

ВІДГУК ОФІЦІЙНОГО ОПОНЕНТА

на дисертаційну роботу Салімова Руслана Радіковича
"Метод неконформного модуля у теорії відображень зі скінченним спотворенням", подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук зі спеціальності 111-математика, 01.01.01 – математичний аналіз.

Актуальність роботи. Теорія відображень є природною частиною математичного аналізу. Найбільш розвинена її частина – теорія конформних відображень, що має численні важливі застосування як в інших розділах математичного аналізу та математичній фізиці, так і в гідродинаміці, електро- і магнітостатиці, інших розділах науки. У середині минулого століття Г. Греч, М.О. Лаврентьев і Ч. Моррі розпочали дослідження більш широкого класу так званих квазіконформних відображень, що потім були застосовані до класичних проблем про накриваючі ріманові поверхні, їх модулі та їх класифікацію. Згодом поняття квазіконформних відображень було поширено на простори більших розмірностей, а потім узагальнено до відображень з обмеженим спотворенням (еквівалентний термін квазірегулярні відображення)(Ю.Г. Решетняк, О. Мартіо, С. Рікман, Ю. Вайсяля). Ці відображення можуть мати точки розгалуження, тому їх можна розглядати як просторовий аналог аналітичних функцій. Такі відображення також мають численні застосування як в різних розділах математики, так і в механіці та фізиці. У роботах Л. Альфорса, К. Андріян Казаку, Л. Берса, П.П. Белінського, Б.В. Боярського, І.Н. Векуа, С.К. Водопьянова, К. Вертанена, Л.І. Волковиського, М. Vuorinen, Ю. Вайсяля, Ф. Герінга, В.М. Гольдштейна, В.Я. Гутляньського, В.А. Зоріча, П. Карамана, С.Л. Крушкаля, М.О. Лаврентьева, О. Лехто, О. Мартіо, Ч. Моррі, Р. Няккі, І.Н. Песіна, Ю.Г. Решетняка, С. Рікмана, Б.В. Шабата та інших було вивчено основні властивості таких відображень. Чергові узагальнення, що виникли вже на початку цього століття, пов'язані з тим, що основні характеристики відображень передбачаються скінченими не всюди, а майже всюди (К. Астала, Е. Вілламор, С.К. Водопьянов, Ф. Герінг, Т. Іванець, П. Коскели, Дж. Манфреді, Г. Мартін, О. Мартіо, У. Сребро, В.І. Рязанов, Ю. Хейнонен, І. Холопаінен, Е. Якубов), або в середньому (С.Л. Крушкаль, А. Гольберг, В.І. Кругліков, В.С. Кудьявін, Р. Кюнау, В.М. Міклюков, М. Перовіч, І.М. Песін, Ю.Ф. Стругов, А.В. Сичов), або відображення зі скінченим інтегралом Діріхле (Г.Д. Суворов та донецька школа). Однак в цих дослідженнях на сьогоднішній день залишилися невивченими проблеми встановлення мінімальних умов, достатніх для диференційовності відображень майже скрізь, та їх зв'язок з класами Соболева, оцінок спотворення міри множин та відстаней при відображеннях, питання локальної, асимптотичної та граничної поведінки відображень, встановлення умов одностайної неперервності та нормальності сімей відображень, дослідження властивостей відображень з класів Соболева та Орліча-Соболева. Дослідження цих задач і присвячена робота Р.Р.Салімова.

Опис результатів роботи.

- отримано характеристизацію кільцевих і нижніх Q -гомеоморфізмів в термінах p -модуля та встановлено взаємозв'язок між цими го-меоморфізмами;
- отримано достатні умови диференційовності м.с. кільцевих і ниж-них Q -гомсоморфізмів відносно p -модуля;
- отримано оцінки міри образу кулі при кільцевих і нижних Q -гомеоморфізмах відносно p -модуля;
- доведено аналог нерівності Ікоми—Шварца для кільцевих і ниж-них Q -гомеоморфізмів та її ліпшицевий, степеневий та логариф-мічний аналози;
- встановлено достатні умови скінченної ліпшицевості, локаль-ної і логарифмічної гельдеровості кільцевих і нижних Q -гомеоморфізмів;
- отримано аналог результату Мартіо—Рікмана—Вяйсяля про «сильне» зростання в околі нескінченності відображень з обме-женим спотворенням;
- встановлено, що гогеоморфні розв'язки вироджених рівнянь Бельтрамі з узагальненими похідними є кільцевими та нижніми Q -гомеоморфізмами, де Q —дотична дилатація;
- доведено узагальнені теореми про неперервне і гогеоморфне про-довження вказаних розв'язків та їх асимптотичну поведінку на нескінченності;
- встановлено загальні умови на дотичну дилатацію, достатні для існування регулярних розв'язків задачі Діріхле для вироджених рівнянь Бельтрамі в довільних жорданових областях;
- для гогеоморфних розв'язків вироджених рівнянь Бельтрамі з узагальненими похідними отримано аналог результату Мартіо—Рікмана—Вяйсяля про оцінку швидкості зростання на нескінчен-ності;
- встановлено, що гогеоморфізми зі скінченним спотворен-ням на комплексній площині є нижніми та кільцевими Q -гомеоморфізмами відносно p -модуля;
- для гогеоморфізмів зі скінченним спотворенням доведено аналог теореми Ікоми—Шварца, отримано оцінку площі образу круга, встановлено достатні умови скінченної ліпшицевості, локальної та логарифмічної гельдеровості;
- показано, що відкриті відображення класів Орліча—Соболева $W_{loc}^{1,\varphi}(\Omega)$ за умови типу умови Кальдерона на функцію φ мають повний диференціал майже скрізь, що є узагальненням результа-ту Меньшова—Герінга—Лехто на площині та теореми Вяйсяля в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$;
- доведено, що неперервні відображення класів Орліча—Соболева $W_{loc}^{1,\varphi}(\Omega)$ в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, за умови типу умови Кальдерона на функцію φ мають (N) -властивість Лузіна на майже всіх гіперплощинах;

зокрема, це відноситься до відображень класу Соболева $W_{loc}^{1,p}$ при $p > n - 1$;

- доведено теореми про компактність сімей гомеоморфізмів з класів Орліча—Соболева, про належність обернених відображень до класу гомеоморфізмів з обмеженим інтегралом Діріхле, про одностайну неперервність і нормальність сімей обернених відображень, а також про напівнеперервність дилатацій відображень зі скінченим спотворенням;
- встановлено, що гомеоморфізми класів Орліча—Соболева $W_{loc}^{1,\varphi}$ за умови типу умови Кальдерона на функцію φ є нижніми та кільцевими Q -гомеоморфізмами, а також нижніми та кільцевими Q -гомсоморфізмами відносно p -модуля;
- для гомеоморфізмів класів Орліча—Соболева $W_{loc}^{1,\varphi}$ за умови типу умови Кальдерона на функцію φ отримано достатні умови скінченної ліпшицевості, локальної та логарифмічної гельдеровості, оцінки міри образу кулі, аналоги теореми Ікоми—Шварца та результату Мартіо—Рікмана—Вяйсяля про оцінку швидкості зростання на нескінченності;
- знайдено умови на зовнішню дилатацію, за якими гомсоморфізми класів Соболева $W_{loc}^{1,1}$ є нижніми та кільцевими Q -гомеоморфізмами;
- встановлено достатні умови належності Q -відображень, визначених в термінах p -модуля, до класів Соболева та доведено узагальнення теореми Боярського—Іваця про певиродженість якобіана відображення;
- отримано оцінки зверху якобіана та операторної норми матриці Якобі, p -внутрішніх та p -зовнішніх дилатацій кільцевих Q -відображень відносно p -модуля;
- узагальнено результат Ю. Вяйсяля про абсолютну неперервність на лініях квазіконформних відображень на відкриті дискретні відображення, що задовольняють деяку p -модульну нерівність.

Слід відзначити, що значна частина результатів автора була відома раніше в суттєво простішому випадку, коли p дорівнює розмірності n простору, а інколи була відома тільки для випадку площини, коли $p = n = 2$. Випадок $p \neq n$ істотно більш складний, він зажадав від дисертанта створення нових ідей та нової суттєво більш складної техніки.

Зауваження

- Однією з найкращих робіт автора дисертації є відносно нещодавня стаття "Golberg A., Salimov R. and Sevost'yanov E. *Singularities of discrete open mappings with controlled p -module* // J. Anal. Math. – 2015. – V. 127. – P. 303–328". Зокрема, тут встановлено результат про усунення сингулярностей кільцевих Q -відображень відносно p -модуля при $n - 1 < p \leq n$ при мажорантах Q типу FMO і

більш загальних (як наслідок, для таких відображень спростовано теорему типу Сохоцького–Вейерштрасса). Чому ця стаття та її результати не включені до тексту дисертації?

- чому в списку семінарів, де доповідалася дисертація, не вказано Міський семінар з теорії функцій у Харкові?
- в першій виносній формулі зверху на стор. 29 бачимо означення допустимої функції ρ , а саме, має виконуватись співвідношення $\int_{\gamma} \rho(x)|dx| \geq 1$ для всіх кривих $\gamma \in \Gamma$. Як розуміється цей інтеграл для кривих γ , які не є локально спрямлюваними? Зауважимо, що натуральна параметризація для таких кривих місця не має, тому виникають також і питання про визначеність інтегралу від ρ ;
- чи можуть при кільцевих (p, Q) -відображеннях не зберігатися властивості локальної спрямлюваності кривих? Якщо ні, то чи врахував це автор у методології доведень відповідних тверджень дисертації?
- в тексті дисертації значну частину займають результати про кільцеві (p, Q) -відображення при $p > n$. Наприклад, це стосується теореми 6.4.4, наслідків 6.4.6 та 6.4.7 і т.д. Наскільки нам відомо, випадок $p > n$ вважається певним випадком виродження: зокрема, p -модуль сім'ї кривих, що проходять через точку, при таких обмеженнях на p не дорівнює нулю. Виникає питання, чи знає автор приклади таких відображень при $p > n$ та чим мотивоване вивчення виродженого випадку;
- є розбіжності в позначеннях: якобіан відображення f в точці x позначається то $J(x, f)$ на 63 с., то $J_f(x)$ на 284 с.;
- чому функція $\rho(x)$ пормується нерівністю $\int \rho(x)|dx| \geq 1$, а $\eta(r)$ пормується рівністю $\int \eta(r)dr = 1$?
- с.36, 6↑: навіщо посилатися на рівність (4.1) з розділу 4, коли така ж рівність є на тій же 6 сторінці? Те ж для рядку 2↑.

Ці неточності не змінюють моєї високої оцінки дисертації.

Заключна частина і висновки.

Я вважаю, що одержаних автором результатів безумовно досить для докторської дисертації. Всі доведення, висновки і рекомендації є обґрунтованими. Більшість результатів носить критеріальний характер, має закінчений вигляд. Вони доповідалися на 20 наукових конференціях, 7 наукових семінарах, представлені в 40 українських фахових журналах, з яких 27 (26 статей+1 монографія) надруковано в українських та закордонних виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз (Web of Science, Scopus). Таким чином, достовірність результатів дисертації не викликає сумнівів.

Дисертація вносить вагомий вклад в теорію відображень в евклідовому просторі, і буде корисною в тих розділах математики, які мають зв'язки з цим розділом математики. Зокрема, результати дисертації можуть знайти застосування у теорії нелінійних систем рівнянь з частинними похідними та в теорії класів Соболева та Орліча–Соболева.

Результати дисертації є цікавими для спеціалістів, що працюють у Львівському, Харківському, Київському, Житомирському університетах, Інституті математики НАН України (м. Київ), Інституті прикладної математики і механіки НАН України (м. Слов'янськ). Автореферат повністю та правильно відображає зміст дисертації.

Вважаю, що за обсягом та науковим рівнем проведених наукових досліджень, їх актуальністю та значимістю, науковою новизною та завершеністю отриманих результатів, кількістю публікацій дисертаційна робота Р. Салімова повністю задовольняє усі вимоги щодо дисертацій на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук, а її автор заслуговує присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук зі спеціальності 111-математика, 01.01.01 – математичний аналіз.

Доктор фізико-математичних наук, професор кафедри фундаментальної математики Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна

29.03.2021

Сергій ФАВОРОВ

