в інших її частинах, їхнє порівняння з результатами дисертаційного дослідження. Зокрема, відсутнє таке конкретне порівняння з результатами досліджень Є.О. Севостьянова, які чи не найближче прилягають до досліджень, проведених у даній дисертації. Автор практично завжди обмежується переліком або авторів таких досліджень або навіть лише вказівками на позиції у списку використаної літератури (загальна кількість джерел – 453).

У *другому розділі* досліджено властивості кільцевих Q -гомеоморфізмів, визначених в термінах p -модуля. Отримано характеристизацію таких відображень в термінах модульних оцінок. Знайдено достатню умову диференційовності майже скрізь. Доведено аналоги нерівності М.О. Лаврентьева про спотворення площі круга при квазиконформних відображеннях та теореми Ікоми–Шварца для кільцевих Q -гомеоморфізмів, визначених в термінах p -модуля. Доведено аналог леми Герінга про локальну ліпшицевість. Знайдено достатні умови локальної та логарифмічної гельдеровості, степеневого та логарифмічного порядку зростання гомеоморфізмів. Досліджено асимптотичну поведінку кільцевих Q -гомеоморфізмів на нескінченності. Отримано аналог результату Мартіо–Рікмана–Вяйсяля про «сильне» зростання в околі нескінченності відображень з обмеженим спотворенням.

Третій розділ дисертації присвячено дослідженню властивостей нижніх Q -гомеоморфізмів, визначених в термінах p -модуля. Отримано характеристизацію таких відображень в термінах модульних оцінок та встановлено взаємозв'язок між нижніми та кільцевими Q -гомеоморфізмами, визначеними в термінах p -модуля. Знайдено достатні умови локальної ліпшицевості та гельдеровості нижніх Q -гомеоморфізмів в термінах p -модуля. Доведено степеневий аналог теореми Ікоми–Шварца. Досліджено асимптотичну поведінку на нескінченності. Сформульовано цілий ряд результатів, що впливають з основної теореми про взаємозв'язок між нижніми та кільцевими Q -гомеоморфізмами, визначеними в термінах p -модуля.

Четвертий розділ дисертації присвячено застосуванням теорії кільцевих та нижніх Q -гомеоморфізмів, визначених в термінах p -модуля, до відображень класу Соболева $W_{loc}^{1,1}$ на комплексній площині та вироджених рівнянь Бельтрамі. Встановлено, що гомеоморфні розв'язки вироджених рівнянь Бельтрамі з узагальненими похідними є кільцевими та нижніми Q -гомеоморфізмами, де Q – дотична дилатація, та доведено узагальнені теореми про неперервне і гомеоморфне продовження вказаних розв'язків. Встановлено загальні умови на дотичну дилатацію, достатні для існування регулярних розв'язків задачі Діріхле для вироджених рівнянь Бельтрамі в довільних жорданових областях. Доведено аналог результату Мартіо–Рікмана–Вяйсяля про оцінку швидкості зростання відображень з обмеженим спотворенням в околі нескінченно віддаленої точки. Встановлено, що будь-який гомеоморфізм класу Соболева $W_{loc}^{1,1}$ на комплексній площині зі скінченим спотворенням є нижнім та кільцевим Q -гомеоморфізмом відно-

сно p -модуля. Для гомеоморфізмів класу Соболева зі скінченним спотворенням отримано достатні умови скінченної ліпшицевості, локальної гелдеровості та логарифмічної гелдеровості. Отримано аналоги нерівності М.О. Лаврентьєва для площі образу круга при квазіконформних відображеннях та теореми Ікоми–Шварца.

У *n*'ятому розділі досліджуються відображення класів Орліча–Соболева $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$ в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$ за умови типу умови Кальдерона на функцію φ і, зокрема, класи Соболева $W_{\text{loc}}^{1,q}$ при $q > n-1$. Доведено, що відкриті відображення класів Орліча–Соболева $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$ за умови типу умови Кальдерона на функцію φ мають повний диференціал майже скрізь, що узагальнює добре відомий результат Меньшова–Герінга–Лехто на площині та теорему Вяйсяля в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Доведено, що неперервні відображення класу $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$ за умови типу умови Кальдерона на функцію φ володіють (N)-властивістю Лузіна на майже всіх гіперплощинах; зокрема, сказане відноситься до відображень класу Соболева $f \in W_{\text{loc}}^{1,p}$ при $p > n-1$. Доведено, що класи Орліча–Соболева $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$ за умови типу умови Кальдерона на функцію φ є нижніми та кільцевими Q -гомеоморфізмами. Отримані теореми про одностайну неперервність для гомеоморфізмів класів Орліча–Соболева. Доведено аналог результату Мартіо–Рікмана–Вяйсяля про оцінку швидкості зростання відображень з обмеженим спотворенням в околі нескінченно віддаленої точки. Також встановлено, що класи Орліча–Соболева $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$ за умови типу умови Кальдерона на функцію φ є нижніми та кільцевими Q -гомеоморфізмами відносно p -модуля. Отримані достатні умови скінченної ліпшицевості, локальної та логарифмічної гелдеровості, степеневого та логарифмічного порядку зростання гомеоморфізмів, що належать вказаним класам Соболева чи Орліча–Соболева.

Шостий розділ дисертації присвячено відображенням з розгалуженням, що задовольняють деякі модульні нерівності. Встановлено співвідношення між Q -відображеннями, визначеними в термінах p -модуля, та класами Соболева $W_{\text{loc}}^{1,q}$, встановлено аналог результату Б. Боярського і Т. Іванця про невіродженість якобіана, отримано достатні умови N та N^{-1} властивостей Лузіна, отримано оцінки зверху якобіана, p -внутрішніх та α -зовнішніх дилатацій через функцію Q . Для кільцевих Q -відображень, визначених в термінах p -модуля, отримано достатні умови скінченної ліпшицевості, локальної та логарифмічної гелдеровості. Отримано аналог результату Вяйсяля про абсолютну неперервність на лініях відображень, що задовольняють p -модульну нерівність відносно циліндрів у просторі.

На думку автора даного відгуку, основними результатами дисертаційної роботи Р.Р. Салімова є характеристика кільцевих і нижніх Q -гомеоморфізмів в термінах p -модуля та встановлення взаємозв'язку між цими гомеоморфізмами, а також доведення того, що гомеоморфні розв'язки вироджених рівнянь Бельтрамі з узагальненими похідними є кільцевими та нижніми Q -гомеоморфізмами, де Q – дотична дилатація, та доведення теорем про неперервне і гомеоморфне продовження вказаних розв'язків та їх асимптотичну поведінку на нескінченності.

Зазначимо, що ми зосередили увагу тільки на результатах, які утворюють ядро дисертаційної роботи і в достатній мірі характеризують новизну і силу дисертації. Зі сказаного вище у цьому пункті, а також в актуальності, випливає, що всі основні результати дисертаційної роботи Р.Р. Салімова є новими і мають важливе значення, як для розвитку теорії Q -відображень в цілому, так і для можливих застосувань, деякі з яких вже вказано у самій дисертації.

3. Обґрунтованість і достовірність наукових положень. Всі результати дисертаційної роботи Р.Р. Салімова строго доведені на сучасному математичному рівні і тому щодо їхньої вірогідності не виникає сумніву.

4. Зауваження. 1. Оформлення дисертаційної роботи залишає бажати кращого — вона містить значну кількість описок, стилістичних огріхів і прикрих недоглядів, серед

яких вкажемо на наявність великого спадку від неправильного перекладу з російської мови на українську мову як окремих слів, так і цілих зворотів та речень, вживання неправильних відмінків та часових форм. Зазвичай, при читанні тексту дисертації це не створює особливих труднощів для розуміння написаного. Проте наведемо кілька прикладів зворотного характеру. Що означають фрази на с.9 автореферату (див також відповідні місця в тексті дисертації): (перед теоремою 2.2.1) – "В наступній теоремі встановлено критерій належності гомеоморфізмів класу кільцевих Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $p > 1$ "; (перед теоремою 2.3.1) – "В наступній теоремі встановлено достатні умови диференційовності майже скрізь кільцевого Q -гомеоморфізма відносно p -модуля"; на ст.12. (перед теоремою 3.2.1) – "У наступній теоремі встановлено критерій належності гомеоморфізмів класу нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $p > n - 1$ "; на ст.103 (перед теоремою 2.2.2) "Наслідком лем 2.2.1, 2.2.2 є наступний критерій належності класу кільцевих Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $p > 1$ ". Оponent не ставив собі за мету наводити перелік всіх мовних огріхів тексту, тому, на цьому зупинимо перелік огріхів мовних. Відзначимо деякі інші.

4.2. У підрозділі "Особистий внесок здобувача", де йдеться про спільні роботи з іншими авторами – там нема практично жодної конкретики, крім твердження, що із, зазначеного першим, переліку робіт, до дисертації увійшли результати, отримані особисто здобувачем, а з другого переліку вказано, що А. Гольбергу належить визначення напрямку досліджень... І ще щось у цьому ж стилі. Як це розуміти? Адже і в цілому ряді інших статей є співавтори. Зрештою, акуратність припускала би, як і вимагають правила оформлення, описання внеску у спільні публікації всіх співавторів.

4.3. Дуже сповільнює читання дисертації відсутність Списку умовних позначень.

4.4. Ніде й нічого у дисертації хоча би більш-менш детально не обговорюється те, що \mathbb{R}^n є одноточковою компактифікацією простору \mathbb{R}^n , тобто, компактифікацією відносно хордальної відстані, і, швидше за все не в останню чергу з цією обставиною пов'язана подібність ряду властивостей відображень, що досліджуються, до властивостей квазіконформних відображень і успішність досліджень, що проводяться у тому ж напрямку, що дослідження у дисертації.

4.5. Назва дисертаційної роботи суперечить вимогам щодо вибору тем дослідження – у назві якраз потрібно уникати фраз, що означають "застосування конкретного методу (у даному випадку методу неконформного модуля)". Проте назва даної дисертаційної роботи якраз цілком відображає суть того, що написано і зроблено у тексті дисертації.

Підсумовуючи цей перелік зауважень, зазначу, що виявлені огріхи не спотворюють змісту і сприйняття тексту дисертації, доведення якої, хоча й написані іноді занадто конспективно, проте є зрозумілими, а сумнівів у правильності основних положень дисертації у автора відгуку не виникає.

5. *Висновки.* Дисертаційна робота має теоретичний характер, а її результати мають вагомий теоретичний значення. В ній досліджуються властивості кільцевих Q -відображень відносно неконформних p -модулів, тобто просторових відображень з довільною характеристикою квазіконформності. У дисертації встановлені достатні умови диференційовності м.с. і абсолютної неперервності на лініях кільцевих Q -відображень відносно p -модулів, досліджено локальне і граничне поведіння таких відображень з необмеженою характеристикою квазіконформності. Встановлено, що гомеоморфні розв'язки вироджених рівнянь Бельтрамі з узагальненими похідними є кільцевими та нижніми Q -гомеоморфізмами, де Q – дотична дилатація, та доведено нові узагальнені теореми про неперервне і гомеоморфне продовження вказаних розв'язків та їх асимптотичну поведінку на нескінченності. Все це дозволяє стверджувати, що дисертаційна робота Р.Р. Салімова є завершеним виконанням на актуальну тематику науковим дослідженням, у якому розроблено теоретичні положення, що можна кваліфікувати як вагомий

вклад у теорію просторових відображень.

Основні результати дисертації опубліковано і анонсовано в 62 наукових публікаціях (40 у фахових виданнях, з яких 16 без співавторів, 26 статей у виданнях віднесених до науково-метричних баз Scopus і WoS). Автореферат адекватно передає зміст дисертаційної роботи.

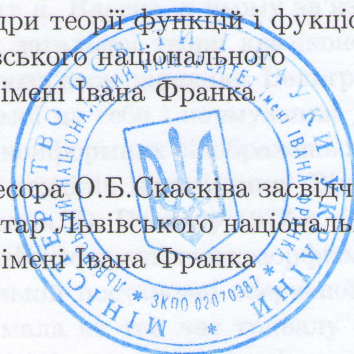
З огляду на сказане вище, вважаю, що дисертаційна робота Р.Р. Салімова задовольняє вимоги пп. 9, 10, 12-14 "Порядку присудження наукових ступенів", затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24 липня 2013 року (із змінами і доповненнями), щодо докторських дисертацій, результати дисертаційної роботи відповідають вимогам до наукового рівня результатів (актуальність, новизна, наукова значимість) докторської дисертації, а її автор, **Руслан Радикович Салімов**, заслуговує присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01. — математичний аналіз.

Офіційний опонент

професор, доктор фізико-математичних наук,
в.о. зав.кафедри теорії функцій і функціонального
аналізу Львівського національного
університету імені Івана Франка

О.Б. Скасків

Підпис професора О.Б.Скасківа засвідчую,
Вчений секретар Львівського національного
університету імені Івана Франка



О.С.Грабовецька