ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Салімова Руслана Радіковича

”**Метод неконформного модуля у теорії відображень зі скінченним спотворенням**”

подану на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук за спеціальністю

01.01.01 – математичний аналіз, 111 – математика

Метод модуля сім'ї кривих, запропонований Л. Альфорсом і А. Берлінгом в 1950 році в теорії конформних відображень, виявився одним з основних інструментів при дослідженні квазіконформних, квазірегулярних і більш загальних класів відображень на площині і в просторі. Дисертаційна робота Р.Р. Салімова присвячена подальшому розвитку методу модуля і вирішення на цій основі цілого ряду актуальних проблем сучасної теорії плоских і просторових відображень. В якості основного інструменту досліджень обраний так званий p–модуль сім'ї кривих, який при p рівному розмірності простору збігається з модулем Альфорса-Берлінга. Як об'єкти дослідження розглядаються класи відображень, для яких p–модулі образів сімей кривих мажоруються зверху або знизу деякими інтегральними середніми від заданої вимірної функції, що характеризує даний клас відображень. Певна універсальність такого підходу полягає в тому, що введені таким чином класи функцій (відображень) включають в себе квазіконформні і квазірегулярні відображення, відображення з обмеженим спотворенням, класи відображень Соболєва та Орліча-Соболєва та багато інших. З іншого боку, розвинутий геометричний апарат оцінок p–модулів сімей кривих, дозволяє для виділених класів відображень досліджувати питання збіжності, регулярності, граничної поведінки, усувності особливих точок, встановити теореми спотворення і вирішити ряд інших важливих проблем. Відзначимо, що теорія відображень на площині, яка пов'язана в першу чергу з гомеоморфними розв'язками диференціального рівняння Бельтрамі, а також просторові квазіконформні і квазірегулярні відображення інтенсивно розвиваються в провідних математичних школах Фінляндії, Росії, США, Ізраїлю, Японії, Щвейцарії та інших країнах.

Дисертаційна робота Салімова Руслана Радіковича “Метод неконформного модуля у теорії відображень зі скінченним спотворенням”, відноситься до відзначеного вище напрямку і її **актуальність** не викликає сумнівів як з точки зору досліджених у роботі фундаментальних проблем сучасної теорії функцій і відображень, так і з точки зору можливих застосувань. Відзначу також, що дисертація виконана в рамках наукових тем № 0116U003060 і № 0117U004077, які розробляються в Інституті математики НАН України.

Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, 6 розділів, висновків, списку цитованої літератури та додатка. Повний обсяг роботи становить 365 сторінок.

У вступі дисертації обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету і задачі дослідження, основні результати дисертації, відмічено новизну основних результатів та їх практичне значення. Прокоментовано апробацію, описано структуру дисертаційної роботи і її основний зміст.

Розділ 1 присвячений огляду літератури, де сформульовані деякі найбільш близькі до теми дисертації результати з попередніх робіт.

Основна мета роботи — вивчення диференціальних, локальних, асимптотичних і граничних властивостей відображень, які задовольняють p-модульні оцінки. Отримані результати застосовуються до відображень класу Соболєва на комплексній площині та класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ за умови типу Кальдерона на функцію φ у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

Перейдемо до стислої характеристики основних результатів дисертації.

Розділ 2 присвячено дослідженню властивостей кільцевих Q-гомеоморфізмів у термінах p-модуля. Отримано теорему про характеризацію кільцевих Q-гомеоморфізмів у термінах p-модуля при $p > 1$ (теорема 2.2.1). Знайдено достатні умови диференційовності м.с. (теорема 2.3.1, наслідок 2.3.3). Отримано оцінки міри образу кулі при кільцевих Q-гомеоморфізмах у термінах p-модуля (теорема 2.4.1), що узагальнює відому оцінку М.О. Лаврентьєва про спотворення площі круга при квазіконформних відображеннях. Доведено аналог теореми Ікоми–Шварца (теорема 2.5.1). Отримано аналог леми Герінга про локальну ліпшицевість (теорема 2.7.1). Знайдено достатні умови локальної гельдеровості (теорема 2.8.2) і логарифмічної гельдеровості (теорема 2.9.1). Доведено аналог результату Мартіо–Рікмана–Вяйсяля (теорема 2.6.1) про асимптотичну поведінку на нескінченності.

Розділ 3 присвячено дослідженню властивостей нижніх Q-гомеоморфізмів у термінах p-модуля. Основні результати цього розділу полягають у наступному: отримано характеризацію нижніх Q-гомеоморфізмів у термінах p-модуля при $p > n - 1$ (теорема 3.2.1) та встановлено зв'язок між нижніми і кільцевими Q-гомеоморфізмами у термінах p-модуля (теорема 3.2.2).

У розділі 4 вивчаються відображення зі скінченним спотворенням класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ на комплексній площині. Встановлено, що гомеоморфні розв'язки вироджених рівнянь Бельтрамі є кільцевими та нижніми Q-гомеоморфізмами, де Q є дотична дилатація (теореми 4.1.1 і 4.1.2). У підрозділі 4.2 отримані достатні умови неперервного та гомеоморфного продовження розв'язків рівнянь Бельтрамі. У підрозділі 4.3 отримані умови на дотичну дилатацію, які гарантують існування регулярного розв'язку задачі Діріхле для вироджених рівнянь Бельтрамі в жордановій області.

Встановлено, що гомеоморфізми зі скінченним спотворенням на комплексній площині є нижніми Q-гомеоморфізмами відносно p-модуля (теорема 4.6.1) та кільцевими Q_*-гомеоморфізмами відносно p'-модуля (наслідок 4.6.2), де $Q = K_p(z, f)$, $Q_* = K_p^{\frac{1}{p-1}}(z, f)$ та

$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Для вказаних гомеоморфізмів знайдено достатні умови скінченної ліпшицевості (теорема 4.7.1), локальної гельдеровості (теорема 4.7.2) і логарифмічної гельдеровості (теорема 4.7.3), отримано теорему про спотворення площі образу круга (теорема 4.7.4) та встановлено аналог теореми Ікоми–Шварца (теорема 4.7.5).

У розділі 5 досліджуються відображення зі скінченним спотворенням у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Доведено, що відкриті відображення класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ за умови типу умови Кальдерона на функцію φ мають повний диференціал майже скрізь (теорема 5.3.1). Встановлено, що неперервні відображення класу $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ за умови типу Кальдерона на функцію φ володіють (N)-властивістю Лузіна на майже всіх гіперплощинах (теорема 5.4.2). Зокрема, вище сказане відноситься до відображень класу Соболева $f \in W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$.

Доведено, що класи Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ за умови типу Кальдерона на функцію φ є нижніми та кільцевими Q-гомеоморфізмами відносно p-модуля (теорема 5.8.1, наслідок 5.8.2, теореми 5.11.1 і 5.11.2). Завдяки чому досліджено асимптотичну поведінку на нескінченності гомеоморфізмів класів Орліча–Соболєва (теореми 5.10.1 і 5.10.2) та встановлено достатні умови одностайної неперервності сімей таких відображень (теореми 5.9.4 і 5.9.6). Знайдено достатні умови скінченної ліпшицевості (теорема 5.13.1), локальної гельдеровості (теорема 5.11.3) і логарифмічної гельдеровості (теорема 5.11.5) гомеоморфізмів класів Орліча–Соболєва.

Розділ 6 присвячено негомеоморфним відображенням, що задовольняють деякі модульні нерівності. Для кільцевих Q-відображень відносно p-модуля при $n-1 < p < n$ отримані оцінки якобіана й операторної норми матриці Якобі через функцію Q (теорема 6.1.1). Встановлено співвідношення між Q-відображеннями, визначеними в термінах p-модуля, та класами Соболєва $W^{1,q}_{\rm loc}$ (теорема 6.4.3). Встановлено аналог результату Боярського – Іванця про невиродженість якобіана, отримано достатні умови N^{-1} та N властивостей Лузіна (наслідок 6.4.8, теорема 6.4.4, наслідок 6.4.3). Отримано оцінки зверху p-внутрішньої дилатації через функцію Q (теореми 6.2.1 і 6.5.1).

Знайдено достатні умови скінченної ліпшицевості (теорема 6.3.1), локальної гельдеровості (теорема 6.3.2) і логарифмічної гельдеровості (теорема 6.3.3) кільцевих Q-відображень відносно p-модуля.

Отримано аналог результату Вяйсяля про абсолютну неперервність на лініях відображень, що задовольняють p-модульну нерівність відносно циліндрів у просторі (теорема 6.6.1).

Пропозиції.

1). Пропоную автору дисертаційної роботи отримати оцінки спотворення міри для довільних вимірних множин, що відкриває шлях до розв'язання багатьох задач у теорії відображень.

2). Пропоную звернути увагу на наступний приклад: D–одиничне коло, $f(z) = z\exp\{1-1/|z|^2\}$ - автоморфізм кола. При цьому $K(z) = 1 + 2/|z|^2$ - локально не інтегровна і $f(z)$ не належить класу Соболєва $W^{1,1}_{\text{loc}}$. Чи належить це відображення до одного з класів, які досліджуються в дисертації?

Зауваження.

1). Перш за все, хочу відзначити не зовсім вдалу, на мій погляд, назву дисертації. Поняття "неконформний модуль" слід було б замінити точнішим поняттям: "p–модуль сімейства кривих (і поверхонь)".

2). У доведенні однієї з центральних теорем 4.1.1 має використовуватися інша, відмінна від означення, формула для обчислення дотичної дилатації, про яку в дисертації не знайдено ніяких згадок і посилань. Слід було дати більш розгорнутий виклад відповідного фрагменту доведення і зробити посилання на формули (3.9) та (3.10) на с. 42 в [*] або (11.33) та (11.43) в [**], де [*]. Bojarski B., Gutlyanskii V., Martio O., Ryazanov V. Infinitesimal geometry of quasiconformal and bi-Lipschitz mappings in the plane // EMS Tracts in Mathematics, 19, European Mathematical Society (EMS), Zurich. - 2013. - 205 p. [**]. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Moduli in Modern Mapping Theory // Springer Monographs in Mathematics. - Springer, New York etc. - 2009. - 367 p.

3). Ще одна центральна теорема 4.1.2 сформульована в припущенні локальної інтегровності дотичної дилатації. З іншого боку, аналогічна теорема, яка доведена автором дисертації в роботі On regular homeomorphisms in the plane // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., 2010. - 35. - P. 285-289, встановлена для регулярних гомеоморфізмів належного класу Соболєва без припущення локальної інтегровності дотичної дилатації. Потрібно дати роз'яснення і, в разі необхідності, навести належні приклади.

До тексту дисертаційної роботи є наступні технічні зауваження:

слова "скінченним" (с. 23, 2-й і 5-й абзаци), "відображеннями" (с. 24, 1-й абзац), "Q-відображення" (у назві пункту 1.13 на с. 88) слід писати з подвоєним "н";

на с. 24, останній абзац, нерівність "$n \geq 3$" бажано писати в одному рядку, не розділяючи;

на с. 25, потрібен відступ після "Практичне значення одержаних результатів.";

на с. 31, 1-й абзац, замість "За Герингом" потрібно писати "За Герінгом";

на с. 40 у теоремі 4.7.4 в останній виносній формулі замість крапки має бути кома;

на с. 49., 9-й абзац, зайва крапка усередині речення після номера теореми 6.4.4;

на с. 73, 5-й абзац, замість "борелівої" має бути "борелевої";

на с. 96, 5-й абзац, замість "p-мудуль" має бути "p-модуль";

на с. 102 у формулі (2.18) в кінці має бути кома, а не крапка;

на с. 124 остання крапка зайва;

на с. 126, після формули (2.64) потрібно поставити кому;

на с. 139 після формули (2.100) і на с. 202 після формули (4.13) має бути крапка замість коми;

на с. 129 у теоремі 2.7.2 і в деяких інших місцях дисертації замість "позитивна стала" потрібно писати "додатна стала";

на с. 165, 3-й абзац, замість (5.10.4) має бути (3.27);

на с. 180 перед наслідком 4.1.2 в кінці речення міститься зайвий пробіл перед крапкою;

на с. 193 у наслідках 4.3.6 і 4.3.7 у виносних формулах слід вказати, що $\varepsilon \to 0+0$;

на с. 198 у реченні перед теоремою 4.5.1 замість $f \to \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ має бути $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$;

на с. 207 у прикладі 4.7.2 треба вказати, що $\sigma > 0$;

на с. 210 у теоремі 4.7.4 і на с. 211 у теоремі 4.7.5 у випадку $p = 2$ замість K має бути K_2;

на с. 234 в означенні 5.6.1 слід вказати, що $k > 0$;

на с. 235 у твердженні 5.6.1 з'являється M_n, а пояснення стосовно того, що це таке, дається далі у твердженні 5.6.2;

на с. 249 у зауваженні 5.9.2 і на с. 250 у теоремі 5.9.2 треба вказати, що $c > 0$;

на с. 297 у наслідку 6.3.6 у другій виносній формулі пропущена стала C.

Відзначимо, що наведені вище зауваження не впливають на загальну високу оцінку дисертації.

Переходячи до загальної оцінки, відзначу, що дисертаційна робота Р.Р. Салімова є завершеною науковою працею, присвяченою дослідженню актуальної наукової проблеми – теорії відображень зі скінченним спотворенням. При цьому пропонуються важливі і змістовні застосування отриманих результатів. Результати дисертаційної роботи є новими, а їх обґрунтованість базується на строгих та повних доведеннях.

Основні результати дисертації своєчасно і достатньо детально висвітлені у 40-а наукових публікаціях автора у виданнях, включених до "Переліку наукових фахових видань України". Серед публікацій 26 статей опубліковано у виданнях, що індексуються в наукометричній базі Scopus та 1 монографія у співавторстві.

Результати роботи пройшли широку апробацію на багатьох міжнародних наукових конференціях, а також на провідних наукових семінарах. Автореферат правильно і достатньо повно відображає зміст дисертації.

Вважаю, що дисертаційна робота “Метод неконформного модуля у теорії відображень зі скінченним спотворенням” відповідає усім вимогам пп. 9, 11 – 14 “Порядку присудження наукових ступенів”, затвердженого Постановою Кабінету міністрів України № 567 від 24.07.2013 щодо докторських дисертацій, а її автор — Салімов Руслан Радікович заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент НАН України,
радник при дирекції Інституту прикладної
математики і механіки НАН України **В.Я. Гутлянський**

Підпис В.Я. Гутлянського засвідчую:
Ст. інспектор з кадрів Г.А. Дубовик