Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

Салімов Руслан Радікович

УДК 517.9

ДИСЕРТАЦІЯ

Метод неконформного модуля у теорії відображень зі скінченним спотворенням

01.01.01 — математичний аналіз
111 — математика

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико–математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

____________________ Р. Р. Салімов

Науковий консультант
Плакса Сергій Анатолійович
доктор фізико–математичних наук,
професор

Київ — 2021

АНОТАЦІЯ

Салімов Р. Р. Метод неконформного модуля у теорії відображень зі скінченним спотворенням — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 "Математичний аналіз" (111 — Математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2021.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню властивостей відображень зі скінченним спотворенням, що активно досліджуються протягом останніх 20 років. У дисертації розвивається метод неконформного модуля для дослідження диференціальних, локальних, асимптотичних та граничних властивостей відображень зі скінченим спотворенням, кільцевих та нижніх Q-гомеоморфізмів, визначених в термінах неконформного p-модуля.

Дисертаційна робота складається зі вступу, шести розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. У вступі визначено об'єкт і предмет дослідження, обгрунтовано актуальність теми дисертаційного дослідження, сформульовану мету і завдання, визначено методи дослідження, його наукову новизну, теоретичне і практичне значення, прокоментовано апробацію, описано структуру дисертаційної роботи та її основний зміст.

У *першому розділі* дається короткий огляд літератури за темою дисертації. Сформульовані означення, теореми та твердження, необхідні для викладу і доведення основних результатів дисертації та найбільш близькі до її теми.

У *другому розділі* досліджено властивості кільцевих Q-гомеоморфізмів, визначених в термінах p-модуля. Отримано характеризацію таких відображень в термінах модульних оцінок. Знайдено достатню умову диференційовності майже скрізь. Доведено аналоги нерівності М.О. Лаврентьєва про спотворення площі круга при квазіконформних відображеннях та теореми Ікоми–Шварца для кільцевих Q-гомеоморфізмів, визначених в термінах p-модуля. Доведено аналог леми Герінга про локальну ліпшицевість. Знайдено достатні умови

локальної та логарифмічної гельдеровості, степеневого та логарифмічного порядку зростання гомеоморфізмів.

Третій розділ дисертації присвячено дослідженню властивостей нижніх Q-гомеоморфізмів, визначених в термінах p-модуля. Отримано характеризацію таких відображень в термінах модульних оцінок та встановлено взаємозв'язок між нижніми та кільцевими Q-гомеоморфізмами, визначеними в термінах p-модуля. Знайдено достатні умови локальної ліпшицевості та гельдеровості нижніх Q-гомеоморфізмів в термінах p-модуля. Доведено степеневий аналог теореми Ікоми–Шварца. Досліджено асимптотичну поведінку на нескінченності. Сформульовано цілий ряд результатів, що випливають з основної теореми про взаємозв'язок між нижніми та кільцевими Q-гомеоморфізмами, визначеними в термінах p-модуля.

Четвертий розділ дисертації присвячено застосуванням теорії кільцевих та нижніх Q-гомеоморфізмів, визначених в термінах p-модуля, до відображень класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ на комплексній площині та вироджених рівнянь Бельтрамі.

Встановлено, що гомеоморфні розв'язки вироджених рівнянь Бельтрамі з узагальненими похідними є кільцевими та нижніми Q-гомеоморфізмами, де Q — дотична дилатація, та доведено узагальнені теореми про неперервне і гомеоморфне продовження вказаних розв'язків. Встановлено загальні умови на дотичну дилатацію, достатні для існування регулярних розв'язків задачі Діріхле для вироджених рівнянь Бельтрамі в довільних жорданових областях. Доведено аналог результату Мартіо–Рікмана–Вяйсяля про оцінку швидкості зростання відображень з обмеженим спотворенням в околі нескінченно віддаленої точки.

Встановлено, що будь-який гомеоморфізм класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ на комплексній площині зі скінченним спотворенням є нижнім та кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля. Для гомеоморфізмів класу Соболєва зі скінченним спотворенням отримано достатні умови скінченної ліпшицевості, локальної гельдеровості та логарифмічної гельдеровості. Отримано аналоги нерівності М.О. Лаврентьєва для площі образу круга при квазіконформних відображеннях та теореми Ікоми–Шварца.

У *п'ятому розділі* досліджуються відображення класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$ за умови типу умови Кальдерона на функцію φ і, зокрема, класи Соболєва $W^{1,q}_{\rm loc}$ при $q > n-1$. Доведено, що відкриті відображення класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ за умови типу умови Кальдерона на функцію φ мають повний диференціал майже скрізь, що узагальнює добре відомий результат Меньшова–Герінга–Лехто на площині та теорему Вяйсяля в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Доведено, що неперервні відображення класу $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ за умови типу умови Кальдерона на функцію φ володіють (N)-властивістю Лузіна на майже всіх гіперплощинах; зокрема, сказане відноситься до відображень класу Соболева $f \in W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$.

Доведено, що класи Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ за умови типу умови Кальдерона на функцію φ є нижніми та кільцевими Q-гомеоморфізмами. Отримані теореми про одностайну неперервність для гомеоморфізмів класів Орліча–Соболєва. Доведено аналог результату Мартіо–Рікмана–Вяйсяля про оцінку швидкості зростання відображень з обмеженим спотворенням в околі нескінченно віддаленої точки.

Також встановлено, що класи Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ за умови типу умови Кальдерона на функцію φ є нижніми та кільцевими Q-гомеоморфізмами відносно p-модуля. Отримані достатні умови скінченної ліпшицевості, локальної та логарифмічної гельдеровості, степеневого та логарифмічного порядку зростання гомеоморфізмів, що належать вказаним класам Соболєва чи Орліча–Соболєва.

Шостий розділ дисертації присвячено відображенням з розгалуженням, що задовольняють деякі модульні нерівності. Встановлено співвідношення між Q-відображенями, визначеними в термінах p-модуля, та класами Соболєва $W^{1,q}_{\rm loc}$, встановлено аналог результату Б. Боярського і Т. Іванця про невиродженість якобіана, отримано достатні умови N та N^{-1} властивостей Лузіна, отримано оцінки зверху якобіана, p-внутрішніх та α-зовнішніх дилатацій через функцію Q.

Для кільцевих Q-відображень, визначених в термінах p-модуля, отримано достатні умови скіінеченної ліпшицевості, локальної та логарифмічної гельдеровості. Отримано аналог результату Вяйсяля про абсолютну неперервність на лініях відображень, що задовольняють p-модульну нерівність відносно циліндрів у просторі.

Практичне значення одержаних результатів

Дисертація має теоретичний характер. Одержані результати можуть бути використані у дослідженні різних класів відображень на площині та у просторі. Зокрема, результати дисертації можуть знайти застосування у теорії нелінійних систем рівнянь з частинними похідними та в теорії класів Соболєва та Орліча–Соболєва.

Ключові слова: р-модуль сім'ї кривих, р-ємність конденсатора, відображення зі скінченним спотворенням, квазіконформні відображення,квазірегулярні відображення, класи Соболєва, класи Орліча–Соболєва, Q-гомеоморфізми, кільцеві Q-гомеоморфізми, нижні Q-гомеоморфізми, Q-відображення, рівняння Бельтрамі, задача Діріхле, локальна поведінка, ліпшицевість, гельдеровість.

Salimov R. R. Non conformal modulus method in the theory of mappings with finite distortion. — The Manuscript.

Doctor of Sciences Thesis on Physics and Mathematics, speciality 01.01.01 ”Mathematical analysis” (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2021.

The thesis is devoted to the study of the properties of mappings with finite distortion, which actively studied during the last 20 years. In the thesis, the method of the non conformal modulus is developed to research differential, local, asymptotic and boundary properties of mappings with finite distortion, ring and lower Q-homeomorphisms defined in terms of non conformal p-modulus.

The dissertation consists of an introduction, six chapters, conclusions, a list of references and an appendix. The introduction substantiates the relevance of the topic of dissertation research, defines its object and subject of its research, the purpose and tasks, research methods, describes its scientific novelty, theoretical and practical significance, approbation, structure and the main content.

The first chapter gives a brief overview of the literature for the dissertation topic. The chapter includes definitions and theorems that are closest to its topic and auxiliary statements that are necessary to present and prove the main results of the dissertation.

The second chapter investigates the properties of ring Q-homeomorphisms defined in terms of the p-modulus. The characterization of such mappings in terms of modular estimates is obtained. A sufficient condition for differentiability almost everywhere is also found. Moreover, analogues of M.O. Lavrentyev's inequality about distortion of area of a disk under quasiconformal mappings and the Ikoma–Schwartz theorem for ring Q-homeomorphisms defined in terms of p-module are proved. An analogue of Gehring's lemma on local Lipschitz property is proved. Finally, sufficient conditions for local and logarithmic Hölder continuity and for power and logarithmic order of growth of these homeomorphisms are given.

The third chapter of the dissertation is devoted to research of properties of lower Q-homeomorphisms defined in terms of p-modulus. Here the characterization of such mappings in terms of modular estimates and the relationship between lower and ring Q-homeomorphisms with respect to the p-modulus are obtained. Moreover, sufficient conditions for local Lipschitz and Hölder continuity of lower Q-homeomorphisms in terms p-modulus are given. In addition, a power analogue of the Ikoma–Schwartz theorem is proved and the asymptotic behavior at infinity is investigated here. Finally, it is formulated a number of other consequences from the main theorem on the relationship between lower and ring Q-homeomorphisms with respect to the p-modulus.

The fourth chapter of the dissertation is devoted to the application of the theory of ring and lower Q-homeomorphisms with respect to the p-modulus to mappings of the Sobolev class $W^{1,1}_{\rm loc}$ on the complex plane and to degenerate Beltrami equations. In particular, it is established here that homeomorphic solutions of degenerate Beltrami equations with generalized derivatives by Sobolev are ring and lower Q-homeomorphisms, where Q is a tangent dilatation, and generalized theorems on continuous and homeomorphic extension of these solutions to the boundary are proved. In addition, sufficient conditions for tangent dilatation of general character for the existence of regular solutions of the Dirichlet problem for degenerate Beltrami equations in arbitrary Jordan domains are found here. Here an analogue of the result of Martio–Rickman–Väisälä on the estimation of the growth rate of mappings with bounded distortion in the neighborhood of infinity is also proved. In addition, it is established here that any homeomorphism of the Sobolev class $W^{1,1}_{\rm loc}$ with finite distortion in the complex plane is a lower and ring Q-homeomorphism with respect to the p-modulus. Also here, for homeomorphisms of the Sobolev class with finite distortion, sufficient conditions for finite Lipschitz, local Hölder continuities and logarithmic Hölder continuity are obtained. Finally, in this section we obtain analogs of the M.O. Lavrentyev inequality for the area of the image of disk under quasi-conformal mappings and the Ikoma–Schwartz theorem.

The fifth chapter investigates the mappings of the Orlicz–Sobolev classes $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ in $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$ under the condition of the Calderon type on function φ and Sobolev classes $W^{1,q}_{\rm loc}$ for $q>n-1$. In particular, it is proved here that open mappings of the Orlicz–Sobolev classes $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ under the condition of the Calderon type on the function φ have a complete differential almost everywhere, it is generalized the well-known Menshov–Gehring–Lehto result on the plane and the Vaisala theorem in $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$. It is also proved that continuous mappings of the class $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ under the condition of the Calderon type on the function φ have (N)-property by Luzin on almost all hyperplanes; in particular, this applies to the Sobolev class of mappings $f\in W^{1,p}_{\rm loc}$ for $p>n-1$. In addition, it is proved that homeomorphisms in the Orlicz–Sobolev classes $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ under the condition of the Calderon type on the function φ are lower and ring Q-homeomorphisms, theorems on equicontinuity of homeomorphisms in the Orlicz–Sobolev class are obtained, an analogue of the Martio–Rickman–Väisälä result on the estimation of the growth rate for mappings with bounded distortion in the neighborhood of infinity is given. It is also established that the Orlicz–Sobolev classes $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ under the condition of the Calderon type on the function φ are lower and ring Q-homeomorphisms with respect to the p-modulus. Finally, in this section a series of sufficient conditions for finitely Lipschitz, local and logarithmic Hölder continuity, power and logarithmic order of growth of homeomorphisms belonging to the given Sobolev and Orlicz–Sobolev classes are obtained.

The sixth chapter of thesis is devoted to studying the branching mappings satisfying certain modulus inequalities. Here the relation between the Q-mappings defined in the terms of p-moduli and Sobolev classes $W^{1,q}_{\rm loc}$ is obtained. Further, an analogue of the Bojarski–Iwaniec result on nonvanishing Jacobian, sufficient conditions for the Lusin N and N^{-1}-properties, estimates for Jacobian, p-inner and α-outer dilatations in the terms of function Q are established. In addition, appropriate sufficient conditions for the ring Q-mappings with respect to p-modulus to be finitely Lipschitz, locally and logarithmically Hölder continuous are provided. Finally, an analogue of Väisälä's result on absolute continuity on lines for mappings satisfying p-modulus inequality with respect to spatial cylinders is also given.

Key words: p-modulus of curve family, p-capacity of the condenser, mappings with finite distortion, quasiconformal mappings, quasiregular mappings, Sobolev classes, Orlicz–Sobolev classes, Q-homeomorphisms, ring Q–homeomorphisms, lower Q-homeomorphisms, Q-mappings, Beltrami equation, Dirichlet problem, local behaviour, Lipschitz property, Hölder property.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Salimov R. On regular homeomorphisms in the plane // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. — 2010. — 35. — P. 285–289.

2. Salimov R. On Q-homeomorphisms with respect to p-modulus // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. — 2011. — **60**, № 2. — P. 207–213.

3. Salimov R. On finitely Lipschitz space mappings // Сиб. электрон. мат. изв. — 2011. — **8**. — P. 284–295.

4. Ковтонюк Д.А., Салимов Р.Р. Асимптотическое поведение в точке обобщенных квазиизометрий // Укр. мат. журн. — 2011. — **63**, № 4. — С. 481–488. (переклад у виданні: Ukr. Math. J. — 2011. — **63** (4). — P. 555–563.)

5. Golberg A., Salimov R. Topological mappings of integrally bounded p-moduli // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. — 2012. — **3** (LXI), № 1. — P. 49–66.

6. Салимов Р.Р. Об оценке меры образа шара // Сиб. мат. журн. — 2012. — **53**, № 6. — С. 920–930. (переклад у виданні: Siberian Math. J. — 2012. — **53** (4). — P. 739–747.)

7. Ryazanov V., Salimov R., Srebro U., Yakubov E., On Boundary Value Problems for the Beltrami Equations // Contemporary Mathematics. — 2013. — V. 591. — P. 211–242.

8. Ryazanov V.I., Salimov R.R., Sevost'yanov E.A. On convergence analysis of space homeomorphisms // Siberian Advances in Mathematics. — 2013. — **23**, no. 4. — P. 263–294.

9. Golberg A., Salimov R. Equicontinuity of plane homeomorphisms with controlled p-module // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 4–5. — С. 115–125.

10. Рязанов В.И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. О классах Орлича-Соболева и отображениях с ограниченным интегралом Дирихле // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 9. — С. 1254–1265. (переклад у виданні: Ukr. Math. J. — 2014. — **65** (9). — P. 1394–1405.)

11. Салимов Р.Р. О липшицевости одного класса отображений // Мат. заметки. — 2013. — **94**, № 4. — С. 591–599. (переклад у виданні: Math. Notes — 2013. — **94** (4). — P. 559–566.)

12. Салимов Р.Р. К теории кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля // Укр. мат. вісник. — 2013. — **10**, № 3. — С. 379–396. (переклад у виданні: J. Math. Sci. — 2014. — **196** (5). — P. 679–692.)

13. Салимов Р.Р. Об одном свойстве кольцевых Q -гомеоморфизмов относительно p-модуля // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 5. — С. 728–733. (переклад у виданні: Ukr. Math. J. — 2013. — **65** (5). — P. 806–813.)

14. Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. К теории классов Орлича-Соболева // Алгебра и анализ. — 2013. — **25**, № 6. — С. 50–102. (переклад у виданні: St. Petersburg Math. J. — 2014. — **25** (6). — P. 929-963.)

15. Ковтонюк Д.А., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. К теории отображений классов Соболева и Орлича–Соболева. — К.: Наукова думка, 2013. — 303 с.

16. Golberg A., Salimov R. Logarithmic Hölder continuity of ring homeomorphisms with controlled p-module // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2014. — **59**, no. 1. — P. 91–98.

17. Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. Граничное поведение классов Орлича-Соболева // Мат. заметки. — 2014. — **95**, № 4. — С. 564–576. (переклад у виданні: Math. Notes — 2014. — **95** (4). — P. 509–519.)

18. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Distortion estimates under mappings with controlled p-module // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math 5 (LXIII) — 2014. — P. 95–114.

19. Golberg A., Salimov R. Extension of the Schwarz Lemma to homeomorphisms with controlled p-module // Georgian Math. J. — 2014. — **21**, no. 3. — P. 273–279.

20. Салимов Р.Р. О кольцевых Q-отображениях относительно неконформного модуля // Дальневост. мат. журн. — 2014. — **14**, № 2. — С. 257–269.

21. Салимов Р.Р. Нижние оценки p-модуля и отображения класса Соболева // Алгебра и анализ. — 2014. — **26**, № 6. — С. 143–171. (переклад у виданні: St. Petersburg Math. J. — 2015. — **26** (6). — P. 965–984.)

22. Golberg A., Salimov R. Homeomorphisms Lipschizian in the mean // Complex Analysis and Potentioal Theory with Applications, Camb. Sci. Publ., Cambridge. — 2014. — P. 95–111.

23. Салимов Р.Р. О конечной липшицевости классов Орлича-Соболева // Владикавк. мат. журн. — 2015. — **17**, № 1. — Р. 64–77.

24. Афанасьева Е.С., Салимов Р.Р. Асимптотическое поведение на бесконечности решений уравнения Бельтрами // Збірник праць Ін-ту математики НАНУ. — 2015. — **12**, № 3. — С. 9–16.

25. Салимов Р.Р. О новом условии конечной липшицевости классов Орлича–Соболева // Мат. студії. — 2015. — **44**, №1. — С. 27–35.

26. Салимов Р.Р. Нижние Q-гомеоморфизмы относительно p-модуля // Укр. мат. вісник. — 2015. — **12**, № 4. — С. 484–510. (переклад у виданні: J. Math. Sci. — 2016. — **218** (1). — P. 47–68.)

27. Салимов Р.Р. Асимптотическое поведение классов Орлича–Соболева на бесконечности // Збірник праць Ін-ту математики НАНУ. — 2015. — **12**, № 4. — С. 273–284.

28. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Poletskii Type Inequality for Mappings from the Orlicz–Sobolev Classes // Complex Anal. Oper. Theory. — 2016. — 10. — P. 881–901.

29. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Estimates for jacobian and dilatation coefficients of open discrete mappings with controlled p-module // Complex Anal. Oper. Theory. — 2017. — **11**, № 7, — P. 1521–1542.

30. Рязанов В.И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. Нормальность классов Орлича–Соболева // Укр. мат. журнал. — 2016. — **68**, № 1. — С. 106–116. (переклад у виданні: Ukr. Math. J. — 2016. — **68** (1). — P. 115–126.)

31. Салимов Р.Р. Об оценке меры образа шара для нижних Q-гомеоморфизмов // Доп. НАН України. — 2016. — № 1. — С. 19–25.

32. Салимов Р.Р. Метрические свойства классов Орлича-Соболева // Укр. мат. вісник. — 2016. — **13**, № 1. — С. 129–141. (переклад у виданні: J. Math. Sci. — 2017. — **220** (5). — P. 633–642.)

33. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Normal Families of Discrete Open Mappings with Controlled p-Module // Contemporary Mathematics. — 2016. — V. 667. — P. 83–103.

34. Golberg A., Salimov R. Mappings with upper bounds p-moduli // Contemporary Mathematics. — 2016. — V. 659. — P. 91–113.

35. Golberg A., Salimov R. Differentiability of ring homeomorphisms with controlled p-module // Contemporary Mathematics. — 2017. — V. 699. — P. 121–217.

36. Golberg A., Salimov R. Hölder continuity of homeomorphisms with controlled growth of their spherical means // Complex Anal. Oper. Theory. — 2017. — **11**, N 8. — P. 1825–1838.

37. Салимов Р.Р. О степенном порядке роста нижних Q-гомеоморфизмов // Владикавк. мат. журн. — 2017. — **19**, № 2. — С. 36–48.

38. Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. Об абсолютной непрерывности отображений, искажающих модули цилиндров // Укр. мат. журн. — 2017. — **69**, № 6. — С. 860–864. (переклад у виданні: Ukr. Math. J. — 2017. — **69** (6). — P. 1001—1006.)

39. Афанасьева Е.С., Рязанов В.И., Салимов Р.Р. К теории отображений класса Соболева с критическим показателем // Укр. мат. вісник. — 2018. — **15**, № 2. — С. 154–176. (переклад у виданні: J. Math. Sci. — 2019. — **239** (1). — P. 1 – 16.)

40. Афанасьева Е.С., Рязанов В.И., Салимов Р.Р. К теории классов Соболева с критическим показателем// Доп. НАН України. — 2019. — № 8. — С. 3–8.

41. Salimov R.R., Sevostyanov E.A. Differentiability a.e. and ACL – property of some generalizations of quasiregular mappings. // Conformal Structures and Dynamics (CODY) Third Year Conference, Bendlewo, Poland, September 21–26, 2009, abstracts. – 2009. – P. 8–9.

42. Salimov R.R. Asymptotic behavior of generalized quasi-isometries. // International Conference on Complex Analysis, dedicated to the memory of A. Goldberg, Lvov, May 31 – June 5, 2010, abstracts. – 2010. – P. 51–52.

43. Salimov R.R., Sevostyanov E.A. Estimate of inner dilatation of the mappings with non-bounded characteristics of quasiconformality. // International Conference on Complex Analysis, dedicated to the memory of A. Goldberg, Lvov, May 31 – June 5, 2010, abstracts. – 2010. – P. 52–54.

44. Salimov R.R. On finite Lipschitz of space mappings. // International Conference on the modern analysis, Donetsk, Ukraine, June 20–23, 2011, P. 97.

45. Kovtonyuk D.A., Ryazanov V.I., Salimov R.R., Sevost'yanov E.A. On mappings in the Orlicz-Sobolev classes // International Conference on the modern analysis, Donetsk, Ukraine, June 20–23, 2011, P. 59.

46. Salimov R.R. About some properties of space mappings. // Abstract of report of the internat. conf. dedic. to the 120th anniv. of Stefan Banach. — Lviv. — 2012. — P. 155.

47. Salimov R.R. Hölder continuity for the ring Q-homeomorphisms with respect to p-modulus. // International Conference "Complex Analysis and Related Topics Lviv, 23–28 September 2013, c. 66.

48. Salimov R., Afanaseva O. On some mappings in $\lambda(r)$-regular metric spaces. // International Conference "Complex Analysis and Related Topics Lviv, 23–28 September 2013, c. 70.

49. Salimov R.R., Sevost'yanov E.A. On some local properties of space generalized quasiisometries. // Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, 1-4 липня 2015 р., с. 147-148.

50. Salimov R.R. On finite lipschitz Orlicz -Sobolev classes. // Міжнародна конференція молодих математиків, Київ: Тези доповідей. – Київ, 2015. – С. 59.

51. Salimov R. Hölder continuity of ring Q-homeomorphisms with respect to p-module. // Abstract of Int. Conf. "Complex Analysis, Potential Theory and Applications Kyiv, Ukraine, August 19 – 23, 2013 (режим доступу: http://www.imath.kiev.ua/ $\sim$ complex/conf2013/abstracts.html)

52. Salimov R.R. Extremal problem for areas of images of discs. // International Conference "Complex Analysis and Related Topics Lviv, May 30-June 4, 2016, p. 71.

53. Salimov R., Klishchuk B. On extremal problem for area functional. // Міжнародна конференція молодих математиків, Київ: Тези доповідей. – Київ, 2017. – с. 32.

54. Salimov R., Klishchuk B. The extremal problem for the area of an image of an disc. // International scientific conference " Algebraic and geometric methods of analysis" (Odesa, May 31 – June 5, 2017): Abstracts. – 2017. – P. 70.

55. Salimov R., Klishchuk B. A lower bound for areas of images of discs. // Міжнародна конференція «Теорія наближення функцій та її застосування», присвячена 75-річчю з дня народження члена–кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця, Слов'янськ: Тези доповідей. – Слов'янськ, 2017.

56. Golberg A., Salimov R. Mappings with integrally controlled p-moduli // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, September 18-23, 2017, Lviv, Ukraine, p. 116-117.

57. Салимов Р.Р., Клищук Б.А. Нижняя оценка для объёма образа шара. // International scientic conference «Algebraic and geometric methods of analysis», Odesa (Ukraine) May 30 — June 4, 2018.

58. Salimov R., Klishchuk B. Lower bounds for the area of the image of a disc. // Hypercomplex Seminar 2018: (Hyper)Complex Analysis in Differential Equations, Geometry and Physical Applications, Mathematical Conference Center at Bedlewo (Poland).

59. Салімов Р.Р., Кліщук Б.А. Нижні оцінки для площі образу круга. // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", Ворохта: Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2018.

60. Salimov R., Klishchuk B. An extremal problem for the volume of the image of a ball. // Hypercomplex Seminar 2019: (Hyper)Complex Analysis in Differential Equations, Geometry and Physical Applications (including (de)composition problems of binary up to senary structures in alloy and polymer physics), Mathematical Conference Center at Bedlewo (Poland), July 07 – July 14.

61. Салімов Р.Р., Кліщук Б.А. Про поведінку одного класу гомеоморфізмів на нескінченності // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу, Всеукраїнська наукова конференція, Ворохта, 26 лютого - 1 березня, 2020 року, с. 54-56.

62. Салімов Р.Р., Стефанчук М.В. Про локальні властивості розв'язків нелінійних рівнянь Бельтрамі // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу, Всеукраїнська наукова конференція, Ворохта, 26 лютого - 1 березня, 2020 року, с. 80-82.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Теорія відображень є добре розвиненою частиною сучасного математичного аналізу. Ця теорія бере свій початок зі знаменитих робіт Е. Бельтрамі, К. Гауса, Д. Гільберта, Ж. Ліувіля, А. Пуанкаре, Б. Рімана, Г. Шварца та інших відомих математиків. Теорія аналітичних функцій давно вже стала зразком найбільш розвинених і ретельно розроблених гілок математики. У цій теорії особлива увага приділялася конформним відображенням, які знайшли численні важливі застосування у теорії уніформізації, теорії потенціалу, математичній фізиці, гідродинаміці, аеродинаміці, електростатиці і магнітостатиці.

В кінці 20-х та на початку 30-х років минулого століття Г. Греч, М.О. Лаврентьєв і Ч. Моррі ввели більш загальний клас відображень, згодом названих квазіконформними. Незабаром квазіконформні відображення були застосовані до класичних проблем про накриваючі ріманових поверхонь (Л. Альфорс), модулі ріманових поверхонь (О. Тейхмюллер) і класифікацію однозв'язних ріманових поверхонь (Л.І. Волковиський). Згодом квазіконформні відображення були визначені у просторах більших розмірностей (М.О. Лаврентьєв, Ф. Герінг, Ю. Вяйсяля), а потім узагальнені до відображень з обмеженим спотворенням (Ю.Г. Решетняк), що називаються також квазірегулярними відображеннями (О. Мартіо, С. Рікман, Ю. Вяйсяля). Візначимо, що квазірегулярні відображення можуть мати точки розгалуження і є у певному сенсі просторовим аналогом аналітичних функцій. Квазіконформні і квазірегулярні відображення виявилися корисними при вивченні клейнових груп, комплексної динаміки, мероморфних функцій, в топології, теорії пружності, в гідродинаміці, електро- і магнітостатиці в неоднорідних середовищах. У роботах Л. Альфорса, К. Андріян Казаку, Л. Берса, П.П. Белінського, Б.В. Боярського, І.Н. Векуа, С.К. Водопьянова, К. Вертанена, Л.І. Волковиського, М. Вуорінена, Ю. Вяйсяля, Ф. Герінга, В.М. Гольдштейна, В.Я. Гутлянського, В.А. Зоріча, П. Карамана, С.Л. Крушкаля, М.О. Лаврентьєва, О. Лехто, О. Мартіо, Ч. Моррі, Р. Няккі, І.Н. Песіна, Ю.Г. Решетняка, С. Рікмана, Б.В. Шабата та інших були вивчені основні властивості таких відображень.

На межі 20-го – 21-го століть відбувся перехід від вивчення відображень з обмеженим спотворенням за Решетняком до вивчення так званих відображень зі скінченним спотворенням за Іванцем, характеристики яких вже не є обмеженими в області визначення, а лише скінченними майже скрізь. Такі класи відображень природньо узагальнюють конформні, квазіконформні і квазірегулярні відображення. Вивченню відображень зі скінченним спотворенням присвячені роботи багатьох провідних фахівців з сучасної теорії відображень. Серед них можна виділити роботи К. Астала, Е. Вілламора, С.К. Водопьянова, Ф. Герінга, Т. Іванця, П. Коскели, Дж. Манфреді, Г. Мартіна, О. Мартіо, У. Сребро, В.І. Рязанова, Ю. Хейнонена, І. Холопаінена, Е. Якубова та інших.

Відзначимо, що вказаному переходу передувало вивчення так званих квазіконформних в середньому відображень, що беруть свій початок з робіт С.Л. Крушкаля; згадаємо тут також роботи А. Гольберга, В.І. Круглікова, В.С. Кудьявіна, Р. Кюнау, В.М. Міклюкова, М. Перовіча, І.М. Песіна, Ю.Ф. Стругова, А.В. Сичова та інших авторів. Також необхідно згадати вивчення відображень з обмеженим інтегралом Діріхле у донецькій школі з теорії відображень на чолі з Г.Д. Суворовим, де істотно розвинуто теорію граничної поведінки і теорію збіжності таких відображень.

Не зважаючи на значну кількість робіт з теорії квазіконформних відображень та їх узагальнень, залишаються актуальними такі проблеми: встановлення мінімальних умов, достатніх для диференційовності відображень майже скрізь та їх зв'язок з класами Соболєва; встановлення оцінок спотворення міри множин та відстаней при відображеннях; дослідження локальної, асимптотичної та граничної поведінки відображень; встановлення умов одностайної неперервності та нормальності сімей відображень;

застосування квазіконформних відображень та їх узагальнень до дослідження властивостей відображень з класів Соболєва та Орліча-Соболєва.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана у відділі комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України в рамках наукових тем "Метричні та геометричні задачі теорії аналітичних і субгармонічних функцій та множин", номер державної реєстрації 0116U003060 та "Розробка аналітичних та чисельно–аналітичних методів дослідження задач сучасного природознавства", номер державної реєстрації 0117U004077.

Мета і завдання дослідження. *Об'єктом дослідження* є плоскі та просторові відображення зі скінченим спотворенням.

Предметом дослідження є кільцеві та нижні Q-гомеоморфізми, визначені в термінах неконформного p-модуля.

Метою дисертаційної роботи є дослідження диференціальних, локальних, асимптотичних та граничних властивостей відображень, які задовольняють p-модульні оцінки.

Завдання дослідження:

- розробити метод неконформного модуля для дослідження диференціальних, локальних, асимптотичних та граничних властивостей відображень зі скінченим спотворенням;
- для кільцевих та нижніх Q-гомеоморфізмів, визначених в термінах неконформного p-модуля, довести аналоги нерівності М.О. Лаврентьєва про спотворення площі круга при квазіконформних відображеннях, леми Герінга про локальну ліпшицевість та теореми Ікоми–Шварца;
- встановити нові критерії неперервного та гомеоморфного продовження гомеоморфних розв'язків вироджених рівнянь Бельтрамі з узагальненими похідними та довести теореми існування регулярних розв'язків задачі Діріхле для вироджених рівнянь Бельтрамі в довільних жорданових областях за певних умов на дотичну дилатацію;

- встановити співвідношення між класами Соболєва, Орліча–Соболєва, кільцевими та нижніми Q-відображенями, визначеними в термінах неконформного p-модуля.

Методи дослідження. В дисертаційній роботі використовуються методи геометричної теорії функцій та теорії потенціалу.

Наукова новизна. Усі отримані в роботі результати є новими і полягають в наступному:

- отримано характеризацію кільцевих і нижніх Q-гомеоморфізмів в термінах p-модуля та встановлено взаємозв'язок між цими гомеоморфізмами;
- доведено аналоги нерівності М.О. Лаврентьєва про спотворення площі круга при квазіконформних відображеннях, леми Герінга про локальну ліпшицевість та теореми Ікоми–Шварца для кільцевих і нижніх Q-гомеоморфізмів, визначених в термінах p-модуля;
- встановлено, що гомеоморфні розв'язки вироджених рівнянь Бельтрамі з узагальненими похідними є кільцевими та нижніми Q-гомеоморфізмами, де Q — дотична дилатація, та доведено узагальнені теореми про неперервне і гомеоморфне продовження вказаних розв'язків та їх асимптотичну поведінку на нескінченності;
- встановлено загальні умови на дотичну дилатацію, достатні для існування регулярних розв'язків задачі Діріхле для вироджених рівнянь Бельтрамі в довільних жорданових областях;
- встановлено зв'язок класів Соболєва $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ в областях комплексної площини, а також класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, за умови типу умови Кальдерона на функцію φ, з нижніми та кільцевими Q-гомеоморфізмами, визначеними в термінах p-модуля; узагальнено умови локальної та логарифмічної гельдеровості, степеневого

та логарифмічного порядку зростання гомеоморфізмів, що належать вказаним класам Соболєва чи Орліча–Соболєва;

- встановлено достатні умови належності Q-відображень, визначених в термінах p-модуля, до класів Соболєва та доведено узагальнення теореми Боярського–Іванця про невиродженість якобіана відображення; отримано оцінки зверху якобіана та операторної норми матриці Якобі, p-внутрішних та α-зовнішних дилатацій кільцевих Q-відображень відносно p-модуля; узагальнено результат Ю. Вяйсяля про абсолютну неперервність на лініях квазіконформних відображень на відкриті дискретні відображення, що задовольняють деяку p-модульну нерівність.

Практичне значення одержаних результатів.Дисертація має теоретичний характер. Результати можуть бути використані у дослідженні різних класів відображень на площині та у просторі. Зокрема, результати дисертації можуть знайти застосування у теорії нелінійних систем рівнянь з частинними похідними та в теорії класів Соболєва та Орліча–Соболєва.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, одержано здобувачем самостійно. У статтях (див. список публікацій здобувача на с. 9), що опубліковані у співавторстві, особистий внесок здобувача такий: з робіт [4, 7, 8, 10, 14, 15, 17, 18, 24, 28–30, 33, 39, 40] до дисертації увійшли результати, які отримано особисто здобувачем; в роботах [5, 9, 16, 19, 22, 34–36] визначення напрямку досліджень належить А. Гольбергу, а доведення всіх тверджень належить здобувачеві; у роботі [38] Є.О. Севостьянову належить ідея послабити умову гомеоморфності відображень, а дослідження виконано здобувачем.

Апробація результатів. Результати роботи доповідались на таких конференціях:

- International scientific conference "Conformal Structures and Dynamics" (CODY) Third Year Conference, Bendlewo, Poland, September 21–26, 2009;

- International Conference on Complex Analysis, dedicated to the memory of A.Goldberg, Lviv, May 31 – June 5, 2010;
- Міжнародній конференції із сучасного аналізу, м. Донецьк, 20–23 червня 2011 року;
- Міжнародній науковій конференції, присвяченій 120-річчю з дня народження С. Банаха, Львів, 2012;
- Mathematical Colloquium, Holon Institute of Technology, Holon, Israel, August 15, 2012;
- Міжнародній науковій конференції ”Комплексний аналіз, теорія потенціалу та застосування”, Київ, 2013;
- International Conference ”Complex Analysis and Related Topics”, Lviv, 23–28 September 2013;
- Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м.Чернівці, 1–4 липня 2015 р., с. 147-148;
- X конгресі Міжнародного товариства з аналізу, його застосувань і обчислень ISAAC, Макао, Китай, 2015;
- Міжнародна конференція молодих математиків, Київ, Україна, 2015;
- International Conference "Complex Analysis and Related Topics Lviv, May 30-June 4, 2016;
- International scientific conference "Algebraic and geometric methods of analysis Odesa, May 31 – June 5, 2017;
- Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця, Слов’янськ, 2017;

- International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, September 18–23, 2017, Lviv, Ukraine;
- International scientific conference "(Hyper)Complex Analysis in Differential Equations, Geometry and Physical Applications", Bendlewo, Poland, 2018;
- International scientific conference "Algebraic and geometric methods of analysis", May 30 – June 4, 2018, Odesa, Ukraine;
- Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", Ворохта, 2018;
- XII конгресі Міжнародного товариства з аналізу, його застосувань і обчислень ISAAC, Авейро, Португалія, 2019;
- International scientific conference "(Hyper)Complex Analysis in Differential Equations, Geometry and Physical Applications", Bedlewo, Poland, July 07 – July 14, 2019;
- Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу, Всеукраїнська наукова конференція, Ворохта, 26 лютого – 1 березня, 2020 року;

та на семінарах:

- відділу комплексного аналізу та теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор С. А. Плакса);
- кафедри математичного аналізу Житомирського державного університету імені Івана Франка (керівники: доктор фіз.-мат. наук А. О. Погоруй, доктор фіз.-мат. наук Є. О. Севостьянов, канд. фіз.-мат. наук, доцент О. Ф. Герус);
- львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор О. Б. Скасків);

- загальноінститутському семінарі Інституту прикладної математики і механіки НАН України, м. Слов'янськ (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор, член-кор. НАН України В. Я. Гутлянський);

- семінар з диференціальних рівнянь Інституту математики Польської академії наук (керівник: академік ПАН Б. Боярський), м. Варшава, Польща;

- Geometric Function Theory Seminar 2011/2012, Holon Institute of Technology, Holon, Israel, August 19, 2012.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 40 наукових роботах [1—40] (див. список публікацій здобувача на с. 9), внесених до переліку фахових видань з фізико–математичних наук, серед яких монографія [15] у співавторстві та 26 статей [1,4,6–8,10–14,16,17,19,21,25,26,28–30,32–36,38,39] у виданнях, внесених до міжнародних науково–метричних баз Scopus та Web of Science. Частково вони також висвітлені у матеріалах міжнародних конференцій [41–62].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, 6 розділів, висновків, списку використаних джерел (що містить 453 найменування) і додатку, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації. Повний обсяг роботи становить 365 сторінок друкованого тексту.

Подяки. Висловлюю щиру подяку науковому консультанту, професору Плаксі Сергію Анатолійовичу за постійну увагу до роботи, корисні поради та підтримку, а також професору Рязанову Володимиру Іллічу за обговорення результатів та плідні наукові дискусії за темою роботи.

Зміст дисертації. У *вступі* визначено об'єкт і предмет дослідження, обгрунтовано актуальність теми дисертаційного дослідження, сформульовану мету і завдання, визначено методи дослідження, його наукову новизну, теоретичне і практичне значення, прокоментовано апробацію, описано структуру дисертаційної роботи та її основний зміст.

У **розділі 1** дисертаційної роботи викладено огляд літератури за темою дослідження та вказано на місце отриманих здобувачем результатів у загальній теорії з окреслених напрямків.

Виклад *основних результатів* дисертації починається з **розділу 2**, де розглядаються кільцеві Q-гомеоморфізми відносно p-модуля.

Надалі D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, m — міра Лебега в $\mathbb{R}^n$. В записі $f: D \to \mathbb{R}^n$ припускаємо, що відображення f є неперервним в D.

Кривою γ називається неперервне відображення відрізка $[a, b]$ в $\mathbb{R}^n$. Під *сім'єю* Γ *кривих* γ розуміємо довільний набір кривих. Позначимо $f(\Gamma) := \{f \circ \gamma \,|\, \gamma \in \Gamma\}$ і через $\Delta(E, F, D)$ — сім'ю всіх кривих таких, що $\gamma(0) \in E$, $\gamma(1) \in F$ і $\gamma(t) \in D$ при $t \in (0, 1)$.

Борелеву функцію $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ називають допустимою для сім'ї кривих Γ в $\mathbb{R}^n$ і пишуть $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, якщо

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\, |dx| \geqslant 1$$

для всіх кривих $\gamma \in \Gamma$.

Нехай $p > 1$, *p-модулем* сім'ї кривих Γ в $\mathbb{R}^n$ називають величину

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\, dm(x)\,. \tag{1}$$

У випадку $p = n$ модуль $M_n(\Gamma)$ є конформним інваріантом (тобто зберігається при конформних відображеннях) і називається конформним модулем сім'ї кривих Γ. Якщо $p \neq n$, то $M_p(\Gamma)$, взагалі кажучи, не зберігається при конформних відображеннях. Тому $M_p(\Gamma)$ при $p \neq n$ називають також неконформним модулем сім'ї кривих Γ.

Нехай $Q : D \to [0, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція і $p > 1$. Гомеоморфізм $f : D \to D'$ називають *Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля*, якщо

$$M_p(f\Gamma) \leqslant \int\limits_{D} Q(x)\, \rho^p(x)\, dm(x) \tag{2}$$

для будь-якої сім'ї Γ кривих у D і будь-якої функції $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$.

Інтегральні оцінки вигляду (2) при $p = n = 2$ зустрічаються в роботах Л. Альфорса, О. Лехто і К. Віртанена для квазіконформних відображень на площині та в роботі Ю.Ф. Стругова при $p = n$ для відображень, квазіконформних у середньому. У роботі В.Я. Гутлянського, К. Бішопа, О. Мартіо і М. Вуорінена (2000 р.) нерівність вигляду (2) була доведена при вивченні локальних властивостей просторових квазіконформних відображень, що стало безпосереднім поштовхом для введення поняття Q-гомеоморфізма. Це поняття узагальнює поняття квазіконформного відображення за Вяйсяля і було введене при $p = n$ у роботі О. Мартіо, В. Рязанова, У. Сребро і Е. Якубова, а при $p \neq n$ у роботі А. Гольберга.

Нехай $x_0 \in \mathbb{R}^n$ і r_1, r_2 такі, що $0 < r_1 < r_2 < \infty$. Позначимо $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_1, r_2) := \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$, $S(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, $B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$, $\mathbb{B}^n := B(0,1)$, $\mathbb{S}^{n-1} := S(0,1)$. Надалі ω_{n-1} — площа сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ і Ω_n — об'єм кулі $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Через d_0 позначимо відстань від точки $x_0 \in D$ до межі області D, тобто $d_0 := \operatorname{dist}(x_0\,, \partial D)$.

Нехай $Q : D \to [0\,, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція і $p > 1$. Гомеоморфізм $f : D \to D'$ називають *кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля в точці* $x_0 \in D$, якщо співвідношення

$$M_p\left(\Delta\left(fS_1, fS_2; fD\right)\right) \leqslant \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x) \cdot \eta^p(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{3}$$

виконується для кожного кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, і кожної вимірної функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \;=\; 1\,,$$

при цьому $S_i := S(x_0, r_i)\,, \quad i = 1, 2$.

Говорять, що гомеоморфізм $f : D \to D'$ є *кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля в області* D, якщо f є кільцевим відносно p-модуля у кожній точці $x_0 \in D$.

Поняття кільцевого Q-гомеоморфізма узагальнює поняття квазіконформного відображення за Герингом і вперше зустрічається при $p = n = 2$ при дослідженні невироджених рівнянь Бельтрамі в роботах В. Рязанова, У. Сребро і Е. Якубова. У роботі В.Я. Гутлянського і А. Гольберга (2009) оцінка вигляду (3) при $p = n$ з деякою функцією Q встановлена для просторових квазіконформних відображень.

Зауважимо, що кожен Q-гомеоморфізм $f : D \to D'$ відносно p-модуля є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля в області D.

Головною метою розділу 2 є опис локальних властивостей кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля. В наступній теоремі встановлено критерій належності гомеоморфізмів класу кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля при $p > 1$.

Теорема 2.2.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Припустимо, що $Q : D \to [0, \infty]$ — вимірна функція, у якої середнє значення $q_{x_0}(r)$ на сфері $S(x_0, r)$ скінченне для майже всіх $r \in (0, d_0)$. Гомеоморфізм $f : D \to D'$ є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля в точці $x_0 \in D$ тоді і тільки тоді, коли для довільних $0 < r_1 < r_2 < d_0$ виконується умова*

$$M_p\left(\Delta\left(fS_1,\ fS_2\,, f\mathbb{A}\right)\right) \leqslant \frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}\ ,$$

де $S_1 := S(x_0, r_1)$, $S_2 := S(x_0, r_2)$ і

$$I \ = \ I(x_0, r_1, r_2) := \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}\,.$$

Будемо говорити, що вимірна за Лебегом функція $Q : D \to [0, \infty]$ задовольняє (p, λ)*-умову в точці* $x_0 \in D$, якщо існує стала $\lambda = \lambda(x_0) > 1$ така, що

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \ \varepsilon^{\frac{n-p}{p-1}} \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} > 0\,,$$

де $q_{x_0}(t)$ — середнє значення Q на сфері $S(x_0, t)$.

В наступній теоремі встановлено достатні умови диференційовності майже скрізь кільцевого Q-гомеоморфізма відносно p-модуля.

Теорема 2.3.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Припустимо, що $f : D \to D'$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля, $p > n-1$. Якщо функція Q задовольняє (p, λ)-умову майже скрізь у D, то f є диференційовним майже скрізь у D.*

З теореми 2.3.1 випливає наступне твердження.

Наслідок 2.3.3. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Припустимо, що $f : D \to D'$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля, $p > n-1$. Якщо $Q \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$, то f є диференційовним майже скрізь у D.*

Задача про спотворення площ при квазіконформних відображеннях бере свій початок з робіт Б. Боярського. Точна верхня оцінка площі образу круга при квазіконформних відображеннях зустрічається в монографії М.О. Лаврентьєва (1962 р.). Ряд узагальнень цих результатів отримано у роботах Ф. Герінга і Е. Рейча, К. Астали, А. Єременка і Д. Гамільтона та в монографії Б. Боярського, В.Я. Гутлянського, О. Мартіо і В.І. Рязанова.

Наступна теорема узагальнює результат М.О. Лаврентьєва про оцінку спотворення площі образу круга при квазіконформному відображенні на комплексній площині.

Теорема 2.4.1. *Нехай $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \geqslant 2$, — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля в точці $x_0 = 0$. Тоді при $1 < p < n$ виконується оцінка*

$$m(f\overline{B}_r) \leqslant \Omega_n \left(1 + \frac{n-p}{p-1} \int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\, q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{-\frac{n(p-1)}{n-p}},$$

а при $p = n$ — оцінка

$$m(f\overline{B}_r) \leqslant \Omega_n \exp\left(-n \int\limits_r^1 \frac{dt}{t q^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right),$$

де $\overline{B}_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant r\}$, $q(t)$ — середнє значення функції Q на сфері $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = t\}$.

Доведено наступний аналог теореми Ікоми–Шварца.

Теорема 2.5.1. *Нехай* $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n, n\geqslant 2,$ *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля в точці* $x_0=0$*, який задовольняє умову* $f(0)=0$*. Тоді при* $1<p<n$ *виконується оцінка*

$$\liminf_{x\to 0}\,|f(x)|\left(1+\frac{n-p}{p-1}\int\limits_{|x|}^{1}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\,q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{p-1}{n-p}}\leqslant 1,$$

а при $p=n$ *– оцінка*

$$\liminf_{x\to 0}\,|f(x)|\,\exp\left(\,\int\limits_{|x|}^{1}\frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right)\leqslant 1\,,$$

де $q(t)$ *— середнє значення функції* Q *на сфері* $\{x\in\mathbb{R}^n:\,|x|=t\}$*.*

Досліджено асимптотичну поведінку на нескінченності кільцевих Q-гомеоморфізмів та отримано аналог результату Мартіо–Рікмана–Вяйсяля про оцінку швидкості зростання відображень з обмеженим спотворенням в околі нескінченно віддаленої точки (теорема 2.6.1).

Встановлено достатні умови скінченної ліпшицевості (теорема 2.7.1, яка є узагальненням у деякому сенсі теореми Герінга про локальну ліпшицевість гомеоморфізмів), локальної гельдеровості (теорема 2.8.2) і локальної логарифмічної гельдеровості (теорема 2.9.1) кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля. Доведено «ліпшицевий» (теорема 2.7.2) і «степеневий» (теорема 2.8.3) аналоги теореми Ікоми–Шварца.

У **розділі 3** досліджуються властивості нижніх Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля та встановлюється їх зв'язок з кільцевими Q-гомеоморфізмами відносно p-модуля.

$(n-1)$*-вимірною поверхнею* S в $\mathbb{R}^n$ називають довільне неперервне відображення $S:\omega\to\mathbb{R}^n$, де ω – відкрита множина в $\overline{\mathbb{R}^{n-1}}:=\mathbb{R}^{n-1}\cup\{\infty\}$. *Функцією кратності* поверхні S називається число прообразів елемента $y\in\mathbb{R}^n$:

$$N(S,y)=\operatorname{card}S^{-1}(y)=\operatorname{card}\{x\in\omega:\ S(x)=y\}\,.$$

Для борелевої функції $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ *інтеграл по поверхні* S визначається рівністю

$$\int\limits_S \rho \, d\mathcal{A} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(y) \, N(S, y) \, dH^{n-1}(y) \,,$$

де через H^{n-1} позначено $(n-1)$-*вимірну міру Хаусдорфа* в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$.

Борелеву функцію $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ називають *допустимою* для сім'ї Γ $(n-1)$-вимірних поверхонь і пишуть $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$, якщо

$$\int\limits_S \rho^{n-1} \, d\mathcal{A} \geqslant 1 \tag{4}$$

для кожної поверхні $S \in \Gamma$. Тоді p-*модулем* сім'ї Γ при $p > 1$ називають величину (1).

Будемо говорити, що деяка властивість виконується для p-*майже всіх* $(n-1)$-вимірних поверхонь сім'ї Γ, якщо підсім'я поверхонь сім'ї Γ, для яких ця властивість порушується, має p-модуль нуль.

Назвемо вимірну за Лебегом функцію $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ *узагальнено p-допустимою* для сім'ї Γ, що складається із $(n-1)$-вимірних поверхонь в $\mathbb{R}^n$, і писатимемо $\rho \in \operatorname{ext}_p \operatorname{adm} \Gamma$, якщо нерівність (4) виконується для p-майже всіх $S \in \Gamma$.

Нехай $Q : D \to (0, \infty)$ — вимірна за Лебегом функція. Гомеоморфізм $f : D \to D'$ будемо називати *нижнім Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля у точці* $x_0 \in D$, якщо

$$M_p \left(f \Sigma_{\mathbb{A}} \right) \geqslant \inf_{\rho \in \mathrm{ext_p} \, \mathrm{adm} \, \Sigma_{\mathbb{A}}} \int\limits_{\mathbb{A}} \frac{\rho^p(x)}{Q(x)} \, dm(x) \tag{5}$$

для кожного кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 < d_0$, де $\Sigma_{\mathbb{A}}$ — сім'я всіх сфер $S(x_0, r)$, $r \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Гомеоморфізм $f : D \to D'$ назвемо *нижнім Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля в області D*, якщо умова (5) виконується для будь-якого $x_0 \in D$. Нижні Q-гомеоморфізми відносно конформного n-модуля називають нижніми Q-гомеоморфізмами (у точці $x_0 \in D$ чи в області D).

У наступній теоремі встановлено критерій належності гомеоморфізмів класу нижніх Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля при $p > n-1$.

Теорема 3.2.1. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$. Припустимо, що $Q : D \to (0,\infty)$ — вимірна функція. Гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{R}^n$ є нижнім Q-гомеоморфізмом у точці x_0 відносно p-модуля при $p > n-1$ тоді і тільки тоді, коли*

$$M_p(f\Sigma_{\mathbb{A}}) \geqslant \int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dr}{||\,Q||_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)} \quad \textit{для всіх} \quad 0<\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 < d_0,$$

де $\Sigma_{\mathbb{A}}$ — сім'я всіх сфер $S(x_0,r)$, $r \in (\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, і

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r) := \left(\int\limits_{S(x_0,r)} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, d\mathcal{A} \right)^{\frac{p-n+1}{n-1}} .$$

Інфімум в (5) досягається для функції

$$\rho_0(x) = \left(\frac{Q(x)}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(|x-x_0|)} \right)^{\frac{1}{p-n+1}} .$$

В наступній теоремі встановлено зв'язок між нижніми і кільцевими Q-гомеоморфізмами відносно p-модуля.

Теорема 3.2.2. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$. Припустимо, що $Q : D \to (0,\infty)$ — вимірна за Лебегом функція така, що $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r) \neq \infty$ для м.в. $r \in (0,d_0)$ і $f : D \to D'$ — нижній Q-гомеоморфізм у точці x_0 відносно p-модуля при $p > n-1$. Тоді f є кільцевим Q_*-гомеоморфізмом відносно $\frac{p}{p-n+1}$-модуля у точці x_0 при $Q_*(x) = Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)$.*

Із теореми 3.2.2. випливає наступне твердження.

Наслідок 3.2.1. *У просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, будь-який нижній Q-гомеоморфізм відносно p-модуля $f : D \to D'$ у точці $x_0 \in D$ за умов $p > n-1$ та $Q \in L_{\mathrm{loc}}^{\frac{n-1}{p-n+1}}(D)$ є кільцевим Q_*-гомеоморфізмом відносно $\frac{p}{p-n+1}$-модуля в точці x_0 при $Q_*(x) = Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)$.*

Знайдено достатні умови локальної гельдеровості нижніх Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля (теорема 3.3.1). Доведено «степеневий» аналог теореми Ікоми–Шварца (теорема 3.3.2) та аналог результату Мартіо–Рікмана–Вяйсяля про оцінку швидкості зростання відображень з обмеженим спотворенням в околі нескінченно віддаленої точки (теорема 3.4.1).

У **розділі 4** вивчаються відображення зі скінченним спотворенням класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ на комплексній площині.

Нехай D — область у комплексній площині $\mathbb{C}$ і нехай $\mu : D \to \mathbb{C}$ — вимірна функція, для якої $|\mu(z)| < 1$ майже скрізь (м.с.) в D. Розглянемо *рівняння Бельтрамі*

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z, \tag{6}$$

де $f_{\bar{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, f_x і f_y — узагальнені частинні похідні відображення f відповідно по x і y. Рівняння (4.1) називається *виродженим*, якщо дилатаційне відношення

$$K_\mu(z) := \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}$$

є істотно необмеженим, тобто $K_\mu \notin L^\infty(D)$. *Дотична дилатація* відображення f у точці $z \in D$ по відношенню до точки $z_0 \in \overline{D}$ визначається рівністю

$$K^T_\mu(z, z_0) := \frac{\left|1 - \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0}\mu(z)\right|^2}{1 - |\mu(z)|^2}\,.$$

Далі покладаємо, що $K^T_\mu(z, z_0) = 0$, якщо z лежить поза областю D. Добре відомо, що для всіх z і $z_0 \in D$ виконується оцінка $K^T_\mu(z, z_0) \leqslant K_\mu(z)$.

Теорема 4.1.1. *Нехай f — гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (4.1) класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$. Тоді f є нижнім Q-гомеоморфізмом у кожній точці $z_0 \in \overline{D}$ при $Q(z) = K^T_\mu(z, z_0)$.*

З теореми 4.1.1 випливає наступне твердження.

Наслідок 4.1.1. *Нехай f — гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (4.1) класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$. Тоді f є нижнім Q-гомеоморфізмом у кожній точці $z_0 \in \overline{D}$ при $Q(z) = K_\mu(z)$.*

Гомеоморфізм $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ називається *кільцевим Q-гомеоморфізмом у точці* z_0 межі ∂D, якщо f задовольняє співвідношення

$$M\left(\Delta\left(fC_1, fC_2; fD\right)\right) \leqslant \int\limits_{\mathbb{A}\cap D} Q(z)\cdot\eta^2(|z-z_0|)\, dm(z) \tag{7}$$

для будь-якого кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$ і довільних континуумів C_1 і C_2 в D, які належать різним компонентам доповнення кільця $\mathbb{A}$ в $\overline{\mathbb{C}}$, та для кожної вимірної функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(t)\, dt \geqslant 1\,.$$

Гомеоморфізм $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ називається *кільцевим Q-гомеоморфізмом* в $\overline{D}$, якщо умова (7) виконується для кожної точки $z_0 \in \overline{D}$.

Теорема 4.1.2. *Нехай f — гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (4.1) класу $W^{1,1}_{\rm loc}$ і $K^T_\mu(z, z_0) \in L^1_{\rm loc}$. Тоді f є кільцевим Q-гомеоморфізмом у кожній точці $z_0 \in \overline{D}$ при $Q(z) = K^T_\mu(z, z_0)$.*

Наслідок 4.1.4. *Нехай f — гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (4.1) класу $W^{1,1}_{\rm loc}$ та $K_\mu \in L^1_{\rm loc}$. Тоді f є кільцевим Q-гомеоморфізмом у кожній точці $z_0 \in \overline{D}$ при $Q(z) = K_\mu(z)$.*

В термінах дотичної дилатації $K^T_\mu(z, z_0)$ послаблено умови, достатні для існування регулярного розв'язку задачі Діріхле для рівняння Бельтрамі в однозв'язній області.

Задача Діріхле для рівняння Бельтрамі (4.1) в області D полягає в знаходженні неперервної функції $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$, яка м.с. в D має частинні похідні першого порядку і м.с. в D задовольняє рівняння (4.1), а також задовольняє граничну умову

$$\lim_{z\to\zeta} \mathrm{Re}\, f(z) = \varphi(\zeta) \qquad \forall\, \zeta \in \partial D \tag{8}$$

при заданій неперервній функції $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$.

При $\varphi(\zeta) \not\equiv \mathrm{const}$ *регулярним розв'язком* такої задачі будемо називати неперервну функцію $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$, яка є дискретним та відкритим відображенням класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ в D з якобіаном $J_f(z)=|f_z|^2-|f_{\overline{z}}|^2\neq 0$ м.с. в D і м.с. в D задовольняє рівняння (4.1), а також задовольняє граничну умову (8). У випадку $\varphi(\zeta)\equiv c={\rm const}$, $\zeta\in\partial D$, під *регулярним розв'язком* задачі Діріхле (8) для рівняння Бельтрамі (4.1) будемо розуміти функцію $f(z)=c+ic'$, $c'\in\mathbb{R}$.

Задача Діріхле добре вивчена для рівномірно еліптичних систем рівнянь у роботах Б.В. Боярського та І.Н. Векуа. Для виродженого рівняння Бельтрамі у роботі Ю. Дибова вивчалася задача Діріхле для одиничного круга.

Наведемо основні твердження про існування регулярного розв'язку задачі Діріхле для виродженого рівняння Бельтрамі в довільній жордановій області.

Теорема 4.3.1. *Нехай $\mu:D\to\mathbb{C}$ — вимірна в жордановій області D функція, для якої $|\mu(z)|<1$ м.с., така, що $K_\mu\in L^1_{\rm loc}(D)$ і*

$$K^T_\mu(z,z_0)\leqslant Q(z)\in{\rm FMO}(\overline{D}).$$

Тоді для будь-якої неперервної функції $\varphi:\partial D\to\mathbb{R}$ існує регулярний розв'язок f задачі Діріхле (8) для рівняння Бельтрамі (4.1).

Наслідок 4.3.1. *Твердження теореми 4.3.1 справедливе, якщо $K^T_\mu(z,z_0)\leqslant Q(z)\in{\rm BMO}(\overline{D})$.*

Наслідок 4.3.2. *Твердження теореми 4.3.1 справедливе, якщо*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\ \fint_{B(z_0,\varepsilon)}K^T_\mu(z,z_0)\,dm(z)<\infty\qquad\forall\ z_0\in\overline{D}.$$

Теорема 4.3.2. *Нехай $\mu:D\to\mathbb{C}$ — вимірна в жордановій області D функція, для якої $|\mu(z)|<1$ м.с., така, що $K_\mu\in L^1_{\rm loc}(D)$ і*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)}\frac{dr}{||K^T_\mu||_1(z_0,\,r)}=\infty\qquad\forall\ z_0\in\overline{D},$$

де $||K^T_\mu||_1(z_0,\,r):=\int_{S(z_0,\,r)}K^T_\mu(z,z_0)\,ds$ і $\delta(z_0)<\sup\limits_{z\in D}|z-z_0|$. Тоді для будь-якої неперервної функції $\varphi:\partial D\to\mathbb{R}$ існує регулярний розв'язок f задачі Діріхле (8) для рівняння Бельтрамі (4.1).

Доведено наступний аналог теореми Ікоми–Шварца, який є уточненням теореми 2.5.1 для гомеоморфних розв'язків рівняння Бельтрамі.

Теорема 4.4.1. *Нехай* $\mu\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *— вимірна функція така, що* $|\mu(z)| < 1$ *м.с., і* $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ *— гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (4.1) класу Соболєва* $W^{1,1}_{\rm loc}$*, який задовольняє умову* $f(0) = 0$*. Тоді*

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \, \exp\left(2\pi \int\limits_{|z|}^{1} \frac{dt}{\| \, K_{\mu}^{T} \|_{1}\,(0,t)}\right) \leqslant 1\,.$$

Досліджено асимптотичну поведінку на нескінченності гомеоморфних розв'язків рівняння Бельтрамі, при цьому доведено аналог результату Мартіо–Рікмана–Вяйсяля про оцінку швидкості зростання відображень з обмеженим спотворенням в околі нескінченно віддаленої точки.

Нехай $R > 0$ і $z_0 \in \mathbb{C}$. Для гомеоморфізма $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ покладемо

$$L(z_0, f, R) := \sup_{|z-z_0|\leqslant R} |f(z) - f(z_0)|\,.$$

Теорема 4.5.1. *Нехай* $\mu\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *— вимірна функція така, що* $|\mu(z)| < 1$ *м.с.,* z_0 *— деяка фіксована точка в* $\mathbb{C}$ *і* r_0 *— довільне фіксоване додатне число. Тоді будь-який гомеоморфний розв'язок* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *рівняння Бельтрамі (4.1) класу Соболєва* $W^{1,1}_{\rm loc}$ *задовольняє умову*

$$\liminf_{R\to\infty} L(z_0, f, R)\, \exp\left(-\,2\pi \int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{\| \, K_{\mu}^{T} \|_{1}\,(z_0,t)}\right) = M_0 > 0\,.$$

Встановлено зв'язок гомеоморфізмів зі скінченним спотворенням із нижніми і кільцевими Q-гомеоморфізмами відносно p-модуля. Нехай D — область в $\mathbb{C}$. Відображення $f : D \to \mathbb{C}$ називається *відображенням зі скінченним спотворенням,* якщо $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$ і

$$\|f'(z)\|^2 \leqslant K(z) \cdot J_f(z) \qquad \text{м.с.}$$

для деякої майже скрізь скінченної функції $K(z) \geqslant 1$, де $\|f'(z)\| = |f_z| + |f_{\overline{z}}|$ і $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$.

Надалі покладаємо

$$K_p(z,f) := \begin{cases} \frac{\|f'(z)\|^p}{J_f(z)}, & \text{якщо } J_f(z) \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } f'(z) = 0, \\ \infty & \text{в інших точках.} \end{cases}$$

Теорема 4.6.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{C}$. Тоді будь-який гомеоморфізм $f : D \to D'$ зі скінченним спотворенням є нижнім Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля при $Q(z) = K_p(z,f)$ і будь-якому $p > 1$.*

Наслідок 4.6.2. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{C}$ і $p > 1$. Припустимо, що $f : D \to D'$ — гомеоморфізм зі скінченним спотворенням і $K_p(z,f) \in L^{\frac{1}{p-1}}_{\mathrm{loc}}(D)$. Тоді f є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p'-модуля при $Q(z) = K_p^{\frac{1}{p-1}}(z,f)$, де $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

Встановлено достатні умови скінченної ліпшицевості (теорема 4.7.1), локальної гельдеровості (теорема 4.7.2) і локальної логарифмічної гельдеровості (теорема 4.7.3) гомеоморфізмів класів Соболєва $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$.

В наступній теоремі, що є уточненням теореми 2.4.1 у випадку гомеоморфізмів зі скінченним спотворенням, узагальнено оцінку М.О. Лаврентьєва про спотворення площі образу круга при квазіконформних відображеннях.

Теорема 4.7.4. *Нехай $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ — гомеоморфізм зі скінченним спотворенням. Тоді при $p = 2$ справедлива оцінка*

$$m\left(f\overline{B}_r\right) \leqslant \pi \exp\left(-4\pi \int\limits_r^1 \frac{d\tau}{\|K\|_1(0,\tau)}\right),$$

а при $p > 2$ — оцінка

$$m(f\overline{B}_r) \leqslant \pi \left(1 + (2\pi)^{p-1}(p-2) \int\limits_r^1 \frac{d\tau}{\|K_p\|_{\frac{1}{p-1}}(0,\tau)}\right)^{-\frac{2}{p-2}}.$$

де $\overline{B}_r = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leqslant r\}$, $S_\tau = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \tau\}$ *і* $\| K_p\|_{\frac{1}{p-1}}(\tau) = \left(\int\limits_{S_\tau} [K_p(z,f)]^{\frac{1}{p-1}}\, ds\right)^{p-1}$.

Доведено наступний аналог теореми Ікоми–Шварца, який є уточненням теореми 2.5.1 для гомеоморфізмів зі скінченним спотворенням.

Теорема 4.7.5. *Нехай* $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ *— гомеоморфізм зі скінченним спотворенням,* $f(0) = 0$. *Тоді при* $p > 2$ *справедлива оцінка*

$$\liminf_{z\to 0}\, |f(z)| \left(1 + (2\pi)^{p-1}(p-2)\int\limits_{|z|}^{1} \frac{dr}{\| K_p\|_{\frac{1}{p-1}}(0,r)}\right)^{\frac{1}{p-2}} \leqslant 1.$$

У **розділі 5** вивчаються відображення зі скінченним спотворенням класів Орліча–Соболєва та Соболєва у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

У роботах Ю.Г. Решетняка, С.К. Водопьянова, В.М. Гольдштейна та інших розвинено теорію відображень з обмеженим спотворенням, яка стала класикою теорії відображень. Узагальненням поняття відображення з обмеженим спотворенням є поняття відображення зі скінченним спотворенням.

Відображення f відкритої множини $U \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, називається *відображенням зі скінченним спотворенням*, якщо $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$ і

$$\|f'(x)\|^n \leqslant K(x)\cdot J_f(x) \qquad \text{м.с.}$$

для деякої майже скрізь скінченної функції $K(x) \geqslant 1$, де $\|f'(x)\|$ — операторна норма матриці Якобі f' відображення f в x і $J_f(x)$ — його якобіан. *Зовнішньою дилатацією* відображення f у точці x називається величина

$$K_O(x,f) := \begin{cases} \frac{\|f'(x)\|^n}{|J_f(x)|}, & \text{якщо } J_f(x) \neq 0,\\ 1, & \text{якщо } f'(x) = 0,\\ \infty & \text{в інших точках,}\end{cases}$$

а *внутрішньою дилатацією* відображення f у точці x — величина

$$K_I(x,f) \quad = \quad \begin{cases} \frac{|J(x,f)|}{l(f'(x))^n}, & \text{якщо } J(x,f) \neq 0,\\ 1, & \text{якщо } f'(x) = 0, \quad ,\\ \infty, & \text{в інших} \quad \text{випадках} \ ,\end{cases}$$

де $l\left(f'(x)\right) = \min\limits_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}$.

Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Для заданої опуклої зростаючої функції $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\varphi(0) = 0$, через $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(D)$ позначимо *клас Орліча–Соболєва* всіх локально інтегровних вектор-функцій $f : D \to \mathbb{R}^m$ таких, що компоненти f_i, $i = 1, \ldots, m$, вектор-функції $f = (f_1, \ldots, f_m)$ належать класу Соболєва $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ і

$$\int\limits_G \varphi\left(|\nabla f(x)|\right)\, dm(x) < \infty$$

для кожної області G такої, що $\overline{G} \subset D$, де $|\nabla f(x)| := \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$.

Будемо також використовувати термін "клас Орліча–Соболєва" і збережемо позначення $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ у випадку, коли на функцію φ накладаються більш слабкі умови, ніж в наведеному означенні класу Орліча–Соболєва.

Наступна теорема є узагальненням результатів Меньшова–Герінга–Лехто на площині та теореми Вяйсяля в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, на відкриті відображення класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ за умови типу умови Кальдерона на функцію φ.

Теорема 5.3.1. *Нехай Ω — відкрита множина в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — неперервне відкрите відображення класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, де $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неспадна функція, яка задовольняє умову*

$$\int\limits_{t_*}^{\infty}\left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty \tag{9}$$

для деякого $t_* \in (0,\infty)$. Тоді відображення f має майже скрізь повний диференціал в Ω.

Зауважимо, що умови теореми 5.3.1 виконуються, зокрема, для відображень f класу Соболева $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ при $p > n-1$.

Неперервні відображення класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ за умови (5.9) типу умови Кальдерона на функцію φ володіють (N)-властивістю Лузіна на майже всіх гіперплощинах, що випливає з наступної теореми.

Теорема 5.4.2. *Нехай* U *— відкрита множина в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *— неспадна функція така, що задовольняє умову (5.9). Тоді будь-яке неперервне відображення* $f : U \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, *класу Орліча–Соболева* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *володіє* N*-властивістю і, більш того, є локально абсолютно неперервним відносно* $(n-1)$*-вимірної хаусдорфової міри на майже всіх гіперплощинах* $\mathcal{P}$, *паралельних довільній фіксованій гіперплощині* $\mathcal{P}_0$. *Крім того, на майже всіх таких* $\mathcal{P}$ *виконується рівність* $H^{n-1}(f(E)) = 0$, *якщо* $|\nabla f| = 0$ *на* $E \subset \mathcal{P}$.

Доведено твердження про компактність класів Орліча–Соболєва (теорема 5.5.1), про належність обернених відображень до класу гомеоморфізмів з обмеженим інтегралом Діріхле (теорема 5.6.1), про одностайну неперервність і нормальність сімей обернених відображень (наслідок 5.6.4), а також про напівнеперервність дилатацій відображень зі скінченним спотворенням (теорема 5.7.1).

Ключовою для застосування результатів розділів 2, 3 до дослідження відображень класів Орліча–Соболєва є наступна теорема.

Теорема 5.8.1. *Нехай* D *і* D' *— області в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *— неспадна функція така, що задовольняє умову (5.9). Тоді будь-який гомеоморфізм* $f : D \to D'$ *класу Орліча–Соболева* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *зі скінченним спотворенням є нижнім* Q*-гомеоморфізмом при* $Q(x) = K_I^{\frac{1}{n-1}}(x,f)$.

Наслідок 5.8.1. *Будь-який гомеоморфізм в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, *класу* $W^{1,p}_{\rm loc}$ *при* $p > n-1$ *зі скінченним спотворенням є нижнім* Q*-гомеоморфізмом при* $Q(x) = K_I^{\frac{1}{n-1}}(x,f)$.

Наслідок 5.8.2. *Будь-який гомеоморфізм* f *класу Орліча–Соболева* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, *за умови (5.9) на функцію* φ *(зокрема, будь-який гомеоморфізм класу Соболєва* $W^{1,p}_{\rm loc}$ *при* $p > n-1$*) і за умови* $K_I(x,f) \in L^1_{\rm loc}(D)$ *є кільцевим* Q_**-гомеоморфізмом в кожній точці* $x_0 \in D$ *при* $Q_*(x) = K_I(x,f)$.

Встановлено результати про асимптотичну поведінку на нескінченності гомеоморфізмів класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ за умови (5.9) на функцію φ (теореми 5.10.1, 5.10.2) та про одностайну неперервність сімей таких гомеоморфізмів (теореми 5.9.4 – 5.9.6).

Встановлено зв'язок гомеоморфізмів класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, за умови типу умови Кальдерона на функцію φ з нижніми і кільцевими Q-гомеоморфізмами відносно p-модуля (теореми 5.11.1 і 5.11.2), спираючись на який у наступних двох теоремах послаблено достатні умови відповідно локальної та логарифмічної гельдеровості вказаних гомеоморфізмів.

Теорема 5.11.3. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, і $f:D\to D'$ — гомеоморфізм класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ зі скінченним спотворенням, де $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ — неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9). Припустимо, що для деяких чисел $\lambda>1$, $\sigma>0$ і $C_{x_0}>0$ виконується умова*

$$\varepsilon^{\sigma}\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{\Vert\, K_p\Vert_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)}\geqslant C_{x_0}$$

для будь-якого $\varepsilon\in\left(0,\frac{d_0}{\lambda^2}\right)$. Тоді при $p\in\left(n,n+\frac{1}{n-2}\right)$ виконується нерівність

$$|f(x)-f(x_0)|\,\leqslant\,\nu_0\,C_{x_0}^{-\frac{1}{p-n}}\,|x-x_0|^{\frac{\sigma}{p-n}}$$

для всіх $x\in B(x_0,\delta_0)$, де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n, p, λ і σ.

Теорема 5.11.4. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$. Припустимо, що $f:D\to D'$ — гомеоморфізм зі скінченним спотворенням класу $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, де $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ — неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9). Якщо $K_p(x,f)\in L_{\alpha}(B(x_0,\delta_0)),\delta_0\leqslant\frac{{\rm dist}\,(x_0,\partial D)}{4}$, $p\in\left(n,n+\frac{1}{n-2}\right)$, $\alpha>\frac{n}{p-n}$, то*

$$|f(x)-f(x_0)|\,\leqslant\,\nu_0\Vert K_p(f)\Vert_{\alpha}^{\frac{1}{p-n}}|x-x_0|^{1-\frac{n}{\alpha(p-n)}}$$

для всіх $x\in B(x_0,\delta_0)$, де $\Vert K_p(f)\Vert_{\alpha}=\left(\int\limits_{B(x_0,\delta_0)}K_p^{\alpha}(x,f)\,dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ — норма в просторі $L_{\alpha}(B(x_0,\delta_0))$ і ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від розмірності простору n, p і α.

Теорема 5.11.5. *Нехай* D *і* D' *— області в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, *і* $f : D \to D'$ *— гомеоморфізм класу Орліча–Соболєва* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *зі скінченним спотворенням, де* $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *— неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9). Якщо* $p \in \left(n, n + \frac{1}{n-2}\right)$, $\| K_p \|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) \neq \infty$ *для майже всіх* $r \in (0, d_0)$ *і для деяких чисел* $\kappa \in \left[0, \frac{p}{p-n+1}\right)$, $C_{x_0} > 0$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{[K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\, dm(x)}{|x - x_0|^{\frac{p}{p-n+1}}} \leqslant C_{x_0} \ln^{\kappa} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)$$

для будь-яких $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < d_0$, *то*

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \nu_0\, C^{\gamma}_{x_0} \ln^{-\theta} \frac{1}{|x - x_0|}$$

для всіх $x \in B(x_0, \delta_0)$, *де* $\delta_0 \leqslant \min\{1, d_0^4\}$,

$$\gamma = \frac{n(p - n + 1)}{(n - 1)(p - n)}, \quad \theta = \frac{p - \kappa(p - n + 1)}{(n - 1)(p - n)}$$

і ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n, p *і* κ.

Наслідок 5.11.7. *Нехай* D *і* D' *— області в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. *Припустимо, що* $f : D \to D'$ *— гомеоморфізм зі скінченним спотворенням класу* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, *де* $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *— неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9). Якщо* $K_p(x, f) \in L_{\frac{n}{p-n}}(B(x_0, \delta_0))$, $\delta_0 \leqslant \min\{1, {\rm dist}^4(x_0, \partial D)\}$ *і* $p \in \left(n, n + \frac{1}{n-2}\right)$, *то*

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \nu_0 \|K_p(f)\|^{\frac{1}{p-n}}_{\frac{n}{p-n}} \ln^{-\frac{p}{n(p-n)}} \frac{1}{|x - x_0|}$$

для всіх $x \in B(x_0, \delta_0)$, *де*

$$\|K_p(f)\|_{\frac{n}{p-n}} = \left(\int\limits_{B(x_0,\delta_0)} K_p^{\frac{n}{p-n}}(x, f)\, dm(x) \right)^{\frac{p-n}{n}}$$

— норма у просторі $L_{\frac{n}{p-n}}(B(x_0, \delta_0))$ *і* ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від розмірності простору* n *і* p.

Доведено теореми 5.12.1 і 5.14.1, які є уточненнями відповідно теорем 2.4.1 і 2.5.1 для гомеоморфізмів класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ зі скінченним спотворенням в $\mathbb{R}^n, n \geqslant 3$, за умови (5.9) на функцію φ. Встановлено оцінку зверху міри образу кулі для вказаних гомеоморфізмів.

Теорема 5.12.1. *Припустимо, що* $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ *— гомеоморфізм зі скінченним спотворенням класу* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, *де* $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *— неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9). Тоді при* $p = n$ *має місце оцінка*

$$m\left(f\overline{B}_r\right) \leqslant \Omega_n \,\exp\left(-n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}\int\limits_r^1 \frac{d\tau}{\|\,K_n\|_{\,n-1}(\tau)}\right)\,,$$

а при $p > n$

$$m(f\overline{B}_r) \leqslant \Omega_n\left(1+\omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}(p-n)\int\limits_r^1\frac{d\tau}{\|\,K_p\|_{\,\frac{n-1}{p-n+1}}(\tau)}\right)^{-\frac{n}{p-n}}\,,$$

де $\|\,K_p\|_{\,\frac{n-1}{p-n+1}}(\tau) = \left(\int\limits_{S_\tau}[K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\,d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}$, $S_r = \{x\in\mathbb{R}^n : |x| = r\}$ *і* $\overline{B}_r = \{x\in\mathbb{R}^n : |x| \leqslant r\}$.

Доведено наступний аналог теореми Ікоми–Шварца для гомеоморфізмів класу Орліча–Соболєва за умови типу умови Кальдерона на функцію φ.

Теорема 5.14.1. *Припустимо, що* $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ *— гомеоморфізм зі скінченним спотворенням класу* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, *де* $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *— неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9) і* $f(0) = 0$. *Тоді при* $p > n$ *має місце оцінка*

$$\liminf\limits_{x\to 0}\,|f(x)|\,\left(1+\omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}(p-n)\int\limits_{|x|}^1\frac{dr}{\|\,K_p\|_{\,\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}\right)^{\frac{1}{p-n}} \leqslant 1,$$

а при $p = n$

$$\liminf\limits_{x\to 0}\,|f(x)|\,\exp\left(\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}\int\limits_{|x|}^1\frac{dr}{\|\,K_n\|_{\,n-1}(r)}\right) \leqslant 1\,,$$

де $\|K_p\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r) = \left(\int\limits_{S_r}[K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\,d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}$ *і* $S_r = \{x\in\mathbb{R}^n : |x| = r\}$.

В наступній теоремі наведено достатні умови скінченної ліпшицевості вказаних гомеоморфізмів.

Теорема 5.13.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, і $f : D \to D'$ — гомеоморфізм класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ зі скінченним спотворенням, де $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9). Якщо $p \in \left(n, n+\frac{1}{n-2}\right)$ і*

$$k_p(x_0) = \limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\fint_{B(x_0,\varepsilon)} [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\, dm(x)\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}} < \infty\,,$$

то

$$\limsup_{x\to x_0}\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \leqslant \nu_0\, k_p^{\frac{1}{p-n}}(x_0) < \infty\,,$$

де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n і p.

Підкреслимо, що множина гомеоморфізмів зі скінченним спотворенням класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в $\mathbb{R}^n, n \geqslant 3$, за умови (5.9) на функцію φ включає в себе гомеоморфізми класу Соболєва $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$. У випадку критичного показника $p = n-1$, тобто для гомеоморфізмів класу Соболєва $W^{1,n-1}_{\rm loc}$, доведено наступне твердження (зауважимо при цьому, що гомеоморфізми класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ за умови $K_O \in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$ належать до класу Соболєва $W^{1,n-1}_{\rm loc}$).

Теорема 5.15.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і $f : D \to D'$ — гомеоморфізм класу Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ такий, що $K_O \in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$. Тоді f є нижнім Q-гомеоморфізмом в довільній точці $x_0 \in \overline{D}$ при $Q(x) = K_O(x,f)$.*

Наслідок 5.15.4. *Нехай $f : D \to D'$ — гомеоморфізм класу Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$ такий, що $K_O \in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$. Тоді f є кільцевим Q_*-гомеоморфізмом при $Q_*(x) = K_O^{n-1}(x,f)$.*

У розділі 6 досліджуються кільцеві Q-відображення відносно p-модуля, які є узагальненням квазірегулярних відображень.

Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$, $p > 1$ і $Q : D \to [0,\infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ є *кільцевим Q-відображенням відносно p-модуля у точці x_0* якщо співвідношення (3) виконується для всіх кілець $\mathbb{A}=\mathbb{A}(x_0,r_1,r_2)$, $0<r_1<r_2<d_0$, і всіх вимірних функцій $\eta:(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ таких, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr\geqslant 1\,.$$

Відображення $f:D\to\mathbb{R}^n$ є *кільцевим Q-відображенням відносно p-модуля в області D*, якщо f — кільцеве Q-відображення у кожній точці $x_0\in D$.

Для відкритих дискретних кільцевих Q-відображень відносно p-модуля при $n-1<p<n$ отримані оцінки якобіана та операторної норми матриці Якобі.

Теорема 6.1.1. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, і $f:D\to\mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне кільцеве Q-відображення відносно p-модуля, при цьому $Q\in L^1_{\rm loc}$ і $n-1<p<n$. Тоді $|J_f(x)|\leqslant\nu_0\,Q^{\frac{n}{n-p}}(x)$ і $\|f'(x)\|\leqslant\nu_0\,Q^{\frac{1}{n-p}}(x)$ для майже всіх $x\in D$, де ν_0 — деяка додатна стала, що залежить тільки від n і p.*

Для відкритих дискретних кільцевих Q-відображень відносно p-модуля при $p>n-1$ отримані оцінки зовнішньої α-дилатації і внутрішньої p-дилатації через функцію Q.

Нехай $p>1$. Для відображення $f:D\to\mathbb{R}^n$, яке має частинні похідні м.с. внутрішня p-дилатація відображення f у точці x визначається рівністю

$$K_{I,p}(x,f)=\begin{cases}\frac{|J_f(x)|}{l^p(f'(x))}, & \text{якщо } |J_f(x)|\neq 0\\ 1, & \text{якщо } f'(x)=0\\ \infty, & \text{в інших точках}\,,\end{cases}$$

де $l(f'(x))=\min\limits_{|h|=1}|f'(x)\cdot h|$.

Теорема 6.2.1. *Нехай $f:D\to\mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне кільцеве Q-відображення відносно p-модуля, $p>n-1$, при цьому $Q\in L^1_{\rm loc}(D)$ і $J_f(x)\neq 0$ майже скрізь. Тоді $K_{I,p}(x,f)\leqslant c_0\,Q(x)$ для майже всіх $x\in D$, де c_0 — деяка додатна стала, що залежить тільки від n і p.*

Встановлено достатні умови скінченної ліпшицевості (теорема 6.3.1), локальної гельдеровості (теорема 6.3.2) та логарифмічної гельдеровості (теорема 6.3.3) кільцевих Q-відображень відносно p-модуля.

Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2$, $p > 1$ і $Q : D \to [0, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Відображення $f : D \to D'$ будемо називати *Q-відображенням відносно p-модуля*, якщо нерівність (2) виконується для кожної сім'ї Γ кривих в D і кожної допустимої функції ρ для Γ.

В наступній теоремі наведено достатні умови належності Q-відображень відносно p-модуля до класів Соболєва.

Теорема 6.4.3. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне Q-відображення відносно p-модуля, при цьому $n - 1 < p < n$ і $Q \in L^{\frac{\alpha}{n-p}}_{\mathrm{loc}}$, де $\alpha > 1$. Тоді f належить до класу Соболєва $W^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}$.*

Оскільки відображення f класу Соболєва $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$ володіє N-властивістю Лузіна, тобто $m(fE) = 0$, якщо $m(E) = 0$, то з теореми 6.4.3 випливає наступне твердження.

Наслідок 6.4.3. *Нехай $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне Q-відображення відносно p-модуля, при цьому $n-1 < p < n$ і $Q \in L^{\frac{n}{n-p}}_{\mathrm{loc}}$. Тоді f володіє N-властивістю Лузіна.*

В наступній теоремі встановлено достатні умови того, щоб Q-відображення відносно p-модуля володіло N^{-1}-властивістю Лузіна.

Теорема 6.4.4. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне Q-відображення відносно p-модуля, при цьому $p \geqslant n$ і $Q \in L^1_{\mathrm{loc}}$. Тоді f володіє N^{-1}-властивістю Лузіна, тобто $m\left(f^{-1}E\right) = 0$, якщо $m(E) = 0$.*

Із теореми 6.4.4. випливає наступне твердження, яке э узагальненням теореми Боярського–Іванця про невиродженість майже скрізь якобіана квазірегулярного відображення.

Наслідок 6.4.8. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне Q-відображення відносно p-модуля, при цьому $p \geqslant n$ і*

$Q \in L^1_{\rm loc}$. *Тоді* $J_f(x) \neq 0$ *м.с. в* D.

В теоремі 6.5.1 уточнено твердження теореми 6.2.1 для відкритих дискретних Q-відображень відносно p-модуля, а саме: показано, що в цьому випадку $c_0 = 1$.

Узагальнено результат Ю. Вяйсяля про абсолютну неперервність на лініях квазіконформних відображень на відкриті дискретні відображення, що задовольняють деяку p-модульну нерівність відносно циліндрів у просторі.

Циліндром в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, називають трійку $Z = (G, E_1, E_2)$, де G – область в $\mathbb{R}^n$ і E_1, E_2 — підмножини межі ∂G, таку, що існує гомеоморфізм множини $\overline{G}$ на одиничний циліндр $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leqslant 1, 0 \leqslant x_n \leqslant 1\}$, при якому E_1 і E_2 відображаються на основи цього одиничного циліндра. Нехай сім'я Γ_Z складається з дуг, що з'єднують E_1 і E_2 в G. Її p-модуль називають *модулем циліндра* Z та позначають $M_p(Z)$.

Теорема 6.6.1. *Нехай* $p > 1$, $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ *— локально інтегровна функція і* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *— відкрите дискретне відображення, яке задовольняє умову*

$$M_p(Z) \leqslant \int\limits_{f(D)} Q(y) \cdot \rho_*^p(y) dm(y)$$

для будь-якого циліндра $Z \subset D$ *та довільної функції* $\rho_* \in {\rm adm}\, f(\Gamma_Z)$. *Тоді* $f \in ACL$.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

У цьому розділі викладено огляд літератури за темою дослідження.

1.1. Модулі та ємності

Модулі сімей кривих є основним геометричним інструментом в теорії відображень. Розвиток методу модулів, що відбувається останнім часом, тісно пов'язаний з сучасними класами відображень (див., напр., монографію [342]) та рівняннями з частинними похідними (див., напр., монографію [280]).

Необхідну інформацію також можна знайти в книгах по теорії модулів і ємностей [37, 438], а також в наступних статтях і монографіях [2, 3, 8, 39, 42, 47, 55, 68, 110, 170, 178, 185, 186, 190, 192, 197–201, 226, 233–238, 246, 250, 294, 339, 351, 382, 436, 444, 451] в яких є подальші посилання.

Почнемо з короткого вступу в теорію модулів, який можна знайти в роботах [246, 250, 436].

Означення 1.1.1. *Кривою* γ ми, як зазвичай, називаємо неперервне відображення відрізка $[a, b]$ (або відкритого інтервалу (a, b), або напіввідкритого інтервалу одного з видів $(a, b]$, $[a, b)$) в $\mathbb{R}^n$ (або в $\overline{\mathbb{R}^n}$): $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

Під сім'єю кривих Γ мається на увазі деякий фіксований набір кривих γ. Наступні означення можуть бути знайдені у п. 6.1, розд. I в [436].

Означення 1.1.2. Борелева функція $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ називається *допустимою* для сім'ї Γ кривих γ в $\mathbb{R}^n$, якщо

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)|dx| \geqslant 1 \tag{1.1}$$

для всіх (локально спрямлюваних) кривих $\gamma \in \Gamma$. В цьому випадку ми пишемо: $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$.

Означення 1.1.3. Нехай $p \geqslant 1$. Тоді *p-модулем* сім'ї кривих Γ називається величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_D \rho^p(x)\, dm(x)\,.$$

При цьому, якщо $\operatorname{adm} \Gamma = \varnothing$, то вважаємо, що $M_p(\Gamma) = \infty$, див. п. 6 на с. 16 в [436]. Якщо $p = n$, то $M_n(\Gamma) = M(\Gamma)$.

Властивості модуля в деякій мірі аналогічні властивостям міри Лебега m в $\mathbb{R}^n$, див., напр., теорему 6.2, розд. I в [436].

Твердження 1.1.1. *Справедливі наступні властивості p -модуля:*

1) $M_p(\varnothing) = 0$;

2) *якщо* $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, *то* $M_p(\Gamma_1) \leqslant M_p(\Gamma_2)$;

3) $M_p\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} M_p(\Gamma_i)$.

Означення 1.1.4. Говорять, що сім'я кривих Γ_1 *мінорується* сім'єю Γ_2, пишуть $\Gamma_1 > \Gamma_2$, якщо для кожної кривої $\gamma \in \Gamma_1$ існує підкрива, яка належить сім'ї Γ_2.

Має місце наступне твердження, див., напр., теорему 6.4, розд. I в [436].

Твердження 1.1.2. *Якщо* $\Gamma_1 > \Gamma_2$, *то* $M_p(\Gamma_1) \leqslant M_p(\Gamma_2)$.

Нехай $G \subseteq \mathbb{R}^n$ і $E\,, F \subseteq G$ — довільні множини в G . Позначимо через $\Delta(E, F; G)$ сім'ю всіх кривих $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, які з'єднують E і F в G, тобто $\gamma(a) \in E\,, \gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$.

Наведемо деякі приклади.

Приклад 1.1.1. Нехай $\Gamma = \Delta(S_1, S_2, \mathbb{A})$ — сім'я всіх кривих, які з'єднують $S_1 = S(x_0, r)$ і $S_2 = S(x_0, R)$ в кільці $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : r < |x - x_0| < R\}$. Тоді при $p = n$ виконується рівність

$$M(\Gamma) = \frac{\omega_{n-1}}{\left(\ln \frac{R}{r}\right)^{n-1}}\,, \tag{1.2}$$

а при $1 < p < n$

$$M_p(\Gamma) = \omega_{n-1}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(r^{\frac{p-n}{p-1}} - R^{\frac{p-n}{p-1}}\right)^{1-p}, \tag{1.3}$$

де ω_{n-1} — площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, див., напр., с. 27, п. 1, розд. II в [382].

Приклад 1.1.2. Якщо $1 < p \leqslant n$ і всі криві сім'ї Γ проходять через фіксовану точку x_0, то $M_p(\Gamma) = 0$, див., напр., с. 27, п. 1, розд. II в [382].

Приклад 1.1.3. Нехай P — відкритий прямокутник в $\mathbb{R}^2$, Γ_b позначає сім'ю кривих, що з'єднують протилежні сторони в прямокутнику P довжини b. Тоді $M(\Gamma_b) = \frac{b}{a}$, див. приклад 1, п. D, розд. I в [2].

Приклад 1.1.4. Якщо Γ — сім'я кривих γ, які з'єднують дві паралельні грані прямокутного паралелепіпеда що має висоту h та $(n-1)$-вимірну площу основи A в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, тоді $M_p(\Gamma) = \frac{A}{h^{p-1}}$, див., напр., п. 7.2, розд. I в [436].

У подальшому нам будуть необхідні означення конденсатора і p-ємності конденсатора, див., напр., §5 в [339] або п. 10, розд. II в [382].

Означення 1.1.5. *Конденсатором* називається пара $\mathcal{E} = (A, C)$, де A — відкрита множина в $\mathbb{R}^n$, а C — непорожня компактна підмножина A. Говорять також, що конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$ лежить в області D, якщо $A \subset D$.

Запис $f : D \to \mathbb{R}^n$ припускає, що відображення f задано в області D та неперервне.

Означення 1.1.6. Відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ називається *гомеоморфізмом*, якщо f неперервне і має обернене відображення $f^{-1} : fD \to \mathbb{R}^n$, яке також неперервне.

Означення 1.1.7. Відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ називається *відкритим*, якщо образ будь-якої відкритої множини $U \subseteq D$ є відкритою множиною в $\mathbb{R}^n$.

Усюди далі вважаємо $f\mathcal{E} = (fA, fC)$.

Твердження 1.1.3. *Якщо $f : D \to D'$ — неперервне, відкрите відображення і $\mathcal{E} = (A, C)$ — конденсатор в D, то (fA, fC) також конденсатор в $D' = fD$.*

Означення 1.1.8. Функція $u : A \to \mathbb{R}$ *абсолютно неперервна на прямій* що має непорожний перетин з A, якщо вона абсолютно неперервна на будь-якому відрізку цієї прямої, що міститься в A.

Означення 1.1.9. Кажуть, що функція $u : A \to \mathbb{R}$ належить класу ACL (*абсолютно неперервна на майже всіх прямих*), якщо вона абсолютно неперервна на майже всіх прямих, паралельних будь-якій координатній осі.

Позначимо через $C_0(A)$ множину неперервних функцій $u : A \to \mathbb{R}^1$ з компактним носієм, $W_0(\mathcal{E}) = W_0(A, C)$ — сім'я невід'ємних функцій $u : A \to \mathbb{R}^1$ таких, що

1) $u \in C_0(A)$;

2) $u(x) \geqslant 1$ для $x \in C$;

3) u належить класу ACL.

Означення 1.1.10. При $p \geqslant 1$ величину

$$\mathrm{cap_p}\,\mathcal{E} = \mathrm{cap_p}\,(A, C) = \inf_{u \in W_0(\mathcal{E})} \int\limits_A |\nabla u|^p \, dm(x) \tag{1.4}$$

називають p-*ємністю* конденсатора $\mathcal{E}$.

Наступне твердження має важливе значення для доведень багатьох результатів, див. теорему 1 в [190].

Твердження 1.1.4. *При $p > 1$ справедлива рівність*

$$\mathrm{cap_p}\,\mathcal{E} = M_p(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C))\,. \tag{1.5}$$

Нижче наведені оцінки p-ємності конденсатора, див. твердження 5 і 6 в [55].

Твердження 1.1.5. *Для кожного конденсатора $\mathcal{E} = (A, C)$ при $p \geqslant 1$ справедлива оцінка знизу*

$$\mathrm{cap}_p\,\mathcal{E} \geqslant \frac{(\inf m_{n-1}\,\sigma)^p}{[m(A \setminus C)]^{p-1}}\,. \tag{1.6}$$

Тут $m_{n-1}\sigma$ — $(n-1)$-вимірна міра Лебега C^∞-многовиду σ, що є межею $\sigma = \partial U$ обмеженої відкритої множини U, яка містить C і міститься *разом зі своїм замиканням* $\overline{U}$ *в* A, *а точна нижня межа береться по усім таким* σ.

Твердження 1.1.6. *Нехай* $\mathcal{E}=(A,C)$ *— конденсатор в* $\mathbb{R}^n$ *і множина* C *зв'язна. Тоді при* $p>n-1$ *виконується оцінка*

$$(\mathrm{cap_p}\,\mathcal{E})^{n-1} \geqslant \nu_0\,\frac{d^p(C)}{(m(A))^{1-n+p}}\,, \tag{1.7}$$

де $d(C)$ *— діаметр компакта* C, ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n *і* p.

Наступні оцінки можна знайти у роботі [351], див. нерівності (8.8) і (8.9).

Твердження 1.1.7. *При* $1<p<n$ *справедлива оцінка знизу*

$$\mathrm{cap_p}\,\mathcal{E} \geqslant n\Omega_n^{\frac{p}{n}}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1}\left[m(C)\right]^{\frac{n-p}{n}}\,, \tag{1.8}$$

та при $p=n$

$$\mathrm{cap_p}\,\mathcal{E} \geqslant \frac{n^n\Omega_n}{\ln^{n-1}\left[\frac{m(A)}{m(C)}\right]}\,, \tag{1.9}$$

де Ω_n *— об'єм одиничної кулі в* $\mathbb{R}^n$.

Надалі, у розширеному просторі $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n\bigcup\{\infty\}$ ми використовуємо *сферичну (хордальну) метрику* $h(x,y) := |\pi(x)-\pi(y)|$, де π – стереографічна проекція простору $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1},\frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, тобто

$$h(x,y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}},\quad x\neq\infty\neq y,\quad h(x,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}.$$

Зауважимо, що $h(x,y)\leqslant 1$, і $h(x,y)\leqslant |x-y|$.

Сферичним (хордальним) діаметром множини $E\subset\overline{\mathbb{R}^n}$ називається величина

$$h(E)=\sup_{x,y\in E} h(x,y)\,.$$

Для точки $z\in\overline{\mathbb{R}^n}$ та множини $E\subseteq\overline{\mathbb{R}^n}$ ми також визначимо відстань $h(z,E)$ як точну нижню межу $h(z,y)$ по усім $y\in E$, а для множин $F\subseteq\overline{\mathbb{R}^n}$ і $E\subseteq\overline{\mathbb{R}^n}$ — відстань $h(F,E)$ як точну нижню межу $h(z,y)$ по усім $z\in F$ і $y\in E$.

Нагадаємо наступні означення.

Означення 1.1.11. Топологічний простір X *зв'язний*, якщо його не можна розбити на дві непорожні відкриті множини, див. [70], с. 136.

Означення 1.1.12. Компактний зв'язний простір називається *континуумом*, див. [70], с. 176.

Означення 1.1.13. *Кільцевою областю*, або *кільцем* в $\mathbb{R}^n$ називають область $\mathfrak{R}$ в $\mathbb{R}^n$, доповнення якої має рівно дві компоненти зв'язності.

Означення 1.1.14. Нехай $\mathfrak{R}$ — кільце в $\mathbb{R}^n$. Тоді, якщо C_1 і C_2 — зв'язні компоненти множини $\mathbb{R}^n \setminus \mathfrak{R}$, то будемо записувати це у вигляді: $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(C_1, C_2)$.

Означення 1.1.15. *Ємністю* кільця $\mathfrak{R}$ називають величину

$$\operatorname{cap}\mathfrak{R}(C_1, C_2) \ : \ = \ M(\Delta(C_1, C_2, \mathfrak{R}))\,,$$

див., напр., п. 5.49 в [444].

Зауважимо також, що

$$M(\Delta(C_1, C_2, \mathfrak{R})) \ = \ M(\Delta(C_1, C_2))\,,$$

див. теорему 11.3 в [436].

Означення 1.1.16. *Конформний модуль* кільця $\mathfrak{R}(C_1, C_2)$ визначається співвідношенням

$$\operatorname{mod}\mathfrak{R}(C_1, C_2) = \left(\frac{\omega_{n-1}}{M(\Delta(C_1, C_2))}\right)^{1/(n-1)},$$

де ω_{n-1} — площа одиничної сфери в $\mathbb{R}^n$, див., напр., формулу (5.50) в [444].

Нижче наведені оцінки для ємності кільцевої області, див. [250] або 7.37 в [444].

Твердження 1.1.8. *Нехай* $\mathfrak{R}(E\,, F)$ *— довільне кільце. Тоді*

$$\operatorname{cap}\mathfrak{R}(E\,, F) \geqslant \operatorname{cap}\,\mathfrak{R}_T\left(\frac{1}{h\,(E)\;h\,(F)}\right)\,, \tag{1.10}$$

де

$$\mathfrak{R}_T(t) \ = \mathfrak{R}\,([-1, 0]\,, [t, \infty]) \ , \qquad t \ > \ 1\,, \tag{1.11}$$

— *кільце Тейхмюллера в* $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Добре відомо, що

$$\operatorname{cap}\mathfrak{R}_T(t) = \frac{\omega_{n-1}}{[\log\Phi(t)]^{n-1}}\,, \tag{1.12}$$

де ω_{n-1} — площа одиничної сфери в $\mathbb{R}^n$, а функція Φ задовольняє умовам:

$$t+1 \leqslant \Phi(t) \leqslant \lambda_n^2\cdot(t+1) < 2\lambda_n^2\cdot t, \quad t>1\ ,$$

$$\lambda_n\,\in\,[4,2e^{n-1})\,,\quad \lambda_2\,=\,4\,,\quad \lambda_n^{1/n}\,\to\,e \quad n\,\to\,\infty\,,$$

див., напр., [250], с. 225–226, (7.19) і (7.22) в [444].

Отже, із співвідношення (1.10) маємо наступне твердження.

Твердження 1.1.9. *Для будь-яких континуумів* E *і* F *в* $\overline{\mathbb{R}^n}$,

$$\operatorname{cap}\,\mathfrak{R}(E,F)\ \geqslant\ \frac{\omega_{n-1}}{\left[\log\frac{2\lambda_n^2}{h(E)h(F)}\right]^{n-1}}\,, \tag{1.13}$$

де ω_{n-1} *— площа одиничної сфери* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$, $\lambda_n\,\in\,[4,2e^{n-1})$, $\lambda_2\,=\,4$ *і* $\lambda_n^{1/n}\to e$ *при* $n\to\infty$.

1.2. Функції класів BMO, VMO та FMO

Нагадаємо наступне означення.

Означення 1.2.1. Дійсна функція $\varphi\in L^1_{\rm loc}(D)$ має *обмежене середнє коливання* в області $D\subset\mathbb{R}^n$, пишуть $\varphi\in{\rm BMO}(D)$, або просто $\varphi\in{\rm BMO}$, якщо

$$\|\varphi\|_* = \sup_{B\subset D}\frac{1}{|B|}\int\limits_B|\varphi(x)-\varphi_B|\,dm(x)<\infty, \tag{1.14}$$

де точна верхня межа в (1.14) береться по всіх кулях B, які лежать в D, а

$$\varphi_B = \fint_B\varphi(x)\,dm(x)\colon\ = \frac{1}{|B|}\int\limits_B\varphi(x)\,dm(x) \tag{1.15}$$

позначає середнє інтегральне значення функції φ по кулі B .

Простір BMO, який був введений Джоном і Ніренбергом у роботі [305], на сьогоднішній день є одним з найважливіших понять гармонічного аналізу, комплексного аналізу, теорії рівнянь з частинними похідними і суміжних областей, див. монографії [286] і [386]. Зокрема, простір BMO тісно пов'язаний з теорією квазіконформних відображень, див., напр., [202, 203, 206, 251, 304, 385, 386].

Означення 1.2.2. Функція φ класу BMO називається функцією *зникаючого середнього коливання*, скорочено $\varphi \in \mathrm{VMO}$, якщо супремум в (1.14) по усіх кулях B в області D таким, що $|B| < \varepsilon$, прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$.

Простір VMO введений Сарасоном у статті [415]. Відзначимо, що значне число робіт присвячено вивченню рівнянь з частинними похідними, що мають коефіцієнти класу VMO, див., напр., [229, 302, 346, 362, 369].

Означення 1.2.3. Слідуючи роботі [45], будемо говорити, що функція $\varphi : D \to \mathbb{R}$ має *скінченне середнє коливання в точці* $x_0 \in D$, якщо

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \ \fint_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \widetilde{\varphi}_\varepsilon| \, dm(x) < \infty, \tag{1.16}$$

де

$$\widetilde{\varphi}_\varepsilon = \fint_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x) \, dm(x) \tag{1.17}$$

позначає середнє інтегральне значення функції φ по кулі $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \varepsilon\}$.

Як відомо, з умовою (1.16) сумісна ситуація, коли $\widetilde{\varphi}_\varepsilon \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Означення 1.2.4. Будемо казати також, що функція $\varphi : D \to \mathbb{R}$ має *скінченне середнє коливання в області* D, пишуть $\varphi \in \mathrm{FMO}(D)$ або просто $\varphi \in \mathrm{FMO}$, якщо φ має скінченне середнє коливання в кожній точці $x_0 \in D$.

Відомо, що при усіх $1 \leqslant p < \infty$ мають місце включення $\mathrm{L}^\infty(D) \subset \mathrm{BMO}(D) \subset \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(D)$, див., напр., [305] і [386]. Однак, $\mathrm{FMO}(D)$ не є підкласом $L^p_{\mathrm{loc}}(D)$ для жодного $p > 1$, хоча $\mathrm{FMO}(D) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(D)$, див. відповідний приклад в п. 11.2 в [342]. Таким чином, FMO суттєво ширше $\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}$.

Наведемо ще деякі факти про функції скінченного середнього коливання з роботи [45], див. також п. 6.2 в [342].

Твердження 1.2.1. *Якщо для деяких чисел* $\varphi_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$,

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \ \fint_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon| \, dm(x) < \infty \,, \tag{1.18}$$

то функція φ *має скінченне середнє коливання в точці* x_0.

Наслідок 1.2.1. *Зокрема, якщо в точці* $x_0 \in D$ *виконується умова*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \ \fint_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x)| \, dm(x) < \infty \,, \tag{1.19}$$

то функція φ *має скінченне середнє коливання в точці* x_0.

Означення 1.2.5. Нагадаємо, що точка $x_0 \in D$ називається *точкою Лебега* функції $\varphi : D \to \mathbb{R}$, якщо φ інтегровна в околі x_0 і

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \ \fint_{B(x_0,\,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \, dm(x) = 0 \,. \tag{1.20}$$

Наслідок 1.2.2. *Нехай* x_0 *— точка Лебега для функції* φ. *Тоді функція* φ *має скінченне середнє коливання в точці* x_0.

Зауваження 1.2.1. Зауважимо, що для функції $\varphi \in L^1_{\rm loc}(D)$ майже всі точки D є її точками Лебега і, таким чином, скінченного середнього коливання.

Наслідок 1.2.3. *Будь-яка локально інтегровна функція* $\varphi : D \to \mathbb{R}$ *має скінченне середнє коливання у майже всіх точках* D.

Ключове значення для наших подальших досліджень має наступна лема.

Лема 1.2.1. *Нехай* D *— область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, *і* $\varphi : D \to \mathbb{R}$ *— невід'ємна функція, що має скінченне середнє коливання в точці* $0 \in D$. *Тоді*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} \frac{\varphi(x)\, dm(x)}{\left(|x| \ln \frac{1}{|x|}\right)^n} = O\left(\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{1.21}$$

при $\varepsilon \to 0$ *для деякого додатного числа* $\varepsilon_0 < {\rm dist}\,(0, \partial D)$.

Наведена вище лема відіграє важливу роль в теорії вироджених рівнянь Бельтрамі, так само як і в сучасній теорії відображень, див. з цього приводу монографії [280] і [342]. У роботі [125] отримано аналог леми 1.2.1 у метричних просторах з мірами.

1.3. Про відображення класів Соболєва

Нагадаємо деякі означення, пов'язані з просторами Соболєва $W^{1,p}$, $p \in [1, \infty)$. Нехай G — відкрита множина в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Символом $C_0^\infty(G)$ будемо позначати сукупність усіх функцій $\varphi : G \to \mathbb{R}$ з компактним носієм, що мають неперервні частинні похідні довільного порядку.

Означення 1.3.1. Нехай u і $v : G \to \mathbb{R}$ — локально інтегровні функції. Функція v називається *узагальненою похідною* функції u по змінній x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, пишемо u_{x_i}, якщо

$$\int\limits_G u\,\varphi_{x_i}\,dm(x) = -\int\limits_G v\,\varphi\,dm(x) \quad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(G)\,. \tag{1.22}$$

Тут m позначає міру Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.3.2. *Клас Соболєва* $W^{1,p}(G)$ визначається як сім'я всіх функцій $u : G \to \mathbb{R}$ в $L^p(G)$, які мають всі узагальнені похідні першого порядку, що належать класу $L^p(G)$.

Означення 1.3.3. Говорять, що функція $u : G \to \mathbb{R}$ належить простору $W^{1,p}_{\rm loc}(G)$, якщо $u \in W^{1,p}(G_*)$ для будь-якої відкритої множини G_* з компактним замиканням в G.

Надалі ми використовуємо позначення $W^{1,p}_{\rm loc}$ замість $W^{1,p}_{\rm loc}(G)$, щоб уникнути непорозумінь.

Поняття узагальненої похідної було введено Соболєвим в $\mathbb{R}^n$ (див., напр., [169]) і тепер розвивається в більш загальних просторах (див., напр., [27, 120, 194, 281, 284, 288, 289, 335, 342, 433]).

Наступний важливий результат можна знайти в [84], див. п. 1.1.3.

Твердження 1.3.1. *Неперервна функція* f *належить* $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ *тоді і тільки тоді, коли* $f \in \mathrm{ACL}^p$ *, тобто, якщо* f *— локально абсолютно неперервна на м.в. прямих, паралельних координатним осям і якщо усі перші частинні похідні* f *є локально інтегровні зі степенем* p *в області задання.*

Наведемо ще одне важливе означення для наших подальших досліджень.

Означення 1.3.4. Нехай G — відкрита множина в $\mathbb{R}^n$ і відображення $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ для всіх $x \in G$. Говорять, що відображення f належить класу $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$, якщо кожна із дійсних функцій $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ належить класу $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$.

1.4. Одностайно неперервні і нормальні сім'ї відображень

Нагадаємо означення, пов'язані з нормальними та компактними сім'ями відображень в метричних просторах.

Означення 1.4.1. Нехай (X, d) і (X', d') — метричні простори з метриками d і d', відповідно. Сім'я $\mathfrak{F}$ неперервних відображень $f : X \to X'$ називається *нормальною*, якщо з будь-якої послідовності відображень $f_j \in \mathfrak{F}$ можна виділити підпослідовність f_{j_m}, що збігається локально рівномірно в X до неперервного відображення f.

Означення 1.4.2. Якщо при цьому $\mathfrak{F}$ є *замкнена* відносно локально рівномірної збіжності, тобто, $f \in \mathfrak{F}$, то сім'я називається *компактною.*

Поняття нормальних сімей відображень тісно пов'язане з наступним поняттям.

Означення 1.4.3. Сім'я $\mathfrak{F}$ відображень $f : X \to X'$ називається *одностайно неперервною у точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке що $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $f \in \mathfrak{F}$ і $x \in X$ при $d(x, x_0) < \delta$.

Означення 1.4.4. Сім'я $\mathfrak{F}$ називається *одностайно неперервною*, якщо $\mathfrak{F}$ одностайно неперервна в кожній точці $x_0 \in X$.

Зауваження 1.4.1. Як відомо, будь-яка нормальна сім'я $\mathfrak{F}$ відображень $f : X \to X'$ одностайно неперервна, див., напр., твердження 7.1 в [342]. Обернене твердження також виконується, якщо X — сепарабельний, а X' — компактний простір.

Наступне твердження є узагальненням відомої теореми Арцела–Асколі, див., напр., наслідок 7.5 в [342].

Твердження 1.4.1. *Якщо (X, d) — сепарабельний метричний простір, а (X', d') — компактний метричний простір, то сім'я $\mathfrak{F}$ відображень $f : X \to X'$ є нормальною тоді і тільки тоді, коли $\mathfrak{F}$ є одностайно неперервною.*

1.5. Про квазіконформні відображення і відображення з обмеженим спотворенням

У цьому параграфі ми наводимо деякі відомі факти з теорії квазіконформних відображень і відображень з обмеженим спотворенням. У роботах академіка Ю.Г. Решетняка і його учнів, С.К. Водопьянова, В.М. Гольдштейна та інших, свого часу була розвинена теорія відображень з обмеженим спотворенням, яка вже давно стала класикою теорії відображень, див., напр., монографії [23, 32, 110].

Означення 1.5.1. Неперервне відображення $f : U \to \mathbb{R}^n$ відкритої множини U в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, називається *відображенням з обмеженим спотворенням*, якщо $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$, його якобіан $J_f(x) = \det f'(x)$ не змінює знак в U та

$$\|f'(x)\|^n \leqslant K\,|J_f(x)| \qquad \text{м.с.} \tag{1.23}$$

для деякого числа $K \in [1, \infty)$, де $f'(x)$ — матриця Якобі відображення f, $\|f'(x)\|$ — її матрична норма: $\|f'(x)\| = \sup\limits_{|h|=1} |f'(x) \cdot h|$. В іноземній літературі такі відображення називають *квазірегулярними*, див., напр., [286, 339, 382].

У роботах Ю.Г. Решетняка доведені відкритість, дискретність і неперервність відображень з обмеженим спотворенням, див. теореми 6.3 і 6.4, розд. II в [110], а також див., напр., теорему 1 в [112]. Відзначимо також, що вивченню властивостей відображень з обмеженим спотворенням присвячено досить велику кількість робіт, див. [21, 25, 42, 104, 104, 105, 105, 108, 110, 114–118, 275, 277, 278, 285, 313, 337–341, 346, 348, 353, 375–383, 423, 429, 437, 442, 444–447].

Наведемо аналітичне означення квазіконформного відображення, див., напр., § 3, розд. I в [110].

Означення 1.5.2. Нехай $K \in [1, \infty)$. Гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{R}^n$, що зберігає орієнтацію називається K*-квазіконформним*, якщо виконуються наступні умови:

1) $f \in W^{1,n}_{\rm loc}$;

2) $\|f'(x)\|^n \leqslant K \cdot J(x, f)$ при майже всіх $x \in D$.

Іншими словами відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ називається *квазіконформним*, якщо f є відображенням з обмеженим спотворенням і, крім того, f є гомеоморфізмом.

Означення 1.5.3. Гомеоморфізм $f \in C^1(D)$ називається *конформним відображенням*, якщо $\|f'(x)\|^n = |J(x, f)|$ при усіх $x \in D$, див. означення 5.5, розд. I в [436].

Зауваження 1.5.1. Відомо, що якщо $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ — конформне відображення, то $M(\varphi(\Gamma)) = M(\Gamma)$ для будь-якої сім'ї кривих Γ в D, див. теорему 8.1 в [436].

Теорії квазіконформних відображень також присвячено значну кількість статей і монографій, див., напр., [2, 9, 10, 12, 18, 24, 25, 30, 32, 35, 40, 41, 43, 59, 63, 80–82, 88–91, 101, 102, 178, 188, 189, 195–197, 203, 206–210, 212–214, 221, 224, 226, 243, 247–250, 254, 256, 288, 298, 310, 311, 322, 325, 334, 335, 355, 365, 384, 385, 432, 434–436, 438, 453].

Нижче наведено геометричне означення квазіконформного відображення, див. означення 13.1, розд. II в [436].

Означення 1.5.4. Нехай $K < \infty$ — деяка фіксована стала. Нагадаємо, що гомеоморфізм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ заданий в області $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, називається K*-квазіконформним відображенням*, якщо

$$\frac{M(\Gamma)}{K} \leqslant M(f\Gamma) \leqslant K\, M(\Gamma)\,. \tag{1.24}$$

для довільної сім'ї Γ кривих γ в області D.

Іншими словами, нерівності (1.24) означають, що модуль будь-якої сім'ї кривих при відображенні f спотворюється не більше, ніж в K разів.

Означення 1.5.5. Гомеоморфізм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, заданий в області $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, називається *квазіконформним відображенням*, якщо f є K-квазіконформним хоча б для одного $K \in [1, \infty)$.

Зауваження 1.5.2. Відзначимо, що для квазіконформності відображення f досить виконання тільки однієї нерівності в правій частині співвідношення (1.24), а саме, гомеоморфізм f є квазіконформним відображенням, якщо

$$M(f\Gamma) \leqslant K\, M(\Gamma) \tag{1.25}$$

для деякого числа $K \in [1, \infty)$ і довільної сім'ї Γ кривих γ в області D, див. теорему 34.3, розд. IV в [436]. Відзначимо також, що означення квазіконформних відображень 1.5.4 і 1.5.2 є еквівалентними, див. теорему 34.6, розд. IV в [436] і § 3, розд. I в [110].

У роботі [248], п. 13, Ф. Герінг визначив K-квазіконформне відображення як гомеоморфізм, що змінює модуль кільцевої області не більше ніж в K разів, див. означення нижче.

Означення 1.5.6. Нехай $K \in [1, \infty)$. Гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{R}^3$, заданий в області $D \subset \mathbb{R}^3$, називається K*-квазіконформним відображенням*, якщо

$$\frac{\mathrm{mod}(\mathfrak{R})}{K} \leqslant \mathrm{mod}\,(f(\mathfrak{R})) \leqslant K\,\mathrm{mod}(\mathfrak{R}) \tag{1.26}$$

для кожного обмеженого кільця $\mathfrak{R} \subset D$.

Задача про спотворення площ при квазіконформних відображеннях бере свій початок з робіт Б. Боярського, див. [11, 12]. Ряд результатів в цьому напрямку отримано у роботах [204, 243, 255]. Точна верхня оцінка площі образу круга при квазіконформних відображеннях зустрічається в монографії М.О. Лаврентьєва [82]. У монографії [216] (див. твердження 3.7) отримано інтегральне уточнення нерівності Лаврентьєва у термінах кутової дилатації.

1.6. Про Q-гомеоморфізми та кільцеві Q-гомеоморфізми

В останні роки на площині та у багатовимірних просторах активно вивчаються так звані Q-гомеоморфізми та кільцеві Q-гомеоморфізми, що є узагальненнями квазіконформних відображень, див., напр., [85, 342–344, 394].

Наступна величина має важливе значення в теорії відображень.

Означення 1.6.1. Для відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$, що має частинні похідні м.с., *внутрішня дилатація* відображення f у точці x визначається рівністю

$$K_I(x,f) \quad = \quad \begin{cases} \frac{|J(x,f)|}{l(f'(x))^n}, & \text{якщо } J(x,f)\neq 0, \\ \quad 1, & \text{якщо } f'(x)=0, \\ \quad \infty, & \text{в інших випадках}, \end{cases} \tag{1.27}$$

де $l\left(f'(x)\right) = \min\limits_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}$.

Наведемо означення Q-гомеоморфізма.

Означення 1.6.2. Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n\,, n\geqslant 2$, і нехай $Q : D \to [1\,,\infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Гомеоморфізм $f : D \to D'$ називають *Q-гомеоморфізмом*, якщо

$$M(f\Gamma)\leqslant \int\limits_D Q(x)\,\rho^n(x)\,dm(x) \tag{1.28}$$

для будь-якої сім'ї Γ кривих у D і будь-якої функції $\rho\in \mathrm{adm}\,\Gamma$.

Інтегральні оцінки вигляду (1.28) зустрічаються в роботах Л. Альфорса див., напр., теорему 3, п. D, розд. I в [2]), О. Лехто і К. Віртанена (див. нерівність (6.6), п. 6.3, розд. V в [325]) для квазіконформних відображень на площині. Ю.Ф. Струговим у роботі [172] було анонсовано подібну нерівність для відображень, квазіконформних у середньому. У роботі В.Я. Гутлянського, К. Бішопа, О. Мартіо і М. Вуорінена [214] при вивченні локальних властивостей просторових квазіконформних відображень доведено нерівність вигляду (1.28) при $Q = K_I(x,f)$, що стало безпосереднім поштовхом для введення поняття Q-гомеоморфізма.

Цей термін був запропонований професором О. Мартіо, див., напр., [85, 343, 344]. По суті, Q-гомеоморфізми — це відображення зі скінченним спотворенням, оскільки функція Q не передбачається обмеженою. Означення Q-гомеоморфізма має геометричний характер і є аналогічним означенню Ю. Вяйсяля для квазіконформних відображень. У зв'язку зі сказаним вище відзначимо також роботи А. Казаку-Каберії [196, 197], М. Крісті [234, 237] та монографію В. Міклюкова [92].

Наведемо твердження з монографії [342], див., напр., теореми 8.1 і 8.6, див. також теореми 4.6 і 6.10 в [345] і наслідок 2.3 в [315].

Твердження 1.6.1. *Кожен гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{R}^n$ такий, що $f \in W^{1,n}_{\rm loc}$ і $f^{-1} \in W^{1,n}_{\rm loc}$, є Q-гомеоморфізмом при $Q = K_I(x,f)$. Зокрема, твердження виконується, якщо $K_I(x,f) \in L^1_{\rm loc}$.*

Проблеми локальної і межової поведінки Q-гомеоморфізмів в $\mathbb{R}^n$ вивчалися у випадку $Q \in {\rm BMO}$ (обмеженого середнього коливання) у роботах [343, 344], $Q \in {\rm FMO}$ (скінченного середнього коливання) і в інших випадках у роботах [45, 46]. У роботах [132, 411], див. також розділ 4 у монографії [342] встановлено, що Q-гомеоморфізми з локально інтегровною функцією Q диференційовні майже скрізь і абсолютно неперервні на лініях і, більш того, належать класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ та є відображеннями зі скінченним спотворенням за Іванцем.

У статті [125] вивчалися властивості слабо плоских просторів, які є далекосяжним узагальненням просторів Льовнера (див., напр., [209,224,284,288, 432]), що включають в себе, зокрема, добре відомі групи Карно і Гейзенберга (див. [19–22, 26, 27, 283, 310, 311, 334, 354, 364, 441, 442]). На цій основі у роботі

[125] була побудована теорія межової поведінки і усувних особливостей для Q-гомеоморфізмів, що може бути застосовна у всіх перерахованих класах просторів. Там же, зокрема, були доведені узагальнення і посилення відомої теореми Герінга–Мартіо про гомеоморфне продовження на межу квазіконформних відображень між областями квазіекстремальної довжини, див. [254].

Наведемо ще одне означення, яке вперше зустрічається у роботі [257].

Означення 1.6.3. Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n\,, n\geqslant 2\,,\ p>1\,,$ і нехай $Q:D\to\ [0\,,\infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Гомеоморфізм $f:D\to D'$ називають *Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля*, якщо

$$M_p(f\Gamma)\leqslant\int\limits_D Q(x)\,\rho^p(x)\,dm(x) \tag{1.29}$$

для будь-якої сім'ї Γ кривих у D і будь-якої функції $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma\,.$

Теорія Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля може бути застосована, зокрема, до відображень квазіконформних у середньому (див. [258]) і до так званих (p,q)-квазіконформних відображень (див. [439]), які використовувалися при вивченні проблеми Ю. Решетняка про суперпозицію функцій просторів Соболєва (див. напр., [28, 29, 440]).

У подальшому будемо позначати

$$\mathbb{A}(x_0,r_1,r_2)=\{x\in\mathbb{R}^n: r_1<|x-x_0|<r_2\}\,,$$

$$S(x_0,r_i)=\{x\in\mathbb{R}^n: |x-x_0|=r_i\}\,,\quad i=1,2.$$

Наведемо означення кільцевого Q-гомеоморфізму, див. [128].

Означення 1.6.4. Нехай D — область в $\mathbb{R}^n\,, n\geqslant 2\,,$ і нехай $Q:D\to[0\,,\infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Гомеоморфізм $f:D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ називається *кільцевим Q-гомеоморфізмом в точці $x_0\in D$*, якщо

$$M\left(\Delta\left(fS_1,\ fS_2, f\mathbb{A}\right)\right)\ \leqslant\int\limits_{\mathbb{A}} Q(x)\cdot\eta^n(|x-x_0|)\,dm(x) \tag{1.30}$$

для будь-якого кільця $\mathbb{A}=\mathbb{A}(x_0,r_1,r_2),\ 0<r_1<r_2<r_0=\operatorname{dist}(x_0,\partial D),$ $S_i=S(x_0,r_i),\ i=1,2,$ і для кожної вимірної функції $\eta:(r_1,r_2)\to\to[0,\infty]$ такої, що $\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr\ =\ 1\,.$

Якщо умова (1.30) виконується в кожній точці $x_0 \in D$, то також говоримо, що f є *кільцевим* Q*-гомеоморфізмом в області* D.

Поняття кільцевих Q-гомеоморфізмів мотивовано означенням квазіконформності за Герінгом, див., напр., [248] і, являючи собою узагальнення і локалізацію цього означення, вперше було введено і використовувалося для вивчення рівнянь Бельтрамі на площині у роботі [394], див. також [128] в $\mathbb{R}^n$. Для просторових квазіконформних відображень оцінка вигляду (1.30) при $p = n$ з деякою функцією Q встановлена В.Я. Гутлянським і А. Гольбергом у роботі [274].

Зауваження 1.6.1. Очевидно, що будь-який Q-гомеоморфізм є кільцевим Q-гомеоморфізмом.

Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$, $r \in (0, \operatorname{dist}(x_0, \partial D))$ і $Q : D \to [0, \infty]$ – вимірна функція. Тоді

$$q_{x_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{S(x_0,r)} Q(x)\, d\mathcal{A}$$

позначає середнє інтегральне значення по сфері $S(x_0, r)$ і $d\mathcal{A}$ — елемент площі поверхні.

Нижче наведено критерій того, що гомеоморфізм в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, є кільцевим Q-гомеоморфізмом, див., напр., лему 7.3 розд. VII [342] або теорему 2.1 в [128].

Теорема 1.6.1. *Нехай* D *— область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, *і нехай* $Q : D \to [0, \infty]$ *— вимірна функція,* $q_{x_0}(t) \neq \infty$ *для м.в.* $t \in (0, d_0)$, $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. *Гомеоморфізм* $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *є кільцевим* Q*-гомеоморфізмом в точці* $x_0 \in D$ *тоді і тільки тоді, коли для будь-яких* $0 < r_1 < r_2 < d_0$ *виконується нерівність*

$$M\left(\Delta\left(fS_1,\, fS_2, f\mathbb{A}\right)\right) \leqslant \frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}}\,, \tag{1.31}$$

де $S_i = S(x_0, r_i)$, $i = 1, 2, ,$ ω_{n-1} *— площа одиничної сфери* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$,

$$I = I(x_0, r_1, r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} \tag{1.32}$$

і $q_{x_0}(r)$ *— середнє інтегральне значення функції* Q *по сфері* $S(x_0, r)$.

Зауваження 1.6.2. При цьому, інфімум справа в (1.30) досягається тільки для функції

$$\eta_0(r) = \frac{1}{Irq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}. \tag{1.33}$$

Тут ми приймаємо стандартні угоди: $a/\infty = 0$ для $a \neq \infty$ і $a/0 = \infty$, якщо $a > 0$ і $0 \cdot \infty = 0$, див. [131], стор. 6.

Нижче наведено оцінку спотворення хордальної відстані для довільного гомеоморфізму, див. лему 7.5 в [342].

Лема 1.6.1. *Нехай* D *— область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$, $r_0 \in (0, \mathrm{dist}(x_0, \partial D))$, *і нехай* D' *— область в* $\overline{\mathbb{R}^n}$ *з умовою* $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus D') \geqslant \Delta > 0$ *та* $f : D \to D'$ *— гомеоморфізм,* $x_0 \in D$, $y \in B(x_0, r_0)$, $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_0\}$ *і* $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = |y - x_0|\}$. *Тоді*

$$h(f(y), f(x_0)) \ \leqslant \ \frac{\alpha_n}{\Delta} \exp\left\{ -\left(\frac{\omega_{n-1}}{M\left(\Delta\left(fS_0,\, fS\,, fD\right)\right)} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right\}, \tag{1.34}$$

де ω_{n-1} *— площа одиничної сфери* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$, $\alpha_n = 2\lambda_n^2$ *з* $\lambda_n \in [4, 2e^{n-1})$, $\lambda_2 = 4$ *і* $\lambda_n^{1/n} \to e$ *при* $n \to \infty$.

Далі наведемо оцінки спотворення хордальної відстані при кільцевих Q-гомеоморфізмах, див., напр., [128] або розд. VII, п. 7.4 в [342].

Лема 1.6.2. *Нехай* D *— область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$ *і* D' *— область в* $\overline{\mathbb{R}^n}$ *з умовою* $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus D') \geqslant \Delta > 0$. *Припустимо, що* $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм в точці* $x_0 \in D$. *Якщо при* $\varepsilon_0 \in (0, \mathrm{dist}(x_0, \partial D))$ *виконується нерівність*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} Q(x)\, \psi^n(|x - x_0|)\; dm(x) \leqslant c\, I^p(\varepsilon), \quad \forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \tag{1.35}$$

де $p \leqslant n$ *та* $\psi(t)$ *— невід'ємна вимірна функція на* $(0, \infty)$ *така, що*

$$0 \ < \ I(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty, \ \forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \tag{1.36}$$

то для $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$ *виконується нерівність*

$$h(f(x), f(x_0)) \leqslant \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(|x - x_0|)\}, \tag{1.37}$$

де

$$\alpha_n = 2\lambda_n^2,\ \beta_n = \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}},\ \gamma_{n,p} = \frac{n-p}{n-1}, \tag{1.38}$$

$\lambda_n \in [4, 2e^{n-1})$, $\lambda_2 = 4$ *і* $\lambda_n^{1/n} \to e$ *при* $n \to \infty$, *а* ω_{n-1} — *площа одиничної сфери* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$.

Наслідок 1.6.1. *За умов леми 1.6.2 при* $p = 1$ *виконується нерівність*

$$h(f(x), f(x_0)) \leqslant \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\left\{-\beta_n I(|x - x_0|)\right\}. \tag{1.39}$$

Теорема 1.6.2. *Нехай* D — *область в* $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2$, D' — *область в* $\overline{\mathbb{R}^n}$ *з умовою* $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus D') \geqslant \Delta > 0$ *і нехай* $f : D \to D'$ — *кільцевий* Q*-гомеоморфізм в точці* $x_0 \in D$. *Тоді для кожної точки* $x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))$, $\varepsilon(x_0) \in (0, \mathrm{dist}\,(x_0, \partial D))$, *виконується нерівність*

$$h(f(x), f(x_0)) \leqslant \frac{\alpha_n}{\Delta}\, exp \left\{ - \int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} \right\}, \tag{1.40}$$

де α_n — *додатна стала, яка залежить тільки від* n, *а* $q_{x_0}(r)$ — *середнє інтегральне значення функції* Q *по сфері* $S(x_0, r)$.

Теорема 1.6.3. *Нехай* $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ — *кільцевий* Q*-гомеоморфізм в точці* $x_0 = 0$ *з умовою* $f(0) = 0$ *і нехай*

$$\int\limits_{\mathbb{A}_\varepsilon} Q(x) \ \frac{dm(x)}{|x|^n} \leqslant c \log \frac{1}{\varepsilon}\ ,\ \varepsilon \in (0, 1), \tag{1.41}$$

де $\mathbb{A}_\varepsilon = \mathbb{A}(0, \varepsilon, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x| < 1\}$. *Тоді*

$$|f(x)| \leqslant \alpha_n |x|^{\beta_n}, \tag{1.42}$$

де α_n *і* β_n *визначені рівністю* (1.38).

Теорема 1.6.4. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2$, D' — область в $\overline{\mathbb{R}^n}$ з умовою $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus D') \geqslant \Delta > 0$ і $f : D \to D'$ — кільцевий Q-гомеоморфізм в точці $x_0 \in D$. Якщо $Q \in FMO(x_0)$, то при деякому $\varepsilon_0 \in (0, \operatorname{dist}(x_0, \partial D))$ виконується нерівність*

$$h(f(x), f(x_0)) \leqslant \frac{\alpha_n}{\Delta} \left(\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon_0}}{\ln \frac{1}{|x-x_0|}} \right)^{\beta_0}, \tag{1.43}$$

де β_0 — додатна стала, яка залежить тільки від функції Q.

Наслідок 1.6.2. *Зокрема, оцінка (1.43) справедлива, якщо*

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \ \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\, dm(x) \ < \ \infty\,. \tag{1.44}$$

Поняття кільцевого Q-гомеоморфізма було поширене у межові точки областей, що дало, зокрема, потужний інструмент дослідження межової поведінки розв'язків рівнянь Бельтрамі.

Означення 1.6.5. Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$, $Q : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ — вимірна за Лебегом функція. Гомеоморфізм $f : D \to D'$ називається *кільцевим Q-гомеоморфізмом в точці $x_0 \in \overline{D}$*, якщо співвідношення

$$M(\Delta(f(K_1), f(K_2); f(D))) \leqslant \int\limits_{\mathbb{A} \cap D} Q(x) \eta^n(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{1.45}$$

виконується для будь-яких двох континуумів K_1, K_2 із області D, які належать різним компонентам доповнення в $\mathbb{R}^n$ кільця

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\},\ 0 < \ r_1 \ < r_2 \ < \infty,$$

і для кожної вимірної функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1.$$

Означення 1.6.6. Гомеоморфізм $f : D \to D'$ називається *кільцевим Q-гомеоморфізмом*, якщо f є кільцевим Q-гомеоморфізмом в кожній точці $x_0 \in \overline{D}$.

Поняття кільцевого Q-гомеоморфізму в межових точках області вперше було введено у роботі [399] у зв'язку з дослідженням рівнянь Бельтрамі на площині, див., також [400]. У роботі [83] були отримані теореми про неперервне і гомеоморфне продовження кільцевих Q-гомеоморфізмів у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, а потім у роботі [168] аналогічні результати були отримані у метричних просторах із мірами.

1.7. Про нижні Q-гомеоморфізми

Вельми корисним інструментом при дослідженні плоских та просторових відображень виявилися також так звані нижні Q-гомеоморфізми, що були вперше введені і вивчалися у роботі Ковтонюка і Рязанова, див. [49] або розд. 9 у монографії [342]. Їх означення також носить геометричний характер і мотивовано кільцевим означенням Герінга для квазіконформних відображень. Останнім часом нижні і кільцеві Q-гомеоморфізми знайшли важливі застосування, як в теорії крайових задач для рівнянь Бельтрамі на площині, так і в теорії просторових гомеоморфізмів класів Соболєва і більш загальних класів Орліча–Соболєва, див. розділи IV і V даної дисертації.

Нагадаємо наступні означення. Усюди далі H^k, $k \geqslant 0$, позначає *k-вимірну міру Хаусдорфа* в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Якщо A — множина в $\mathbb{R}^n$, то

$$H^k(A) = \sup_{\varepsilon>0} H^k_\varepsilon(A), \tag{1.46}$$

$$H^k_\varepsilon(A) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_i)^k, \tag{1.47}$$

де інфімум в (1.47) береться по всіх покриттях A множинами A_i з $\operatorname{diam} A_i < \varepsilon$, див., напр., [297] і [349].

Зауваження 1.7.1. Відомо, що зовнішня міра Лебега $m(A)$ для довільної множини A в $\mathbb{R}^n$ задовольняє співвідношення $m(A) = \Omega_n \cdot 2^{-n} H^n(A)$, де Ω_n — об'єм одиничної кулі в $\mathbb{R}^n$, див. [417].

Означення 1.7.1. Слідуючи п. 9.2, розд. 9 в [342], надалі k*-вимірною поверхнею* S в $\mathbb{R}^n$ називаємо довільне неперервне відображення $S : \omega \to \mathbb{R}^n$, де ω – відкрита множина в $\overline{\mathbb{R}^k} := \mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$ і $k = 1, \ldots, n-1$.

Означення 1.7.2. *Функцією кратності* поверхні S називається число прообразів

$$N(S, y) = \operatorname{card} S^{-1}(y) = \operatorname{card} \{x \in \omega : \ S(x) = y\}, \quad y \in \mathbb{R}^n .$$

Іншими словами, символ $N(S, y)$ означає кратність накриття точки поверхнею S.

Зауваження 1.7.2. Відомо, що функція кратності є напівнеперервною знизу, і, значить, вимірна відносно довільної хаусдорфової міри H^k, див. п. 9.2 в [342].

Означення 1.7.3. Для борелівої функції $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ її *інтеграл по поверхні* S визначається рівністю

$$\int\limits_S \rho \, d\mathcal{A}_k := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(y) \, N(S, y) \, dH^k y . \tag{1.48}$$

Надалі при $k = n - 1$ покладемо $d\mathcal{A} = d\mathcal{A}_{n-1}$.

Означення 1.7.4. Нехай Γ — сім'я k-вимірних поверхонь S. Борелева функція $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ називається *допустимою* для сім'ї Γ, пишуть $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$, якщо

$$\int\limits_S \rho^k \, d\mathcal{A}_k \geqslant 1 \tag{1.49}$$

для кожної поверхні $S \in \Gamma$.

Означення 1.7.5. *Модулем* сім'ї Γ називається величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x) \, dm(x) . \tag{1.50}$$

Означення 1.7.6. Говорять, що властивість P виконується для *майже всіх* (м.в.) k-вимірних поверхонь S сім'ї Γ, якщо підсім'я всіх поверхонь сім'ї Γ, для яких властивість P порушується, має модуль нуль.

Означення 1.7.7. Говорять (див. п. 9.2 в [342]), що вимірна за Лебегом функція $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ є *узагальнено допустимою* для сім'ї Γ, що складається із $(n-1)$-вимірних поверхонь S в $\mathbb{R}^n$, і пишуть $\rho \in \operatorname{ext}\operatorname{adm}\Gamma$, якщо

$$\int\limits_S \rho^{n-1}(x)\, d\mathcal{A} \geqslant 1 \tag{1.51}$$

для майже всіх $S \in \Gamma$.

Наведемо означення нижнього Q-гомеоморфізму.

Означення 1.7.8. Нехай D і D' — області в $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$, $Q : \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ — вимірна за Лебегом функція. Гомеоморфізм $f : D \to D'$ називають *нижнім Q-гомеоморфізмом у точці* x_0, якщо

$$M\left(f\Sigma_{\mathbb{A}}\right) \geqslant \inf_{\rho \in \operatorname{ext}\operatorname{adm}\Sigma_{\mathbb{A}}} \int\limits_{D\cap\mathbb{A}} \frac{\rho^n(x)}{Q(x)}\, dm(x) \tag{1.52}$$

для кожного кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0\}$, $\varepsilon \in$ $\in (0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in (0, d_0)$, де $d_0 = \sup\limits_{x\in D} |x - x_0|$, а $\Sigma_{\mathbb{A}}$ позначає сім'ю всіх перетинів сфер $S(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, $r \in (\varepsilon,\varepsilon_0)$, з областю D.

Зазначене вище поняття може бути поширене в нескінченно віддалену точку, $x_0 = \infty \in \overline{D}$, стандартним чином за допомогою інверсії $T(x) = x/|\,x|^2$, $T(\infty) = 0$, $T(0) = \infty$.

Означення 1.7.9. Гомеоморфізм $f : D \to D'$ називають *нижнім Q-гомеоморфізмом у точці* $\infty \in \overline{D}$, якщо відображення $F = f \circ T$ є нижнім Q_*-гомеоморфізмом у точці 0 при $Q_* = Q \circ T$.

Означення 1.7.10. Гомеоморфізм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ є *нижнім Q-гомеоморфізмом в області* D, якщо f є нижнім Q-гомеоморфізмом в кожній точці $x_0 \in \overline{D}$.

Наведемо критерій нижнього Q-гомеоморфізму в $\mathbb{R}^n$, див. теорему 2.1 статті [49] або теорему 9.2 в монографії [342].

Твердження 1.7.1. *Нехай D і D' — області в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$, і $Q : \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ – вимірна за Лебегом функція. Тоді гомеоморфізм $f : D \to D'$ є нижнім Q-гомеоморфізмом у точці x_0 тоді і тільки тоді, коли*

$$M\,(f\Sigma_{\mathbb{A}}) \geqslant \; I \; : \; = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|\,Q\|_{\,n-1}(x_0,r)} \quad \forall\, \varepsilon \in (0,\varepsilon_0),\ \varepsilon_0 \in (0,d_0), \tag{1.53}$$

де

$$\|Q\|_{\,n-1}(x_0,r) = \left(\int\limits_{D(x_0,r)} Q^{n-1}(x)\,d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{n-1}} \tag{1.54}$$

є L_{n-1}-норма функції Q по множині $D(x_0,r) = D \cap S(x_0,r)$.

Зауважимо, що точна нижня межа в правій частині співвідношення (1.52) досягається на функції

$$\rho_0(x) = \frac{Q(x)}{\|Q\|_{\,n-1}(x_0,|x-x_0|)}.$$

Наступне твердження встановлює зв'язок між нижніми і кільцевими Q-гомеоморфізмами в $\mathbb{R}^n$, див. наслідок 5 в [50].

Твердження 1.7.2. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і функція $Q : \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ інтегровна зі степенем $n-1$ у деякому околі точки $x_0 \in \overline{D}$. Якщо $f : D \to D'$ — нижній Q-гомеоморфізм у точці x_0, то f є кільцевим Q_*-гомеоморфізмом у точці x_0 з функцією $Q_*(x) = Q^{n-1}(x)$.*

Зауваження 1.7.3. В означеннях нижніх і кільцевих Q-гомеоморфізмів функцію Q досить задати лише в області D або продовжити нулем за межами D. За зауваженням 8 в [50], висновок твердження 1.7.2 залишається справедливим, якщо функція Q інтегровна зі степенем $n-1$ лише на майже всіх сферах достатньо малих радіусів з центром у точці x_0.

1.8. Про відображення зі скінченним спотворенням на комплексній площині

Нехай D — область у комплексній площині $\mathbb{C}$, тобто зв'язна і відкрита підмножина $\mathbb{C}$, і нехай $\mu : D \to \mathbb{C}$ — вимірна функція, для якої $|\mu(z)| < 1$ м.с. в D.

Означення 1.8.1. *Рівнянням Бельтрамі* називається рівняння вигляду

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z, \tag{1.55}$$

де $f_{\overline{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, f_x і f_y — частинні похідні відображення f по x та y, відповідно.

Означення 1.8.2. Функція μ називається *комплексним коефіцієнтом*, а

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|} \tag{1.56}$$

— *дилатаційним відношенням* рівняння (1.55).

Означення 1.8.3. Рівняння Бельтрамі (1.55) називається *виродженим*, якщо функція K_μ є істотно необмеженою, тобто $K_\mu \notin L^\infty(D)$.

Означення 1.8.4. Відображення $f : D \to \mathbb{C}$ називається *регулярним у точці* $z_0 \in D$, якщо f в цій точці має повний диференціал і його якобіан $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \neq 0$, див., напр., I.1.6 в [325].

Означення 1.8.5. Гомеоморфізм f класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ називається *регулярним*, якщо $J_f(z) > 0$ м.с.

Означення 1.8.6. *Регулярним розв'язком* рівняння Бельтрамі (1.55) в області D називається регулярний гомеоморфізм, що задовольняє умову (1.55) м.с. в D.

Означення 1.8.7. Нехай D, D' – області у комплексній площині $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$. Гомеоморфізм $f : D \to D'$ називається *відображенням зі скінченним спотворенням*, якщо $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$ і

$$|f_z| + |f_{\bar{z}}| \leqslant K(z) \, (\, |f_z| - |f_{\bar{z}}| \,) \tag{1.57}$$

з майже всюди скінченною функцією K.

Нагадаємо, що вперше поняття відображення зі скінченним спотворенням введено на комплексній площині для $f\in W_{\rm loc}^{1,2}$ в роботі [303]. Згодом ця умова була замінена вимогою $f\in W_{\rm loc}^{1,1}$, і при цьому додатково припускалось, що $J_f\in L_{\rm loc}^1$, див., напр., монографію [301].

Означення 1.8.8. *Максимальною дилатацією* відображення f зі скінченним спотворенням називається величина

$$K_f(z) \quad = \quad \begin{cases} \frac{|f_z|+|f_{\overline{z}}|}{|f_z|-|f_{\overline{z}}|}, & \text{якщо } J_f(z)\ne 0,\\ 1, & \text{якщо } f_{\overline{z}}=f_z=0,\\ \infty, & \text{в інших випадках}\,, \end{cases} \tag{1.58}$$

а функція

$$\mu_f(z) \quad = \quad \begin{cases} f_{\overline{z}}/f_z, & \text{якщо } f_z\ne 0,\\ 0, & \text{якщо } f_z=0 \end{cases} \tag{1.59}$$

називається *комплексною характеристикою.*

Відмітимо, що гомеоморфізм f на площині класу Соболєва $W_{\rm loc}^{1,1}$ є відображенням зі скінченним спотворенням тоді і тільки тоді, коли він є гомеоморфним розв'язком рівняння Бельтрамі з $\mu=\mu_f$.

Наступне означення узагальнює поняття максимальної дилатації.

Означення 1.8.9. *Дотична дилатація* відображення f у точці z по відношенню до точки z_0 визначається наступним чином:

$$K^T_{\mu}(z,z_0)=\frac{\left|1-\frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}\mu(z)\right|^2}{1-|\mu(z)|^2}\,,$$

див., напр., [195, 196, 276, 326, 384, 394].

Зауваження 1.8.1. Зрозуміло, що при будь-яких z і $z_0\in D$ виконується умова: $K^T_{\mu}(z,z_0)\leqslant K_{\mu}(z)$.

Із леми 20.9.1, розд. 20 в [207] і теореми 1.6.1 випливає, що кожний регулярний гомеоморфізм $f:D\to\mathbb{C}$ такий, що $K_{\mu}(z)\in L^1_{\rm loc}(D)$, є кільцевим Q-гомеоморфізмом в кожній точці $z_0\in D$ при $Q(z)=K_{\mu}(z)$. Як ми зазначили вище, цей результат є лише окремим випадком твердження, наведеного вище.

Нижче наведено низку результатів про оцінку спотворення хордальної відстані, див. роботу [329].

Лема 1.8.1. *Нехай D — область в $\mathbb{C}$, $Q : D \to [1, \infty]$ — локально інтегровна функція, і нехай $f : D \to D'$ — гомеоморфний $W^{1,1}_{\rm loc}$-розв'язок рівняння Бельтрамі (1.55) з $K_\mu(z) \leqslant Q(z)$ і $h(\overline{\mathbb{C}} \setminus f(D)) \geqslant \Delta > 0$. Якщо для деяких $z_0 \in D$, $0 < \varepsilon_0 < {\rm dist}(z_0, \partial D)$ і $p < 2$, виконується нерівність*

$$\int\limits_{\mathbb{A}} Q(z)\, \psi^2(|z - z_0|)\; dm(z) \;\leqslant\; c\, I^p(\varepsilon) \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\,, \tag{1.60}$$

де $\mathbb{A} = \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z - z_0| < \varepsilon_0\}$, $\psi(t) : (0, \infty) \to [0, \infty]$ — невід'ємна вимірна функція,

$$0 < I(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty \quad \forall \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\,,$$

то

$$h(f(z),\, f(z_0)) \leqslant \frac{32}{\Delta} \exp\left\{- \left(\frac{2\pi}{c}\right) I^{2-p}(|z - z_0|)\right\}$$

для всіх $z \in B(z_0, \varepsilon_0)$.

Наслідок 1.8.1. *Якщо виконуються умови леми 1.8.1 для $p = 1$, то*

$$h(f(z), f(z_0)) \;\leqslant\; \frac{32}{\Delta}\; \exp\left\{-\frac{2\pi}{c}\, I(|z - z_0|)\right\}. \tag{1.61}$$

Зауваження 1.8.2. Якщо $\infty \in D$, то умову (1.60) у точці ∞ замінюємо умовою

$$\int\limits_{\mathbb{A}_0} Q(z)\, \psi^2_\infty(|z|)\, \frac{dm(z)}{|z|^4} \leqslant c\, I^p_\infty(R) \qquad R \to \infty\,, \tag{1.62}$$

де $\mathbb{A}_0 = \mathbb{A}(0, R_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : R_0 < |z| < R\}$ і $\psi_\infty(t)$ — невід'ємна вимірна функція на $(0, \infty)$, така що

$$0 < I_\infty(R) = \int\limits_{R_0}^{R} \psi_\infty(t)\, dt \, < \infty\,, R \in (R_0, \infty)\,.$$

Теорема 1.8.1. *Нехай* D *— область в* $\mathbb{C}$ *і нехай* f *— гомеоморфний* $W^{1,1}_{\rm loc}$ *-розв'язок рівняння Бельтрамі (1.55) з* $K_\mu(z) \in L^1_{\rm loc}$, $z_0 \in D$ *і* $h(\overline{\mathbb{C}} \setminus f(D)) \geqslant \Delta > 0$. *Тоді*

$$h(f(z), f(z_0)) \ \leqslant \ \frac{32}{\Delta} \ \exp\left\{-\int\limits_{|z-z_0|}^{\varepsilon(z_0)} \frac{dr}{rk_{z_0}(r)}\right\} \tag{1.63}$$

для $z \in B(z_0, \varepsilon(z_0))$, *де* $\varepsilon(z_0) < \mathrm{dist}(z_0, \partial D)$ *і* $k_{z_0}(r)$ *— середнє інтегральне значення* $K_\mu(z)$ *по колу* $S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$.

Наслідок 1.8.2. *Якщо* $k_{z_0}(r) \leqslant c \log \frac{1}{r}$ *для м.в.* $r \in (0, \varepsilon(z_0))$, *де* $\varepsilon(z_0) < \mathrm{dist}(z_0, \partial D)$, *то*

$$h(f(z), f(z_0)) \ \leqslant \ \frac{32}{\Delta} \left[\frac{\log \frac{1}{\varepsilon_0}}{\log \frac{1}{|z-z_0|}}\right]^{1/c} \tag{1.64}$$

для всіх $z \in B(z_0, \varepsilon(z_0))$.

Наслідок 1.8.3. *Якщо* $K_\mu(z) \leqslant c \log \frac{1}{|z-z_0|}$ *для м.в.* $z \in B(z_0, \varepsilon(z_0))$, *то (1.64) виконується для всіх* $z \in B(z_0, \varepsilon(z_0))$.

Вибираючи в лемі 1.8.1 $\psi(t) = 1/t$ і $p = 1$, отримуємо наступне твердження.

Наслідок 1.8.4. *Нехай* $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ *— гомеоморфний* $W^{1,1}_{\rm loc}$ *-розв'язок рівняння Бельтрамі (1.55) з* $K_\mu(z) \in L^1_{\rm loc}$ *такий, що* $f(0) = 0$ *і*

$$\int\limits_{\mathbb{A}_\varepsilon} K_\mu(z) \ \frac{dm(z)}{|z|^2} \ \leqslant \ c \ \log \frac{1}{\varepsilon}, \qquad \varepsilon \in (0,1)\,, \tag{1.65}$$

де $\mathbb{A}_\varepsilon = \mathbb{A}(0, \varepsilon, 1) = \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < 1\}$. *Тоді*

$$|f(z)| \ \leqslant \ 64\, |z|^{\frac{2\pi}{c}}. \tag{1.66}$$

Теорема 1.8.2. *Нехай* D *— область в* $\mathbb{C}$ *і нехай* $f : D \to D'$ *— гомеоморфний* $W^{1,1}_{\rm loc}$ *-розв'язок рівняння Бельтрамі (1.55) і* $h(\overline{\mathbb{C}} \setminus D') \geqslant \Delta > 0$. *Якщо*

$K_\mu(z) \leqslant Q(z)$ м.с., де Q має скінченне середнє коливання у точці $z_0 \in D$, то

$$h(f(z), f(z_0)) \leqslant \frac{32}{\Delta}\left\{\frac{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}{\log\frac{1}{|z-z_0|}}\right\}^{\beta_0} \tag{1.67}$$

для деякого $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$ та будь-якої точки $z \in B(z_0, \varepsilon_0)$, де $\beta_0 > 0$ залежить тільки від функції Q.

Згідно з теоремою Арцела–Асколі (див. твердження 1.4.1) маємо відповідні критерії нормальності для розв'язків рівнянь Бельтрамі.

Нехай D — область в $\mathbb{C}$, $Q : D \to [1, \infty]$ — вимірна функція. Позначимо через $\mathfrak{B}_{Q,\Delta}(D)$ клас усіх гомеоморфних розв'язків рівнянь Бельтрамі (1.55) класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ таких, що $K_\mu(z) \leqslant Q(z)$ м.с. в D і $h(\overline{\mathbb{C}} \setminus f(D)) \geqslant \Delta > 0$.

Нижче наведено низку достатніх умов, що гарантують нормальність розв'язків рівняння Бельтрамі, див. [329].

Лема 1.8.2. *Якщо $Q \in L^1_{\rm loc}$ задовольняє умову (1.60) в усіх точках $z_0 \in D$, то клас $\mathfrak{B}_{Q,\Delta}(D)$ утворює нормальну сім'ю.*

Із теореми 1.8.2 випливає наступне твердження.

Теорема 1.8.3. *Якщо $Q \in \mathrm{FMO}(D)$, то клас $\mathfrak{B}_{Q,\Delta}(D)$ утворює нормальну сім'ю.*

Нагадаємо, що точку $z_0 = \infty$ називають точкою Лебега функції φ, якщо 0 є точкою Лебега функції $\varphi^*(z) = \varphi(1/\overline{z})$, $\varphi^*(0) = \varphi(\infty)$, $\varphi^*(\infty) = \varphi(0)$, тобто

$$\int\limits_{|z| \geqslant R} |\varphi(z) - \varphi(\infty)| \, \frac{dm(z)}{|z|^4} = O\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad \text{при } R \to \infty\,. \tag{1.68}$$

Іншими словами, умова (1.68) еквівалентна умові, що

$$\varphi^*_r = \frac{1}{S(B_r)} \int\limits_{B_r} \varphi(z)\; dS(z) \to \varphi(\infty), \quad r \to 0,$$

в середньому по сферичній мірі, де B_r — круг в сферичній метриці з центром в ∞ радіуса r, $S(B_r)$ — його сферична площа.

Як наслідок твердженння 1.2.1 і наслідка 1.2.2 про достатні умови належності функцій класу FMO, із теореми 1.8.3 випливають наступні два твердження.

Наслідок 1.8.5. *Клас* $\mathfrak{B}_{Q,\Delta}(D)$ *нормальний, якщо кожна точка* $z_0 \in D$ *є точкою Лебега функції* $Q(z)$.

Наслідок 1.8.6. *Клас* $\mathfrak{B}_{Q,\Delta}(D)$ *нормальний, якщо*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \frac{1}{|B(z_0,\,\varepsilon)|}\int\limits_{B(z_0,\varepsilon)} Q(z)\ \ dm(z)\ <\ \infty \qquad \forall\ z_0\in D. \tag{1.69}$$

Тут у випадку $z_0 = \infty \in D$ замість (1.69) має бути умова

$$\int\limits_{|z|\geqslant R} Q(z)\frac{dm(z)}{|z|^4} = O\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad \text{при } R\to\infty\,. \tag{1.70}$$

Зауважимо також, що умова (1.70) еквівалентна умові

$$\overline{\lim_{r\to 0}}\,\frac{1}{S(B_r)}\int\limits_{B_r} Q(z)\,dS(z) < \infty\,. \tag{1.71}$$

Теорема 1.8.4. *Нехай* $\Delta > 0$ *і* $Q : D \to [0,\infty]$ *— локально інтегровна функція така, що*

$$\int\limits_0^{\varepsilon(z_0)} \frac{dr}{rq_{z_0}(r)} = \infty \qquad \forall\ z_0\in D\,, \tag{1.72}$$

де $\varepsilon(z_0) < \mathrm{dist}(z_0, \partial D)$ *і* $q_{z_0}(r)$ *— середнє інтегральне значення функції* Q *по колу* $S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ *. Тоді* $\mathfrak{B}_{Q,\Delta}$ *утворює нормальну сім'ю.*

У теоремі 1.8.4 у випадку $\infty \in D$ замість (1.72) має бути умова

$$\int\limits_\delta^{\infty} \frac{dR}{Rq_\infty(R)} = \infty \tag{1.73}$$

для деякого $\delta > 0$, де $q_\infty(R)$ — середнє інтегральне значення функції Q по колу $S_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$.

Наслідок 1.8.7. *Якщо* $q_{z_0}(r) = O\left(\log\frac{1}{r}\right)$ *при* $r \to 0$ *у кожній точці* $z_0 \in D$ *, то* $\mathfrak{B}_{Q,\Delta}$ *утворює нормальну сім'ю.*

Тут $q_\infty(R) = O(\log R)$ при $R \to \infty$, де $q_\infty(R)$ — середнє інтегральне значення функції Q по колу $S_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$.

Теорема 1.8.5. *Клас* $\mathfrak{B}_{Q,\Delta}$ *є одностайно неперервним та, як наслідок, нормальною сім'єю відображень, якщо* Q *задовольняє умову*

$$\int\limits_{D} \Phi\left(Q(z)\right) dS(z) \ \leqslant \ M \tag{1.74}$$

для деякого $M \in (0,\infty)$ *та неспадної опуклої функції* $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *з умовою*

$$\int\limits_{\sigma}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} \ = \ \infty \tag{1.75}$$

для деякого $\sigma > \Phi(0)$ *.*

Зауваження 1.8.3. Відмітимо, що умова (1.75) є не тільки достатньою, але і необхідною для одностайної неперервності (нормальності) класів з обмеженнями типу (1.74) з опуклою неспадною функцією Φ. Це випливає з прикладу теореми 5.1 в [389].

1.9. Теореми існування розв'язків рівняння Бельтрамі

Проблема існування для вироджених рівнянь Бельтрамі є активною сферою дослідження (див., напр., статті [56, 94, 103, 217–219, 222, 223, 240, 276, 326, 336, 391–398, 401, 402, 430], книги [207, 301, 342] та огляди [280, 424]).

В даному параграфі, спираючись на [342], [401] і [405], ми наведемо низку теорем існування розв'язків рівняння Бельтрамі. Наступний результат є головним інструментом в отриманні критеріїв існування регулярних розв'язків рівняння Бельтрамі, див. [397].

Лема 1.9.1. *Нехай* $\mu : D \to \mathbb{C}$ *— вимірна функція з* $|\mu(z)| < 1$ *м.с. і* $K_\mu \in L^1_{\rm loc}$*. Припустимо, що для будь-якої* $z_0 \in D$*, існує* $\varepsilon_0 \in (0, \operatorname{dist}(z_0, \partial D))$ *і сім'я вимірних функцій* $\psi_{z_0,\varepsilon} : (0,\infty) \to (0,\infty)$*,* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$*, таких, що*

$$0 \ < \ I_{z_0}(\varepsilon) \ : \ = \ \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{z_0,\varepsilon}(t) \ dt \ < \ \infty, \tag{1.76}$$

і

$$\int\limits_{\mathbb{A}} K_\mu(z,z_0)\cdot\psi^2_{z_0,\varepsilon}(|z-z_0|)\;dm(z)\;=\;o(I^2_{z_0}(\varepsilon)) \tag{1.77}$$

при $\varepsilon\to 0$, *де* $\mathbb{A}=\mathbb{A}(z_0,\varepsilon,\varepsilon_0)=\{z\in\mathbb{C}:\ \varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0\}$. *Тоді рівняння Бельтрамі (1.55) має регулярний розв'язок.*

Теорема 1.9.1. *Нехай* $\mu: D\to\mathbb{C}$ *– вимірна функція з* $|\mu(z)|<1$ *м.с. така, що*

$$K_\mu(z)\leqslant\ Q(z)\ \in\ \mathrm{FMO}(D). \tag{1.78}$$

Тоді рівняння Бельтрамі (1.55) має регулярний розв'язок.

Наслідок 1.9.1. *Якщо*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \frac{1}{|B(z_0,\,\varepsilon)|}\int\limits_{B(z_0,\varepsilon)} K_\mu(z)\ \ dm(z)\ <\ \infty\quad \forall z_0\in D, \tag{1.79}$$

то рівняння Бельтрамі (1.55) має регулярний розв'язок.

Наступне узагальнення теореми існування Лехто [326] дає можливість отримати низку інших теорем існування, див. [397].

Теорема 1.9.2. *Нехай* D *– область в* $\mathbb{C}$ *і нехай* $\mu: D\to\mathbb{C}$ *— вимірна функція з* $|\mu(z)|<1$ *м.с.,* $K_\mu\in L^1_{\mathrm{loc}}$ *і*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)}\frac{dr}{rq_{z_0}(r)}\ =\ \infty\quad\forall\ \ z_0\in D, \tag{1.80}$$

де $\delta(z_0)<\mathrm{dist}\,(z_0,\partial D)$ *та* $q_{z_0}(r)$ *— середнє інтегральне значення* K_μ *по колу* $S(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C}:\ |z-z_0|=r\}$. *Тоді рівняння Бельтрамі (1.55) має регулярний розв'язок.*

Наслідок 1.9.2. *Якщо* $q_{z_0}(r)\ =\ O\left(\log\frac{1}{r}\right)$ *при* $r\to 0$ *для усіх* $z_0\in D$, *то (1.55) має регулярний розв'язок.*

Для будь-якої неспадної функції $\Phi:\overline{\mathbb{R}^+}\to\overline{\mathbb{R}^+}$, *функцію* $\Phi^{-1}:\overline{\mathbb{R}^+}\to\overline{\mathbb{R}^+}$ можна визначити наступним чином

$$\Phi^{-1}(\tau)\ =\ \inf_{\Phi(t)\geqslant\tau}\ t\ . \tag{1.81}$$

Як завжди, тут $\inf$ вважаємо рівним ∞, якщо множина таких $t \in [0, \infty]$, для яких $\Phi(t) \geqslant \tau$, є порожньою.

Теорема 1.9.3. *Нехай* $\mu : D \to \mathbb{C}$ *– вимірна функція з* $|\mu(z)| < 1$ *м.с. така, що*

$$\int\limits_{D} \Phi(K_\mu(z))\, dm(z) < \infty \tag{1.82}$$

для неспадної опуклої функції $\Phi : [0,\, \infty) \to [0,\, \infty)$ *такої, що*

$$\int\limits_{\sigma}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} \;=\; \infty \tag{1.83}$$

при деякому $\sigma > \Phi(0)$*. Тоді рівняння Бельтрамі (1.55) має регулярний розв'язок.*

1.10. Задача Діріхле для рівнянь Бельтрамі

Крайові задачі для рівнянь Бельтрамі вперше вивчалися у відомій дисертації Рімана, який розглядав окремий випадок аналітичних функцій, коли $\mu(z) \equiv 0$, та роботах Гільберта (1904, 1924), який досліджував відповідну систему Коші–Рімана для дійсної та уявної частини аналітичних функцій $f = u + iv$, а також роботі Пуанкаре (1910) по приливах.

Будь-яка аналітична функція f в області D задовольняє найпростіше рівняння Бельтрамі

$$f_{\bar z} = 0, \tag{1.84}$$

коли $\mu(z) \equiv 0$. Якщо аналітична функція f задана в одиничному крузі $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ і неперервна в його замиканні, то за формулою Шварца

$$f(z) = i\,\mathrm{Im}\, f(0) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \mathrm{Re}\, f(\zeta) \cdot \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta} \tag{1.85}$$

і, таким чином, аналітична функція f в одиничному крузі $\mathbb{B}$ визначається з точністю до деякого уявного числа ic, $c = \mathrm{Im}\, f(0)$, її дійсною частиною $\varphi(\zeta) = \mathrm{Re}\, f(\zeta)$ на межі одиничного круга.

Задача Діріхле для рівняння Бельтрамі (4.1) в області D полягає в знаходженні неперервної функції $f : D \to \mathbb{C}$, яка має м.с. частинні похідні першого порядку та м.с. задовольняє рівняння (4.1), а також граничну умову

$$\lim_{z\to\zeta} \operatorname{Re} f(z) = \varphi(\zeta) \qquad \forall\, \zeta \in \partial D \tag{1.86}$$

для заданої неперервної функції $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$.

Задача Діріхле добре вивчена для рівномірно еліптичних систем рівнянь, див., наприклад, [12] і [15]. Задача Діріхле для вироджених рівнянь Бельтрамі в одиничному крузі вивчалася у роботі [242]. Однак, критерії існування розв'язків задачі Діріхле, сформульовані в [242], не є інваріантними відносно відображень Рімана.

В роботі [366] задачу (1.86) для розв'язків одного рівняння Бельтрамі з виродженням на дійсній осі для підкласу неперервних заданих функцій редуковано до інтегрального рівняння Фредгольма.

1.11. Про відображення зі скінченним спотворенням в $\mathbb{R}^n$

Відображення зі скінченним спотворенням активно вивчаються останні 10 – 20 років у роботах багатьох відомих математиків, див., напр., [45, 46, 203, 205–207, 233–239, 259, 291, 292, 299–301, 303, 306, 308, 312, 314, 315, 318, 331, 332, 370–372, 391, 392, 427].

Наведемо означення відображення зі скінченним спотворенням в $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 2$.

Означення 1.11.1. Гомеоморфізм f відкритої множини U із $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, називається *відображенням зі скінченним спотворенням*, якщо $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ і

$$\|f'(x)\|^n \leqslant K(x) \cdot J_f(x) \qquad \text{м.с.} \tag{1.87}$$

для деякої скінченної функції $K(x) \geqslant 1$, де $\|f'(x)\|$ — операторна норма матриці Якобі f' відображення f в x: $||f'(x)|| = \sup\limits_{h\in\mathbb{R}^n, |h|=1} |f'(x)\cdot h|$, і $J_f(x)$ — його якобіан, тобто $\det f'(x)$.

Нагадаємо, що вперше поняття відображення зі скінченним спотворенням введено на комплексній площині для $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ в роботі [303]. Згодом ця умова була замінена вимогою $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, і при цьому додатково припускалось, що $J_f \in L^1_{\mathrm{loc}}$, див., напр., монографію [301], а також подальші посилання в монографії [342].

Зауваження 1.11.1. Зауважимо, що у випадку гомеоморфізмів умова $J_f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ зайва. Дійсно, для кожного гомеоморфізма f між областями D і D' в $\mathbb{R}^n$, який має м.с. частинні похідні в D, існує множина E лебегової міри нуль така, що f володіє (N)-властивістю Лузіна в $D\setminus E$ і

$$\int\limits_A J_f(x)\, dm(x) = m(f(A)) \tag{1.88}$$

для кожної вимірної за Лебегом множини $A\subset D\setminus E$ (див., напр., пункти 3.1.4, 3.1.8 і 3.2.5 в [187]).

При дослідженні відображень зі скінченним спотворенням використовують наступні величини.

Означення 1.11.2. *Зовнішньою дилатацією* відображення f у точці x називається величина

$$K_O(x,f) = \begin{cases} \frac{\|f'(x)\|^n}{|J_f(x)|}\,, & \text{якщо } J_f(x)\neq 0\,,\\ 1\,, & f'(x)=0\,,\\ \infty\,, & \text{в інших точках.}\end{cases} \tag{1.89}$$

Означення 1.11.3. *Внутрішньою дилатацією* відображення f у точці x називається величина

$$K_I(x,f) = \begin{cases} \frac{|J_f(x)|}{l(f'(x))^n}\,, & \text{якщо } J_f(x)\neq 0\,,\\ 1\,, & f'(x)=0\,,\\ \infty\,, & \text{в інших точках}\,,\end{cases} \tag{1.90}$$

де $l\left(f'(x)\right) = \min\limits_{|h|=1} |f'(x)h|$.

Зауваження 1.11.2. Відомо, що

$$K_I(x, f) \leqslant K_O^{n-1}(x, f)\ , \tag{1.91}$$

див., напр., п. 1.2.1 в [110].

1.12. Про відображення класів Орліча–Соболєва

Наведемо основні означення, що стосуються класів Орліча–Соболєва. див., напр., [360] і [361], див. також монографію [54].

Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$.

Означення 1.12.1. Для заданої опуклої зростаючої функції $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$, позначимо символом L_φ — простір всіх функцій $f : D \to \mathbb{R}$, таких що

$$\int\limits_D \varphi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dm(x) < \infty \tag{1.92}$$

при деякому $\lambda > 0$. Простір L_φ називається *простором Орліча.* Іншими словами, L_φ — це конус над класом всіх функцій $g : D \to \mathbb{R}$ таких, що

$$\int\limits_D \varphi\left(|g(x)|\right) dm(x) < \infty, \tag{1.93}$$

який називається *класом Орліча*, див. [215].

Означення 1.12.2. *Класом Орліча–Соболєва* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(D)$ називається клас всіх заданих в D локально інтегровних функцій f з першими узагальненими похідними, градієнт ∇f яких локально в області D належить класу Орліча.

Зауваження 1.12.1. Зауважимо, що за означенням $W^{1,\varphi}_{\rm loc} \subset W^{1,1}_{\rm loc}$.

Означення 1.12.3. Нехай f — локально інтегровна вектор-функція n дійсних змінних $x_1, \ldots, x_n$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $f_i \in W^{1,1}_{\rm loc}$, $i = 1, \ldots, m$, і

$$\int\limits_D \varphi\left(|\nabla f(x)|\right) dm(x) < \infty, \tag{1.94}$$

де $|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$. Тоді також пишемо, що $f \in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$.

Зауваження 1.12.2. Будемо також використовувати термін "клас Орліча–Соболєва" і збережемо позначення $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ у випадку, коли на функцію φ накладаються більш слабкі умови, ніж в наведеному означенні класу Орліча–Соболєва.

Відзначимо, що класи Орліча–Соболєва зараз, як і раніше, вивчаються в найрізноманітніших аспектах багатьма авторами, див., напр., [4,50,193,225,232, 241,272,296,300,309,320,321,323,324,357,431,443].

1.13. Про відображеня з розгалуженням

У цьому параграфі ми наводимо деякі відомі факти теорії відображень з розгалуженням.

Означення 1.13.1. Будемо говорити, що відображення f *зберігає орієнтацію,* якщо топологічний індекс $\mu\,(y,\,f,\,G)\ >\ 0$ для довільної області $G\subset D$, такої, що $\overline{G}\subset D$, і довільного $y\,\in\,fG\setminus f(\partial G)$.

Означення топологічного індексу див., напр., в [110, п. 2.1, розд. II].

Означення 1.13.2. Область G називається *нормальною областю* відображення $f:D\to\mathbb{R}^n$, якщо $\overline{G}\subset D$ і $\partial(fG)=f(\partial G)$.

Означення 1.13.3. Окіл U точки x_0 називається *нормальним околом відображення* f, якщо U є нормальною областю f.

Нагадаємо, що для відображення $f:D\to\mathbb{R}^n$ множини $E\subset D$ і $y\in\mathbb{R}^n$ *функція кратності* $N(y,f,E)$ визначається як число прообразів точки y у множині E, тобто

$$N(y,f,E)\;=\;{\rm card}\,\{x\in E: f(x)=y\}\;, \tag{1.95}$$

$$N(f,E)\;=\;\sup\limits_{y\in\mathbb{R}^n} N(y,f,E)\,. \tag{1.96}$$

Нехай $f\,:\,D\,\to\,\mathbb{R}^n$ — довільне відображення і існує область $G\,\subset\,D$, $\overline{G}\subset D$, така, що $\overline{G}\cap\{f^{\,-1}\,(f(x))\}=\{x\}$. Тоді величина $\mu\,\left(f(x),\,f,\,G\right)$, яка називається *локальним топологічним індексом*, не залежить від вибору області G і позначається символом $i(x, f)$.

Зауваження 1.13.1. Очевидно, для гомеоморфізмів, які зберігають орієнтацію $i(x, f) = 1$ при всіх $x \in D$. Відзначимо також, що $i(x, f) = \operatorname{sign} J_f(x)$ для відкритих дискретних відображень $f : D \to \mathbb{R}^n$, диференційовних у точці $x \in D$ і таких, що $J_f(x) \neq 0$ (див., напр., [368, розд. V.2.2, співвідношення (68), с. 332]; див. також [339, лема 2.14]).

Означення 1.13.4. Відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ (відповідно, $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$) називається *дискретним*, якщо прообраз $f^{-1}(y)$ кожної точки $y \in \mathbb{R}^n$ (відповідно, кожної точки $y \in \overline{\mathbb{R}^n}$) складається тільки з ізольованих точок.

Означення 1.13.5. Відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ (відповідно, $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$) називається *відкритим*, якщо образ будь-якої відкритої множини $U \subset D$ є відкритою множиною в $\mathbb{R}^n$ (відповідно, в $\overline{\mathbb{R}^n}$).

Означення 1.13.6. Відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ (відповідно, $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$) називається *нульвимірним*, якщо кожна компонента зв'язності множини $\{f^{-1}(y)\}$ вироджується до точки для кожного $y \in \mathbb{R}^n$ (відповідно, будь-якого $y \in \overline{\mathbb{R}^n}$).

Зауваження 1.13.2. Із означення випливає, що якщо відображення дискретне, то воно є нульвимірним. Обернене твердження, взагалі кажучи, не вірне.

Означення 1.13.7. Відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ називається *локальним гомеоморфізмом*, якщо кожна точка x_0 області D має окіл $U \supset \{x_0\}$ такий, що звуження $f|_U$ є гомеоморфізмом.

Означення 1.13.8. Точка $x_0 \in D$ називається *точкою розгалуження відображення* f, якщо в жодному околі U точки x_0 звуження відображення $f|_U$ не є гомеоморфізмом.

Означення 1.13.9. Відображення, яке має хоча б одну точку розгалуження, скорочено будемо називати *відображенням з розгалуженням.* Сукупність усіх точок розгалуження f прийнято позначати символом B_f.

Нам також знадобиться поняття квазіадитивної функції множин.

Означення 1.13.10. Нехай U — відкрита множина в $\mathbb{R}^n$. Позначимо через $\mathrm{Bor}\,U$ клас усіх борелевих підмножин U. Функція $\varphi:\mathrm{Bor}\,U\rightarrow\mathbb{R}$ називається q*-квазіадитивною*, $q\geqslant 1$, якщо виконуються наступні умови:

1) $\varphi(E)\geqslant 0$ для будь-якої борелевої множини $E\subset U$;

2) з умови $E\subset F$ випливає нерівність $\varphi(E)\leqslant\varphi(F)$, які б не були борелеві множини $E, F\subset\mathrm{Bor}\,U$;

3) $\varphi(E)<\infty$ для довільної компактної множини $E\subset U$;

4) якщо борелеві множини $E_1,\ldots,E_m\subset U$ не перетинаються і $E_i\subset E\subset U$, $i=1,\ldots,m$, то

$$\sum_{i=1}^{m}\varphi(E_i)\leqslant q\cdot\varphi(E)\,. \tag{1.97}$$

Означення 1.13.11. Верхня і нижня похідні q-квазіадитивної функції φ в точці $x\in U$ визначаються наступним чином:

$$\overline{\varphi'}(x)=\lim\limits_{h\rightarrow 0}\sup\limits_{d(Q)<h}\frac{\varphi(Q)}{m(Q)}\,,\quad \underline{\varphi'}(x)=\lim\limits_{h\rightarrow 0}\inf\limits_{d(Q)<h}\frac{\varphi(Q)}{m(Q)}\,,$$

де Q пробігає всі відкриті куби і кулі такі, що $x\in Q\subset U$.

Наступне твердження можна знайти у роботі [339], див. лему 2.3.

Твердження 1.13.1. *Припустимо, що функція $\varphi:\mathrm{Bor}\,U\rightarrow\mathbb{R}$ є q-квазіадитивною функцією множини. Тоді:*

1) функції $\overline{\varphi'}$ і $\underline{\varphi'}$ є борелевими;

2) для майже всіх $x\in U$ виконується нерівність

$$\overline{\varphi'}(x)\leqslant q\cdot\underline{\varphi'}(x)<\infty;$$

3) для кожної відкритої множини $V\subset U$ виконується нерівність

$$\int\limits_{V}\underline{\varphi'}(x)dm(x)\leqslant q\cdot\varphi(V).$$

Введемо в розгляд наступну допоміжну конструкцію. Розглянемо функцію множин, визначену над алгеброю борелевих множин E в D за наступним правилом:

$$\Phi(E) = m\,(fE)\ . \tag{1.98}$$

Зауваження 1.13.3. Оскільки f є неперервним і дискретним відображенням, то множина fE є борелевою для кожної борелевої множини $E \subset D$, див. наслідок 5, розд. 3, § 39, пункт VII в [69]. Отже, наведене вище означення величини $\Phi(E)$ є коректним.

Зауваження 1.13.4. Зауважимо, що функція $\Phi(E)$ є q-квазіадитивною функцією множин E в V з $q := N(f, V)$, де V — фіксована відкрита підмножина D, а N — функція кратності, див. співвідношення (1.95)—(1.96).

У такому випадку, відповідно до пункту 2) твердження 1.13.1, для майже всіх $x \in D$ будемо мати

$$\varphi(x) := \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\Phi(B(x, \varepsilon))}{\Omega_n \varepsilon^n} < \infty\,, \tag{1.99}$$

де $B(x, \varepsilon)$ — куля в $\mathbb{R}^n$ з центром у точці $x \in D$ радіуса $\varepsilon > 0$.

1.14. Про Q-відображення

Останнім часом також активно вивчаються Q-відображення та кільцеві Q-відображення, що допускають розгалуження, див., наприклад, роботи [33, 146, 152–166, 345, 412, 420, 421], див. також монографію [167]. Вперше Q-відображення зустрічаються у роботі О. Мартіо, В. Рязанова, У. Сребро і Е. Якубова [345].

Нагадаемо, що кожне відображення з обмеженим спотворенням задовольняє нерівність Є.О. Полецького, див. теорему 1 §4 в [105].

Твердження 1.14.1. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Якщо $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відображення з обмеженим спотворенням, то*

$$M(f\Gamma) \leqslant K_1 \, M(\Gamma) \tag{1.100}$$

для довільної сім'ї Γ кривих γ в D, де K_1 — деяка додатна стала.

Означення 1.14.1. Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Припустимо, що $p > 1$ і $Q : D \to [0, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Відображення $f : D \to D'$ будемо називати *Q-відображенням відносно p-модуля*, якщо нерівність (1.29) виконується для будь-якої сім'ї Γ кривих в D і будь-якої допустимої функції ρ для Γ.

Зауважимо, що означення Q-відображення при $p = n$ із роботи [345] дещо відрізняється від наведеного тут, а саме: Q-відображення в сенсі роботи [345] припускають виконання не однієї, а двох нерівностей, одна з яких збігається з (1.29).

Із роботи [146] випливає, що відкриті дискретні Q-відображення при локально інтегровній функції Q диференційовні м.с., абсолютно неперервні на лініях та належать до класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$. У подальшому ці результати перенесені на випадок $p > n - 1$, див. роботу [412]. Також при $p = n$ у роботі [146] отримано теорему про N^{-1}-властивість та, як наслідок, отримано теорему про невиродженість якобіана Q-відображень, що узагальнює відомий результат Б. Боярського та Т. Іванця [221] для відображень з обмеженим спотворенням. У роботі [345] встановлено нерівність вигляду (1.29) при $p = n$ для відображень зі скінченним спотворенням довжини, а в роботі [413] — при $p > 1$.

Означення 1.14.2. Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $p > 1$ і $Q : D \to [0, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ є *кільцевим Q-відображенням відносно p-модуля у точці $x_0 \in D$*, якщо співвідношення

$$M_p \left(\Delta \left(fS_1, fS_2, fD\right)\right) \leqslant \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x) \cdot \eta^p(|x - x_0|) \, dm(x) \tag{1.101}$$

виконується для будь-якого кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \mathrm{dist}\,(x_0\,, \partial D)$ і кожної вимірної функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\,dr \geqslant 1\,. \tag{1.102}$$

Означення 1.14.3. Будемо говорити, що відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ є *кільцевим* Q*-відображенням відносно* p*-модуля в області* D, якщо умова (6.1) виконується для всіх точок $x_0 \in D$.

Наступну теорему у випадку $p > n-1$ можна знайти у роботі [412] як теорему 1 та у випадку $p = n$ як теорему 3.1 в [146].

Теорема 1.14.1. (Про диференційовність майже всюди). *Нехай* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *— відкрите дискретне кільцеве* Q*-відображення відносно* p*-модуля з* $Q \in L^1_{\mathrm{loc}}$ *і* $p > n-1$. *Тоді* f *є диференційовним м.с. в* D.

При дослідженні відкритих дискретних відображень з розгалуженням (відображень, які не є гомеоморфізмами) ключову роль відіграють так звані підняття кривих. Наступні важливі означення можна знайти в [382], див. п. 3 розд. II.

Означення 1.14.4. Нехай $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, — відображення, $\beta : [a,\, b) \to \mathbb{R}^n$ — деяка крива і нехай $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Крива $\alpha : [a,\, c) \to D$ називається *максимальним підняттям* кривої β за відображенням f з початком у точці x, якщо

(i) $\alpha(a) = x$;

(ii) $f \circ \alpha = \beta|_{[a,\, c)}$;

(iii) якщо $c < c' \leqslant b$, то не існує кривої $\alpha' : [a,\, c') \to D$ такої, що $\alpha = \alpha'|_{[a,\, c)}$ і $f \circ \alpha' = \beta|_{[a,\, c')}$.

Аналогічно можна визначити максимальне підняття з кінцем в даній точці.

Виконується наступне твердження, див. наслідок 3.3 розділу II в [382].

Твердження 1.14.2. *Нехай* f *— відкрите дискретне відображення і* $x \in f^{-1}(\beta(a))$. *Тоді крива* $\beta : [a,\, b) \to \mathbb{R}^n$ *має максимальне підняття за* *відображенням* f *з початком у точці* x. *Аналогічно, якщо* f *— відкрите дискретне відображення і точка* $x \in f^{-1}(\beta(b))$, *то крива* $\beta : (a, b] \to \mathbb{R}^n$ *має максимальне підняття за відображенням* f *з кінцем у точці* x.

Наступне твердження можна знайти в монографії [382], див. твердження 10.2, розд. II.

Твердження 1.14.3. *Нехай* $p > 1$ *і* $\mathcal{E} = (A, C)$ *— довільний конденсатор в* $\mathbb{R}^n$ *і нехай* $\Gamma_{\mathcal{E}}$ *— сім'я всіх кривих виду* $\gamma : [a, b) \to A$ *таких, що* $\gamma(a) \in C$ *і* $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \varnothing$ *для довільного компакта* $F \subset A$. *Тоді*

$$\mathrm{cap_p}\,\mathcal{E} = M_p(\Gamma_{\mathcal{E}})\,. \tag{1.103}$$

Зауваження 1.14.1. Висновок твердження 1.14.3 залишається справедливим для конденсаторів із $\overline{\mathbb{R}^n}$, див. в [382] зауваження 10.8, розд. II.

Інакше кажучи, для конденсатора $\mathcal{E} = (A, C)$ сім'я $\Gamma_{\mathcal{E}}$ складається з тих та тільки тих кривих, які мають початок в C, лежать в A і, в той же час, цілком не лежать ні в одному фіксованому компакті всередині A. У випадку обмеженої множини A такі криві повинні "підходити" до межі A, однак, не повинні бути спрямлюваними і, взагалі кажучи, до чогось збігатися. Аналогічно можна визначити поняття конденсатора в $\overline{\mathbb{R}^n}$, а саме, $\mathcal{E} = (A, C)$ — конденсатор в $\overline{\mathbb{R}^n}$, якщо C — компактна власна підмножина відкритої множини $A \subset \overline{\mathbb{R}^n}$. В цьому випадку, ємність конденсатора E, визначається співвідношенням (1.103).

Висновки

У цьому розділі наведено короткий огляд літератури. Сформульовано означення, теореми та твердження, необхідні для викладу і доведення основних результатів дисертації та найбільш близькі до її теми:

1) наведено основні відомості, що стосуються p-модуля сім'ї кривих і p-ємності конденсатора;

2) наведено огляд літератури з теорії квазірегулярних та квазіконформних відображень;

3) наведено означення та загальні факти, що стосуються теорії Q-гомеоморфізмів, кільцевих Q-гомеоморфізмів та нижніх Q-гомеоморфізмів, а також вказано їх взаємозв'язок;

4) наведено означення класів Соболєва та Орліча–Соболєва;

5) наведено означення відображень зі скінченним спотворенням та вказано на їх зв'язок з рівнянням Бельтрамі, що допускає виродження;

6) сформульовано ряд теорем про існування регулярних розв'язків рівнянь Бельтрамі;

7) наведено основні відомості, що стосуються Q-відображень з розгалуженням.

РОЗДІЛ 2

ВЛАСТИВОСТІ КІЛЬЦЕВИХ Q-ГОМЕОМОРФіЗМІВ

У даному розділі досліджено властивості кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля. Результати цього розділу опубліковано в роботах [52, 133, 135, 136, 261–267, 409, 410].

2.1. Кільцеві Q-гомеоморфізми відносно p-модуля

В цьому підрозділі наведено означення і приклади Q-гомеоморфізмів і кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля.

Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n\,, n\geqslant 2\,,\ p>1\,,$ і нехай $Q:D\to\,[0\,,\infty]$ — вимірна за Лебегом функція.

Означення 2.1.1. Гомеоморфізм $f\,:\,D\,\to\,D'$ будемо називати *Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля*, якщо для будь-якої сім'ї Γ кривих у D і довільної допустимої функції ρ для Γ виконується умова

$$M_p(f\Gamma)\leqslant\int\limits_D Q(x)\,\rho^p(x)\,dm(x)\,. \tag{2.1}$$

Зауважимо, що при $p\neq n$ навіть лінійні відображення $f(x)=\lambda x,\ \lambda\neq 0\,,$ не зберігають p-мудуль сімей кривих, оскільки $M_p(f\Gamma)\,=\,\lambda^{n-p}M_p(\Gamma)\,,$ див. теорему 8.2 в [436].

Припустимо, що $n-1<p<n$ та гомеоморфізм $f:D\to\mathbb{R}^n$ задовольняє умову

$$M_p(f\Gamma)\ \leqslant\ K\,M_p(\Gamma) \tag{2.2}$$

для довільної сім'ї Γ кривих γ в області D. Тоді із відомої теореми Герінга випливає, що такі відображення є локально ліпшицеві, тобто

$$\limsup_{x\to x_0}\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|}\leqslant K^{\frac{1}{n-p}} \tag{2.3}$$

див. теорему 2 в [251]. Якщо функція Q у нерівності (2.1) задовольняє умову $Q(x)\leqslant K$ м.с., то ми приходимо до нерівності (2.2), тобто в цьому випадку відображення f є локально ліпшицевим.

Нехай $x_0\in\mathbb{R}^n$. Оберемо довільні r_1 і r_2, для яких виконується умова $0<r_1<r_2<\infty$, і покладемо

$$\mathbb{A}=\mathbb{A}(x_0,r_1,r_2)=\{x\in\mathbb{R}^n : r_1<|x-x_0|<r_2\}, \tag{2.4}$$

$$S_i=S(x_0,r_i)=\{x\in\mathbb{R}^n : |x-x_0|=r_i\}\,,\quad i=1,2. \tag{2.5}$$

Означення 2.1.2. Будемо говорити, що гомеоморфізм $f:D\to D'$ є *кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля в точці* $x_0\in D$, $p>1$, якщо співвідношення

$$M_p\left(\Delta\left(fS_1,fS_2;fD\right)\right)\leqslant\int\limits_{\mathbb{A}}Q(x)\cdot\eta^p(|x-x_0|)\,dm(x) \tag{2.6}$$

виконується для будь-якого кільця $\mathbb{A}=\mathbb{A}(x_0,r_1,r_2)$, $0<r_1<r_2<d_0=\operatorname{dist}(x_0\,,\partial D)$ і кожної вимірної функції $\eta:(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr\ \geqslant\ 1\,. \tag{2.7}$$

Означення 2.1.3. Говорять, що гомеоморфізм $f:D\to D'$ є *кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля в області* D, якщо умова (2.6) виконується для будь-якого $x_0\in D$.

Приклад 2.1.1. Довільне конформне відображення $f:D\to\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, є Q-гомеоморфізмом при $Q\equiv 1$. Зокрема, тотожне відображення і відображення $f(x)=\alpha\cdot x$ є 1-гомеоморфізмами при довільному $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Приклад 2.1.2. Довільне квазіконформне відображення є Q-гомеоморфізмом при деякому Q, яке дорівнює певній сталій K. Це випливає з нерівності (1.25).

Приклад 2.1.3. Довільне невироджене афінне перетворення є квазіконформним і, отже, є Q-гомеоморфізмом з деякою сталою Q.

Приклад 2.1.4. Кожний гомеоморфізм $f \in W^{1,n}_{\rm loc}(D)$ такий, що $f^{-1} \in W^{1,n}_{\rm loc}(D)$ є Q-гомеоморфізмом при $Q = K_I(x,f)$, де $K_I(x,f)$ – внутрішня дилатація відображення f в точці x, див. твердження 1.6.1 або теореми 8.1 і 8.6 в [342].

Приклад 2.1.5. Зокрема, кожний гомеоморфізм $f \in W^{1,n}_{\rm loc}$, внутрішня дилатація якого задовольняє умову $K_I(x,f) \in L^1_{\rm loc}$, є Q-гомеоморфізмом при $Q = K_I(x,f)$, див. твердження 1.6.1.

Приклад 2.1.6. Нехай $n \geqslant 2$ і $\alpha > 1$. Покажемо, що відображення $f : \mathbb{B}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$, яке визначене за допомогою співвідношення

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} \exp\left\{\frac{1}{\alpha} \ln^{\alpha}\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}, & x \neq 0\,, \\ 0\,, & x = 0\,, \end{cases} \tag{2.8}$$

є Q-гомеоморфізмом при $Q(x) = \ln^{\alpha-1}\left(\frac{1}{|x|}\right)$.

Справді, оскільки модуль сім'ї кривих, які проходять через фіксовану точку, дорівнює нулю, див. приклад 1.1.2, для нашої мети достатньо встановити співвідношення (1.28) лише для сімей кривих Γ в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Зауважимо, що f є гомеоморфізмом класу C^1 в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, звідки випливає, що $f \in W^{1,n}_{\rm loc}(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})$. Обчислимо так звані дотичні і радіальні розтяги в кожній точці $x_0 \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, користуючись для цього правилами (1.1.20) і (1.1.23) в [167] (див. твердження 1.1.1 на с. 19). Покладемо

$$\delta_T(x_0) = \frac{|f(x_0)|}{|x_0|}\,, \tag{2.9}$$

$$\delta_r(x_0) = \left|\frac{\partial |f(x_0)|}{\partial |x_0|}\right|\,, \tag{2.10}$$

де, як і вище, $|x_0| = r$. За співвідношеннями (2.9) і (2.10) отримаємо, що

$$\delta_T(x) = \frac{\exp\left\{\frac{1}{\alpha}\ln^{\alpha}\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}}{|x|}\,, \tag{2.11}$$

$$\delta_r(x) = \frac{\exp\left\{\frac{1}{\alpha}\ln^{\alpha}\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}\cdot\ln^{\alpha-1}\left(\frac{1}{|x|}\right)}{|x|} = \delta_T\ln^{\alpha-1}\left(\frac{1}{|x|}\right)\,, \tag{2.12}$$

звідки випливає, що $\delta_r > \delta_T$. Отже, $\lambda_1(x) = \ldots = \lambda_{n-1}(x) = \delta_T(x)$ і $\lambda_n(x) = \delta_r(x)$, де δ_T і δ_r визначені в (2.11) і (2.12), відповідно. За формулами (1.1.13) і (1.1.15) в [167, с. 16] отримаємо, що

$$|J(x,f)| = (\delta_T)^{n-1}\cdot\delta_r = (\delta_T)^n\ln^{\alpha-1}\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

і

$$K_I(x,f) = \frac{(\delta_T)^{n-1}\cdot\delta_r}{(\delta_T)^n} = \ln^{\alpha-1}\left(\frac{1}{|x|}\right)\,.$$

Зокрема, з наведених вище співвідношень випливає, що $K_I(x,f)$ є локально обмеженою в $\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$. Отже, f є локально квазіконформним у $\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$ (див. означення 1.5.2 та зауваження 1.11.2). За твердженням прикладу 2.1.5 відображення f є Q-гомеоморфізмом при $Q(x) = \ln^{\alpha-1}\frac{1}{|x|}$, що і потрібно було встановити.

Приклад 2.1.7. Відображення $g : \mathbb{B}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$, визначене за правилом

$$g(x) = \frac{x}{|x|}\ln\frac{1}{|x|}\,,$$

є Q-гомеоморфізмом при $Q(x) = \ln^{n-1}\left(\frac{1}{|x|}\right)$.

Справді, за логікою, наведеною вище, отримаємо

$$\delta_\tau = \frac{\ln\frac{1}{|x|}}{|x|}\,, \qquad \delta_r = \frac{1}{|x|}\,, \tag{2.13}$$

звідки випливає, що $\delta_\tau > \delta_r$ і, отже,

$$K_I(x,\,g) = \frac{\delta_\tau^{n-1}\delta_r}{\delta_r^n} = \ln^{n-1}\left(\frac{1}{|x|}\right)\,. \tag{2.14}$$

Залишилося зауважити, що згідно прикладу 2.1.5 відображення g є Q-гомеоморфізмом, де функцію $Q = K_I(x,g)$ визначено (1.90).

Зауваження 2.1.1. За означенням, кожний Q-гомеоморфізм відносно p-модуля є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля, тому кожне відображення з прикладів 2.1.1–2.1.7 є кільцевим Q-гомеоморфізмом.

2.2. Характеризація кільцевих Q-гомеоморфізмів

У цьому підрозділі встановлено критерій належності класу кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля.

Нехай D — область в $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2$. Припустимо, що $Q : D \to [0, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Для довільного числа $r > 0$ і $x_0 \in D$ позначимо

$$q_{x_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{S(x_0,r)} Q(x) d\mathcal{A}\,.$$

Іншими словами, $q_{x_0}(r)$ — середнє значення функції Q на сфері

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}\,,$$

$d\mathcal{A}$ — елемент площі поверхні.

Зауваження 2.2.1. Нижче ми дотримуємося наступних стандартних домовленостей: $a/\infty = 0$ при $a \neq \infty$, $a/0 = \infty$ при $a > 0$ і $0 \cdot \infty = 0$, див., напр., [131, c. 6].

Справедлива наступна лема.

Лема 2.2.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2$. Припустимо, що $Q : D \to [0, \infty]$ — вимірна функція, $q_{x_0}(r)$ — середнє значення Q на сфері $S(x_0, r)$. Покладемо*

$$I \;=\; I(x_0, r_1, r_2) \;=\; \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)} \tag{2.15}$$

і $S_j=\{x\in\mathbb{R}^n : |x-x_0|=r_j\}$, $j=1,2$, *де* $x_0\in D$ *і* $0<r_1<r_2<d_0=\mathrm{dist}\,(x_0,\partial D)$. *Тоді для будь-якого кільцевого* Q*-гомеоморфізму* $f : D\to D'$ *відносно* p*-модуля в точці* x_0 *виконується оцінка*

$$M_p\left(\Delta\left(fS_1,fS_2,f\mathbb{A}\right)\right)\ \leqslant\ \frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}\,, \tag{2.16}$$

де $\mathbb{A}=\mathbb{A}(x_0,r_1,r_2)$ *і* ω_{n-1} *— площа одиничної сфери в* $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Без обмеження загальності, можна вважати, що $I\neq 0$, оскільки в протилежному випадку виконується (2.16). Можна також вважати, що $I\neq\infty$, оскільки в протилежному випадку в (2.16) ми можемо розглянути $Q(x)+\delta$ з як завгодно малим $\delta>0$ замість $Q(x)$, після чого застосуємо тут граничний перехід при $\delta\to 0$.

Нехай $I\neq\infty$. Тоді $q_{x_0}(r)\neq 0$ майже скрізь на $(r_1\,,r_2)$. Покладемо

$$\psi(t)=\frac{1}{t^{\frac{n-1}{p-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\,.$$

Зауважимо, що

$$\int\limits_{\mathbb{A}} Q(x)\,\psi^p(|x-x_0|)\;dm(x)\ =\ \omega_{n-1}\,I\,, \tag{2.17}$$

де $\mathbb{A}\ =\ \mathbb{A}(x_0,r_1,r_2)$.

Нехай $\Gamma=\Delta(S_1,S_2,\mathbb{A})$ — сім'я всіх кривих, що з'єднують сфери S_1 і S_2 у кільці $\mathbb{A}$. Тоді функція

$$\eta(r)=\begin{cases}\psi(t)/I, & r\in(r_1,r_2)\;,\\ \quad 0\;, & r\notin(r_1,r_2)\end{cases}$$

задовольняє умову (2.7) і, за співвідношенням (2.17), для будь-якого кільцевого Q-гомеоморфізму відносно p-модуля будемо мати, що

$$M_p(f\Gamma)\ \leqslant\ \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x)\,\eta^p(|x-x_0|)\;dm(x)\ =\ \frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}\,.$$

Лему доведено.

Наступна лема говорить про те, що для кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля нерівність (2.16), взагалі кажучи, не може бути покращена.

Лема 2.2.2. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$, $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$, $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)$ і нехай $Q : D \to [0, \infty]$ — вимірна функція. Покладемо*

$$\eta_0(r) = \begin{cases} \frac{1}{Ir^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}, & r \in (r_1, r_2)\ , \\ \qquad 0\ , & r \notin (r_1, r_2)\ . \end{cases} \tag{2.18}$$

де $q_{x_0}(r)$ — середнє значення функції Q на сфері $S(x_0, r)$ і I — величина, визначена рівністю (2.15). Якщо $q_{x_0}(r) \neq \infty$ для майже всіх $r \in (0,\, d_0)$, то

$$\frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}} \;=\; \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x)\, \eta_0^p(|x - x_0|)\ dm(x) \;\leqslant\; \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x)\, \eta^p(|x - x_0|)\ dm(x) \tag{2.19}$$

для будь-якої вимірної функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\ dr \;= 1\,. \tag{2.20}$$

Доведення. Якщо $I = \infty$, то ліва частина співвідношення (2.19) дорівнює нулеві, тому дана нерівність є очевидною в цьому випадку. Якщо $I = 0$, то $q_{x_0}(r) = \infty$ для майже всіх $r \in (r_1\,, r_2)$ і обидві частини нерівності (2.19) дорівнюють нескінченності (що неможливо за умовами леми). Отже, можна вважати, що $0 < I < \infty$. Тоді з (2.18) і (2.20) випливає, що $q_{x_0}(r) \neq 0$ і $\eta(r) \neq \infty$ м.с. в інтервалі (r_1, r_2). Покладаючи

$$\lambda(r) \;=\; r^{\frac{n-1}{p-1}}\, q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)\, \eta(r)\ ,\ \ w(r) \;=\; \frac{1}{r^{\frac{n-1}{p-1}}\, q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}\,,$$

ми маємо, що

$$\eta(r) = \lambda(r)\, w(r) \ \text{ м.с. на } \ (r_1, r_2)$$

і

$$C\ :\ =\ \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x)\, \eta^p(|x - x_0|)\, dm(x) \;=\; \omega_{n-1} \int\limits_{r_1}^{r_2} \lambda^p(r)\, w(r)\ dr\ .$$

Застосуємо нерівність Ієнсена з вагою до опуклої функції $\varphi(t) = t^p$, заданої в інтервалі $\Omega = (r_1, r_2)$, з ймовірнісною мірою

$$\nu(E) = \frac{1}{I} \int\limits_E w(r)\, dr\,,$$

див., напр., теорему 2.6.2 в [374]. Отримаємо, що

$$\left(\fint \lambda^p(r) w(r)\, dr \right)^{1/p} \geqslant \fint \lambda(r) w(r)\, dr = \frac{1}{I}\,,$$

де ми також скористалися тим, що $\eta(r) = \lambda(r)w(r)$ задовольняє співвідношення (2.20). Звідси отримаємо

$$C \geqslant \frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}\,,$$

що і доводить справедливість (2.19). Лему доведено.

Наслідком лем 2.2.1, 2.2.2 є наступний критерій належності класу кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля при $p > 1$.

Теорема 2.2.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Припустимо, що $Q : D \to [0, \infty]$ — вимірна функція, така що $q_{x_0}(r) \neq \infty$ для майже всіх $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Гомеоморфізм $f : D \to D'$ є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля в точці $x_0 \in D$ тоді і тільки тоді, коли для довільних $0 < r_1 < r_2 < d_0$ виконується умова*

$$M_p(\Delta(fS_1, fS_2, f\mathbb{A})) \leqslant \frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}\,,$$

де $S_1 = S(x_0, r_1)$ і $S_2 = S(x_0, r_2)$, ω_{n-1} — площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$,

$$I = I(x_0, r_1, r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}\,,$$

$q_{x_0}(r)$ — середнє значення функції Q на сфері $S(x_0, r)$.

Зауваження 2.2.2. Відзначимо також, що інфімум праворуч у (2.6) досягається на функції

$$\eta_0(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{I r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}\,, & r \in (r_1, r_2)\,, \\ 0\,, & r \notin (r_1, r_2)\,. \end{cases}$$

Наслідок 2.2.1. *Зокрема, твердження теореми 2.2.1 залишається справедливим, якщо* $Q \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$.

2.3. Диференційовність майже скрізь кільцевих Q-гомеоморфізмів

Даний підрозділ присвячено доведенню диференційовності майже скрізь кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля у випадку $p > n-1$.

Нагадаємо наступне означення.

Означення 2.3.1. Нехай $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathrm{Int}\, A$, $f : A \to \mathbb{R}^n$. Відображення f будемо називати *диференційовним у точці* x_0, якщо для будь-яких $\Delta x \in \mathbb{R}^n$, таких що $(x_0 + \Delta x) \in A$, і деякого лінійного перетворення $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ виконується співвідношення

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = L\Delta x + \alpha(x_0, \Delta x) \cdot |\Delta x| \,,$$

де $\alpha(x_0, \Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. В цьому випадку, оператор L називається *матрицею Якобі* відображення f в точці x_0 і позначається символом $f'(x_0)$, а елемент матриці Якобі $f'(x_0)$, який знаходиться в її i-му рядку і j-му стовпчику, позначають символом $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$.

Нижче наведено добре відомий критерій Радемахера–Степанова про диференційовність майже скрізь, див., напр., [131], с. 311.

Твердження 2.3.1. Нехай $E \subset \mathbb{R}^n$ — вимірна за Лебегом множина і нехай $f : E \to \mathbb{R}^n$ — вимірна вектор-функція. Тоді f має повний диференціал на E майже скрізь тоді і тільки тоді, коли для майже всіх $x \in E$ виконується умова

$$\limsup_{\xi \to x} \frac{|f(\xi) - f(x)|}{|\xi - x|} < \infty \,. \tag{2.21}$$

Означення 2.3.2. Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Припустимо, що $Q : D \to [0, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що функція Q задовольняє (p, λ)-умову в точці $x_0 \in D$, якщо існує стала $\lambda = \lambda(x_0) > 1$ така, що

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\frac{n-p}{p-1}} \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} > 0\,, \tag{2.22}$$

де $q_{x_0}(t)$ — середнє значення Q на сфері $S(x_0, t)$.

Має місце наступне твердження.

Твердження 2.3.2. *Якщо в точці $x_0 \in D$ виконується співвідношення*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \ \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\, dm(x) \ < \ \infty\,, \tag{2.23}$$

то функція Q задовольняє (p, λ)-умову в точці x_0.

Доведення. Нехай функція Q задовольняє умову (2.23). Покладемо

$$\eta(r) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda(\varepsilon-1)}\,, & r \in (\varepsilon, \lambda\varepsilon)\,, \\ 0\,, & r \notin (\varepsilon, \lambda\varepsilon)\,. \end{cases}$$

Легко бачити, що функція η задовольняє співвідношення (2.20). Тоді з леми 2.2.2 випливає оцінка

$$\frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}\right)^{p-1}} \leqslant \frac{\Omega_n \lambda^n}{(\lambda-1)^p}\, \varepsilon^{n-p} \fint_{B(x_0,\lambda\varepsilon)} Q(x)\, dm(x)\,.$$

Звідси отримаємо

$$\varepsilon^{\frac{n-p}{p-1}} \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \geqslant \left(\frac{C_0}{\fint_{B(x_0,\lambda\varepsilon)} Q(x)\, dm(x)}\right)^{\frac{1}{p-1}}\,,$$

де $C_0 = n(\lambda-1)^p \lambda^{-n}$.

Переходячи до нижньої границі при $\varepsilon \to 0$ і враховуючи умову (2.23), отримаємо

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\frac{n-p}{p-1}} \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \geqslant \left(\frac{C_0}{\limsup\limits_{\varepsilon \to 0} \fint_{B(x_0,\lambda\varepsilon)} Q(x)\, dm(x)}\right)^{\frac{1}{p-1}} > 0$$

Отже, функція Q задовольняє (p,λ)-умову в точці x_0. Твердження 2.3.2 доведено.

З твердження 2.3.2 випливає наступний результат.

Наслідок 2.3.1. *Нехай $x_0 \in D$ — точка Лебега функції $Q : D \to [0,\infty]$. Тоді Q задовольняє (p,λ)-умову в точці $x_0 \in D$.*

З теореми Лебега і наслідку 2.3.1 випливає наступне твердження.

Наслідок 2.3.2. *Довільна локально інтегровна функція $Q : D \to [0, \infty]$ задовольняє (p,λ)-умову в майже всіх точках області D.*

Нижче наведено теорему про диференційовність майже скрізь кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля.

Теорема 2.3.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Припустимо, що $f : D \to D'$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля, $p > n-1$. Якщо функція Q задовольняє (p,λ)-умову майже скрізь у D, то гомеоморфізм f є диференційовним майже скрізь у D.*

Доведення. Розглянемо функцію множини, визначену над алгеброю борелевих множин E у D за правилом $\Phi(E) = m(f(E))$. За теоремою про диференційовність невід'ємних субадитивних функцій множин, див., напр., III.2.4 у [368], для майже всіх $x \in D$ існує скінченна границя

$$\mu_f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Phi(B(x,\varepsilon))}{m\left(B(x,\varepsilon)\right)},$$

де $B(x,\varepsilon)$ — куля в $\mathbb{R}^n$ з центром в точці $x \in D$ радіуса $\varepsilon > 0$.

Розглянемо сферичне кільце з центром в точці $x \in D$

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}(x,\varepsilon,\lambda\varepsilon) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ \varepsilon < |\xi - x| < \lambda\varepsilon\}$$

з довільним $\varepsilon \in \left(0, \frac{\mathrm{dist}(x,\partial D)}{\lambda}\right)$. Нехай (A,C) — конденсатор вигляду

$$A = B(x,\lambda\varepsilon),\ C = \overline{B(x,\varepsilon)}.$$

Тоді (fA, fC) — кільцевий конденсатор в D'. За твердженням 1.1.4 отримаємо, що

$$\mathrm{cap}_p\left(fA, fC\right) = M_p(\Delta(fS_1, fS_2, f\mathbb{A}))\,, \tag{2.24}$$

де $S_1 = S(x, \varepsilon)$ і $S_2 = S(x, \lambda\varepsilon)$.

За лемою 2.2.1, враховуючи рівність (2.24), маємо

$$\mathrm{cap}_p\,(fA, fC) \leqslant \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_x^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{p-1}}\,, \tag{2.25}$$

де $q_x(t)$ — середнє значення Q на сфері $S(x, t)$.

З іншого боку, за твердженням 1.1.6 будемо мати, що

$$\mathrm{cap}_p\,\left(fB(x, \lambda\varepsilon), \overline{fB(x, \varepsilon)}\right) \geqslant \left(\nu_1 \frac{d^p\left(\overline{fB(x, \varepsilon)}\right)}{m^{1-n+p}(fB(x_0, \lambda\varepsilon))}\right)^{\frac{1}{n-1}}\,, \tag{2.26}$$

де ν_1 — додатна стала, яка залежить тільки від розмірності простору n і p.

Поєднуючи (2.25) і (2.26), отримаємо, що

$$\left(\nu_1 \frac{d^p\left(\overline{fB(x, \varepsilon)}\right)}{m^{1-n+p}(fB(x_0, \lambda\varepsilon))}\right)^{\frac{1}{n-1}} \leqslant \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_x^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{p-1}}\,,$$

де $q_x(t)$ — середнє значення Q на сфері $S(x, t)$.

Отже, отримаємо

$$\frac{d\left(\overline{fB(x, \varepsilon)}\right)}{\varepsilon} \leqslant \nu_2 \left(\frac{m(fB(x, \lambda\varepsilon))}{m(B(x, \lambda\varepsilon))}\right)^{i_1} \left(\frac{\varepsilon^{\frac{p-n}{p-1}}}{\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_x^{\frac{1}{p-1}}(t)}}\right)^{i_2}\,,$$

де $i_1 = \frac{1-n+p}{p}$ і $i_2 = \frac{(p-1)(n-1)}{p}$, ν_2 — додатна стала, що залежить тільки від n, p і λ. Зауважимо, що з умови (2.22) випливає співвідношення

$$\Theta(x) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon^{\frac{n-p}{p-1}}}{\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_x^{\frac{1}{p-1}}(t)}} < \infty\,,$$

де $q_x(t)$ — середнє значення Q на сфері $S(x, t)$. Для майже всіх $x \in D$ маємо

$$\limsup_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{d\left(\overline{fB(x,\varepsilon)}\right)}{\varepsilon}\leqslant \nu_0\,\mu_f^{i_1}(x)\,\Theta^{i_2}(x)<\infty\,,$$

де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n, p і λ.

Отже, за твердженням 2.3.1 гомеоморфізм f є диференційовним майже скрізь у D. Теорему доведено.

З теореми 2.3.1 і наслідку 2.3.2 отримаємо наступне твердження.

Наслідок 2.3.3. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$. Припустимо, що $f:D\to D'$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля, $p>n-1$. Якщо $Q\in L^1_{\rm loc}(D)$, то гомеоморфізм f є диференційовним майже скрізь у D.*

2.4. Оцінки міри образу кулі при кільцевих Q-гомеоморфізмах

У цьому підрозділі отримано ряд оцінок міри образу кулі при кільцевих Q-гомеоморфізмах відносно p-модуля, $1<p\leqslant n$.

Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $f:D\to D'$ – гомеоморфізм і $x_0\in D$. Покладемо

$$\Phi(t):=m\left(fB(x_0,t)\right)\,,$$

де $t\in(0,d_0)$, $d_0={\rm dist}(x_0,\partial D)$ і $B(x_0,t)=\{x\in\mathbb{R}^n:\,|x-x_0|<t\}$.

Справедливе наступне твердження.

Лема 2.4.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$. Припустимо, що $f:D\to D'$ — кільцевий Q-гомеоморфізм в точці $x_0\in D$ відносно p-модуля, $p>1$. Тоді для майже всіх $t\in(0,d_0), d_0={\rm dist}(x_0,\partial D)$ виконується оцінка*

$$\frac{n\Omega_n^{\frac{p-n}{n(p-1)}}}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\,q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\leqslant\frac{\Phi'(t)}{\Phi^{\frac{p(n-1)}{n(p-1)}}(t)}\,,\qquad(2.27)$$

де Ω_n — об'єм одиничної кулі в $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Розглянемо сферичне кільце

$$\mathbb{A}=\{x\in\mathbb{R}^n: t<|x-x_0|<t+\triangle t\}\,,$$

де $t+\Delta t<d_0=\operatorname{dist}(x_0,\partial D)$. Нехай (A,C) — конденсатор, і

$$A=B(x_0,t+\triangle t)=\,\{x\in\mathbb{R}^n:\,|x-x_0|<t+\triangle t\}$$

і $C=\overline{B(x_0,t)}=\{x\in\mathbb{R}^n:\ |x-x_0|\leqslant t\}$. Тоді (fA,fC) — кільцевий конденсатор в D' і за твердженням 1.1.4 маємо

$$\operatorname{cap}_p(fA,fC)=M_p(\triangle(\partial fA,\partial fC;f\mathbb{A})). \tag{2.28}$$

За твердженням 1.1.5 отримаємо

$$\operatorname{cap}_p(fA,fC)\geqslant\frac{(\inf m_{n-1}\,\sigma)^p}{m\,(fA\setminus fC)^{p-1}}\,. \tag{2.29}$$

Тут $m_{n-1}\,\sigma$ позначає $(n-1)$-вимірну міру Лебега C^{∞}-многовиду σ, який є межею обмеженої відкритої множини U, яка містить fC і міститься разом зі своїм замиканням $\overline{U}$ в fA, а точна нижня межа береться по всіх таких σ.

З іншого боку, за лемою 2.2.1 і рівністю (2.28) маємо

$$\operatorname{cap}_p(fA,fC)\leqslant\frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}}\,q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(s)}\right)^{p-1}}\,, \tag{2.30}$$

де $q_{x_0}(s)$ — середнє значення функції Q на сфері $S(x_0,s)$.

Поєднуючи нерівності (2.29) і (2.30), отримуємо

$$\frac{(\inf m_{n-1}\,\sigma)^p}{(m\,(fA\setminus fC))^{p-1}}\leqslant\frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}}\,q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(s)}\right)^{p-1}}\,.$$

Далі, скориставшись ізопериметричною нерівністю, будемо мати

$$\inf m_{n-1}\,\sigma\geqslant n\,\Omega_n^{\frac{1}{n}}\,\left(m(fC)\right)^{\frac{n-1}{n}}\,.$$

Отже,

$$n\,\Omega_n^{\frac{1}{n}}\,\left(m(fC)\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \omega_{n-1}^{\frac{1}{p}}\left(\frac{m\,(fA\setminus fC)}{\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}}\,q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(s)}}\right)^{\frac{p-1}{p}}. \tag{2.31}$$

Покладаючи $\Phi(t) := m\,(fB(x_0,t))$, зі співвідношення (2.31) отримуємо

$$n\,\Omega_n^{\frac{1}{n}}\Phi^{\frac{n-1}{n}}(t) \leqslant \omega_{n-1}^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\frac{\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)}{\Delta t}}{\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}}\,q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(s)}}\right)^{\frac{p-1}{p}}. \tag{2.32}$$

Зауважимо, що оскільки f є гомеоморфізмом, то за лемою 2.2.1

$$\frac{1}{s^{\frac{n-1}{p-1}}\,q^{\frac{1}{p-1}}(s)} \in L^1_{\rm loc}(0,d_0),\ \ d_0 = {\rm dist}(x_0,\partial D)\,.$$

Спрямуємо тепер Δt до нуля у співвідношенні (2.32), скориставшись монотонним зростанням функції $\Phi(t)$ по $t\in(0,d_0)$ і рівністю $\omega_{n-1} = n\Omega_n$. В результаті отримаємо, що для майже всіх $t\in(0,d_0)$ існує $\Phi'(t)$, причому

$$\frac{n\Omega_n^{\frac{p-n}{n(p-1)}}}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\,q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \leqslant \frac{\Phi'(t)}{\Phi^{\frac{p(n-1)}{n(p-1)}}(t)}\,.$$

Лему доведено.

Одним з найважливіших результатів даного розділу є наступна лема.

Лема 2.4.2. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n, n\geqslant 2$. Припустимо, що $f: D\to D'$ — кільцевий Q-гомеоморфізм в точці $x_0\in D$ відносно p-модуля. Тоді при $1<p<n$ виконується оцінка*

$$\Phi(r_1) \leqslant \left(\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(r_2) + \Omega_n^{\frac{p-n}{n(p-1)}}\,\frac{n-p}{p-1}\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\,q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{-\frac{n(p-1)}{n-p}}, \tag{2.33}$$

а при $p=n$ — оцінка

$$\Phi(r_1) \leqslant \Phi(r_2)\,\exp\left\{-n\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\} \tag{2.34}$$

для всіх $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$, *де* $\Phi(t) = m\left(fB(x_0, t)\right)$ *і* Ω_n *– об'єм одиничної кулі в* $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Розглянемо нерівність (2.27) при $1 < p < n$. Зауважимо, що функція $g_p(t) = \frac{\Phi^{\epsilon}(t)}{\epsilon}$, $\epsilon = \frac{p-n}{n(p-1)}$ є неспадною. Проінтегруємо обидві частини нерівності по $t \in [r_1, r_2]$, враховуючи, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{\Phi'(t)}{\Phi^{\frac{p(n-1)}{n(p-1)}}(t)}\, dt = \int\limits_{r_1}^{r_2} g_p'(t)\, dt \leqslant g_p(r_2) - g_p(r_1) = \frac{\Phi^{\epsilon}(r_2) - \Phi^{\epsilon}(r_1)}{\epsilon}$$

див., напр., теорему IV. 7.4 в [131]. Отримаємо

$$\Omega_n^{\frac{p-n}{n(p-1)}} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\, q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \leqslant \frac{p-1}{p-n} \left(\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(r_2) - \Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(r_1)\right). \tag{2.35}$$

З нерівності (2.35) виходить, що

$$\Phi(r_1) \leqslant \left(\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(r_2) + \Omega_n^{\frac{p-n}{n(p-1)}}\, \frac{n-p}{p-1} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\, q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{-\frac{n(p-1)}{n-p}}.$$

Нерівність (2.33) доведено.

Залишилося розглянути випадок $p = n$. В цьому випадку нерівність (2.27) прийме вигляд:

$$\frac{n}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} \leqslant \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} \tag{2.36}$$

для м.в. $t \in (0, d_0)$.

Легко бачити, що функція $g_n(t) = \ln \Phi(t)$ є неспадною. Інтегруючи обидві частини нерівності (2.36) по $t \in [r_1, r_2]$, і, враховуючи, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} dt = \int\limits_{r_1}^{r_2} g_n'(t)\, dt \leqslant g_n(r_2) - g_n(r_1) = \ln \frac{\Phi(r_2)}{\Phi(r_1)}$$

(див., напр., теорему IV. 7.4 в [131]), отримаємо

$$n \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} \leqslant \ln \frac{\Phi(r_2)}{\Phi(r_1)}.$$

Отже, маємо:

$$\exp\left\{n\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}\leqslant\frac{\Phi(r_2)}{\Phi(r_1)},$$

а тому

$$\Phi(r_1)\leqslant\Phi(r_2)\cdot\exp\left\{-n\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}\,,$$

що і приводить нас до нерівності (2.34) . Лему доведено.

Безпосередньо з лем 2.4.2 і 2.2.2 отримаємо таке твердження.

Лема 2.4.3. *Нехай* D *і* D' *— області в* $\mathbb{R}^n$ *. Припустимо, що* $f:D\to D'$ *— кільцевий* Q *-гомеоморфізм у точці* $x_0\in D$ *відносно* p *-модуля і* $q_{x_0}(r)\neq\infty$ *для м.в.* $r\in(0,d_0)$ *,* $d_0=\mathrm{dist}(x_0,\partial D)$ *. Тоді при* $1<p<n$ *виконується оцінка*

$$\Phi(r_1)\leqslant\left(\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(r_2)+\ \alpha_{n,p}\left(\int\limits_{\mathbb{A}}Q(x)\eta^p(|x-x_0|)\ dm(x)\right)^{\frac{1}{1-p}}\right)^{-\frac{n(p-1)}{n-p}}\,,\qquad(2.37)$$

де $\alpha_{n,p}=\frac{\Omega_n^{\frac{p}{n(p-1)}}n^{\frac{1}{p-1}}(n-p)}{p-1}$ *, а при* $p=n$ *— оцінка*

$$\Phi(r_1)\leqslant\Phi(r_2)\ \exp\left\{-n^{\frac{n}{n-1}}\Omega_n^{\frac{1}{n-1}}\left(\int\limits_{\mathbb{A}}Q(x)\eta^n(|x-x_0|)\ dm(x)\right)^{\frac{1}{1-n}}\right\}\qquad(2.38)$$

для будь-якої вимірної функції $\eta:(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ *такої, що*

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\ dr\ =1\,,\qquad(2.39)$$

де $\Phi(t)=m\left(fB(x_0,t)\right)$ *і* Ω_n *— об'єм одиничної кулі в* $\mathbb{R}^n$ *.*

Справедлива наступна лема.

Лема 2.4.4. *Нехай* D *і* D' *— області в* $\mathbb{R}^n$ *,* $n\geqslant 2$ *. Припустимо, що* $f:D\to D'$ *— кільцевий* Q *-гомеоморфізм у точці* $x_0\in D$ *відносно* p *-модуля.*

Нехай $q_{x_0}(r) \neq \infty$ *для м.в.* $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$ *і, крім того, для деякого числа* $c > 0$ *виконується умова*

$$\int\limits_{r_1<|x-x_0|<r_2} Q(x)\,\psi^p(|x-x_0|)\,dm(x) \leqslant cJ^{\alpha}(r_1,r_2), \quad \forall \quad 0<r_1<r_2<d_0\,,$$

де $0 \leqslant \alpha \leqslant p$ *і* $\psi(t)$ *— невід'ємна вимірна за Лебегом функція на* $(0,\infty)$ *така, що*

$$0 < J(r_1,r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \psi(t)\,dt < \infty \quad \forall \quad 0<r_1<r_2<d_0\,.$$

Тоді при $1<p<n$ *виконується оцінка*

$$\Phi(r_1) \leqslant \left(\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(r_2) + n^{\frac{n-p}{n(p-1)}}\frac{n-p}{p-1}\,c^{-\frac{1}{p-1}}\,\omega_{n-1}^{\frac{p}{n(p-1)}}\,J^{\frac{p-\alpha}{p-1}}(r_1,r_2)\right)^{-\frac{n(p-1)}{n-p}},$$

а при $p=n$ *— оцінка*

$$\Phi(r_1) \leqslant \Phi(r_2)\,\exp\left\{-n\left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}} J^{\frac{n-\alpha}{n-1}}(r_1,r_2)\right\},$$

де $\Phi(t) = m\,(fB(x_0,t))$ *і* Ω_n *— об'єм одиничної кулі в* $\mathbb{R}^n$.

Покладаючи в лемі 2.4.2 $D = D' = \mathbb{B}^n$, $x_0 = 0$ і враховуючи, що $m(f\mathbb{B}^n) \leqslant m(\mathbb{B}^n) = \Omega_n$, приходимо до наступної теореми.

Теорема 2.4.1. *Нехай* $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \geqslant 2$, *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля в точці* $x_0 = 0$. *Тоді при* $1<p<n$ *виконується оцінка*

$$m(f\overline{B}_r) \leqslant \Omega_n\left(1+\frac{n-p}{p-1}\int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\,q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{-\frac{n(p-1)}{n-p}}, \tag{2.40}$$

а при $p=n$ *— оцінка*

$$m(f\overline{B}_r) \leqslant \Omega_n\,\exp\left\{-n\int\limits_r^1 \frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}, \tag{2.41}$$

де $\overline{B}_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant r\}$, $q(t)$ *— середнє значення функції* Q *на сфері* $S_t = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = t\}$ *і* Ω_n *— об'єм одиничної кулі в* $\mathbb{R}^n$.

2.5. Аналог теореми Ікоми–Шварца

У цьому підрозділі наведено ряд результатів для кільцевих Q-гомеоморфізмів, що є аналогами відомої теореми Ікоми–Шварца, див. теорему 2 в [298].

Теорема 2.4.1, наведена в попередньому параграфі, дозволяє дослідити асимптотичну поведінку кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля в точці.

Теорема 2.5.1. *Нехай $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n, n\geqslant 2,$ – кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля в точці $x_0=0$, який задовольняє умову $f(0)=0$. Тоді при $1<p<n$ виконується оцінка*

$$\liminf_{x\to 0}\ |f(x)|\left(1+\frac{n-p}{p-1}\int\limits_{|x|}^{1}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\,q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{p-1}{n-p}}\leqslant 1, \tag{2.42}$$

а при $p=n$ – оцінка

$$\liminf_{x\to 0}\ |f(x)|\,\exp\left\{\int\limits_{|x|}^{1}\frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}\leqslant 1\,, \tag{2.43}$$

де $q(t)$ – середнє значення функції Q на сфері $S_t=\{x\in\mathbb{R}^n:\,|x|=t\}$.

Доведення. Покладемо $l_f(r)=\min\limits_{|x|=r}|f(x)|$. Враховуючи, що $f(0)=0$, ми отримаємо, що $\Omega_n\,l_f^n(r)\leqslant m(fB_r)$. Отже,

$$l_f(r)\leqslant\left(\frac{m(fB_r)}{\Omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

З нерівностей (2.40) і (2.41) випливає, що

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{R_p(|x|)}=\liminf_{r\to 0}\frac{l_f(r)}{R_p(r)}\leqslant\liminf_{r\to 0}\left(\frac{m(fB_r)}{\Omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{1}{R_p(r)}\leqslant 1\,,$$

де

$$R_p(r)=\begin{cases}\left(1+\frac{n-p}{p-1}\int\limits_{r}^{1}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\,q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{-\frac{p-1}{n-p}}, & \text{при } 1<p<n\,,\\ \exp\left\{-\int\limits_{r}^{1}\frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}, & \text{при } p=n\,.\end{cases}$$

Теорему доведено.

Нижче наведено "степеневий" аналог теореми Ікоми–Шварца для кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля при $1<p<n$.

Теорема 2.5.2. *Нехай $n\geqslant 2$ і $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля, який задовольняє умову $f(0)=0$. Припустимо, що існують числа $C_0>0$, $\beta\in(-\infty,n-p)$ і $r_0\in(0,1)$ такі, що для майже всіх $t\in(0\,,r_0)$ виконується умова*

$$q(t)\ \leqslant\ C_0\,t^{-\beta}\,. \tag{2.44}$$

Тоді при $1<p<n$ виконується оцінка

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{1-\frac{\beta}{n-p}}}\leqslant C_0^{\frac{1}{n-p}}\left(\frac{n-p-\beta}{n-p}\right)^{\frac{p-1}{n-p}}\,. \tag{2.45}$$

Доведення. Оцінимо інтеграл праворуч у (2.42) за допомогою умови (2.44). Будемо мати:

$$\int\limits_{|x|}^{1}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\ \geqslant\ C_0^{-\frac{1}{p-1}}\int\limits_{|x|}^{1}t^{-\frac{n-\beta-1}{p-1}}\,dt=\frac{C_0^{-\frac{1}{p-1}}(p-1)}{n-\beta-p}\left(|x|^{-\frac{n-\beta-p}{p-1}}-1\right)\,.$$

Звідси отримаємо наступну нерівність:

$$\left(1+\frac{n-p}{p-1}\int\limits_{|x|}^{1}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{p-1}{n-p}}\ \geqslant\ \frac{\left(A+(1-A)\,|x|^{\frac{n-p-\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{n-p}}}{|x|^{\frac{n-p-\beta}{n-p}}}\,, \tag{2.46}$$

де $A=C_0^{-\frac{1}{p-1}}\,\frac{n-p}{n-p-\beta}\,.$

Легко бачити, що

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{1-\frac{\beta}{n-p}}}=A_0\,\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{\frac{n+\beta-p}{n-p}}}\left(A+(1-A)\,|x|^{\frac{n+\beta-p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{n-p}}\,, \tag{2.47}$$

де $A_0=A^{-\frac{p-1}{n-p}}=C_0^{\frac{1}{n-p}}\,\left(\frac{n-p-\beta}{n-p}\right)^{\frac{p-1}{n-p}}\,.$

Поєднуючи нерівності (2.46) і (2.47), отримуємо

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{1-\frac{\beta}{n-p}}}\leqslant A_0\liminf_{x\to 0}|f(x)|\left(1+\frac{n-p}{p-1}\int\limits_{|x|}^{1}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{p-1}{n-p}}\leqslant A_0\,.$$

Теорему доведено.

Приклад 2.5.1. Припустимо, що $1<p<n$, $\beta\in(-\infty,n-p)$, $C_0\in(0,\infty)$ і $A=C_0^{-\frac{1}{p-1}}\cdot\frac{n-p}{n-p-\beta}$. Нехай $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$, де

$$f(x)=\begin{cases} x|x|^{-\frac{\beta}{n-p}}\left(A+(1-A)\,|x|^{\frac{n-p-\beta}{p-1}}\right)^{-\frac{p-1}{n-p}}\,, & x\neq 0\,,\\ 0\,, & x=0\,.\end{cases}$$

Покажемо, що відображення, визначене таким чином, є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля при $Q(x)=C_0\,|x|^{-\beta}$ у точці $x_0=0$. Очевидно, $q_{x_0}(t)=C_0\,t^{-\beta}$. Розглянемо кільце $\mathbb{A}=\mathbb{A}(0,r_1,r_2)$, $0<r_1<r_2<1$. Зауважимо, що відображення f перетворює кільце $\mathbb{A}(0,r_1,r_2)$ на кільце $\widetilde{\mathbb{A}}=\widetilde{\mathbb{A}}\,(0,\widetilde{r}_1,\widetilde{r}_2)$, де

$$\widetilde{r}_i=r_i^{\frac{n-p-\beta}{n-p}}\left(A+(1-A)\,r_i^{\frac{n-p-\beta}{p-1}}\right)^{-\frac{p-1}{n-p}},\quad i=1,2\,.$$

Позначимо через Γ сім'ю всіх кривих, що з'єднують сфери $S(0,r_1)$ і $S(0,r_2)$ у кільці $\mathbb{A}$. Тоді p-модуль сім'ї $f\Gamma$ може бути обчислений безпосередньо (див. співвідношення (1.3)), а саме,

$$M_p(f\Gamma)=\omega_{n-1}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left((\widetilde{r}_1)^{\frac{p-n}{p-1}}-(\widetilde{r}_2)^{\frac{p-n}{p-1}}\right)^{1-p}\,. \tag{2.48}$$

Підставляючи в (2.48) значення $\widetilde{r}_1$ і $\widetilde{r}_2$, визначені вище, отримуємо

$$M_p(f\Gamma)=\omega_{n-1}\,\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\,A\,\left(r_1^{-\frac{n-p-\beta}{p-1}}-r_1^{-\frac{n-p-\beta}{p-1}}\right).$$

Рівність, отриману вище, можна записати в наступному вигляді:

$$M_p(f\Gamma)=\frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{p-1}}\,,$$

де $q_{x_0}(t)=C_0\,t^{-\beta}$. Отже, за теоремою 2.2.1, гомеоморфізм f є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля в точці $x_0=0$ з $Q(x)=C_0\,|x|^{-\beta}$. Нескладно перевірити, що

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{1-\frac{\beta}{n-p}}}=C_0^{\frac{1}{n-p}}\,\left(\frac{n-p-\beta}{n-p}\right)^{\frac{p-1}{n-p}}.$$

Зауваження 2.5.1. Приклад вказує на точність оцінки (2.45).

З теореми 2.5.1 безпосередньо випливають наступні наслідки.

Наслідок 2.5.1. *Нехай $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n, n\geqslant 2,$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля, який задовольняє умову $f(0)=0$. Нехай існує $q_0>0$, для якого $q(t)\leqslant q_0$ при м.в. $t\in(0,1)$. Тоді при $1<p<n$ виконується оцінка*

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|}\leqslant q_0^{\frac{1}{n-p}}\,, \tag{2.49}$$

а при $p=n$ — оцінка

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{\gamma}}\leqslant 1\,, \tag{2.50}$$

де $q(t)$ — середнє значення функції Q на сфері $S_t=\{x\in\mathbb{R}^n:\,|x|=t\}$, $\gamma=q_0^{-\frac{1}{n-1}}$.

Зауваження 2.5.2. Оцінки (2.49) і (2.50) є точними.

Наслідок 2.5.2. *Нехай $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n, n\geqslant 2,$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля в точці $x_0=0$, який задовольняє умову $f(0)=0$. Тоді при $1<p<n$ виконується оцінка*

$$\liminf_{x\to 0}\,|f(x)|\cdot\left(\int\limits_{|x|}^{1}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\,q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{p-1}{n-p}}\leqslant\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{\frac{p-1}{n-p}},$$

де $q(t)$ — середнє значення функції Q на сфері $S_t=\{x\in\mathbb{R}^n:\,|x|=t\}$.

Справедлива наступна лема.

Лема 2.5.1. *Нехай $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n, n\geqslant 2,$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля у точці $x_0=0$, $f(0)=0$. Припустимо, що $q(r)\neq\infty$*

майже скрізь і, крім того, існують $c>0,\ 0\leqslant\alpha\leqslant p$ *і невід'ємна вимірна за Лебегом функція* $\psi(t)$ *на* $(0,\infty)$ *з умовою*

$$0<J(r)=\int\limits_{r}^{1}\psi(t)\,dt<\infty\qquad\forall\,r\in(0,r_0)\,,\qquad r_0<1\,,$$

відносно яких виконується наступне співвідношення:

$$\int\limits_{r<|x|<1}Q(x)\,\psi^p(|x|)\,dm(x)\leqslant cJ^{\alpha}(r)\quad\forall\,r\in(0,r_0)\,,\qquad r_0<1\,.$$

Тоді при $1<p<n$ *виконується оцінка*

$$\liminf_{x\to 0}\,|f(x)|\,\left(1+\frac{n-p}{p-1}\left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{p-1}}\,J^{\frac{p-\alpha}{p-1}}(|x|)\right)^{\frac{p-1}{n-p}}\leqslant 1,$$

а при $p=n$ *— оцінка*

$$\liminf_{x\to 0}\,|f(x)|\,\exp\left\{\left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}}\,J^{\frac{n-\alpha}{n-1}}(|x|)\right\}\leqslant 1\,.$$

З леми 2.5.1 випливає наступне твердження.

Наслідок 2.5.3. *Нехай* $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n, n\geqslant 2,$ *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля в точці* $x_0=0$, $f(0)=0$. *Припустимо, що* $q(r)\neq\infty$ *для м.в.* $r\in(0,1)$ *і для деякого скінченного числа* $c>0$ *виконується умова*

$$\int\limits_{r<|x|<1}\frac{Q(x)}{|x|^p}\,dm(x)\leqslant c\ln\frac{1}{r}\quad\forall\,r\in(0,r_0)\,,\qquad r_0<1\,.$$

Тоді при $1<p<n$ *виконується оцінка*

$$\liminf_{x\to 0}\,|f(x)|\cdot\left(1+\beta\ln\frac{1}{|x|}\right)^{\frac{p-1}{n-p}}\leqslant 1,$$

де $\beta=\frac{n-p}{p-1}\left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{p-1}}$, *а при* $p=n$ *— оцінка*

$$\liminf_{x\to 0}\,\frac{|f(x)|}{|x|^{\gamma_0}}\leqslant 1\,,$$

де $\gamma_0 = \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

Доведення. Наслідок 2.5.3 випливає з леми 2.5.1, якщо в цій лемі покласти $\psi(t) \ = \frac{1}{t}$.

Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і $Q : D \to [0, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція.

Означення 2.5.1. *Логарифмічним середнім* функції Q на кільці $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)$ будемо називати величину

$$\mathfrak{M}_{\log}^{Q}(\mathbb{A}) := \int\limits_{r_1}^{r_2}\!\!\!\!\!\!- \ q_{x_0}(t)\, d(\ln\, t) \ = \ \frac{1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{q_{x_0}(t)}{t}\, dt$$

де $q_{x_0}(t)$ — середнє значення функції Q на сфері $S(x_0, t) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = t\}$.

Враховуючи означення 2.5.1 і наслідок 2.5.3 та покладаючи $p = n$, отримуємо наступне твердження.

Наслідок 2.5.4. *Нехай* $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n, n \geqslant 2,$ *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм в точці* $x_0 = 0$, $f(0) = 0$. *Якщо* $q(r) \neq \infty$ *для м.в.* $r \in (0,1)$ *і для деякого числа* $\kappa > 0$ *виконується умова*

$$\mathfrak{M}_{\log}^{Q}(\mathbb{A}(0, r, 1)) \ \leqslant \ \kappa \qquad \forall \ \ r \in (0, r_0), \ r_0 \in (0, 1)\,,$$

то

$$\liminf_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{\gamma_0}} \leqslant 1\,,$$

де $\gamma_0 = \kappa^{\frac{1}{1-n}}$.

2.6. Поведінка в околі нескінченності кільцевих Q-гомеоморфізмів

У цьому підрозділі досліджено кільцеві Q-гомеоморфізми в околі нескінченно віддаленої точки.

Нехай $R>0$, $x_0\in\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, і $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ – гомеоморфізм. Покладемо

$$L(x_0,f,R)=\sup\limits_{|x-x_0|\leqslant R}|f(x)-f(x_0)|\,.$$

Справедливою є наступна лема.

Лема 2.6.1. *Нехай $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, – кільцевий Q-гомеоморфізм у точці $x_0\in\mathbb{R}^n$, і нехай $\psi:[0,\infty]\to[0,\infty]$ – довільна вимірна за Лебегом функція, така що*

$$0<\int\limits_{r_0}^{R}\psi(t)\,dt<\infty \qquad \forall R>r_0\,.$$

Якщо $q_{x_0}(r)\neq\infty$ для м.в. $r\in(0,\infty)$, то

$$\liminf\limits_{R\to\infty}L(x_0,R,f)\exp\left[-\left(\frac{\omega_{n-1}}{\Lambda(R)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right]>0\,, \tag{2.51}$$

де $S_1=S(x_0,r_0)$, $S_1=S(x_0,R)$ і

$$\Lambda(R):=\left(\int\limits_{r_0}^{R}\psi(t)\,dt\right)^{-n}\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,r_0,R)}Q(x)\,\psi^n(|x-x_0|)\,dm(x)\,. \tag{2.52}$$

Доведення. Розглянемо сферичне кільце $\mathbb{A}=\mathbb{A}(x_0,r_0,R)$ з $0<r_0<R$. Покладемо $M_0=m(fB(x_0,r_0))$. Тоді з (2.38) випливає, що

$$M_0\leqslant m(fB(x_0,R))\,\exp\left\{-\frac{n^{\frac{n}{n-1}}\Omega_n^{\frac{1}{n-1}}}{\left(\int\limits_{\mathbb{A}}Q(x)\eta^n(|x-x_0|)dm(x)\right)^{\frac{1}{n-1}}}\right\}\,, \tag{2.53}$$

де $\eta:(r_0,R)\to[0,\infty]$ – довільна вимірна функція, яка задовольняє умову $\int\limits_{r_0}^{R}\eta(r)\,dr\;=1$. Розглянемо вимірну функцію

$$\eta(t)\;=\begin{cases}\dfrac{\psi(t)}{\int\limits_{r_0}^{R}\psi(t)\,dt}, & t\in(r_0,R)\\[2ex] \qquad 0, & t\notin(r_0,R).\end{cases}$$

Зауважимо, що $\eta(t)$ задовольняє співвідношення (2.39). Тоді з нерівності (2.53) випливає оцінка

$$M_0 \leqslant m\left(fB(x_0,R)\right)\exp\left[-n\left(\frac{\omega_{n-1}}{\Lambda(R)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right], \tag{2.54}$$

де $\Lambda(R)$ визначено рівністю (2.52). Зауважимо, що

$$m\left(fB(x_0,R)\right) \leqslant \Omega_n L^n(x_0,R,f)\,.$$

Отже, з нерівності (2.54) випливає наступна оцінка

$$M_1 = \sqrt[n]{\frac{M_0}{\Omega_n}} \leqslant L(x_0,R,f)\exp\left(-\frac{\omega_{n-1}}{\Lambda(R)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\,.$$

Очевидно, що $M_1 > 0$ і не залежить від R. Переходячи тут до нижньої границі при $R \to \infty$, отримуємо співвідношення (2.51). Лему доведено.

З леми 2.6.1 випливає наступний результат.

Лема 2.6.2. *Нехай $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, — кільцевий Q-гомеоморфізм у точці $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Нехай $\psi:[0,\infty]\to[0,\infty]$ — деяка вимірна за Лебегом функція така, що*

$$0 < J(R) = \int\limits_{r_0}^{R} \psi(t)\,dt < \infty \qquad \forall R > r_0\,.$$

Якщо $q_{x_0}(r) \neq \infty$ для м.в. $r \in (0,\infty)$ і, крім того, для деяких чисел $c > 0$ і $\alpha < n$ виконується умова

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,r_0,R)} Q(x)\psi^n(|x-x_0|)\,dm(x) \leqslant c\cdot J^{\alpha}(R) \qquad \forall\ R \in (r_0,\infty),$$

то

$$\liminf_{R\to\infty} L(x_0,R,f)\exp\left(-\left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}} J^{\frac{n-\alpha}{n-1}}(R)\right) > 0\,.$$

У подальшому, для цілих значень $k \geqslant 0$ покладемо

$$e_0 = 1, \quad e_1 = e, \quad e_2 = e^e,\ \ldots,\ e_{k+1} = \exp e_k$$

і

$$\ln_0 t = t, \quad \ln_1 t = \ln t, \quad \ln_2 t = \ln\ln t, \ \ldots, \ \ln_{k+1} t = \ln\ln_k t\,.$$

Справедливою є наступна лема.

Лема 2.6.3. *Нехай* $R > e_N$, *тоді виконується рівність*

$$\int\limits_{e_N}^{R} \frac{dt}{\prod\limits_{k=0}^{N} \ln_k t} = \ln_{N+1} R\,.$$

Доведення. Дійсно, виконуючи заміну змінної $s = \ln_N t$, отримуємо наше твердження:

$$\int\limits_{e_N}^{R} \frac{dt}{\prod\limits_{k=0}^{N} \ln_k t} = \int\limits_{1}^{\ln_N R} \frac{ds}{s} = \ln\ln_N R = \ln_{N+1} R\,.$$

Лему доведено.

Обираючи в лемі 2.6.2 $\psi(t) = \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{N} \ln_k t}, r_0 = e_N$ і $p = 1$, приходимо до наступного твердження.

Теорема 2.6.1. *Нехай* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, n \geqslant 2,$ *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм у точці* $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Якщо* $q_{x_0}(r) \neq \infty$ *для м.в.* $r \in (0, \infty)$ *і для деякого числа* $c > 0$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0, e_N, R)} \frac{Q(x)\, dm(x)}{\left(\prod\limits_{k=0}^{N} \ln_k |x - x_0|\right)^n} \leqslant c\, \ln_{N+1}(R) \qquad \forall\ R > e_N\,,$$

то

$$\liminf_{R \to \infty} \frac{L(x_0, R, f)}{\ln_N^{\gamma}(R)} > 0\,,$$

де $\gamma = \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

Покладаючи $N = 0$ в теоремі 2.6.1, приходимо до наступних тверджень.

Наслідок 2.6.1. *Нехай* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм у точці* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. *Якщо* $q_{x_0}(r) \neq \infty$ *для м.в.* $r \in (0, \infty)$ *і для деякого* *числа* $c > 0$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,1,R)} \frac{Q(x)\, dm(x)}{|x-x_0|^n} \leqslant c\, \ln R \qquad \forall\ R > 1\,,$$

то

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0,R,f)}{R^{\gamma}} > 0\,,$$

де $\gamma = \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

Наслідок 2.6.2. *Нехай* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — *кільцевий* Q*-гомеоморфізм у точці* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. *Якщо* $q_{x_0}(r) \neq \infty$ *для м.в.* $r \in (0,\infty)$, *і для деякого числа* $\kappa_{x_0} > 0$ *виконується умова*

$$\mathfrak{M}^{Q}_{\log}(\mathbb{A}(x_0,1,R)) \ \leqslant\ \kappa_{x_0} \ \ \forall\ R > 1\,,$$

то

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0,R,f)}{R^{\gamma}} > 0\,,$$

де $\gamma = \left(\frac{\omega_{n-1}}{\kappa_{x_0}}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

Наслідок 2.6.3. *Нехай* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — *кільцевий* Q*-гомеоморфізм у точці* $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Якщо для деякого числа* $\kappa_{x_0} > 0$ *виконується умова*

$$q_{x_0}(t) \leqslant \kappa_{x_0} \qquad\quad \forall\ R > 1\,,$$

то

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0,R,f)}{R^{\alpha}} > 0\,,$$

де $\alpha = \kappa_{x_0}^{\frac{1}{1-n}}(x_0)$.

Зауваження 2.6.1. Зокрема, якщо $Q(x) \leqslant K, K \in [1,\infty)$, з наслідку 2.6.3 для квазіконформних відображень випливає відомий результат О. Мартіо, С. Рікмана і Ю. Вяйсяля, див. теорему 3.7 в [340]:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{|x|^{\alpha}} > 0\,,$$

де $\alpha = K^{\frac{1}{1-n}}$.

2.7. Скінченна ліпшицевість кільцевих Q-гомеоморфізмів

У цьому підрозділі отримано узагальнення відомої теореми Герінга про локальну ліпшицевість одного класу відображень, див. теорему 2 в [249].

Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $f : D \to D'$ – неперервне відображення і $x \in D$. Покладемо

$$L(x, f) = \limsup_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \,.$$

Означення 2.7.1. Відображення $f : D \to D'$ називається *скінченно ліпшицевим*, якщо $L(x, f) < \infty$ для всіх $x \in D$, див. розд. 10, п. 10.6 в [342].

Очевидно, що кожне ліпшицеве відображення є скінченно ліпшицевим.

Нижче наведено лему про оцінку спотворення p-ємності сферичного конденсатора при кільцевих Q-гомеоморфізмах відносно p-модуля.

Лема 2.7.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$. Припустимо, що $Q : D \to [0, \infty]$ — локально інтегровна функція в околі точки $x_0 \in D$ і $f : D \to D'$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля в точці $x_0 \in D$, $p > 1$. Тоді*

$$\mathrm{cap}_p \left(fB(x_0, \varepsilon_2), \overline{fB(x_0, \varepsilon_1)} \right) \leqslant \frac{1}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^p} \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x)\, dm(x) \,, \qquad (2.55)$$

де $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$ і $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \varepsilon_1 \leqslant |x - x_0| \leqslant \varepsilon_2\}$.

Доведення. Нехай $x_0 \in D$. Розглянемо кільце $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, де ε_1 і ε_2 – довільні числа, які задовольняють умову $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$.

Нехай (A, C)— конденсатор, де $A = B(x_0, \varepsilon_2), C = \overline{B(x_0, \varepsilon_2)}$. Тоді (fA, fC) — кільцевий конденсатор у D', і за твердженням 1.1.4

$$\mathrm{cap}_p \, (fA, fC) = M_p(\Delta(fS_1, fS_2, f\mathbb{A})) \,. \qquad (2.56)$$

Зауважимо, що функція

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \,, & t \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2] \,, \\ \quad 0 \,, & t \notin [\varepsilon_1, \varepsilon_2] \,. \end{cases}$$

задовольняє умову (2.7). Тоді, за означенням кільцевого Q-гомеоморфізму, маємо

$$M_p(\Delta(fS_1, fS_2, f\mathbb{A})) \leqslant \frac{1}{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^p}\int\limits_{\mathbb{A}} Q(x)\ dm(x)\,, \tag{2.57}$$

де $S_1 = S(x_0, \varepsilon_1)$ і $S_2 = S(x_0, \varepsilon_2)$. Комбінуючи (2.56) і (2.57), ми отримаємо оцінку (2.55). Лему доведено.

Нижче наведено теорему про достатню умову скінченної ліпшицевості у точці для кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля, $n-1<p<n$.

Теорема 2.7.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$. Припустимо, що $f: D\to D'$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля і виконується умова*

$$Q_0 = \limsup_{\varepsilon\to 0} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\, dm(x) < \infty\,. \tag{2.58}$$

Тоді при $n-1<p<n$ виконується нерівність

$$L(x_0, f) = \limsup_{x\to x_0} \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \leqslant \nu_0\, Q_0^{\frac{1}{n-p}}, \tag{2.59}$$

де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n і p.

Доведення. Покладемо $\varepsilon\in(0,\delta_0)$, $\delta_0\in\Big(0, \frac{1}{4}\operatorname{dist}(x_0,\partial D)\Big)$. Тоді $\Big(fB(x_0,2\varepsilon), \overline{fB(x_0,\varepsilon)}\Big)$ — кільцевий конденсатор у D'. За лемою 2.7.1 виконується оцінка

$$\operatorname{cap}_p\Big(fB(x_0,2\varepsilon), \overline{fB(x_0,\varepsilon)}\Big) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^p}\int\limits_{B(x_0,2\varepsilon)} Q(x)\, dm(x)\,. \tag{2.60}$$

З іншого боку, за твердженням 1.1.6

$$\operatorname{cap}_p\ \Big(fB(x_0,2\varepsilon), \overline{fB(x_0,\varepsilon)}\Big) \geqslant \left(\nu_1 \frac{d^p\Big(\overline{fB(x_0,\varepsilon)}\Big)}{m^{1-n+p}(fB(x_0,2\varepsilon))}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{2.61}$$

де ν_1 — додатна стала, яка залежить тільки від розмірності простору n і p.

Комбінуючи (2.60) і (2.61), отримуємо

$$\frac{d\Big(\overline{fB(x_0,\varepsilon)}\Big)}{\varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant \nu_2 \left(\frac{m(fB(x_0,2\varepsilon))}{m(B(x_0,2\varepsilon))}\right)^{i_1} \left(\fint_{B(x_0,2\varepsilon)} Q(x)\,dm(x)\right)^{i_2}\,, \tag{2.62}$$

де

$$i_1 \;=\; \frac{1-n+p}{p}\,, \quad i_2 \;=\; \frac{n-1}{p}$$

і ν_2 — додатна стала, яка залежить тільки від розмірності простору n і p.

Покладаючи $\varepsilon_1 = 2\varepsilon$ і $\varepsilon_2 = 4\varepsilon$ в лемі 2.7.1, отримуємо

$$\operatorname{cap}_p\left(fB(x_0,4\varepsilon), \overline{fB(x_0,2\varepsilon)}\right) \leqslant \frac{1}{(2\varepsilon)^p} \int\limits_{B(x_0,4\varepsilon)} Q(x)\,dm(x)\,. \tag{2.63}$$

За твердженням 1.1.7, див. (1.8), маємо оцінку

$$\operatorname{cap}_p\left(fB(x_0,4\varepsilon), \overline{fB(x_0,2\varepsilon)}\right) \geqslant \nu_3 \left[m\left(\overline{fB(x_0,2\varepsilon)}\right)\right]^{\frac{n-p}{n}} \tag{2.64}$$

де ν_3 — стала, яка залежить тільки від розмірності простору n і p. Комбінуючи (2.63) і (2.64), ми отримуємо

$$\frac{m\left(\overline{fB(x_0,2\varepsilon)}\right)}{m(B(x_0,2\varepsilon))} \leqslant \nu_4 \left(\fint_{B(x_0,4\varepsilon)} Q(x)\,dm(x)\right)^{\frac{n}{n-p}}\,,$$

де ν_4 — додатна стала, яка залежить тільки від розмірності простору n і p. Остання оцінка разом із (2.62) приводить до нерівності

$$\frac{d\left(\overline{fB(x_0,\varepsilon)}\right)}{\varepsilon} \leqslant \nu_0 \left(\fint_{B(x_0,4\varepsilon)} Q(x)\,dm(x)\right)^{j_1} \left(\fint_{B(x_0,2\varepsilon)} Q(x)\,dm(x)\right)^{j_2}\,,$$

де

$$j_1 \;=\; \frac{n(1-n+p)}{p(n-p)}\,, \quad j_2 \;=\; \frac{n-1}{p}$$

і ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від розмірності простору n і p.

Перейдемо тут до верхньої границі при $\varepsilon \to 0$, внаслідок чого отримаємо

$$L(x_0,f) = \limsup_{x\to x_0} \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \leqslant \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{d\left(\overline{fB(x_0,\varepsilon)}\right)}{\varepsilon} \leqslant \nu_0\, Q_0^{\frac{1}{n-p}}\,,$$

де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n і p. Теорему доведено.

З теореми 2.7.1 безпосередньо випливають наступні наслідки.

Наслідок 2.7.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$. Припустимо, що $f : D \to D'$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля при $n-1<p<n$ і виконується умова*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\,dm(x) < \infty$$

для всіх $x_0 \in D$. Тоді гомеоморфізм f є скінченно ліпшицевим.

Зауваження 2.7.1. За лемою 10.6 у [342] скінченно ліпшицеві відображення мають N-властивість Лузіна відносно хаусдорфових мір і, отже, є абсолютно неперервними на кривих і поверхнях.

Наслідок 2.7.2. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$. Припустимо, що $f : D \to D'$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля, $n-1<p<n$, і існує така $C_{x_0}>0$, що*

$$q_{x_0}(t) \,=\, \frac{1}{\omega_{n-1}t^{n-1}} \int\limits_{S(x_0,t)} Q(x)\,d\mathcal{A} \,\leqslant\, C_{x_0}$$

для м.в. $t \in (0,\varepsilon_0)$, де $\varepsilon_0 \in \left(0,\frac{d_0}{4}\right)$, $d_0 = \frac{1}{4}\operatorname{dist}(x_0,\partial D)$. Тоді

$$L(x_0,f) = \limsup_{x\to x_0} \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \leqslant \nu_0\, C_{x_0}^{\frac{1}{n-p}}\,,$$

де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n і p.

Наслідок 2.7.3. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$. Припустимо, що $f : D \to D'$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля, $n-1<p<n$, і що існує число $K>0$ таке, що $Q(x)\leqslant K$ для м.в. $x\in D$. Тоді для всіх $x_0 \in D$ виконуються співвідношення*

$$L(x_0,f) = \limsup_{x\to x_0} \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \leqslant \nu_0\, K^{\frac{1}{n-p}},$$

де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n і p.

Побудуємо приклад кільцевого Q-гомеоморфізму відносно p-модуля в фіксованій точці, який не є скінченно ліпшицевим.

Приклад 2.7.1. Припустимо, що $n-1<p<n$. Нехай відображення $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$ задано за допомогою співвідношення

$$f(x)=\frac{x}{|x|}\left(1+\frac{n-p}{p-1}\int\limits_{|x|}^{1}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\ln^{\frac{1}{p-1}}(\frac{e}{t})}\right)^{-\frac{p-1}{n-p}}$$

при $x\neq 0$ і $f(0)=0$. Покажемо, що вказане вище відображення є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля в точці $x_0=0$, де $Q(x)=\ln\frac{e}{|x|}$. Очевидно, $q_{x_0}(t)=\ln\frac{e}{t}$. Розглянемо кільце $\mathbb{A}=\mathbb{A}(0,r_1,r_2)$, $0<r_1<r_2<1$. Зауважимо, що відображення f перетворює кільце $\mathbb{A}=\mathbb{A}(0,r_1,r_2)$ на кільце $\widetilde{\mathbb{A}}=\widetilde{\mathbb{A}}\,(0,\widetilde{r}_1,\widetilde{r}_2)$, де

$$\widetilde{r}_i=\left(1+\frac{n-p}{p-1}\int\limits_{r_i}^{1}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\ln^{\frac{1}{p-1}}(\frac{e}{t})}\right)^{-\frac{p-1}{n-p}}\,,\quad i=1,2\,. \tag{2.65}$$

Позначимо через $\Gamma=\Delta(S_1,S_2,\mathbb{A})$ сім'ю всіх кривих, які з'єднують сфери $S_1=S(0,r_1)$ і $S_2=S(0,r_2)$ в кільці $\mathbb{A}$. Зауважимо, що p-модуль сім'ї $f\Gamma$ в цьому випадку може бути обчислений в явному вигляді, див. (1.3), а саме:

$$M_p(f\Gamma)=\omega_{n-1}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left((\widetilde{r}_1)^{\frac{p-n}{p-1}}-(\widetilde{r}_2)^{\frac{p-n}{p-1}}\right)^{1-p}\,. \tag{2.66}$$

Оберемо в (2.66) значення $\widetilde{r}_1$ і $\widetilde{r}_2$, визначені в (2.65). Тоді

$$M_p(f\Gamma)=\frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\ln^{\frac{1}{p-1}}(\frac{e}{t})}\right)^{p-1}}\,.$$

Отже, за теоремою 2.2.1 гомеоморфізм f є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля в точці $x_0=0$ при $Q(x)=\ln\frac{e}{|x|}$. Зауважимо, що

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\fint_{B(x_0,\varepsilon)}Q(x)\,dm(x)=\infty\,.$$

З іншого боку, за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|}=\infty\,,$$

тобто, гомеоморфізм f не задовольняє співвідношення (2.59) в нулі.

Зауваження 2.7.2. Приклад 2.7.1 вказує на необхідність умови (2.58).

Нижче наведено «ліпшицевий» аналог теореми Ікоми–Шварца для кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля, $1 < p < n$.

Теорема 2.7.2. *Нехай $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля, $f(0) = 0$. Припустимо, що функція $Q : \mathbb{B}^n \to [0, \infty]$ задовольняє умову*

$$Q_0 = \liminf_{\varepsilon \to 0} \fint_{B_\varepsilon} Q(x)\, dm(x) < \infty\,, \tag{2.67}$$

де $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \varepsilon\}$. Тоді при $1 < p < n$ виконується оцінка

$$\liminf_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \leqslant \nu_0\ Q_0^{\frac{1}{n-p}}\,, \tag{2.68}$$

де ν_0 — позитивна стала, яка залежить тільки від розмірності простору n і p.

Доведення. Розглянемо кільце $\mathbb{A} = \mathbb{A}(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)\,, \quad 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}$. Тоді $\left(fB_{\varepsilon_2}, \overline{fB}_{\varepsilon_1}\right)$ — кільцевий конденсатор в $\mathbb{B}^n$. За лемою 2.7.1

$$\mathrm{cap_p}\left(fB_{\varepsilon_2}, \overline{fB}_{\varepsilon_1}\right) \leqslant \frac{1}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^p} \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x)\ dm(x)\ .$$

Покладаючи $\varepsilon_1 = \varepsilon$ і $\varepsilon_2 = 2\varepsilon$, отримуємо

$$\mathrm{cap_p}\ \left(fB_{2\varepsilon}, \overline{fB}_{\varepsilon}\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^p} \int\limits_{\mathbb{A}(0,\varepsilon,2\varepsilon)} Q(x)\, dm(x)\,. \tag{2.69}$$

З іншого боку, за нерівністю (1.8)

$$\mathrm{cap_p}\ \left(fB_{2\varepsilon}, \overline{fB}_{\varepsilon}\right) \geqslant \nu_1 \left[m\left(\overline{fB}_{\varepsilon}\right)\right]^{\frac{n-p}{n}}\,, \tag{2.70}$$

де ν_1 — позитивна стала, яка залежить тільки від розмірності простору n і p.

Поєднуючи (2.69) і (2.70), ми отримуємо

$$\frac{m\left(\overline{fB}_{\varepsilon}\right)}{\Omega_n \varepsilon^n} \leqslant \nu_2\ \left(\fint_{B_{2\varepsilon}} Q(x)\, dm(x)\right)^{\frac{n}{n-p}}\,, \tag{2.71}$$

де ν_2 — позитивна стала, яка залежить тільки від розмірності простору n і p.

Покладемо $l_f(\varepsilon) = \min\limits_{|x|=\varepsilon} |f(x)|$. Враховуючи умову $f(0) = 0$, отримуємо $\Omega_n\, l_f^n(\varepsilon) \leqslant m(fB_\varepsilon)$ і, отже,

$$l_f(\varepsilon) \leqslant \left(\frac{m(fB_\varepsilon)}{\Omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Звідси випливає, що

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|} = \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{l_f(\varepsilon)}{\varepsilon} \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{m(fB_\varepsilon)}{\Omega_n \varepsilon^n}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{2.72}$$

Нарешті, комбінуючи (2.72) і (2.71), маємо

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \leqslant \nu_0\ \liminf_{\varepsilon\to 0} \left(\fint_{B_{2\varepsilon}} Q(x)\, dm(x)\right)^{\frac{1}{n-p}},$$

де ν_0 — позитивна стала, яка залежить тільки від розмірності простору n і p. Теорему доведено.

Зауваження 2.7.3. Приклад 2.7.1 вказує на необхідність умови (2.67).

Наслідок 2.7.4. *Нехай $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n, n \geqslant 2,$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля, який задовольняє умову $f(0) = 0$. Нехай існує $q_0 > 0$, для якого $q(t) \leqslant q_0$ при м.в. $t \in (0,1)$. Тоді при $1 < p < n$ виконується оцінка*

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \leqslant q_0^{\frac{1}{n-p}},$$

а при $p = n$ — оцінка

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^\gamma} \leqslant 1,$$

де $q(t)$ — середнє значення функції Q на сфері $S_t = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = t\}$, $\gamma = q_0^{-\frac{1}{n-1}}$.

2.8. Локальна гельдеровість кільцевих Q-гомеоморфізмів

Даний підрозділ присвячено локальній гельдеровості кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля, $n - 1 < p < n$.

Справедливим є наступний результат.

Теорема 2.8.1. *Нехай* D *і* D' *— обмежені області в* $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$. *Припустимо, що* $f : D \to D'$ *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля,* $p \in (1, n)$, $\alpha > \frac{n}{n-p}$ *і* $Q \in L^{\alpha}_{\rm loc}(D)$. *Тоді*

$$m\left(\overline{fB(x_0,r)}\right) \leqslant \nu_0 \, \|Q\|_{\alpha}^{\frac{n}{n-p}} \, r^{n\left(1-\frac{n}{\alpha(n-p)}\right)},$$

для будь-якого $r \in (0, \delta_0)$, *де* $\delta_0 = \frac{1}{2}{\rm dist}(x_0, \partial D)$ *і*

$$\|Q\|_{\alpha} = \left(\int\limits_{D} Q^{\alpha}(x)\, dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

— норма в просторі $L_{\alpha}(D)$, *а* ν_0 *— деяка позитивна стала, яка залежить тільки від* n, p *і* α.

Доведення. Розглянемо сферичне кільце

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r, 2r) \,=\, \{x \in D : \, r \,<\, |x - x_0| \,<\, 2r\}\,,$$

де $r \in (0,\, \delta_0)$. Тоді $\left(fB(x_0, 2r), \overline{fB(x_0,r)}\right)$ — кільцевий конденсатор у D'. За лемою 2.7.1

$${\rm cap_p}\,\left(fB(x_0, 2r), \overline{fB(x_0,r)}\right) \leqslant \frac{1}{r^p} \int\limits_{\mathbb{A}(x_0,r,2r)} Q(x)\; dm(x)\;.$$

Застосуємо тут нерівність Гельдера при $q = \alpha$ і $q' = \frac{\alpha}{\alpha-1}$. Ми отримаємо

$${\rm cap_p}\,\left(fB(x_0, 2r), \overline{fB(x_0,r)}\right) \leqslant \nu_1 \, \|Q\|_{\alpha} \, r^{\frac{\alpha n - \alpha p - n}{\alpha}}\,, \tag{2.73}$$

де ν_1 — позитивна стала, яка залежить тільки від n, α і p.

З іншого боку, за нерівністю (1.8)

$${\rm cap_p}\,\left(fB(x_0, 2r), \overline{fB(x_0,r)}\right) \geqslant \nu_2 \left[m\left(\overline{fB(x_0,r)}\right)\right]^{\frac{n-p}{n}}\,, \tag{2.74}$$

де ν_2 — позитивна стала, яка залежить тільки від n і p.

Враховуючи (2.73) і (2.74), отримуємо

$$m\left(\overline{fB(x_0,r)}\right) \leqslant \nu_0 \|Q\|_{\alpha}^{\frac{n}{n-p}} r^{\frac{n(\alpha n - \alpha p - n)}{\alpha(n-p)}}\,,$$

де ν_0 — позитивна стала, яка залежить тільки від n, p і α. Теорему доведено.

В наступній теоремі встановлено достатню умову гельдеровості кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля, $n-1<p<n$.

Теорема 2.8.2. *Нехай D і D' — обмежені області в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$. Припустимо, що $f: D\to D'$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля, $n-1<p<n$, $\alpha>\frac{n}{n-p}$ і $Q\in L^{\alpha}_{\rm loc}(D)$. Тоді*

$$|f(x)-f(y)|\leqslant \nu_0\|Q\|_{\alpha}^{\frac{1}{n-p}}|x-y|^{1-\frac{n}{\alpha(n-p)}}, \tag{2.75}$$

для будь-яких $x,y\in F$, які задовольняють умову $|x-y|<\delta$, де F — довільний компакт у D, $\delta=\frac{1}{4}{\rm dist}(F,\partial D)$,

$$\|Q\|_{\alpha}=\left(\int\limits_{D} Q^{\alpha}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

— норма в просторі $L_{\alpha}(D)$ і ν_0 — позитивна стала, яка залежить тільки від n, p і α.

Доведення. Розглянемо сферичне кільце $\mathbb{A}=\mathbb{A}(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<d_0={\rm dist}(x,\partial D)$. За лемою 2.7.1

$${\rm cap_p}\,\left(fB(x,\varepsilon_2),\overline{fB(x,\varepsilon_1)}\right)\leqslant\frac{1}{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^p}\int\limits_{\mathbb{A}(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} Q(x)\;dm(x)\,.$$

Застосувавши тут нерівність Гельдера з $q=\alpha$ і $q'=\frac{\alpha}{\alpha-1}$, ми отримаємо

$${\rm cap_p}\,\left(fB(x,\varepsilon_2),\overline{fB(x,\varepsilon_1)}\right)\leqslant\frac{\left(\Omega_n\varepsilon_2^n\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^p}\|Q\|_{\alpha}\,, \tag{2.76}$$

де $\Omega_n=m(\mathbb{B}^n)$ — об'єм одиничної кулі в $\mathbb{R}^n$. Покладемо тепер $\varepsilon=|x-y|$, $\varepsilon_1=2\varepsilon$ і $\varepsilon_2=4\varepsilon$. Тоді будемо мати

$${\rm cap_p}\,\left(fB(x,4\varepsilon),\overline{fB(x,2\varepsilon)}\right)\leqslant\nu_1\,\|Q\|_{\alpha}\,\varepsilon^{\frac{\alpha n-\alpha p-n}{\alpha}}\,, \tag{2.77}$$

де ν_1 — позитивна стала, яка залежить тільки від розмірності простору n,α і p.

З іншого боку, за твердженням 1.1.7, див. (1.8).

$$\mathrm{cap}_{\mathrm{p}}\ \left(fB(x,4\varepsilon),\overline{fB(x,2\varepsilon)}\right)\ \geqslant\ \nu_2\ \left[m\left(\overline{fB(x,2\varepsilon)}\right)\right]^{\frac{n-p}{n}}\ , \tag{2.78}$$

де ν_2 — позитивна стала, яка залежить тільки від n і p.

Комбінуючи (2.77) з (2.78), отримаємо, що

$$m(fB(x,2\varepsilon))\leqslant \nu_3\,\|Q\|_{\alpha}^{\frac{n}{n-p}}\,\varepsilon^{\frac{n(\alpha n-\alpha p-n)}{\alpha(n-p)}}\ , \tag{2.79}$$

де ν_3 — позитивна стала, яка залежить тільки від n, p і α.

Далі, покладемо в (2.76) $\varepsilon_1=\varepsilon$ і $\varepsilon_2=2\varepsilon$. Тоді

$$\mathrm{cap}_{\mathrm{p}}\ \left(fB(x,2\varepsilon),\overline{fB(x,\varepsilon)}\right)\leqslant\ \nu_4\,\|Q\|_{\alpha}\,\varepsilon^{\frac{\alpha n-\alpha p-n}{\alpha}}\ , \tag{2.80}$$

де ν_4 — позитивна стала, яка залежить тільки від n, p і α.

З іншого боку, за твердженням 1.1.6

$$\mathrm{cap}_{\mathrm{p}}\ \left(fB(x,2\varepsilon),\overline{fB(x,\varepsilon)}\right)\geqslant\left(\nu_5\,\frac{d^p\left(\overline{fB(x,\varepsilon)}\right)}{m^{1-n+p}\,(fB(x,2\varepsilon))}\right)^{\frac{1}{n-1}}\ , \tag{2.81}$$

де ν_5 — позитивна стала, яка залежить тільки від n і p.

Комбінуючи (2.80) з (2.81), отримуємо

$$\left(\frac{d^p\left(\overline{fB(x,\varepsilon)}\right)}{m^{1-n+p}\,(fB(x,2\varepsilon))}\right)^{\frac{1}{n-1}}\ \leqslant\ \nu_6\,\|Q\|_{\alpha}\,\varepsilon^{\frac{\alpha n-\alpha p-n}{\alpha}}\ ,$$

де ν_6 — позитивна стала, яка залежить тільки від n, p і α. Звідси і з (2.79) випливає, що

$$d\left(\overline{fB(x,\varepsilon)}\right)\leqslant\nu_0\,\|Q\|_{\alpha}^{\frac{1}{n-p}}\,\varepsilon^{1-\frac{n}{\alpha(n-p)}}\ ,$$

де ν_0 — позитивна стала, яка залежить тільки від n, p і α.

Оцінку (2.75) отримаємо звідси за допомогою очевидної нерівності $d\left(\overline{fB(x,\varepsilon)}\right)\geqslant|f(x)-f(y)|$. Теорему доведено.

Нижче наведено «степеневий» аналог теореми Ікоми–Шварца для кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля, $1<p<n$.

Теорема 2.8.3. *Нехай* $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n, n \geqslant 2$, *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля,* $f(0) = 0$. *Якщо* $p \in (1,n)$ *і* $Q \in L^\alpha(\mathbb{B}^n), \alpha > \frac{n}{n-p}$, *то*

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{1-\frac{n}{\alpha(n-p)}}} \leqslant \nu_0 \|Q\|_\alpha^{\frac{1}{n-p}}, \tag{2.82}$$

де

$$\|Q\|_\alpha = \left(\int\limits_{\mathbb{B}^n} Q^\alpha(x)\, dm(x) \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

— норма в просторі $L_\alpha(\mathbb{B}^n)$, *а* ν_0 *— позитивна стала, яка залежить тільки від розмірності простору* n, p *і* α.

Доведення. Розглянемо кулю $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \varepsilon\}$ при $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. За теоремою 2.8.1 для будь-якого $\varepsilon < \frac{1}{2}$ виконується оцінка

$$m(fB_\varepsilon) \leqslant \nu_0 \|Q\|_\alpha^{\frac{n}{n-p}} \varepsilon^{n\left(1-\frac{n}{\alpha(n-p)}\right)}, \tag{2.83}$$

де ν_0 — позитивна стала, що залежить тільки від n, p і α.

Покладемо $l_f(\varepsilon) = \min\limits_{|x|=\varepsilon} |f(x)|$. Враховуючи умову $f(0) = 0$, отримуємо $\Omega_n\, l_f^n(\varepsilon) \leqslant m(fB_\varepsilon)$ і, отже,

$$l_f(\varepsilon) \leqslant \left(\frac{m(fB_\varepsilon)}{\Omega_n} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Отже, маємо

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{1-\frac{n}{\alpha(n-p)}}} = \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{l_f(\varepsilon)}{\varepsilon^{1-\frac{n}{\alpha(n-p)}}} \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{m(fB_\varepsilon)}{\Omega_n \varepsilon^{n(1-\frac{n}{\alpha(n-p)})}} \right)^{\frac{1}{n}}. \tag{2.84}$$

Зі співвідношень (2.83) і (2.84) випливає, що

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{1-\frac{n}{\alpha(n-p)}}} \leqslant \nu_0 \|Q\|_\alpha^{\frac{1}{n-p}},$$

де ν_0 — позитивна стала, яка залежить тільки від n, p і α. Теорему доведено.

Нижче наведено лему про оцінку спотворення p-ємності сферичного конденсатора при кільцевих Q-гомеоморфізмах відносно p-модуля.

Лема 2.8.1. *Нехай* $1 < p < n$, D *і* D' — *області в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. *Припустимо, що* $f : D \to D'$ — *кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля в точці* $x_0 \in D$ *і існують* $C_{x_0} > 0$, $\beta < n - p$ *такі, що*

$$q_{x_0}(t) \leqslant C_{x_0} t^{-\beta} \tag{2.85}$$

для м.в. $t \in (0, d_0)$, $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. *Тоді для довільних* ε_1 *і* ε_2, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, *і* $\theta = \frac{n-p-\beta}{p-1}$ *виконується нерівність*

$$\operatorname{cap}_p\left(fB(x_0, \varepsilon_2), \overline{fB(x_0, \varepsilon_1)}\right) \leqslant \frac{C_{x_0}\omega_{n-1}\theta^{p-1}}{\left(\varepsilon_1^{-\theta} - \varepsilon_2^{-\theta}\right)^{p-1}}. \tag{2.86}$$

Доведення. Нехай $x_0 \in D$, а ε_1 і ε_2 задовольняють умову $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Розглянемо сферичне кільце

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \varepsilon_1 < |x - x_0| < \varepsilon_2\}.$$

Нехай також (A, C)— конденсатор, де $A = B(x_0, \varepsilon_2), C = \overline{B(x_0, \varepsilon_1)}$. Тоді (fA, fC) — кільцевий конденсатор у D', і за твердженням 1.1.4

$$\operatorname{cap}_p(fA, fC) = M_p(\Delta(fS_1, fS_2, f\mathbb{A})), \tag{2.87}$$

де $S_1 = S(x_0, \varepsilon_1)$ і $S_2 = S(x_0, \varepsilon_2)$. Тоді за лемою 2.2.1 отримаємо

$$M_p(\Delta(fS_1, fS_2, f\mathbb{A})) \leqslant \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}\right)^{p-1}},$$

де $q_{x_0}(r)$ — середнє значення функції Q на сфері $S(x_0, r)$ і ω_{n-1} — площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ у $\mathbb{R}^n$.

З умови (2.85) випливає оцінка

$$M_p(\Delta(fS_1, fS_2, f\mathbb{A})) \leqslant \frac{C_{x_0}\omega_{n-1}\theta^{p-1}}{\left(\varepsilon_1^{-\theta} - \varepsilon_2^{-\theta}\right)^{p-1}}. \tag{2.88}$$

Зі співвідношень (2.87) і (2.88) випливає бажана оцінка (2.86).

Лему доведено.

Справедливою є наступна лема.

Лема 2.8.2. *Нехай* $1 < p < n$, D *і* D' *— області в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. *Припустимо, що* $f : D \to D'$ *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля в точці* $x_0 \in D$ *і існують такі* $C_{x_0} > 0$, $\beta < n - p$, *відносно яких для м.в.* $t \in (0, d_0)$, $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, *виконується умова (2.85). Тоді для всіх* $r \in \left(0, \frac{d_0}{2}\right)$ *виконується нерівність*

$$m\left(\overline{fB(x_0, r)}\right) \leqslant \nu_0\, C_{x_0}^{\frac{n}{n-p}} r^{\frac{n(n-p-\beta)}{n-p}}, \tag{2.89}$$

де ν_0 *— деяка позитивна стала, яка залежить тільки від* n, p *і* β.

Доведення. Розглянемо конденсатор

$$\mathcal{E} = \left(B(x_0, 2r), \overline{B(x_0, r)}\right), \quad r < \delta_0.$$

За лемою 2.8.1 виконується оцінка

$$\operatorname{cap}_p f\mathcal{E} \leqslant \frac{C_{x_0}\omega_{n-1}\theta^{p-1}}{(1-2^{-\theta})^{p-1}}\, r^{n-p-\beta}. \tag{2.90}$$

Крім того, за твердженням 1.1.7, див. співвідношення (1.8)

$$\operatorname{cap}_p f\mathcal{E} \geqslant \nu_1 \left[m\left(\overline{fB(x_0, r)}\right)\right]^{\frac{n-p}{n}}, \tag{2.91}$$

де ν_1 — стала, яка залежить тільки від розмірності простору n і p.

З (2.90) і (2.91) випливає, що

$$m\left(\overline{fB(x_0, r)}\right) \leqslant \nu_0\, C_{x_0}^{\frac{n}{n-p}}\, r^{\frac{n(n-p-\beta)}{n-p}},$$

де ν_0 — деяка позитивна стала, яка залежить тільки від n, p і β. Лему доведено.

Справедливим є наступний результат.

Теорема 2.8.4. *Нехай* $1 < p < n$, D *і* D' *— області в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. *Припустимо, що* $f : D \to D'$ *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля і існують* $C_{x_0} > 0$, $\beta < n - p$ *такі, що для майже всіх* $t \in (0, d_0)$, $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, *виконується умова (2.85). Тоді для всіх* $x \in B(x_0, \frac{d_0}{4})$

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \nu_0\, C_{x_0}^{\frac{1}{n-p}}\, |x - x_0|^{1-\frac{\beta}{n-p}}, \tag{2.92}$$

де ν_0 *— деяка позитивна стала, яка залежить тільки від* n *,* p *і* β *.*

Доведення. Покладемо $\varepsilon = |x - x_0| < \frac{d_0}{4}$. Розглянемо конденсатор

$$\mathcal{E}_\varepsilon = \left(B(x_0, 2\varepsilon), \overline{B(x_0, \varepsilon)}\right) .$$

З леми 2.8.1 випливає оцінка

$$\operatorname{cap}_p f\mathcal{E}_\varepsilon \leqslant \nu_1 \, C_{x_0} \, \varepsilon^{n-p-\beta} , \tag{2.93}$$

де ν_1 — позитивна стала, яка залежить тільки від n , p і β .

З іншого боку, за твердженням 1.1.6

$$\operatorname{cap}_p f\mathcal{E}_\varepsilon \geqslant \nu_2 \left(\frac{d^p\left(\overline{fB(x_0, \varepsilon)}\right)}{m^{1-n+p}\left(fB(x_0, 2\varepsilon)\right)}\right)^{\frac{1}{n-1}} , \tag{2.94}$$

де ν_2 — позитивна стала, яка залежить тільки від n і p.

З (2.93) і (2.94) випливає, що

$$d\left(\overline{fB(x_0, \varepsilon)}\right) \leqslant \nu_3 \, C_{x_0}^{\frac{n-1}{p}} \, \varepsilon^{\frac{(n-1)(n-p-\beta)}{p}} \, m^{\frac{1-n+p}{p}}\left(fB(x_0, 2\varepsilon)\right) , \tag{2.95}$$

де ν_3 — позитивна стала, яка залежить тільки від n , p і β . З леми 2.8.2 випливає оцінка для міри образу кулі $B(x_0, 2\varepsilon)$, а саме:

$$m\left(fB(x_0, 2\varepsilon)\right) \leqslant \nu_4 \, C_{x_0}^{\frac{n}{n-p}} \, \varepsilon^{\frac{n(n-p-\beta)}{n-p}} , \tag{2.96}$$

де ν_3 — позитивна стала, яка залежить тільки від n , p і β .

Нарешті, з (2.95) і (2.96) випливає, що

$$d\left(\overline{fB(x_0, \varepsilon)}\right) \leqslant \nu_0 \, C_{x_0}^{\frac{1}{n-p}} \, |x - x_0|^{1-\frac{\beta}{n-p}} ,$$

де ν_0 — позитивна стала, яка залежить тільки від n , p і β .

Тепер бажана оцінка спотворення відстані (2.92) випливає з очевидної нерівності $d\left(\overline{fB(x_0, \varepsilon)}\right) \geqslant |f(x) - f(x_0)|$. Теорему доведено.

2.9. Логарифмічна гельдеровість кільцевих Q-гомеоморфізмів

В цьому підрозділі досліджено кільцеві Q-гомеоморфізми відносно p-модуля з точки зору так званої "логарифмічної асимптотики".

Нижче наведено лему про оцінку спотворення p-ємності сферичного конденсатора при кільцевих Q-гомеоморфізмах відносно p-модуля.

Лема 2.9.1. *Нехай* $1 < p < n$, D *і* D' *– області в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. *Припустимо, що* $f : D \to D'$ *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля в точці* $x_0 \in D$, *і існують* $C_{x_0} > 0$, $\kappa \in [0, p)$ *такі, що для будь-яких* $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{Q(x)\, dm(x)}{|x-x_0|^p} \leqslant C_{x_0} \ln^{\kappa}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right). \tag{2.97}$$

Тоді

$$\operatorname{cap}_p \left(fB(x_0,\varepsilon_2), \overline{fB(x_0,\varepsilon_1)}\right) \leqslant C_{x_0} \ln^{\kappa-p}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right). \tag{2.98}$$

Доведення. Нехай $x_0 \in D$, і нехай ε_1 і ε_2 – довільні числа, які задовольняють умову $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Розглянемо сферичне кільце $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon_1 < |x - x_0| < \varepsilon_2\}$. Нехай (A, C)— конденсатор, де $A = B(x_0, \varepsilon_2), C = \overline{B(x_0, \varepsilon_1)}$. Тоді (fA, fC) — кільцевий конденсатор в D' і за твердженням 1.1.4

$$\operatorname{cap}_p (fA, fC) = M_p(\Delta(fS_1, fS_2, f\mathbb{A})). \tag{2.99}$$

Зауважимо, що функція

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{1}{t \ln\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)}, & t \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2], \\ 0, & t \notin [\varepsilon_1, \varepsilon_2] \end{cases}$$

задовольняє умову (2.7). Тоді за означенням кільцевого Q-гомеоморфізму відносно p-модуля

$$M_p(\Delta(fS_1, fS_2, f\mathbb{A})) \leqslant \frac{1}{\ln^p\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)} \int\limits_{\mathbb{A}} \frac{Q(x)\ dm(x)}{|x-x_0|^p}.$$

З умови (2.97) випливає, що

$$M_p(\Delta(fS_1, fS_2, f\mathbb{A})) \leqslant C_{x_0}\, \ln^{\kappa-p}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right), \tag{2.100}$$

З (2.99) і (2.100) отримаємо оцінку (2.98). Лему доведено.

Справедливою є наступна лема.

Лема 2.9.2. *Нехай* $1 < p < n$, D *і* D' *— обмежені області в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. *Припустимо, що* $f: D \to D'$ *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля в точці* $x_0 \in D$ *і існують* $C_{x_0} > 0$, $\kappa \in [0, p)$ *такі, що для будь-яких* $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ *виконується умова (2.97). Тоді для всіх* $r < \delta_0 \leqslant \min\{1, \operatorname{dist}^2(x_0, \partial D)\}$

$$m(fB(x_0, r)) \leqslant \nu_0\, C_{x_0}^{\frac{n}{n-p}}\, \ln^{-\frac{(p-\kappa)n}{n-p}}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{2.101}$$

де ν_0 *— позитивна стала, яка залежить тільки від* n, p *і* κ.

Доведення. Розглянемо конденсатор

$$\mathcal{E} = \left(B(x_0, \sqrt{r}), \overline{B(x_0, r)}\right), \quad 0 < r < \delta_0 .$$

За лемою 2.9.1

$$\operatorname{cap}_p f\mathcal{E} \leqslant 2^{p-\kappa} C_{x_0} \cdot \ln^{\kappa-p}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{2.102}$$

Враховуючи твердження 1.1.7, див. співвідношення (1.8), маємо

$$\operatorname{cap}_p f\mathcal{E} \geqslant \nu_1\, [m(fB(x_0, r))]^{\frac{n-p}{n}}, \tag{2.103}$$

де ν_1 — стала, яка залежить тільки від розмірності простору n і p.

Зі співвідношень (2.102) і (2.103) випливає, що

$$m(fB(x_0, r)) \leqslant \nu_0\, C_{x_0}^{\frac{n}{n-p}}\, \ln^{-\frac{(p-\kappa)n}{n-p}}\left(\frac{1}{r}\right),$$

де ν_0 — позитивна стала, яка залежить тільки від n, p і κ. Лему доведено.

Нижче наведено теорему про оцінку спотворення відстані.

Теорема 2.9.1. *Нехай* $n-1 < p < n$, D *і* D' *— обмежені області в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. *Припустимо, що* $f: D \to D'$ *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно*

p-модуля в точці $x_0 \in D$ і існують числа $C_{x_0} > 0$, $\kappa \in [0, p)$ такі, що для будь-яких $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ виконується умова

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{Q(x)\,dm(x)}{|x-x_0|^p} \leqslant C_{x_0}\,\ln^{\kappa}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right).$$

Тоді для всіх $x \in B(x_0, \delta_0)$, $\delta_0 \in \left(0, \min\{1, \operatorname{dist}^4(x_0, \partial D)\}\right)$, виконується нерівність

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \nu_0\, C_{x_0}^{\frac{1}{n-p}}\, \ln^{-\frac{p-\kappa}{n-p}} \frac{1}{|x-x_0|}, \tag{2.104}$$

де ν_0 — позитивна стала, яка залежить тільки від n, p і κ.

Доведення. Покладемо $\varepsilon = |x - x_0| < \delta_0$. Розглянемо конденсатор

$$\mathcal{E}_\varepsilon = \left(B(x_0, \sqrt{\varepsilon}), \overline{B(x_0, \varepsilon)}\right).$$

З леми 2.9.1 випливає справедливість оцінки

$$\operatorname{cap}_p f\mathcal{E}_\varepsilon \leqslant 2^{p-\kappa}\, C_{x_0}\, \ln^{\kappa-p}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{2.105}$$

З іншого боку, за твердженням 1.1.6 ми отримаємо

$$\operatorname{cap}_p f\mathcal{E}_\varepsilon \geqslant \nu_1 \left(\frac{d^p\left(\overline{fB(x_0,\varepsilon)}\right)}{m^{1-n+p}(fB(x_0,\sqrt{\varepsilon}))}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{2.106}$$

де ν_1 — позитивна стала, яка залежить тільки від n і p.

З (2.105) і (2.106) випливає, що

$$d\left(\overline{fB(x_0,\varepsilon)}\right) \leqslant \nu_2\, C_{x_0}^{\frac{n-1}{p}}\, \ln^{-\frac{(n-1)(p-\kappa)}{p}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) m^{1-n+p}\left(fB(x_0,\sqrt{\varepsilon})\right), \tag{2.107}$$

де ν_2 — позитивна стала, яка залежить тільки від n, p і κ.

З леми 2.9.2 випливає оцінка міри образу кулі $B(x_0, \sqrt{\varepsilon})$, а саме:

$$m\left(fB(x_0,\sqrt{\varepsilon})\right) \leqslant \nu_3\, C_{x_0}^{\frac{n}{n-p}}\, \ln^{-\frac{(p-\kappa)n}{n-p}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \tag{2.108}$$

де ν_3 — позитивна стала, яка залежить тільки від n, p і κ.

Отже, зі співвідношень (2.107) і (2.108) отримуємо

$$d\left(\overline{fB(x_0,\varepsilon)}\right) \leqslant \nu_0\, C_{x_0}^{\frac{1}{n-p}}\, \ln^{-\frac{p-\kappa}{n-p}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

де ν_0 — позитивна стала, яка залежить тільки від n, p і κ.

Тепер бажана оцінка спотворення відстані (2.9.3) випливає з очевидної нерівності $d\left(\overline{fB(x_0,\varepsilon)}\right) \geqslant |f(x)-f(x_0)|$. Теорему доведено.

Наведемо деякі корисні наслідки з теореми 2.9.1.

Наслідок 2.9.1. *Нехай $n-1<p<n$, D і D' — обмежені області в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$. Припустимо, що $f: D\to D'$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля в точці $x_0\in D$ і $Q\in L_{\frac{n}{n-p}}(B(x_0,\delta_0))$. Тоді*

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant \nu_0 \|Q\|_{\frac{n}{n-p}}^{\frac{1}{n-p}} \ln^{-\frac{p(n-1)}{n(n-p)}} \frac{1}{|x-x_0|} \tag{2.109}$$

для всіх $x\in B(x_0,\delta_0)$, де $\delta_0\in\big(0,\min\{1,\operatorname{dist}^4(x_0,\partial D)\}\big)$,

$$\|Q\|_{\frac{n}{n-p}} = \left(\int\limits_{B(x_0,\delta_0)} Q^{\frac{n}{n-p}}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{n-p}{n}}$$

— норма в просторі $L_{\frac{n}{n-p}}(B(x_0,\delta_0))$ і ν_0 — позитивна стала, яка залежить тільки від n і p.

Доведення. За нерівністю Гельдера при $q=\frac{n}{n-p}$ і $q'=\frac{n}{p}$ ми отримуємо

$$\int\limits_{\mathbb{A}} \frac{Q(x)\,dm(x)}{|x-x_0|^p} \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{A}} Q^{\frac{n}{n-p}}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{n-p}{n}} \left(\int\limits_{\mathbb{A}} \frac{dm(x)}{|x-x_0|^n}\right)^{\frac{p}{n}},$$

де $\mathbb{A}=\mathbb{A}(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$.

Отже,

$$\int\limits_{\mathbb{A}} \frac{Q(x)\,dm(x)}{|x-x_0|^p} \leqslant \left(\int\limits_{B} Q^{\frac{n}{n-p}}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{n-p}{n}} \left(\omega_{n-1}\ln\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\right)^{\frac{p}{n}},$$

де $B=B(x_0,\delta_0)$.

Застосувавши теорему 2.9.1, в якій оберемо $\kappa=\frac{p}{n}$ і $C_{x_0}=\omega_{n-1}^{\frac{p}{n}}\|Q\|_{\frac{n}{n-p}}$, ми отримаємо оцінку (2.109). Наслідок 2.9.1 доведено.

Наслідок 2.9.2. *Нехай $n-1 < p < n$, D і D' — обмежені області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Припустимо, що $f : D \to D'$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля в точці $x_0 \in D$ і існує число $K_{x_0} > 0$ таке, що для майже всіх $t \in (0,\, \delta_0)\,, \delta_0 \in \big(0, \min\{1, \mathrm{dist}^4(x_0, \partial D)\big)$, виконується умова*

$$q_{x_0}(t) \leqslant K_{x_0}\, t^{p-n}\,. \qquad (2.110)$$

Тоді для всіх $x \in B(x_0, \delta_0)$ виконується нерівність

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \nu_0\; K_{x_0}^{\frac{1}{n-p}}\; \ln^{-\frac{p-1}{n-p}} \frac{1}{|x-x_0|}\,, \qquad (2.111)$$

де ν_0 — позитивна стала, яка залежить тільки від n і p.

Доведення. Справді, користуючись умовою (2.110) і теоремою Фубіні, отримуємо

$$\int\limits_{\mathbb{A}} \frac{Q(x)\, dm(x)}{|x-x_0|^p} = \omega_{n-1} \int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} q_{x_0}(t) t^{n-p-1}\, dt \leqslant \omega_{n-1}\, K_{x_0} \int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dt}{t} = \omega_{n-1}\, K_{x_0}\, \ln \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\,,$$

де $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Застосувавши теорему 2.9.1 при $\kappa = 1$ і $C_{x_0} = \omega_{n-1} K_{x_0}$, ми отримаємо оцінку (2.111). Наслідок 2.9.2 доведено.

Покладаючи в теоремі 2.9.1 $\kappa = 0$, приходимо до наступного наслідку.

Наслідок 2.9.3. *Нехай $n-1 < p < n$, D і D' — обмежені області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Припустимо, що $f : D \to D'$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля в точці $x_0 \in D$ і існують числа $C_{x_0} > 0$, $\delta_0 \in \big(0, \min\{1, \mathrm{dist}^4\,(x_0, \partial D)\}\big)$ такі, що виконується умова*

$$\int\limits_{B(x_0,\delta_0)} \frac{Q(x)\, dm(x)}{|x-x_0|^p} \leqslant C_{x_0} < \infty\,.$$

Тоді для всіх $x \in B(x_0, \delta_0)$, виконується нерівність

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \nu_0\, C_{x_0}^{\frac{1}{n-p}}\; \ln^{-\frac{p}{n-p}} \frac{1}{|x-x_0|}\,,$$

де ν_0 — позитивна стала, яка залежить тільки від n, p і κ.

Лема 2.9.2 дозволяє нам також дослідити асимптотичну поведінку кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля у фіксованій точці.

Теорема 2.9.2. *Нехай $1 < p < n$, $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \geqslant 2$, — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля, $f(0) = 0$. Припустимо, що існують числа $C_0 > 0$, $\kappa \in [0, p)$ такі, що для будь-яких $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1$ виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{Q(x)}{|x|^p}\, dm(x) \leqslant C_0 \ln^{\kappa} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right). \tag{2.112}$$

Тоді

$$\liminf_{x\to 0} |f(x)| \ln^{\frac{p-\kappa}{n-p}} \frac{1}{|x|} \leqslant \nu_0\, C_0^{\frac{1}{n-p}}, \tag{2.113}$$

де ν_0 — позитивна стала, яка залежить тільки від n, p і κ.

Доведення. Покладемо $l_f(\varepsilon) = \min\limits_{|x|=\varepsilon} |f(x)|$ і $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \varepsilon\}$. Враховуючи умову $f(0) = 0$, отримуємо $\Omega_n\, l_f^n(\varepsilon) \leqslant m(fB_\varepsilon)$ і, отже,

$$l_f(\varepsilon) \leqslant \left(\frac{m(fB_\varepsilon)}{\Omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{2.114}$$

За нерівністю (2.114) і за лемою 2.9.2 маємо оцінку

$$l_f(\varepsilon) \leqslant \left(\frac{\lambda_0}{\Omega_n}\right)^{\frac{1}{n}} C_0^{\frac{1}{n-p}} \ln^{-\frac{p-\kappa}{n-p}} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Отже,

$$\liminf_{x\to 0} |f(x)| \ln^{\frac{p-\kappa}{n-p}} \frac{1}{|x|} = \liminf_{\varepsilon\to 0} l_f(\varepsilon) \ln^{\frac{p-\kappa}{n-p}} \frac{1}{\varepsilon} \leqslant \nu_0\, C_0^{\frac{1}{n-p}},$$

де ν_0 — позитивна стала, яка залежить тільки від n, p і κ. Теорему доведено.

Наведемо деякі наслідки з теореми 2.9.2.

Наслідок 2.9.4. *Нехай $p \in (1, n)$ і нехай $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \geqslant 2$, — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля, $f(0) = 0$. Якщо $Q \in L_{\frac{n}{n-p}}(\mathbb{B}^n)$, то*

$$\liminf_{x\to 0} |f(x)| \ln^{\frac{p(n-1)}{n(n-p)}} \frac{1}{|x|} \leqslant \nu_0 \|Q\|_{\frac{n}{n-p}}^{\frac{1}{n-p}},$$

де $\|Q\|_{\frac{n}{n-p}} = \left(\int\limits_{\mathbb{B}^n} Q^{\frac{n}{n-p}}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{n-p}{n}}$ *— норма в просторі* $L_{\frac{n}{n-p}}(\mathbb{B}^n)$, ν_0 *— деяка позитивна стала, яка залежить тільки від* n *і* p.

Покладаючи в теоремі 2.9.2 $\kappa = 0$, приходимо до наступного наслідку.

Наслідок 2.9.5. *Нехай* $1 < p < n$, $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \geqslant 2$, *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля,* $f(0) = 0$. *Припустимо, що існують числа* $C_0 > 0$, $0 < \varepsilon_0 < 1$ *такі, що*

$$\int\limits_{B(0,\varepsilon_0)} \frac{Q(x)}{|x|^p}\,dm(x) \leqslant C_0 < \infty\,.$$

Тоді

$$\liminf_{x\to 0} |f(x)|\,\ln^{\frac{p}{n-p}}\frac{1}{|x|} \leqslant \nu_0\,C_0^{\frac{1}{n-p}}\,,$$

де ν_0 *— позитивна стала, яка залежить тільки від* n, p *і* κ.

Наслідок 2.9.6. *Нехай* $1 < p < n$, $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \geqslant 2$, *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля,* $f(0) = 0$. *Припустимо, що існує число* $K > 0$ *таке, що для майже всіх* $t \in (0,1)$ *виконується умова*

$$q(t) \leqslant K\,t^{p-n}\,.$$

Тоді

$$\liminf_{x\to 0} |f(x)|\,\ln^{\frac{p-1}{n-p}}\frac{1}{|x|} \leqslant \nu_0\,K^{\frac{1}{n-p}}\,, \tag{2.115}$$

де ν_0 *— деяка позитивна стала, яка залежить тільки від* n *і* p.

Наведемо приклад кільцевого Q-гомеоморфізму відносно p-модуля, який вказує на те, що порядок зростання в оцінці (2.115) є точним.

Приклад 2.9.1. Нехай $n \geqslant 2$ і $p \in (1,n)$. Визначимо відображення $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ у наступний спосіб:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}\left(1 + \frac{n-p}{p-1}\,\ln\frac{1}{|x|}\right)^{-\frac{p-1}{n-p}}, & x \neq 0\,, \\ 0\,, & x = 0\,. \end{cases}$$

Покажемо, що вказане відображення є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля у точці $x_0 = 0$, причому $Q(x) = |x|^{p-n}$. Очевидно, що

$q_{x_0}(t)=t^{p-n}$. Розглянемо кільце $\mathbb{A}=\mathbb{A}(0,r_1,r_2)$, $0<r_1<r_2<1$. Зауважимо, що відображення f перетворює $\mathbb{A}(0,r_1,r_2)$ на кільце $\widetilde{\mathbb{A}}=\widetilde{\mathbb{A}}\,(0,\widetilde{r}_1,\widetilde{r}_2)$, де

$$\widetilde{r}_i=\left(1+\frac{n-p}{p-1}\int\limits_{r_i}^{1}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{-\frac{p-1}{n-p}},\quad i=1,2\,.$$

Нехай Γ — сім'я всіх кривих, які з'єднують сфери $S(0,r_1)$ і $S(0,r_2)$ у кільці $\mathbb{A}$. Тоді за співвідношенням (1.3)

$$M_p(f\Gamma)=\omega_{n-1}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left((\widetilde{r}_1)^{\frac{p-n}{p-1}}-(\widetilde{r}_2)^{\frac{p-n}{p-1}}\right)^{1-p}\,. \qquad (2.116)$$

Підставивши обрані вище значення $\widetilde{r}_1$ і $\widetilde{r}_2$ у (2.116), ми отримаємо

$$M_p(f\Gamma)=\frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{p-1}}\,.$$

Отже, за теоремою 2.2.1 гомеоморфізм f є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля у точці $x_0=0$ при $Q(x)=|x|^{p-n}$. Зауважимо, що $Q\notin L_{\frac{n}{n-p}}(\mathbb{B}^n)$. Проте, легко бачити, що

$$\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|\,\ln^{\frac{p-1}{n-p}}\frac{1}{|x|}=\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{\frac{p-1}{n-p}}\,.$$

Висновки

В розділі 2 досліджено властивості кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля:

1) отримано характеризацію кільцевих Q-гомеоморфізмів в термінах p-модуля;

2) отримано достатні умови диференційовності м.с. кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля;

3) отримано оцінки міри образу кулі при кільцевих Q-гомеоморфізмах відносно p-модуля;

4) доведено аналог теореми Ікоми–Шварца та її ліпшицевий, степеневий та логарифмічний аналоги;

5) встановлено достатні умови скінченної ліпшицевості, локальної і логарифмічної гельдеровості кільцевих Q-гомеоморфізмів;

6) отримано аналог результату Мартіо–Рікмана–Вяйсяля про «сильне» зростання в околі нескінченності відображень з обмеженим спотворенням.

РОЗДІЛ 3

ВЛАСТИВОСТІ НИЖНІХ Q-ГОМЕОМОРФІЗМІВ

У цьому розділі досліджуються властивості нижніх Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля. Результати цього розділу опубліковано в роботах [137, 139, 141, 144, 145, 260].

3.1. p-модулі сім'ї поверхонь

Наведемо означення p-модуля сім'ї k-вимірних поверхонь.

Означення 3.1.1. Нехай Γ — сім'я k-вимірних поверхонь S і $p \in (1, \infty)$ — задане фіксоване число. Тоді p*-модулем* сім'ї Γ називається величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\, dm(x)\,.$$

Означення 3.1.2. Говорять, що властивість P має місце для p*-майже всіх* (p-м.в.) k-вимірних поверхонь S сім'ї Γ, якщо підсім'я всіх поверхонь сім'ї Γ, для яких властивість P порушується, має p-модуль нуль.

Означення 3.1.3. Говорять (див. п. 9.2 в [342]), що вимірна за Лебегом функція $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ є *узагальнено* p*-допустимою* для сім'ї Γ, що складається із $(n-1)$-вимірних поверхонь S в $\mathbb{R}^n$, і пишуть $\rho \in \operatorname{ext}_p \operatorname{adm} \Gamma$, якщо

$$\int\limits_S \rho^{n-1}(x)\, d\mathcal{A} \geqslant 1$$

для p-майже всіх $S \in \Gamma$.

Справедлива наступна лема.

Лема 3.1.1. *Нехай $x_0 \in D$ і $p > n-1$. Якщо деяка властивість P має місце для p-майже всіх сфер $D(x_0, r) = S(x_0, r) \cap D$, то P також має місце для майже всіх сфер $D(x_0, r)$ по відношенню до параметра $r \in \mathbb{R}$. Навпаки, нехай сім'я P має місце для майже всіх r і множин $D(x_0, r)$, $r \in \mathbb{R}$, що відповідають цим r, тоді P також виконується для p-майже всіх поверхонь $D(x_0, r) = S(x_0, r) \cap D$.*

Доведення. Необхідність. Нехай деяка властивість P має місце для p-майже всіх сфер $D(x_0, r) = S(x_0, r) \cap D$, де "$p$-майже всіх" розуміється в сенсі p-модуля сім'ї поверхонь, див. означення 3.1.2. Покажемо, що властивість P також має місце для майже всіх сфер $D(x_0, r)$ по відношенню до параметра $r \in \mathbb{R}$. Достатньо розглянути випадок, коли область D обмежена. Припустимо, що твердження леми не є вірним. Тоді знайдеться сім'я Γ сфер $D(x_0, r)$, для якої властивість P виконується в сенсі p-майже всіх поверхонь відносно p-модуля, проте, порушується для деякої множини індексів $r \in \mathbb{R}$ додатної міри.

Внаслідок регулярності міри Лебега m_1 знайдеться борелева множина $B \subset \mathbb{R}$ така що $m_1(B) > 0$ і властивість P порушується для майже всіх $r \in B$. Нехай $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ — допустима функція для сім'ї Γ. Враховуючи, що B — борелева, ми можемо вважати, що $\rho \equiv 0$ зовні $E = \{x \in D : \exists\, r \in B : |x - x_0| = r\}$. По нерівності Гельдера

$$\int\limits_E \rho^{n-1}(x)\ dm(x) \ \leqslant\ \left(\int\limits_E \rho^p(x)\ dm(x)\right)^{\frac{n-1}{p}} \left(\int\limits_E\ dm(x)\right)^{\frac{p-n+1}{p}}$$

і отже, враховуючи теорему Фубіні див., напр., теорему 8.1, розд. III в [131],

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\ dm(x)\ \geqslant\ \frac{\left(\int\limits_E \rho^{n-1}(x)\ dm(x)\right)^{\frac{p}{n-1}}}{\left(\int\limits_E\ dm(x)\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}}\ \geqslant\ \frac{(m_1(B))^{\frac{p}{n-1}}}{c}$$

для деякого $c > 0$, тобто, $M_p(\Gamma) > 0$, що суперечить припущенню леми. Перша частина леми 3.1.1 доведена.

Достатність. Нехай властивість P має місце для майже всіх r і всіх відповідних цим r сфер $D(x_0, r)$, $r \in \mathbb{R}$. Покажемо, що P також виконується для майже всіх поверхонь $D(x_0, r) := S(x_0, r) \cap D$ в сенсі означення 3.1.2.

Позначимо через Γ_0 сім'ю всіх перетинів $D_r := D(x_0, r)$ сфер $S(x_0, r)$ з областю D, для яких властивість P не має місця. Нехай R позначає множину всіх $r \in \mathbb{R}$ таких, що $D_r \in \Gamma_0$. Якщо $m_1(R) = 0$, то за теоремою Фубіні отримуємо, що $m(E) = 0$, де $E = \{x \in D : |x - x_0| = r \in R\}$. Зауважимо, що функція $\rho_1 : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, визначена символом ∞ при $x \in E$, і довизначена нулем в інших точках, є узагальнено p-допустимою для Γ_0. Отже, $M_p(\Gamma_0) \leqslant \int\limits_E \rho_1^p dm(x) = 0$, отже, $M_p(\Gamma_0) = 0$.

Лему 3.1.1 повністю доведено.

3.2. Нижні Q-гомеоморфізми відносно p-модуля, їх зв'язок з кільцевими Q-гомеоморфізмами

У роботі [248] Ф. Герінг визначив K-квазіконформне відображення як гомеоморфізм, що змінює модуль кільцевої області не більше, ніж в K разів. Наступне поняття мотивоване цим "кільцевим" визначенням Герінга.

Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$, $Q : D \to (0, \infty)$ — вимірна за Лебегом функція.

Означення 3.2.1. Гомеоморфізм $f : D \to D'$ будемо називати *нижнім Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля у точці* $x_0 \in D$, якщо

$$M_p\left(f \Sigma_{\mathbb{A}}\right) \geqslant \inf_{\rho \in \mathrm{ext_p\,adm}\, \Sigma_{\mathbb{A}}} \int\limits_{\mathbb{A}} \frac{\rho^p(x)}{Q(x)}\, dm(x) \tag{3.1}$$

для кожного кільця

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon_1 < |x - x_0| < \varepsilon_2\}, 0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 < d_0,$$

де $d_0 = \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$, а $\Sigma_{\mathbb{A}}$ — сім'я всіх сфер

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}, \qquad r \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

Перш ніж доводити основні результати про нижні Q-гомеоморфізми відносно p-модуля, наведемо допоміжну лему 2.1 з роботи [49], див. також лему 9.2 в монографії [342].

Лема 3.2.1. *Нехай* (X,μ) *— вимірний простір зі скінченною мірою* μ, $q\in(1,\infty)$, *і нехай* $\varphi : X\to(0,\infty)$ *— вимірна функція. Покладемо*

$$I(\varphi,q)=\inf_{\alpha}\int\limits_{X}\varphi\,\alpha^{q}\,d\mu\,, \tag{3.2}$$

де інфімум береться по всім вимірним функціям $\alpha : X\to[0,\infty]$ *таким, що*

$$\int\limits_{X}\alpha\,d\mu=1\,.$$

Тоді

$$I(\varphi,q)=\left[\int\limits_{X}\varphi^{-\lambda}\,d\mu\right]^{-\frac{1}{\lambda}}\,,$$

де $\lambda=1/(q-1)\in(0,\infty)$. *Крім того, інфімум в (3.2) досягається тільки для функції* $\alpha_0=C\cdot\varphi^{-\lambda}$, *де* $C=\left(\int\limits_{X}\varphi^{-\lambda}\,d\mu\right)^{-1}$.

Нижче наведено критерій для нижніх Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля при $p>n-1$.

Теорема 3.2.1. *Нехай* D *— область в* $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $x_0\in D$. *Припустимо, що* $Q : D\to(0,\infty)$ *— вимірна функція. Гомеоморфізм* $f : D\to\mathbb{R}^n$ *є нижнім* Q*-гомеоморфізмом у точці* x_0 *відносно* p*-модуля при* $p>n-1$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$M_p(f\Sigma_{\mathbb{A}})\geqslant\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\frac{dr}{||\,Q||_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)}\,,\quad \textit{для всіх}\quad 0<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_2<d_0, \tag{3.3}$$

де $d_0=\operatorname{dist}(x_0,\partial D)$, $\Sigma_{\mathbb{A}}$ *— сім'я всіх сфер* $S(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^n : |\,x-x_0|=r\}$, $r\in(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, *і*

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)=\left(\int\limits_{S(x_0,r)}Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\,d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}\,.$$

Інфімум в (3.1) досягаєтьса тільки для функції

$$\rho_0(x) = \left(\frac{Q(x)}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(|x-x_0|)} \right)^{\frac{1}{p-n+1}} .$$

Доведення. Відзначимо, що в (3.1) за теоремою Лузіна

$$\inf_{\rho\in \mathrm{adm}\Sigma_{\mathbb{A}}} \int\limits_{\mathbb{A}} \frac{\rho^p(x)}{Q(x)}\, dm(x) = \inf_{\rho\in \mathrm{ext_p adm}\Sigma_{\mathbb{A}}} \int\limits_{\mathbb{A}} \frac{\rho^p(x)}{Q(x)}\, dm(x)\,.$$

Крім того, для кожної $\rho \in \mathrm{ext_p adm}\, \Sigma_{\mathbb{A}}$ функція

$$\mathcal{J}_\rho(r) := \int\limits_{S(x_0,r)} \rho^{n-1}(x)\, d\mathcal{A} \neq 0$$

є м.с. вимірною відносно параметра r, наприклад, за теоремою Фубіні. Таким чином, ми можемо вимагати рівність $\mathcal{J}_\rho(r) \equiv 1$ м.с. замість умови допустимості (1.49), і

$$\inf_{\rho\in \mathrm{ext_p adm}\Sigma_{\mathbb{A}}} \int\limits_{\mathbb{A}} \frac{\rho^p(x)}{Q(x)}\, dm(x) = \int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \left(\inf_{\alpha\in I(r)} \int\limits_{S(x_0,r)} \frac{\alpha^q(x)}{Q(x)}\, d\mathcal{A} \right) dr\,,$$

де $q = p/(n-1) > 1$, а через $I(r)$ позначено множину всіх вимірних функцій α на сфері $S(x_0, r)$ таких, що

$$\int\limits_{S(x_0,r)} \alpha(x)\, d\mathcal{A} = 1\,.$$

Отже, теорема 3.2.1 випливає з леми 3.2.1, якщо покласти $X = S(x_0, r)$, μ — $(n-1)$-вимірна площа на $S(x_0, r)$, $\varphi = \frac{1}{Q}|_{S(x_0,r)}$ і $q = p/(n-1) > 1$.

Отже, нерівність (3.3) є точною для нижніх Q-гомеоморфізмів. Теорему доведено.

Справедлива наступна лема.

Лема 3.2.2. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Припустимо, що $Q : D \to (0, \infty)$ — вимірна за Лебегом функція і $f : D \to D'$ — нижній*

Q-гомеоморфізм у точці $x_0 \in D$ відносно p-модуля при $p > n-1$. Тоді виконується оцінка

$$M_{\frac{p}{p-n+1}}\left(\Delta(fS_1, fS_2, fD)\right) \leqslant \left(\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}}, \tag{3.4}$$

де $S_j = S(x_0, \varepsilon_j), j = 1, 2,\ 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < d(x_0, \partial D)$.

Доведення. Дійсно, нехай $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < d(x_0, \partial D)$ і $S_i = S(x_0, \varepsilon_i),\ i = 1, 2$. Тоді згідно нерівностей Хессе і Цимера, див., напр., [294] і [452],

$$M_{\frac{p}{p-n+1}}\left(f\left(\Delta(S_1, S_2, D)\right)\right) \leqslant \frac{1}{M_p^{\frac{n-1}{p-n+1}}(f\Sigma_{\mathbb{A}})}, \tag{3.5}$$

оскільки $f\Sigma_{\mathbb{A}} \subset \Sigma\left(fS_1, fS_2, fD\right)$, де $\Sigma_{\mathbb{A}}$ позначає сукупність всіх сфер із центром у точці x_0, розташованих між сферами S_1 і S_2, а $\Sigma\left(fS_1, fS_2, fD\right)$ складається з усіх $(n-1)$- вимірних поверхонь в fD, які відокремлюють fS_1 і fS_2. Зі співвідношення (3.5) за теоремою 3.2.1 випливає висновок леми 3.2.2. Лему доведено.

Нижче наведено теорему про взаємозв'язок кільцевих і нижніх Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля.

Теорема 3.2.2. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$. Припустимо, що $Q : D \to (0, \infty)$ — вимірна за Лебегом функція така, що $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) \neq \infty$ для м.в. $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ і $f : D \to D'$ — нижній Q-гомеоморфізм у точці x_0 відносно p-модуля при $p > n-1$. Тоді f є кільцевим Q_*-гомеоморфізмом відносно $\frac{p}{p-n+1}$-модуля у точці x_0 при $Q_*(x) = Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)$.*

Доведення. Дійсно, для функції $Q_*(x) = Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)$ маємо

$$q^*_{x_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \int\limits_{S(x_0,r)} Q_*(x)\, d\mathcal{A} =$$

$$= \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \int\limits_{S(x_0,r)} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, d\mathcal{A} = \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\, \|Q\|^{\frac{n-1}{p-n+1}}_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)\,.$$

Тоді нерівність (3.4) перепишемо у наступному вигляді:

$$M_\alpha\left(\Delta\left(fS_1,\, fS_2\,, f\mathbb{A}\right)\right) \leqslant \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{\alpha-1}}\left(q^*_{x_0}(t)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}}\right)^{\alpha-1}}\,,$$

де $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$.

Звідси за теоремою 2.2.1 робимо висновок, що f є кільцевим Q_*-гомеоморфізмом відносно α-модуля у точці x_0 при $Q_*(x) = Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)$. Теорему доведено.

Із теореми Фубіні та теореми 3.2.2 випливає наступне твердження.

Наслідок 3.2.1. *У просторі* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, *будь-який нижній* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля* $f : D \to D'$ *у точці* $x_0 \in D$, *при* $p > n-1$ *та* $Q \in L^{\frac{n-1}{p-n+1}}_{\rm loc}(D)$ *є кільцевим* Q_**-гомеоморфізмом відносно* $\frac{p}{p-n+1}$*-модуля у точці* x_0 *при* $Q_*(x) = Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)$.

3.3. Локальна гельдеровість нижніх Q-гомеоморфізмів

Даний підрозділ присвячено локальній гельдеровості нижніх Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля, $n-1 < p < n$.

Нижче наведено лему про оцінку спотворення p-ємності сферичного конденсатора для нижніх Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля.

Лема 3.3.1. *Нехай* D *і* D' *— області в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ *. Припустимо, що* $Q : D \to (0,\infty)$ *— вимірна за Лебегом функція та* $f : D \to D'$ *— нижній* Q*-гомеоморфізм в точці* $x_0 \in D$ *відносно* p*-модуля при* $p > n$ *. Якщо для деяких скінченних чисел* $\lambda > 1$ *,* $\sigma > 0$ *та* $C_{x_0} > 0$ *виконується умова*

$$\varepsilon^\sigma \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)} \geqslant C_{x_0} \tag{3.6}$$

для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in \left(0, \frac{\mathrm{dist}\,(x_0, \partial D)}{\lambda}\right)$, *то*

$$\mathrm{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}} \left(fB\,(x_0, \lambda\varepsilon)\,, \overline{fB\,(x_0, \varepsilon)}\right) \leqslant C_{x_0}^{-\frac{n-1}{p-n+1}}\, \varepsilon^{\frac{\sigma(n-1)}{p-n+1}} \tag{3.7}$$

для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Доведення. Нехай $x_0 \in D$. Розглянемо сферичне кільце

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)\,, \qquad 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_0\,.$$

Тоді $\left(B\,(x_0, \varepsilon_2)\,, \overline{B\,(x_0, \varepsilon_1)}\right)$ — кільцевий конденсатор в D і $\left(fB\,(x_0, \varepsilon_2)\,, \overline{fB\,(x_0, \varepsilon_1)}\right)$ — кільцевий конденсатор в D'.

Нехай $\Gamma^* = \Delta(fS_1, fS_2, f\mathbb{A})$, де $S_j = S(x_0, r_j), j = 1, 2$. Тоді згідно з твердженням 1.1.4 маємо рівність

$$\mathrm{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}} \left(fB\,(x_0, \varepsilon_2)\,, \overline{fB\,(x_0, \varepsilon_1)}\right) = M_{\frac{p}{p-n+1}}\,(\Gamma^*)\ .$$

За лемою 3.2.2 маємо

$$\mathrm{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}} \left(fB\,(x_0, \varepsilon_2)\,, \overline{fB\,(x_0, \varepsilon_1)}\right) \leqslant \left(\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}}, \tag{3.8}$$

де $\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) = \left(\int\limits_{S(x_0,r)} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\,d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}$.

Далі покладемо в (3.8) $\varepsilon_1 = \varepsilon < \frac{\mathrm{dist}\,(x_0, \partial D)}{\lambda}$, $\varepsilon_2 = \lambda\varepsilon$ і отримаємо

$$\mathrm{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}} \left(fB\,(x_0, \lambda\varepsilon)\,, \overline{fB\,(x_0, \varepsilon)}\right) \leqslant \left(\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}}.$$

Тепер з умови (3.6) випливає оцінка

$$\mathrm{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}} \left(fB\,(x_0, \lambda\varepsilon)\,, \overline{fB\,(x_0, \varepsilon)}\right) \leqslant C_{x_0}^{-\frac{n-1}{p-n+1}}\, \varepsilon^{\frac{\sigma(n-1)}{p-n+1}}\,.$$

Лему доведено.

Справедлива наступна лема.

Лема 3.3.2. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Припустимо, що $Q : D \to (0, \infty)$ — вимірна за Лебегом функція та $f : D \to D'$ — нижній Q-гомеоморфізм в точці $x_0 \in D$ відносно p-модуля при $p > n$. Якщо для деяких скінченних чисел $\lambda > 1$, $\sigma > 0$ і $C_{x_0} > 0$ виконується умова*

$$\varepsilon^{\sigma} \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\| Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)} \geqslant C_{x_0} \tag{3.9}$$

для всіх $\varepsilon \in (0, \delta_0)\,, \delta_0 \in \left(0, \frac{\mathrm{dist}\,(x_0, \partial D)}{\lambda}\right)$, *то*

$$m\left(\overline{fB(x_0, \varepsilon)}\right) \leqslant \nu_0\, C_{x_0}^{-\frac{n}{p-n}}\, \varepsilon^{\frac{\sigma n}{p-n}} \tag{3.10}$$

для всіх $\varepsilon \in (0, \delta_0)$, де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n і p.

Доведення. Нехай $\varepsilon \in (0, \delta_0)$, $\delta_0 \in \left(0, \frac{\mathrm{dist}\,(x_0, \partial D)}{\lambda}\right)$. Розглянемо конденсатор $\left(fB\,(x_0, \lambda\varepsilon)\,, \overline{fB\,(x_0, \varepsilon)}\right)$. За лемою 3.3.1 маємо оцінку:

$$\mathrm{cap}_{\frac{p}{p-n+1}} \left(fB\,(x_0, \lambda\varepsilon)\,, \overline{fB\,(x_0, \varepsilon)}\right) \leqslant C_{x_0}^{-\frac{n-1}{p-n+1}}\, \varepsilon^{\frac{\sigma(n-1)}{p-n+1}}. \tag{3.11}$$

Використовуючи твердження 1.1.7, див. співвідношення (1.8), отримуємо

$$\mathrm{cap}_{\frac{p}{p-n+1}} \left(fB\,(x_0, \lambda\varepsilon)\,, \overline{fB\,(x_0, \varepsilon)}\right) \geqslant \nu_1 \left[m\left(\overline{fB(x_0, \varepsilon)}\right)\right]^{\frac{n(p-n+1)-p}{n(p-n+1)}}\,, \tag{3.12}$$

де ν_1 — додатна стала, яка залежить тільки від n і p.

Комбінуючи (3.11) і (3.12), приходимо до нерівності

$$m\left(\overline{fB(x_0, \varepsilon)}\right) \leqslant \nu_0\, C_{x_0}^{-\frac{n}{p-n}}\, \varepsilon^{\frac{\sigma n}{p-n}}\,,$$

де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n і p. Лему доведено.

Встановимо наступний результат.

Теорема 3.3.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Припустимо, що $Q : D \to (0, \infty)$ — вимірна за Лебегом функція та $f : D \to D'$ — нижній Q-гомеоморфізм в точці x_0 відносно p-модуля при $p \in \left(n, n + \frac{1}{n-2}\right)$. Якщо для деяких скінченних чисел $\lambda > 1$, $\sigma > 0$ і $C_{x_0} > 0$ виконується умова*

$$\varepsilon^{\sigma} \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\| Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)} \geqslant C_{x_0} \tag{3.13}$$

для всіх $\varepsilon \in (0, \delta_0)$, $\delta_0 \in \left(0, \frac{\operatorname{dist}(x_0, \partial D)}{\lambda^2}\right)$, *то*

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \nu_0\, C_{x_0}^{-\frac{1}{p-n}}\, |x - x_0|^{\frac{\sigma}{p-n}} \tag{3.14}$$

для всіх $x \in B(x_0, \delta_0)$ *і* ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n *,* p *,* λ *і* σ *.*

Доведення. Покладемо $\varepsilon = |x - x_0| < \delta_0$. Розглянемо конденсатор

$$\left(fB\,(x_0, \lambda\varepsilon)\,, \overline{fB\,(x_0, \varepsilon)}\right) .$$

З леми 3.3.1 випливає оцінка

$$\operatorname{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}} \left(fB\,(x_0, \lambda\varepsilon)\,, \overline{fB\,(x_0, \varepsilon)}\right) \leqslant C_{x_0}^{-\frac{n-1}{p-n+1}}\, \varepsilon^{\frac{\sigma(n-1)}{p-n+1}}. \tag{3.15}$$

З іншого боку, використовуючи твердження 1.1.6, отримуємо

$$\operatorname{cap}_{\frac{p}{p-n+1}} \left(fB\,(x_0, \lambda\varepsilon)\,, \overline{fB\,(x_0, \varepsilon)}\right) \geqslant \left(\nu_1\, \frac{d^{j_1}\left(\overline{fB\,(x_0, \varepsilon)}\right)}{m^{j_2}\left(fB(x_0, \lambda\varepsilon)\right)}\right)^{\frac{1}{n-1}} , \tag{3.16}$$

де $j_1 = \frac{p}{p-n+1}$, $j_2 = 1 - n + \frac{p}{p-n+1}$, ν_1 — додатна стала, яка залежить тільки від n і p.

Із оцінок (3.15) і (3.16) випливає, що

$$d\left(\overline{fB\,(x_0, \varepsilon)}\right) \leqslant \nu_2\, C_{x_0}^{\frac{-(n-1)^2}{p}}\, \varepsilon^{\frac{\sigma(n-1)^2}{p}}\, [m(fB(x_0, \lambda\varepsilon))]^{\frac{(1-n)(p-n+1)+p}{p}} , \tag{3.17}$$

де ν_2 — додатна стала, яка залежить тільки від n і p.

З леми 3.3.2 випливає наступна оцінка для міри образу кулі $B(x_0, \lambda\varepsilon)$:

$$m(fB(x_0, \lambda\varepsilon)) \leqslant \nu_3\, C_{x_0}^{-\frac{n}{p-n}}\, \lambda^{\frac{\sigma n}{p-n}}\, \varepsilon^{\frac{\sigma n}{p-n}} , \tag{3.18}$$

де ν_3 — додатна стала, яка залежить тільки від n і p.

Нарешті, комбінуючи нерівності (3.17) і (3.18), отримуємо

$$d\left(\overline{fB\,(x_0, \varepsilon)}\right) \leqslant \nu_0\, C_{x_0}^{-\frac{1}{p-n}}\, \varepsilon^{\frac{\sigma}{p-n}} ,$$

де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n, p, λ і σ.

Тепер бажана оцінка спотворення відстані випливає з очевидної нерівності $d\left(\overline{fB\left(x_0,\varepsilon\right)}\right)\geqslant |f(x)-f(x_0)|$. Теорему доведено.

Справедливе наступне твердження.

Наслідок 3.3.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$. Припустимо, що $Q:D\to(0,\infty)$ — вимірна за Лебегом функція та $f:D\to D'$ — нижній Q-гомеоморфізм в точці x_0 відносно p-модуля при $p\in\left(n,n+\frac{1}{n-2}\right)$. Якщо для деяких скінченних чисел $q_{x_0}>0$ і $\alpha\in(-\infty,p-n)$ виконується умова*

$$\left(\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{S(x_0,r)}Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\;d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}\leqslant q_{x_0}r^{-\alpha}\tag{3.19}$$

для м.в. $r\in\left(0,\frac{\operatorname{dist}(x_0,\partial D)}{4}\right)$, то

$$|f(x)-f(x_0)|\;\leqslant\;\nu_0\,q_{x_0}^{\frac{1}{p-n}}\;|x-x_0|^{1-\frac{\alpha}{p-n}}\tag{3.20}$$

для всіх $x\in B(x_0,\delta_0)$, де $\delta_0\in\left(0,\frac{\operatorname{dist}(x_0,\partial D)}{4}\right)$ і ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n і p.

Доведення. З умови (3.19) випливає нерівність

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)=\left(\int\limits_{S(x_0,r)}Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\,d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}\leqslant\omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}q_{x_0}\;r^{p-n-\alpha+1}\,,\tag{3.21}$$

де ω_{n-1} — площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$.

Нехай $\lambda=2$ і $\sigma=p-n-\alpha$. Враховуючи оцінку (3.21), отримуємо

$$\varepsilon^{p-n-\alpha}\int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon}\frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)}\geqslant\frac{\varepsilon^{p-n-\alpha}}{\omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}q_{x_0}}\int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon}\frac{dr}{r^{p-n-\alpha+1}}=$$

$$=\frac{\varepsilon^{p-n-\alpha}}{\omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}q_{x_0}}\left(\frac{(2\varepsilon)^{n-p+\alpha}-\varepsilon^{n-p+\alpha}}{n-p+\alpha}\right)=\frac{1}{\omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}q_{x_0}}\left(\frac{2^{n-p+\alpha}-1}{n-p+\alpha}\right).$$

Застосовуючи теорему 3.3.1 з параметрами

$$C_{x_0}=\frac{1}{\omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}q_{x_0}}\left(\frac{2^{n-p+\alpha}-1}{n-p+\alpha}\right),\;\sigma=p-n-\alpha\,,$$

маємо оцінку

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant \nu_0\, q_{x_0}^{\frac{1}{p-n}}\, |x-x_0|^{1-\frac{\alpha}{p-n}}$$

для всіх $x\in B(x_0,\delta_0)$, де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n і p. Наслідок 3.3.1 доведено.

Наступний результат випливає з наслідка 3.3.1 при $\alpha=0$.

Наслідок 3.3.2. *Якщо для деякого скінченного числа* $q_{x_0}>0$ *виконується умова*

$$\left(\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{S(x_0,r)} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\ d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}\leqslant q_{x_0}$$

для м.в. $r\in\left(0,\frac{\mathrm{dist}\,(x_0,\partial D)}{4}\right)$, *то*

$$|f(x)-f(x_0)|\ \leqslant\ \nu_0\, q_{x_0}^{\frac{1}{p-n}}\, |x-x_0|$$

для всіх $x\in B(x_0,\delta_0)$, *де* $\delta_0\in\left(0,\frac{\mathrm{dist}\,(x_0,\partial D)}{4}\right)$ *і* ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n *і* p.

Нижче наведено аналог відомої теореми Герінга про локальну ліпшицевість, див. теорему 2 в [249].

Наслідок 3.3.3. *Якщо для деякого скінченного числа* $K>0$ *виконується умова* $Q(x)\leqslant K$ *для м.в.* $x\in D$, *то*

$$|f(x)-f(x_0)|\ \leqslant\ \nu_0\, K^{\frac{1}{p-n}}\, |x-x_0|$$

для кожного $x_0\in D$ *і* $x\in B(x_0,\delta_0)$, $\delta_0\leqslant\frac{\mathrm{dist}\,(x_0,\partial D)}{4}$, *де* ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n *і* p.

Справедлива наступна лема.

Лема 3.3.3. *Нехай* D *— область,* $x_0\in D$, $r_0\in(0,d\,(x_0,\partial D))$. *Припустимо, що* $Q\in L_\alpha(B(x_0,r_0))$, $\alpha>\frac{n}{p-n}$ *і* $p>n$. *Тоді при* $\lambda>1$ *виконується оцінка*

$$\varepsilon^{\sigma}\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)}\geqslant\frac{c_0}{\|Q\|_\alpha}$$

для будь-якого $\varepsilon < \frac{r_0}{\lambda}$, *де* $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r) = \left(\int\limits_{S(x_0,r)} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\,d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}$ *і* $\|Q\|_\alpha = \left(\int\limits_{B(x_0,r_0)} Q^\alpha(x)\,dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, $\sigma = \frac{\alpha(p-n)-n}{\alpha}$, c_0 — *додатна стала, яка залежить тільки від* n, p, λ *і* α.

Доведення. Нехай $\lambda > 1$. Зауважимо, що

$$(\lambda-1)\,\varepsilon = \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \|\,Q\|^{\frac{n-1}{p}}_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)\cdot\frac{dr}{\|\,Q\|^{\frac{n-1}{p}}_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)}\,.$$

Застосовуючи теорему Фубіні і нерівність Гельдера з показниками $q = \frac{p}{p-n+1}$, $q' = \frac{p}{n-1}$, отримуємо інтегральну оцінку

$$\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}} \leqslant \frac{\int\limits_{\mathbb{A}} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\,dm(x)}{((\lambda-1)\varepsilon)^{\frac{p}{p-n+1}}}\,,$$

де $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0,\varepsilon,\lambda\varepsilon)$.

Застосовуючи ще раз нерівність Гельдера з показниками

$$q = \frac{\alpha(p-n+1)}{n-1} > 1, \quad q' = \frac{\alpha(p-n+1)}{\alpha(p-n+1)-n+1}\,,$$

маємо оцінку

$$\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}} \leqslant c_1\,\varepsilon^\theta\left(\int\limits_{\mathbb{A}} Q^\alpha(x)\,dm(x)\right)^{\frac{n-1}{\alpha(p-n+1)}}\,,$$

де $\theta = \frac{(n-1)(\alpha p-\alpha n-n)}{\alpha(p-n+1)}$ і c_1 — додатна стала, яка залежить тільки від n, p, λ і α. Звідси отримуємо

$$\varepsilon^\sigma\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)} \geqslant \frac{c_0}{\|Q\|_\alpha}\,,$$

де $\|Q\|_\alpha = \left(\int\limits_{B(x_0,r_0)} Q^\alpha(x)\,dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, $\sigma = \frac{\alpha(p-n)-n}{\alpha}$ і c_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n, p, λ і α. Лему доведено.

Комбінуючи теорему 3.3.1 і лему 3.3.3, отримуємо наступне твердження.

Наслідок 3.3.4. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ і $p \in \left(n, n+\frac{1}{n-2}\right)$. Припустимо, що $f : D \to D'$ — нижній Q-гомеоморфізм у точці x_0 відносно p-модуля і $Q \in L_\alpha(B(x_0, \delta_0)), \delta_0 \leqslant \frac{\operatorname{dist}(x_0, \partial D)}{4}, \alpha > \frac{n}{p-n}$. Тоді*

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \nu_0 \, \|Q\|_\alpha^{\frac{1}{p-n}} |x - x_0|^{1-\frac{n}{\alpha(p-n)}}$$

для всіх $x \in B(x_0, \delta_0)$, де $\|Q\|_\alpha = \left(\int\limits_{B(x_0,\delta_0)} Q^\alpha(x)\, dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ — норма у просторі $L_\alpha(B(x_0, \delta_0))$ і ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n, p і α.

Справедливе наступне твердження, яке можна розглядати як «степеневий» аналог теореми Ікоми–Шварца.

Теорема 3.3.2. *Нехай $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n, n \geqslant 2,$ — нижній Q-гомеоморфізм відносно p-модуля при $p > n$, який задовольняє умову $f(0) = 0$. Якщо для деяких скінченних чисел $\lambda > 1$, $\sigma > 0$ і $C_0 > 0$ виконується умова*

$$\varepsilon^\sigma \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\|\, Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)} \geqslant C_0 \tag{3.22}$$

для будь-якого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in \left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$, $\|\, Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r) = \left(\int\limits_{S_r} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}\, d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}$, $S_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$, то

$$\liminf_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{\frac{\sigma}{p-n}}} \leqslant \nu_0\, C_0^{-\frac{1}{p-n}}, \tag{3.23}$$

де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n і p.

Доведення. Припустимо, що $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in \left(0, \lambda^{-1}\right)$ і $\lambda > 1$. З леми 3.3.2 випливає оцінка

$$m\left(\overline{fB_\varepsilon}\right) \leqslant \nu_0\, C_0^{-\frac{n}{p-n}}\, \varepsilon^{\frac{\sigma n}{p-n}}, \tag{3.24}$$

де $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \varepsilon\}$ і ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n і p.

Враховуючи умову $f(0)=0$, отримуємо

$$\Omega_n\left(\min_{|x|=\varepsilon}|f(x)|\right)^n\leqslant m\left(\overline{fB_\varepsilon}\right)$$

і тому

$$\min_{|x|=\varepsilon}|f(x)|\leqslant\sqrt[n]{\frac{m\left(\overline{fB_\varepsilon}\right)}{\Omega_n}}\,. \tag{3.25}$$

Отже, враховуючи нерівності (3.24) і (3.25), маємо

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{\frac{\sigma}{p-n}}}=\liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{\min\limits_{|x|=\varepsilon}|f(x)|}{\varepsilon^{\frac{\sigma}{p-n}}}\leqslant\liminf_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{m\left(\overline{fB_\varepsilon}\right)}{\Omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}\varepsilon^{-\frac{\sigma}{p-n}}\leqslant\nu_0\,C_0^{-\frac{1}{p-n}}\,,$$

де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n і p. Теорему доведено.

Із теореми 3.3.2 при $\sigma=p-n$ безпосередньо випливає наступне твердження.

Наслідок 3.3.5. *Нехай $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$, $n\geqslant 2$, — нижній Q-гомеоморфізм відносно p-модуля при $p>n$, який задовольняє умову $f(0)=0$. Якщо для деяких скінченних чисел $\lambda>1$, $\sigma>0$ і $C_0>0$ виконується умова*

$$\varepsilon^{p-n}\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}\geqslant C_0$$

для будь-якого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0\in\left(0,\frac{1}{\lambda}\right)$, то

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|}\leqslant\nu_0\,C_0^{-\frac{1}{p-n}}\,,$$

де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n і p.

Наслідок 3.3.6. *Нехай $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$, $n\geqslant 2$, — нижній Q-гомеоморфізм відносно p-модуля при $p>n$, який задовольняє умову $f(0)=0$. Якщо для деяких скінченних чисел $q_0>0$, $\gamma\in(-\infty,p-n)$ виконується умова*

$$\left(\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{S_r}Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\;d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}\leqslant q_0\,r^{-\gamma}, \tag{3.26}$$

для м.в. $r \in (0, r_0)$ *, де* $r_0 \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ *, то*

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{1-\frac{\gamma}{p-n}}} \leqslant \nu_0 \, q_0^{\frac{1}{p-n}} \, ,$$

де ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n *і* p*.*

Доведення. З умови (3.26) випливає оцінка

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r) = \left(\int\limits_{S_r} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}} \leqslant \omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}} q_0 \; r^{p-n-\gamma+1} \, .$$

Нехай $\lambda = e$ і $\sigma = p - n - \gamma$. Тоді

$$\varepsilon^{p-n-\gamma} \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \frac{dr}{\|\, Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)} \geqslant \frac{\varepsilon^{p-n-\gamma}}{\omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}} q_0} \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \frac{dr}{r^{p-n-\gamma+1}} = C_0 \, ,$$

де $C_0 = \frac{e^{n+\gamma-p}-1}{\omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}} q_0 (n+\gamma-p)}$.

Тепер, застосовуючи теорему 3.3.2 з параметрами $\lambda = e$ і $\sigma = p - n - \gamma$, отримуємо оцінку

$$\frac{|f(x)|}{|x|^{1-\frac{\gamma}{p-n}}} \leqslant \nu_0 \, q_0^{\frac{1}{p-n}} \, ,$$

де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n і p. Наслідок 3.3.6 доведено.

Покладаючи $\gamma = 0$, отримуємо наступне твердження.

Наслідок 3.3.7. *Нехай* $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ *,* $n \geqslant 2$*, — нижній* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля при* $p > n$ *,* $f(0) = 0$ *. Якщо для деякого скінченного числа* $q_0 > 0$ *виконується умова*

$$\left(\frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{S_r} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x) \; d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}} \leqslant q_0$$

для м.в. $r \in (0, r_0)$*, де* $r_0 \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ *, то*

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \leqslant \nu_0 \, q_0^{\frac{1}{p-n}} \, ,$$

де ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n *і* p*.*

Наслідок 3.3.8. *Якщо для деякого скінченного числа $K > 0$ виконується умова $Q(x) \leqslant K$ для м.в. $x \in \mathbb{B}^n$, то*

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \leqslant \nu_0\, K^{\frac{1}{p-n}},$$

де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n і p.

Наслідок 3.3.9. *Нехай $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n, n \geqslant 2,$ — нижній Q-гомеоморфізм відносно p-модуля при $p > n$, $f(0) = 0$. Якщо $Q \in L_\alpha(\mathbb{B}^n)$, $\alpha > \frac{n}{p-n}$, то*

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{1-\frac{n}{\alpha(p-n)}}} \leqslant \nu_0 \|Q\|_\alpha^{\frac{1}{p-n}},$$

де $\|Q\|_\alpha = \left(\int\limits_{\mathbb{B}^n} Q^\alpha(x)\, dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ — норма у просторі $L_\alpha(\mathbb{B}^n)$ і ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n, p і α.

Доведення. Нехай $\lambda = 2$. Оскільки $Q \in L_\alpha(\mathbb{B}^n)$ і $\alpha > \frac{n}{p-n}$, то із леми 3.3.3 випливає, що функція Q задовольняє умову (3.22) з параметрами $\sigma = \frac{\alpha(p-n)-n}{\alpha}$, $C_0 = \frac{c_0}{\|Q\|_\alpha}$. Застосовуючи теорему 3.3.2, отримуємо оцінку

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{1-\frac{n}{\alpha(p-n)}}} \leqslant \nu_0 \|Q\|_\alpha^{\frac{1}{p-n}},$$

де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n, p і α. Наслідок 3.3.9 доведено.

3.4. Поведінка на нескінченності нижніх Q-гомеоморфізмів

У цьому підрозділі досліджено нижні Q-гомеоморфізми в околі нескінченно віддаленої точки і отримано аналог результату Мартіо–Рікмана–Вяйсяля про "сильне" зростання в околі нескінченності відображень з обмеженим спотворенням.

Нехай $R > 0$ і $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Для гомеоморфізма $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ покладемо

$$L(x_0, f, R) = \sup_{|x-x_0|\leqslant R} |f(x) - f(x_0)|.$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 3.4.1. *Нехай* $Q:\mathbb{R}^n\to(0,\infty)\,, n\geqslant 2,$ *— вимірна за Лебегом функція і* $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *— нижній* Q*-гомеоморфізм у точці* $x_0\in\mathbb{R}^n$*,* r_0 *— довільне фіксоване додатне число. Тоді*

$$\liminf_{R\to\infty} L(x_0,R,f)\,\exp\left(-\,\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}\int\limits_{r_0}^{R}\frac{d\tau}{\|\,Q\|_{\,n-1}(x_0,\tau)}\right)=M_0>0\,, \tag{3.27}$$

де $\|\,Q\|_{\,n-1}(x_0,\tau)=\left(\int\limits_{S(x_0,\tau)}Q^{n-1}(x)\,d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ *і* $S(x_0,\tau)=\{x\in\mathbb{R}^n:|x-x_0|=\tau\}$*.*

Доведення. Розглянемо сферичне кільце $\mathbb{A}=\mathbb{A}(x_0,r_0,R)$, де $R\in(0,r_0)$, $r_0\in(0,\infty)$. Тоді $\left(fB\,(x_0,R)\,,\overline{fB\,(x_0,r_0)}\right)$ — кільцевий конденсатор в $\mathbb{R}^n$ і, згідно з твердженням 1.1.4, маємо рівність

$$\mathrm{cap}\ \left(fB(x_0,R),\overline{fB(x_0,r_0)}\right)=M(\triangle(\partial fB(x_0,R),\partial fB(x_0,r_0);f\mathbb{A}))\,.$$

Оскільки f є гомеоморфізмом, то

$$\triangle\left(\partial fB\,(x_0,R)\,,\partial fB\,(x_0,r_0)\,;f\mathbb{A}\right)=f\left(\triangle\left(\partial B(x_0,R),\partial B(x_0,r_0);\mathbb{A}\right)\right).$$

Згідно з лемою 3.2.2 маємо

$$\mathrm{cap}\ \left(fB(x_0,R),\overline{fB(x_0,r_0)}\right)\leqslant\left(\int\limits_{r_0}^{R}\frac{dr}{\|\,Q\|_{\,n-1}(x_0,r)}\right)^{1-n}. \tag{3.28}$$

З іншого боку, з твердження 1.1.7, див. співвідношення (1.9), випливає оцінка

$$\mathrm{cap}\ \left(fB(x_0,R),\overline{fB(x_0,r_0)}\right)\geqslant n^n\Omega_n\ln^{1-n}\left[\frac{m\,(fB(x_0,R))}{m\left(\overline{fB(x_0,r_0)}\right)}\right], \tag{3.29}$$

де Ω_n — об'єм одиничної кулі в $\mathbb{R}^n$.

Комбінуючи (3.28) з (3.29), отримуємо

$$m\left(\overline{fB(x_0,r_0)}\right)\leqslant m\,(fB(x_0,R))\exp\left[-\,(n^n\Omega_n)^{\frac{1}{n-1}}\int\limits_{r_0}^{R}\frac{dr}{\|\,Q\|_{\,n-1}(x_0,r)}\right]. \tag{3.30}$$

Оскільки $\omega_{n-1}=n\Omega_n$, то із (3.30) випливає нерівність

$$m\left(\overline{fB(x_0,r_0)}\right)\leqslant m\left(fB(x_0,R)\right)\exp\left[-n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}\int\limits_{r_0}^{R}\frac{dr}{\|\,Q\|_{\,n-1}(x_0,r)}\right],\qquad(3.31)$$

де ω_{n-1} — площа одиничної сфери в $\mathbb{R}^n$.

Зауважимо, що $m\left(fB(x_0,R)\right)\leqslant\Omega_nL^n(x_0,R,f)$. Тому із нерівності (3.31) випливає наступна оцінка

$$\sqrt[n]{\frac{m\left(\overline{fB(x_0,r_0)}\right)}{\Omega_n}}\leqslant L(x_0,R,f)\exp\left[-\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}\int\limits_{r_0}^{R}\frac{dr}{\|\,Q\|_{\,n-1}(x_0,r)}\right].$$

Очевидно, що $M_0=\sqrt[n]{\frac{m\left(\overline{fB(x_0,r_0)}\right)}{\Omega_n}}>0$ і не залежить від R. Тепер, переходячи до нижньої границі при $R\to\infty$, отримуємо (5.10.4). Теорему доведено.

Наведемо деякі позначення. Для цілих значень $k\geqslant 0$ покладемо

$$e_0=1,\quad e_1=e,\quad e_2=e^e,\ \ldots,\ e_{k+1}=\exp e_k$$

і $\quad \ln_0 t=t,\quad \ln_1 t=\ln t,\quad \ln_2 t=\ln\ln t,\ \ldots,\ \ln_{k+1}t=\ln\ln_k t$.

З теореми 3.4.1 безпосередньо випливають наступні твердження.

Наслідок 3.4.1. *Нехай $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — нижній Q-гомеоморфізм в деякій точці $x_0\in\mathbb{R}^n$. Якщо для деякого числа $Q_0>0$ виконується умова*

$$\|\,Q\|_{\,n-1}(x_0,r)\leqslant Q_0\prod_{k=0}^{N}\ln_k\, r$$

для м.в. $r\in(e_N,\infty)$, то

$$\liminf_{R\to\infty}\frac{L(x_0,R,f)}{(\ln_N R)^{\gamma}}=M_0>0\,,$$

де $\gamma=\frac{\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}}{Q_0}$.

Наслідок 3.4.2. *Якщо для деякого числа $Q_0>0$ виконується умова*

$$\|\,Q\|_{\,n-1}(x_0,r)\leqslant Q_0\, r$$

для м.в. $r \in (1, \infty)$ *, то*

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0, R, f)}{R^{\gamma}} = M_0 > 0\,,$$

де $\gamma = \frac{\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}}{Q_0}$.

3.5. Інші властивості нижніх Q-гомеоморфізмів

У цьому підрозділі сформульовано ряд важливих наслідків, що випливають з основної теореми про взаємозв'язок між нижніми і кільцевими Q-гомеоморефізмами. При цьому ряд тверджень, шо будуть використані нами в наступних розділах при дослідженні властивостей відображень з класів Соболєва і Орліча–Соболєва, ми називаємо лемами.

Комбінуючи наслідки 3.2.1 і 2.3.3, отримуємо твердження про диференційованість м.с. нижніх Q-гомеоморфізмів.

Наслідок 3.5.1. *Нехай* D *і* D' *— області в* $\mathbb{R}^n$ *,* $n \geqslant 2$ *. Припустимо, що* $f : D \to D'$ *— нижній* Q *-гомеоморфізм відносно* p *-модуля при* $p > n$ *. Якщо* $Q \in L^s_{\rm loc}(D),$ $s = \frac{n-1}{p-n+1}$ *, то гомеоморфізм* f *є диференційовним майже скрізь в* D *.*

Із наслідка 3.2.1 і теореми 2.7.1 випливає наступне твердження про достатню умову скінченної ліпшицевості у точці для нижніх Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля.

Лема 3.5.1. *Нехай* D *і* D' *— області в* $\mathbb{R}^n$ *,* $n \geqslant 2$ *. Припустимо, що* $f : D \to D'$ *— нижній* Q *-гомеоморфізм відносно* p *-модуля при* $p \in \left(n, n + \frac{1}{n-2}\right)$ *. Якщо функція* Q *задовольняє умову*

$$Q_0 = \limsup_{\varepsilon\to 0} \left(⨍_{B(x_0,\varepsilon)} Q^s(x)\, dm(x)\right)^{\frac{1}{s}} < \infty\,, \quad s = \frac{n-1}{p-n+1}, \tag{3.32}$$

то

$$L(x_0, f) = \limsup_{x\to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leqslant \nu_0\, Q_0^{\frac{1}{p-n}},$$

де ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n *і* p *.*

Наслідок 3.5.2. *Нехай* D *і* D' *— області в* $\mathbb{R}^n$ *,* $n \geqslant 2$ *. Припустимо, що* $f : D \to D'$ *— нижній* Q *-гомеоморфізм відносно* p *-модуля при* $p \in \left(n, n + \frac{1}{n-2}\right)$ *і функція* Q *задовольняє умову*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q^s(x)\, dm(x) < \infty\,, \ s = \frac{n-1}{p-n+1}$$

для всіх $x_0 \in D$ *. Тоді гомеоморфізм* f *є скінченно ліпшицевим.*

Комбінуючи наслідки 3.2.1 та теорему 2.7.2, отримуємо наступне твердження.

Наслідок 3.5.3. *Нехай* $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ *— нижній* Q *-гомеоморфізм в точці* $x_0 = 0$ *відносно* p *-модуля при* $p > n$ *, який задовольняє умову* $f(0) = 0$ *. Припустимо, що*

$$Q_0 = \liminf_{\varepsilon \to 0} \left(\fint_{B_\varepsilon} Q^s(x)\, dm(x) \right)^{\frac{1}{s}} < \infty\,,$$

де $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| < \varepsilon\}$ *і* $s = \frac{n-1}{p-n+1}$ *. Тоді*

$$\liminf_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \leqslant \nu_0\, Q_0^{\frac{1}{p-n}},$$

де ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n *і* p *.*

Наступний результат випливає із теорем 3.2.2 і 2.9.1.

Лема 3.5.2. *Нехай* D *і* D' *— області в* $\mathbb{R}^n$ *. Нехай* $Q : D \to (0, \infty)$ *— вимірна за Лебегом функція така, що* $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) \neq \infty$ *для м.в.* $r \in (0, d_0)$ *,* $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ *, і нехай* $f : D \to D'$ *— нижній* Q *-гомеоморфізм у точці* $x_0 \in D$ *відносно* p *-модуля при* $p \in \left(n, n + \frac{1}{n-2}\right)$ *. Якщо для деяких чисел* $C_{x_0} > 0$ *і* $\kappa \in \left[0, \frac{p}{p-n+1}\right)$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, dm(x)}{|x - x_0|^{\frac{p}{p-n+1}}} \leqslant C_{x_0}\, \ln^{\kappa} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right), \tag{3.33}$$

для будь-яких $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ *, то*

$$|f(x) - f(x_0)| \ \leqslant \ \nu_0\, C_{x_0}^{\gamma}\, \ln^{-\theta} \frac{1}{|x - x_0|}\,, \tag{3.34}$$

для всіх $x \in B(x_0,\delta_0)$, *де* $\gamma = \frac{p-n+1}{(n-1)(p-n)}$, $\theta = \frac{p-\kappa(p-n+1)}{(n-1)(p-n)}$, $\delta_0 \leqslant \min\{1, \mathrm{dist}^4\,(x_0,\partial D)\}$ *і* ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n, p *і* κ.

Покладаючи в лемі 3.5.2 $\kappa=0$, приходимо до наступного твердження.

Наслідок 3.5.4. *Нехай* D *і* D' *— області в* $\mathbb{R}^n$. *Нехай* $Q : D \to (0,\infty)$ *— вимірна за Лебегом функція така, що* $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r) \neq \infty$ *для м.в.* $r \in (0,\delta_0)$, $\delta_0 \in \big(0, \min\{1, \mathrm{dist}^4\,(x_0,\partial D)\}\big)$, *і нехай* $f : D \to D'$ *— нижній* Q*-гомеоморфізм у точці* $x_0 \in D$ *відносно* p*-модуля при* $p \in \big(n, n+\frac{1}{n-2}\big)$. *Якщо для деякого числа* $C_{x_0} > 0$ *виконується умова*

$$\int\limits_{B(x_0,\delta_0)} \frac{Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\,dm(x)}{|x-x_0|^{\frac{p}{p-n+1}}} \leqslant C_{x_0} < \infty\,,$$

то

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant \nu_0\, C_{x_0}^{\gamma}\, \ln^{-\theta}\frac{1}{|x-x_0|}\,,$$

для всіх $x \in B(x_0,\delta_0)$, *де* $\gamma = \frac{p-n+1}{(n-1)(p-n)}$, $\theta = \frac{p}{(n-1)(p-n)}$ *і* ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n *і* p.

Комбінуючи наслідки 3.2.1 і 2.9.1, отримуємо наступне твердження.

Наслідок 3.5.5. *Нехай* D *і* D' *— області в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. *Припустимо, що* $f : D \to D'$ *— нижній* Q*-гомеоморфізм у точці* $x_0 \in D$ *відносно* p*-модуля,* $p \in \big(n, n+\frac{1}{n-2}\big)$, $Q \in L_{\frac{n}{p-n}}(B(x_0,\delta_0))$ *і* $\delta_0 \leqslant \min\{1, \mathrm{dist}^4(x_0,\partial D)\}$. *Тоді*

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant \nu_0\, \|Q\|_{\frac{n}{p-n}}^{\frac{1}{p-n}}\, \ln^{-\frac{p}{n(p-n)}}\frac{1}{|x-x_0|}$$

для всіх $x \in B(x_0,\delta_0)$, *де* $\|Q\|_{\frac{n}{p-n}} = \left(\int\limits_{B(x_0,\delta_0)} Q^{\frac{n}{p-n}}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{p-n}{n}}$ *— норма у просторі* $L_{\frac{n}{p-n}}(B(x_0,\delta_0))$ *і* ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n *і* p.

Наступне твердження випливає із теореми 3.2.2 та наслідка 2.9.2.

Наслідок 3.5.6. *Нехай* D *і* D' *— області в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. *Припустимо, що* $Q : D \to (0,\infty)$ *— вимірна за Лебегом функція і* $f : D \to D'$ *— нижній*

Q-гомеоморфізм у точці $x_0 \in D$ відносно p-модуля при $p \in \left(n, n+\frac{1}{n-2}\right)$. Якщо для деякого скінченного числа $Q_{x_0} > 0$ виконується умова

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) \leqslant Q_{x_0} r$$

для м.в. $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, то

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \nu_0\, Q_{x_0}^{\frac{1}{p-n}}\, \ln^{-\frac{1}{p-n}} \frac{1}{|x - x_0|}$$

для всіх $x \in B(x_0, \delta_0)$, де $\delta_0 \leqslant \min\{1, \operatorname{dist}^4(x_0, \partial D)\}$ і ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n і p.

Комбінуючи теореми 3.2.2 і 2.9.2, отримуємо наступне твердження.

Лема 3.5.3. *Нехай $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \geqslant 2$, — нижній Q-гомеоморфізм відносно p-модуля при $p > n$, що задовольняє умову $f(0) = 0$. Припустимо, що $Q : \mathbb{B}^n \to (0, \infty)$ — вимірна за Лебегом функція така, що $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r) \neq \infty$ для м.в. $r \in (0,1)$. Якщо для деяких скінченних чисел $C_0 > 0$, $\kappa \in \left[0, \frac{p}{p-n+1}\right)$ виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, dm(x)}{|x|^{\frac{p}{p-n+1}}} \leqslant C_0\, \ln^{\kappa}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right), \tag{3.35}$$

для будь-яких $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1$, то

$$\liminf_{x \to 0} |f(x)|\, \ln^{\theta}\left(\frac{1}{|x|}\right) \leqslant \nu_0\, C_0^{\gamma}\,, \tag{3.36}$$

де $\gamma = \frac{p-n+1}{(n-1)(p-n)}$, $\theta = \frac{p-\kappa(p-n+1)}{(n-1)(p-n)}$ і ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n, p і κ.

Покладаючи в лемі 3.5.2 $\kappa = 0$, приходимо до наступного твердження.

Лема 3.5.4. *Нехай $p > n$ та $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \geqslant 2$, — нижній Q-гомеоморфізм відносно p-модуля, який задовольняє умову $f(0) = 0$. Припустимо, що $Q : \mathbb{B}^n \to (0, \infty)$ — вимірна за Лебегом функція така, що $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r) \neq \infty$ для м.в. $r \in (0,1)$. Якщо для деяких чисел $C_0 > 0$, $\varepsilon_0 \in (0,1)$*

виконується умова

$$\int\limits_{B(0,\varepsilon_0)} \frac{Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\,dm(x)}{|x|^{\frac{p}{p-n+1}}} \leqslant C_0 < \infty\,, \tag{3.37}$$

то

$$\liminf_{x\to 0} |f(x)|\, \ln^{\theta}\left(\frac{1}{|x|}\right) \leqslant \nu_0\, C_0^{\gamma}\,, \tag{3.38}$$

де $\gamma = \frac{p-n+1}{(n-1)(p-n)}$, $\theta = \frac{p}{(n-1)(p-n)}$ *і* ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n *і* p.

Комбінуючи наслідки 2.9.4 і 2.9.6 з теоремою 3.2.2, отримуємо наступне твердження.

Наслідок 3.5.7. *Нехай* $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$, $n\geqslant 2$, *— нижній* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля при* $p>n$, *який задовольняє умову* $f(0)=0$. *Якщо* $Q\in L_{\frac{n}{p-n}}(\mathbb{B}^n)$, *то*

$$\liminf_{x\to 0} |f(x)|\, \ln^{\frac{p}{n(p-n)}} \frac{1}{|x|} \leqslant \nu_0 \|Q\|_{\frac{n}{p-n}}^{\frac{1}{p-n}}\,,$$

де $\|Q\|_{\frac{n}{p-n}} = \left(\int\limits_{\mathbb{B}^n} Q^{\frac{n}{p-n}}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{p-n}{n}}$ *— норма у просторі* $L_{\frac{n}{p-n}}(\mathbb{B}^n)$, ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n *і* p.

Наслідок 3.5.8. *Нехай* $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$, $n\geqslant 2$, *— нижній* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля при* $p>n$, *який задовольняє умову* $f(0)=0$. *Якщо для деякого скінченного числа* $Q_0>0$ *виконується умова*

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r) \leqslant Q_0\, r$$

для м.в. $r\in(0,\frac{1}{2})$, *то*

$$\liminf_{x\to 0} |f(x)|\, \ln^{\frac{1}{p-n}} \frac{1}{|x|} \leqslant \nu_0\, Q_0^{\frac{1}{p-n}}\,,$$

де ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n *і* p.

Нижче наведені оцінки міри образу кулі при нижніх Q-гомеоморфізмах в $\mathbb{R}^n, n\geqslant 2$.

Лема 3.5.5. *Нехай* $Q : \mathbb{B}^n \to (0,\infty), n \geqslant 2,$ *— вимірна за Лебегом функція і* $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ *— нижній* Q*-гомеоморфізм в точці* $x_0 = 0$ *відносно* p*-модуля. Тоді при* $p = n$ *виконується оцінка*

$$m(f\,\overline{B}_r) \leqslant \Omega_n \cdot \exp\left(-n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}\int\limits_r^1 \frac{d\tau}{\|\,Q\|_{\,n-1}(\tau)}\right)\,, \tag{3.39}$$

а при $p > n$ *— оцінка*

$$m(f\,\overline{B}_r) \leqslant \Omega_n \left(1 + \omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}(p-n)\int\limits_r^1 \frac{d\tau}{\|\,Q\|_{\,\frac{n-1}{p-n+1}}(\tau)}\right)^{-\frac{n}{p-n}}\,, \tag{3.40}$$

де $\overline{B}_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \,|x| \leqslant r\}$, Ω_n *— об'єм одиничної кулі* $\mathbb{R}^n$, ω_{n-1} *— площа одиничної сфери* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$ *і*

$$\|\,Q\|_{\,\frac{n-1}{p-n+1}}(\tau) = \left(\int\limits_{S_\tau} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\,d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}\,, \qquad S_\tau = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = \tau\}.$$

Доведення леми 3.5.5 повністю аналогічне доведенню теореми 2.4.1.

Очевидно, що з леми 3.5.5 випливає аналог теореми Ікоми–Шварца для нижніх Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля.

Лема 3.5.6. *Нехай* $Q : \mathbb{B}^n \to (0,\infty)\,, n \geqslant 2$ *— вимірна за Лебегом функція і* $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ *— нижній* Q*-гомеоморфізм в точці* $x_0 = 0$ *відносно* p*-модуля, який задовольняє умову* $f(0) = 0$. *Тоді при* $p > n$ *виконується оцінка*

$$\liminf_{x\to 0}\,|f(x)|\left(1 + \omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}(p-n)\int\limits_{|x|}^1 \frac{d\tau}{\|\,Q\|_{\,\frac{n-1}{p-n+1}}(\tau)}\right)^{\frac{1}{p-n}} \leqslant 1, \tag{3.41}$$

а при $p = n$ *— оцінка*

$$\liminf_{x\to 0}\,|f(x)|\,\exp\left(\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}\int\limits_{|x|}^1 \frac{d\tau}{\|\,Q\|_{\,n-1}(\tau)}\right) \leqslant 1\,, \tag{3.42}$$

де ω_{n-1} *— площа одиничної сфери* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$ *і*

$$\| Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(\tau) = \left(\int\limits_{S_\tau} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}, \quad S_\tau = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = \tau\}.$$

Висновки

У розділі 3 досліджено властивості нижніх Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля:

1) отримано характеризацію нижніх Q-гомеоморфізмів в термінах p-модуля;

2) встановлено взаємозв'язок між нижніми та кільцевими Q-гомеоморфізмами відносно p-модуля;

3) отримано достатню умову диференційовності м.с. нижніх Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля;

4) встановлено достатні умови скінченної ліпшицевості, локальної і логарифмічної гельдеровості нижніх Q-гомеоморфізмів, визначених в термінах p-модуля;

5) для нижніх Q-гомеоморфізмів, визначених в термінах p-модуля, отримано аналоги теореми Ікоми–Шварца та результату Мартіо–Рікмана–Вяйсяля про оцінку швидкості зростання на нескінченності;

6) отримано оцінку спотворення міри образу кулі при нижніх Q-гомеоморфізмах, визначених в термінах p-модуля.

РОЗДІЛ 4

ДО ТЕОРІЇ ВІДОБРАЖЕНЬ КЛАСІВ СОБОЛЄВА НА ПЛОЩИНІ

У цьому розділі вивчаються відображення класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ на комплексній площині. Результати розділу опубліковано в роботах [7, 137, 388, 408].

4.1. Зв'язок гомеоморфізмів класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ з нижніми та кільцевими Q-гомеоморфізмами

У цьому підрозділі показано, що гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі $\overline{\partial}f = \mu\,\partial f$ класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ є кільцевим і, водночас, нижнім Q-гомеоморфізмом при $Q(z) = K^T_\mu(z, z_0)$, де $K^T_\mu(z, z_0) = \frac{\left|1-\frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}\mu(z)\right|^2}{1-|\mu(z)|^2}$ — дотична дилатація.

Наведемо допоміжні відомості, які будуть нам необхідні у подальшому. Нехай D — область у комплексній площині $\mathbb{C}$ і нехай $\mu : D \to \mathbb{C}$ — вимірна функція, для якої $|\mu(z)| < 1$ м.с. (майже скрізь) в D.

Означення 4.1.1. *Рівнянням Бельтрамі* називається рівняння виду

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) f_z, \tag{4.1}$$

де $f_{\overline{z}} = \overline{\partial}f = (f_x + if_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - if_y)/2$, $z = x + iy$, f_x і f_y — частинні похідні відображення f по x і y, відповідно.

Означення 4.1.2. Функція μ називається *комплексним коефіцієнтом*, а

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}$$

дилатаційним відношенням рівняння (4.1).

Означення 4.1.3. Рівняння Бельтрамі (4.1) називається *виродженим*, якщо K_μ є суттєво необмеженою, тобто $K_\mu \notin L^\infty(D)$.

Означення 4.1.4. *Дотична дилатація* відображення f у точці z по відношенню до точки $z_0 \in \overline{D}$ визначається наступним чином:

$$K_\mu^T(z, z_0) = \frac{\left|1 - \frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}\mu(z)\right|^2}{1 - |\mu(z)|^2},$$

див., напр., [195, 196, 276, 326, 384, 394].

Вельми корисним для дослідження є наступне зауваження.

Зауваження 4.1.1. Для всіх z і $z_0 \in D$ виконується оцінка $K_\mu^T(z, z_0) \leqslant K_\mu(z)$.

Означення 4.1.5. Неперервне відображення γ відкритої підмножини Δ дійсної осі $\mathbb{R}$ або кола в D називається *штриховою лінією* (див., напр., розділ 6, п. 6.3 в [342]).

Означення 4.1.6. Нехай задана сім'я Γ штрихових ліній γ в комплексній площині $\mathbb{C}$. Борелеву функцію $\rho : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ називають *допустимою* для Γ, пишуть $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, якщо

$$\int\limits_\gamma \rho\, ds \;\geqslant\; 1 \tag{4.2}$$

для всіх $\gamma \in \Gamma$.

Означення 4.1.7. *Конформним модулем* сім'ї Γ називається величина

$$M(\Gamma) \;=\; \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{C}} \rho^2(z)\, dm(z),$$

де $dm(z)$ відповідає мірі Лебега в $\mathbb{C}$.

Означення 4.1.8. Говорять, що властивість P має місце для *м.в.* (майже всіх) $\gamma \in \Gamma$, якщо підсім'я всіх ліній в Γ, для яких P не виконується, має нульовий модуль; порівняй з [246].

Означення 4.1.9. Вимірну за Лебегом функцію $\rho : \mathbb{C} \to [0,\infty]$ називають *узагальнено допустимою* для Γ і пишуть $\rho \in \operatorname{ext} \operatorname{adm} \Gamma$, якщо (4.2) виконується для м.в. $\gamma \in \Gamma$ (див., наприклад, розд. 9, п. 9.2 в [342]).

Нагадаємо наступне поняття.

Означення 4.1.10. Для заданих областей D і D' в $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $z_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$ і вимірної функції $Q : D \to (0,\infty)$ говорять, що гомеоморфізм $f : D \to D'$ є *нижнім Q-гомеоморфізмом у точці* z_0, якщо

$$M(f\Sigma_\varepsilon) \ \geqslant \inf_{\rho \in \operatorname{ext} \operatorname{adm} \Sigma_\varepsilon} \int\limits_{D \cap \mathbb{A}_\varepsilon} \frac{\rho^2(z)}{Q(z)}\, dm(z)$$

для кожного кільця $\mathbb{A}_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z - z_0| < \varepsilon_0\}$, $\quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in (0, d_0)$, де $d_0 = \sup\limits_{z \in D} |z - z_0|$ і Σ_ε позначає сім'ю штрихових ліній, що складається з усіх перетинів кіл $S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$, $\quad r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, з областю D, див. означення 1.7.8 у випадку $n = 2$.

Зауваження 4.1.2. Це поняття може бути поширене на випадок $z_0 = \infty \in \overline{D}$ стандартним способом за допомогою інверсії T відносно одиничного кола в $\overline{\mathbb{C}}$: $T(z) = z/|z|^2$, $T(\infty) = 0$, $T(0) = \infty$.

Означення 4.1.11. Гомеоморфізм $f : D \to D'$ називається *нижнім Q-гомеоморфізмом* в точці $\infty \in \overline{D}$, якщо відображення $F = f \circ T$ є нижнім Q_*-гомеоморфізмом з $Q_* = Q \circ T$ в точці 0.

Означення 4.1.12. Гомеоморфізм $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ називається *нижнім Q-гомеоморфізмом на ∂D*, якщо f є нижнім Q-гомеоморфізмом у кожній точці $z_0 \in \partial D$.

Зараз ми покажемо, що кожен гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (4.1) класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ є нижнім Q-гомеоморфізмом при $Q(z) = K^T_\mu(z, z_0)$ і, таким чином, вся теорія граничної поведінки (див. [49], а також розділ 9 в [342]) може бути застосована до таких розв'язків. Останній факт має важливе значення при вивченні крайових задач для рівнянь Бельтрамі з виродженням, див., наприклад, [242].

Теорема 4.1.1. *Нехай* f *— гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (4.1) класу Соболєва* $W^{1,1}_{\rm loc}$. *Тоді* f *є нижнім* Q*-гомеоморфізмом у кожній точці* $z_0 \in \overline{D}$ *при* $Q(z) = K^T_\mu(z, z_0)$.

Доведення. Нехай E — множина (борелева!) всіх точок z із D, у яких f має повний диференціал і $J_f(z) \neq 0$. Відомо, що E можна представити у вигляді об'єднання зліченного набору борелевих множин E_l, $l = 1, 2, \ldots$, таких, що $f_l = f|_{E_l}$ є біліпшицевими гомеоморфізмами, див., наприклад, лему 3.2.2 в [187]. Не порушуючи загальності, можна вважати, що E_l попарно не перетинаються. Нехай E_* — множина всіх точок $z \in D$, де f має повний диференціал з $f_z = 0 = f_{\bar z}$.

Зауважимо, що за відомою теоремою Герінга–Лехто–Меньшова множина $E_0 = D \setminus (E \cup E_*)$ має нульову міру Лебега в $\mathbb{C}$, див. [253] і [352]. Отже, за лемою 3.1.1 лінійна міра Лебега $l(\gamma \cap E_0) = 0$ для м.в. штрихових ліній γ в D. Покажемо також, що $l(f(\gamma) \cap f(E_0)) = 0$ для м.в. кіл γ з центром у точці z_0.

Останнє випливає з абсолютної неперервності f на замкнутих піддугах $\gamma \cap D$ для м.в. кіл γ. Дійсно, клас $W^{1,1}_{\rm loc}$ є інваріантним відносно локально квазіізометричних перетворень незалежної змінної (див. теорему 1.1.7 в [84]) і функції із $W^{1,1}_{\rm loc}$ абсолютно непревевні на лініях (див., наприклад, теорему 1.1.3 в [84]). Застосовуючи перетворення координат $\ln(z - z_0)$, ми приходимо до абсолютної неперервності f на м.в. колах γ з центром у точці z_0.

Отже, $l(\gamma_* \cap f(E_0)) = 0$, де $\gamma_* = f(\gamma)$, для м.в. кіл γ з центром у точці z_0. Нехай тепер $\rho_* \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$, $\rho_* \equiv 0$ ззовні $f(D)$, де Γ — сукупність всіх штрихових ліній, утворених перетинами всіх кіл γ з центром у точці z_0. Нехай $\rho \equiv 0$ ззовні D та

$$\rho(z) \colon = \rho_*(f(z))|\partial^{z_0}_T f(z)| \qquad \text{для м.в. } z \in D.$$

Виконуючи відповідні оцінки спочатку на E_l за теоремою 3.2.5 із [187] (при $m = 1$), а потім підсумовуючи їх з урахуванням зчисленної адитивності інтеграла Лебега, отримуємо

$$\int\limits_{\gamma} \rho\, ds \ \geqslant \ \int\limits_{\gamma_*} \rho_*\, ds_* \ \geqslant \ 1 \qquad \text{для м.в. } \gamma \in \Gamma,$$

оскільки $l(f(\gamma)\cap f(E_0))=0$ і $l(f(\gamma)\cap f(E_*))=0$ для м.в. $\gamma\in\Gamma$ в силу абсолютної неперервності f на м.в. $\gamma\in\Gamma$. Отже, $\rho\in\operatorname{ext}\operatorname{adm}\Gamma$.

З іншого боку, ще раз виконуючи відповідні оцінки спочатку на E_l, а потім підсумовуючи їх з урахуванням зчисленної адитивності інтеграла Лебега, отримуємо нерівність

$$\int\limits_{D}\frac{\rho^2(z)}{K_\mu^T(z,z_0)}\,dm(z)\ \leqslant\ \int\limits_{f(D)}\rho_*^2(w)\,dm(w),$$

оскільки $\rho(z)=0$ на E_*. Отже, ми отримуємо нерівність

$$M(f\Gamma)\ \geqslant\ \inf_{\rho\in\operatorname{ext}\operatorname{adm}\Gamma}\int\limits_{D}\frac{\rho^2(z)}{K_\mu^T(z,z_0)}\,dm(z)\,,$$

тобто f є нижнім Q-гомеоморфізмом при $Q(z)=K_\mu^T(z,z_0)$. Теорему доведено.

Із теореми 4.1.1 та зауваження 4.1.1 випливає наступний важливий наслідок.

Наслідок 4.1.1. *Нехай f — гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (4.1) класу Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$. Тоді f є нижнім Q-гомеоморфізмом у кожній точці $z_0\in\overline{D}$ при $Q(z)=K_\mu(z)$.*

Нехай D — область в $\mathbb{C}$, та нехай $Q:D\to[0,\infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Покладемо $\mathbb{A}(z_0,r_1,r_2)=\{z\in\mathbb{C}:r_1<|z-z_0|<r_2\}$, $S_i=S(z_0,r_i)=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|=r_i\},\quad i=1,2.$

Через $\Delta(E,F;D)$ позначимо сім'ю всіх кривих $\gamma:[a,b]\to\overline{\mathbb{C}}$, які з'єднують E та F в D, тобто $\gamma(a)\in E$, $\gamma(b)\in F$ і $\gamma(t)\in D$ при $a<t<b$.

Наведемо означення кільцевого Q-гомеоморфізма у межових точках області D на комплексній площині.

Означення 4.1.13. Гомеоморфізм $f:D\to\overline{\mathbb{C}}$ називається *кільцевим Q-гомеоморфізмом у межовій точці* $z_0\in\partial D$, якщо f задовольняє співвідношення

$$M\left(\Delta\left(fC_1,fC_2;fD\right)\right)\leqslant\int\limits_{\mathbb{A}\cap D}Q(z)\cdot\eta^2(|z-z_0|)\,dm(z)\tag{4.3}$$

для будь-якого кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$ і довільних континуумів C_1 і C_2 в D, які належать різним компонентам доповнення кільця $\mathbb{A}$ в $\overline{\mathbb{C}}$, що містить z_0 і ∞, відповідно, та для кожної вимірної функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(t)\, dt \geqslant 1\,.$$

Означення 4.1.14. Гомеоморфізм $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ називається *кільцевим* Q*-гомеоморфізмом* в $\overline{D}$, якщо умова (4.3) виконується для кожної точки $z_0 \in \overline{D}$.

Зауваження 4.1.3. Нижче ми дотримуємося наступних стандартних узгоджень: $a/\infty = 0$ для $a \neq \infty$ і $a/0 = \infty$ для $a > 0$ і $0 \cdot \infty = 0$, див., напр., [131], с. 6.

Наведемо деякі допоміжні леми.

Лема 4.1.1. *Нехай* D *і* D' *— області в* $\mathbb{C}$, $Q : D \to (0, \infty)$ *— вимірна за Лебегом функція і* $f : D \to D'$ *— нижній* Q*-гомеоморфізм у точці* $z_0 \in \overline{D}$. *Тоді виконується нерівність*

$$M\left(\Delta\left(fS_1, fS_2; fD\right)\right) \leqslant \frac{1}{I}\,,$$

в якій $S_i = S(z_0, r_i) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r_i\}$, $i = 1, 2$, $0 < r_1 < r_2$, *і*

$$I = I(z_0, r_1, r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{||Q||_1(z_0, r)}\,, \tag{4.4}$$

де

$$||Q||_1(z_0, r) = \int\limits_{D(z_0, r)} Q(z)\; ds \tag{4.5}$$

— L^1*-норма функції* Q *по множині* $D(z_0, r) = \{z \in D : |z - z_0| = r\}$.

Доведення леми 4.1.1 повністю аналогічне доведенню леми 2.2.1.

Лема 4.1.2. *Нехай* D *— область в* $\mathbb{C}$, $z_0 \in \overline{D}$, $0 < r_1 < r_2 < d(z_0) := \sup\limits_{z \in D} |z - z_0|$, $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ *і* $Q : D \to (0, \infty)$ *—*

вимірна за Лебегом функція, яка задовольняє умову $||Q||_1(z_0, r) \neq \infty$ *для м.в.* $r \in (0, d_0)$ *. Нехай*

$$\eta_0(t) = \frac{1}{I \cdot ||Q||_1(z_0, t)},$$

де $I = I(z_0, r_1, r_2)$ *і* $||Q||_1(z_0, t)$ *,* $t \in (r_1, r_2)$ *, визначені в (4.4) і (4.5), відповідно. Тоді*

$$\frac{1}{I} = \int\limits_{\mathbb{A} \cap D} Q(z) \cdot \eta_0^2(|z - z_0|)\, dm(z) \leqslant \int\limits_{\mathbb{A} \cap D} Q(z) \cdot \eta^2(|z - z_0|)\, dm(z) \qquad (4.6)$$

для будь-якої вимірної за Лебегом функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ *, такої, що*

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr = 1. \qquad (4.7)$$

Доведення. Якщо $I = \infty$, то ліва частина співвідношення (4.6) дорівнює нулю, тому бажане є очевидним в цьому випадку. Якщо $I = 0$, то $||Q||_1(z_0, r) = \infty$ для м.в. $r \in (r_1, r_2)$, і обидві частини нерівності (4.6) за теоремою Фубіні дорівнюють нескінченності. Отже, можна вважати, що $0 < I < \infty$. Тоді $||Q||_1(z_0, r) \neq 0$ і $\eta_0(r) \neq \infty$ м.с. в інтервалі (r_1, r_2) . Покладаючи

$$\alpha(r) = \eta(r) \cdot ||Q|||_1(z_0, r) \qquad \text{і} \qquad \omega(r) = \frac{1}{||Q|||_1(z_0, r)} \ ,$$

за стандартними узгодженнями (див. зауваження 4.1.3) отримуємо
$\eta(r) = \alpha(r)\omega(r)$ м.с. в (r_1, r_2) і

$$C := \int\limits_{\mathbb{A} \cap D} Q(z) \cdot \eta^2\left(|z - z_0|\right)\ dm(z) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \alpha^2(r) \cdot \omega(r)\, dr.$$

Застосуємо нерівністьІєнсена з вагою (див. теорему 2.6.2 в [374]) до опуклої функції $\varphi(t) = t^2$, заданої в інтервалі $\Omega = (r_1, r_2)$, з ймовірнісною мірою

$$\nu(E) = \frac{1}{I} \int\limits_E \omega(r)\, dr\, .$$

Матимемо

$$\left(\fint \alpha^2(r)\omega(r)dr\right)^{1/2} \geqslant \fint \alpha(r)\omega(r)\,dr = \frac{1}{I}\,.$$

Тут ми використали також той факт, що $\eta(r) = \alpha(r)\omega(r)$ задовольняє співвідношення (4.7).

Звідси отримуємо нерівність $C \geqslant \frac{1}{I}$, що і доводить справедливість співвідношень (4.6). Лему доведено.

Комбінуючи леми 4.1.1 і 4.1.2, отримуємо наступне твердження .

Наслідок 4.1.2. *За умов лем 4.1.1 і 4.1.2 виконуеться нерівність*

$$M(\Delta\,(fS_1, fS_2; fD)) \leqslant \int\limits_{\mathbb{A}\cap D} Q(z)\cdot\eta^2\,(|z-z_0|)\;dm(z).$$

Наступна лема встановлює взаємозв'язок між нижніми та кільцевими Q-гомеоморфізмами в $\overline{D}$.

Лема 4.1.3. *Нехай D, D' – області в $\mathbb{C}$ і $Q: D\to(0,\infty)$ – вимірна за Лебегом функція, яка задовольняє умову $||Q||_1(z_0,r)\neq\infty$ для м.в. $r\in(0,d(z_0)), d(z_0):=\sup\limits_{z\in D}|z-z_0|$. Якщо $f: D\to D'$ є нижнім Q-гомеоморфізмом у точці $z_0\in\overline{D}$, то f є кільцевим Q-гомеоморфізмом у точці z_0.*

Доведення. Оскільки сім'я кривих $\Delta\,(fC_1, fC_2; fD)$ мінорується сім'єю $\Delta\,(fS_1, fS_2; fD)$, де $S_1 = S(z_0, r_1)$ і $S_2 = S(z_0, r_2)$, то

$$M\left(\Delta\,(fC_1, fC_2; fD)\right) \leqslant M\left(\Delta\,(fS_1, fS_2; fD)\right)$$

і висновок леми 4.1.3 випливає із наслідка 4.1.2. Лему доведено.

З леми 4.1.3 випливає наступний важливий наслідок.

Наслідок 4.1.3. *Нехай D, D' – області в $\mathbb{C}$ і $Q: D\to(0,\infty)$ – локально интегровна функція. Якщо $f: D\to D'$ – нижній Q-гомеоморфізм у точці $z_0\in\overline{D}$, то f є кільцевим Q-гомеоморфізмом у точці z_0.*

Тепер з теореми 4.1.1 та наслідка 4.1.3 випливає наступне твердження.

Теорема 4.1.2. *Нехай* f *— гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (4.1) класу* $W^{1,1}_{\rm loc}$ *і* $K^T_\mu(z,z_0)\in L^1_{\rm loc}$. *Тоді* f *є кільцевим* Q*-гомеоморфізмом у кожній точці* $z_0\in\overline{D}$ *при* $Q(z)=K^T_\mu(z,z_0)$.

Внаслідок зауваження 4.1.1 із теореми 4.1.2 випливає наступне твердження.

Наслідок 4.1.4. *Нехай* f *— гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (4.1) класу* $W^{1,1}_{\rm loc}$ *та* $K_\mu\in L^1_{\rm loc}$. *Тоді* f *є кільцевим* Q*-гомеоморфізмом у кожній точці* $z_0\in\overline{D}$ *при* $Q(z)=K_\mu(z)$.

Зокрема, частинними випадками теореми 4.1.2 і наслідка 4.1.4 є відповідно наступні твердження.

Наслідок 4.1.5. *Будь-який регулярний гомеоморфізм* $f:D\to\mathbb{C}$, *для якого* $K^T_\mu(z,z_0)\in L^1_{\rm loc}(D)$, *є кільцевим* Q*-гомеоморфізмом у кожній точці* $z_0\in D$ *при* $Q(z)=K^T_\mu(z,z_0)$.

Наслідок 4.1.6. *Будь-який регулярний гомеоморфізм* $f:D\to\mathbb{C}$, *для якого* $K_\mu\in L^1_{\rm loc}(D)$, *є кільцевим* Q*-гомеоморфізмом у кожний точці* $z_0\in D$ *при* $Q(z)=K_\mu(z)$.

Отже, теорія межевої поведінки кільцевих Q-гомеоморфізмів, розвинута в роботах [83, 279], може бути застосована до вивчення довільних гомеоморфних розв'язків рівняння Бельтрамі з узагальненими похідними.

4.2. Межова поведінка гомеоморфних розв'язків

Нагадаємо, у першу чергу, наступне топологічне поняття.

Означення 4.2.1. Область $D\subset\mathbb{C}$ називається *локально зв'язною у точці* $z_0\in\partial D$, якщо для будь-якого околу U точки z_0, існує окіл $V\subseteq U$ точки z_0 такий, що множина $V\cap D$ зв'язна.

Зауваження 4.2.1. Зауважимо, що кожна жорданова область D в $\mathbb{C}$ є локально зв'язною у кожній точці межі ∂D (див., наприклад, [450], с. 66).

Означення 4.2.2. Межа називається *слабо плоскою у точці* $z_0 \in \partial D$, якщо для будь-якого околу U точки z_0 та будь-якого числа $P > 0$, існує окіл $V \subset U$ точки z_0 такий, що

$$M\left(\Delta\left(E, F; D\right)\right) \geqslant P$$

для всіх континуумів E та F в D, які перетинають ∂U і ∂V.

Означення 4.2.3. Межа ∂D називається *слабо плоскою*, якщо вона слабо плоска у кожній точці з ∂D.

Означення 4.2.4. Говоритимемо також, що межа *сильно досяжна у точці* $z_0 \in \partial D$, якщо для будь-якого околу U точки z_0 існує компакт E в D, окіл $V \subset U$ точки z_0 та число $\delta > 0$ такі, що

$$M\left(\Delta\left(E, F; D\right)\right) \geqslant \delta$$

для будь-якого континуума F в D, який перетинає ∂U та ∂V.

Означення 4.2.5. Межа ∂D називається *сильно досяжною*, якщо будь-яка точка $z_0 \in \partial D$ є сильно досяжною.

Зауваження 4.2.2. В означеннях сильно досяжних та слабо плоских меж можна в якості околів U та V точки z_0 брати тільки круги (замкнуті або відкриті) з центром у точці z_0 чи тільки околи з будь-якої іншої фундаментальної системи околів точки z_0.

Зауваження 4.2.3. Ці поняття можуть бути природним чином поширені на випадок $\overline{\mathbb{C}}$ і $z_0 = \infty$, при цьому повинні використовуватися відповідні околи точки ∞.

Справедливі наступні твердження.

Твердження 4.2.1. Якщо область D з $\mathbb{C}$ є слабо плоскою у точці $z_0 \in \partial D$, то точка z_0 сильно досяжна з D.

Твердження 4.2.2. Якщо область D з $\mathbb{C}$ є слабо плоскою у точці $z_0 \in \partial D$, то D локально зв'язна в z_0, (див., наприклад, лему 5.1 в [49] або лему 3.15 в [342]).

Поняття сильно досяжних та слабо плоских межових точок області в $\mathbb{C}$ визначені в [48] та є локалізацією та узагальненням відповідних понять, введених в [343, 344], порівняй з властивостями P_1 та P_2 за Вяйсяля в [436] а також з квазіконформною досяжністю та квазіконформною площиною пза Няккі в [355].

Багато теорем про гомеоморфне продовження на межу квазіконформних відображень та їх узагальнень доведені за умови, що межі є слабо плоскими. Умова сильної досяжності грає аналогічну роль для неперервного продовження відображень на межу. Зокрема, нещодавно були встановлені наступні важливі твердження, див. теорему 10.1 і лему 6.1 в [49] або теорему 9.8 і лему 9.4 в [342].

Твердження 4.2.3. *Нехай D і D' — обмежені області в $\mathbb{C}$, $Q : D \to (0, \infty)$ — вимірна функція та $f : D \to D'$ — нижній Q-гомеоморфізм в ∂D. Припустимо, що область D є локально зв'язною на ∂D, а область D' має (сильно досяжну) слабо плоску межу. Якщо*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{||Q||_1(z_0, r)} = \infty \qquad \forall\ z_0 \in \partial D$$

для деякого $\delta(z_0) \in (0, d(z_0))$, де $d(z_0) = \sup\limits_{z \in D} |\, z - z_0|$ та

$$||\, Q||_1(z_0, r) = \int\limits_{D \cap S(z_0, r)} Q(z)\, ds,$$

то f має (неперервне) гомеоморфне продовження $\overline{f}$ на $\overline{D}$, яке відображає $\overline{D}$ (в) на $\overline{D'}$.

Тут, як зазвичай, через $S(z_0, r)$ позначено коло $\{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| = r\}$.

Означення 4.2.6. Область $D \subset \mathbb{C}$ називається *областю квазіекстремальної довжини*, коротко QED*-областю* (див. [254]), якщо

$$M\left(\Delta\left(E, F; \overline{\mathbb{C}}\right)\right) \leqslant K \cdot M\left(\Delta\left(E, F; D\right)\right)$$

для деякого $K \geqslant 1$ та для всіх пар континуумів E та F в D, що не перетинаються.

Зауваження 4.2.4. Добре відомо (див., наприклад, теорему 10.12 в [436]), що

$$M(\Delta(E, F; \mathbb{C})) \geqslant \frac{2}{\pi} \ln \frac{R}{r}$$

для всіх множин E та F в $\mathbb{C}$, що перетинають усі кола $S(z_0, t)$, $t \in (r, R)$. Отже, QED-області мають слабо плоску межу. В одному з прикладів у [342], п. 3.8, показано, що обернене твердження не виконується навіть для однозв'язних областей на площині.

Означення 4.2.7. Область $D \subset \mathbb{C}$ називається *рівномірною областю*, якщо будь-яка пара точок z_1 і $z_2 \in D$ може бути з'єднана спрямлюваною кривою γ в D такою, що

$$l(\gamma) \leqslant a \cdot |z_1 - z_2|$$

і

$$\min_{i=1,2} l(\gamma(z_i, z)) \leqslant b \cdot \operatorname{dist}(z, \partial D)$$

для всіх $z \in \gamma$, де $\gamma(z_i, z)$ — частина кривої γ з кінцями в точках z_i і z, через l позначено довжину відповідної кривої, стала a не залежить від z_1 і z_2, а стала b не залежить від z, див. [347].

Зауваження 4.2.5. Відомо, що кожна рівномірна область є QED-областю, але існують QED-області, які не є рівномірними, див. [254]. Обмежені опуклі області та обмежені області з гладкими межами дають прості приклади рівномірних областей і, отже, QED-областей, а також областей зі слабо плоскими межами.

У теорії відображень та диференціальних рівнянь також часто зустрічаються так звані ліпшицеві області.

Означення 4.2.8. Говорять, що область D в $\mathbb{C}$ називається ліпшицевою, якщо будь-яка точка $z_0 \in \partial D$ має окіл U, який за допомогою деякого біліпшицевого відображення f відображається в одиничний круг $\mathbb{B}$ так, що $\partial D \cap U$ переходить в перетин $\mathbb{B}$ з дійсною віссю.

Означення 4.2.9. Відображення $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ називається *ліпшицевим*, якщо $|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant C \cdot |z_2 - z_1|$ для будь-яких $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ і для деякої скінченної сталої C. Якщо до того ж $|z_2 - z_1| \leqslant c|f(z_2) - f(z_1)|$ для будь-яких $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ і деякої сталої c, то відображення f називається *біліпшицевим.*

Зауваження 4.2.6. Зауважимо, що біліпшицеві відображення f є квазіконформними і конформний модуль сімей кривих є квазіінваріантом відносно цих відображень. Тому межі ліпшицевих областей є слабо плоскими.

Введемо в розгляд *граничну множину* $C(X, f)$ відображення $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ для множини $X \subset \overline{D}$:

$$C(X, f)\colon = \left\{ w \in \overline{\mathbb{C}} : w = \lim_{k \to \infty} f(z_k),\ z_k \to z_0 \in X,\ z_k \in D \right\}.$$

Зауваження 4.2.7. Зауважимо, що включення $C(\partial D, f) \subseteq \partial D'$ виконується для будь-якого гомеоморфізму $f : D \to D'$, див., наприклад, твердження 13.5 в [342].

Внаслідок теореми 4.1.1 отримуємо за теоремою 6.1 із [49] або лемою 9.4 із [342] наступне твердження.

Лема 4.2.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{C}$, $z_0 \in \partial D$ і $f : D \to D'$ — гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (4.1) класу Соболєва $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. Припустимо, що область D локально зв'язна в точці $z_0 \in \partial D$ та $\partial D'$ сильно досяжна, принаймні, в одній точці граничної множини $C(z_0, f)$. Якщо*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{||K^T_\mu||_1(z_0, r)} = \infty,$$

де $0 < \varepsilon_0 < d_0 = \sup\limits_{z \in D} |z - z_0|$, *і*

$$||K^T_\mu||_1(z_0, r) = \int\limits_{D \cap S(z_0, r)} K^T_\mu(z, z_0)\, ds,$$

то f продовжується в точку z_0 по неперервності в $\overline{\mathbb{C}}$.

Основою для доведення продовження обернених відображень гомеоморфних розв'язків рівняння Бельтрамі (4.1) класу Соболєва $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ є наступна лема про граничні множини.

Лема 4.2.2. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{C}$, z_1 і z_2 — різні точки на ∂D, $z_1 \neq \infty$, і $f : D \to D'$ — гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (4.1) класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$. Припустимо, що функція $K^T_\mu(z, z_0)$ интегровна на штрихових лініях $D(r) = \{z \in D : |z - z_1| = r\} = D \cap S(z_1, r)$ для деякої множини E чисел $r < |z_1 - z_2|$ додатної лінійної міри. Якщо D локально зв'язна в z_1 та z_2 і $\partial D'$ слабо плоска, то*

$$C(z_1, f) \cap C(z_2, f) = \varnothing.$$

Доведення. Внаслідок теореми 4.1.1 лема 4.2.2 випливає із леми 9.1 в [49] або леми 9.5 в [342]. Лему доведено.

З леми 4.2.2 випливає наступне твердження.

Лема 4.2.3. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{C}$, D локально зв'язна на ∂D і $\partial D'$ слабо плоска. Якщо $f : D \to D'$ — гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (4.1) класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ і $K^T_\mu(z, z_0) \in L^1(D)$, то f^{-1} має продовження в $\overline{D'}$ по неперервності в $\overline{\mathbb{C}}$.*

Доведення. За теоремою Фубіні множина

$$E = \{r \in (0, d) : K^T_\mu(z, z_0)|_{D(r)} \in L^1(D(r))\}$$

має додатну лінійну міру, оскільки $K^T_\mu(z, z_0) \in L^1(D)$. Лему доведено.

Зауваження 4.2.8. Досить припустити в лемі 4.2.3, що $K^T_\mu(z, z_0)$ интегровна тільки в околі ∂D.

Крім того, внаслідок теореми 4.1.1 за теоремою 9.2 із [49] або за теоремою 9.7 із [342] отримуємо наступний результат.

Лема 4.2.4. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{C}$, D локально зв'язна на ∂D і $\partial D'$ слабо плоска, $f : D \to D'$ — гомеоморфний розв'язок класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ рівняння Бельтрамі (4.1) з коефіцієнтом μ таким, що*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{||K^T_\mu||_1(z_0, r)} = \infty \qquad \forall\ z_0 \in \partial D,$$

де $\delta(z_0) \in (0, d(z_0))$, $d(z_0) = \sup\limits_{z\in D} |z - z_0|$ *і*

$$||K_\mu^T||_1(z_0, r) = \int\limits_{D(z_0,r)} K_\mu^T(z, z_0)\, ds$$

— L_1*-норма* K_μ^T *по множині* $D(z_0, r) = \{z \in D : |z - z_0| = r\}$. *Тоді існує продовження* f^{-1} *в* $\overline{D'}$ *по неперервності в* $\overline{\mathbb{C}}$.

Тепер з лем 4.2.1 і 4.2.4 випливає наступне твердження.

Лема 4.2.5. *Нехай* D *і* D' *— обмежені області в* $\mathbb{C}$ *і* $f : D \to D'$ *— гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (4.1) класу Соболєва* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. *Припустимо, що область* D *локально зв'язна на* ∂D *і область* D' *має слабо плоску межу. Якщо*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{||K_\mu^T||_1(z_0, r)} = \infty \qquad \forall\ z_0 \in \partial D \tag{4.1}$$

для деякого $\delta(z_0) \in (0, d(z_0))$, *де* $d(z_0) = \sup\limits_{z\in D} |z - z_0|$ *і*

$$||K_\mu^T||_1(z_0, r) = \int\limits_{D\cap S(z_0,r)} K_\mu^T(z, z_0)\, ds,$$

то f *має продовження по неперервності на* $\overline{D}$, *яке гомеоморфно відображає* $\overline{D}$ *на* $\overline{D'}$.

З леми 4.2.5 випливає наступне узагальнення теореми Герінга–Мартіо про гомеоморфне продовження на межу квазіконформних відображень між QED-областями, див. [254].

Наслідок 4.2.1. *Нехай* D *і* D' *— обмежені області зі слабо плоскими межами в* $\mathbb{C}$ *і* $f : D \to D'$ *— гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (4.1) класу Соболєва* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. *Якщо умова (4.1) виконується у кожній точці* $z_0 \in \partial D$, *то* f *має гомеоморфне продовження* $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.

Наведемо основну лему про гомеоморфне продовження.

Лема 4.2.6. *Нехай D і D' — обмежені області зі слабо плоскими межами в $\mathbb{C}$ і $f : D \to D'$ — гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (4.1) класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$. Припустимо, що $\|K^T_{\mu}\|(z_0,t) \neq \infty$ для м.в. $t \in (0,\varepsilon_0)$ і для всіх $z_0 \in \partial D$ існує $\varepsilon_0 < d(z_0) := \sup\limits_{z\in D}|z-z_0|$ та однопараметрична сім'я вимірних функцій $\psi_{z_0,\varepsilon} : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $\varepsilon \in (0,\,\varepsilon_0)$, таких, що*

$$0 < I_{z_0}(\varepsilon) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{z_0,\varepsilon}(t)\,dt < \infty, \qquad \forall\, \varepsilon \in (0,\,\varepsilon_0)$$

і

$$\int\limits_{D(z_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} K^T_{\mu}(z,z_0)\cdot\psi^2_{z_0,\varepsilon}(|z-z_0|)\;dm(z) \;=\; o(I^2_{z_0}(\varepsilon))\,, \quad \varepsilon \to 0\,, \tag{4.2}$$

де $D(z_0,\,\varepsilon,\,\varepsilon_0) = \{z \in D : \varepsilon < |z-z_0| < \varepsilon_0\}$. Тоді f має гомеоморфне продовження $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.

Доведення. У лемі 4.1.2 покладемо $r_1 = \varepsilon, r_2 = \varepsilon_0$ та

$$\eta(t) = \begin{cases} \psi_{z_0,\varepsilon}(t)/I_{z_0}(\varepsilon)\,, & t \in (\varepsilon,\varepsilon_0)\,, \\ 0\,, & r \notin (\varepsilon,\varepsilon_0)\,, \end{cases}$$

де $I_{z_0}(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{z_0,\varepsilon}(t)\,dt$. Тоді за лемою 4.1.2 матимемо нерівність

$$\frac{1}{\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{||K^T_{\mu}||_1(z_0,r)}} \leqslant \frac{1}{I^2_{z_0}(\varepsilon)} \int\limits_{D(z_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} K^T_{\mu}(z,z_0)\cdot\psi^2_{z_0,\varepsilon}(|z-z_0|)\;dm(z)\,.$$

Спрямовуючи в останній нерівності ε до нуля і враховуючи умову (4.2), приходимо до висновку, що виконується умова (4.1) при $\delta(z_0) = \varepsilon_0$. Тоді з леми 4.2.5 випливає, що відображення f має гомеоморфне продовження $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$. Лему доведено.

За лемою 4.2.6 з вибором $\psi_{z_0,\varepsilon}(t) \;\equiv\; 1/t\log\frac{1}{t}$, див. наслідок 2.3 в [45], отримуємо наступний результат.

Наслідок 4.2.2. *Нехай D і D' — обмежені області зі слабо плоскими межами в $\mathbb{C}$ і $f : D \to D'$ — гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі*

(4.1) класу Соболева $W_{\rm loc}^{1,1}$*. Припустимо, що*

$$K^T_{\mu}(z,z_0)\leqslant Q(z)\in {\rm FMO}(z_0)\qquad \forall z_0\in\partial D.$$

Тоді f *має гомеоморфне продовження* $\overline{f}:\overline{D}\rightarrow \overline{D^{\,\prime}}$*.*

За наслідком 2.1 в [45] із наслідка 4.2.2 також маємо:

Наслідок 4.2.3. *Твердження наслідка 4.2.2 також справедливе, якщо*

$$\limsup\limits_{\varepsilon\rightarrow 0}\ \fint_{B(z_0,\,\varepsilon)} K^T_{\mu}(z,z_0)\,dm(z)<\infty\qquad\forall\ z_0\in\partial D.$$

Із леми 4.2.6, покладаючи $\psi_{z_0,\varepsilon}(t)\equiv 1/t$, отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 4.2.4. *Нехай* D *і* $D^{\,\prime}$ *— обмежені області зі слабо плоскими межами в* $\mathbb{C}$ *і* $f:D\rightarrow D^{\,\prime}$ *— гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (4.1) класу Соболева* $W_{\rm loc}^{1,1}$*. Припустимо, що* $K^T_{\mu}(z,z_0)\in L^1_{\rm loc}(D)$ *і*

$$\int\limits_{D(z_0,\,\varepsilon,\,\varepsilon_0)}\frac{K^T_{\mu}(z,z_0)\,dm(z)}{|z-z_0|^2}\ =\ o\left(\left[\ln\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right]^2\right)\,,\ \ \varepsilon\rightarrow 0,\ \ \forall z_0\in\partial D$$

для деякого $\varepsilon_0<\sup\limits_{z\in D}|z-z_0|$*, де* $D(z_0,\,\varepsilon,\,\varepsilon_0)=\{z\in D:\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0\}$*. Тоді* f *має гомеоморфне продовження* $\overline{f}:\overline{D}\rightarrow \overline{D^{\,\prime}}$*.*

Із леми 4.2.5, приймаючи також до уваги теорему 3.1 із роботи [405], отримуємо наступний результат.

Наслідок 4.2.5. *Нехай* D *і* $D^{\,\prime}$ *— обмежені області зі слабо плоскими межами в* $\mathbb{C}$ *і* $f:D\rightarrow D^{\,\prime}$ *— гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (4.1) класу Соболева* $W_{\rm loc}^{1,1}$*. Припустимо, що*

$$\int\limits_{D}\Phi(K^T_{\mu}(z,z_0))\,dm(z)<\infty\qquad\forall z_0\in\partial D\,,$$

де $\Phi:\overline{\mathbb{R}}_+\rightarrow\overline{\mathbb{R}}_+$ *— неспадна опукла функція з умовою*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau\Phi^{-1}(\tau)}=\infty$$

для деякого $\delta > \Phi(0)$. *Тоді* f *має гомеоморфне продовження* $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.

Наслідок 4.2.6. *Зокрема, твердження наслідка 4.2.5 справедливе, якщо при деякому* $\alpha > 0$ *виконується умова*

$$\int\limits_{D} e^{\alpha K_{\mu}^{T}(z,z_0)}\, dm(z) < \infty.$$

4.3. Регулярні розв'язки задачі Діріхле

Тут ми наводимо теореми існування регулярних розв'язків задачі Діріхле в однозв'язних областях.

Нагадаємо, що *задача Діріхле* для рівняння Бельтрамі (4.1) в області D полягає в знаходженні неперервної функції $f : D \to \mathbb{C}$, яка має м.с. частинні похідні першого порядку та м.с. задовольняє рівняння (4.1), а також граничну умову

$$\lim_{z \to \zeta} \operatorname{Re} f(z) = \varphi(\zeta) \qquad \forall\, \zeta \in \partial D \tag{4.3}$$

для заданої неперервної функції $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$.

Означення 4.3.1. При $\varphi(\zeta) \not\equiv \mathrm{const}$ *регулярний розв'язок* такої задачі є неперервне в $\mathbb{C}$, дискретне та відкрите відображення $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ класу Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ з якобіаном

$$J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \neq 0, \quad \text{м.с.}, \tag{4.4}$$

яке задовольняє умову (4.3) та рівняння (4.1) майже скрізь. У випадку $\varphi(\zeta) \equiv c$, $\zeta \in \partial D$, під *регулярним розв'язком* задачі Діріхле (4.3) для рівняння Бельтрамі (4.1) будемо розуміти функцію $f(z) = c + ic'$, $c' \in \mathbb{R}$.

Нижче наведена основна лема про існування регулярних розв'язків задачі Діріхле для рівняння Бельтрамі.

Лема 4.3.1. *Нехай* $\mu : D \to \mathbb{C}$ *— вимірна в жордановій області* D *функція така, що* $|\mu(z)| < 1$ *м.с. і* $K_{\mu} \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$. *Припустимо, що для всіх*

$z_0 \in \overline{D}$ існує $\varepsilon_0 < d(z_0) := \sup\limits_{z\in D}|z-z_0|$ і однопараметрична сім'я вимірних функцій $\psi_{z_0,\varepsilon} : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, таких, що

$$0 < I_{z_0}(\varepsilon) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{z_0,\varepsilon}(t)\,dt < \infty, \qquad \forall\, \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$$

і

$$\int\limits_{D(z_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} K_\mu^T(z,z_0)\cdot\psi^2_{z_0,\varepsilon}(|z-z_0|)\,dm(z) \;=\; o(I^2_{z_0}(\varepsilon))\,, \quad \varepsilon \to 0\,, \tag{4.5}$$

де $D(z_0,\varepsilon,\varepsilon_0) = \{z \in D : \varepsilon < |z-z_0| < \varepsilon_0\}$. Тоді рівняння Бельтрамі (4.1) має регулярний розв'язок f задачі Діріхле (4.3) для будь-якої неперервної функції $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$.

Доведення. Нехай F — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (4.1) класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$, який є кільцевим Q-гомеоморфізмом в $\overline{D}$ при $Q = K_\mu^T(z,z_0)$ та який існує в силу леми 4.1 із [402] за умови (4.5).

Зауважимо, що $\overline{\mathbb{C}} \setminus D^*$, де $D^* = F(D)$, не може складатися з єдиної точки ∞, оскільки в протилежному випадку межа D^* була б слабо плоскою та за лемою 1 і теоремою 3 із роботи [83] F повинно було б мати гомеоморфне продовження в $\overline{D}$, що неможливо, оскільки межа D складається більше ніж з однієї точки.

Крім того, область D^* однозв'язна, див., наприклад, лему 5.3 в [45] або лему 6.5 в [342]. Отже, за теоремою Рімана, див., наприклад, II.2.1 в [31], D^* можна відобразити на одиничний круг $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ за допомогою конформного відображення R. Внаслідок інваріантності модуля при конформних відображеннях, $g := R\circ F$ знову є регулярним гомеоморфним розв'язом рівняння Бельтрамі (4.1), який є кільцевим Q-гомеоморфізмом в $\overline{D}$ при $Q = K_\mu^T(z,z_0)$ і відображає D на $\mathbb{B}$. Більш того, за лемою 1 та теоремою 3 в [83] g допускає продовження до гомеоморфізму $g_* : \overline{D} \to \overline{\mathbb{B}}$, оскільки $\mathbb{B}$ має слабо плоску межу, а жорданова область D — локально зв'язна на межі.

Будемо шукати розв'язок вихідної задачі Діріхле (4.3) у вигляді $f = h\circ g$, де h — аналітична функція в $\mathbb{B}$, з граничною умовою

$$\lim_{z\to\zeta} \operatorname{Re} h(z) = \varphi(g_*^{-1}(\zeta)) \qquad \forall\, \zeta \in \partial\mathbb{B}\,.$$

Як відомо, аналітична функція h відновлюється в $\mathbb{B}$ за допомогою формули Шварца (див., наприклад, § 8, Розд. III, частина 3 в [34]) за її дійсною частиною на межі з точністю до уявної адитивної сталої:

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \varphi \circ g_*^{-1}(\zeta) \cdot \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta}\,.$$

Як легко бачити, функція $f = h \circ g$ дає шуканий регулярний розв'язок задачі Діріхле (4.3) для рівняння Бельтрамі (4.1). Лему доведено.

Із леми 4.3.1, обираючи $\psi_{z_0,\varepsilon}(t) \equiv 1/t\log\frac{1}{t}$, див. наслідок 2.3 в [45], отримуємо наступний результат.

Теорема 4.3.1. *Нехай $\mu : D \to \mathbb{C}$ — вимірна в жордановій області D функція, для якої $|\mu(z)| < 1$ м.с., така, що $K_\mu \in L^1_{\rm loc}(D)$ і*

$$K_\mu^T(z, z_0) \leqslant Q(z) \in {\rm FMO}(\overline{D}).$$

Тоді для будь-якої неперервної функції $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ існує регулярний розв'язок f задачі Діріхле (4.3) для рівняння Бельтрамі (4.1).

Наслідок 4.3.1. *Зокрема, твердження теореми 4.3.1 справедливе, якщо $K_\mu^T(z, z_0) \leqslant Q(z) \in {\rm BMO}(\overline{D})$.*

За наслідком 2.1 в [45] із теореми 4.3.1 також маємо:

Наслідок 4.3.2. *Твердження теореми 4.3.1 також справедливе, якщо*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \;⨍_{B(z_0,\varepsilon)} K_\mu^T(z, z_0)\, dm(z) < \infty \qquad \forall\; z_0 \in \overline{D}.$$

Зауваження 4.3.1. Тут і далі мається на увазі, що $K_\mu^T(z, z_0)$ і $K_\mu(z)$ продовжені нулем поза областю D.

Внаслідок зауваження 4.1.1 із теореми 4.3.1 випливає наступне твердження.

Наслідок 4.3.3. *Нехай* $\mu : D \to \mathbb{C}$ *— вимірна в жордановій області* D *функція, для якої* $|\mu(z)| < 1$ *м.с., така, що*

$$K_\mu(z) \leqslant Q(z) \in \mathrm{FMO}(\overline{D}).$$

Тоді для будь-якої неперервної функції $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ *існує регулярний розв'язок* f *задачі Діріхле (4.3) для рівняння Бельтрамі (4.1).*

Наслідок 4.3.4. *Зокрема, твердження наслідка 4.3.3 справедливе, якщо* $K_\mu(z) \leqslant Q(z) \in \mathrm{BMO}(\overline{D})$.

Наслідок 4.3.5. *Твердження наслідка 4.3.3 також справедливе, якщо*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \ \fint_{B(z_0,\,\varepsilon)} K_\mu(z)\, dm(z) < \infty \qquad \forall\ z_0 \in \overline{D}.$$

Із леми 4.3.1, обираючи $\psi_{z_0,\varepsilon}(t) \equiv 1/t$, отримуємо наступний результат.

Наслідок 4.3.6. *Нехай* $\mu : D \to \mathbb{C}$ *— вимірна в жордановій області* D *функція, для якої* $|\mu(z)| < 1$ *м.с., така, що* $K_\mu \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ *і*

$$\int\limits_{D(z_0,\,\varepsilon,\,\varepsilon_0)} \frac{K^T_\mu(z, z_0)\, dm(z)}{|z - z_0|^2} \ = \ o\left(\left[\ln \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right]^2\right), \quad \varepsilon \to 0\,,$$

для деякого $\varepsilon_0 < \sup\limits_{z \in D} |z - z_0|$, *де* $D(z_0,\, \varepsilon,\, \varepsilon_0) = \{z \in D : \varepsilon < |z - z_0| < \varepsilon_0\}$. *Тоді для будь-якої неперервної функції* $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ *існує регулярний розв'язок* f *задачі Діріхле (4.3) для рівняння Бельтрамі (4.1).*

Наслідок 4.3.7. *Нехай* $\mu : D \to \mathbb{C}$ *— вимірна в жордановій області* D *функція,для якої* $|\mu(z)| < 1$ *м.с., така, що* $K_\mu \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ *і*

$$\int\limits_{D(z_0,\,\varepsilon,\,\varepsilon_0)} \frac{K_\mu(z)\, dm(z)}{|z - z_0|^2} \ = \ o\left(\left[\ln \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right]^2\right), \quad \varepsilon \to 0\,,$$

для деякого $\varepsilon_0 < \sup\limits_{z \in D} |z - z_0|$, *де* $D(z_0,\, \varepsilon,\, \varepsilon_0) = \{z \in D : \varepsilon < |z - z_0| < \varepsilon_0\}$. *Тоді для будь-якої неперервної функції* $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ *існує регулярний розв'язок* f *задачі Діріхле (4.3) для рівняння Бельтрамі (4.1).*

Справедливе наступне твердження.

Теорема 4.3.2. *Нехай $\mu : D \to \mathbb{C}$ — вимірна в жордановій області D функція, для якої $|\mu(z)| < 1$ м.с., така, що $K_\mu \in L^1_{\rm loc}(D)$ і*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{||K_\mu^T||_1(z_0,\, r)} = \infty \qquad \forall\; z_0 \in \overline{D},$$

де $||K_\mu^T||_1(z_0,\, r) = \int_{S(z_0,\,r)} K_\mu^T(z, z_0)\, ds$ — норма в L^1 функції $K_\mu^T(z, z_0)$ на колі $S(z_0,\, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$, $0 < r < \delta(z_0) < \sup\limits_{z \in D} |z - z_0|$. Тоді для будь-якої неперервної функції $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ існує регулярний розв'язок f задачі Діріхле (4.3) для рівняння Бельтрамі (4.1).

Доведення. Теорема 4.3.2 випливає із леми 4.3.1 при спеціальному виборі

$$\psi_{z_0,\,\varepsilon}(t) \equiv \psi_z(t) = \begin{cases} 1/\left[t k_{z_0}^T(t)\right], & t \in (0,\, \varepsilon_0), \\ 0, & t \in [\varepsilon_0,\, \infty), \end{cases}$$

де $\varepsilon_0 = \varepsilon(z_0)$ і $k_{z_0}^T(t)$ — середнє значення $K_\mu^T(z, z_0)$ по колу $S(z_0, t)$.

Наслідок 4.3.8. *Твердження теореми 4.3.2 виконується, якщо*

$$k_{z_0}^T(\varepsilon) = O\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad \forall\; z_0 \in \overline{D}$$

при $\varepsilon \to 0$, де $k_{z_0}^T(\varepsilon)$ — середнє значення функції $K_\mu^T(z, z_0)$ по колу $S(z_0,\, \varepsilon)$.

Внаслідок зауваження 4.1.1 із теореми 4.3.2 випливає наступне твердження.

Наслідок 4.3.9. *Нехай $\mu : D \to \mathbb{C}$ — вимірна в жордановій області D функція, для якої $|\mu(z)| < 1$ м.с., така, що $K_\mu \in L^1_{\rm loc}(D)$ і*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{||K_\mu||_1(z_0,\, r)} = \infty \qquad \forall\; z_0 \in \overline{D},$$

де $||K_\mu||_1(z_0,\, r) = \int_{S(z_0,\,r)} K_\mu(z)\, ds$ — норма в L^1 функції $K_\mu(z)$ на колі $S(z_0,\, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$, $0 < r < \delta(z_0) < \sup\limits_{z \in D} |z - z_0|$. Тоді для будь-якої неперервної функції $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ існує регулярний розв'язок f задачі Діріхле (4.3) для рівняння Бельтрамі (4.1).

Наслідок 4.3.10. *Твердження теореми 4.3.2 виконується, якщо*

$$k_{z_0}(\varepsilon) = O\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad \forall\ z_0 \in \overline{D}$$

при $\varepsilon \to 0$, *де* $k_{z_0}(\varepsilon)$ *— середнє значення функції* $K_\mu(z)$ *по колу* $S(z_0, \varepsilon)$.

Із теореми 4.3.2, враховуючи також теорему 3.1 із роботи [404], маємо наступний результат.

Теорема 4.3.3. *Нехай* $\mu : D \to \mathbb{C}$ *— вимірна в жордановій області* D *функція, для якої* $|\mu(z)| < 1$ *м.с., така, що* $K_\mu \in L^1_{\rm loc}(D)$ *і*

$$\int\limits_D \Phi(K^T_\mu(z, z_0))\, dm(z) < \infty,$$

де $\Phi : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *— неспадна опукла функція з умовою*

$$\int\limits_\delta^\infty \frac{d\tau}{\tau\Phi^{-1}(\tau)} = \infty$$

для деякого $\delta > \Phi(0)$. *Тоді для будь-якої неперервної функції* $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ *існує регулярний розв'язок* f *задачі Діріхле (4.3) для рівняння Бельтрамі (4.1).*

Наслідок 4.3.11. *Зокрема, твердження теореми 4.3.3 виконується, якщо при деякому* $\alpha > 0$ *виконується умова*

$$\int\limits_D e^{\alpha K^T_\mu(z,z_0)}\, dm(z) < \infty.$$

Внаслідок зауваження 4.1.1 із теореми 4.3.3 випливає наступне твердження.

Наслідок 4.3.12. *Нехай* $\mu : D \to \mathbb{C}$ *— вимірна в жордановій області* D *функція, для якої* $|\mu(z)| < 1$ *м.с., така, що*

$$\int\limits_D \Phi(K_\mu(z))\, dm(z) < \infty, \tag{4.6}$$

де $\Phi : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *— неспадна опукла функція, з умовою*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} = \infty \tag{4.7}$$

для деякого $\delta > \Phi(0)$ *. Тоді для будь-якої неперервної функції* $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ *існує регулярний розв'язок* f *задачі Діріхле (4.3) для рівняння Бельтрамі (4.1).*

Наслідок 4.3.13. *Зокрема, твердження наслідка 4.3.12 справедливе, якщо при деякому* $\alpha > 0$ *виконується умова*

$$\int\limits_{D} e^{\alpha K_\mu(z)}\, dm(z) < \infty.$$

Зауваження 4.3.2. За теоремою Стоілова про факторизацію (див., наприклад, [171]) будь-який регулярний розв'язок f задачі Діріхле для рівняння Бельтрамі (4.1) при $K_\mu \in L^1_{\rm loc}(D)$ може бути представлений у вигляді композиції $f = h \circ F$, де h — аналітична функція, а F — гомеоморфний розв'язок класу $W^{1,1}_{\rm loc}$. Отже, за теоремою 5.1 із [405], умова (4.7) є не тільки достатньою, але і необхідною для того, щоб для будь-якого рівняння Бельтрамі (4.1) з інтегральними обмеженнями на дилатацію вигляду (4.6) існували регулярні розв'язки задачі Діріхле (4.3) для будь-якої непостійної неперервної функції $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$.

Покладаючи $H(t) = \ln \Phi(t)$, зауважимо, що за твердженням 1.4 в [53] при $p = 1$ умова (4.7) еквівалентна будь-якій з наступних умов:

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty} H'(t)\, \frac{dt}{t} = \infty \tag{4.8}$$

або

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty} \frac{dH(t)}{t} = \infty, \tag{4.9}$$

або

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty} H(t)\, \frac{dt}{t^2} = \infty \tag{4.10}$$

для деякого $\Delta > 0$, а також кожній із рівностей:

$$\int\limits_0^{\delta} H\left(\frac{1}{t}\right)\, dt = \infty \tag{4.11}$$

для деякого $\delta > 0$,

$$\int\limits_{\Delta_*}^{\infty} \frac{d\eta}{H^{-1}(\eta)} = \infty \tag{4.12}$$

для деякого $\Delta_* > H(+0)$.

Тут інтеграл в (4.9) розуміється як інтеграл Лебега–Стільтьєса, а інтеграли в (4.8), (4.10) — (4.12) – як звичайні інтеграли Лебега.

4.4. Аналог теореми Ікоми–Шварца для гомеоморфних розв'язків рівняння Бельтрамі

Наступний аналог теореми Ікоми–Шварца є уточненням теореми 2.5.1 для гомеоморфних розв'язків рівняння Бельтрамі.

Теорема 4.4.1. *Нехай $\mu\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — вимірна функція така, що $|\mu(z)| < 1$ м.с. і $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ — гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (4.1) класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$, який задовольняє умову $f(0) = 0$. Тоді*

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)|\, \exp\left(2\pi \int\limits_{|z|}^{1} \frac{dt}{\|\, K_\mu^T\|_1\,(t)}\right) \leqslant 1\,,$$

де $\|\, K_\mu^T\|_1\,(t) = \int\limits_{S_t} K_\mu^T(z,0)\, ds$ — норма в L^1 функції $K_\mu^T(z,0)$ по колу $S_t = \{z \in \mathbb{C} : |z| = t\}$.

Доведення. За теоремою 4.1.1 f є нижнім Q-гомеоморфізмом у кожній точці $z_0 \in \overline{\mathbb{B}}$ при $Q(z) = K_\mu^T(z, z_0)$. Тепер для завершення доведення слід застосувати лему 3.5.6 у випадку $p = n$. Теорему доведено.

Внаслідок зауваження 4.1.1 з теореми 4.4.1 випливає наступне твердження.

Наслідок 4.4.1. *Нехай $\mu\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — вимірна функція така, що $|\mu(z)|<1$ м.с. і $f\colon \mathbb{B}\to\mathbb{B}$ — гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (4.1) класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$, який задовольняє умову $f(0)=0$. Тоді*

$$\liminf_{z\to 0}|f(z)|\,\exp\left(2\pi\int\limits_{|z|}^{1}\frac{dt}{\|\,K_\mu\|_1\,(t)}\right)\leqslant 1\,,$$

де $\|\,K_\mu\|_1\,(t)=\int\limits_{S_t}K_\mu(z)\,ds$ — норма в L^1 функції $K_\mu(z)$ по колу $S_t=\{z\in\mathbb{C}: |z|=t\}$.

4.5. Поведінка на нескінченності розв'язків рівняння Бельтрамі

У цьому розділі досліджується асимптотична поведінка на нескінченності гомеоморфних розв'язків рівняння Бельтрамі.

Нехай r_0 — довільне фіксоване дійсне число, $r_0>0$. Для гомеоморфізму $f\to\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$, позначимо $\quad L(z_0,R,f)=\max\limits_{|z-z_0|=R}|f(z)-f(z_0)|$.

Теорема 4.5.1. *Нехай $\mu\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — вимірна функція така, що $|\mu(z)|<1$ м.с., z_0 — деяка фіксована точка в $\mathbb{C}$ і r_0 — довільне фіксоване додатне число. Тоді будь-який гомеоморфний розв'язок $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ рівняння Бельтрамі (4.1) класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ задовольняє умову*

$$\liminf_{R\to\infty}L(z_0,R,f)\,\exp\left(-\,2\pi\int\limits_{r_0}^{R}\frac{dt}{\|\,K_\mu^T\|\,(z_0,t)}\right)=M_0>0\,,$$

де $\|\,K_\mu^T\|\,(z_0,t)=\int\limits_{S(z_0,t)}K_\mu^T(z,z_0)\,ds$ і $S(z_0,t)=\{z\in\mathbb{R}:|z-z_0|=t\}$.

Доведення. За теоремою 4.1.1 f є нижнім Q-гомеоморфізмом у точці z_0 при $Q(z)=K_\mu^T(z,z_0)$. Тепер твердження теореми випливає з теореми 3.4.1. Теорему доведено.

Для цілих $k\geqslant 0$ покладемо $e_0=1,\ e_1=e,\ e_2=e^e,\ldots,e_{k+1}=\exp e_k$ і $\ln_0 t=t,\quad \ln_1 t=\ln t,\quad \ln_2 t=\ln\ln t,\ \ldots,\ \ln_{k+1}t=\ln\ln_k t$.

З теореми 3.4.1 безпосередньо випливають наступні твердження.

Наслідок 4.5.1. *Нехай* $\mu\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *— вимірна функція така, що* $|\mu(z)|<1$ *м.с.,* z_0 *— деяка точка в* $\mathbb{C}$ *і* r_0 *— довільне фіксоване додатне число. Якщо для деякого числа* $\kappa_0>0$ *виконується умова*

$$\|\,K_\mu^T\|\,_1(z_0,r)\leqslant\kappa_0\prod_{k=0}^{N}\ln_k\, r$$

для м.в. $r\in(e_N,\infty)$, *то*

$$\liminf_{R\to\infty}\frac{L(z_0,R,f)}{(\ln_N R)^\gamma}=M_0>0\,,\quad \text{де}\qquad \gamma=\frac{2\pi}{Q_0}\,.$$

Наслідок 4.5.2. *Якщо для деякого числа* $\kappa_0>0$ *виконується умова*

$$\|\,K_\mu^T\|\,_1(z_0,r)\leqslant\kappa_0\, r$$

для м.в. $r\in(1,\infty)$, *то*

$$\liminf_{R\to\infty}\frac{L(z_0,R,f)}{R^\gamma}=M_0>0\,,\quad \text{де}\qquad \gamma=\frac{2\pi}{Q_0}\,.$$

З теореми 4.1.2 і леми 2.6.1 випливає наступний результат.

Лема 4.5.1. *Нехай* $\mu\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *— вимірна функція така, що* $|\mu(z)|<1$ *м.с. і* $K_\mu^T(z,z_0)\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{C})$, *де* z_0 *— деяка точка в* $\mathbb{C}$ *і* r_0 *— довільне фіксоване додатне число. Тоді будь-який гомеоморфний розв'язок* $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *рівняння Бельтрамі (4.1) класу Соболева* $W^{1,1}_{\rm loc}$ *задовольняє умову*

$$\liminf_{R\to\infty}L(z_0,f,R)\,e^{-\frac{2\pi}{\Lambda(R)}}>0\,,$$

де

$$\Lambda(R)=\left(\int\limits_{r_0}^{R}\psi(t)\,dt\right)^{-1}\int\limits_{\mathbb{A}(z_0,r_0,R)}K_\mu^T(z,z_0)\psi^2(|z-z_0|)\,dm(z)$$

і $\psi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ *— вимірна (за Лебегом) функція на* $(0,\infty)$ *така, що*

$$0<I(R)=\int\limits_{r_0}^{R}\psi(t)\,dt<\infty\qquad\forall\ R\ >r_0\,.$$

З теореми 4.1.2 і леми 2.6.2 випливає наступне твердження.

Лема 4.5.2. *Нехай* $\mu\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *— вимірна функція така, що* $|\mu(z)| < 1$ *м.с. і* $K_\mu^T(z, z_0) \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{C})$. *Припустимо, що існує невід'ємна вимірна (за Лебегом) функція, така, що*

$$0 < I(R) = \int\limits_{r_0}^{R} \psi(t)\, dt < \infty \qquad \forall\ R\ > r_0\,,$$

і при $R \to \infty$

$$\int\limits_{\mathbb{A}(z_0,r_0,R)} K_\mu^T(z, z_0)\psi^2(|z - z_0|)\, dm(z) \leqslant c \cdot I^p(R)\,, \quad c \in (0, \infty)\,,$$

де $p \leqslant 2$. *Тоді будь-який гомеоморфний розв'язок* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *рівняння Бельтрамі (4.1) класу Соболева* $W^{1,1}_{\rm loc}$ *задовольняє умову*

$$\liminf_{R\to\infty} L(z_0, f, R) \exp\left(-\frac{2\pi}{c}\, I^{2-p}(R)\right) > 0\,.$$

Покладаючи в лемі 4.5.2 $\psi(t) = \Big(\prod\limits_{k=0}^{N} \ln_k t\Big)^{-1}$, $r_0 = e_N$ і $p = 1$, приходимо до наступного твердження.

Теорема 4.5.2. *Нехай* $\mu\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *— вимірна функція така, що* $|\mu(z)| < 1$ *м.с.,* $K_\mu^T(z, z_0) \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{C})$ *і для деякого числа* $c > 0$ *виконуеться умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(z_0,\, e_N,\, R)} \frac{K_\mu^T(z, z_0)\, dm(z)}{\left(\prod\limits_{k=0}^{N} \ln_k |z - z_0|\right)^2} \leqslant c \cdot \ln_{N+1}(R) \qquad \forall\ R > e_N\,.$$

Тоді будь-який гомеоморфний розв'язок $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *рівняння Бельтрамі (4.1) класу Соболева* $W^{1,1}_{\rm loc}$ *задовольняє умову*

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{L(z_0, f, R)}{\ln_N^\gamma(R)} > 0\,, \quad \text{де} \quad \gamma = \frac{2\pi}{C}\,.$$

В теоремі 4.5.2, покладаючи $N=0$, приходимо до наступному наслідку.

Наслідок 4.5.3. *Якщо* $K_\mu^T(z,z_0)\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{C})$ *і для деякого числа* $c>0$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(z_0,1,R)}\frac{K_\mu^T(z,z_0)\,dm(x)}{|z-z_0|^2}\leqslant c\cdot\ln R\qquad\forall\ R>1\,,$$

то

$$\liminf\limits_{R\to\infty}\frac{L(z_0,f,R)}{R^{\frac{2\pi}{c}}}>0\,.$$

Наслідок 4.5.4. *Зокрема, якщо для деякого числа* $K>0$ *виконується умова*

$$\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{S(z_0,R)}K_\mu^T(z,z_0)\,ds\leqslant K\qquad\forall\ R>1\,,$$

то

$$\liminf\limits_{R\to\infty}\frac{L(z_0,f,R)}{R^{1/K}}>0\,.$$

4.6. Зв'язок класів Соболєва з нижніми і кільцевими Q-гомеоморфізмами

У цьому розділі встановлено зв'язок гомеоморфізмів, що належать класам Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$, з нижніми і кільцевими Q-гомеоморфізмами відносно p-модуля.

Нехай D — область в $\mathbb{C}$.

Означення 4.6.1. Відображення $f:D\to\mathbb{C}$ називається *відображенням зі скінченним спотворенням,* якщо $f\in W^{1,1}_{\rm loc}$ і

$$\|f'(z)\|^2\leqslant K(z)\cdot J_f(z)$$

для деякої майже всюди скінченної функції $K(z)$. Тут $\|f'(z)\|=|f_z|+|f_{\overline{z}}|$ і $J_f(z)=|f_z|^2-|f_{\overline{z}}|^2$.

Нехай $p \in (1,\infty)$. Надалі, покладаємо

$$K_p(z,f)=\begin{cases}\frac{\|f'(z)\|^p}{J_f(z)}, & \text{якщо } J_f(z)\neq 0\,,\\ 1, & \text{якщо } f'(z)=0\,,\\ \infty & \text{в інших точках,}\end{cases} \tag{4.13}$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 4.6.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{C}$. Тоді будь-який гомеоморфізм $f:D\to D'$ зі скінченним спотворенням є нижнім Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля при $Q(z)=K_p(z,f)$ і будь-якому $p>1$.*

Доведення. Нехай E — множина (борелева!) всіх точок z із D, у яких f має повний диференціал з $J_f(z)\neq 0$. Відомо, що E можна представити у вигляді об'єднання зліченного набору борелівських множин E_l, $l=1,2,\ldots$, таких, що $f_l=f|_{E_l}$ є біліпшицевими гомеоморфізмами, див., наприклад, лему 3.2.2 в [187]. Не порушуючи загальності, можна вважати, що E_l попарно не перетинаються. Нехай E_* — множина всіх точок $z\in D$, де f має повний диференціал з $f_z=0=f_{\bar z}$.

Зауважимо, що за відомою теоремою Герінга–Лехто–Меньшова множина $E_0=D\setminus(E\cup E_*)$ має нульову міру Лебега в $\mathbb{C}$, див. [253,352]. Отже, за лемою 3.1.1 лінійна міра Лебега $l(\gamma\cap E_0)=0$ для p-м.в. штрихових ліній γ в D. Покажемо також, що $l(f(\gamma)\cap f(E_0))=0$ для м.в. кіл γ з центром у точці z_0.

Останнє випливає з абсолютної неперервності f на замкнутих піддугах $\gamma\cap D$ для м.в. кіл γ. Дійсно, клас Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ є інваріантним відносно локально квазіізометричних перетворень незалежної змінної, див., наприклад, теорему 1.1.7 в [84], і функції із $W^{1,1}_{\rm loc}$ абсолютно неперервні на лініях (див., наприклад, теорему 1.1.3 в [84]). Застосовуючи, наприклад, перетворення координат $\ln(z-z_0)$, ми приходимо до абсолютної неперервності на м.в. колах γ з центром у точці z_0.

Отже, $l(\gamma_*\cap f(E_0))=0$, де $\gamma_*=f(\gamma)$, для м.в. кіл γ з центром у точці z_0. Нехай тепер $\rho_*\in{\rm adm}\,f(\Gamma)$, $\rho_*\equiv 0$ поза $f(D)$, де Γ — сукупність всіх штрихових ліній, утворених перетинами всіх кіл γ з центром у точці z_0. Нехай

$\rho \equiv 0$ поза D і

$$\rho(z) :\ = \rho_*(f(z))\,(|f_z| + |f_{\bar z}|) \qquad \text{для м.в. } z \in D.$$

Виконуючи відповідні оцінки спочатку на E_l за теоремою 3.2.5 із [187] (при $m=1$), а потім підсумовуючи їх з урахуванням зчисленної адитивності інтеграла Лебега, отримуємо

$$\int\limits_{\gamma} \rho\, ds \ \geqslant \int\limits_{\gamma_*} \rho_*\, ds_* \ \geqslant\ 1 \qquad \text{для м.в. } \gamma \in \Gamma,$$

оскільки $l(f(\gamma) \cap f(E_0)) = 0$ і $l(f(\gamma) \cap f(E_*)) = 0$ для p-м.в. $\gamma \in \Gamma$ в силу абсолютної неперервності f на p-м.в. $\gamma \in \Gamma$. Отже, $\rho \in \mathrm{ext_p\, adm}\,\Gamma$.

З іншого боку, ще раз виконуючи відповідні оцінки спочатку на E_l, а потім підсумовуючи їх з урахуванням зчисленної адитивності інтеграла Лебега, отримуємо нерівність

$$\int\limits_{D} \frac{\rho^p(x)}{K_p(z,f)}\, dm(z) \ \leqslant \int\limits_{f(D)} \rho_*^p(w)\, dm(w),$$

оскільки $\rho(z) = 0$ на E_*. Отже, ми отримуємо, що

$$M_p(f\Gamma) \ \geqslant \inf_{\rho \in \mathrm{ext_p\, adm}\,\Gamma} \int\limits_{D} \frac{\rho^p(z)}{K_p(z,f)}\, dm(z)\,,$$

тобто f є нижнім Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля при $Q(z) = K_p(z,f)$. Теорему доведено.

Нижче наведені твердження про зв'язок кільцевих і нижніх Q-гомеоморфізмів на комплексній площині, що є частинними випадками відповідно теореми 3.2.2 та наслідку 3.2.1 при $n=2$.

Твердження 4.6.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{C}$. Припустимо, що $Q : D \to (0,\infty)$ — вимірна за Лебегом функція така, що $\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, r) \neq \infty$ для м.в. $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \mathrm{dist}\,(z_0, \partial D)$, і $f : D \to D'$ — нижній Q-гомеоморфізм у точці z_0 відносно p-модуля при $p > 1$. Тоді f є кільцевим Q_*-гомеоморфізмом відносно p'-модуля у точці z_0 при $Q_*(z) = Q^{\frac{1}{p-1}}(z)$, де $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

Наслідок 4.6.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{C}$. Припустимо, що $Q : D \to (0, \infty)$ — локально інтегровна функція у степені $\frac{1}{p-1}$ і $f : D \to D'$ — нижній Q-гомеоморфізм у точці z_0 відносно p-модуля при $p > 1$. Тоді f є кільцевим Q_*-гомеоморфізмом відносно p'-модуля у точці z_0 при $Q_*(z) = Q^{\frac{1}{p-1}}(z)$, де $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

З теореми 4.6.1 і твердження 4.6.1 випливає наступний результат.

Лема 4.6.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{C}$ і $p > 1$. Припустимо, що $f : D \to D'$ — гомеоморфізм класу Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ зі скінченним спотворенням і для всіх $z_0 \in D$ виконується умова $\|K_p\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, r) \neq \infty$ для м.в. $r \in (0, d_0)$, де $d_0 = \mathrm{dist}\,(z_0, \partial D)$, $\|K_p\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, r) = \left(\int\limits_{S(z_0,r)} K_p^{\frac{1}{p-1}}(z, f)\, ds\right)^{p-1}$. Тоді f є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p'-модуля при $Q = K_p^{\frac{1}{p-1}}(z, f)$, де $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

З леми 4.6.1 і наслідка 4.6.1 випливає наступне твердження.

Наслідок 4.6.2. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{C}$ і $p > 1$. Припустимо, що $f : D \to D'$ — гомеоморфізм зі скінченним спотворенням і $K_p(z, f) \in L^{\frac{1}{p-1}}_{\rm loc}(D)$. Тоді f є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p'-модуля при $Q = K_p^{\frac{1}{p-1}}(z, f)$, де $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

4.7. Застосування нижніх Q-гомеоморфізмів до дослідження гомеоморфізмів зі скінченним спотворенням

Наведемо деякі результати, що випливають із установленого зв'язку між гомеоморфізмами зі скінченним спотворенням та нижніми Q-гомеоморфізмами відносно p-модуля.

Застосовуючи спочатку теорему 4.6.1, а потім лему 3.5.1, отримуємо наступне твердження, що містить достатню умову скінченної ліпшіцевості гомеоморфізмів зі скінченним спотворенням.

Теорема 4.7.1. *Нехай* D *і* D' — *області в* $\mathbb{C}$. *Припустимо, що* $f : D \to D'$ — *гомеоморфізм зі скінченним спотворенням і, крім того, при деякому* $p > 2$ *виконується умова*

$$k_p(z_0) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \left(\fint_{B(z_0,\varepsilon)} [K_p(z,f)]^{\frac{1}{p-1}}\, dm(z) \right)^{p-1} < \infty\,.$$

Тоді

$$L(z_0,f) = \limsup_{z\to z_0} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|} \leqslant \nu_0\, k_p^{\frac{1}{p-2}}(z_0) < \infty\,,$$

де ν_0 — *додатна стала, залежна тільки від* p.

Із теореми 4.7.1 безпосередньо випливає наступне твердження.

Наслідок 4.7.1. *Нехай* D *і* D' — *області в* $\mathbb{C}$. *Припустимо, що* $f : D \to D'$ — *гомеоморфізм зі скінченним спотворенням і, крім того, при деякому* $p > 2$ *виконується умова*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \fint_{B(z_0,\varepsilon)} [K_p(z,f)]^{\frac{1}{p-1}}\, dm(z) < \infty$$

для всіх $z_0 \in D$. *Тоді гомеоморфізм* f *є скінченно ліпшицевим.*

Побудуємо приклад гомеоморфізму зі скінченним спотворенням, що не є скінченно ліпшицевим.

Приклад 4.7.1. Припустимо, що $p > 2$. Нехай $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, де

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|}\left(1+(p-2)\int\limits_{|z|}^{1} \frac{dt}{t^{p-1}\ln^{p-1}(\frac{e}{t})}\right)^{-\frac{1}{p-2}}, & z \neq 0\,, \\ 0\,, & z = 0\,. \end{cases}$$

Відзначимо, що f є гомеоморфізмом класу C^1 в $\mathbb{B}\setminus\{0\}$, звідки випливає, що, зокрема $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B}\setminus\{0\})$.

Дотична та радіальна дилатації відображення f на колі $S_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$, $r \in (0,1)$, легко обчислюються:

$$\delta_T = \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{\left(1+(p-2)\int\limits_{r}^{1} \frac{dt}{t^{p-1}\ln^{p-1}(\frac{e}{t})}\right)^{-\frac{1}{p-2}}}{r}\,,$$

$$\delta_r = \frac{\left(1 + (p-2)\int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{p-1}\ln^{p-1}(\frac{e}{t})}\right)^{-\frac{p-1}{p-2}}}{r^{p-1}\ln^{p-1}(\frac{e}{t})}\,.$$

Зауважимо, що $\delta_T \geqslant \delta_r$ і

$$\delta_T^{p-1} = \delta_r \ln^{p-1}\left(\frac{e}{r}\right)\,. \tag{4.14}$$

Покажемо, що $f \in W^{1,1}_{\rm loc}(\mathbb{B})$. Дійсно,

$$\int\limits_{\overline{B}_r} \|f'(z)\|\, dm(z) = \int\limits_{\overline{B}_r} \frac{|f(z)|}{|z|}\, dm(z) \leqslant M_r \int\limits_{\overline{B}_r} \frac{dm(z)}{|z|} = 2\pi M_r\, r < \infty\,,$$

де $M_r = \max\limits_{\overline{B}_r} |f(z)|$, $\overline{B}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}$.

Враховуючи кругову симетрію і (4.14), знаходимо

$$K_p(z,f) = \frac{\delta_T^p}{\delta_T\delta_r} = \frac{\delta_T^{p-1}}{\delta_r} = \ln^{p-1}\left(\frac{e}{|z|}\right)\,.$$

Очевидно, що

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} ⨍_{B_\varepsilon} [K_p(z,f)]^{\frac{1}{p-1}}\, dm(z) = \infty\,,$$

де $B_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon\}$.

З іншого боку, легко перевірити за правилом Лопіталя, що

$$\lim_{z\to 0} \frac{|f(z)|}{|z|} = \infty\,,$$

тобто гомеоморфізм f не є ліпшицевим в нулі.

Застосовуючи послідовно теореми 4.6.1 і 3.3.1, отримуємо наступне твердження, що містить достатню умову локальної гельдеровості гомеоморфізмів зі скінченним спотворенням.

Теорема 4.7.2. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{C}$. Припустимо, що $f : D \to D'$ — гомеоморфізм зі скінченним спотворенням. Якщо для деяких скінченних чисел $\lambda > 1$, $\sigma > 0$ і $C_{z_0} > 0$ виконується умова*

$$\varepsilon^\sigma \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\|\,K_p\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0,r)} \geqslant C_{z_0} \tag{4.15}$$

для будь-якого $\varepsilon\in(0,\delta_0)\,,\delta_0\in\left(0,\frac{{\rm dist}\,(z_0,\partial D)}{\lambda^2}\right)$, *де*

$$\|\,K_p\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0,r)=\left(\int\limits_{S(z_0,r)}[K_p(z,f)]^{\frac{1}{p-1}}\;ds\right)^{p-1},$$

то при $p>2$ *маємо*

$$|f(z)-f(z_0)|\leqslant\nu_0\,C_{z_0}^{-\frac{1}{p-2}}\,|z-z_0|^{\frac{\sigma}{p-2}}\tag{4.16}$$

для всіх $z\in B(z_0,\delta_0)$, *де* ν_0 *— додатна стала, що залежить тільки від* p, λ *і* σ.

Наступний приклад показує, що за умови (4.15) оцінка (4.16) є точною за порядком.

Приклад 4.7.2. Нехай $p>2$, $\sigma<p-2$ і $f:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$, де

$$f(z)=\begin{cases}\frac{z}{|z|}\,|z|^{\frac{\sigma}{p-2}}\,, & z\neq 0\,,\\ 0\,, & z=0\,.\end{cases}$$

Дотична та радіальна дилатації відображення f легко обчислюються за формулами:

$$\delta_T=\frac{|f(z)|}{|z|}=|z|^{\frac{\sigma}{p-2}-1}\qquad\text{і}\qquad\delta_r=\frac{\partial|f(z)|}{\partial|z|}=\frac{\sigma}{p-2}\,|z|^{\frac{\sigma}{p-2}-1}\,.$$

Зауважимо, що $\delta_T>\delta_r$ і $\delta_r=\frac{\sigma}{p-2}\,\delta_T$. Отже, отримуємо

$$K_p(z,f)=\frac{\delta_T^p}{\delta_T\delta_r}=\frac{p-2}{\sigma}\,|z|^{\sigma-p+2}\,.$$

Отже,

$$\|K_p\|_{\frac{1}{p-1}}(0,r)=\left(\int\limits_{S_r}K_p^{\frac{1}{p-1}}(z,f)ds\right)^{p-1}=(2\pi)^{p-1}\,\frac{p-2}{\sigma}\,r^{\sigma+1}\,,$$

де $S_r=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|=r\}$.

Покажемо, що функція $K_p(z,f)$ задовольняє умову (4.15). Припустимо, що $\lambda>1$, $\varepsilon\in(0,\delta_0)$ і $\delta_0\in\left(0,\frac{1}{\lambda^2}\right)$. Нескладні обчислення показують, що

$$\varepsilon^\sigma\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{\|\,K_p\|_{\frac{1}{p-1}}(0,r)}=(2\pi)^{1-p}\,\frac{\sigma}{p-2}\,\varepsilon^\sigma\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{r^{\sigma+1}}=\frac{1-\lambda^{-\sigma}}{(2\pi)^{p-1}(p-2)}>0\,.$$

У той же час для всіх $z\in\mathbb{B}$ маємо рівність $|f(z)|=|z|^{\frac{\sigma}{p-2}}$.

З теореми 4.6.1 та наслідку 3.3.4 випливає наступне твердження.

Наслідок 4.7.2. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{C}$. Припустимо, що $f\,:\,D\to D'$ — гомеоморфізм зі скінченним спотворенням. Якщо $K_p(z,f)\in L_\alpha(B(z_0,\delta_0)),\delta_0\in\left(0,\frac{{\rm dist}\,(z_0,\partial D)}{4}\right)$, $p>2$, $\alpha>\frac{2}{p-2}$, то*

$$|f(z)-f(z_0)|\;\leqslant\;\nu_0\|K_p(z,f)\|_\alpha^{\frac{1}{p-2}}|z-z_0|^{1-\frac{2}{\alpha(p-2)}}$$

для всіх $z\in B(z_0,\delta_0)$, де $\|K_p(z,f)\|_\alpha=\left(\int\limits_{B(z_0,\delta_0)}K_p^\alpha(z,f)\,dm(z)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ — норма у просторі $L_\alpha(B(z_0,\delta_0))$, ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від p і α.

З теореми 4.6.1 та наслідку 3.3.2 випливає наступне твердження.

Наслідок 4.7.3. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{C}$. Припустимо, що $f\,:\,D\to D'$ — гомеоморфізм зі скінченним спотворенням. Якщо $p>2$ і для деякого скінченного числа $k_{z_0}>0$ виконується умова*

$$\left(\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{S(z_0,r)}[K_p(z,f)]^{\frac{1}{p-1}}\;ds\right)^{p-1}\leqslant k_{z_0}$$

для м.в. $r\in(0,\delta_0)$, де $\delta_0\in\left(0,\frac{{\rm dist}\,(z_0,\partial D)}{e^2}\right)$, то

$$|f(z)-f(z_0)|\;\leqslant\;\nu_0\,k_{z_0}^{\frac{1}{p-2}}\,|z-z_0|$$

для всіх $z\in B(z_0,\delta_0)$, де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від p.

Нижче наведені оцінки логарифмічного типу стосовно спотворення відстаней при гомеоморфізмах зі скінченним спотворенням.

Застосовуючи спочатку теорему 4.6.1, а потім наслідок 3.5.5, отримуємо наступне твердження.

Теорема 4.7.3. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{C}$. Припустимо, що $f\,:\,D\to D'$ — гомеоморфізм зі скінченним спотворенням. Якщо $K_p(z,f)\in L_{\frac{2}{p-2}}(B(z_0,\delta_0)),\delta_0\leqslant\min\{1,{\rm dist}^4\,(z_0,\partial D)\}$, $p>2$, то*

$$|f(z)-f(z_0)|\;\leqslant\;\nu_0\|K_p(z,f)\|_{\frac{2}{p-2}}^{\frac{1}{p-2}}\ln^{-\frac{p}{2(p-2)}}\frac{1}{|z-z_0|}$$

для всіх $z \in B(z_0, \delta_0)$, *де* $\|K_p(z,f)\|_{\frac{2}{p-2}} = \Bigg(\int\limits_{B(z_0,\delta_0)} K_p^{\frac{2}{p-2}}(z,f)\,dm(z)\Bigg)^{\frac{p-2}{2}}$ *— норма у просторі* $L_{\frac{2}{p-2}}(B(z_0,\delta_0))$ *та* ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* p.

З теореми 4.6.1 та наслідку 3.5.6 випливає наступне твердження.

Наслідок 4.7.4. *Нехай* D *і* D' *— області в* $\mathbb{C}$. *Припустимо, що* $f : D \to D'$ *— гомеоморфізм зі скінченним спотворенням. Якщо* $p > 2$ *і для деякого скінченного числа* $k_{z_0} > 0$ *виконується умова*

$$\|K_p\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, r) \leqslant k_{z_0} r\,, \tag{4.17}$$

для м.в. $r \in (0, \delta_0)$, *де* $\delta_0 \leqslant \min\{1, \operatorname{dist}^4(z_0, \partial D)\}$, *то*

$$|f(z) - f(z_0)| \leqslant \nu_0\, \kappa_{z_0}^{\frac{1}{p-2}}\, \ln^{-\frac{1}{p-2}} \frac{1}{|z - z_0|}\,, \tag{4.18}$$

для всіх $z \in B(z_0, \delta_0)$, *де* ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* p.

Наступний приклад показує, що за умови (4.17) оцінка (4.18) є точною за порядком.

Приклад 4.7.3. Нехай $p > 2$ і $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, де

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|}\left(1 + (p-2)\ln\frac{1}{|z|}\right)^{\frac{1}{2-p}}\,, & z \neq 0\,, \\ 0\,, & z = 0\,. \end{cases}$$

Дотична та радіальна дилатації відображення f легко обчислюються за формулами:

$$\delta_T = \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{\left(1 + (p-2)\ln\frac{1}{|z|}\right)^{\frac{1}{2-p}}}{|z|}\,,$$

$$\delta_r = \frac{\partial |f(z)|}{\partial |z|} = \frac{\left(1 + (p-2)\ln\frac{1}{|z|}\right)^{\frac{p-1}{2-p}}}{|z|}\,.$$

Зауважимо, що $\delta_T > \delta_r$ та $\delta_T^{p-1} = |z|^{2-p}\delta_r$. Отже,

$$K_p(z,f) = \frac{\delta_T^p}{\delta_T \delta_r} = \frac{\delta_T^{p-1}}{\delta_r} = |z|^{2-p}\,.$$

Отже,

$$\|K_p(z,f)\|_{\frac{1}{p-1}}(r) = \left(\int\limits_{S_r} K_p^{\frac{1}{p-1}}(z,f)\,ds\right)^{p-1} = (2\pi)^{p-1}r\,,$$

де $S_r = \{z \in \mathbb{C}:\ |z| = r\}$.

Тоді для всіх $z \in B(0, e^{-1}) = \{z \in \mathbb{C}:\ |z| \leqslant e^{-1}\}$ маємо оцінку

$$(p-1)^{-\frac{1}{p-2}} \ln^{-\frac{1}{p-2}} \frac{1}{|z|} \leqslant |f(z)| \leqslant (p-2)^{2-p} \ln^{-\frac{1}{p-2}} \frac{1}{|z|}\,.$$

В наступній теоремі, що є уточненням теореми 2.4.1 у випадку гомеоморфізмів зі скінченним спотворенням, узагальнено оцінку М.О. Лаврентьєва про спотворення площі образу круга при квазіконформних відображеннях.

Теорема 4.7.4. *Нехай $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ — гомеоморфізм зі скінченним спотворенням. Тоді при $p = 2$ виконується оцінка*

$$m\left(f\overline{B}_r\right) \leqslant \pi \exp\left(-4\pi \int\limits_r^1 \frac{d\tau}{\|\,K\|\,_1(\tau)}\right)\,,$$

а при $p > 2$ — оцінка

$$m(f\overline{B}_r) \leqslant \pi \left(1 + (2\pi)^{p-1}(p-2) \int\limits_r^1 \frac{d\tau}{\|\,K_p\|\,_{\frac{1}{p-1}}(\tau)}\right)^{-\frac{2}{p-2}}\,,$$

де $\overline{B}_r = \{z \in \mathbb{C}:\ \ |z| \leqslant r\}$, $\|\,K_p\|\,_{\frac{1}{p-1}}(\tau) = \left(\int\limits_{S_\tau} [K_p(z,f)]^{\frac{1}{p-1}}\,ds\right)^{p-1}$ і $S_\tau = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \tau\}$.

Доведення. За теоремою 4.6.1 f є нижнім Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля при $Q(z) = K_p(z,f)$ і будь-якому $p > 1$. Тепер твердження теореми випливає з леми 3.5.5. Теорему доведено.

Наступний аналог теореми Ікоми–Шварца є уточненням теореми 2.5.1 для гомеоморфізмів зі скінченним спотворенням.

Теорема 4.7.5. *Нехай* $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ *— гомеоморфізм зі скінченним спотворенням,* $f(0) = 0$. *Тоді при* $p > 2$ *виконується оцінка*

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(1 + (2\pi)^{p-1}(p-2)\int\limits_{|z|}^{1} \frac{dr}{\|\, K_p\|_{\frac{1}{p-1}}(r)}\right)^{\frac{1}{p-2}} \leqslant 1,$$

а при $p = 2$ *— оцінка*

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \exp\left(2\pi\int\limits_{|z|}^{1} \frac{dr}{\|\, K\|_{1}(r)}\right) \leqslant 1\,,$$

де $\|\, K_p\|_{\frac{1}{p-1}}(r) = \left(\int\limits_{S_r} [K_p(z,f)]^{\frac{1}{p-1}}\, ds\right)^{p-1}$ *і* $S_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$.

Доведення. За теоремою 4.6.1 f є нижнім Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля при $Q(z) = K_p(z,f)$ і будь-якому $p > 1$. Тепер твердження теореми випливає з леми 3.5.6. Теорему доведено.

Із теореми 4.7.5 безпосередньо випливає наступне твердження.

Наслідок 4.7.5. *За умов теореми 4.7.5 при* $p > 2$ *виконується оцінка*

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(\int\limits_{|z|}^{1} \frac{dr}{\|\, K_p\|_{\frac{1}{p-1}}(r)}\right)^{\frac{1}{p-2}} \leqslant (2\pi)^{-\frac{p-1}{p-2}}(p-2)^{-\frac{1}{p-2}}\,.$$

Висновки

У розділі 4 досліджено властивості гомеоморфізмів класу Соболєва $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ на комплексній площині:

1) встановлено, що гомеоморфні розв'язки вироджених рівнянь Бельтрамі з узагальненими похідними є кільцевими та нижніми Q-гомеоморфізмами, де Q — дотична дилатація;

2) доведено теореми про неперервне і гомеоморфне продовження розв'язків вироджених рівнянь Бельтрамі з узагальненими похідними;

3) для гомеоморфних розв'язків вироджених рівнянь Бельтрамі з узагальненими похідними отримано аналог результату Мартіо–Рікмана–Вяйсяля про оцінку швидкості зростання на нескінченності;

4) встановлено загальні умови на дотичну дилатацію, достатні для існування регулярних розв'язків задачі Діріхле для вироджених рівнянь Бельтрамі в довільних жорданових областях;

5) встановлено, що гомеоморфізми зі скінченним спотворенням на комплексній площині є нижніми та кільцевими Q-гомеоморфізмами відносно p-модуля;

6) для гомеоморфізмів зі скінченним спотворенням доведено аналог теореми Ікоми–Шварца, отримано оцінку площі образу круга, встановлено достатні умови скінеченної ліпшицевості, локальної та логарифмічної гельдеровості.

РОЗДІЛ 5

ДО ТЕОРІЇ ВІДОБРАЖЕНЬ КЛАСІВ ОРЛІЧА – СОБОЛЄВА У ПРОСТОРІ

У цьому розділі вивчаються властивості відображень класів Соболєва та Орліча–Соболєва в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Результати цього розділу опубліковано в роботах $[5, 6, 50, 51, 126, 127, 140, 142, 143, 269, 387]$.

5.1. Відображення зі скінченним спотворенням

У роботах Ю.Г. Решетняка, С.К. Водопьянова, В.М. Гольдштейна та інших розвинено теорію відображень з обмеженим спотворенням, яка стала класикою теорії відображень, див., напр., монографії $[23, 32, 110]$, а також статтю [20].

Наведемо деякі означення.

Означення 5.1.1. Неперервне відображення $f : U \to \mathbb{R}^n$ відкритої множини U в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, називається *відображенням з обмеженим спотворенням*, якщо $f \in W^{1,n}_{\rm loc}$, його якобіан $J_f(x) = \det f'(x)$ не змінює знак в U та

$$\|f'(x)\|^n \leqslant K\,|J_f(x)| \qquad \text{м.с.}$$

для деякого числа $K \in [1, \infty)$, де $f'(x)$ — матриця Якобі відображення f, $\|f'(x)\|$ — її матрична норма, тобто $||f'(x)|| = \sup\limits_{h\in\mathbb{R}^n, |h|=1} |f'(x) \cdot h|$.

В іноземній літературі такі відображення прийнято називати квазірегулярними (див., напр., $[286, 339, 382]$).

Означення 5.1.2. Гомеоморфізм $f : U \to \mathbb{R}^n$ відкритої множини U в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, називається *відображенням зі скінченним спотворенням*, якщо $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$ і

$$\|f'(x)\|^n \leqslant K(x) \cdot J_f(x) \qquad \text{м.с.}$$

для деякої скінченної функції $K(x) \geqslant 1$.

Означення 5.1.3. *Зовнішньою дилатацією* відображення f у точці x називається величина

$$K_O(x, f) = \frac{\|f'(x)\|^n}{|J_f(x)|}\,,$$

якщо $J_f(x) \neq 0$; $K_O(x, f) = 1$, якщо $f'(x) = 0$; і $K_O(x, f) = \infty$ в інших точках, включаючи точки без перших частинних похідних.

Надалі ми також використовуємо дилатацію

$$P_f\,(x) = K_O^{\frac{1}{n-1}}(x, f)\ . \tag{5.1}$$

Нагадаємо, що вперше поняття відображення зі скінченним спотворенням введено у випадку площини для $f \in W^{1,2}_{\rm loc}$ в роботі [303]. Згодом ця умова була замінена вимогою $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$ і при цьому додатково припускалось, що $J_f \in L^1_{\rm loc}$ (див., напр., монографію [301], а також подальші посилання в монографії [342]).

Зауваження 5.1.1. Зауважимо, що у випадку гомеоморфізмів умова $J_f \in L^1_{\rm loc}$ зайва. Дійсно, для кожного гомеоморфізма f між областями D і D' в $\mathbb{R}^n$, який має м.с. частинні похідні в D, існує множина E лебегової міри нуль, така що f володіє (N)-властивістю Лузіна в $D \setminus E$ і

$$\int\limits_A J_f(x)\, dm(x) = m(f(A)) \tag{5.2}$$

для кожної вимірної за Лебегом множини $A \subset D \setminus E$ (див., напр., пункти 3.1.4, 3.1.8 і 3.2.5 в [187]).

З використанням (5.2) встановлюється наступне важливе твердження.

Твердження 5.1.1. *Нехай f — ACL-гомеоморфне відображення області D із $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, в $\mathbb{R}^n$. Тоді*

$(i)\quad f\in W^{1,1}_{\rm loc}\,,\quad$ *якщо* $\quad P_f\in L^1_{\rm loc}\,;$

$(ii)\quad f\in W^{1,\frac{n}{2}}_{\rm loc}\,,\quad$ *якщо* $\quad K_O\in L^1_{\rm loc}\,;$

$(iii)\quad f\in W^{1,n-1}_{\rm loc}\,,\quad$ *якщо* $\quad K_O\in L^{n-1}_{\rm loc}\,;$

$(iv)\quad f\in W^{1,p}_{\rm loc},\ p>n-1\,,\quad$ *якщо* $\quad K_O\in L^{\gamma}_{\rm loc},\ \gamma>n-1\,;$

$(v)\quad f\in W^{1,p}_{\rm loc},\ p=n\gamma/(1+\gamma)\geqslant 1\,,\quad$ *якщо* $\quad K_O\in L^{\gamma}_{\rm loc},\ \gamma\geqslant 1/(n-1)\,.$

Доведення. Дійсно, за нерівністю Гельдера на компактній множині C в D, враховуючи (5.2), отримуємо такі оцінки для норм перших частинних похідних:

$$\|\partial_i f\|_p\leqslant\|f'\|_p\leqslant\|K_O^{1/n}\|_s\cdot\|J_f^{1/n}\|_n\leqslant\|K_O\|_{\gamma}^{1/n}\cdot m^{1/n}(f(C))<\infty\,, \tag{5.3}$$

якщо $K_O\in L^{\gamma}_{\rm loc}$ для деякого $\gamma\in(0,\infty)$, оскільки для м.в. $x\in D$

$$\|f'(x)\|\;=\;K_O^{1/n}(x)J_f^{1/n}(x)\,,$$

де $\frac{1}{p}=\frac{1}{s}+\frac{1}{n}$ і $s=\gamma n$, тобто $p=\frac{n\gamma}{1+\gamma}$.

Тепер при $\gamma=\frac{1}{n-1}$ маємо $p=1$, звідки випливає твердження (i). Якщо покласти $\gamma=1$, то $p=\frac{n}{2}$, звідки випливає твердження (ii). При $\gamma=n-1$ маємо $p=n-1$, звідки випливає твердження (iii). При $\gamma>n-1$ маємо $p>n-1$, звідки випливає твердження (iv). Нарешті, при $\gamma\geqslant\frac{1}{n-1}$ маємо $p\geqslant 1$, звідки випливає твердження (v).

Твердження 5.1.1 доведено.

Зауважимо, що висновки твердження 5.1.1 і оцінки (5.3) справедливі також для всіх ACL-відображень $f:D\to\mathbb{R}^n$, для яких $J_f\in L^1_{\rm loc}$. Далі іноді ми будемо використовувати оцінку (5.3) для отримання необхідних нам тверджень, не наводячи необхідні обгрунтування без будь-яких коментарів.

Як було показано у розділі 4, на площині будь-який гомеоморфізм класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ є як кільцевим, так і нижнім Q-гомеоморфізмом з функцією Q, рівною дилатації відображення. У просторах $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, аналогічні результати встановлюються для гомеоморфізмів класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ за умови типу Кальдерона на функцію φ і, зокрема, для гомеоморфізмів класів Соболєва $W^{1,q}_{\rm loc}$ при $q>n-1$. Це дозволяє до таких гомеоморфізмів застосувати теорію кільцевих і нижніх Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля.

5.2. Про результати Кальдерона та Вяйсяля–Фаделя

У цьому підрозділі ми наводимо допоміжні результати Кальдерона і Вяйсяля–Фаделя, а також ряд інших допоміжних тверджень.

Усюди далі H^k, $k \geqslant 0$, позначає k*-вимірну міру Хаусдорфа* в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Якщо A — множина в $\mathbb{R}^n$, то

$$H^k(A) = \sup_{\varepsilon>0} H^k_\varepsilon(A), \tag{5.4}$$

$$H^k_\varepsilon(A) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_i)^k, \tag{5.5}$$

де інфімум в (5.5) береться по всіх покриттях A множинами A_i з $\operatorname{diam} A_i < \varepsilon$, див., напр., [297, 349]. Відомо, що зовнішня міра Лебега $m(A)$ для довільної множини A в $\mathbb{R}^n$ задовольняє співвідношення $m(A) = \Omega_n \cdot 2^{-n} H^n(A)$, де Ω_n — об'єм одиничної кулі в $\mathbb{R}^n$, див. [417].

Означення 5.2.1. H^k є *зовнішньою мірою в сенсі Каратеодорі*, якщо

(1) $H^k(X) \leqslant H^k(Y)$ при $X \subset Y$,

(2) $H^k\left(\bigcup\limits_i X_i\right) \leqslant \sum\limits_i H^k(X_i)$ для кожної послідовності множин X_i,

(3) $H^k(X \cup Y) = H^k(X) + H^k(Y)$ при $\operatorname{dist}(X, Y) > 0$.

Означення 5.2.2. Множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається *вимірною* відносно міри H^k, якщо для кожної множини $X \subset \mathbb{R}^n$ виконується умова $H^k(X) = H^k(X \cap E) + H^k(X \setminus E)$.

Зауваження 5.2.1. Добре відомо, что довільна борелева множина є вимірною відносно будь-якої зовнішньої міри у сенсі Каратеодорі; див., напр., теорему II (7.4) в [131]. Крім того, H^k є регулярною за Борелем, тобто, для кожної множини $X \subset \mathbb{R}^n$ існує борелева множина $B \subset \mathbb{R}^n$ така, що $X \subset B$ і $H^k(X) = H^k(B)$; див., напр., теорему II (8.1) в [131] і розд. 2.10.1 в [187]. З останнього випливає, що для кожної вимірної множини $E \subset \mathbb{R}^n$ з $H^k(X) < \infty$ існують борелеві множини B_* і $B^* \subset \mathbb{R}^n$ такі, що $B_* \subset E \subset B^*$ і $H^k(B^* \setminus B_*) = 0$, див., напр., розд. 2.2.3 в [187]. Зокрема, $H^k(B^*) = H^k(E) = H^k(B_*)$.

Справедливе наступне твердження (див., напр., част. 1, розд. VII в [297].)

Твердження 5.2.1. *Якщо* $H^{k_1}(A)<\infty$, *то* $H^{k_2}(A)=0$ *для будь-якого* $k_2>k_1$.

Означення 5.2.3. Величина

$$\dim_H A=\sup\limits_{H^k(A)>0} k$$

називається *хаусдорфовою розмірністю* множини A.

У роботі [256] було показано, що для будь-яких p і $q\in(0,n)$ знайдеться множина A така, що $\dim_H A=p$, яка може бути відображена за допомогою квазіконформного відображення f простору $\mathbb{R}^n$ на множину B з $\dim_H B=q$, див. також [208, 212].

Означення 5.2.4. k*-вимірним напрямком* Γ у просторі $\mathbb{R}^n$ називається клас еквівалентності усіх k-вимірних площин в $\mathbb{R}^n$, які можуть бути отримані одна з іншої за допомогою паралельного перенесення.

Кожна $(n-k)$-вимірна площина $\mathcal{T}$, ортогональна k-вимірній площині $\mathcal{P}$, перетинає $\mathcal{P}$ в єдиній точці $X(\mathcal{P})$. Нехай E — підножина Γ. Тоді $X(E)$ позначатиме множину усіх точок $X(\mathcal{P})$, $\mathcal{P}\in E$. Ясно, що $(n-k)$-вимірна міра множини $X(E)$ не залежить від вибору площини $\mathcal{T}$; позначимо її символом $\mu_{n-k}(E)$.

Означення 5.2.5. Будемо говорити, що деяка властивість має місце для майже всіх площин Γ, якщо множина E, що складається з усіх площин $\mathcal{P}$, для яких ця властивість порушується, така, що $\mu_{n-k}(E)=0$.

Наступна важлива властивість, яка доведена у монографії [32] (див. теорему 5.5, підрозд. 5.5, розд. II) для функцій f класу Соболєва $W^{1,p}_{\rm loc}$, може бути поширена на відображення з класів Орліча–Соболєва.

Твердження 5.2.2. *Нехай* U *— відкрита множина в* $\mathbb{R}^n$ *і* $f:U\to\mathbb{R}^m$, $m\geqslant 1$, *— відображення класу Орліча–Соболєва* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(U)$, *де* $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ *— зростаюча функція. Тоді для майже всіх гіперплощин* $\mathcal{P}$, *паралельних фіксованій координатній гіперплощині* $\mathcal{P}_0$, *звуження відображення* f *на множину* $\mathcal{P}\cap U$ *є відображенням класу* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\mathcal{P}\cap U)$.

Доведення. Насамперед, за теоремою 5.5 підрозділу 5.5, розділу II в [32] $f|_{\mathcal{P}}\in W^{1,1}_{\rm loc}$ на майже всіх гіперплощинах $\mathcal{P}$, паралельних фіксованій координатній гіперплощині $\mathcal{P}_0$.

Отже, залишається показати, що для майже всіх гіперплощин $\mathcal{P}$, паралельних фіксованій координатній гіперплощині $\mathcal{P}_0$, та довільного компакта $K\subset \mathcal{P}\cap U$ виконується умова

$$\int\limits_K \varphi\left(|\nabla g(z)|\right)\,dm_{n-1}(z)<\infty,$$

де $g:=f|_{\mathcal{P}\cap U}$.

Без обмеження загальності міркувань, будемо вважати, що гіперплощина $\mathcal{P}_0$ утворена $n-1$ векторами $(1,0,\ldots,0),\ldots,$ $(0,0,\ldots,1,0)$ (доведення для інших гіперплощин проводиться аналогічно).

Нехай C — довільний сегмент такий, що $\overline{C}\subset U$, $C=\{x\in\mathbb{R}^n: a_1<x_1<b_1,\ldots,a_n<x_n<b_n\}$. Тоді з використанням теореми Фубіні (див., напр., теорему 8.1 розд. III в [131]) отримуємо співвідношення

$$\infty>\int\limits_C\varphi(|\nabla f(x)|)dm(x)\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_C\varphi\left(\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x)\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}}(x)\right)^2}\right)dm(x)=$$

$$=\int\limits_{a_n}^{b_n}\left(\int\limits_{\mathcal{P}_t\cap C}\varphi(|\nabla g_t(z)|)\,dm_{n-1}(z)\right)\,dt\,,$$

де $g_t(z):=f(z,t)$, $z=(x_1,\ldots,x_{n-1})$ і $\mathcal{P}_t$ позначає гіперплощину, перпендикулярну n-ій осі з $x_n=t$. Звідси випливає, що для майже всіх $t\in[a_n,b_n]$

$$\int\limits_{\mathcal{P}_t\cap C}\varphi(|\nabla g_t(z)|)\,dm_{n-1}(z)<\infty\,.$$

Покриємо U за допомогою всіх сегментів $C_m=\{x\in\mathbb{R}^n: a_1^{(m)}<x_1<b_1^{(m)},\ldots,a_n^{(m)}<x_1<b_n^{(m)}\}$, $m=1,2,\ldots,$ з раціональними $a_k^{(m)}$ та $b_k^{(m)}$,

таких, що $\overline{C_m} \subset U$. Нехай G_m складається з таких чисел $t \in (a_n^{(m)}, b_n^{(m)})$, для яких $\varphi(|\nabla g_t(z)|) \notin L^1(\mathcal{P}_t \cap C_m)\}$. Для довільного $t \in \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} G_m$ виберемо гіперплощину $\mathcal{P}_t$ та довільний компакт $K \subset \mathcal{P} \cap U$. Зауважимо, що за доведеним вище $m_1 \left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} G_m\right) = 0$ і що для компакта K знайдуться номери $s_1, \ldots s_k \in \mathbb{N}$ такі, що $K \subset \bigcup\limits_{l=1}^{k} C_{s_l}$. За побудовою отримуємо

$$\int\limits_{\mathcal{P}_t \cap K} \varphi(|\nabla g_t(z)|) dm_{n-1}(z) \leqslant \sum_{l=1}^{k} \int\limits_{\mathcal{P}_t \cap C_{s_l}} \varphi(|\nabla g_t(z)|) dm_{n-1}(z) < \infty\,.$$

Отже, отримуємо $\int\limits_K \varphi\left(|\nabla g_t(z)|\right)\, dm_{n-1}(z) < \infty$ для майже всіх гіперплощин $\mathcal{P}_t$, паралельних гіперплощині $\mathcal{P}_0$, та довільного компакта $K \subset \mathcal{P}_t \cap U$, що і треба було довести. Твердження 5.2.2 доведено.

Зауваження 5.2.2. Клас $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ коректно визначений для майже всіх k-мірних площин, оскільки частинні похідні є борелевими функціями; крім того, класи Соболєва є інваріантними відносно перетворень квазіізометрії незалежної змінної, зокрема, відносно обертань систем координат, див., напр., розд. 1.1.7 в [84].

Наведемо також відому теорему Вяйсяля–Фаделя (див. [244, 435]), яка дозволяє поширити добре відомі теореми Меньшова–Герінга–Лехто на площині, а також теорему Вяйсяля у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$ (див., напр., [253, 352, 434]), про диференційовність майже скрізь відкритих відображень класу Соболєва на відкриті відображення класів Орліча–Соболєва в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

Твердження 5.2.3. *Нехай Ω — відкрита множина в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, і $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — неперервне відкрите відображення. Якщо f має майже скрізь повний диференціал на Ω на майже всіх гіперплощинах паралельних координатній гіперплощині відносно $n-1$ змінної, то f має повний диференціал майже скрізь в Ω відносно всіх n змінних.*

Нарешті, наведемо наступний фундаментальний результат Кальдерона (див. [225], с. 208).

Твердження 5.2.4. *Нехай $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — зростаюча функція така, що $\varphi(0) = 0$ і для деякого натурального $k \geqslant 2$ виконується умова*

$$A := \int\limits_0^\infty \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{k-1}} dt < \infty. \tag{5.6}$$

Припустимо, що $f : D \to \mathbb{R}$ — неперервна функція класу $W^{1,\varphi}(D)$, задана в області $D \subset \mathbb{R}^k$. Тоді для будь-якого куба $C \subset D$, ребра якого орієнтовані уздовж координатних осей, виконується умова

$$\operatorname{diam} f(C) \leqslant \alpha_k A^{\frac{k-1}{k}} \left[\int\limits_C \varphi\left(|\nabla f|\right) dm(x)\right]^{\frac{1}{k}}, \tag{5.7}$$

де α_k — деяка стала, що залежить тільки від k.

Зауважимо, що лема 3.2 в [309] фактично є переформулюванням цього результату Кальдерона без будь-якого посилання на його роботу. Мабуть, пройшло досить багато часу для того, щоб робота [225], будучи опублікованою в маловідомому доступному журналі, виявилася забутою.

Зауваження 5.2.3. Тут не суттєво, що φ — (строго!) зростаюча. Дійсно, нехай φ — тільки неспадна. Переходячи за необхідності до нової функції

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon(t) := \varphi(t) + \sum_i \varphi_i^{(\varepsilon)}(t),$$

де

$$\varphi_i^{(\varepsilon)}(t) := \varepsilon \, \frac{2^{-i}}{(b_i - a_i)} \int\limits_0^t \chi_i(t)\, dt,$$

χ_i — характеристичні функції інтервалів (a_i, b_i) сталості функції φ, ми бачимо, що $\varphi(t) \leqslant \tilde{\varphi}_\varepsilon(t) \leqslant \varphi(t) + \varepsilon$ і, таким чином, умова (1.94) на C та умова (5.6) виконуються для (строго!) зростаючої функції $\tilde{\varphi}_\varepsilon$. Перейшовши до границі при $\varepsilon \to 0$, отримаємо оцінку (5.7).

Функція $(t/\varphi(t))^{1/(k-1)}$ може мати в нулі неінтегровну особливість. Однак, зрозуміло, що поведінка функції φ поблизу нуля не суттєва для оцінки (5.7).

Дійсно, ми можемо застосувати оцінку (5.7) із замінами $A \mapsto A_*$ і $\varphi \mapsto \varphi_*$, де

$$A_* := \left[\frac{1}{\varphi(t_*)}\right]^{\frac{1}{k-1}} + \int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{k-1}} dt < \infty,$$

$\varphi_*(0) = 0$, $\varphi_*(t) \equiv \varphi(t_*)$ при $t \in (0, t_*)$ і $\varphi_*(t) = \varphi(t)$ при $t \geqslant t_*$, якщо $\varphi(t_*) > 0$. Тому, зокрема, нормування $\varphi(0) = 0$ у твердженні 5.2.4, очевидно, також є не суттєвим обмеженням.

5.3. Диференційовність відкритих відображень

У даному підрозділі показано, що відкриті відображення класів Орліча-Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\Omega)$ за умови типу Кальдерона на функцію φ мають повний диференціал майже скрізь, що є узагальненням результату Меньшова–Герінга–Лехто на площині та теореми Вяйсяля в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, про диференційовність майже скрізь відкритих відображень класу Соболєва на відкриті відображення класів Орліча–Соболєва в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

Почнемо з наступного результату, який належить Кальдерону [225], порівняй також з роботою [425]. На відміну від [225], це твердження буде доведено тут більш коротко, спираючись на твердження 5.2.4, зауваження 5.2.3 до нього і теорему Степанова (див. [426], а також [330]).

Лема 5.3.1. *Нехай* Ω *— відкрита множина в* $\mathbb{R}^k$, $k \geqslant 2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *— неперервна функція класу* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\Omega)$, *де* $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *— неспадна функція, така що для деякого* $t_* \in (0,\infty)$ *виконується умова*

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{k-1}} dt < \infty \ . \tag{5.8}$$

Тоді f *має повний диференціал майже скрізь в* Ω.

Доведення. Для заданого $x \in \Omega$, покладемо

$$L(x,f) = \limsup_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}.$$

За теоремою Степанова доведення зводиться до встановлення нерівності $L(x,f)<\infty$ майже скрізь в Ω.

Позначимо через $C(x,r)$ орієнтований куб з центром у точці x такий, що куля $B(x,r)$ вписана в $C(x,r)$, де $r=|x-y|$. Тоді

$$L(x,f)=\limsup_{y\to x}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\leqslant$$

$$\leqslant\limsup_{r\to 0}\frac{\mathrm{diam}\ (f\,(B(x,r)))}{r}\leqslant\limsup_{r\to 0}\frac{\mathrm{diam}\ (f\,(C(x,r)))}{r}.$$

Внаслідок твердження 5.2.4 і зауваження 5.2.3, а також за теоремою Лебега про диференційовність невизначеного інтеграла (див. теорему IV(6.3) в [131]) отримуємо

$$L(x,f)\leqslant\gamma_{k,m}\,A_*^{\frac{k-1}{k}}\limsup_{r\to 0}\left[\frac{1}{r^k}\int\limits_{C(x,r)}\varphi_*\left(|\nabla f|\right)\,dm(x)\right]^{\frac{1}{k}}<\infty$$

для майже всіх $x\in\Omega$, де A_* і φ_* визначені у зауваженні 5.2.3. Лему доведено.

З леми 5.3.1 і твердження 5.2.2 отримуємо наступне твердження.

Наслідок 5.3.1. *Нехай Ω — відкрита множина в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ — неперервна функція класу $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\Omega)$, де $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ — неспадна функція, така що для деякого $t_*\in(0,\infty)$ виконується умова*

$$\int\limits_{t_*}^{\infty}\left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}}dt<\infty\ . \tag{5.9}$$

Тоді на майже кожній гіперплощині $\mathcal{P}$, паралельній довільній фіксованій гіперплощині $\mathcal{P}_0$, відображення $f|_{\mathcal{P}}$ має майже скрізь повний диференціал.

Тепер очевидно, що з наслідку 5.3.1 і результату Вяйсяля–Фаделя (див. твердження 5.2.3) випливає наступне твердження, яке є основним результатом цього розділу.

Теорема 5.3.1. *Нехай Ω — відкрита множина в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ — неперервне відкрите відображення класу $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\Omega)$, де φ :*

$(0,\infty) \to (0,\infty)$ — *неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9). Тоді відображення* f *має майже скрізь повний диференціал в* Ω.

Зауваження 5.3.1. Зокрема, твердження теореми 5.3.1 справедливе, якщо $f \in W^{1,p}_{\rm loc}$ при деякому $p > n-1$. Остання умова є ключовою у відповідному результаті Вяйсяля, див. лему 3 в [435]. Отже, теорема 5.3.1 є узагальненням вказаного результату Вяйсяля, а також добре відомої теореми Меньшова–Герінга–Лехто на площині (див., напр., [253, 325, 352]) на відкриті відображення класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\Omega)$ за умови (5.9) типу умови Кальдерона на функцію φ.

Відповідні результати для слабо монотонних відображень f з похідними у класах Лоренца $L^{n-1,1}$ можна знайти в роботі [357]. В роботі [309] показано, що функції в $\mathbb{R}^n$ з узагальненими похідними з класу Лоренца $L^{k,1}$ можна описати як функції класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ за умови Кальдерона (5.8) для φ. Отже, для відкритих відображень результат роботи [357] випливає з результату Кальдерона про диференційовність.

В роботі [225] Кальдероном показана точність умови (5.8) для диференційовності м.с. неперервних відображень $f \in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ у випадку опуклих φ. Однак, теорема 5.3.1 показує, що, в цьому випадку, ми можемо використовувати більш слабку умову (5.9) для отримання диференційовності майже скрізь неперервних відкритих відображень f. Більш того, якщо функція $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ є неспадною, опуклою та такою, що

$$\int\limits_1^\infty \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt = \infty,$$

то існує гомеоморфізм $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, класу $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, який не є диференційовним майже скрізь. Дійсно, якщо $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ — функція з конструкції Кальдерона при $k = n-1$, і $\varphi_n(t) = \varphi(t+n)$, то

$$\int\limits_1^\infty \left[\frac{t}{\varphi_n(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt = \infty$$

і $g(x,y) = (x, y + f(x))$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y \in \mathbb{R}$, є шуканий приклад згідно умови $|\nabla g| \leqslant n + |\nabla f|$ та монотонності функції φ. Отже, умова (5.9), взагалі кажучи, не може бути відкинута навіть для гомеоморфізмів.

5.4. Умова Лузіна та властивість Сарда на поверхнях

У цьому підрозділі доведено, що неперервні відображення f класу $f \in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ за умови типу умови Кальдерона на функцію φ володіють (N)-властивістю Лузіна на майже всіх гіперплощинах; зокрема, сказане відноситься до відображень класу Соболева $f \in W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$.

Теорема 5.4.1. *Нехай Ω — відкита множина в $\mathbb{R}^k$, $k \geqslant 2$, і нехай $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, — неперервне відображення класу $W^{1,\varphi}(\Omega)$, де $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неспадна функція така, що при при деякому $t_* \in (0,\infty)$ виконується умова*

$$A := \int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{k-1}} dt < \infty \ . \tag{5.10}$$

Тоді для кожної вимірної множини $E \subset \Omega$ виконується умова

$$H^k(f(E)) \leqslant \gamma_{k,m}\, A_*^{k-1} \int\limits_E \varphi_*\left(|\nabla f|\right)\, dm(x) \ , \tag{5.11}$$

де $\gamma_{k,m} = (m\alpha_k)^k$, α_k — стала з (5.7), що залежить тільки від k, $A_* = A + 1/[\varphi(t_*)]^{1/(k-1)}$, $\varphi_*(0) = 0$, $\varphi_*(t) \equiv \varphi(t_*)$ при $t \in (0, t_*)$ і $\varphi_*(t) = \varphi(t)$ при $t \geqslant t_*$.

Доведення теореми 5.4.1 базується на наступній лемі.

Лема 5.4.1. *Нехай Ω — відкрита множина в $\mathbb{R}^k$, $k \geqslant 2$, і нехай $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, — неперервне відображення класу $W^{1,\varphi}(\Omega)$, де $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неспадна функція, що задовольняє умову (5.10). Тоді для кожного куба $C \subset \Omega$ з ребрами, паралельними координатним осям,*

$$\operatorname{diam} f(C) \leqslant m\alpha_k\, A_*^{\frac{k-1}{k}} \left[\ \int\limits_C \varphi_*\left(|\nabla f|\right)\, dm(x)\right]^{\frac{1}{k}} , \tag{5.12}$$

де α_k — стала з (5.7), що залежить тільки від k, а величини A_* і φ_* визначені в теоремі 5.4.1.

Доведення. Доведемо справедливість (5.12) індукцією по $m = 1, 2, \ldots$. Дійсно, при $m = 1$ співвідношення (5.12) виконується внаслідок твердження 5.2.4 і зауваження 5.2.3.

Припустимо, що співвідношення (5.12) виконується при деякому $m = l$ і доведемо його виконання при $m = l + 1$. Розглянемо довільний вектор $\vec{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_l, v_{l+1})$ в $\mathbb{R}^{l+1}$, а також вектори $\vec{V_1} = (v_1, v_2, \ldots, v_l, 0)$ і $\vec{V_2} = (0, 0, \ldots, 0, v_{l+1})$. За нерівністю трикутника $|\vec{V}| = |\vec{V_1} + \vec{V_2}| \leqslant |\vec{V_1}| + |\vec{V_2}|$. Отже, позначаючи через $\mathrm{Pr}_1 \vec{V} = \vec{V_1}$ і $\mathrm{Pr}_2 \vec{V} = \vec{V_2}$ проекції векторів із $\mathbb{R}^{l+1}$ відповідно на координатну гіперплощину $y_{l+1} = 0$ і на $(l{+}1)$-у координатну вісь в $\mathbb{R}^{l+1}$, отримуємо $\mathrm{diam}\, f(C) \leqslant \mathrm{diam}\, \mathrm{Pr}_1 f(C) + \mathrm{diam}\, \mathrm{Pr}_2 f(C)$ і, застосовуючи (5.12) при $m = l$ і $m = 1$, приходимо до нерівності (5.12) при $m = l + 1$ внаслідок монотонності функції φ. Доведення леми завершено.

Доведення теореми 5.4.1. Не обмежуючи загальності міркувань, внаслідок зчисленної адитивності інтеграла і міри, ми можемо вважати, що множина E обмежена і що $\overline{E} \subset \Omega$, тобто $\overline{E}$ — компакт в Ω. Для кожного $\varepsilon > 0$ існує відкрита множина $\omega \subset \Omega$ така, що $E \subset \omega$ і $m\,(\omega \setminus E) < \varepsilon$, див. теорему III (6.6) в [131]. Враховуючи зауваження, зроблене вище, ми можемо вважати, що $\overline{\omega}$ компакт і, отже, відображення f рівномірно неперервне в ω. Отже, ω можна покрити зчисленним набором замкнутих орієнтованих кубів C_i, які лежать в ω, внутрішності яких попарно не перетинаються, і таких, що $\mathrm{diam}\, f(C_i) < \delta$ для кожного наперед заданого $\delta > 0$ і $m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \partial C_i\right) = 0$. Тоді за лемою 5.4.1 отримуємо

$$H^k_\delta(f(E)) \leqslant H^k_\delta(f(\omega)) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} [\,\mathrm{diam}\, f(C_i)]^k \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_{k,m} A_*^{k-1} \int\limits_{\omega} \varphi_*\left(|\nabla f|\right)\, dm(x).$$

Нарешті, враховуючи абсолютну неперервність невизначеного інтеграла та довільність ε і $\delta > 0$, приходимо до (5.11). Теорему 5.4.1 доведено.

Наслідок 5.4.1. *Якщо виконуються умови теореми 5.4.1, то відображення f володіє N-властивістю Лузіна, більш того, f є абсолютно неперервним відносно k-вимірної хаусдорфової міри.*

Зауваження 5.4.1. Зауважимо, що $H^k(\mathbb{R}^m) = 0$ при $m < k$, отже, співвідношення (5.11) в цьому випадку, очевидно, виконується навіть і без вимоги (5.10). Однак, (5.10) є необхідною при $m \geqslant k$. Добре відомо, що кожний гомеоморфізм простору $\mathbb{R}^k$ на себе, який належить класу $W^{1,k}_{\mathrm{loc}}$, володіє N-властивістю Лузіна (див. лему III.6.1 в [325] при $k = 2$ і [113] при $k > 2$). Аналогічне твердження справедливе також і для неперервних відкритих відображень, див. [331]. З іншого боку, існують приклади гомеоморфізмів класу $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ при всіх $p < k$, які не володіють N-властивістю, див. [106]. Крім того, Чезарі у роботі [228] було показано, що неперервні плоскі відображення $f : D \to \mathbb{R}^2$ класу ACL^p, $p > 2$, володіють N-властивістю і що існують приклади неперервних відображень класу ACL^2, які не володіють N-властивістю. Відповідні приклади неперервних відображень $f \in W^{1,k}_{\mathrm{loc}}$ в $\mathbb{R}^k$ при $k \geqslant 3$ можуть бути знайдені в роботі [331]. Те, що неперервні відображення f у класах Соболєва $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$, $p > k$, в $\mathbb{R}^k$, $k \geqslant 3$, задовольняють N-умову Лузіна, було встановлено в роботі [333], див. також роботу [221]. Відповідні результати для неперервних відображень з похідними у класах Лоренца можна знайти в роботі [309].

В силу теореми 5.4.1 (див. також теорему VII.3 в [297]) ми отримуємо наступний висновок типу твердження Сарда.

Наслідок 5.4.2. *Якщо виконуються умови теореми 5.4.1, і $|\nabla f| = 0$ на вимірній множині $E \subset \Omega$, то $H^k(f(E)) = 0$ і тому $\dim_H f(E) \leqslant k$ та $\dim f(E) \leqslant k - 1$.*

Зауваження 5.4.2. Вперше твердження такого типу було доведено Сардом у роботі [416] для множини критичних точок x відображення f, тобто коли $J_f(x) = 0$. Потім аналогічні проблеми вивчалися багатьма авторами для критичних точок за умови $\mathrm{rank}\ f'(x) \leqslant r$ і, зокрема, для суперкритичних точок, коли $f'(x)$ — нульова матриця, див., напр., [38, 211, 230, 231, 273, 282, 307, 356,367,418,419,448]. У зазначених вище роботах, як правило, присутня вимога гладкості f, без якої аналогічні твердження, взагалі кажучи, не вірні.

У зв'язку з цим зауважимо, що наш результат для суперкритичних точок (див. наслідок 5.4.2) є справедливим і без додаткових вимог на гладкість f. Зокрема, він є справедливим для всіх неперервних відображень f класу $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > k$ (див. з цього приводу також прекрасний огляд стосовно результатів типу теорем Сарда [220], який відноситься, в тому числі, до класів Соболєва).

Надалі $\nabla_k f$ позначає k-вимірний градієнт звуження відображення f на k-вимірну площину $\mathcal{P}$.

Комбінуючи твердження 5.2.2 та наслідок 5.4.1, отримуємо наступне твердження.

Твердження 5.4.1. *Нехай $k = 2, \ldots, n-1$, U — відкрита множина в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, та нехай $f : U \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, — відображення класу $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(U)$, де $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ — неспадна функція така, що*

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{k-1}} dt < \infty.$$

Тоді для кожного k-вимірного напрямку Γ та майже всіх k-вимірних площин $\mathcal{P} \in \Gamma$, звуження відображення f на множину $\mathcal{P} \cap U$ володіє N-властивістю і, більш того, є локально абсолютно неперерервним відносно k-вимірної хаусдорфової міри. Крім того, на майже всіх $\mathcal{P} \in \Gamma$, $H^k(f(E)) = 0$, як тільки $\nabla_k f = 0$ на множині $E \subset \mathcal{P}$.

Найбільш важливим для нас окремим випадком твердження 5.4.1 є наступний результат.

Теорема 5.4.2. *Нехай U — відкрита множина в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ — неспадна функція, така що виконується умова (5.9). Тоді будь-яке неперервне відображення $f : U \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, класу $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ володіє N-властивістю і, більш того, є локально абсолютно неперервним відносно $(n-1)$-вимірної хаусдорфової міри на майже всіх гіперплощинах $\mathcal{P}$,* *паралельних довільній фіксованій гіперплощині $\mathcal{P}_0$. Крім того, на майже всіх таких $\mathcal{P}$ виконується рівність $H^{n-1}(f(E))=0$, якщо $|\nabla f|=0$ на $E\subset\mathcal{P}$.*

Зауваження 5.4.3. Якщо умова вигляду (5.9) виконується для деякої неспадної функції φ, то функція $\varphi_c(t)=\varphi(ct)$ при $c>0$ також задовольняє співвідношення (5.9). Крім того, хаусдорфові міри квазіінваріантні при квазіізометріях.

За властивістю Ліндалефа в $\mathbb{R}^n$ (див., напр., теорему Ліндалефа у розд. І.5.XI в [69]) множина $U\setminus\{x_0\}$ для будь-якого $x_0\in\mathbb{R}^n$ може бути покрита зчисленною кількістю відкритих сегментів сферичних кілець в $U\setminus\{x_0\}$ з центром у точці x_0, і кожний такий сегмент може бути відображений на прямокутний паралелепіпед в $\mathbb{R}^n$ за допомогою квазіізометрії.

Отже, застосовуючи теорему 5.4.2 до кожного такого паралелепіпеда окремо, ми отримуємо наступне твердження.

Наслідок 5.4.3. *За умови (5.9) кожне неперервне відображення $f\in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ володіє N-властивістю відносно $(n-1)$-вимірної хаусдорфової міри і, більш того, є локально абсолютно неперервним на майже всіх сферах S з центром в заданій точці $x_0\in\mathbb{R}^n$. Крім того, на майже всіх таких сферах S виконується умова $H^{n-1}(f(E))=0$, як тільки $|\nabla f|=0$ на множині $E\subset S$.*

Зауваження 5.4.4. За умови (5.9) відображення $f:U\to\mathbb{R}^n$ класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, взагалі кажучи, не володіє N-властивістю в U відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$. Це випливає, зокрема, із прикладів С.П. Пономарьова, який побудував гомеоморфізми f, що належать класу Соболєва $W^{1,p}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ для довільного $p<n$ та які не володіють N-властивістю Лузіна, див., напр., [106].

Зокрема, співвідношення (5.9) виконується для функцій $\varphi(t)=t^p$ при $p>n-1$. Інакше кажучи, наведені вище твердження справедливі, зокрема, для неперервних відображень $f\in W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p>n-1$. Проте, вони, взагалі кажучи, не є справедливими при $p<n-1$ навіть для гомеоморфізмів, як це випливає із прикладів С.П. Пономарьова. Дійсно, якщо $g(x)$ — приклад такого гомеоморфізму в $\mathbb{R}^{n-1}$, то відображення $f(x,y)=(g(x),y)$, де $x\in\mathbb{R}^{n-1}$ і

$y \in \mathbb{R}$, задовольняє N-властивість Лузіна на кожній гіперплощині $y = \mathrm{const}$. Випадок $p = n-1$ досліджувався в [239].

Якщо $m < n-1$, то $H^{n-1}(\mathbb{R}^m) = 0$ і N-властивість на м.в. гіперплощинах для відображень f в теоремі 5.4.2 є очевидною без умови (5.9). Однак, умову (5.9) не можна відкинути при $m \geqslant n-1$, див. зауваження 5.4.1.

Зв'язок умов типу Кальдерона (5.7) з N-властивістю та диференційовністю вперше було встановлено при вивченні так званих ліпшеціанів у сенсі Радо (див., напр., [225] і V.3.6 в [368], а також недавні роботи [210, 309, 373]).

5.5. Компактні класи Орліча–Соболєва

У цьому підрозділі встановлено достатні умови компактності класів Орліча–Соболєва.

Нехай $\varphi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ — неспадна функція, D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $M \in [0, \infty)$ і $x_0 \in D$. Позначимо через $\mathfrak{F}^{\varphi}_M$ сім'ю всіх неперервних відображень $f : D \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, класу $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ таких, що $f(x_0) = 0$ і

$$\int\limits_D \varphi\left(|\nabla f|\right)\, dm(x) \leqslant M\ . \tag{5.13}$$

Символом $\mathfrak{F}^{p}_M$ позначимо простір $\mathfrak{F}^{\varphi}_M$ при $\varphi(t) = t^p$, $p \in [1, \infty)$. Покладемо

$$t_0 = \sup_{\varphi(t)=0} t\,, \quad t_0 = 0\,, \quad \text{якщо} \quad \varphi(t) > 0 \quad \forall\, t \in \overline{\mathbb{R}^+}$$

і

$$T_0 = \inf_{\varphi(t)=\infty} t\,, \quad T_0 = \infty \quad \text{якщо} \quad \varphi(t) < \infty \quad \forall\, t \in \overline{\mathbb{R}^+}\,. \tag{5.14}$$

Справедливе наступне твердження (порівняй з теоремою 4.1 в [390] та теоремою 8.1 в [300]).

Теорема 5.5.1. *Нехай $\varphi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ — непостійна неперервна неспадна опукла функція така, що для деяких $t_* \in (t_0, \infty)$ і $\alpha \in (0, 1/(n-1))$*

виконується умова

$$\int\limits_{t_*}^{\infty}\left(\frac{t}{\varphi(t)}\right)^{\alpha}\,dt<\infty\,. \tag{5.15}$$

Тоді сім'я $\mathfrak{F}_M^{\varphi}$ *є компактною відносно локально рівномірної збіжності в* $\mathbb{R}^n$ *.*

Тут неперервність функції φ мається на увазі в сенсі топології розширеної додатної дійсної осі $\overline{\mathbb{R}^+}$.

Перед доведенням теореми нагадаємо таке означення.

Означення 5.5.1. Неспадна опукла функція $\varphi:\overline{\mathbb{R}^+}\to\overline{\mathbb{R}^+}$ називається *строго опуклою* (див., напр., [121]), якщо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\varphi(t)}{t}=\infty\,. \tag{5.16}$$

Зауваження 5.5.1. Зауважимо, що непостійна неперервна неспадна опукла функція $\varphi:\overline{\mathbb{R}^+}\to\overline{\mathbb{R}^+}$, яка задовольняє умову (5.15) для деякого $\alpha>0$, є строго опуклою. Дійсно, функція $\varphi(t)/t$ — неспадна, якщо φ — опукла (див., напр., твердження I.4.5 в [14]). Отже, із (5.15) для $\alpha>0$ випливає (5.16).

Доведення теореми 5.5.1 базується на наступній лемі.

Лема 5.5.1. *Нехай* $\varphi:\overline{\mathbb{R}^+}\to\overline{\mathbb{R}^+}$ *— непостійна неперервна неспадна опукла функція, яка задовольняє умову (5.15) при деякому* $\alpha>0$, *і нехай* $\tilde{\alpha}\in(\alpha,\infty)$ *. Тоді* φ *допускає представлення* $\varphi=\psi\circ\tilde{\varphi}$, *де* ψ *та* $\tilde{\varphi}:\overline{\mathbb{R}^+}\to\overline{\mathbb{R}^+}$ *— строго опуклі і, крім того,* $\tilde{\varphi}\leqslant\varphi$ *та функція* $\tilde{\varphi}$ *задовольняє співвідношення (5.15) з показником* $\tilde{\alpha}$ *.*

Доведення. Зауважимо, що опукла функція φ є локально ліпшицева на інтервалі $(0,T_0)$, де T_0 визначається (5.14), при цьому $T_0>t_0$ внаслідок неперервності і непостійності функції φ. Отже, φ — локально абсолютно неперервна, диференційовна за винятком скінченного набору точок у даному невиродженому інтервалі і, крім того, φ' не спадає, див., напр., наслідки 1-2 і твердження розділу I.4 в [14]. Отже, позначивши через $\varphi'_+(t)$ функцію, яка співпадає з $\varphi'(t)$ у точках диференційовності φ, $\varphi'_+(t) = \lim\limits_{\tau\to t+0} \varphi'(\tau)$ в інших точках інтервалу $[0, T_0)$ і $\varphi'_+(t) = \infty$ для всіх $t \in [T_0, \infty]$, отримаємо

$$\varphi(t) = \varphi(0) \ + \int\limits_0^t \varphi'_+(\tau)\, d\tau \quad \forall\ t \in \overline{\mathbb{R}^+}\,. \tag{5.17}$$

Внаслідок монотонності функції φ'_+, обчислюючи її середнє значення по відрізкам $[0, t]$ і $[t/2, t]$, відповідно, отримуємо із (5.17) двосторонню оцінку

$$\frac{1}{2}\,\varphi'_+\,(t/2) \leqslant \frac{\varphi(t)\ -\ \varphi(0)}{t} \leqslant \varphi'_+(t) \quad \forall\ t \in \overline{\mathbb{R}^+}\,. \tag{5.18}$$

Нерівності (5.18) показують, що умова (5.15) еквівалентна наступній:

$$I \colon = \int\limits_{t_*}^{\infty} \frac{dt}{[\varphi'_+(t)]^{\alpha}} < \infty\,. \tag{5.19}$$

Внаслідок монотонності φ'_+ з умови (5.19) випливає, що $\varphi'_+(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Отже, величина $T_* = \sup\limits_{\varphi'_+(t)<1} t$ скінченна, $T_* \in [t_0, T_0)$. Покладемо $\lambda = \alpha/\alpha_* \in (0, 1)$.

Розглянемо функції $\tilde{\varphi}(t) = \int\limits_0^t h(\tau)\, d\tau$ і $\psi(s) = \varphi(0) + \int\limits_0^s H(r)\, dr$, де $h(t) = \varphi'_+(t)$ при $t \in [0, T_*)$, $h(t) = [\varphi'_+(t)]^{\lambda}$ при $t \in [T_*, \infty]$, $H(s) = 1$ при $s \in [0, S_*)$, $S_* = \varphi_*(T_*)$, $H(s) = [\varphi'_+(\tilde{\varphi}^{-1}(s))]^{1-\lambda}$ при $s \in [S_*, S_0)$, $S_0 = \varphi_*(T_0)$ і $H(s) = \infty$ при $s \in [S_0, \infty]$.

За побудовою $\tilde{\varphi}(t) \leqslant \varphi(t)$ при всіх $t \in \overline{\mathbb{R}^+}$, функції ψ і $\tilde{\varphi}$, а також $\psi \circ \tilde{\varphi}$ — неспадні та опуклі (див., напр., твердження 8 розділу I.4 в [14]) і

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \frac{dt}{[\tilde{\varphi}'_+(t)]^{\tilde{\alpha}}} = I < \infty\,.$$

Отже, $\tilde{\varphi}$ задовольняє співвідношення (5.15) з новим $\tilde{\alpha}$. За аналогією з (5.18) отримуємо

$$\frac{\psi(s)\ -\ \psi(0)}{s} \geqslant \frac{1}{2}\ H\,(s/2) \quad \forall\ s \in \overline{\mathbb{R}^+},$$

де права частина останнього співвідношення збігається до ∞ при $s \to \infty$. Отже, функція ψ є строго опуклою.

Нескладні обчислення показують, що

$$(\psi \circ \tilde{\varphi})'_+(t) = \psi'_+(\tilde{\varphi}(t)) \cdot \tilde{\varphi}'_+(t) = \varphi'_+(t)\,,$$

за винятком зчисленної множини точок в $\overline{\mathbb{R}^+}$, $\psi \circ \tilde{\varphi}(0) = \varphi(0)$ і, отже, $\psi \circ \tilde{\varphi} \equiv \varphi$ внаслідок (5.17). Лему доведено.

Тепер доведемо основний результат цього розділу — теорему 5.5.1.

Доведення теореми 5.5.1. Перш за все, покажемо, що сім'я відображень $\mathfrak{F}_M^{\varphi}$ є одностайно неперервною. Дійсно, за лемою 5.5.1 функція φ допускає представлення $\varphi = \psi \circ \tilde{\varphi}$, де ψ і $\tilde{\varphi} : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ строго опуклі та

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left(\frac{t}{\tilde{\varphi}(t)}\right)^{\frac{1}{n-1}} dt < \infty$$

для деяких $t_* > t_0$. Крім того, $\tilde{\varphi} \leqslant \varphi$ і, отже,

$$\int\limits_{D} \tilde{\varphi}\left(|\nabla f|\right)\, dm(x) \leqslant M\,.$$

Для точки $z_0 \in D$ і числа $\delta > 0$ позначимо через $C(z_0, \delta)$ $n-$вимірний відкритий куб з центром у точці z_0 з ребрами, паралельними осям координат, та довжиною ребра δ. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Оскільки функція ψ — строго опукла, інтеграл $\tilde{\varphi}(|\nabla f|)$, взятий по кубу $C(z_0, \delta) \subset D$, як завгодно малий при достатньо малому $\delta > 0$ для всіх $f \in \mathfrak{F}_M^{\varphi}$, див., напр., теорему III.3.1.2 [121]. Отже, застосовуючи твердження 5.2.4 та зауваження 5.2.3 до функції $\tilde{\varphi}$, отримуємо $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ для всіх $z \in C(z_0, \delta)$ та деякому $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

Тепер покажемо, що сім'я $\mathfrak{F}_M^{\varphi}$ рівномірно обмежена на компактах. Дійсно, нехай K — компакт в D. Без обмеження загальності, будемо вважати, що K — зв'язна множина, що містить точку x_0 із означення $\mathfrak{F}_M^{\varphi}$, див., напр., лему 1 в [168]. Покриємо K набором кубів $C(z, \delta_z)$, $z \in K$, де число δ_z відповідає числу $\varepsilon := 1$ з першої частини доведення. Оскільки множина K

компактна, знайдеться скінченне число кубів $C_i = C(z_i, \delta_{z_i})$, $i = 1, 2, \ldots, N$, які покривають K. Відзначимо, що $D_* := \bigcup\limits_{i=1}^{N} C_i$ є підобластю D, оскільки K є зв'язна множина. Отже, кожну точку $z_* \in K$ можна з'єднати з x_0 в D_* ламаною з кінцями сегментів в точках $x_0, x_1, \ldots, x_k, z_*$ в зазначеному порядку, що лежать в кубах із номерами $i_1, \ldots, i_k$, $x_0 \in C(z_{i_1}, \delta_{z_{i_1}})$, $z_* \in C(z_{i_k}, \delta_{z_{i_k}})$ і $x_l \in C_{i_l} \cap C_{i_{l+1}}$, $l = 1, \ldots, k-1$, $k \leqslant N-1$. За нерівністю трикутника маємо

$$|f(z_*)| \leqslant \sum_{l=0}^{k-1} |f(x_l) - f(x_{l+1})| + |f(x_k) - f(z_*)| \leqslant N\,.$$

Оскільки N залежить тільки від компакта K, то сім'я відображень $\mathfrak{F}_M^{\varphi}$ рівномірно обмежена на компактах і, отже, є нормальною сім'єю згідно теореми Арцела–Асколі, див., напр., IV.6.7 в [36].

Нарешті, покажемо, що клас $\mathfrak{F}_M^{\varphi}$ є замкнений. Згідно зауваження 5.5.1 φ строго опукла. Тоді за теоремою III.3.1.2 в [121] для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $\int\limits_E |\nabla f|\, dm(x) \leqslant \varepsilon$ для кожного $f \in \mathfrak{F}_M^{\varphi}$ при $m(E) < \delta$. Нехай $f_j \in \mathfrak{F}_M^{\varphi}$ і $f_j \to f$ локально рівномірно при $j \to \infty$. Тоді за лемою 2.1 у статті [398] (див. також лему 2.11 в монографії [280]) маємо, що $f \in W_{\rm loc}^{1,1}$. За теоремою 3.3 розділу III § 3.4 в монографії [110]

$$\int\limits_D \varphi(|\nabla f|)\, dm(x) \leqslant M\,,$$

тобто клас $\mathfrak{F}_M^{\varphi}$ замкнений. Отже, клас $\mathfrak{F}_M^{\varphi}$ компактний. Теорему 5.5.1 доведено.

Наслідок 5.5.1. *Клас $\mathfrak{F}_M^{p}$ компактний відносно локально рівномірної збіжності для кожного $p \in (n, \infty)$.*

Доведення. Дійсно, як легко перевірити, функція $\varphi(t) = t^p$ задовольняє умови теореми 5.5.1 при довільному $\alpha \in (1/(p-1), 1/(n-1))$. Наслідок 5.5.1 доведено.

Відзначимо, що проблема одностайної неперервності відображень в класах $W^{1,p}$ при $p > n$ була досліджена ще в роботі [221], див. також [299]. Однак, умова $p > n$ є занадто сильною вимогою для відображень зі скінченним спотворенням, як це було очевидно вже у плоскому випадку (див., напр., [218, 240, 280, 342]), хоча ця умова природна для квазіконформних відображень (див., напр., [12, 247]).

5.6. Класи Орліча–Соболєва і інтеграл Діріхле

У даному підрозділі будуть наведені теореми про належність обернених відображень до класу гомеоморфізмів з обмеженим інтегралом Діріхле, а також про одностайну неперервність і нормальність сімей обернених відображень.

Наведемо необхідні відомості з теорії відображень з обмеженим інтегралом Діріхле. Наступне означення можна знайти в § 2 розд. IV в [183].

Означення 5.6.1. Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Будемо говорити, що неперервне відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ належить класу $BL_k^{n/2}$ в D, якщо $f \in W_{\mathrm{loc}}^{1,1}$ і

$$J(f, D) = \int\limits_D \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2\right]^{n/2} dm(x) \leqslant k < \infty\,. \tag{5.20}$$

При цьому, будемо говорити, що $f \in BL^{n/2}$, якщо знайдеться $k < \infty$, таке що $f \in BL_k^{n/2}$.

Означення 5.6.2. *Коливанням відображення* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *на множині* $E \subset D$ називається величина

$$\omega(E, f) = \sup_{x_1, x_2 \in E} |f(x_1) - f(x_2)|\,.$$

Означення 5.6.3. Відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ називається *монотонним*, якщо для будь-якої області $G \subset D$ такої, що $\overline{G} \subset D$ виконується умова $\omega(G, f) = \omega(\partial G, f)$.

Відзначимо, що, зокрема, будь-який гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{R}^n$ є монотонним відображенням.

Наступні означення можуть бути знайдені в монографії [1] (див. §, 1, с. 518 і § 3, с. 539).

Означення 5.6.4. Переріз фіксованої сфери $S(a, r)$ в $\mathbb{R}^n$ будь-якою гіперплощиною, яка не проходить через її центр, будемо називати *малим колом.*

Означення 5.6.5. Довільне мале коло розділяє сферу на дві компоненти; та з них, яка не виходить за межі півсфери, називається *сферичним колом.*

Означення 5.6.6. Нехай K — сферичне коло. Існує єдина точка $O \in K$, яка володіє наступною властивістю: довжини дуг, які з'єднують точку O з довільної точкою сферичного кола K уздовж сфери $S(a, r)$, постійні. Цю точку називають *центром сферичного кола* K, а довжину дуги називають *сферичним радіусом кола* K.

Наступне твердження доведено в монографії [183] (див. наслідок в § 2 розд. IV, с. 120).

Твердження 5.6.1. *Нехай відображення* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *належить класу* $BL^{n/2}$. *Припустимо, що знайдуться* $0 < r_1 < r_2$, *такі що множина* $S(a, r) \cap D$ *непорожня при всіх* $r \in [r_1, r_2]$. *Позначимо через* K_r *відкрите сферичне коло сферичного радіуса* $R(r) \leqslant \frac{\pi r}{2}$, $K_r \subset S(a, r) \cap D$. *Нехай майже всюди на* $[r_1, r_2]$ *визначені вимірні функції* $\Omega(r) \leqslant \omega(K_r, f)$ *і* $\alpha(r) > \frac{2R(r)}{\pi r}$. *Тоді для кожного* $\varepsilon > 0$ *знайдеться* $\overline{r} \in [r_1, r_2]$, *для якого*

$$\Omega(\overline{r}) \leqslant (\alpha(\overline{r})(M_n + \varepsilon) J(f, D_{r_1, r_2}))^{1/n} \cdot \log^{-1/n}\left(\frac{r_2}{r_1}\right),$$

де $D_{r_1, r_2} := \bigcup\limits_{r \in [r_1, r_2]} S(a, r) \cap D$.

Оцінка спотворення відстані в класі $BL^{n/2}$, яка міститься в наступному твердженні, була опублікована в монографії [183] при $n = 3$. Ми наводимо тут повне доведення цієї оцінки для довільного $n \geqslant 2$.

Твердження 5.6.2. *Нехай* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *— монотонне відображення, яке належить класу* $BL^{n/2}$, *точки* x' *і* $x'' \in D$ *задовольняють умову* $|x' - x''| < 2$ *та, крім того, куля* $B\left(\frac{x'+x''}{2}, \sqrt{\frac{|x'-x''|}{2}}\right)$ *міститься в* D *разом зі своїм зами-*

канням. Тоді

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant (2M_n J(f,D))^{1/n} \log^{-1/n} \frac{2}{|x'-x''|}\,, \tag{5.21}$$

де $J(f,D)$ *задається співвідношенням (5.20), а* $M_n > 0$ *– стала, яка залежить тільки від* n.

Доведення. Вважаємо, що $x_0 := \frac{1}{2}(x'+x'')$, $r := \frac{1}{2}|x'-x''|$, $r_0 := \sqrt{r}$ та розглянемо сферу $S(x_0,t)$, $t\in[r,r_0]$. Оскільки f неперервне, а $S(x_0,t)$ — компакт в $\mathbb{R}^n$, то знайдуться точки $a,b\in S(x_0,t)$, для яких $\omega(S(x_0,t),f) = |f(a)-f(b)|$. Нехай K_t – сферичний круг радіуса $R\leqslant \pi t/2$, такий що a і $b\in \overline{K_t}$. Тоді $\omega(S(x_0,t),f)\leqslant \omega(K_t,f)$ в силу неперервності f та за твердженням 5.6.1 для кожного $\varepsilon>0$ знайдеться $\overline{r}\in[r,r_0]$ таке, що

$$\omega(S(x_0,\overline{r}),f)\leqslant [\alpha(\overline{r})(2(M_n+\varepsilon))J(f,D)]^{1/n}\cdot \log^{-1/n}\left(\frac{2}{|x'-x''|}\right)\,, \tag{5.22}$$

де $M_n>0$ — деяка стала. Оскільки відображення f монотонне, то

$$\omega(\overline{B(x_0,r)},f)\leqslant \omega(B(x_0,\overline{r}),f)=\omega(S(x_0,\overline{r}),f)\,. \tag{5.23}$$

Зауважимо, що x', $x''\in \overline{B(x_0,r)}$, і тому

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant \omega(\overline{B(x_0,r)},f)\,. \tag{5.24}$$

Таким чином, із співвідношень (5.22) — (5.24) та довільності $\varepsilon>0$ в (5.22) випливає нерівність (5.21). Твердження 5.6.2 доведено.

Означення апроксимативного диференціала відображення f, яке використовується далі, можна знайти, напр., в розд. 3.1.2 в [187].

Означення 5.6.7. Нехай A — невироджена $(n\times n)$–матриця. Тоді її *приєднана матриця* (позначається символом $\operatorname{adj} A$) визначається із співвідношення $A\cdot \operatorname{adj} A = I\det A$, тобто $\operatorname{adj} A = A^{-1}\det A$.

Одним з головних результатів цього розділу є наступна теорема.

Теорема 5.6.1. *Нехай* $f:D\to D'$ *— гомеоморфізм класу Орліча–Соболева* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *з умовою (5.9) на функцію* φ *такий, що* $K_O(x,f)\in L^{n-1}_{\rm loc}$. *Тоді* *відображення* $g := f^{-1}$ *належить класу* $W_{\rm loc}^{1,n}$ *і*

$$\int\limits_{D'} \|g'(y)\|^n dm(y) = \int\limits_{D} K_I(x,f) dm(x)\,. \tag{5.25}$$

Доведення. За теоремою 1.2 в [312] відображення f володіє N^{-1}-властивістю. Оскільки за теоремою 5.3.1 відображення f диференційовне майже всюди, то за теоремою 1 в [107] $J_f(x) \neq 0$ при майже всіх $x \in D$. Зауважимо, що в кожній точці x_0 диференційовності відображення f з $J_f(x_0) \neq 0$ виконується нерівність

$$\|{\rm adj}\, f'(x_0)\| \leqslant \|f'(x)\|^{n-1} \tag{5.26}$$

(див. п. 2.1 § 1 розд. I в [110], с. 21). Тепер за нерівністю Гельдера

$$\|\partial_i f\|_{L_{n-1}(C)} \leqslant \|K_O\|^{\frac{1}{n}}_{L_{n-1}(C)} \cdot (m(f(C)))^{\frac{1}{n}} < \infty\,, \tag{5.27}$$

де C — довільний компкт в області D. З (5.26) та (5.27) випливає, що $\|{\rm adj}\, f'(x)\| \in L^1_{\rm loc}$. Крім того, за теоремою 5.4.2 відображення f володіє N-властивістю на майже всіх гіперплощинах. Як наслідок, $f^{-1} \in W^{1,1}_{\rm loc}(f(D))$ за теоремою 1 в [439]. Тепер, для того, щоб довести включення $f^{-1} \in W^{1,n}(D')$, нам достатньо перевірити, що $\|g'(y)\|^n \in L^1(D)$, тобто $\int\limits_{D'} \|g'(y)\|^n\, dm(y) < \infty$, де $g := f^{-1}$ (див. теорему 2 розд. 1.1.3 в [84]).

Оскільки, як було встановлено, $g \in W^{1,1}_{\rm loc}(D')$, то при майже всіх $y \in D'$ відображення g має звичайні частинні похідні (див. теорему 1 розд. 1.1.3 в [84]), внаслідок чого f майже всюди апроксімативно диференційовне (див. теорему 3.1.4 в [187]). Оскільки g є відображенням зі скінченним спотворенням (див. теорему 1 в [439]), то матриця Якобі $g'(y)$ нульова при майже всіх y таких, що $J_g(y) = 0$; таким чином, $\|g'(y)\|^n = K_g(y) \cdot J_g(y)$ при майже всіх $y \in D'$ (відповідно до теорії інтеграла $0 \cdot \infty = 0$, див. § 3 розд. I в [131]).

Позначимо через B (борелеву) множину всіх точок $y \in D'$, де відображення g має звичайні частинні похідні і $J_g(y) = \det g'(y) \neq 0$. За теоремою 3.1.8 в [187] множина B може бути розбита на не більш ніж зчисленне число борелевих множин B_l, $l = 1, 2, \ldots$, таких, що відображення $g_l = g|_{B_l}$ є ліпшицевим. За теоремою Кірсбрауна (див. теорему 2.10.43 в [187]) кожне відображення g_l може бути продовжене до ліпшицевого відображення $\widetilde{g_l} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, при цьому за теоремою Радемахера–Степанова $\widetilde{g_l}$ диференційовне майже всюди в $\mathbb{R}^n$ (див. теорему 3.1.6 в [187]) і внаслідок єдиності апроксимативного диференціала (див. розд. 3.1.2 в [187]) можна вважати, що при всіх $y \in B_l$ виконується рівність $\widetilde{g_l}'(y) = g'(y)$. Також можна вважати, що $\widetilde{g_l}$ — однолисті (взаємно однозначні) на B_l (див., напр., лему 3.2.2 в [187]) і що множини B_l попарно не перетинаються.

Застосовуючи теорему 3.2.5 в [187] на B_l, $l = 1, 2, \ldots$, і підсумовуючи по всім B_l та враховуючи N^{-1}-властивість відображення f, отримуємо

$$\int\limits_{D'} \|g'(y)\|^n \, dm(y) = \int\limits_{D'} K_g(y) \cdot J_g(y) \, dm(y) =$$

$$= \int\limits_{D'} K_g(g^{-1}(g(y))) \cdot J_g(y) \, dm(y) = \int\limits_{f^{-1}(D')} K_g\left(g^{-1}(x)\right) \, dm(x) \, . \tag{5.28}$$

Відзначимо, що згідно з введеним позначенням $g'(g^{-1}(x)) = g'(f(x))$ та за теоремою 4 розд. VIII § 3 в [44] $g'(f(x)) = (f'(x))^{-1}$ в кожній точці x диференційовності та невиродженості відображення f. Отже, при майже всіх $x \in D$

$$\|g'\left(f(x)\right)\| = \frac{1}{l\left(f'(x)\right)}\,, \qquad J_g\left(f(x)\right) = \frac{1}{J_f(x)} \tag{5.29}$$

(див. знову теорему 2.1 та співвідношення (2.4)–(2.7) п. 2.1 § 1 розд. I в [110]). Таким чином, із (5.28) та (5.29) отримаємо (5.25). Теорему доведено.

Наслідок 5.6.1. *Нехай виконуються умови теореми 5.6.1. Тоді*

$$\int\limits_{D'} \|g'(y)\|^n dm(y) \leqslant \int\limits_{D} K_O^{n-1}(x, f) \, dm(x) \, . \tag{5.30}$$

Наслідок 5.6.1 випливає із теореми 5.6.1 та добре відомої нерівності $K_I(x, f) \leqslant K_O^{n-1}(x, f)$ в довільній точці $x \in D$ диференційовності відображення f, для якого $J_f(x) \neq 0$, див. п. 2.1 розд. I в [110].

Наслідок 5.6.2. *Зокрема, рівність (5.25) та нерівність (5.30) виконуються, якщо* $f \in W^{1,p}_{\rm loc}$ *з деяким* $p > n-1$.

Для справедливості твердження наслідка 5.6.2 достатньо вибрати в теоремі 5.6.1 та у наслідку 5.6.1 функцію $\varphi(t) = t^p$ при $p > n-1$.

Для довільних областей $D \subset \mathbb{R}^n$ і $D' \subset \mathbb{R}^n$ позначимо символом $\mathcal{O}^{\varphi}_Q(D, D')$ сім'ю всіх гомеоморфізмів $f : D \to D'$, $f(D) = D'$, зі скінченним спотворенням класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ таких, що та $K_I(x, f) \leqslant Q(x)$ майже скрізь.

Зауважимо, що при майже всіх $x \in D$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}\right)^2\right]^{n/2} \leqslant n^{n/2} \cdot \|g'(y)\|^n\,, \tag{5.31}$$

тому із (5.25) випливає наступне твердження.

Наслідок 5.6.3. *Нахай гомеоморфізм зі скінченним спотворенням* $f \in \mathcal{O}^{\varphi}_Q(D, D')$, *при цьому виконується умова (5.9) і, крім того,* $Q \in L^1(D)$. *Тоді відображення* $g := f^{-1}$ *належить класу* $BL^{n/2}$ *в* D' *і*

$$\int\limits_{D'}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y)\right)^2\right]^{n/2} dm(y) \leqslant C(D, Q, n) < \infty\,,$$

де стала $C(D, Q, n)$ *залежить тільки від розмірності простору* n *і* L^1*-норми функції* Q *в* D. *Більш того, для будь-якої точки* $y_0 \in D'$ *знайдеться* $\delta > 0$, $\delta < {\rm dist}\,(y_0, D')$, *таке, що для всіх* x', $x'' \in B(y_0, \delta)$ *та відображень* g *таких, що* $g^{-1} = f \in \mathcal{O}^{\varphi}_Q(D, D')$, *виконується нерівність*

$$|g(x') - g(x'')| \leqslant C_0(D, Q, n)\log^{-1/n}\frac{2}{|x' - x''|}\,, \tag{5.32}$$

де стала $C_0(D, Q, n)$ *залежить тільки від* n *і* L^1*-нормы* Q *в* D.

Доведення. Із нерівностей (5.25) і (5.31) випливає, що

$$\int\limits_{D'}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}\right)^2\right]^{n/2} dm(y) \leqslant n^{n/2} \cdot \int\limits_{D} Q(x)\,dm(x) < \infty\,. \tag{5.33}$$

Отже, $g := f^{-1} \in BL^{n/2}(D')$. Тепер співвідношення (5.32), що виконується з деякою сталою $C_0(D,Q,n) < \infty$, яка залежить тільки від від розмірності простору n і L^1-норми функції Q в D, випливає із (5.33) в силу твердження 5.6.2. Наслідок 5.6.3 доведено.

Із оцінки (5.32) випливає наступний важливий наслідок.

Наслідок 5.6.4. *За умов наслідка 5.6.3 сім'я всіх відображень $g = f^{-1}$ таких, що $f \in \mathcal{O}_{Q,}^{\varphi}(D,D')$, утворює одностайно неперервну, а, отже, і нормальну сім'ю відображень.*

5.7. Про напівнеперервність дилатацій гомеоморфізмів зі скінченним спотворенням

У цьому підрозділі встановлена лема про напівнеперервність дилатацій гомеоморфізмів зі скінченним спотворенням, яка була доведена раніше для відображень з обмеженим спотворенням в роботі [275], лема 4.7, а також для відображень зі скінченним спотворенням довжини в монографії [342], лема 8.6.

Лема 5.7.1. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і нехай f_j, $j = 1,2,\ldots,$ — послідовність гомеоморфізмів із області D в $\mathbb{R}^n$ класу $W^{1,1}_{\rm loc}$, яка збігається локально рівномірно до відображення $f: D \to \mathbb{R}^n$. Тоді*

$$P_f(x_0) \leqslant \liminf_{h\to 0}\ \liminf_{j\to\infty} \frac{1}{h^n} \int\limits_{C(x_0,h)} P_{f_j}(y)\, dm(y) \tag{5.34}$$

в кожній точці x_0 диференційовності відображення f, де $C(x_0,h)$ — куб в $\mathbb{R}^n$ з центром в точці x_0, у якого ребра довжини h орієнтовані уздовж головних осей квадратичної форми $(f'(x_0)z, f'(x_0)z)$.

Тут ми використовуємо дилатацію P_f, визначену в (5.1).

Доведення. Не порушуючи загальності, можна вважати, що $x_0 = 0$, $f(0) = 0$, і $f_j(0) = 0$, $j = 1,2,\ldots$. Нехай $e_1,\ldots,e_n$ — ортонормований базис в $\mathbb{R}^n$, утворений власними векторами лінійного перетворення $f'(0)^* f'(0)$.

Зауважимо, що множина $f'(0)\mathbb{B}^n$ є еліпсоїдом, чиї півосі $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ є невід'ємні квадратні корені відповідних власних значень матриці $f'(0)^* f'(0)$. Ми можемо припускати, що $f'(0) \neq 0$, тобто, $\lambda_n > 0$, оскільки в протилежному випадку $P_f(0) = 1$ і нерівність (5.34) є очевидною. Нехай також $C(h) := C(0; h)$.

Внаслідок того, що f є диференційовним в точці 0, для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що

$$|f(y) - f'(0)y| < h\varepsilon$$

для всіх $h \in (0, \delta)$ і $y \in C(h)$. Крім того, оскільки $f_j \to f$ локально рівномірно, то для всіх $y \in C(h)$ маємо

$$|f_j(y) - f'(0)y| < h\varepsilon \tag{5.35}$$

при $j > j_0$. Множина $f'(0)C(h)$ є прямокутним паралелепіпедом

$$(-\lambda_1 h/2, \lambda_1 h/2) \times \cdots \times (-\lambda_n h/2, \lambda_n h/2),$$

який може вироджуватися, якщо $\lambda_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$, $0 < k < n$, і ребра якого орієнтовані уздовж базисних векторів $\tilde{e}_{k+1}, \ldots, \tilde{e}_n$ в $\mathbb{R}^n$,

$$\tilde{e}_i = \frac{f'(0)e_i}{|f'(0)e_i|}, \quad i = k+1, \ldots, n,$$

та деяких векторів $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_k$, які утворюють ортонормований базис ортогонального доповнення до $(n-k)$-вимірного підпростору простору $\mathbb{R}^n$, породженого векторами $\tilde{e}_{k+1}, \ldots, \tilde{e}_n$. З нерівності (5.35) випливає, що всі точки $f_j(y)$, $y \in C(h)$, лежать в паралелепіпеді

$$\left(-\left(\frac{\lambda_1}{2} + \varepsilon\right)h,\ \left(\frac{\lambda_1}{2} + \varepsilon\right)h\right) \times \cdots \times \left(-\left(\frac{\lambda_n}{2} + \varepsilon\right)h,\ \left(\frac{\lambda_n}{2} + \varepsilon\right)h\right).$$

Тут простір $\mathbb{R}^n$ забезпечений базисом $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$. Таким чином,

$$\mathrm{mes}(f_j(C(h))) \leqslant h^n(\lambda_1 + 2\varepsilon)(\lambda_2 + 2\varepsilon)\cdots(\lambda_n + 2\varepsilon). \tag{5.36}$$

Із (5.36) випливає нерівність

$$\int\limits_{C(h)} |J_{f_j}(y)|\, dm(y) \leqslant \mathrm{mes}(f_j(C(h))) \leqslant h^n(|J_f(0)| + \triangle(\varepsilon)), \tag{5.37}$$

де $\triangle(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0,$ оскільки $J_f(0)=\lambda_1\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n\,.$

Розглянемо $(n-1)$-вимірний куб $C^*(h)$ з центром у точці $x=0$ і ребрами довжини $h,$ орієнтованими вздовж векторів $e_1,\ldots,e_{n-1}\,.$ Розглянемо відрізок $l(z)\,,$ $z\in C^*(h)\,,$ перпендикулярний до $C^*(h),$ що лежить всередині $C(h).$ Позначимо через $l_j(z)$ довжину кривої $f_j(l(z))\,.$ Оскільки $f_j\in W_{\rm loc}^{1,1},$ то за теоремою 1 розділу 1.1.3 і теоремою розділу 1.1.7 роботи [84] відображення f_j є абсолютно неперервним на $l(z)$ для м.в. $z\in C^*(h).$ Отже, за теоремою 1.3 із [436] отримуємо

$$l_j(z)=\int\limits_{-h/2}^{h/2}|f_j^{\prime}(z,y_n)e_n|\,dy_n \qquad (5.38)$$

для м.в. $z\in C^*(h)$ відносно $(n-1)$-вимірної міри Лебега. З іншого боку, із співвідношення (5.35) випливає, що

$$l_j(z)\geqslant (|f^{\prime}(0)e_n|-2\varepsilon)h=(\lambda_n-2\varepsilon)h.$$

Тому із (5.38) випливає оцінка

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2}|f_j^{\prime}(z,y_n)e_n|\,dy_n\geqslant h(\lambda_n-2\varepsilon)$$

для м.в. $z\in C^*(h)\,.$ Таким чином, інтегруючи по $C^*(h)$ і використовуючи теорему Фубіні, бачимо, що

$$\int\limits_{C(h)}|f_j^{\prime}(y)e_n|\,dm(y)\geqslant h^n(\lambda_n-2\varepsilon). \qquad (5.39)$$

Нехай $K_{f_j}(y)\ne\infty$ м.в. в $C(h).$ Тоді за нерівністю Гельдера отримуємо

$$\int\limits_{C(h)}|f_j^{\prime}(y)e_n|\,dm(y)\leqslant\int\limits_{C(h)}\|f_j^{\prime}(y)\|\,\,dm(y)=\int\limits_{C(h)}K_{f_j}^{1/n}(y)\,\,J_{f_j}(y)^{1/n}\,dm(y)\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int\limits_{C(h)}K_{f_j}^{\frac{1}{n-1}}(y)\,\,dm(y)\right)^{\frac{n-1}{n}}\left(\int\limits_{C(h)}J_{f_j}(y)\,dm(y)\right)^{\frac{1}{n}}. \qquad (5.40)$$

Тут ми також скористалися тим, що $\|f_j'(y)\|^n = K_{f_j}(y)\ J_{f_j}(y)$ м.с. Комбінуючи (5.40), (5.37) і (5.39), отримуємо

$$\left(\frac{(\lambda_n - 2\varepsilon)^n}{|J_f(0)| + \triangle(\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{n-1}} \leqslant \frac{1}{h^n} \int\limits_{C(h)} K_{f_j}^{\frac{1}{n-1}}(y)\, dm(y)\,.$$

Очевидно, що остання нерівність також справедлива у випадку, коли $K_{f_j}(y) = \infty$ на множині додатної міри, оскільки в цьому випадку права частина дорівнює ∞.

Таким чином, спрямовуючи $j \to \infty$, потім $h \to 0$ та, нарешті, $\varepsilon \to 0$, ми завершуємо доведення.

Застосовуючи нерівність Ієнсена до (5.34), отримуємо такий висновок.

Наслідок 5.7.1. *За умов леми 5.7.1*

$$\Phi\left(P_f\left(x_0\right)\right) \leqslant \liminf_{h\to 0}\ \liminf_{j\to\infty} \frac{1}{h^n} \int\limits_{C(x_0,h)} \Phi\left(P_{f_j}\left(y\right)\right)\, dm(y)$$

для будь-якої неперервної опуклої функції $\Phi : \overline{\mathrm{I}} \to \overline{\mathbb{R}^+}$.

Зокрема, для функції $\Phi(t) = t^{n-1}$ отримаємо наступне твердження.

Наслідок 5.7.2. *За умов леми 5.7.1*

$$K_f(x_0) \leqslant \liminf_{h\to 0}\ \liminf_{j\to\infty} \frac{1}{h^n} \int\limits_{C(x_0,h)} K_{f_j}(y)\, dm(y)\,.$$

Теорема 5.7.1. *Нехай* D *— область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, *та нехай* f_j, $j = 1, 2, \ldots$ *— послідовність гомеоморфізмів* D *в* $\mathbb{R}^n$ *класу* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, *яка збігається локально рівномірно до відображення* $f : D \to \mathbb{R}^n$, *де* f *диференційоване м.с. в* D. *Якщо*

$$P_{f_j}\left(x\right) \leqslant P\left(x\right) \in L^1_{\mathrm{loc}} \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{5.41}$$

то

$$P_f\left(x\right) \leqslant \limsup_{j\to\infty}\ P_{f_j}\left(x\right) \qquad \text{м.с.} \tag{5.42}$$

Крім того, якщо f *— гомеоморфізм, то* $f \in W_{\mathrm{loc}}^{1,1}$ *та* $\partial_i f_j \to \partial_i f$ *слабко в* L_{loc}^1 *при* $j \to \infty$ *для всіх* $i = 1, \ldots n$.

Доведення. Застосовуючи лему 5.7.1, умову (5.41) та теорему про почленне інтегрування (див., напр., теорему I.12.12 в [131]), маємо

$$P_f\,(x) \leqslant \liminf_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \int\limits_{C(x,h)} \limsup_{j\to\infty} P_{f_j}(y)\, dm(y)\,. \tag{5.43}$$

Тепер за теоремою про диференційовність невизначеного інтегралу (див., напр., теорему IV.6.3 в [131]) отримуємо

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \int\limits_{C(x,h)} \limsup_{j\to\infty} P_{f_j}\,(y)\; dm(y) = \limsup_{j\to\infty} P_{f_j}\,(x) \tag{5.44}$$

для майже всіх x. Із співвідношень (5.43) і (5.44) випливає (5.42).

З (5.41) випливає, що відображення f_j є відображенням зі скінченним спотворенням і $P_{f_j} < \infty$ м.с. Тоді, враховуючи нерівність (5.3), отримуємо

$$\|\partial_i f_j\| \leqslant \|P_{f_j}\|^{(n-1)/n} \cdot |f_j(C)|^{1/n} \;\leqslant\; \|P\|^{(n-1)/n} \cdot |f_j(C)|^{1/n} < \infty \tag{5.45}$$

для будь-якої компактної множини $C \subset \Omega$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots$, де $\| * \|$ є норма у просторі $L^1(C)$. Зафіксуємо $\rho_* \in (0, \rho)$, де $\rho = \mathrm{dist}(C, \partial D)$ і покриємо C кулями $\mathrm{B}(x, \rho_*)$, $x \in C$. Вибираючи скінченне підпокриття з даного покриття, отримуємо відкриту множину V, що містить C, і таку що $\overline{V} \subset D$. За побудовою, $\overline{V}$ — компактна підмножина області D, при цьому $f(C)$ і $f(\overline{V})$ є компактними підмножинами області $D' = f(D)$. Оскільки $f(C) \subset f(V)$, а множина $f(V)$ відкрита і f — гомеоморфізм, маємо нерівність $\mathrm{dist}(f(C), \partial f(V)) > 0$. Отже, $f_j(C) \subset f(V)$ при досить великих j і з умови (5.45) випливає, що

$$\|\partial_i f_j\| \leqslant \|P\|^{(n-1)/n} \cdot |f(\overline{V})|^{1/n} < \infty$$

для таких j. Аналогічно доводиться, що

$$\|\partial_i f_j\|_E \leqslant \|P\|_E^{(n-1)/n} \cdot |f(\overline{V})|^{1/n} < \infty,$$

де через $\| * \|_E$ позначена норма в $L^1(E)$ для довільної вимірної множини $E \subseteq C$. В силу леми 2.1 в [398], $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$ і $\partial_i f_j \to \partial_i f$ слабко в $L^1_{\rm loc}$, $i = 1, \ldots, n$, при $j \to \infty$. Теорему доведено.

5.8. Нижні Q-гомеоморфізми і класи Орліча–Соболєва

У цьому підрозділі показано, яким чином розвинута теорія відображень (нижніх та кільцевих Q-гомеоморфізмів) з необмеженою характеристикою квазіконформності, може бути застосована до широких класів відображень зі скінченним спотворенням, а також до класів Орліча–Соболєва та, зокрема, до класів Соболєва $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

Нагадаємо деякі означення.

Означення 5.8.1. Відображення $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ називається *ліпшицевим,* якщо

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leqslant M\,|x_1 - x_2|$$

для деякої сталої $M < \infty$ і всіх x_1, $x_2 \in \mathbb{R}^n$.

Означення 5.8.2. Відображення $g : X \to Y$ називається *біліпшицевим*, якщо воно, по-перше, є ліпшицевим, і, по-друге, виконується співвідношення

$$M^* \cdot |x_1 - x_2| \leqslant |g(x_1) - g(x_2)|$$

для деякої сталої $M^* > 0$ і всіх x_1, $x_2 \in \mathbb{R}^n$.

Наступне твердження є ключовим для подальшого дослідження.

Теорема 5.8.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неспадна функція така, що при деякому $t_* \in (0,\infty)$ виконується умова (5.9). Тоді будь-який гомеоморфізм $f : D \to D'$ класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ зі скінченним спотворенням є нижнім Q-гомеоморфізмом при $Q(x) = K_I^{\frac{1}{n-1}}(x,f)$.*

Доведення. Позначимо через E (борелеву) множину всіх точок $x \in D$, де відображення f має повний диференціал і $J_f(x) = \det f'(x) \neq 0$. Зауважимо, що множина E є не більше ніж зчисленним об'єднанням борелевих множин E_l, $l = 1, 2, \ldots$, таких, що відображення $f_l = f|_{E_l}$ є біліпшицевими гомеоморфізмами, див., напр., лему 3.2.2 в [187]. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що множини E_l попарно не перетинаються. Позначимо також через E_* множину всіх точок $x \in D$, де f має повний диференціал і $f'(x) = 0$.

За теоремою 5.3.1 множина $E_0 := D \setminus (E \bigcup E_*)$ має нульову міру Лебега. Отже, за теоремою 9.1 в [342] маємо $H^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$ для майже всіх сфер $S_r := S(x_0, r)$ з центром у довільній точці $x_0 \in D$, де "майже всіх" визначається у розумінні конформного модуля сім'ї поверхонь. Тоді, згідно з лемою 9.1 в [342], $H^{n-1}(E_0 \cap S_r) = 0$ для майже всіх $r \in \mathbb{R}$ і згідно з наслідком 5.4.3 отримуємо $H^{n-1}(f(E_0) \cap S_r^*) = 0$ і $H^{n-1}(f(E_*) \cap S_r^*) = 0$ для майже всіх $r \in \mathbb{R}$, де $S_r^* = f(S_r)$.

Зауважимо, що також $H^{n-1}(f(E_0) \cap S_r^*) = 0$ і $H^{n-1}(f(E_*) \cap S_r^*) = 0$ для майже всіх сфер $S_r := S(x_0, r)$ у розумінні конформного модуля сім'ї поверхонь. Дійсно, нехай Γ_0 — підсім'я всіх сфер $S_r := S(x_0, r)$, для яких або $H^{n-1}(f(E_0) \cap S_r^*) > 0$, або $H^{n-1}(f(E_*) \cap S_r^*) > 0$. Позначимо через R множину всіх $r \in \mathbb{R}$, для яких $H^{n-1}(f(E_0) \cap S_r^*) > 0$ або $H^{n-1}(f(E_*) \cap S_r^*) > 0$. Внаслідок сказаного вище, $m_1(R) = 0$. Тоді за теоремою Фубіні $m(F) = 0$, де $F = \{x \in D : |x - x_0| = r \in R\}$. Функція $\rho_1 : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, визначена символом ∞ при $x \in F$ і рівна нулю на множині, що залишилась, узагальнено допустима для сім'ї Γ_0. Отже, за (9.18) в [342] $M(\Gamma_0) \leqslant \int\limits_F \rho_1^n dm(x) = 0$, тобто, дійсно, $M(\Gamma_0) = 0$.

За теоремою Кірсбрауна (див. теорема 2.10.43 в [187]) кожне відображення f_l може бути продовжене до ліпшицевого відображення $\widetilde{f_l} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, яке за теоремою Радемахера–Степанова диференційовне майже всюди в $\mathbb{R}^n$ (див. теорему 3.1.6 в [187]). Внаслідок єдиності апроксимативного диференціала (див. пункт 3.1.2 в [187]) можна вважати, що при всіх $x \in E_l$ виконується рівність $\widetilde{f_l}'(x) = f'(x)$.

Нехай Γ позначає сім'ю всіх сфер S_r, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 < d_0 = \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$. Для довільної функції $\rho_* \in \mathrm{adm}\, f(\Gamma)$ такої, що $\rho_* \equiv 0$ ззовні $f(D)$, вважаємо

$\rho \equiv 0$ ззовні D і на E_0, і

$$\rho(x) := \Lambda(x) \cdot \rho_*(f(x)) \qquad \text{при } x \in E,$$

де

$$\Lambda(x) \;=\; \left[\; \frac{\det f'(x)}{l(f'(x))} \;\right]^{\frac{1}{n-1}} \;=\; [\; \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \;]^{\frac{1}{n-1}} \;\geqslant\; [\; J_{n-1}(x) \;]^{\frac{1}{n-1}} \qquad \text{для м.в. } x \in E\,;$$

Тут $\lambda_n \geqslant \ldots \geqslant \lambda_1$ — головні дилатаційні коефіцієнти $f'(x)$ (див., напр., розділ I.4.1 в [110]) і $J_{n-1}(x)$ — $(n-1)$-вимірний якобіан $f|_{S_r}$ у точці x, де $r = |x-x_0|$ (див. п. 3.2.1 в [187]).

Виконуючи відповідні оцінки спочатку на кожній множині E_l, $l = 1, 2, \ldots$, з використанням теореми Кірсбрауна та теореми 3.2.5 в [187] про заміну змінних, а потім підсумовуючи їх з урахуванням зчисленної адитивності інтеграла Лебега, отримуємо

$$\int\limits_{S_r} \rho^{n-1}\, d\mathcal{A} \geqslant \int\limits_{S_r^*} \rho_*^{n-1}\, d\mathcal{A} \geqslant 1$$

для м.в. S_r і, таким чином, $\rho \in \operatorname{ext}\operatorname{adm}\Gamma$.

Аналогічно, використовуючи заміну змінних (див., напр., теорему 3.2.5 в [187]) на кожній множині E_l, $l = 1, 2, \ldots$, і зчисленну адитивність інтеграла Лебега, отримуємо оцінку

$$\int\limits_{D} \frac{\rho^n(x)}{K_I^{\frac{1}{n-1}}(x,f)}\, dm(x) \leqslant \int\limits_{f(D)} \rho_*^n(x)\, dm(x)\,,$$

що і завершує доведення.

Наслідок 5.8.1. *Будь-який гомеоморфізм в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, класу $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$ зі скінченним спотворенням є нижнім Q-гомеоморфізмом при $Q(x) = K_I^{\frac{1}{n-1}}(x,f)$.*

Враховуючи взаємозв'язок між нижніми і кільцевими Q-гомеоморфізмами, описаний у наслідку 3.2.1, із теореми 5.8.1 і наслідку 5.8.1 отримуємо наступне твердження.

Наслідок 5.8.2. *Будь-який гомеоморфізм* f *класу Орліча–Соболєва* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *в* $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, *за умови (5.9) на функцію* φ *(зокрема, будь-який гомеоморфізм класу Соболєва* $W^{1,p}_{\rm loc}$ *при* $p>n-1$*) і за умови* $K_I(x,f)\in L^1_{\rm loc}(D)$ *є кільцевим* Q_**-гомеоморфізмом в кожній точці* $x_0\in D$ *при* $Q_*(x)=K_I(x,f)$.

5.9. Одностайно неперервні сім'ї гомеоморфізмів

У даному підрозділі отримано оцінки спотворення хордальної відстані при гомеоморфних відображеннях з класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ за умови типу умови Кальдерона на функцію φ. Крім того, доведено теореми про одностайну неперервність для гомеоморфізмів класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, які задовольняють умову (5.9), взагалі кажучи, більш слабку, ніж (5.15), і в яких відсутні рівномірні (навіть локально в області) обмеження виду (5.13). Тут усюди мається на увазі, що функція $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ є неспадною.

Теорема 5.9.1. *Нехай* D *і* D' *— області в* $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ *— неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9) при деякому* $t_*\in(0,\infty)$. *Нехай* $f:D\to D'$ *— гомеоморфізм класу Орліча–Соболєва* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, *для якого* $K_I(x,f)\in L^1_{\rm loc}(D)$, *такий, що* $h(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(D))\geqslant\Delta>0$. *Тоді для кожного* $x_0\in D$ *і* $x\in B(x_0,\varepsilon(x_0))$, *де* $\varepsilon(x_0)<d(x_0)={\rm dist}(x_0,\partial D)$, *виконується нерівність*

$$h(f(x),f(x_0))\leqslant\frac{\alpha_n}{\Delta}\exp\left\{-\int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon(x_0)}\frac{dr}{rk_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}\right\},\tag{5.46}$$

де стала α_n *залежить тільки від* n, *а* $k_{x_0}(r)$ *означає середнє інтегральне значення функції* $K_I(x,f)$ *по сфері* $S(x_0,r)$.

Доведення. За наслідком 5.8.2 f є кільцевим Q-гомеоморфізмом при $Q(x)=K_I(x,f)$. Тепер твердження теореми випливає з теореми 1.6.2. Теорему доведено.

Зауваження 5.9.1. Оцінка (5.46) може бути також записана у вигляді

$$h(f(x), f(x_0)) \leqslant \frac{\alpha_n}{\Delta} \exp \left\{ -\, \omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{\|K_I\|^{\frac{1}{n-1}}(x_0, r)} \right\}, \qquad (5.47)$$

де ω_{n-1} — площа одиничної сфери в $\mathbb{R}^n$, $\|K_I\|(x_0, r)$ — норма звуження $K_I(x, f)$ на сфері $S(x_0, r)$ у просторі $L^1\left(S(x_0, r)\right)$.

Наслідок 5.9.1. *Оцінки (5.46) і (5.47) виконуються, зокрема, для гомеоморфізмів f класу Соболева $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$ з $K_I \in L^1_{\rm loc}$.*

Наслідок 5.9.2. *Нехай для гомеоморфізму $f : D \to D'$ класу $W^{1,1}_{\rm loc}$ при $r < \varepsilon(x_0) < \min\left\{e^{-1}, d(x_0)\right\}$ виконується умова*

$$k_{x_0}(r) \leqslant \left[\ln \frac{1}{r}\right]^{n-1}. \qquad (5.48)$$

Тоді при всіх $x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))$ справедлива оцінка

$$h(f(x), f(x_0)) \leqslant \frac{\alpha_n}{\Delta} \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon(x_0)}}{\ln \frac{1}{|x-x_0|}}. \qquad (5.49)$$

Наслідок 5.9.3. *Зокрема, якщо для деякого $\varepsilon(x_0) < \min\{e^{-1}, d(x_0)\}$ виконується нерівність*

$$K_I(x, f) \leqslant \left[\ln \frac{1}{|x-x_0|}\right]^{n-1}, \qquad (5.50)$$

то оцінка (5.49) виконується всюди в кулі $B(x_0, \varepsilon(x_0))$.

Зауваження 5.9.2. Якщо замість умов (5.48) і (5.50) вимагати виконання відповідно нерівностей

$$k_{x_0}(r) \leqslant c \cdot \left[\ln \frac{1}{r}\right]^{n-1}$$

і

$$K_I(x, f) \leqslant c \cdot \left[\ln \frac{1}{|x-x_0|}\right]^{n-1},$$

то буде виконуватись оцінка

$$h(f(x), f(x_0)) \leqslant \frac{\alpha_n}{\Delta} \left[\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon(x_0)}}{\ln \frac{1}{|x-x_0|}}\right]^{1/c^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Теорема 5.9.2. *Нехай* $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \geqslant 3$, *— гомеоморфізм класу* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *з умовою (5.9) на функцію* φ, $f(0) = 0$ *і*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<1} K_I(x, f)\ \frac{dm(x)}{|x|^n} \leqslant c \ln\frac{1}{\varepsilon} \qquad \forall\ \varepsilon \in (0, 1)\ .$$

Тоді

$$|f(x)| \leqslant \gamma_n \cdot |x|^{\beta_n},$$

де γ_n *— деяка стала, що залежить тільки від* n, *і* $\beta_n = (\omega_{n-1}/c)^{\frac{1}{n-1}}$, ω_{n-1} *— площа одиничної сфери в* $\mathbb{R}^n$.

Доведення. За наслідком 5.8.2 f є кільцевим Q-гомеоморфізмом при $Q(x) = K_I(x, f)$. Тепер твердження теореми випливає з теореми 1.6.3. Теорему доведено.

Теорема 5.9.3. *Нехай* D *і* D' *— області в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, *і* $f : D \to D'$ *— гомеоморфізм класу Орліча–Соболева* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, *такий, що* $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \geqslant \Delta > 0$ *та м.с.* $K_I(x, f) \leqslant Q(x)$ *і* $Q \in {\rm FMO}(x_0)$. *Тоді при деякому* $0 < \varepsilon_0 < {\rm dist}(x_0, \partial D)$ *виконується оцінка*

$$h(f(x), f(x_0)) \leqslant \frac{\alpha_n}{\Delta}\left\{\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon_0}}{\ln\frac{1}{|x-x_0|}}\right\}^{\beta} \quad \forall\ x \in B(x_0, \varepsilon_0)\ , \tag{5.51}$$

де α_n *— стала, що залежить тільки від* n, *а* β *— тільки від функції* Q.

Доведення. За наслідком 5.8.2 f є кільцевим Q-гомеоморфізмом при $Q(x) = K_I(x, f)$. Тепер твердження теореми випливає з теореми 1.6.4. Теорему доведено.

Наслідок 5.9.4. *Зокрема, оцінка (5.51) справедлива, якщо*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \ \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\ dm(x)\ <\ \infty\ . \tag{5.52}$$

Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ — неспадна функція, $Q : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ — довільна вимірна за Лебегом функція. Позначимо символом

$\mathcal{O}^{\varphi}_{Q,\Delta}$ сім'ю всіх гомеоморфізмів f із D в $\mathbb{R}^n$ класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ зі скінченим спотворенням таких, що $h\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(D)\right)\geqslant\Delta>0$ і виконується нерівність $K_I(x,f)\leqslant Q(x)$ майже всюди. Позначимо також через $\mathcal{S}^{p}_{Q,\Delta}$, $p\geqslant 1$, сім'ю $\mathcal{O}^{\varphi}_{Q,\Delta}$ при $\varphi(t)=t^p$.

Теорема 5.9.4. *Нехай $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ — неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9). Якщо $Q\in{\rm FMO}$, то клас $\mathcal{O}^{\varphi}_{Q,\Delta}$ утворює нормальну сім'ю відображень.*

Доведення. За теоремою 5.9.3 для відображень класу $\mathcal{O}^{\varphi}_{Q,\Delta}$ виконується оцінка (5.51), наслідком якої є одностайна неперервність сім'ї відображень цього класу. Тепер твердження теореми випливає з твердження 1.4.1. Теорему доведено.

Наслідок 5.9.5. *За умови (5.9) клас $\mathcal{O}^{\varphi}_{Q,\Delta}$ утворює нормальну сім'ю відображень, якщо для всіх $x_0\in D$ виконується умова (5.52).*

Наслідок 5.9.6. *Зокрема, клас $\mathcal{S}^{p}_{Q,\Delta}$ утворює нормальну сім'ю відображень при $p>n-1$, як тільки виконується одна з двох умов: $Q\in{\rm FMO}$ або для всіх $x_0\in D$ виконується умова (5.52).*

Теорема 5.9.5. *Нехай $Q\in L^1_{\rm loc}$, $n\geqslant 3$, і при деякому $\varepsilon(x_0)<{\rm dist}(x_0,\partial D)$ виконується умова*

$$\int\limits_{0}^{\varepsilon(x_0)}\frac{dr}{\|Q\|_1^{\frac{1}{n-1}}(x_0,r)}\;=\;\infty\qquad\forall\ x_0\in D\,,\tag{5.53}$$

де $\|Q\|_1(x_0,r)$ — норма функції Q в просторі L^1 по сфері $S(x_0,r)$. Тоді при будь-якому $\Delta>0$ класи $\mathcal{O}^{\varphi}_{Q,\Delta}$ і $\mathcal{S}^{p}_{Q,\Delta}$ утворюють нормальні сім'ї відображень, якщо φ задовольняє умову (5.9) і, відповідно, якщо $p>n-1$.

Доведення. За теоремою 5.9.1 і зауваженням 5.9.1 до неї для всіх гомеоморфізмів класу $\mathcal{O}^{\Phi,\varphi}_{M,\Delta}$ за умови (5.9) на функцію φ та для всіх гомеоморфізмів класу $\mathcal{S}^{\Phi,p}_{M,\Delta}$ при $p>n-1$ виконується оцінка (5.47). Звідси з урахуванням нерівності $K_I(x,f)\leqslant Q(x)$, що виконується майже всюди, і умови (5.53) робимо висновок про одностайну неперервність сімей відображень класів

$\mathcal{O}^{\varphi}_{Q,\Delta}$ і $\mathcal{S}^{p}_{Q,\Delta}$. Тепер твердження теореми випливає з твердження 1.4.1. Теорему доведено.

Наслідок 5.9.7. *Класи* $\mathcal{O}^{\varphi}_{Q,\Delta}$ *і* $\mathcal{S}^{p}_{Q,\Delta}$ *утворюють нормальні сім'ї відображень, якщо функція* φ *задовольняє співвідношення (5.9) і, відповідно, якщо* $p>n-1$, *а функція* $Q(x)$ *має лише особливості логарифмічного типу.*

Нехай, як і вище, D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ — неспадна функція. Для неспадної функції $\Phi:[0,\infty]\to[0,\infty]$, $M>0$ і $\Delta>0$, через $\mathcal{O}^{\Phi,\varphi}_{M,\Delta}$ позначимо сім'ю всіх гомеоморфізмів класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, таких, що $h\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(D)\right)\geqslant\Delta>0$ і

$$\int\limits_{D}\Phi\left(K_I(x,f)\right)\,\frac{dm(x)}{\left(1+|x|^2\right)^n}\ \leqslant\ M\ .$$

Аналогічно, через $\mathcal{S}^{\Phi,p}_{M,\Delta}$, $p\geqslant 1$, позначимо клас $\mathcal{O}^{\Phi,\varphi}_{M,\Delta}$ при $\varphi(t)=t^p$.

Теорема 5.9.6. *Нехай* $\Phi:[0,\infty]\to[0,\infty]$ *— неспадна опукла функція така, що при деякому* $\delta_0>\Phi(0)$ *задовольняє умову*

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}}\ =\ \infty\ . \tag{5.54}$$

Тоді класи $\mathcal{O}^{\Phi,\varphi}_{M,\Delta}$ *за умови (5.9) на функцію* φ, *а також класи* $\mathcal{S}^{\Phi,p}_{M,\Delta}$ *при* $p>n-1$, *є одностайно неперервними і, отже, утворюють нормальні сім'ї відображень при будь-яких* $M\in(0,\infty)$ *і* $\Delta\in(0,1)$.

Доведення. За наслідком 5.8.2 всі гомеоморфізми класу $\mathcal{O}^{\Phi,\varphi}_{M,\Delta}$ за умови (5.9) на функцію φ та всі гомеоморфізми класу $\mathcal{S}^{\Phi,p}_{M,\Delta}$ при $p>n-1$ є кільцевими Q-гомеоморфізмами. Тепер для завершення доведення залишається застосувати теорему 4.1 роботи [129]. Теорему доведено.

Зауваження 5.9.3. Як випливає з роботи [129], умова вигляду (5.54) є не тільки достатньою, але також і необхідною для нормальності вказаних класів.

5.10. Поведінка класів Орліча-Соболєва на нескінченності

У цьому підрозділі наводиться ряд результатів про асимптотичну поведінку на нескінченності класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ за умови типу умови Кальдерона на функцію φ.

Нехай r_0 — довільне фіксоване додатне число і $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Для гомеоморфізму $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ позначимо

$$L(x_0,f,R)=\sup\limits_{|x-x_0|=R}|f(x)-f(x_0)|\,.$$

Сформулюємо два допоміжні твердження.

Лема 5.10.1. *Нехай $n\geqslant 3$ і $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — гомеоморфізм класу $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, де $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ — неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9). Якщо $K_I\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$, то*

$$\liminf\limits_{R\to\infty}L(x_0,R,f)\exp\left[-\left(\frac{\omega_{n-1}}{\Lambda(R)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right]>0\,,$$

де ω_{n-1} — площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$ і

$$\Lambda(R)=\left(\int\limits_{r_0}^{R}\psi(t)\,dt\right)^{-n}\cdot\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,r_0,R)}K_I(x,f)\,\psi^n(|x-x_0|)\,dm(x)$$

для довільної вимірної (за Лебегом) функції $\psi:[0,\infty]\to[0,\infty]$ такої, що

$$0<\int\limits_{r_0}^{R}\psi(t)\,dt<\infty\qquad\forall\ R>r_0\,.$$

Доведення. За наслідком 5.8.2 f є кільцевим Q-гомеоморфізмом при $Q(x)=K_I(x,f)$. Тепер твердження леми випливає з леми 2.6.1. Лему доведено.

Лема 5.10.2. *Нехай $n\geqslant 3$ і $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — гомеоморфізм класу $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, де $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ — неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9). Якщо*

$K_I \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *і для деяких чисел* $p < n$ *і* $c > 0$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,r_0,R)} K_I(x,f)\psi^n(|x-x_0|)\,dm(x) \leqslant c\cdot I^p(R) \qquad \forall\ R > r_0\,,$$

де $\psi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ *— невід'ємна вимірна (за Лебегом) функція така, що*

$$0 < I(R) = \int\limits_{r_0}^{R} \psi(t)\,dt < \infty \qquad \forall\ \ R > r_0\,,$$

то

$$\liminf_{R\to\infty} L(x_0,R,f)\exp\left[-\alpha\, I^{\frac{n-p}{n-1}}(R)\right] > 0\,,$$

де $\alpha = \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

Доведення. За наслідком 5.8.2 f є кільцевим Q-гомеоморфізмом при $Q(x) = K_I(x,f)$. Тепер твердження леми випливає з леми 2.6.2. Лему доведено.

Покладаючи в лемі 5.10.2 $\psi(t) = \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{N}\ln_k t}$, $r_0 = e_N$ і $p = 1$, отримуємо наступне твердження.

Теорема 5.10.1. *Нехай* $n \geqslant 3$ *і* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— гомеоморфізм класу* $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$, *де* $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *— неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9). Якщо* $K_I \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *і для деякого числа* $c > 0$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,e_N,R)} \frac{K_I(x,f)\,dm(x)}{\left(\prod\limits_{k=0}^{N}\ln_k|x-x_0|\right)^n} \leqslant c\cdot \ln_{N+1}(R) \qquad \forall\ R > e_N\,,$$

то

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0,R,f)}{\ln_N^{\gamma}(R)} > 0\,,$$

де $\gamma = \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

Покладаючи в теоремі 5.10.1 $N = 0$, приходимо до наступного наслідку.

Наслідок 5.10.1. *Зокрема, якщо* $K_I \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *і для деякого числа* $c > 0$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,1,R)} \frac{K_I(x,f)\,dm(x)}{|x-x_0|^n} \leqslant c\cdot \ln R \qquad \forall\ R > 1\,,$$

то

$$\liminf_{R\to\infty}\frac{L(x_0,R,f)}{R^{\gamma}}>0\,,$$

де $\gamma=\left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

Наслідок 5.10.2. *Якщо для деякого числа* $\kappa_I(x_0)>0$ *виконується умова*

$$\frac{1}{\omega_{n-1}R^{n-1}}\int\limits_{S(x_0,R)}K_I(x,f)\,d\mathcal{A}\leqslant\kappa_I(x_0)\qquad\forall\ R>1\,,$$

то

$$\liminf_{R\to\infty}\frac{L(x_0,R,f)}{R^{\alpha}}>0\,,$$

де $\alpha=\kappa_I^{\frac{1}{1-n}}(x_0)$ *і* $d\mathcal{A}$ *— елемент площі поверхні.*

Зауваження 5.10.1. Зокрема, якщо $K_I(x,f)\leqslant K, K\in[1,\infty)$, із наслідка 5.10.2 випливає відомий результат О. Мартіо, С. Рікмана і Ю. Вяйсяля, див. теорему 3.7 в [340]:

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{|f(x)|}{|x|^{\alpha}}>0\,,$$

де $\alpha=K^{\frac{1}{1-n}}$.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 5.10.2. *Нехай* $n\geqslant 3$ *і* $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *— гомеоморфізм класу* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *зі скінченним спотворенням, де* $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ *— неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9),* r_0 *— довільне додатне дійсне число,* $x_0\in\mathbb{R}^n$ *. Тоді*

$$\liminf_{R\to\infty}L(x_0,R,f)\,\exp\left(-\,\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}\int\limits_{r_0}^{R}\frac{d\tau}{\|\,K_I\|_{\,1}^{\,\frac{1}{n-1}}(x_0,\tau)}\right)=M_0>0\,,$$

де

$$\|K_I\|_1(x_0,\tau)=\left(\,\int\limits_{S(x_0,\tau)}K_I(x,f)d\mathcal{A}\right),\ S(x_0,\tau)=\{x\in\mathbb{R}^n:|x-x_0|=\tau\}.$$

Доведення. За теоремою 5.8.1 f є нижнім Q-гомеоморфізмом при $Q(x)=K_I^{\frac{1}{n-1}}(x,f)$. Тепер твердження теореми випливає з теореми 3.4.1. Теорему доведено.

Нагадаємо деякі позначення.

Для цілих значень $k \geqslant 0$ покладемо

$$e_0 = 1, \quad e_1 = e, \quad e_2 = e^e, \ \ldots, \ e_{k+1} = \exp e_k$$

і $\quad \ln_0 t = t, \quad \ln_1 t = \ln t, \quad \ln_2 t = \ln\ln t, \ \ldots, \ \ln_{k+1} t = \ln\ln_k t$.

Із теорем 5.8.1 і 3.4.1 безпосередньо випливають наступні твердження.

Наслідок 5.10.3. *Нехай $n \geqslant 3$ і $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — гомеоморфізм класу $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ зі скінченним спотворенням, де $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9), r_0 — довільне фіксоване додатне число, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Якщо для деякого числа $Q_0 > 0$ виконується умова*

$$\| K_I \|_{\,n-1}(x_0, r) \leqslant k_0 \prod_{k=0}^{N} \ln_k \, r$$

для м.в. $r \in (e_N, \infty)$, то

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0, R, f)}{(\ln_N R)^{\gamma}} = M_0 > 0\,,$$

де $\gamma = \frac{\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}}{k_0}$.

Наслідок 5.10.4. *Якщо для деякого числа $Q_0 > 0$ виконується умова*

$$\| K_I \|_{\,n-1}(x_0, r) \leqslant k_0\, r$$

для м.в. $r \in (1, \infty)$, то

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0, R, f)}{R^{\gamma}} = M_0 > 0\,,$$

де $\gamma = \frac{\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}}{k_0}$.

5.11. Зв'язок класів Орліча-Соболєва з нижніми та кільцевими Q-гомеоморфізмами відносно p-модуля

У цьому підрозділі встановлено зв'язок класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в $\mathbb{R}^n, n \geqslant 3$, за умови типу умови Кальдерона на функцію φ з нижніми і кільцевими Q-гомеоморфізмами відносно p-модуля.

Для гомеоморфізмів класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ використовується характеристика $K_p(z,f)$, визначена рівністю (4.13).

Справедлива наступна теорема.

Теорема 5.11.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$. Припустимо, що $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ — неспадна функція, для якої при деякому $t_*\in(0,\infty)$ виконується умова (5.9). Тоді будь-який гомеоморфізм $f:D\to D'$ класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ зі скінченним спотворенням є нижнім Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля при $Q(x)=K_p(x,f)$ і $p>n-1$.*

Доведення. Нехай E — множина (борелева) всіх точок $x\in D$, де відображення f має повний диференціал і $J_f(x)=\det f'(x)\neq 0$. Зауважимо, що множина E є не більше ніж зчисленним об'єднанням борелевих множин E_l, $l=1,2,\ldots$, таких, що відображення $f_l=f|_{E_l}$ є біліпшицевими гомеоморфізмами (див., напр., лему 3.2.2 в [187]). Не зменшуючи загальності, можна вважати, що множини E_l попарно не перетинаються. Позначимо також через E_* множину всіх точок $x\in D$, де f має повний диференціал і $f'(x)=0$.

За теоремою 5.3.1 множина $E_0:=D\setminus(E\bigcup E_*)$ має нульову міру Лебега. Отже, за теоремою 9.1 в [342] маємо $H^{n-1}(E_0\cap S_r)=0$ для p-майже всіх сфер $S_r:=S(x_0,r)$ з центром в довільній точці $x_0\in\overline{D}$, де "p-майже всіх" визначається у розумінні p-модуля сім'ї поверхонь. Тоді, згідно з лемою 9.1 [342], $H^{n-1}(E_0\cap S_r)=0$ для майже всіх $r\in\mathbb{R}$ і згідно з наслідком 5.4.3 отримуємо $H^{n-1}(f(E_0)\cap S_r^*)=0$ і $H^{n-1}(f(E_*)\cap S_r^*)=0$ для майже всіх $r\in\mathbb{R}$, де $S_r^*=f(S_r)$.

Зауважимо, що також $H^{n-1}(f(E_0)\cap S_r^*)=0$ і $H^{n-1}(f(E_*)\cap S_r^*)=0$ для майже всіх сфер $S_r:=S(x_0,r)$ у розумінні p-модуля сім'ї поверхонь. Дійсно, нехай Γ_0 — підсім'я всіх сфер $S_r:=S(x_0,r)$, для яких або $H^{n-1}(f(E_0)\cap S_r^*)>0$, або $H^{n-1}(f(E_*)\cap S_r^*)>0$. Позначимо через R множину всіх $r\in\mathbb{R}$, для яких або $H^{n-1}(f(E_0)\cap S_r^*)>0$, або $H^{n-1}(f(E_*)\cap S_r^*)>0$. Внаслідок сказаного вище, $m_1(R)=0$. Тоді за теоремою Фубіні $m(J)=0$, де $J=\{x\in D:|x-x_0|=r\in R\}$. Функція $\rho_1:\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$, визначена символом ∞ при $x\in J$ і рівна нулю на множині, що залишилась, узагальнено p-допустима для сім'ї Γ_0. Отже, за (9.18) в [342] $M_p(\Gamma_0) \leqslant \int\limits_J \rho_1^p dm(x) = 0,$ тобто, дійсно, $M_p(\Gamma_0) = 0$.

За теоремою Кірсбрауна (див. теорему 2.10.43 в [187]) кожне відображення f_l може бути продовжено до ліпшицевого відображення $\widetilde{f}_l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, яке за теоремою Радемахера–Степанова диференційовне майже всюди в $\mathbb{R}^n$ (див. теорему 3.1.6 [187]). Внаслідок єдиності апроксимативного диференціала (див. пункт 3.1.2 в [187]) можна вважати, що при всіх $x \in E_l$ виконується рівність $\widetilde{f}_l^{\,\prime}(x) = f^{\prime}(x)$.

Нехай Γ позначає сім'ю всіх перетинів сфер S_r, де $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$ і $\varepsilon_0 < d_0 = \sup\limits_{x\in D} |x - x_0|$, з областю D. Для довільної функції $\rho_* \in \mathrm{adm}\, f(\Gamma)$ такої, що $\rho_* \equiv 0$ ззовні $f(D)$, вважаємо $\rho \equiv 0$ зовні D і на E_0, і

$$\rho(x) \ := \ \rho_*(f(x))\|f^{\prime}(x)\| \qquad \text{при } x \in D \setminus E_0 = E \cup E_* \,.$$

Виконуючи відповідні оцінки спочатку на кожній множині E_l, $l = 1, 2, \ldots$, згідно з [187, розд. 1.7.6] і використовуючи при цьому геометричний сенс величини $\|f^{\prime}(x)\|$ та її зв'язок з якобіаном відображення (див., напр., співвідношення (2.5) і (2.6) розд. I § 2 в [110]), а потім підсумовуючи отримані оцінки з урахуванням зчисленної адитивності інтеграла Лебега, маємо

$$\int\limits_{S_r} \rho^{n-1}\, d\mathcal{A} = \int\limits_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x))\|f^{\prime}(x)\|^{n-1}\, d\mathcal{A} =$$

$$= \int\limits_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) \cdot \frac{\|f^{\prime}(x)\|^{n-1}}{\frac{d\mathcal{A}_*}{d\mathcal{A}}} \cdot \frac{d\mathcal{A}_*}{d\mathcal{A}}\, d\mathcal{A} \geqslant \int\limits_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) \cdot \frac{d\mathcal{A}_*}{d\mathcal{A}}\, d\mathcal{A} =$$

$$= \int\limits_{S_r^*} \rho_*^{n-1}(y) d\mathcal{A}_* \geqslant 1$$

для майже всіх S_r, і, отже, $\rho \in \mathrm{ext_p}\,\mathrm{adm}\,\Gamma$.

Аналогічно, використовуючи заміну змінних (див., напр., теорему 3.2.5 в [187]) на кожній множині E_l, $l = 1, 2, \ldots,$ і зчисленну адитивність інтеграла Лебега, отримуємо оцінку

$$\int\limits_D \frac{\rho^p(x)}{K_p(x,f)}\, dm(x) \ \leqslant \ \int\limits_{f(D)} \rho_*^p(x)\, dm(x)\,,$$

що і завершує доведення. Теорему доведено.

Справедливе також наступне твердження.

Теорема 5.11.2. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, і $p > n-1$. Припустимо, що $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неспадна функція, для якої при деякому $t_* \in (0,\infty)$ виконується умова (5.9), і для всіх $x_0 \in D$*

$$\|K_p\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) \neq \infty \quad \textit{для м.в.} \quad r \in (0, d_0),\ d_0 = \mathrm{dist}\,(x_0, \partial D)\,,$$

де $\|K_p\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) = \Big(\int\limits_{S(x_0,r)} K_p^{\frac{p-n+1}{p-1}}(x, f)\, d\mathcal{A}\Big)^{p-n+1}$. *Тоді будь-який гомеоморфізм $f : D \to D'$ класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ зі скінченним спотворенням є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно $\frac{p}{p-n+1}$-модуля при $Q(x) = K_p^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x, f)$.*

Доведення. За теоремою 5.11.1 f є нижнім Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля при $Q(x) = K_p(x, f)$ і будь-якому $p > n-1$. Тепер твердження теореми випливає з теореми 3.2.2. Теорему доведено.

З теореми 5.11.1 та наслідку 3.2.1 випливає наступне твердження.

Наслідок 5.11.1. *Зокрема, якщо $K_p(x, f) \in L^{\frac{n-1}{p-n+1}}_{\rm loc}$, то f є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно $\frac{p}{p-n+1}$-модуля при $Q(x) = K_p^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x, f)$.*

При $p = n$ маємо наступні наслідки стосовно гомеоморфізмів з класів Соболєва.

Наслідок 5.11.2. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Тоді будь-який гомеоморфізм $f : D \to D'$ класу Соболєва $W^{1,q}_{\rm loc}$ при $q > n-1$ зі скінченним спотворенням є нижнім Q-гомеоморфізмом при $Q(x) = K_O(x, f)$.*

Наслідок 5.11.3. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Тоді будь-який гомеоморфізм $f : D \to D'$ класу Соболєва $W^{1,q}_{\rm loc}$ при $q > n-1$ за умови $K_O(x, f) \in L^{n-1}_{\rm loc}$ є кільцевим Q-гомеоморфізмом при $Q(x) = [K_O(x, f)]^{n-1}$.*

Наведемо ще ряд тверджень, істинність яких базується, зокрема, на теоремі 5.11.1.

Спираючись на встановлений в теоремі 5.11.1 зв'язок гомеоморфізмів класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, за умови типу умови Кальдерона на функцію φ з нижніми Q-гомеоморфізмами відносно p-модуля і теорему 3.3.1, отримуємо наступне твердження.

Теорема 5.11.3. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, і $f:D\to D'$ — гомеоморфізм класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ зі скінченним спотворенням, де $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ — неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9). Припустимо, що для деяких чисел $\lambda>1$, $\sigma>0$ і $C_{x_0}>0$ виконується умова*

$$\varepsilon^{\sigma}\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{\Vert\, K_p\Vert_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)}\geqslant C_{x_0}\qquad\forall\,\varepsilon\in\left(0,\frac{{\rm dist}\,(x_0,\partial D)}{\lambda^2}\right),$$

де $\Vert\, K_p\Vert_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)=\left(\int\limits_{S(x_0,r)}[K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\,d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}$.

Тоді при $p\in\left(n,n+\frac{1}{n-2}\right)$ виконується нерівність

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant\nu_0\,C_{x_0}^{-\frac{1}{p-n}}\,|x-x_0|^{\frac{\sigma}{p-n}}$$

для всіх $x\in B(x_0,\delta_0)$, де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n, p, λ і σ.

Наслідок 5.11.4. *Зокрема, якщо для деяких чисел $\lambda>1$ і $C_{x_0}>0$ виконується умова*

$$\varepsilon^{p-n}\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{\Vert\, K_p(x,f)\Vert_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}\geqslant C_{x_0}\tag{5.55}$$

для будь-якого $\varepsilon\in\left(0,\frac{{\rm dist}\,(x_0,\partial D)}{\lambda^2}\right)$, то

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant\nu_0\,C_{x_0}^{-\frac{1}{p-n}}\,|x-x_0|\tag{5.56}$$

для всіх $x\in B(x_0,\delta_0)$ і ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від розмірності простору n, p і λ.

З теореми 5.11.1 і наслідку 3.3.2 чи 3.3.3 випливають відповідно два наступні твердження.

Наслідок 5.11.5. *Зокрема, якщо для деякого числа* $k_{x_0} > 0$ *виконується умова*

$$\left(\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \int\limits_{S(x_0,r)} [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\ d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}} \leqslant k_{x_0}$$

для м.в. $r \in \left(0, \frac{\mathrm{dist}\,(x_0,\partial D)}{e^2}\right)$, *то*

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant \nu_0\, k_{x_0}^{\frac{1}{p-n}}\, |x-x_0|$$

для всіх $x \in B(x_0,\delta_0)$, *де* ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n *і* p.

Наслідок 5.11.6. *Зокрема, якщо* $K_p(x,f) \leqslant K < \infty$ *для м.в.* $x \in D$, *то*

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant \nu_0\, K^{\frac{1}{p-n}}\, |x-x_0|$$

для всіх $x_0 \in D$ *і* $x \in B(x_0,\delta_0)$, $\delta_0 \leqslant \frac{\mathrm{dist}\,(x_0,\partial D)}{e^2}$, *де* ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n *і* p.

Застосовуючи спочатку теорему 5.11.1, а потім наслідок 3.3.4, отримуємо наступне твердження.

Теорема 5.11.4. *Нехай* D *і* D' *— області в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. *Припустимо, що* $f: D \to D'$ *— гомеоморфізм класу Орліча–Соболева* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *зі скінченним спотворенням, де* $\varphi: (0,\infty) \to (0,\infty)$ *— неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9). Якщо* $K_p(x,f) \in L_\alpha(B(x_0,\delta_0)), \delta_0 \leqslant \frac{\mathrm{dist}\,(x_0,\partial D)}{4}$, $p \in \left(n, n+\frac{1}{n-2}\right)$, $\alpha > \frac{n}{p-n}$, *то*

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant \nu_0 \|K_p(f)\|_{\alpha}^{\frac{1}{p-n}} |x-x_0|^{1-\frac{n}{\alpha(p-n)}}$$

для всіх $x \in B(x_0,\delta_0)$, *де* $\|K_p(f)\|_\alpha = \left(\int\limits_{B(x_0,\delta_0)} K_p^\alpha(x,f)\,dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ *— норма в просторі* $L_\alpha(B(x_0,\delta_0))$ *і* ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n, p *і* α.

Застосовуючи спочатку теорему 5.11.1, а потім лему 3.5.2, отримуємо наступне твердження, в якому встановлено оцінку спотворення відстаней логарифмічного типу для відображень класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, за умови типу умови Кальдерона на функцію φ.

Теорема 5.11.5. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, і $f:D\to D'$ — гомеоморфізм класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ зі скінченним спотворенням, де $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ — неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9). Якщо $p\in\left(n, n+\frac{1}{n-2}\right)$, $\parallel K_p\parallel_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)\ne\infty$ для м.в. $r\in(0,d_0)$, $d_0={\rm dist}(x_0,\partial D)$, і для деяких чисел $\kappa\in\left[0,\frac{p}{p-n+1}\right)$, $C_{x_0}>0$ виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)}\frac{[K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\,dm(x)}{|x-x_0|^{\frac{p}{p-n+1}}}\leqslant C_{x_0}\,\ln^{\kappa}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)$$

для будь-яких $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<d_0$, то

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant \nu_0\,C_{x_0}^{\gamma}\,\ln^{-\theta}\frac{1}{|x-x_0|}$$

для всіх $x\in B(x_0,\delta_0)$, де $\delta_0\leqslant\min\{1,{\rm dist}^4\,(x_0,\partial D)\}$,

$$\gamma=\frac{p-n+1}{(n-1)(p-n)},\quad \theta=\frac{p-\kappa(p-n+1)}{(n-1)(p-n)}$$

і ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від розмірності простору n, p і κ.

З теореми 5.11.1 і наслідку 3.5.5 чи 3.5.6 випливають відповідно два наступні твердження.

Наслідок 5.11.7. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$. Припустимо, що $f:D\to D'$ — гомеоморфізм класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ зі скінченним спотворенням, де $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ — неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9). Якщо $K_p(x,f)\in L_{\frac{n}{p-n}}(B(x_0,\delta_0))$, $\delta_0\leqslant\min\{1,{\rm dist}^4(x_0,\partial D)\}$ і $p\in\left(n,n+\frac{1}{n-2}\right)$, то*

$$|f(x)-f(x_0)|\;\leqslant\;\nu_0\,\|K_p(f)\|^{\frac{1}{p-n}}_{\frac{n}{p-n}}\,\ln^{-\frac{p}{n(p-n)}}\frac{1}{|x-x_0|}$$

для всіх $x\in B(x_0,\delta_0)$, де

$$\|K_p(f)\|_{\frac{n}{p-n}}=\left(\int\limits_{B(x_0,\delta_0)}K_p^{\frac{n}{p-n}}(x,f)\,dm(x)\right)^{\frac{p-n}{n}}$$

— норма у просторі $L_{\frac{n}{p-n}}(B(x_0,\delta_0))$ *і* ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n *і* p.

Наслідок 5.11.8. *Нехай* D *і* D' *— області в* $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$. *Припустимо, що* $f:D\to D'$ *— гомеоморфізм класу Орліча–Соболева* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *зі скінченним спотворенням, де* $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ *— неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9). Якщо* $p\in\left(n,n+\frac{1}{n-2}\right)$ *і для деякого числа* $k_{x_0}>0$ *виконується умова*

$$\|K_p\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)\ \leqslant\ k_{x_0}r$$

для м.в. $r\in(0,\delta_0),\ \delta_0\leqslant\min\{1,{\rm dist}^4\,(x_0,\partial D)\}$, *то*

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant \nu_0\,\kappa_{x_0}^{\frac{1}{p-n}}\,\ln^{-\frac{1}{p-n}}\frac{1}{|x-x_0|}\,,$$

для всіх $x\in B(x_0,\delta_0)$, *де* ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від розмірності простору* n *і* p.

5.12. Оцінки міри образу кулі для класів Орліча-Соболєва

У цьому підрозділі наведені оцінки міри образу кулі при відображеннях класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в $\mathbb{R}^n, n\geqslant 3$, за умови типу умови Кальдерона на функцію φ.

Наступна теорема є уточненням теореми 2.4.1 у випадку гомеоморфізмів класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ зі скінченним спотворенням за умови (5.9) на функцію φ.

Теорема 5.12.1. *Припустимо, що* $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$ *— гомеоморфізм класу Орліча–Соболева* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *зі скінченним спотворенням, де* $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ *— неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9), і* $n\geqslant 3$. *Тоді при* $p=n$ *справедлива оцінка*

$$m\left(f\overline{B}_r\right)\leqslant\Omega_n\,\exp\left(-n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}\int\limits_r^1\frac{d\tau}{\|\,K_n\|_{\,n-1}(\tau)}\right)\,,\tag{5.57}$$

а при $p>n$ *— оцінка*

$$m(f\overline{B}_r)\leqslant \Omega_n\left(1+\omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}(p-n)\int\limits_r^1\frac{d\tau}{\|\,K_p\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(\tau)}\right)^{-\frac{n}{p-n}}, \qquad (5.58)$$

де $\|\,K_p\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(\tau)=\left(\int\limits_{S_\tau}[K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\,d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}$, $S_r=\{x\in\mathbb{R}^n:\,|x|=r\}$ *і* $\overline{B}_r=\{x\in\mathbb{R}^n:\,|x|\leqslant r\}$.

Доведення. За теоремою 5.11.1 f є нижнім Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля при $Q(x)=K_p(x,f)$ і будь-якому $p>n-1$. Тепер твердження теореми випливає з леми 3.5.5. Теорему доведено.

Зауваження 5.12.1. Наведемо приклади гомеоморфізмів, що показують точність отриманих оцінок (5.57) і (5.58).

Нехай $p\geqslant n$ і $K\geqslant 1$. Визначимо відображення $f_p:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$ рівностями:

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|}\,|x|^{\frac{1}{K}}, & x\neq 0\,,\\ 0\,, & x=0\end{cases} \qquad (5.59)$$

при $p=n$ і

$$f_p(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|}\left(1-K^{-1}+K^{-1}|x|^{n-p}\right)^{-\frac{1}{p-n}}, & x\neq 0\,,\\ 0\,, & x=0\end{cases} \qquad (5.60)$$

при $p>n$.

Для відображень (5.59) і (5.60) реалізуються відповідно оцінки (5.57) і (5.58).

Застосовуючи спочатку теорему 5.11.1, а потім лему 3.3.2, отримуємо наступне твердження.

Твердження 5.12.1. *Припустимо, що* $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$ *— гомеоморфізм класу Орліча–Соболева* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *зі скінченним спотворенням, де* $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ *— неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9). Якщо для деяких чисел* $p>n$, $\lambda>1$, $\sigma>0$ *і* $C_{x_0}>0$ *виконується умова*

$$\varepsilon^\sigma\int\limits_\varepsilon^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{\|\,K_p\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)}\geqslant C_{x_0}$$

для будь-якого $\varepsilon \in \left(0, \frac{\mathrm{dist}\,(x_0,\partial D)}{\lambda}\right)$, *то*

$$m\left(\overline{fB(x_0,\varepsilon)}\right) \leqslant \nu_0\, C_{x_0}^{-\frac{n}{p-n}}\, \varepsilon^{\frac{\sigma n}{p-n}}\,,$$

де ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n *і* p.

5.13. Скінченна ліпшицевість класів Орліча-Соболєва

У цьому підрозділі отримано достатню умову скінченної ліпшицевості гомеоморфізмів класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в $\mathbb{R}^n, n \geqslant 3$, за умови типу умови Кальдерона на функцію φ.

Теорема 5.13.1. *Нехай* D *і* D' *— області в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. *Припустимо, що* $f : D \to D'$ *— гомеоморфізм класу* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *зі скінченним спотворенням, де* $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *— неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9). Якщо* $p \in \left(n, n + \frac{1}{n-2}\right)$ *і*

$$k_p(x_0) = \limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\fint_{B(x_0,\varepsilon)} [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\, dm(x)\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}} < \infty\,,$$

то

$$\limsup_{x\to x_0}\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \leqslant \nu_0\, k_p^{\frac{1}{p-n}}(x_0) < \infty\,,$$

де ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n *і* p.

Доведення. За теоремою 5.11.1 f є нижнім Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля при $Q(x) = K_p(x,f)$ і будь-якому $p > n-1$. Тепер твердження теореми випливає з леми 3.5.1. Теорему доведено.

Наслідок 5.13.1. *Нехай* D *і* D' *— області в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. *Припустимо, що* $f : D \to D'$ *— гомеоморфізм класу* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *зі скінченним спотворенням, де* $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *— неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9). Якщо* $p \in \left(n, n + \frac{1}{n-2}\right)$ *і*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\fint_{B(x_0,\varepsilon)} [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\, dm(x) < \infty$$

для всіх $x_0 \in D$ *, то гомеоморфізм* f *є скінченно ліпшицевим.*

Побудуємо приклад гомеоморфізму зі скінченним спотворенням, який не є скінченно ліпшицевим.

Приклад 5.13.1. Припустимо, що $n \geqslant 3$ і $p \in \left(n, n+\frac{1}{n-2}\right)$. Нехай $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, де

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}\left(1+(p-n)\int\limits_{|x|}^{1}\frac{dt}{t^{p-n+1}\ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}\left(\frac{e}{t}\right)}\right)^{-\frac{1}{p-n}}, & x \neq 0\,, \\ 0\,, & x = 0\,. \end{cases}$$

Дотична та радіальна дилатації f на сфері $S_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| = r\}$, $r \in (0,1)$, легко обчислюються за формулами:

$$\delta_T = \frac{|f(x)|}{|x|} = \frac{\left(1+(p-n)\int\limits_{r}^{1}\frac{dt}{t^{p-n+1}\ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}\left(\frac{e}{t}\right)}\right)^{-\frac{1}{p-n}}}{r}\,,$$

$$\delta_r = \frac{\left(1+(p-n)\int\limits_{r}^{1}\frac{dt}{t^{p-n+1}\ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}\left(\frac{e}{t}\right)}\right)^{-\frac{p-n+1}{p-n}}}{r^{p-n+1}\ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}\left(\frac{e}{t}\right)}$$

(див. правила обчислення (1.1.20) і (1.1.23) в [167], розд. I, твердження 1.1.1).

Зауважимо, що $\delta_T \geqslant \delta_r$ і

$$\delta_T^{p-n+1} = \delta_r \ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}\left(\frac{e}{r}\right)\,.$$

Отже, в силу сферичної симетрії маємо

$$K_p(x,f) = \frac{\delta_T^p}{\delta_T^{n-1}\delta_r} = \frac{\delta_T^{p-n+1}}{\delta_r} = \ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}\left(\frac{e}{|x|}\right)\,.$$

Очевидно, що

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \fint_{B_\varepsilon}[K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\,dm(x) = \infty\,,$$

де $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$.

З іншого боку, за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|} = \infty\,,$$

тобто гомеоморфізм f не є ліпшицевим в нулі.

5.14. Оцінки нижніх границь для гомеоморфізмів класів Орліча–Соболєва

У цьому підрозділі ми доводимо аналог теореми Ікоми–Шварца для гомеоморфізмів класу Орліча–Соболєва за умови типу умови Кальдерона на функцію φ та встановлюємо ряд споріднених результатів.

Наступна теорема є уточненням теореми 2.5.1 у випадку гомеоморфізмів класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ зі скінченним спотворенням за умови (5.9) на функцію φ.

Теорема 5.14.1. *Припустимо, що* $f:\mathbb{B}^n\rightarrow \mathbb{B}^n$ *— гомеоморфізм класу Орліча–Соболєва* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *зі скінченним спотворенням, де* $\varphi:(0,\infty)\rightarrow(0,\infty)$ *— неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9),* $f(0)=0$ *і* $n\geqslant 3$. *Тоді при* $p>n$ *справедлива оцінка*

$$\liminf\limits_{x\rightarrow 0}\,|f(x)|\,\left(1+\omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}(p-n)\int\limits_{|x|}^{1}\frac{dr}{\Vert\,K_p\Vert_{\,\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}\right)^{\frac{1}{p-n}}\leqslant 1, \tag{5.61}$$

а при $p=n$ *— оцінка*

$$\liminf\limits_{x\rightarrow 0}\,|f(x)|\,\exp\left(\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}\int\limits_{|x|}^{1}\frac{dr}{\Vert\,K_n\Vert_{\,n-1}(r)}\right)\leqslant 1\,, \tag{5.62}$$

де $\Vert K_p\Vert_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)=\left(\int\limits_{S_r}[K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\,d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}$ *і* $S_r=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|=r\}$.

Доведення. За теоремою 5.11.1 f є нижнім Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля при $Q(x)=K_p(x,f)$ і будь-якому $p>n-1$. Тепер твердження теореми випливає з леми 3.5.6. Теорему доведено.

Наслідок 5.14.1. *Зокрема, при* $p>n$ *справедлива оцінка*

$$\liminf\limits_{x\rightarrow 0}\,|f(x)|\,\left(\int\limits_{|x|}^{1}\frac{dr}{\Vert\,K_p\Vert_{\,\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}\right)^{\frac{1}{p-n}}\leqslant\omega_{n-1}^{-\frac{(p-n+1)(p-n)}{n-1}}(p-n)^{-(p-n)},$$

де ω_{n-1} *— площа одиничної сфери в* $\mathbb{R}^n$ *.*

Зауваження 5.14.1. Приклади гомеоморфізмів (5.59) і (5.60) відповідно показують точність оцінок (5.61) і (5.62).

Теорема 5.14.2. *Нехай* $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$ *— гомеоморфізм класу Орліча–Соболєва* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *зі скінченним спотворенням, де* $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ *— неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9),* $f(0)=0$ *і* $n\geqslant 3$*. Якщо* $p>n$ *і*

$$k_p=\liminf_{\varepsilon\to 0}\left(\fint_{B_\varepsilon}[K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\,dm(x)\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}<\infty\,,$$

то

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|}\leqslant \nu_0\,k_p^{\frac{1}{p-n}}<\infty\,,$$

де ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n *і* p*.*

Доведення. За наслідком 5.11.1 f є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно $\frac{p}{p-n+1}$-модуля при $Q(x)=K_p^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x,f)$. Тепер для завершення доведення достатньо застосувати теорему 2.7.2. Теорему доведено.

Теорема 5.14.3. *Нехай* $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$ *— гомеоморфізм класу Орліча–Соболєва* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *зі скінченним спотворенням, де* $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ *— неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9),* $f(0)=0$ *і* $n\geqslant 3$*. Якщо для деяких чисел* $\lambda>1$*,* $\sigma>0$ *і* $C_0>0$ *виконується умова*

$$\varepsilon^{\sigma}\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{\|\,K_p\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}\geqslant C_0 \tag{5.63}$$

для будь-якого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$*, де* $\varepsilon_0\in\left(0,\frac{1}{\lambda}\right)$*,*

$$\|\,K_p\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)=\left(\int\limits_{S_r}[K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\,d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}\,,$$

то при $p>n$ *справедлива оцінка*

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{\frac{\sigma}{p-n}}}\leqslant \nu_0\,C_0^{-\frac{1}{p-n}}\,, \tag{5.64}$$

де ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n, p, λ *і* σ.

Доведення. За теоремою 5.11.1 f є нижнім Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля при $Q(x)=K_p(x,f)$ і будь-якому $p>n-1$. Тепер для завершення доведення достатньо застосувати теорему 3.3.2. Теорему доведено.

Наслідок 5.14.2. *Зокрема, якщо для деяких чисел* $\lambda>1$ *і* $C_0>0$ *виконується умова*

$$\varepsilon^{p-n}\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{\|\,K_p\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}\geqslant C_0$$

для будь-якого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, *де* $\varepsilon_0\in\left(0,\frac{1}{\lambda}\right)$, *то*

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|}\leqslant \nu_0\,C_0^{-\frac{1}{p-n}}\,,$$

де ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n, p *і* λ.

Приклад 5.14.1. Припустимо, що $n\geqslant 3$, $p>n$, і $\sigma>0$. Нехай $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$, де

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|}\,|x|^{\frac{\sigma}{p-n}}\,, & x\neq 0\,,\\ 0\,, & x=0\,.\end{cases}$$

Дотична та радіальна дилатації f на сфері $S_r=\{x\in\mathbb{R}^n:\ |x|=r\}$, $r\in(0,1)$, легко обчислюються за формулами:

$$\delta_T=\frac{|f(x)|}{|x|}=|x|^{\frac{\sigma-p+n}{p-n}}\,,\qquad \delta_r=\frac{\sigma}{p-n}\,|x|^{\frac{\sigma-p+n}{p-n}}$$

(див. правила обчислення (1.1.20) і (1.1.23) в. [167], розд. I, твердження 1.1.1).

Очевидно, що $\delta_T\geqslant\delta_r$ при $\sigma\in(0,p-n)$ і $\delta_T\leqslant\delta_r$ при $\sigma\in(p-n,\infty)$.

Отже, в силу сферичної симетрії маємо

$$K_p(x,f)=\begin{cases}\frac{\delta_T^p}{\delta_T^{n-1}\delta_r}=\alpha_1\,|x|^{\sigma-p+n}\,, & \text{якщо } \sigma\in(0,p-n),\\ \frac{\delta_r^p}{\delta_T^{n-1}\delta_r}=\alpha_2\,|x|^{\sigma-p+n}\,, & \text{якщо } \sigma\in(p-n,\infty)\,,\end{cases}$$

де $\alpha_1=\frac{p-n}{\sigma}$ і $\alpha_2=\left(\frac{\sigma}{p-n}\right)^{p-1}$. Тоді

$$\|\,K_p\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)=\left(\int\limits_{S_r}[K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\,d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}=$$

$$= \begin{cases} \widetilde{\alpha_1}\, r^{\sigma+1}\,, & \text{якщо}\ \sigma \in (0, p-n), \\ \widetilde{\alpha_2}\, r^{\sigma+1}\ , & \text{якщо}\,\sigma \in (p-n, \infty)\,, \end{cases}$$

де $\widetilde{\alpha_1} = \omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}\alpha_1$ і $\widetilde{\alpha_2} = \omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}\alpha_2$.

Звідси випливає рівність

$$\varepsilon^{\sigma}\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{\|\,K_p\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)} = \begin{cases} (\widetilde{\alpha_1})^{-1}\,(1-\lambda^{-\sigma})\ , & \text{якщо}\ \sigma \in (0, p-n), \\ (\widetilde{\alpha_2})^{-1}\,(1-\lambda^{-\sigma})\ \ , & \text{якщо}\,\sigma \in (p-n, \infty)\,. \end{cases}$$

Цим показано, що виконується умова (5.63) нашої теореми.

Крім того,

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{\frac{\sigma}{p-n}}} = 1\,,$$

що показує точність оцінки (5.64) за порядком.

Із теореми 5.14.3 безпосередньо випливають такі наслідки.

Наслідок 5.14.3. *Якщо* $K_p(x,f) \in L_\alpha(\mathbb{B}^n), p > n, \alpha > \frac{n}{p-n}$, *то*

$$\liminf\limits_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{1-\frac{n}{\alpha(p-n)}}} \leqslant \nu_0\,\|K_p(f)\|_{\alpha}^{\frac{1}{p-n}}\,,$$

де $\|K_p(f)\|_\alpha = \left(\int\limits_{\mathbb{B}^n} K_p^{\alpha}(x,f)\,dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ *— норма у просторі* $L_\alpha(\mathbb{B}^n)$ *і* ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n, p *і* α.

Наслідок 5.14.4. *Якщо для деяких чисел* $\gamma < p-n$ *і* $\kappa_0 > 0$ *виконується умова*

$$\left(\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{S_r} K_p^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x,f)\ d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}} \leqslant \kappa_0\, r^{-\gamma},$$

для м.в. $r \in (0, r_0)$, *де* $r_0 \in \left(0, e^{-1}\right)$, *то*

$$\liminf\limits_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{1-\frac{\gamma}{p-n}}} \leqslant\ \nu_0\,\kappa_0^{\frac{1}{p-n}}\,,$$

де ν_0 *— додатна стала, що залежить тільки від* n *і* p.

Наслідок 5.14.5. *Зокрема, якщо для деякого числа* $\kappa_0>0$ *виконується умова*

$$\left(\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{S_r} K_p^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x,f)\ d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}\leqslant\kappa_0$$

для м.в. $r\in(0,r_0)$, *де* $r_0\in\left(0,e^{-1}\right)$, *то*

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|}\leqslant\ \nu_0\,\kappa_0^{\frac{1}{p-n}}\ ,$$

де ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n *і* p .

Теорема 5.14.4. *Нехай* $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$ *— гомеоморфізм класу Орліча–Соболева* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *зі скінченним спотворенням, де* $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ *— неспадна функція, яка задовольняє умову (5.9),* $f(0)=0$ *і* $n\geqslant 3$. *Припустимо, що* $p>n$ *і* $\|K_p\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)\neq\infty$ *для м.в.* $r\in(0,1)$. *Якщо для деяких чисел* $C_0>0$ *і* $\kappa\in\left[0,\frac{p}{p-n+1}\right)$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)}\frac{K_p^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x,f)\,dm(x)}{|x|^{\frac{p}{p-n+1}}}\leqslant C_0\,\ln^{\kappa}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)$$

для будь-яких $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<1$, *то*

$$\liminf_{x\to 0}|f(x)|\,\ln^{\theta}\left(\frac{1}{|x|}\right)\leqslant\nu_0\,C_0^{\gamma}\ ,$$

де $\gamma=\frac{p-n+1}{(n-1)(p-n)}$, $\theta=\frac{p-\kappa(p-n+1)}{(n-1)(p-n)}$ *і* ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n , p *і* κ .

Доведення. За теоремою 5.11.2 f є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно $\frac{p}{p-n+1}$-модуля при $Q(x)=K_p^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x,f)$. Тепер для завершення доведення достатньо застосувати теорему 2.9.2. Теорему доведено.

Наслідок 5.14.6. *Зокрема, якщо* $K_p(x,f)\in L_{\frac{n}{p-n}}(\mathbb{B}^n)$, *то*

$$\liminf_{x\to 0}|f(x)|\,\ln^{\frac{p}{n(p-n)}}\left(\frac{1}{|x|}\right)\ \leqslant\ \nu_0\,\|K_p(f)\|_{\frac{n}{p-n}}^{\frac{1}{p-n}}\ ,$$

де $\|K_p(f)\|_{\frac{n}{p-n}} = \left(\int\limits_{\mathbb{B}^n} (K_p(x,f))^{\frac{n}{p-n}}\ dm(x)\right)^{\frac{p-n}{n}}$ *— норма у просторі* $L_{\frac{n}{p-n}}(\mathbb{B}^n)$ *і* ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n *і* p.

Наслідок 5.14.7. *Якщо для деякого числа* $Q_0>0$ *виконується умова*

$$\|K_p\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)\leqslant Q_0\, r \tag{5.65}$$

для м.в. $r\in(0,\frac{1}{2})$, *то*

$$\liminf_{x\to 0}|f(x)|\,\ln^{\frac{1}{p-n}}\left(\frac{1}{|x|}\right)\leqslant \nu_0\, Q_0^{\frac{1}{p-n}}\,, \tag{5.66}$$

де ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* n *і* p.

Наведемо приклад гомеоморфізму зі скінченним спотворенням, який покаже, що оцінка (5.66) є точною за порядком.

Приклад 5.14.2. Припустимо, що $p\in\left(n, n+\frac{1}{n-2}\right)$. Нехай $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$, де

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|}\left(1+(p-n)\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)\right)^{-\frac{1}{p-n}}\,, & x\neq 0\,,\\ 0\,, & x=0\,.\end{cases}$$

Зауважимо, що f є гомеоморфізмом класу C^1 в $\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$, звідки випливає, зокрема, що $f\in W_{\rm loc}^{1,n-\frac{1}{2}}(\mathbb{B}^n\setminus\{0\})$. Визначимо дотичні і радіальні розтяги в кожній точці (див. правила обчислення (1.1.20) і (1.1.23) в [167], розд. I, твердження 1.1.1):

$$\delta_T=\frac{|f(x)|}{|x|}=\frac{\left(1+(p-n)\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)\right)^{-\frac{1}{p-n}}}{r}\,,$$

$$\delta_r=\frac{\left(1+(p-n)\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)\right)^{-\frac{p-n+1}{p-n}}}{r}\,.$$

Зауважимо, що $\delta_T\geqslant\delta_r$ і $\delta_T=\delta_r\left(1+(p-n)\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)\right)$.

Покажемо, що $f\in W_{\rm loc}^{1,\varphi}(\mathbb{B}^n)$ з $\varphi(t)=t^{n-\frac{1}{2}}$. Дійсно,

$$\int\limits_{\overline{B}_r}\|f'(x)\|^{n-\frac{1}{2}}\,dm(x)=\int\limits_{\overline{B}_r}\left(\frac{|f(x)|}{|x|}\right)^{n-\frac{1}{2}}\,dm(x)\leqslant M_r\int\limits_{\overline{B}_r}\frac{1}{|x|^{n-\frac{1}{2}}}\,dm(x)\ =$$

$$= \omega_{n-1} M_r \int\limits_0^r t^{-\frac{1}{2}} = 2\omega_{n-1} M_r \, r^{\frac{1}{2}} \, < \, \infty \, ,$$

де $M_r = \max\limits_{\overline{B}_r} |f(x)|$ і $\omega_{n-1}-$ площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$.

В силу сферичної симетрії маємо

$$K_p(x, f) = \frac{\delta_T^p}{\delta_T^{n-1} \delta_r} = |x|^{n-p} \, .$$

Звідси випливають рівності

$$\|K_p\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r) = \left(\int\limits_{S_r} K_p^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x, f) \, d\mathcal{A} \right)^{\frac{p-n+1}{n-1}} =$$

$$= \left(\int\limits_{S_r} \left(|x|^{-(p-n)} \right)^{\frac{n-1}{p-n+1}} \, d\mathcal{A} \right)^{\frac{p-n+1}{n-1}} = \omega_{n-1} \, r.$$

Отже, відображення f задовольняє умову (5.65).

Крім того,

$$\liminf_{x \to 0} \, |f(x)| \ln^{\frac{1}{p-n}} \left(\frac{1}{|x|} \right) = (p-n)^{-\frac{1}{p-n}} < \infty \, ,$$

що показує точність оцінки (5.66) за порядком.

5.15. Про відображення з критичним показником

Вище було доведено, що будь-який гомеоморфізм f класу $W^{1,1}_{\rm loc}$ з локально інтегровною дилатацією K_O на площині є як кільцевим, так і нижнім Q-гомеоморфізмом при $Q = K_O$, див. наслідки 4.1.1 і 4.1.4. Крім того, було показано, що гомеоморфізми f класу Соболєва $W^{1,p}_{\rm loc}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, при $p > n-1$ є нижніми Q-гомеоморфізмами з функцією $Q(x)$, що дорівнює зовнішній дилатації $K_O(x, f)$ відображення f, і кільцевими Q_*-гомеоморфізмами при $Q_*(x) = [K_O(x, f)]^{n-1}$, див. наслідки 5.11.2 і 5.11.3. Випадок з критичним показником $p = n-1$ розглядається в даному підрозділі.

Наведемо деякі властивості відображень класу Соболєва $W_{\rm loc}^{1,n-1}$. Наступне твердження доведене в теоремі 1.1 із роботи [427].

Твердження 5.15.1. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, і $f:D\to\mathbb{R}^n$ — неперервне відкрите дискретне відображення класу Соболєва $W_{\rm loc}^{1,n-1}(D)$ з локально інтегровною внутрішньою дилатацією. Тоді відображення f є диференційовним майже скрізь.*

При $n\geqslant 3$ цей результат був новим навіть для гомеоморфізмів. При $n=2$ за відомою теоремою Герінга–Лехто будь-яке неперервне відкрите відображення, що має м.с. частинні похідні, є диференційовним м.с., див., наприклад, [253, 325]. Зауважимо, що останній результат для гомеоморфізмів був доведений ще Меньшовим в роботі [352] і його доведення без змін розповсюджується на неперервні відкриті відображення. За результатом Вяйсяля висновок має місце також для неперервних відкритих відображень класу $W_{\rm loc}^{1,p}$ при будь-яких $p>n-1$ і $n\geqslant 3$, див. лему 3 в [435]. У той же час, відомі приклади функцій $f\in W_{\rm loc}^{1,n}\subset W_{\rm loc}^{1,n-1}$, які ніде не диференційовні, див., напр., [422].

Наслідок 5.15.1. *Якщо відкрите дискретне відображення $f:D\to\mathbb{R}^n$ класу Соболєва $W_{\rm loc}^{1,n-1}(D)$ має зовнішню дилатацію, локально інтегровну у степені $n-1$, то відображення f є диференційовним м.с. в D.*

Наступне твердження доведене в теоремі 1.3 із роботи [239].

Твердження 5.15.2. *Нехай $f:C\to\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, — гомеоморфізм класу Соболєва $W_{\rm loc}^{1,n-1}(C)$ в одиничному кубі $C:=(0,1)^n$. Тоді f володіє (N)-властивістю Лузіна відносно $(n-1)$-вимірної міри Хаусдорфа на майже всіх гіперплощинах $\mathcal{P}$, паралельних довільній фіксованій координатній гіперплощині $\mathcal{P}_0$, тобто $H^{n-1}(f(E))=0$ для будь-якої множини $E\subset\mathcal{P}$, для якої $H^{n-1}(E)=0$.*

Цей результат був поширений на довільні неперервні відкриті дискретні відображення $f:D\to\mathbb{R}^n$ класу $W_{\rm loc}^{1,n-1}$, див. твердження 3.3 в [427]. Крім того, будь-яке неперервне відображення $f:D\to\mathbb{R}^m$, $m\geqslant 1$, класу $W_{\rm loc}^{1,p}$

при $p > n-1$ володіє вказаною властивістю, див., наприклад, теорему 5.4.2. Однак, це невірно навіть для гомеоморфізмів $f : D \to \mathbb{R}^n$ у класах $W^{1,p}_{\rm loc}$ ні при якому $p < n-1$. Дійсно, відомі приклади С.П. Пономарьова таких гомеоморфізмів $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, що належать классу $W^{1,p}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ для довільного $p < n$ та не володіють (N)-властивістю Лузіна, див. [106]. Якщо тепер $g(x)$ — такий гомеоморфізм в $\mathbb{R}^{n-1}$, то $f(x,y) := (g(x), y)$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y \in \mathbb{R}$, не володіє (N)-властивістю Лузіна на всіх гіперплощинах $y = \mathrm{const}$.

Лема 5.15.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $f : D \to D'$ — гомеоморфізм класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$ і $K_O \in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$. Тоді $\|f'\| \in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$.*

Доведення. Нехай V — компакт в D. Тоді, застосовуючи нерівність Гельдера з показниками $p = n$ і $p' = \frac{n}{n-1}$, отримуємо

$$\int\limits_V \|f'(x)\|^{n-1}\, dm(x) \;=\; \int\limits_V K_O^{\frac{n-1}{n}}(x) \cdot J_f^{\frac{n-1}{n}}(x)\, dm(x) \;\leqslant$$

$$\leqslant\; \left(\int\limits_V K_O^{n-1}(x)\, dm(x)\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int\limits_V J_f(x)\, dm(x)\right)^{\frac{n-1}{n}} \;<\; \infty$$

і висновок леми випливає із зауваження 5.1.1. Лему доведено.

Наслідок 5.15.2. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $f : D \to D'$ — гомеоморфізм класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$ і $K_O \in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$. Тоді $f \in W^{1,n-1}_{\rm loc}(D)$.*

В наступній лемі встановлено достатню умову абсолютної неперервності на гіперплощинах гомеоморфізму класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$.

Лема 5.15.2. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ — гомеоморфізм класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$, для якого $K_O \in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$, і нехай C — куб в $\mathbb{R}^n$ з гранями, паралельними координатним гіперплощинам, такий, що $\overline{C} \subset D$. Тоді звуження відображення f на C абсолютно неперервне відносно $(n-1)$-вимірної міри Хаусдорфа на майже всіх гіперплощинах $\mathcal{P}$, паралельних довільній фіксованій координатній гіперплощині $\mathcal{P}_0$. Крім того, на майже всіх таких гіперплощинах $\mathcal{P}$ виконується умова $H^{n-1}(f(E)) = 0$, як тільки $f' = 0$ на вимірній множині $E \subset \mathcal{P}$.*

Доведення. За лемою 5.15.1 $\|f'(x)\| \in L^{n-1}(C)$ і за теоремою Фубіні (див., наприклад, теорему III(8.1) в [131]) на майже всіх гіперплощинах $\mathcal{P}$, паралельних довільній фіксованій координатній гіперплощині $\mathcal{P}_0$,

$$\int\limits_{C\cap\mathcal{P}} \|f'(x)\|^{n-1} d\mathcal{A} < \infty \ ,$$

а за наслідком 5.15.1 і твердженням 5.15.2 можна вважати додатково, що відображення f диференційовне у майже всіх точках множини $C\cap\mathcal{P}$ та володіє там (N)-властивістю Лузіна відносно $(n-1)$-вимірної міри Хаусдорфа. Зафіксуємо довільну гіперплощину $\mathcal{P}_*$ із вказаними властивостями.

Тоді кожна вимірна множина $E \subset C\cap\mathcal{P}_*$ допускає представлення $E = E_0 \cup E_*$, де $H^{n-1}(E_0) = 0$, і $E_* := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, де E_k, $k = 1, 2, \ldots$, — вимірні множини такі, що відображення $f_k := f|_{E_k}$ є ліпшицевими (див. теорему 3.1.8 в [187]). За побудовою $H^{n-1}(f(E_0)) = 0$, а кожне відображення f_k допускає ліпшицеве продовження на всю гіперплощину $\mathcal{P}_*$ за теоремою Кірсбрауна (див., наприклад, теорему 2.10.43 в [187]). Таким чином, за теоремою 3.2.5 в [187], враховуючи зчисленну адитивність інтеграла Лебега, маємо рівність:

$$H^{n-1}(f(E)) \ = \int\limits_{\mathbf{E}_*} J_{n-1}(x) \ d\mathcal{A} \ ,$$

де J_{n-1} позначає $(n-1)$-вимірний якобіан відображення f на гіперплощині $\mathcal{P}_*$, і, нарешті, за п. 1.7.6 в [187] отримуємо оцінку

$$H^{n-1}(f(E)) \ \leqslant \int\limits_{\mathbf{E}} \|f'(x)\|^{n-1} d\mathcal{A} \ .$$

Звідси приходимо до абсолютної неперервності відображення f на гіперплощинах $\mathcal{P}_*$ внаслідок абсолютної неперервності невизначеного інтеграла, а також — до другого твердження леми. Лему доведено.

Відзначимо той очевидний факт, що хаусдорфові міри квазіінваріантні при квазіізометріях, а класи Соболєва $W^{1,p}_{\rm loc}$ — інваріантні (див., напр., п. 1.1.7 в монографії [350]). За властивістю Ліндельофа в $\mathbb{R}^n$ (див., напр., п. I.5.XI в [69]) множина $D\setminus\{x_0\}$ для будь-якого $x_0\in\mathbb{R}^n$ може бути покрита зчисленним числом відкритих сегментів сферичних кілець в $D \setminus \{x_0\}$ з центром в точці x_0, і кожен такий сегмент може бути відображений на одиничний куб в $\mathbb{R}^n$ за допомогою квазіізометрії, що переводить частини сфер в частини гіперплощин. Тому, застосовуючи лему 5.15.2, а також твердження 5.15.2, приходимо до наступного твердження, порівняй з наслідком 3.4 в [427].

Наслідок 5.15.3. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і нехай $f : D \to \mathbb{R}^n$ — гомеоморфізм класу Соболєва $W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$. Тоді відображення f володіє (N)-властивістю Лузіна відносно $(n-1)$-вимірної міри Хаусдорфа на майже всіх сферах S з центром в довільній точці $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Більш того, якщо додатково $K_O \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$, то відображення f на майже всіх таких сферах S локально абсолютно неперервне і, крім того, $H^{n-1}(f(E)) = 0$ як тільки $f' = 0$ на вимірній множині $E \subset S$.*

Теорема 5.15.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $f : D \to D'$ — гомеоморфізм класу Соболєва $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ такий, що $K_O \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$. Тоді гомеоморфізм f є нижнім Q-гомеоморфізмом в довільній точці $x_0 \in \overline{D}$ при $Q(x) = K_O(x, f)$.*

Доведення. Позначимо через U (борелеву) множину всіх точок $x \in D$, де відображення f має повний диференціал $f'(x)$ і $J_f(x) \neq 0$. Для застосування теореми Кірсбрауна і використання єдиності апроксимативного диференціала (див., напр., відповідно теореми 2.10.43 і 3.1.2 в [187]) зауважимо, що множина U є не більше ніж зчисленним об'єднанням борелевих множин U_l, $l = 1, 2, \ldots$, таких, що відображення $f_l = f|_{U_l}$ є біліпшицевим гомеоморфізмом (див., напр., лему 3.2.2 і теореми 3.1.4 і 3.1.8 в [187]). При цьому, не зменшуючи загальності, можна вважати, що множини U_l попарно не перетинаються. Позначимо через U_* множину всіх точок $x \in D$, де f має повний диференціал і $f' = 0$.

За наслідком 5.15.1 множина $U_0 := D \setminus (U \cup U_*)$ має нульову міру Лебега. Отже, $\mathcal{A}_S(U_0) = 0$ для м.в. гіперповерхонь S в $\mathbb{R}^n$ і, зокрема, для м.в. сфер $S_r := S(x_0, r)$ з центром в точці $x_0 \in \overline{D}$, див. лему 3.1.1. Таким чином, за наслідком 5.15.3 отримуємо $\mathcal{A}_{S_r^*}(f(U_0)) = 0 = \mathcal{A}_{S_r^*}(f(U_*))$ для майже всіх S_r, де $S_r^* = f(S_r)$.

Нехай Γ — сім'я всіх перетинів сфер S_r, $r\in(\varepsilon,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0<d_0=\sup\limits_{x\in D}|x-x_0|$, з областю D. Для довільної функції $\rho_*\in\operatorname{adm} f(\Gamma)$ такої, що $\rho_*\equiv 0$ ззовні $f(D)$, вважаємо $\rho\equiv 0$ ззовні D і на U_0, та $\rho(x):=\rho_*(f(x))\|f'(x)\|$ при $x\in D\setminus U_0$.

Виконуючи відповідні оцінки спочатку на кожній множині U_l, $l=1,2,\ldots$, згідно з 1.7.6 в [187], а потім підсумовуючи їх з урахуванням зчисленної адитивності інтеграла Лебега, отримуємо

$$\int\limits_{S_r}\rho^{n-1}\,d\mathcal{A}\;=\;\int\limits_{S_r}\rho_*^{n-1}(f(x))\|f'(x)\|^{n-1}\,d\mathcal{A}\;\geqslant\;\int\limits_{S_r^*}\rho_*^{n-1}\,d\mathcal{A}_*\;\geqslant\;1 \tag{5.67}$$

для м.в. S_r і, отже, $\rho\in\operatorname{ext}\operatorname{adm}\Gamma$.

Використовуючи заміну змінних (див., напр., теорему 3.2.5 в [187]) на кожній множині U_l, $l=1,2,\ldots$, і зчисленну адитивність інтеграла, отримуємо оцінку

$$\int\limits_{D}\frac{\rho^n(x)}{K_O(x,f)}\,dm(x)\;\leqslant\;\int\limits_{f(D)}\rho_*^n(y)\,dm(y)\;, \tag{5.68}$$

що і завершує доведення. Теорему доведено.

Тепер з твердження 1.7.2 і теореми 5.15.1 отримуємо ще один важливий наслідок.

Наслідок 5.15.4. *Нехай $f:D\to D'$ — гомеоморфізм класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$ такий, що $K_O\in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$. Тоді f є кільцевим Q_*-гомеоморфізмом при $Q_*(x)=K_O^{n-1}(x,f)$.*

Висновки

У розділі 5 вивчаються властивості відображень класів Орліча–Соболєва та Соболєва в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, зі скінченним спотворенням. Зокрема, отримано такі основні результати:

1) показано, що відкриті відображення класів Орліча-Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\Omega)$ за умови типу умови Кальдерона на функцію φ мають повний диференціал майже

скрізь, що є узагальненням результату Меньшова–Герінга–Лехто на площині та теореми Вяйсяля в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$;

2) доведено, що неперервні відображення класів Орліча-Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\Omega)$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, за умови типу умови Кальдерона на функцію φ володіють (N)-властивістю Лузіна на майже всіх гіперплощинах; зокрема, сказане відноситься до відображень класу Соболева $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$;

3) доведено теореми про компактність сімей гомеоморфізмів з класів Орліча–Соболєва, про належність обернених відображень до класу гомеоморфізмів з обмеженим інтегралом Діріхле, про одностайну неперервність і нормальність сімей обернених відображень, а також про напівнеперервність дилатацій відображень зі скінченним спотворенням;

4) встановлено, що гомеоморфізми класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ за умови типу умови Кальдерона на функцію φ є нижніми та кільцевими Q-гомеоморфізмами, а також нижніми та кільцевими Q-гомеоморфізмами відносно p-модуля;

5) для гомеоморфізмів класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ за умови типу умови Кальдерона на функцію φ отримано достатні умови скінченної ліпшицевості, локальної та логарифмічної гельдеровості, оцінки міри образу кулі, аналоги теореми Ікоми–Шварца та результату Мартіо–Рікмана–Вяйсяля про оцінку швидкості зростання на нескінченності;

6) встановлено, що гомеоморфізми класів Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ за умови на зовнішню дилатацію $K_O \in L^{n-1}_{\rm loc}$ є нижніми та кільцевими Q-гомеоморфізмами.

РОЗДІЛ 6

Q-ВІДОБРАЖЕННЯ ВІДНОСНО P-МОДУЛЯ

У даному розділі вивчаються властивості відображень з розгалуженням, що задовольняють деякі модульні нерівності. Результати цього розділу опубліковано в роботах [134, 138, 151, 268, 270, 271].

6.1. Кільцеві Q-відображення відносно p-модуля

У цьому підрозділі визначені кільцеві Q-відображення відносно p-модуля. Вказані класи відображень є узагальненням квазірегулярних відображень.

Нехай $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Для будь-яких r_1 і r_2, де $0 < r_1 < r_2 < \infty$, позначимо

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\},$$

$$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_i\}\,, \quad i = 1, 2.$$

Нехай $G \subseteq \mathbb{R}^n$ і $E\,, F \subseteq G$ — довільні множини в G. Позначимо через $\Delta(E, F; G)$ сім'ю всіх кривих $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, які з'єднують E і F в G, тобто $\gamma(a) \in E\,, \gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$.

Означення 6.1.1. Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $p > 1$ і $Q : D \to [0\,, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ є *кільцевим Q-відображенням відносно p-модуля у точці* $x_0 \in D$, якщо співвідношення

$$M_p\,\left(\Delta\left(fS_1, fS_2, fD\right)\right) \;\leqslant \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x) \cdot \eta^p(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{6.1}$$

виконується для будь-якого кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)$, де $0 < r_1 < r_2 < d_0$, $d_0 = \mathrm{dist}\,(x_0\,, \partial D)$, і кожної вимірної функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1\,.$$

Означення 6.1.2. Будемо говорити, що відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ є *кільцевим* Q*-відображенням відносно* p*-модуля в області* D, якщо умова (6.1) виконується для всіх точок $x_0 \in D$.

Нижче наведена основна лема про оцінку спотворення p-ємності сферичного конденсатора при кільцевих Q-відображеннях відносно p-модуля.

Лема 6.1.1. *Нехай* D *і* D' *— області в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, *і* $f : D \to D'$ *— відкрите дискретне кільцеве* Q*-відображення відносно* p*-модуля у точці* $x_0 \in D$ *при* $p > 1$ *і* $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$. *Тоді*

$$\mathrm{cap}_p \left(fB(x_0, \varepsilon_2), \overline{fB(x_0, \varepsilon_1)}\right) \leqslant \frac{1}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^p} \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x)\, dm(x)\,, \tag{6.2}$$

де $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \varepsilon_1 < |x - x_0| < \varepsilon_2\}$.

Доведення. Розглянемо сферичне кільце $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $x_0 \in D$, з довільними ε_1 і ε_2 такими, що $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$. Тоді $\mathcal{E} = \left(B\,(x_0, \varepsilon_2)\,, \overline{B\,(x_0, \varepsilon_1)}\right)$ — конденсатор в D, а $f\mathcal{E} = \left(fB\,(x_0, \varepsilon_2)\,, \overline{fB\,(x_0, \varepsilon_1)}\right)$ — конденсатор в D'. Нехай $\Gamma_{\mathcal{E}}$ і $\Gamma_{f\mathcal{E}}$ — сім'ї кривих у сенсі позначень твердження 1.14.3. Згідно з цим твердженням

$$\mathrm{cap}_p\, f\mathcal{E} \,=\, M_p\,(\Gamma_{f\mathcal{E}})\,. \tag{6.3}$$

За твердженням 1.14.2 кожна крива $\gamma' \in \Gamma_{f\mathcal{E}}$ має максимальне підняття з початком у деякій точці $x' \in \overline{B(x_0, \varepsilon_1)}$. Нехай Γ^* — сім'я максимальних піднять $\Gamma_{f\mathcal{E}}$ з початком у $\overline{B\,(x_0, \varepsilon_1)}$.

Покажемо, що $\Gamma^* \subset \Gamma_{\mathcal{E}}$. Припустимо супротивне, тобто що існує крива $\beta : [a,\, b) \to \mathbb{R}^n$ сім'ї $\Gamma_{f\mathcal{E}}$, для якої відповідне максимальне підняття

$\alpha : [a,\, c) \to B(x_0, \varepsilon_2)$ лежить у деякому компакті $\mathcal{K}$ усередині $B(x_0, \varepsilon_2)$. Отже, його замикання $\overline{\alpha}$ є компактом у $B(x_0, \varepsilon_2)$. Зауважимо, що $c \neq b$, оскільки у протилежному випадку $\overline{\beta}$ — компакт в $fB(x_0, \varepsilon_2)$, що суперечить умові $\beta \in \Gamma_{f\mathcal{E}}$. Розглянемо множину

$$G = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \lim_{k \to \infty} \alpha(t_k) \right\} , \qquad t_k \in [a,\, c)\, ,\ \lim_{k \to \infty} t_k = c.$$

Відзначимо, що переходячи до підпослідовностей, тут можна обмежуватися монотонними послідовностями t_k. Для $x \in G$, внаслідок неперервності f, будемо мати $f\left(\alpha(t_k)\right) \to f(x)$ при $k \to \infty$, де $t_k \in [a,\, c)$, $t_k \to c$ при $k \to \infty$. Однак, $f\left(\alpha(t_k)\right) = \beta(t_k) \to \beta(c)$ при $k \to \infty$. Звідси робимо висновок, що f є сталою на G в $B(x_0, \varepsilon_2)$. З іншого боку, згідно з умовою Кантора в компакті $\overline{\alpha}$ (див. п. 3.6 розд. I в [449])

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha\left([t_k,\, c)\right)} = \limsup_{k \to \infty} \alpha\left([t_k,\, c)\right) = \liminf_{k \to \infty} \alpha\left([t_k,\, c)\right) \neq \varnothing$$

внаслідок монотонності відносно послідовності зв'язних множин $\alpha\left([t_k,\, c)\right)$ і, таким чином, G є зв'язною згідно з п. (9.12) розд. I в [449]. Отже, внаслідок дискретності f множина G не може складатися більш ніж з однієї точки, і крива $\alpha : [a,\, c) \to B(x_0, \varepsilon_2)$ продовжується до замкненої кривої $\alpha : [a,\, c] \to \mathcal{K} \subset B(x_0, \varepsilon_2)$, причому $f\left(\alpha(c)\right) = \beta(c)$. Знову за наслідком 3.3 розд. II в [382], див. також твердження 1.14.2, можна побудувати максимальне підняття α' кривої $\beta|_{[c,\, b)}$ з початком у точці $\alpha(c)$. Об'єднуючи підняття α і α', отримаємо нове підняття α'' кривої β, яке є визначеним на $[a, c')$, $c' \in (c,\, b)$, що суперечить максимальності підняття α. Таким чином, $\Gamma^* \subset \Gamma_{\mathcal{E}}$. Зауважимо, що $\Gamma_{f\mathcal{E}} > f\Gamma^*$, і, отже,

$$M_p\left(\Gamma_{f\mathcal{E}}\right) \leqslant M_p\left(f\Gamma^*\right) \leqslant M_p\left(f\Gamma_{\mathcal{E}}\right)\,. \tag{6.4}$$

Розглянемо довільну послідовність чисел $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\varepsilon_1 < r_i < \varepsilon_2$, таку, що $r_i \to \varepsilon_2 - 0$. Позначимо через Γ_i сім'ю кривих, що з'єднують сфери $|x - x_0| = \varepsilon_1$ і $|x - x_0| = r_i$ в кільці $\varepsilon_1 < |x - x_0| < r_i$. У такому випадку для будь-якого $i \in \mathbb{N}$ будемо мати

$$\Gamma_{\mathcal{E}} > \Gamma_i\,. \tag{6.5}$$

Розглянемо параметричну сім'ю дійснозначних функцій

$$\eta_{i,\varepsilon_1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{r_i-\varepsilon_1}, & t \in (\varepsilon_1, r_i), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (\varepsilon_1, r_i)\,. \end{cases}$$

За означенням кільцевого Q-відображення відносно p-модуля

$$M_p(f\Gamma_i) \leqslant \frac{1}{(r_i-\varepsilon_1)^p} \int\limits_{\mathbb{A}_i} Q(x)\,dm(x) \leqslant \frac{1}{(r_i-\varepsilon_1)^p} \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x)\,dm(x)\,,$$

де $\mathbb{A}_i = \mathbb{A}(x_0, \varepsilon_1, r_i)$ і $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Внаслідок (6.5) та властивості мінорування

$$M_p(f\Gamma_{\mathcal{E}}) \leqslant M_p(f\Gamma_i) \leqslant \frac{1}{(r_i-\varepsilon_1)^p} \int\limits_{A(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} Q(x)\,dm(x)\,. \tag{6.6}$$

Переходимо в (6.6) до границі при $i \to \infty$ і отримуємо

$$M_p(f\Gamma_{\mathcal{E}}) \leqslant \frac{1}{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^p} \int\limits_{A(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} Q(x)\,dm(x)\,. \tag{6.7}$$

Із співвідношень (6.3), (6.4) і (6.7) випливає нерівність (6.2). Лему доведено.

Справедлива наступна лема.

Лема 6.1.2. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне кільцеве Q-відображення відносно p-модуля, де $Q \in L^1_{\rm loc}$ і $p > n-1$. Тоді для м.в. $x \in D$*

$$L(x,f) := \limsup_{y \to x} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leqslant \nu_0\, \varphi^{\frac{1-n+p}{p}}(x)\; Q^{\frac{n-1}{p}}(x)\,,$$

де функція φ визначена співвідношенням (1.99), а ν_0 — деяка константа, яка залежить тільки від n і p.

Доведення. Нехай $x \in D$. Розглянемо сферичне кільце

$$\mathbb{A}(x,\varepsilon,2\varepsilon) = \{\xi \in D : \varepsilon < |\xi - x| < 2\varepsilon\}$$

з довільним $\varepsilon > 0$ таким, що $B(x,2\varepsilon) \subset D$. Тоді $\mathcal{E} = \left(B(x,2\varepsilon), \overline{B(x,\varepsilon)}\right)$ — конденсатор в D, а $f\mathcal{E} = \left(fB(x,2\varepsilon), \overline{fB(x,\varepsilon)}\right)$ — конденсатор в D'. З леми

6.1.1 випливає оцінка

$$\mathrm{cap}_p\left(fB(x,2\varepsilon),\overline{fB(x,\varepsilon)}\right)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^p}\int\limits_{\mathbb{A}(x,\varepsilon,2\varepsilon)}Q(y)\,dm(y)\,. \tag{6.8}$$

З іншого боку, за твердженням 1.1.6, отримаємо

$$\mathrm{cap}_p\left(fB(x,2\varepsilon),\overline{fB(x,\varepsilon)}\right)\geqslant\left(\nu_1\frac{d^p\left(f\left(\overline{B(x,\varepsilon)}\right)\right)}{m^{1-n+p}\left(f\left(B(x,2\varepsilon)\right)\right)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\,, \tag{6.9}$$

де ν_1 — додатна стала, що залежить тільки n і p.

Комбінуючи (6.8) і (6.9), отримуємо

$$\frac{d\left(f\left(\overline{B(x,\varepsilon)}\right)\right)}{\varepsilon}\leqslant$$

$$\leqslant\nu_2\left(\frac{m(f\left(B(x,2\varepsilon)\right))}{m(B(x,2\varepsilon))}\right)^{\frac{1-n+p}{p}}\left(\frac{1}{m(B(x,2\varepsilon))}\int\limits_{B(x,2\varepsilon)}Q(y)\,dm(y)\right)^{\frac{n-1}{p}}\,,$$

де ν_2 — деяка додатна стала, що залежить тільки від n і p.

Отже, для м.в. $x\in D$,

$$L(x,f)\leqslant\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{d\left(f\left(\overline{B(x,\varepsilon)}\right)\right)}{\varepsilon}\leqslant\;\nu_0\,\varphi^{\frac{1-n+p}{p}}(x)\;Q^{\frac{n-1}{p}}(x)\,,$$

де ν_0 — деяка додатна стала, що залежить тільки від n і p. Лему доведено.

Наслідок 6.1.1. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, і $f:D\to\mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне кільцеве Q-відображення відносно p-модуля, де $Q\in L_{\mathrm{loc}}^1$ і $p>n-1$. Тоді для м.в. $x\in D$*

$$\|f'(x)\|\leqslant\quad\nu_0\,|J_f(x)|^{\frac{1-n+p}{p}}\,Q^{\frac{n-1}{p}}(x)\,, \tag{6.10}$$

де $f'(x)$ — матриця Якобі відображення f, $\|f'(x)\|$ — її операторна норма: $\|f'(x)\|=\sup\limits_{|h|=1}|f'(x)\cdot h|$, $J_f(x)=\det f'(x)$ — якобіан відображення f в точці x і ν_0 — деяка додатна стала, що залежить тільки від n і p.

Нехай $p > n-1$, $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$. Для відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$, що має в D частинні похідні майже скрізь, *зовнішньою* α*-дилатацією* відображення f в точці x є величина

$$K_{O,\alpha}(x,f) = \begin{cases} \frac{\|f'(x)\|^{\alpha}}{|J(x,f)|}, & \text{якщо } J(x,f) \neq 0 \\ 1, & \text{якщо } f'(x) = 0 \\ \infty, & \text{в інших точках}\,. \end{cases}$$

Із наслідка 6.1.1 безпосередньо випливають наступні оцінки для зовнішньої α-дилатації та зовнішньої дилатації.

Наслідок 6.1.2. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне кільцеве Q-відображення відносно p-модуля, для якого $Q \in L^1_{\rm loc}$, $J_f(x) \neq 0$ м.с. в D і $p > n-1$. Тоді для м.в. $x \in D$*

$$K_{O,\frac{p}{p-n+1}}(x,f) \leqslant \quad \nu_0\, Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\,,$$

де ν_0 — деяка додатна стала, що залежить тільки від n і p.

Наслідок 6.1.3. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне кільцеве Q-відображення, для якого $Q \in L^1_{\rm loc}$ і $J_f(x) \neq 0$ м.с. в D. Тоді для м.в. $x \in D$*

$$K_O(x,f) \leqslant \quad \nu_0\, Q^{n-1}(x)\,,$$

де ν_0 — деяка додатна стала, що залежить тільки від n.

Нижче наведено лему про оцінку об'ємної похідної.

Лема 6.1.3. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне кільцеве Q-відображення відносно p-модуля, де $Q \in L^1_{\rm loc}$ і $1 < p < n$. Тоді для м.в. $x \in D$*

$$\varphi(x) \leqslant \quad \nu_0\, Q^{\frac{n}{n-p}}(x)\,,$$

де функція φ визначена співвідношенням (1.99), а ν_0 — деяка додатна стала, що залежить тільки від n і p.

Доведення. Нехай $x\in D$. Розглянемо сферичне кільце

$$\mathbb{A}(x,\varepsilon,2\varepsilon)=\{\xi\in D:\,\varepsilon<|\xi-x|<2\varepsilon\}$$

з довільним $\varepsilon>0$ таким, що $B(x,2\varepsilon)\subset D$. Тоді $\mathcal{E}=\left(B(x,2\varepsilon),\overline{B(x,\varepsilon)}\right)$ — конденсатор в D, а $f\mathcal{E}=\left(fB(x,2\varepsilon),\overline{fB(x,\varepsilon)}\right)$ — конденсатор в D'. Із леми 6.1.1 випливає оцінка

$$\mathrm{cap}_p\left(fB(x,2\varepsilon),\overline{fB(x,\varepsilon)}\right)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^p}\int\limits_{\mathbb{A}(x,\varepsilon,2\varepsilon)}Q(y)\,dm(y)\,. \tag{6.11}$$

З іншого боку, за твердженням 1.1.7, див. (1.8), маємо

$$\mathrm{cap}_p\left(fB(x,2\varepsilon),\overline{fB(x,\varepsilon)}\right)\geqslant\nu_1\left[m\left(\overline{fB(x,\varepsilon)}\right)\right]^{\frac{n-p}{n}}\,, \tag{6.12}$$

де ν_1 — деяка додатна стала, що залежить тільки від n і p.

Комбінуючи (6.11) і (6.12), отримуємо

$$\left[m\left(\overline{fB(x,\varepsilon)}\right)\right]^{\frac{n-p}{n}}\leqslant\nu_2\,\frac{1}{\varepsilon^p}\int\limits_{\mathbb{A}(x,\varepsilon,2\varepsilon)}Q(y)\,dm(y)\,, \tag{6.13}$$

де ν_2 — деяка додатна стала, що залежить тільки від n і p.

Оцінку (6.13) можна переписати в наступному вигляді:

$$\frac{m\left(\overline{fB(x,\varepsilon)}\right)}{m\left(B(x,\varepsilon)\right)}\leqslant\nu_0\left(\frac{1}{m\left(B(x,2\varepsilon)\right)}\int\limits_{B(x,2\varepsilon)}Q(y)\,dm(y)\right)^{\frac{n}{n-p}}\,,$$

де ν_0 — деяка додатна стала, що залежить тільки від n і p.

Таким чином, для м.в. $x\in D$, маємо

$$\varphi(x)\leqslant\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{m\left(\overline{fB(x,\varepsilon)}\right)}{m\left(B(x,\varepsilon)\right)}\leqslant\,\nu_0\,Q^{\frac{n}{n-p}}(x)\,,$$

де ν_0 — деяка додатна стала, що залежить тільки від n і p. Лему доведено.

В наступній теоремі для відкритих дискретних кільцевих Q-відображень відносно p-модуля при $n-1<p<n$ отримані оцінки якобіана та операторної норми матриці Якобі.

Теорема 6.1.1. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне кільцеве Q-відображення відносно p-модуля, при цьому $Q \in L^1_{\rm loc}$ і $n-1 < p < n$. Тоді для майже всіх $x \in D$ справедливі оцінки*

$$|J_f(x)| \leqslant \quad \nu_0 \, Q^{\frac{n}{n-p}}(x)\,, \tag{6.14}$$

$$\|f'(x)\| \leqslant \quad \nu_0 \, Q^{\frac{1}{n-p}}(x)\,, \tag{6.15}$$

де ν_0 — деяка додатна стала, що залежить тільки від n і p.

Доведення. Оцінка (6.14) якобіана випливає з леми 6.1.3 і теореми 1.14.1 Тепер, використовуючи отриману оцінку (6.14) і наслідок 6.1.1, отримуємо оцінку (6.15) операторної норми матриці Якобі. Теорему доведено.

6.2. Оцінки внутрішніх p-дилатацій кільцевих Q-відображень відносно p-модуля

У попередньому підрозділі ми вже вели мову про оцінки зовнішньої α-дилатації $K_{O,\alpha}(x,f)$, $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$ для кільцевих Q-відображень відносно p-модуля через функцію Q. У цьому параграфі ми встановлюємо оцінки внутрішніх p-дилатацій $K_{I,p}(x,f)$ через функцію Q.

Наведемо наступне означення.

Означення 6.2.1. Нехай $p>1$. Для відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$, яке має частинні похідні м.с. внутрішня p-дилатація відображення f у точці x визначається рівністю

$$K_{I,p}(x,f) = \begin{cases} \frac{|J_f(x)|}{l^p(f'(x))}, & \text{якщо } |J_f(x)| \neq 0 \\ 1, & \text{якщо } f'(x) = 0 \\ \infty, & \text{в інших точках}\,, \end{cases}$$

де $l(f'(x)) = \min\limits_{|h|=1} |f'(x) \cdot h|$.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 6.2.1. *Нехай $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне кільцеве Q-відображення відносно p-модуля і $p > n-1$. Припустимо, що $Q \in L^1_{\rm loc}(D)$ і $J_f(x) \neq 0$ м.с. Тоді при м.в. $x \in D$ виконується оцінка*

$$K_{I,p}(x, f) \leqslant c_0 \cdot Q(x)\,,$$

де c_0 — деяка додатна стала, що залежить тільки від n і p.

Доведення. Згідно з теоремою 1.14.1 відображення f є диференційовним м.с. в D. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $\infty \notin D' = fD$. У кожній точці $x \in D$ диференційовності відображення f, де $J_f(x) \neq 0$, розглянемо конденсатор $\mathcal{E}_r = (A_r, C_r)$, де $A_r = \{y : |x-y| < 2r\}$ і $C_r = \{y : |x-y| \leqslant r\}$. Із леми 6.1.1 випливає оцінка

$$\mathrm{cap}_p\, f\mathcal{E}_r \leqslant \frac{2^n \Omega_n r^{n-p}}{m(A_r)} \int\limits_{A_r} Q(y)\, dm(y)\,. \qquad (6.16)$$

З іншого боку, за твердженням 1.1.5 маємо

$$\mathrm{cap}_p\, f\mathcal{E}_r \geqslant \frac{(\inf m_{n-1}\,\sigma)^p}{[m\,(fA_r \setminus fC_r)]^{p-1}}\,, \qquad (6.17)$$

де $\inf$ береться по усіх можливих C^{∞} — многовидах σ, що є межею $\sigma = \partial U$ обмеженої відкритої множини U, яка містить fC_r і міститься разом зі своїм замиканням $\overline{U}$ в fA_r. Поєднуючи (6.16) і (6.17), отримуємо

$$(\inf m_{n-1}\,\sigma)^p \leqslant \frac{2^n \Omega_n r^{n-p}\, [m(fA_r \setminus fC_r)]^{p-1}}{m(A_r)} \int\limits_{A_r} Q(y)\, dm(y)\,. \qquad (6.18)$$

Відзначимо, що множина $f'(x)(B(0,r))$ є певним еліпсоїдом з центром у точці $f(x)$, який має півосі $0 < a_1 r \leqslant ... \leqslant a_n r$, де $f'(x)$ — відповідне лінійне відображення. Крім того, $m\,(f'(x)(B(0,r))) = \Omega_n a_1 \ldots a_n r^n = \Omega_n |J_f(x)| r^n$, див. співвідношення (2.5) і коментарі на с. 21 п. 2.1 розд. I в [110].

Зауважимо, що оскільки точка $x \in D$ є точкою диференційовності відображення f для будь-якого $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \min\{a_1, \ldots, a_n\}$, існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при всіх $r \in (0, \delta)$ і всіх $h \in \overline{B(0,r)}$

$$|f(x+h) - f(x) - f'(x)h| < r\varepsilon\,.$$

Звідси випливає, що множина fC_r містить інший еліпсоїд B з центром у точці $f(x)$, орієнтований так само, як і еліпсоїд $f'(x)(B(0,r))$, і з довжиною півосей $r(a_1-\varepsilon),\ldots,r(a_n-\varepsilon)$. Розмістимо еліпсоїди $f'(x)(B(0,r))$ і B так, щоб їх центри співпали з початком координат, а головні напрями з координатними осями $e_1,...,e_n$. Тоді площа поверхні fC_r має наступну оцінку знизу:

$$m_{n-1}\partial fC_r \geqslant 2m_{n-1}\mathrm{Pr}_1(B)\,,$$

де $\mathrm{Pr}_1(\cdot)$ позначає проєкцію на гіперплощину, що є ортогональною до вектора e_1. Зі сказанного вище випливає, що

$$m_{n-1}\partial f(C_r) \geqslant 2\Omega_{n-1}\cdot(a_2-\varepsilon)\ldots(a_n-\varepsilon)r^{\,n-1}=$$
$$=2\Omega_{n-1}\cdot\frac{|J_f(x)|}{l\,(f'(x))}r^{\,n-1}+\alpha(r,\varepsilon)\,, \tag{6.19}$$

де $\alpha(r,\varepsilon)=2\Omega_{n-1}\cdot(a_2-\varepsilon)\ldots(a_n-\varepsilon)r^{\,n-1}-2\Omega_{n-1}\cdot a_2\ldots a_n r^{\,n-1}$. Отже, із (6.18) і (6.19) випливає, що

$$\left[2\Omega_{n-1}\cdot\frac{|J_f(x)|}{l\,(f'(x))}r^{n-1}\right]^p \leqslant [m_{n-1}\partial f(C_r)-\alpha(r,\varepsilon)]^p\leqslant \tag{6.20}$$

$$\leqslant\left(\left(\frac{2^{\,n}\Omega_n r^{n-p}\,[m\,(fA_r\setminus fC_r)]^{p-1}}{m(A_r)}\int\limits_{A_r}Q(y)\,dm(y)\right)^{1/p}-\alpha(r,\varepsilon)\right)^p.$$

Поділивши нерівність (6.20) на $r^{\,p(n-1)}$ та врахувавши довільність $\varepsilon>0$, спрямуємо r до 0, і застосуємо теорему Лебега про диференційовність неозначеного інтеграла, див. теорему 6.3, розд. IV в [131]. Будемо мати

$$\left[\frac{|J_f(x)|}{l\,(f'(x))}\right]^p\leqslant|J_f(x)|^{p-1}c_0\cdot Q(x)$$

для м.в. $x\in D$. Отже, оскільки за умовою $J_f(x)\neq 0$ м.в., то звідси випливає, що

$$K_{I,p}(x,f)\quad=\quad\frac{|J_f(x)|}{l^p\,(f'(x))}\leqslant c_0\cdot Q(x)$$

для м.в. $x\in D$. Теорему доведено.

При $p=n$ із теореми 6.2.1 безпосередньо випливає наступне твердження.

Наслідок 6.2.1. *Нехай $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне кільцеве Q-відображення. Припустимо, що $Q \in L^1_{\rm loc}(D)$ і $J_f(x) \neq 0$ м.в. Тоді для м.в. $x \in D$ виконуєтьcя оцінка*

$$K_I(x,f) \leqslant c_0 \cdot Q(x)\,,$$

де c_0 — деяка додатна стала, що зележить тільки від n.

Наведемо наступне означення.

Означення 6.2.2. Лінійна дилатація відображення у точці визначається як

$$H(x,f) = \sqrt[n]{K_I(x,f)K_O(x,f)}.$$

Зауваження 6.2.1. Зауважимо, що

$$1 \leqslant H(x,f) \leqslant K_I(x,f)\,.$$

Тоді за наслідком 6.2.1 маємо $Q(x) \geqslant c_0^{-1}$ м.с.

Враховуючи означення 6.2.2, із наслідка 6.2.1 отримуємо наступне твердження.

Наслідок 6.2.2. *Нехай $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне кільцеве Q-відображення. Припустимо, що $Q \in L^1_{\rm loc}(D)$ і $J_f(x) \neq 0$ м.с. Тоді при майже всіх $x \in D$*

$$H(x,f) \leqslant c_0 \cdot Q(x)\,,$$

де c_0 — деяка додатна стала, що зележить тільки від від n.

Із теореми 1.14.1 і наслідка 6.2.2 випливають наступні твердження.

Наслідок 6.2.3. *Нехай $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне кільцеве Q-відображення відносно p-модуля при $p > n-1$. Припустимо, що $Q \in L^1_{\rm loc}(D)$ і $J_f(x) \neq 0$ м.с. Тоді $K_{I,p}(x,f) \in L^1_{\rm loc}(D)$.*

Наслідок 6.2.4. *Нехай $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне кільцеве Q-відображення. Припустимо, що $Q \in L^1_{\rm loc}(D)$ і $J_f(x) \neq 0$ м.с. Тоді $H(x,f) \in L^1_{\rm loc}(D)$ і $K_I(x,f) \in L^1_{\rm loc}(D)$.*

6.3. Метричні властивості кільцевих Q-відображень

У цьому підрозділі вивчаються метричні властивості кільцевих Q-відображень відносно p-модуля. Отримано достатні умови їх скінченної ліпшицевості, локальної гельдеровості та логарифмічної гельдеровості.

Нижче наведено теорему про достатню умову скінченної ліпшицевості у точці для кільцевих Q-відображень відносно p-модуля при $n-1<p<n$.

Теорема 6.3.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$. Припустимо, що $f : D \to D'$ — відкрите дискретне кільцеве Q-відображення відносно p-модуля і виконується умова*

$$Q_0=\limsup_{\varepsilon\to 0} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\,dm(x)<\infty\,. \qquad (6.21)$$

Тоді при $n-1<p<n$ справедлива оцінка

$$\limsup_{x\to x_0}\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|}\leqslant \nu_0\,Q_0^{\frac{1}{n-p}}, \qquad (6.22)$$

де ν_0 — деяка додатна стала, що зележить тільки від n і p.

Доведення. Нехай $x_0\in D$. Розглянемо сферичне кільце $\mathbb{A}=\mathbb{A}(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ при $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<\operatorname{dist}(x_0,\partial D)$. Згідно з лемою 6.1.1 виконується оцінка

$$\operatorname{cap_p}\,\left(fB(x,\varepsilon_2),\overline{fB(x,\varepsilon_1)}\right)\leqslant\frac{1}{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^p}\int\limits_{\mathbb{A}(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} Q(x)\;dm(x)\,.$$

Далі за схемою доведення теореми 2.7.1 отримуємо оцінку (6.22). Теорему доведено.

Із теореми 6.3.1 безпосередньо випливають наступні твердження.

Наслідок 6.3.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$. Припустимо, що $f : D \to D'$ — відкрите дискретне кільцеве Q-відображення відносно p-модуля при $n-1<p<n$ та виконується умова (6.21) для всіх $x_0\in D$. Тоді відображення f є скінченно ліпшицевим.*

Зауваження 6.3.1. В силу леми 10.6 в [342] скінченно ліпшицеві відображення володіють N-властивістю відносно хаусдорфових мір і, таким чином, є абсолютно неперервні на кривих та поверхнях.

Наслідок 6.3.2. *Зокрема, якщо для деякого числа* $C_{x_0} > 0$ *виконується умова*

$$q_{x_0}(t) \;=\; \frac{1}{\omega_{n-1}t^{n-1}} \int\limits_{S(x_0,t)} Q(x)\,d\mathcal{A} \;\leqslant\; C_{x_0}$$

для м.в. $t \in (0, \varepsilon_0)$, *де* $\varepsilon_0 \in (0, d_0)$ *і* $d_0 = \frac{1}{4}\,\mathrm{dist}(x_0, \partial D)$, *то*

$$L(x_0, f) = \limsup_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leqslant \nu_0\, C_{x_0}^{\frac{1}{n-p}}\,,$$

де ν_0 *— деяка додатна стала, що зележить тільки від від* n *і* p.

Наслідок 6.3.3. *Якщо для деякого числа* $K > 0$ *виконується умова* $Q(x) \leqslant K$ *для м.в.* $x \in D$, *то для всіх* $x_0 \in D$

$$L(x_0, f) = \limsup_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leqslant \nu_0\, K^{\frac{1}{n-p}},$$

де ν_0 *— деяка додатна стала, що зележить тільки від* n *і* p.

Зауваження 6.3.2. Приклад 2.7.1 показує, що у випадку, коли умова (6.21) не виконується, Q-відображення відносно p-модуля може не бути скінченно ліпшицевим.

В наступній теоремі встановлено достатню умову гельдеровості кільцевих Q-відображень відносно p-модуля при $n-1 < p < n$.

Теорема 6.3.2. *Нехай* D *і* D' *— обмежені області в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. *Припустимо, що* $f : D \to D'$ *— відкрите дискретне кільцеве* Q*-відображення відносно* p*-модуля,* $n-1 < p < n$, $\alpha > \frac{n}{n-p}$ *і* $Q \in L^{\alpha}_{\rm loc}(D)$. *Тоді*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \nu_0 \|Q\|_{\alpha}^{\frac{1}{n-p}} |x-y|^{1-\frac{n}{\alpha(n-p)}}, \tag{6.23}$$

для будь-якої пари точок $x, y \in F$, *для яких* $|x-y| < \delta_0$, *де* F *— довільний компакт в* D, $\delta_0 = \frac{1}{4}\mathrm{dist}(F, \partial D)$ *і*

$$\|Q\|_{\alpha} = \left(\int\limits_{D} Q^{\alpha}(x)\,dm(x) \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

— норма у просторі $L_\alpha(D)$, ν_0 *— деяка додатна стала, що зележить тільки від* n , p *і* α .

Доведення. Нехай $x \in F$. Розглянемо сферичне кільце $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ при $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \delta_0$. Згідно з лемою 2.7.1 виконується оцінка

$$\mathrm{cap_p}\ \left(fB(x,\varepsilon_2), \overline{fB(x,\varepsilon_1)}\right) \leqslant \frac{1}{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^p} \int\limits_{\mathbb{A}(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} Q(x)\ dm(x)\,.$$

Далі за схемою доведення теореми 2.8.1 отримуємо оцінку (6.23). Теорему доведено.

В наступній теоремі встановлено достатню умову логарифмічної гельдеровості кільцевих Q-відображень відносно p-модуля при $n-1<p<n$.

Теорема 6.3.3. *Нехай* D *і* D' *— обмежені області в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. *Припустимо, що* $f: D \to D'$ *— відкрите дискретне кільцеве* Q *-відображення відносно* p *-модуля в точці* $x_0 \in D$ *і для деяких чисел* $C_{x_0} > 0$, $\kappa \in [0, p)$ *виконуєтьcя умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{Q(x)\, dm(x)}{|x-x_0|^p} \leqslant C_{x_0}\, \ln^{\kappa}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) \tag{6.24}$$

для будь-яких $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \mathrm{dist}\,(x_0, \partial D)$. *Тоді при* $n-1<p<n$ *справедлива оцінка*

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant \nu_0\, C_{x_0}^{\frac{1}{n-p}}\ \ln^{-\frac{p-\kappa}{n-p}} \frac{1}{|x-x_0|}\,, \tag{6.25}$$

для всіх $x \in B(x_0, \delta_0)$, *де* $\delta_0 \leqslant \min\{1, \mathrm{dist}^4\,(x_0, \partial D)\}$ *і* ν_0 *— деяка додатна стала, що залежить тільки від* n , p *і* κ .

Доведення. Розглянемо сферичне кільце

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \{x:\ \varepsilon_1 < |x_0 - x| < \varepsilon_2\}\,,\ \ x_0 \in D,$$

з довільними ε_1 і ε_2 такими, що $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \delta_0$. Тоді $\mathcal{E} = \left(B\,(x_0,\varepsilon_2)\,, \overline{B\,(x_0,\varepsilon_1)}\right)$ — конденсатор в D, а $f\mathcal{E} = \left(fB\,(x_0,\varepsilon_2)\,, f\overline{B\,(x_0,\varepsilon_1)}\right)$ – конденсатор в D'. Нехай $\Gamma_{\mathcal{E}}$ – сім'я кривих із твердження 1.14.3 і $\Gamma_{f\mathcal{E}}$ — аналогічна сім'я в образі. Згідно з цим твердженням маємо рівність

$$\mathrm{cap}_p\ \left(fB\,(x_0,\varepsilon_2)\,, f\overline{B(x_0,\varepsilon_1)}\right) = M_p\,(\Gamma_{f\mathcal{E}})\,. \tag{6.26}$$

За твердженням 1.14.2 кожна крива $\gamma' \in \Gamma_{f\mathcal{E}}$ має максимальне підняття з початком у деякій точці $x' \in \overline{B(x_0, \varepsilon_1)}$. Нехай Γ^* — сім'я максимальних піднять $\Gamma_{f\mathcal{E}}$ з початком у $\overline{B\left(x_0, \varepsilon_1\right)}$.

Покажемо, що $\Gamma^* \subset \Gamma_{\mathcal{E}}$. Припустимо супротивне, тобто що існує крива $\beta : [a,\, b) \to \mathbb{R}^n$ сім'ї $\Gamma_{f\mathcal{E}}$, для якої відповідне максимальне підняття $\alpha : [a,\, c) \to B(x_0, \varepsilon_2)$ лежить у деякому компакті $\mathcal{K}$ у середині $B(x_0, \varepsilon_2)$. Отже, його замикання $\overline{\alpha}$ є компактом в $B(x_0, \varepsilon_2)$. Зауважимо, що $c \neq b$, оскільки в протилежному випадку $\overline{\beta}$ – компакт у $fB(x_0, \varepsilon_2)$, що суперечить умові $\beta \in \Gamma_{f\mathcal{E}}$. Розглянемо множину

$$G = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \lim_{k \to \infty} \alpha(t_k) \right\}, \qquad t_k \in [a,\, c)\,,\ \lim_{k \to \infty} t_k = c.$$

Відзначимо, що, переходячи до підпослідовностей, можна обмежуватися монотонними послідовностями t_k. Для $x \in G$ в силу неперервності відображення f будемо мати $f\left(\alpha(t_k)\right) \to f(x)$ при $k \to \infty$, де $t_k \in [a,\, c)$, $t_k \to c$ при $k \to \infty$. Однак, $f\left(\alpha(t_k)\right) = \beta(t_k) \to \beta(c)$ при $k \to \infty$. Звідси робимо висновок, що f є сталою на G в $B(x_0, \varepsilon_2)$. З іншого боку, згідно з умовою Кантора в компакті $\overline{\alpha}$ (див. п. 3.6 розд. I в [449])

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha\left([t_k,\, c)\right)} = \limsup_{k \to \infty} \alpha\left([t_k,\, c)\right) = \liminf_{k \to \infty} \alpha\left([t_k,\, c)\right) \neq \varnothing$$

внаслідок монотонності відносно послідовності зв'язних множин $\alpha\left([t_k,\, c)\right)$ і, таким чином, G є зв'язною згідно з розд. I (9.12) в [449]. Таким чином, внаслідок дискретності відображення f множина G не може складатися більш ніж з однієї точки, і крива $\alpha : [a,\, c) \to B(x_0, \varepsilon_2)$ продовжується до замкненої кривої $\alpha : [a,\, c] \to \mathcal{K} \subset B(x_0, \varepsilon_2)$, причому $f\left(\alpha(c)\right) = \beta(c)$. Знову за наслідком 3.3 розд. II в [382] (див. також твердження 1.14.2) можна побудувати максимальне підняття α' кривої $\beta|_{[c,\, b)}$ з початком у точці $\alpha(c)$. Об'єднавши підняття α і α', отримаємо нове підняття α'' кривої β, яке є визначеним на $[a, c')$, $c' \in (c,\, b)$, що суперечить максимальності підняття α. Отже, $\Gamma^* \subset \Gamma_{\mathcal{E}}$. Зауважимо, що $\Gamma_{f\mathcal{E}} > f\Gamma^*$, і, отже,

$$M_p\left(\Gamma_{f\mathcal{E}}\right) \leqslant M_p\left(f\Gamma^*\right) \leqslant M_p\left(f\Gamma_{\mathcal{E}}\right)\,.$$

Розглянемо довільну послідовність чисел $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\varepsilon_1 < r_i < \varepsilon_2$, таку, що $r_i \to \varepsilon_2 - 0$. Позначимо через Γ_i сім'ю кривих, що з'єднують сфери $S(x_0, \varepsilon_1)$ і $S(x_0, r_i)$ в кільці $\mathbb{A}(x_0, \varepsilon_1, r_i)$. У такому випадку для будь-якого $i \in \mathbb{N}$ будемо мати

$$\Gamma_{\mathcal{E}} > \Gamma_i\,. \tag{6.27}$$

Розглянемо параметричну сім'ю дійснозначних функцій

$$\eta_{i,\varepsilon_1}(t) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{t\ln\left(\frac{r_i}{\varepsilon_1}\right)} & t \in (\varepsilon_1, r_i), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (\varepsilon_1, r_i)\,. \end{cases}$$

За означенням кільцевого Q-відображення відносно p-модуля і внаслідок (6.27) маємо оцінку

$$M_p(f\Gamma_{\mathcal{E}}) \leqslant M_p(f\Gamma_i) \leqslant \int\limits_{\mathbb{A}(x_0,\varepsilon_1,r_i)} \frac{Q(x)\,dm(x)}{|x-x_0|^p \ln^p\left(\frac{r_i}{\varepsilon_1}\right)}\,.$$

Звідси та з умови (6.24) випливає оцінка

$$M_p(f\Gamma_{\mathcal{E}}) \leqslant C_{x_0} \cdot \ln^{\kappa-p}\left(\frac{r_i}{\varepsilon_1}\right)\,. \tag{6.28}$$

Переходячи в нерівності (6.28) до границі при $i \to \infty$, отримуємо

$$M_p(f\Gamma_{\mathcal{E}}) \leqslant C_{x_0} \cdot \ln^{\kappa-p}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\,. \tag{6.29}$$

Комбінуючи (6.26) і (6.29), отримуємо нерівність

$$\mathrm{cap}_p\ \left(fB(x_0,\varepsilon_2), f\overline{B(x_0,\varepsilon_1)}\right) \leqslant C_{x_0}\ \ln^{\kappa-p}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\,. \tag{6.30}$$

При $\varepsilon_1 = \varepsilon = |x-x_0|$ і $\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon}$ з нерівності (6.30) випливає наступна оцінка

$$\mathrm{cap}_p\ \left(fB(x_0,\sqrt{\varepsilon}), f\overline{B(x_0,\varepsilon)}\right) \leqslant 2^{p-\kappa}\, C_{x_0}\ \ln^{\kappa-p}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\,.$$

З іншого боку, за твердженням 1.1.6, маємо

$$\mathrm{cap}_p\left(fB(x_0,\sqrt{\varepsilon}), f\overline{B(x_0,\varepsilon)}\right) \geqslant \nu_1\ \left(\frac{d^p\left(\overline{fB(x_0,\varepsilon)}\right)}{m^{1-n+p}\left(fB(x_0,\sqrt{\varepsilon})\right)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\,, \tag{6.31}$$

де ν_1 — деяка додатна стала, що залежить тільки від n і p.

Із (2.105) і (6.31) випливає оцінка

$$d\left(\overline{fB(x_0,\varepsilon)}\right) \leqslant \nu_2\, C_{x_0}^{\frac{n-1}{p}}\ \ln^{-\frac{(n-1)(p-\kappa)}{p}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) m^{1-n+p}(fB(x_0,\sqrt{\varepsilon}))\,, \tag{6.32}$$

де ν_2 — додатна стала, що залежить тільки від n, p і κ.

Далі, покладаючи в нерівності (6.30) $\varepsilon_1 = \sqrt[4]{\varepsilon}$ і $\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon}$, отримуємо

$$\mathrm{cap}_p\left(fB(x_0,\sqrt[4]{\varepsilon}), f\overline{B(x_0,\sqrt{\varepsilon})}\right) \leqslant 4^{p-\kappa}\, C_{x_0}\ \ln^{\kappa-p}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\,. \tag{6.33}$$

З іншого боку, внаслідок нерівності (1.8), див. твердження 1.1.7, маємо оцінку

$$\mathrm{cap}_p\left(fB(x_0,\sqrt[4]{\varepsilon}), f\overline{B(x_0,\sqrt{\varepsilon})}\right) \geqslant \nu_3\ \left(m\left(f\overline{B(x_0,\sqrt{\varepsilon})}\right)\right)^{\frac{n-p}{n}}\,, \tag{6.34}$$

де ν_3 — додатна стала, що залежить тільки від n і p.

Комбінуючи (6.33) і (6.34), робимо висновок про те, що

$$m\left(f\overline{B(x_0,\sqrt{\varepsilon})}\right) \leqslant \nu_4\, C_{x_0}^{\frac{n}{n-p}}\ \ln^{-\frac{(p-\kappa)n}{n-p}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\,, \tag{6.35}$$

де ν_4 — додатна стала, що залежить тільки від n, p і κ.

Нарешті, комбінуючи (6.32) і (6.35), отримаємо

$$d\left(\overline{fB(x_0,\varepsilon)}\right) \leqslant\ \nu_0\, C_{x_0}^{\frac{1}{n-p}}\ \ln^{-\frac{p-\kappa}{n-p}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\,,$$

де ν_0 — додатна стала, що залежить тільки від n, p і κ.

Звідси та з очевидної нерівності $d\left(\overline{fB(x_0,\varepsilon)}\right) \geqslant |f(x)-f(x_0)|$ випливає оцінка спотворення відстаней (6.25). Теорему доведено.

Наведемо деякі наслідки з теореми 6.3.3.

Наслідок 6.3.4. *Нехай D і D' — обмежені області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Припустимо, що $f : D \to D'$ — відкрите дискретне кільцеве Q-відображення відносно p-модуля в точці $x_0 \in D$ при $n-1 < p < n$ і $Q \in L_{\frac{n}{n-p}}(B(x_0,\delta_0))$, де $\delta_0 \in \left(0,\, \min\{1, \mathrm{dist}^4(x_0,\partial D)\}\right)$. Тоді*

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant \nu_0 \|Q\|_{\frac{n}{n-p}}^{\frac{1}{n-p}}\ \ln^{-\frac{p(n-1)}{n(n-p)}}\frac{1}{|x-x_0|}$$

для всіх $x \in B(x_0, \delta_0)$, *де* $\|Q\|_{\frac{n}{n-p}} = \left(\int\limits_{B(x_0,\delta_0)} Q^{\frac{n}{n-p}}(x)\, dm(x)\right)^{\frac{n-p}{n}}$ *— норма у просторі* $L_{\frac{n}{n-p}}(B(x_0, \delta_0))$ *і* ν_0 *— додатна стала, що залежить тільки від* n *і* p.

Наслідок 6.3.5. *Нехай* D *і* D' *— обмежені області в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. *Припустимо, що* $f : D \to D'$ *— відкрите дискретне кільцеве* Q*-відображення відносно* p*-модуля в точці* $x_0 \in D$ *і для деякого числа* $K_{x_0} > 0$ *виконується умова*

$$q_{x_0}(t) \leqslant K_{x_0}\, t^{p-n}$$

для майже всіх $t \in (0, \delta_0)$, *де* $\delta_0 \in \big(0, \min\{1, \mathrm{dist}^4(x_0, \partial D)\}\big)$. *Тоді при* $n - 1 < p < n$ *виконується оцінка*

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \nu_0\, K_{x_0}^{\frac{1}{n-p}}\, \ln^{-\frac{p-1}{n-p}} \frac{1}{|x - x_0|}$$

для всіх $x \in B(x_0, \delta_0)$, *де* ν_0 *— додатна стала, що залежить тільки від* n *і* p.

Наслідок 6.3.6. *Нехай* D *і* D' *— обмежені області в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. *Припустимо, що* $f : D \to D'$ *— відкрите дискретне кільцеве* Q*-відображення відносно* p*-модуля в точці* $x_0 \in D$ *і для деякого числа* $C_{x_0} > 0$ *виконується умова*

$$\int\limits_{B(x_0,\delta_0)} \frac{Q(x)\, dm(x)}{|x - x_0|^p} \leqslant C_{x_0} < \infty$$

для деякого $\delta_0 \in \big(0, \min\{1, \mathrm{dist}^4(x_0, \partial D)\}\big)$. *Тоді при* $n-1 < p < n$ *виконується оцінка*

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \nu_0\ {}_{x_0}^{\frac{1}{n-p}}\, \ln^{-\frac{p}{n-p}} \frac{1}{|x - x_0|}$$

для всіх $x \in B(x_0, \delta_0)$, *де* ν_0 *— додатна стала, що залежить тільки від* n *і* p.

6.4. Q-відображення відносно p-модуля

У цьому підрозділі вивчаються властивості Q-відображень відносно p-модуля.

Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n\,, n\geqslant 2$. Припустимо, що $p>1$ і $Q:D\to[0\,,\infty]$ — вимірна за Лебегом функція.

Означення 6.4.1. Відображення $f\,:\,D\,\to\,D'$ будемо називати *Q-відображенням відносно p-модуля*, якщо

$$M_p(f\Gamma)\leqslant\int\limits_{D}Q(x)\,\rho^p(x)\,dm(x)$$

для будь-якої сім'ї Γ кривих в D і будь-якої допустимої функції ρ для Γ.

Наведемо деякі важливі властивості Q-відображень відносно p-модуля при $p>n-1$.

Теорема 6.4.1. *Нехай $f\,:\,D\,\to\,\mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне Q-відображення відносно p-модуля при $p>n-1$ і $Q\in L^1_{\rm loc}$. Тоді $f\in ACL$.*

Наслідок 6.4.1. *Нехай $f\,:\,D\,\to\,\mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне Q-відображення відносно p-модуля при $p>n-1$ і $Q\in L^1_{\rm loc}$. Тоді $f\in W^{1,1}_{\rm loc}$.*

Наслідок 6.4.2. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, і $f:D\to\mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне Q-відображення відносно p-модуля з $Q\in L^1_{\rm loc}$, $p>n-1$. Тоді для м.в. $x\in D$ виконується оцінка (6.10).*

Теорема 6.4.2. *Нехай $f\,:\,D\,\to\,\mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне Q-відображення відносно p-модуля при $p\,>\,n-1$ і $Q\,\in\,L^1_{\rm loc}$. Тоді f є диференційовним майже всюди в D.*

Теореми 6.4.1, 6.4.2 та наслідки 6.4.1, 6.4.2 доведені у роботі [412].

В наступній теоремі наведено достатні умови належності Q-відображень відносно p-модуля до класів Соболєва.

Теорема 6.4.3. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, і $f:D\to\mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне Q-відображення відносно p-модуля, при цьому $n-1<p<n$ і $Q\in L^{\frac{\alpha}{n-p}}_{\rm loc}$, де $\alpha>1$. Тоді f належить до класу Соболєва $W^{1,\alpha}_{\rm loc}$.*

Доведення. За теоремою 6.1.1 для м.в. $x \in D$ справедлива нерівність (6.15). Тоді для області $V \subset D$ такої, що $\overline{V} \subset D$, маємо

$$\int\limits_V \|f'(x)\|^{\alpha}\, dm(x) \leqslant \ \nu_0^{\alpha} \int\limits_V Q^{\frac{\alpha}{n-p}}(x)\, dm(x) < \infty.$$

Тепер, застосовуючи спочатку теорему 6.4.1, а потім твердження 1.3.1, приходимо до висновку теореми. Теорему доведено.

Оскільки відображення f класу Соболєва $W^{1,n}_{\rm loc}$ володіє N-властивістю Лузіна, тобто $m(fE) = 0$, якщо $m(E) = 0$ (див. наслідок B в [331]), то з теореми 6.4.3 випливає наступне твердження.

Наслідок 6.4.3. *Нехай $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне Q-відображення відносно p-модуля, при цьому $n-1 < p < n$ і $Q \in L^{\frac{n}{n-p}}_{\rm loc}$. Тоді f володіє N-властивістю Лузіна.*

Наведемо деякі оцінки про спотворення міри для гомеоморфних Q-відображень відносно p-модуля.

Наслідок 6.4.4. *Нехай $f : D \to \mathbb{R}^n$ — Q-гомеоморфвзм відносно p-модуля, при цьому $p \in (n-1, n)$ і $Q \in L^{\frac{n}{n-p}}_{\rm loc}$. Тоді для довільної вимірної множини $E \subset D$ справедлива оцінка*

$$m(fE) \leqslant \nu_0 \int\limits_E Q^{\frac{n}{n-p}}(x)\, dm(x)\,, \tag{6.36}$$

де ν_0 — додатна стала, що залежить тільки від n і p.

Доведення. Оскільки f володіє N-властивістю Лузіна та є диференційовним майже всюди, то за теоремою 2.2 в [110] маємо рівність

$$m(fE) = \int\limits_E J_f(x) dm(x).$$

для довільної вимірної множини $E \subset D$. Тоді оцінка 6.36 випливає з теореми 6.1.1, див. нерівність (6.14).

Наслідок 6.4.5. *Якщо $Q(x) \leqslant K$ для м.в. $x \in D$, $K > 0$, то для довільної вимірної множини $E \subset D$ справедлива оцінка*

$$m(fE) \leqslant \nu_0 K^{\frac{n}{n-p}} m(E)\,,$$

де ν_0 *— додатна стала, що залежить тільки від* n *і* p.

Нижче мова піде про N^{-1}-властивість Q-відображень відносно p-модуля при $p \geqslant n$. Добре відомо, що довільне непостійне відображення з обмеженим спотворенням володіє як N-властивістю, що доведено Ю.Г. Решетняком (див. теорему 6.2, розд. II [110]), так і N^{-1}-властивістю, що доведено у роботі Б. Боярського і Т. Іванця (див. теорему 8.1 [221]). Нижче ми покажемо, що N^{-1}-властивістю володіють також відкриті дискретні Q-відображення відносно p-модуля при $p \geqslant n$ і $Q \in L^1_{\rm loc}$.

Справедливе наступне твердження, див. теорему 1.2 в [312].

Твердження 6.4.1. *Нехай* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *— відображення зі скінченним спотворенням таке, що* $K \in L^{n'-1}_{\rm loc}$, *де* $n' - 1 = \frac{1}{n-1}$. *Якщо функція кратності* $N(y, fD)$ *істотно обмежена сталою* N *в* $\mathbb{R}^n$, *то* f *володіє* N^{-1}-*властивістю.*

В наступній теоремі встановлено достатні умови того, щоб Q-відображення відносно p-модуля володіло N^{-1}-властивістю Лузіна.

Теорема 6.4.4. *Нехай* D *— область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, *і* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *— відкрите дискретне* Q-*відображення відносно* p-*модуля, при цьому* $p \geqslant n$ *і* $Q \in L^1_{\rm loc}$. *Тоді* f *володіє* N^{-1}-*властивістю Лузіна, тобто* $m\left(f^{-1}E\right) = 0$, *якщо* $m(E) = 0$.

Доведення. Оскільки f — дискретне, можна вважати, що $\infty \notin fD$. Тоді за наслідками 6.4.1 і 6.4.2 відображення f є відображенням зі скінченним спотворенням. Зауважимо, що достатньо встановити N^{-1}-властивість для звуження відображення $f|_G$ на довільну область G таку, що $\overline{G} \subset D$.

Зауважимо, що в таких областях $N(y, f, G) \leqslant N$ для всіх $y \in fG$, див. лему 2.12, п. 3 в [339]. В такому випадку згідно твердження 6.4.1 достатньо показати, що $K \in L^{n'-1}_{\rm loc}$, де $1/n' + 1/n = 1$, $n' = n/(n-1)$ і $n' - 1 = \frac{1}{n-1}$.

Із наслідка 6.1.2 випливає оцінка

$$\|f'(x)\|^n \leqslant \quad K(x)\,|J_f(x)| \tag{6.37}$$

для м.в. $x \in D$, де $K(x) = \nu_1 \, |J_f(x)|^{\frac{(n-1)(p-n)}{p}} \, Q^{\frac{n(n-1)}{p}}(x)$ і ν_1 — додатна стала, що залежить тільки від n і p.

Для області $V \subset D$ такої, що $\overline{V} \subset D$, із (6.37) отримуємо

$$\int\limits_V K^{n'-1}(x)\, dm(x) \leqslant \nu_2 \int\limits_V \, |J_f(x)|^{1-\frac{n}{p}} \, Q^{\frac{n}{p}}(x)\, dm(x)\,,$$

де ν_2 — додатна стала, що залежить тільки від n і p.

Далі, застосовуючи нерівність Гельдера з показниками $q = \frac{p}{n}$ і $q' = \frac{n-p}{n}$ та враховуючи, що $Q \in L^1_{\rm loc}$, отримуємо

$$\int\limits_V K^{n'-1}(x)\, dm(x) \leqslant \nu_2 \left(\int\limits_V \, |J_f(x)|\, dm(x)\right)^{1-\frac{n}{p}} \left(\int\limits_V Q(x)\, dm(x)\right)^{\frac{n}{p}} < \infty.$$

Теорему доведено.

Наслідок 6.4.6. (Аналог теореми Боярського–Іванця про N^{-1}-властивість.) *Нехай $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — відкрите дискретне Q-відображення, при цьому $Q \in L^1_{\rm loc}$. Тоді f володіє N^{-1}-властивістю.*

Відомо, що N^{-1}-властивість еквівалентна невиродженості якобіана для майже всіх точок області, див., напр., теорему 1 в [107]. Тому із наслідка 6.4.6 отримуємо ще один важливий результат.

Наслідок 6.4.7. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і нехай $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне Q-відображення відносно p-модуля, при цьому $p \geqslant n$ і $Q \in L^1_{\rm loc}$. Тоді $J_f(x) \neq 0$ м.в. в D.*

Наведемо твердження, що містять оцінку α-зовнішньої дилатації довільного відкритого дискретного Q-відображення відносно p-модуля.

Оскільки Q-відображення відносно p-модуля є також кільцевим Q-відображенням відносно p-модуля, то наступне твердження випливає із наслідка 6.1.2.

Наслідок 6.4.8. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне Q-відображення відносно p-модуля, для якого $Q \in L^1_{\rm loc}$,*

$p>n-1$ і $J_f(x)\ne 0$ м.с. в D. Тоді для м.в. $x\in D$ виконується нерівність

$$K_{O,\frac{p}{p-n+1}}(x,f)\leqslant\ \ \nu_0\, Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\,,$$

де ν_0 — деяка додатна стала, що залежить тільки від n і p.

Наступне твердження випливає із наслідків 6.4.7 і 6.4.8.

Наслідок 6.4.9. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, і $f:D\to\mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне Q-відображення відносно p-модуля, для якого $Q\in L^1_{\rm loc}$ і $p\geqslant n$. Тоді для м.в. $x\in D$ виконується нерівність (6.4.8).*

Оскільки Q-відображення є також кільцевим Q-відображенням, то наступне твердження випливає із наслідка 6.1.3.

Наслідок 6.4.10. *Нехай $f:D\to\mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне Q-відображення таке, що $Q\in L^1_{\rm loc}$. Тоді для майже всіх $x\in D$ виконується нерівність*

$$K_O(x,f)\leqslant c_0\, Q^{n-1}(x)\,,$$

де c_0 — деяка додатна стала, що залежить тільки від n.

Позначимо через B_f множину всіх точок розгалуження Q-відображення f (див. означення 1.13.8 і 1.13.9). Справедливе наступне твердження, див. лему 2.14 в [339].

Твердження 6.4.2. *Нехай $f:D\to\mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне відображення і $x_0\in D$ є точкою його диференційовності. Тоді, якщо $x_0\in B_f$, то $J_f(x_0)=0$.*

Із теореми 6.4.2, наслідка 6.4.7 та твердження 6.4.2 випливає наступне твердження.

Наслідок 6.4.11. *Нехай $f:D\to\mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне Q-відображення відносно p-модуля, для якого $Q\in L^1_{\rm loc}$ і $p\geqslant n$. Тоді $m(B_f)=0$.*

6.5. Оцінки внутрішніх p-дилатацій Q-відображень відносно p-модуля

У цьому підрозділі встановлюються оцінки p-внутрішніх дилатацій відносно p-модуля.

Сформулюємо і доведемо основне твердження даного розділу.

Теорема 6.5.1. *Нехай $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне Q-відображення відносно p-модуля і $p > n-1$. Припустимо, що $Q \in L^1_{\rm loc}(D)$ і $J_f(x) \neq 0$ м.в. в D. Тоді для майже всіх $x \in D$ виконується оцінка*

$$K_{I,p}(x, f) \leqslant Q(x)\,. \tag{6.38}$$

Доведення. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $\infty \notin D' = fD$. За теоремою 6.4.2 відображення f є диференційовним майже скрізь. Крім того, за умовою теореми $J_f(x) \neq 0$ для майже всіх $x \in D$. Позначимо через $\Phi(A)$ функцію множини $A \subset D$, визначену наступним чином:

$$\Phi(A) = \int\limits_A Q(x)dm(x)\,.$$

Оскільки за умовою $Q \in L^1_{\rm loc}(D)$, то за теоремою Лебега функція Φ узагальнено диференційовна у майже кожній точці $x_0 \in D$ (див., напр., теорему 5.4 розд. IV в [131]), причому похідна $D\Phi(x) = Q(x)$ для майже всіх $x \in D$ (див. теорему 6.3 в [131]).

Позначимо через E_1 множину всіх $x \in D$, де Φ узагальнено диференційовна і $D\Phi(x) = Q(x)$, а через E_2 — множину всіх $x \in D$, де саме відображення f є диференційованим і невиродженим. Зауважимо, що для справедливості твердження теореми достатньо показати, що (6.38) виконується для всіх $x \in E_0 = E_1 \cap E_2$.

Зафіксуємо довільну точку $x_0 \in E_0$. Не зменшуючи загальності міркувань, можна вважати, що $x_0 = 0$ і $f(x_0) = 0$. Нехай $e_1, \ldots, e_n$, $\widetilde{e_1}, \ldots, \widetilde{e_n}$ і $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

— відповідно головні вектори і головні значення відображення $f'(0)$, при цьому $\lambda_n \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_1 > 0$. Перетвореннями повороту в образі і прообразі можна добитися того, що $e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0) = \widetilde{e_i}$.

Ми повинні переконатися в тому, що

$$\frac{\lambda_2 \ldots \lambda_n}{\lambda_1^{p-1}} \leqslant Q(0)\,,$$

оскільки $|J_f(0)| = \lambda_1 \ldots \lambda_n$ і $l\,(f'(0)) = \lambda_1$, див. співвідношення (2.5) і коментарі на с. 21 п. 2.1 розд. I в [110].

Зафіксуємо довільно параметр $t > 0$ і оберемо число $r > 0$ так, щоб конденсатор $\mathcal{E} := (A, C)$, де $C = \{x : x_1 = 0, |x_i| \leqslant r, i = 2, \ldots, n\}$ і $A = \{x : |x_1| < rt\lambda_1, |x_i| < r + rt\lambda_i, i = 2, \ldots, n\}$, містився в області D. Зауважимо, що

$$m(A) = 2^n \lambda_1 rt \prod_{i=2}^{n} (r + rt\lambda_i) \tag{6.39}$$

і

$$\text{dist}\,(C, \partial A) = rt\lambda_1\,. \tag{6.40}$$

Оскільки $\mathcal{E} = (A, C)$ — конденсатор у D, то $f\mathcal{E} = (fA, fC)$ — конденсатор у $D' = fD$ за відкритістю і неперервністю відображення f. Нехай $\Gamma_{\mathcal{E}}$ і $\Gamma_{f\mathcal{E}}$ — сім'ї кривих у сенсі твердження 1.14.3 і Γ^* — сім'я максимальних піднять $\Gamma_{f\mathcal{E}}$ за відображенням f з початком в C. Як і при доведенні леми 6.1.1, отримаємо включення $\Gamma^* \subset \Gamma_{\mathcal{E}}$. Зауважимо, що $\Gamma_{f\mathcal{E}} > f\Gamma^*$, і, отже, за означенням Q-відображення відносно p-модуля та зі співвідношень

$$\text{cap}_{\,p} f\mathcal{E} \quad = \quad M_p\,(\Gamma_{f\mathcal{E}}) \quad \leqslant \quad M_p\,(f\Gamma^*) \quad \leqslant \quad M_p\,(f\Gamma_{\mathcal{E}})$$

випливає нерівність

$$\text{cap}_{\,p}\,(fA, fC) \leqslant \int\limits_D Q(x) \cdot \rho^p(x)\; dm(x) \tag{6.41}$$

для будь-якої допустимої функції $\rho \in \text{adm}\,\Gamma_{\mathcal{E}}$. Зауважимо, що функція

$$\rho(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{\text{dist}\,(C, \partial A)}, & x \in A \setminus C, \\ \qquad 0, & x \notin A \setminus C \end{cases}$$

є допустимою для сім'ї $\Gamma_{\mathcal{E}}$ і, таким чином, із (6.41) випливає нерівність

$$\operatorname{cap}_p(fA, fC) \leqslant \frac{1}{\operatorname{dist}^p(C, \partial A)} \int\limits_A Q(x)\,dm(x)\,. \tag{6.42}$$

З іншого боку, за твердженням 1.1.5 із (6.42) отримаємо оцінку

$$\frac{(\inf\, m_{n-1}\sigma)^p}{[m(fA)]^{p-1}} \leqslant \frac{1}{\operatorname{dist}^p(C, \partial A)} \int\limits_A Q(x)\,dm(x)\,, \tag{6.43}$$

де $m_{n-1}\sigma$ позначає $(n-1)$-вимірну площу C^∞ — многовиду σ, що є межею відкритої множини U, яка містить fC і міститься разом із своїм замиканням $\overline{U}$ в fA, а точна нижня границя в (6.43) береться по всім таким σ.

Оцінимо дріб в лівій частині нерівності (6.43), спираючись на властивість диференційовності відображення f в нулі. Фіксуючи довільне $0 < \varepsilon < \lambda_1$, оберемо $r > 0$ настільки малим, щоб $|f(x) - f'(0)x| < \varepsilon r$ при $x \in A$. Тоді множина fA міститься в паралелепіпеді

$$V = \left\{y : \, |y_1| \leqslant rt\lambda_1^2 + \varepsilon r, \, |y_i| \leqslant r\lambda_i + rt\lambda_i^2 + \varepsilon r, \; i = 2, \dots, n\right\},$$

а проекція множини fC на підпростір $y_1 = 0$ містить в собі $(n-1)$-вимірний паралелепіпед

$$V_0 = \{y : y_1 = 0, \; |y_i| \leqslant r\lambda_i - \varepsilon r, \; i = 2, \dots, n\}\,.$$

Тому

$$m\,(fA) \leqslant m(V) = 2^n r^n \left(t\lambda_1^2 + \varepsilon\right) \prod_{i=2}^{n} \left(\lambda_i + t\lambda_i^2 + \varepsilon\right)$$

і

$$m_{n-1}\,\sigma \geqslant 2m_{n-1}\,V_0 = 2^n r^{n-1} \prod_{i=2}^{n} (\lambda_i - \varepsilon)\,.$$

Отже, підставляючи отримані оцінки величин $m(fA)$ і $m_{n-1}\sigma$ у нерівність (6.43) та враховуючи при цьому (6.39) і (6.40), отримуємо

$$\frac{\left(2^n r^{n-1} \prod\limits_{i=2}^{n} (\lambda_i - \varepsilon)\right)^p}{\left(2^n r^n (t\lambda_1^2 + \varepsilon) \prod\limits_{i=2}^{n} (\lambda_i + t\lambda_i^2 + \varepsilon)\right)^{p-1}} \leqslant \frac{2^n \lambda_1 rt \prod\limits_{i=2}^{n} (r + rt\lambda_i)}{r^p t^p \lambda_1^p} \frac{1}{m(A)} \int\limits_A Q(x)\,dm(x)\,,$$

звідки випливає нерівність

$$\frac{\left(\prod\limits_{i=2}^{n}(\lambda_i-\varepsilon)\right)^p}{\left((t\lambda_1^2+\varepsilon)\prod\limits_{i=2}^{n}(\lambda_i+t\lambda_i^2+\varepsilon)\right)^{p-1}}\leqslant\frac{\prod\limits_{i=2}^{n}(1+t\lambda_i)}{t^{p-1}\lambda_1^{p-1}}\frac{1}{m(A)}\int\limits_A Q(x)\,dm(x)\,.$$

Спрямувавши $r\to 0$ в останній нерівності, матимемо

$$\frac{\left(\prod\limits_{i=2}^{n}(\lambda_i-\varepsilon)\right)^p}{\left((t\lambda_1^2+\varepsilon)\prod\limits_{i=2}^{n}(\lambda_i+t\lambda_i^2+\varepsilon)\right)^{p-1}}\leqslant\frac{\prod\limits_{i=2}^{n}(1+t\lambda_i)}{t^{p-1}\lambda_1^{p-1}}\,Q(0)$$

і далі при $\varepsilon\to 0$ отримаємо

$$\frac{\left(\prod\limits_{i=2}^{n}\lambda_i\right)^p}{\left(t\lambda_1^2\prod\limits_{i=2}^{n}(\lambda_i+t\lambda_i^2)\right)^{p-1}}\leqslant\frac{\prod\limits_{i=2}^{n}(1+t\lambda_i)}{t^{p-1}\lambda_1^{p-1}}\,Q(0)\,.$$

Домножаючи тепер обидві частини нерівності на t^{p-1} і переходячи до границі при $t\to 0$, одержуємо

$$\frac{\prod\limits_{i=2}^{n}\lambda_i}{\lambda_1^{p-1}}\leqslant Q(0)\,,$$

що завершує доведення. Теорему доведено.

Наслідок 6.5.1. *Нехай $f:D\to\mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне Q-відображення відносно p-модуля при $p\geqslant n$. Припустимо, що $Q\in L^1_{\rm loc}(D)$. Тоді для майже всіх $x\in D$ виконується оцінка (6.38).*

При $p=n$ із теореми 6.5.1 безпосередньо випливає наступне твердження.

Наслідок 6.5.2. *Нехай $f:D\to\mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне Q-відображення і $Q\in L^1_{\rm loc}(D)$. Тоді для майже всіх $x\in D$ виконується співвідношення*

$$K_I(x,f)\leqslant Q(x)\,.$$

Із означення величини $K_I(x,f)$ випливає, що $K_I(x,f) \geqslant 1$ при всіх x, де величина $K_I(x,f)$ є заданной. Отже, із наслідка 6.5.2 випливає наступне твердження.

Наслідок 6.5.3. *Нехай $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне Q-відображення і $Q \in L^1_{\rm loc}(D)$. Тоді $Q(x) \geqslant 1$ для майже всіх $x \in D$.*

6.6. Про абсолютну неперервність відображень, що спотворюють модулі циліндрів

У даному розділі розглянуто відкриті та дискретні відображення, що задовольняють одну модульну нерівність відносно циліндрів у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Доведемо, що вказані відображення за умови $Q \in L^1_{\rm loc}$ є абсолютно неперервними на лініях.

Означення 6.6.1. *Циліндром в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, називають трійку: $Z = (Q, E_1, E_2)$, де Q – область в $\mathbb{R}^n$, а E_1, E_2 — підмножини межі Q з наступною властивістю: знайдеться гомеоморфізм множини $\overline{Q}$ на одиничний циліндр $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leqslant 1, 0 \leqslant x_n \leqslant 1\}$, що відображає E_1 і E_2 на його основи, див. [435].

Означення 6.6.2. З кожним циліндром Z будемо асоціювати сім'ю Γ_Z, яка складається із дуг, що з'єднують E_1 і E_2 в Q. Модулем циліндра Z називатимемо p-модуль сім'ї Γ_Z та позначатимемо його $M_p(Z)$.

У роботі [435], див. лему 2, встановлено наступний факт. Нехай $f : D \to \mathbb{R}^n$ — гомеоморфізм, що задовольняє умову

$$M(Z) \leqslant K \cdot M(f(Z))$$

для кожного циліндра $Z \subset D$ і деякої сталої $K \geqslant 1$. Тоді $f \in ACL$ в D.

Нижче встановлено посилення цього результату. З цього приводу слід також згадати результат Тенгвалля в цьому напрямку (див. [428]), а також роботи, де встановлено властивість ACL для Q-відображень (див. [146]).

Теорема 6.6.1. *Нехай* $p > 1$, $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ *— локально інтегровна функція і* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *— відкрите дискретне відображення, яке задовольняє умову*

$$M_p(Z) \leqslant \int\limits_{f(D)} Q(y) \cdot \rho_*^p(y) dm(y) \tag{6.44}$$

для будь-якого циліндра $Z \subset D$ *та довільної функції* $\rho_* \in \operatorname{adm} f(\Gamma_Z)$. *Тоді* $f \in ACL$.

Доведення. Нехай I — n-вимірний інтервал в $\mathbb{R}^n$ з ребрами паралельними осям координат і $\overline{I} \subset D$. Тоді $I = I_0 \times J$, де I_0 — $(n-1)$-вимірний інтервал в $\mathbb{R}^{n-1}$, J — одновимірний інтервал, $J = (a, b)$. Далі ототожнюємо $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ з $\mathbb{R}^n$. Покажемо, що для майже всіх сегментів $J_z = \{z\} \times J$, $z \in I_0$, відображення $f|_{J_z}$ абсолютно неперервне.

Розглянемо функцію множин, визначену на алгебрі борелевих множин B в I_0:

$$\Phi(B) = \int\limits_{f(B \times J)} Q(y) dm(y) .$$

Зауважимо, що Φ є q-квазіадитивною функцією при $q = N(f, I)$. Дійсно,

$$\sum_{i=1}^{k} \Phi(B_i) = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{f(B_i \times J)} Q(y) dm(y) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{f(B \times J)} N(y, f, B_i \times J) Q(y) dm(y) \leqslant N(f, I) \Phi(B) ,$$

де $B_i \subset B \subset I_0$ — борелеві множини, $B_i \cap B_l = \varnothing$ при $l \neq i$. За твердженням 1.13.1

$$\varphi(z) = \limsup_{r \to 0} \frac{\Phi(B(z, r))}{\Omega_{n-1} r^{n-1}} < \infty \tag{6.45}$$

для майже всіх $z \in I_0$, де через $B(z, r)$ позначено кулю в $I_0 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ з центром в точці $z \in I_0$ радіуса r, Ω_{n-1} — об'єм одиничної кулі в $\mathbb{R}^{n-1}$. Доведемо, що відображення f абсолютно неперервне на кожному сегменті $J_z, z \in I_0$, де границя (6.45) існує і скінченна. Позначимо відповідну множину z через

Z_0 та покажемо, що сума діаметрів образів будь-якого скінченного набору сегментів, що не перетинаються в $J_z = \{z\} \times J$, $z \in Z_0$, збігається до нуля разом з сумарною довжиною інтервалів. Внаслідок неперервності f вздовж J_z достатньо перевірити цей факт для сегментів з раціональними кінцями в J_z. Позначимо $\Delta_i := (\alpha_i, \beta_i)$.

Без зменшення загальності можна вважати, що $|f(z,\alpha_i) - f(z,\beta_i)| \neq 0$ для кожного $i = 1, \ldots, k$. Оскільки відображення f неперервне, то для кожного $i = 1, \ldots, k$ знайдеться $\delta_i > 0$ таке, що

$$|f(z,\alpha_i) - f(x)| < \frac{|f(z,\alpha_i) - f(z,\beta_i)|}{4}\,, \quad |x - (z,\alpha_i)| < \delta_i\,, \tag{6.46}$$

$$|f(z,\beta_i) - f(x)| < \frac{|f(z,\alpha_i) - f(z,\beta_i)|}{4}\,, \quad |x - (z,\beta_i)| < \delta_i\,. \tag{6.47}$$

У подальшому покладемо $\delta := \min\limits_{i=1,\ldots,k} \delta_i$, $0 < r < \min\{\delta, \mathrm{dist}\,(I, \partial D)\}$. Множину $\{z\} \times \{\Delta_i\}_{i=1}^k$ покриємо циліндрами $C_i = B(z,r) \times (\alpha_i, \beta_i)$ і визначимо $\widetilde{\rho}_i(z) = 2|f(z,\alpha_i) - f(z,\beta_i)|^{-1} \cdot \chi_{f(C_i)}(z)$, $i = 1, \ldots, k$. Позначимо також $G_i := |f(z,\alpha_i) - f(z,\beta_i)|$. Визначимо сім'ю кривих Γ_i наступним чином:

$$\Gamma_i = \{\gamma_x^i : x \in B(z, r/2)\}\,,$$

де $\gamma_x^i : [\alpha_i, \beta_i] \to \mathbb{R}^n$ — крива, визначена як $\gamma_x^i(t) = (x,t)$. Тоді для кожної локально спрямлюваної кривої $f \circ \gamma$, $\gamma \in \Gamma_i$, згідно зі співвідношеннями (6.46) і (6.47) будемо мати

$$\int\limits_{f\circ\gamma} \widetilde{\rho}_i(z)|dz| = 2G_i^{-1} \int\limits_{f\circ\gamma} \chi_{f(C_i)}(z)|dz| \geqslant G_i^{-1} \cdot |f(z,\alpha_i) - f(z,\beta_i)| = 1\,.$$

В такому випадку $\widetilde{\rho}_i \in \mathrm{adm}\, f(\Gamma_i)$ і, отже, у відповідності з умовою (6.44) отримуємо:

$$M_p(\Gamma_i) \leqslant 2^p G_i^{-p} \int\limits_{f(C_i)} Q(y)\,dm(y)\,. \tag{6.48}$$

Зауважимо, що $M_p(\Gamma_i) = \frac{\Omega_{n-1} r^{n-1}}{2^{n-1}|\alpha_i - \beta_i|^{p-1}}$, див. п. 7.2 в [436], тому із (6.48) отримуємо

$$\frac{\Omega_{n-1} r^{n-1}}{2^{n-1}|\alpha_i - \beta_i|^{p-1}} \leqslant 2^p G_i^{-p} \int\limits_{f(C_i)} Q(y)\,dm(y)\,,$$

звідки

$$|f(z,\alpha_i)-f(z,\beta_i)|^p\leqslant|\alpha_i-\beta_i|^{p-1}\cdot\frac{2^{p+n-1}}{\Omega_{n-1}}\cdot\frac{1}{r^{n-1}}\int\limits_{f(C_i)}Q(y)dm(y)\,. \tag{6.49}$$

Позначимо для зручності $V_i:=\int\limits_{f(C_i)}Q(y)dm(y)$. Тоді із (6.49) отримуємо

$$|\alpha_i-\beta_i|\geqslant\left(\frac{Cr^{n-1}|f(z,\alpha_i)-f(z,\beta_i)|^p}{V_i}\right)^{\frac{1}{p-1}}\,, \tag{6.50}$$

де C — деяка нова додатна стала, що залежить тільки від розмірності простору n і числа p. Згідно з нерівністю Гельдера

$$\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{k}G_i\right)^p}{\sum\limits_{i=1}^{k}V_i}\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{G_i^{p/(p-1)}}{V_i^{1/(p-1)}}\right)^{p-1}.$$

Тоді з (6.50) отримуємо

$$\frac{C\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^{k}G_i\right)^p}{\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{V_i}{r^{n-1}}}\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{k}|\alpha_i-\beta_i|\right)^{p-1}. \tag{6.51}$$

В силу того, що Φ є квазіадитивною функцією множини, будемо мати

$$\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{V_i}{r^{n-1}}\le N(f,I)\frac{\Phi(B(z,r))}{r^{n-1}}\,.$$

Переходячи тут до верхньої границі при $r\to 0$ та враховуючи (6.45), із (6.51) отримуємо

$$\left(\sum\limits_{i=1}^{k}|f(z,\alpha_i)-f(z,\beta_i)|\right)^p\leqslant C_1\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^{k}|\alpha_i-\beta_i|\right)^{p-1}, \tag{6.52}$$

де C_1 — деяка нова додатна стала, залежна тільки від розмірності простору n і функції Q. Нехай тепер $\varepsilon>0$ і $\Delta_i=(\alpha_i,\beta_i)$, $i=1,\ldots,k$ — система інтервалів, що не перетинаються в J, така, що $\sum\limits_{i=1}^{k}|\alpha_i-\beta_i|<\varepsilon$. Тоді із (6.52) випливає нерівність

$$\left(\sum\limits_{i=1}^{k}|f(z,\alpha_i)-f(z,\beta_i)|\right)^p\leqslant C_1\cdot\varepsilon^{p-1}\,.$$

Теорему доведено.

Висновки

В розділі 6 вивчаються властивості відображень з розгалуженням, що задовольняють деякі модульні нерівності. Зокрема, отримано такі основні результати:

1) встановлено достатні умови належності Q-відображень, визначених в термінах p-модуля, до класів Соболєва;

2) доведено узагальнення теореми Боярського–Іванця про невиродженість майже скрізь якобіана квазірегулярного відображення;

3) отримано оцінки зверху якобіана та операторної норми матриці Якобі, p-внутрішніх та α-зовнішніх дилатацій кільцевих Q-відображень відносно p-модуля;

4) встановлено достатні умови того, що Q-відображення відносно p-модуля володіє N або N^{-1} властивістю Лузіна;

5) встановлено достатні умови скінченної ліпшицевості, локальної та логарифмічної гельдеровості кільцевих Q-відображень відносно p-модуля;

6) узагальнено результат Ю. Вяйсяля про абсолютну неперервність на лініях квазіконформних відображень на відкриті дискретні відображення, що задовольняють деяку p-модульну нерівність.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена розвитку теорії відображень скінченновимірних просторів.

Основні результати дисертації такі:

1. Отримано характеризацію кільцевих і нижніх Q-гомеоморфізмів в термінах p-модуля та встановлено взаємозв'язок між цими гомеоморфізмами.

2. Доведено аналоги нерівності М.О. Лаврентьєва про спотворення площі круга при квазіконформних відображеннях, леми Герінга про локальну ліпшицевість та теореми Ікоми–Шварца для кільцевих і нижніх Q-гомеоморфізмів, визначених в термінах p-модуля.

3. Встановлено, що гомеоморфні розв'язки вироджених рівнянь Бельтрамі з узагальненими похідними є кільцевими та нижніми Q-гомеоморфізмами, де Q — дотична дилатація, та доведено узагальнені теореми про неперервне і гомеоморфне продовження вказаних розв'язків та їх асимптотичну поведінку на нескінченності.

4. Встановлено загальні умови на дотичну дилатацію, достатні для існування регулярних розв'язків задачі Діріхле для вироджених рівнянь Бельтрамі в довільних жорданових областях.

5. Встановлено зв'язок класів Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ в областях комплексної площини, а також класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, за умови типу умови Кальдерона на функцію φ, з нижніми та кільцевими Q-гомеоморфізмами, визначеними в термінах p-модуля; узагальнено умови локальної та логарифмічної гельдеровості, степеневого та логарифмічного порядку зростання гомеоморфізмів, що належать вказаним класам Соболєва чи Орліча–Соболєва.

6. Встановлено достатні умови належності Q-відображень, визначених в термінах p-модуля, до класів Соболєва та доведено узагальнення теореми

Боярського–Іванця про невиродженість якобіана відображення; отримано оцінки зверху якобіана та операторної норми матриці Якобі, p-внутрішніх та α-зовнішних дилатацій кільцевих Q-відображень відносно p-модуля; узагальнено результат Ю. Вяйсяля про абсолютну неперервність на лініях квазіконформних відображень на відкриті дискретні відображення, що задовольняють деяку p-модульну нерівність.

Отримані результати та розвинені в дисертації методи можуть бути використані у дослідженні різних класів відображень на площині та у просторі. Зокрема, результати дисертації можуть знайти застосування у теорії нелінійних систем рівнянь з частинними похідними та в теорії класів Соболєва та Орліча–Соболєва.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александров П.С., Маркушевич А.И., Хинчин А.Я. Энциклопедия элементарной математики. Книга четвёртая. Геометрия. – Москва: Гос. изд. физ.–мат. лит., 1963. — 568 с.

2. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, 1969. — 132 с.

3. Асеев В.В. Модули семейств локально квазисимметрических поврехностей // Сиб. мат. ж. — 1989. — **30**, № 3. — С. 9 – 15.

4. Афанасьева Е.С., Рязанов В.И., Салимов Р.Р. Об отображениях в классах Орлича–Соболева на римановых многообразиях // Укр. мат. вісник. — 2011. — **8**, № 3. — С. 319 — 342.

5. Афанасьева Е.С., Рязанов В.И., Салимов Р.Р. К теории отображений класса Соболева с критическим показателем // Український математичний вісник. –— 2018. — **15**, № 2. — С. 154 – 176.

6. Афанасьева Е.С., Рязанов В.И., Салимов Р.Р. К теории классов Соболева с критическим показателем// Доповіді НАН України. — 2019. — № 8. — С. 3 – 8.

7. Афанасьева Е.С., Салимов Р.Р. Асимптотическое поведение на бесконечности решений уравнения Бельтрами // Збірник праць Ін-ту математики НАНУ. — 2015. — **12**, №3. — С. 9 – 16.

8. Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б. Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2008. – **73**. —- 308 с.

9. Белинский П.П. О нерерывности пространственных квазиконформных отображений и о теореме Лиувилля // Докл. АН СССР. — 1962. — **147**, № 5. — С. 1003 – 1004.

10. Белинский П.П. Общие свойства квазиконформных отображений. – Новосибирск: Наука, 1974. — 98 с.

11. Боярский Б.В., Гомеоморфные решения систем Бельтрами // Доклады Академии наук. 1955. — **102**. — P. 661 – 664.

12. Боярский Б.В. Обобщённые решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Мат. сб. — 1957. — **43**, №4. — С. 451 – 503.

13. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. – М.: Наука, 1969.

14. Bourbaki N. Функции действительного переменного. – М.: Наука, 1965.

15. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959. — 628 с.

16. Водопьянов С.К. Отображения с конечным коискажением и классы функций Соболева // Доклады РАН. — 2008. — **440**, № 3. — С. 301 – 305.

17. Водопьянов С.К. О дифференцируемости отображений класса Соболева W^1_{n-1} с условиями на функцию искажения // Сиб. матем. журн. — 2018. — **59**, № 6. — С. 1240–1267.

18. Водопьянов С.К. О граничном соответствии при квазиконформных отображениях пространственных областей // Сиб. матем. ж. — 1975. — – **16**, № 3. — С. 630 – 633.

19. Водопьянов С.К. Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // Сиб. мат. журн. — 1996. — **37**, № 6. — С. 1269 – 1295.

20. Водопьянов С.К. Отображения с ограниченным и конечным искажением на группах Карно // Сиб. матем. ж. — 1999. — **40**, № 4. — С. 764 – 804.

21. Водопьянов С.К. О замкнутости классов отображений с ограниченным искажением на группах Карно // Матем. тр. — 2002. — **5**, № 2. — С. 92 – 137.

22. Водопьянов С.К. О дифференцируемости отображений классов Соболева на группе Карно // Матем. сб. — 2003. — **194**, № 6. — С. 67 – 86.

23. Водопьянов С.К., Гольдштейн В.М. Пространства Соболева и специальные классы отображений. – Новосибирск: НГУ, — 1981. — 76 с.

24. Водопьянов С.К., Гольдштейн В.М. Метрическое пополнение области при помощи конформной емкости, инвариантное при квазиконформных отображениях // ДАН СССР. – 1978. — **238**, № 5. — С. 1040 – 1042.

25. Водопьянов С.К., Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г. О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными // УМН. — 1979. — **34**, № 1, (205). — С. 17 – 65.

26. Водопьянов С.К., Евсеев Н.А. Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и квазиизометрические отображения // Сиб. матем. журн. — 2014. — **55**, №5. — С. 1001 – 1039.

27. Водопьянов С.К., Ухлов А.Д. Пространства Соболева и (P, Q)-квазиконформные отображения групп Карно // Сиб. матем. ж. — 1998. — **39**, № 4. — С. 776 – 795.

28. Водопьянов С.К., Ухлов А.Д. Операторы суперпозиции в пространствах Соболева // Изв. вузов. Матем. — 2002. — **47**, № 10. — С. 11 – 33.

29. Водопьянов С.К., Ухлов А.Д. Операторы суперпозиции в пространствах Лебега и дифференцируемость квазиаддитивных функций множества // Владикавк. матем. журн. — 2002. — **4**, № 1. — С. 11 – 33.

30. Волковыский Л.М. Квазиконформные отображения. Львов, Изд. Львов. У-ту, 1954.

31. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. — 628 с.

32. Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г. Введение в теорию функций с обобщёнными производными и квазиконформные отображения. – Новосибирск: Наука, 1983. — 284 с.

33. Гольберг А.Л., Севостьянов Е.А. О радиусе инъективности обобщенных квазиизометрий в пространстве размерности больше двух // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, № 2. — С. 174 – 184.

34. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. – М.: Наука, 1968. — 648 с.

35. Гутлянский В.Я., Рязанов В.И. Геометрическая и топологическая теория функций и отображений. – К.: Наук. думка, 2011. — 425 с.

36. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. – М.: ИЛ, 1962. — 895 с.

37. Дубинин В.Н. Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного. – Владивосток: Дальнаука, 2009. — 390 с.

38. Дубовицкий А.Я. О структуре множеств уровня дифференцируемых отображений n-мерного куба в k-мерный куб // Изв. АН России, сер. матем. — 1957. — **21**, № 3. — С. 371 – 408.

39. Зорий Н.В. Модульные, функциональные и потенциальные характеристики конденсаторов в области; соотношения между ними // Укр. мат. журн. — 1992. — **44**, №5. — С. 604 – 613.

40. Зорич В.А. Теорема М.А. Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства // Матем. сб. — 1967. — **116**, № 3. — С. 415 – 433.

41. Зорич В.А. О допустимом порядке роста характеристики квазиконформности в теореме М.А. Лаврентьева // Докл. АН СССР. — 1968. — **181**, № 3. — С. 530 – 533.

42. Зорич В.А. Изолированная особенность отображений с ограниченным искажением // Матем. сб. — 1970. — **81(123)**, № 4. — С. 634 – 636.

43. Зорич В.А. Квазиконформные отображения и асимптотическая геометрия многообразий // Успехи мат. наук. — 2002. — **57**, № 3. — С. 3 – 28.

44. Зорич В.А. Математический анализ. Часть I. — М.: Наука, 1981. — 544 с.

45. Игнатьев А., Рязанов В. Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вiсник. — 2005. — **2**, № 3. — С. 395 – 417.

46. Игнатьев А., Рязанов В. К теории граничного поведения пространственных отображений // Укр. мат. вестник. — 2006. — **3**, № 2. — С. 199 – 211.

47. Ковалев Л.В. Монотонность обобщенного приведенного модуля // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2001. — **276**. — С. 219 – 236.

48. Ковтонюк Д., Рязанов В. К теории границ пространственных областей // Труды ИПММ НАН Украины. — 2006. — **13**. — С. 110 – 120.

49. Ковтонюк Д., Рязанов В. К теории нижних Q-гомеоморфизмов // Укр. мат. вiсник. — 2008. — **5**, № 2. — С. 157 – 181.

50. Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. К теории классов Орлича–Соболева // Алгебра и анализ. — 2013. — **25**, № 6. — С. 50 – 102.

51. Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. Граничное поведение классов Орлича-Соболева // Матем. заметки. — 2014. — **95**, № 4. — С. 564 – 576.

52. Ковтонюк Д.А., Салимов Р.Р. Асимптотическое поведение в точке обобщенных квазиизометрий // Укр. мат. журн. — 2011. — **63**, № 4. — С. 481 – 488.

53. Ковтонюк Д.А., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. К теории отображений классов Соболева и Орлича-Соболева // Наукова думка, 2013, НАН України. ISBN 978-966-00-1325-4.

54. Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. – Гос. издат. физ.-мат. лит., Москва, 1958. — 272 с.

55. Кругликов В.И. Ёмкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Мат. сб. – 1986. – **130**, № 2. — С. 185 – 206.

56. Кругликов В.И. О существовании и единственности отображений, квазиконформных в среднем // Метрические вопросы теории функций и отображений. — Киев: Наук. думка, 1973. – Вып. 6. — С. 213 – 147.

57. Кругликов В.И. Характеристическое свойство отображений, квазиконформных в среднем // ДАН СССР.— 1976.— **228**, №5. — С. 1031 – 1033.

58. Кругликов В.И., Пайков В.И. Соответствие границ для пространственных отображений, квазиконформных в среднем // Дон. ун-т, Донецк. — 1983. — Деп. в Укр. ВИНИТИ, №371 Ук – Д 83. — 63 с.

59. Крушкаль С.Л. Квазиконформные отображения и римановы поверхности // Новосибирск: Наука. — 1975. — 196 с.

60. Крушкаль С.Л. Об отображениях, квазиконформных в среднем // ДАН СССР —1964. — **157**, № 3. — С. 517 – 519.

61. Крушкаль С.Л. Об абсолютной интегрируемости и дифференцируемости некоторых классов отображений многомерных областей //Сиб. матем. ж. — 1965. — **6**, № 3. — С. 692 – 696.

62. Крушкаль С.Л. Об отображениях, ε-квазиконформных в среднем // Сиб. матем. ж. — 1967. — **8**, № 4. — С. 798 – 806.

63. Крушкаль С.Л., Кюнау Р. Квазиконформные отображения - новые методы и приложения // Новосибирск: Наука. — 1984. — 216 с.

64. Кудъявин В.С. Поведение класса отображений, квазиконформных в среднем, в изолированной особой точке // ДАН СССР. — 1984. — **277**, № 5. — С. 1056 – 1058.

65. Кудъявин В.С. Локальная структура плоских отображений, квазиконформных в среднем // Доклады АН Украины. – 1991. — № 3. — С. 10 – 12.

66. Кудьявин В.С. Оценки искажения расстояния при отображениях, квазиконформных в среднем // Динамика Сплош. Ср. — 1981. — № 52. — С. 168 – 171.

67. Кудьявин В.С., Гольдберг А.Л. Средние коэффициенты квазиконформности пары областей // Укр. мат. журн. —– 1991. —– **43**, № 12. — С. 1709 – 1712.

68. Кузьмина Г.В. Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы // Тр. МИАН СССР. — 1980. — **139**. — С. 3 – 241.

69. Куратовский К. Топология 1. – М.: Мир, 1966. — 594 с.

70. Куратовский К. Топология 2. – М.: Мир, 1969.

71. Куфарев Б.П. Соотношения типа “принципа длины и площади” // Докл. АН СССР. — 1966. — **170**, № 2. — С. 268 – 270.

72. Куфарев Б.П. Нуль-множества и гомеоморфизм с конечным интегралом Дирихле // Докл. АН СССР. — 1967. — **173**, № 6. — С. 1257 – 1259.

73. Куфарев Б.П. Абсолютная непрерывность функций класса $\tilde{W}_p^1$ на множествах уровня функции класса $\tilde{W}_q^1$ и некоторые граничные свойства отображений с обобщенными производными в плоской области // Докл. АН СССР. — 1968. — **181**, № 2. — С. 282 – 285.

74. Куфарев Б.П. Емкость подмножеств границы Каратеодори и BL-гомеоморфизм // Докл. АН СССР. — 1971. — **199**, № 2. — С. 273 – 274.

75. Куфарев Б.П. Потенциалы и соответствие границ // Докл. АН СССР. — 1974. — **215**, № 2. — С. 255 -– 258.

76. Куфарев Б.П. О граничном поведении плоских L1p-отображений // Докл. АН СССР. — 1980. — **251**, № 5. — С. 1052 – 1055.

77. Куфарев Б.П. Об одном методе исследования граничного поведения ACL-функций // Докл. АН СССР. — 1982. — **266**, № 5. — С. 1052 – 1055.

78. Куфарев Б.П., Зюзьков В.М. К вопросу о соответствии границ // Матем. заметки. — 1977. — **22**, № 1. — С. 103 – 108.

79. Куфарев Б.П., Соколов Б.В. О граничном соответствии при отображениях областей из $\mathbb{R}^n$ // Докл. АН СССР. — 1978. — **243**, № 3. — С. 568 – 571.

80. Лавреньтьев М.А. Основная задача теории квазиконформных отображений плоских областей // Матем. сб. — 1947. — **21(63)**, № 2. — С. 285 – 320.

81. Лавреньтьев М.А. Основная теорема теории квазиконформных отображений плоских областей // Изв. АН России, сер. мат. — 1948. — **12**, № 6. — С. 513 – 554.

82. Лаврентьев М.А. Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. — М., 1962. — 136 с.

83. Ломако Т.В. О распространении некоторых обобщений квазиконформных отображений на границу // Укр. мат. ж. — 2009. — **61**, № 10. — С. 1329 – 1337.

84. Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. – Ленинград: ЛГУ, 1985. — 416 с.

85. Мартио О., Рязанов В., Сребро У., Якубов Э. К теории Q-гомеоморфизмов // Докл. РАН. — 2001. — **381**, № 1. — С. 20 -– 22.

86. Миклюков В.М. О граничных свойствах одного класса отображений в пространстве // Тр. Томск. ун-та, Сер. мех.-мат. — 1966. — **189**. — С. 80 – 85.

87. Миклюков В.М. О локальном модуле непрерывности отображений класса // в кн. Материалы четвертой научной конференции по математике и механике. Томск: Томский университет. — 1974. — **I**. — С. 24 – 25.

88. Миклюков В.М. Об устранимых особенностях квазиконформных отображений в пространстве // Труды Томского ун-та, Серия мех.-мат. — 1966. — **189**. — С. 80 – 85.

89. Миклюков В.М. Об устранимых особенностях квазиконформных отображений в пространстве // Докл. АН СССР. — 1969. — **188**, № 3. — С. 525 – 527.

90. Миклюков В.М. Об ε – квазиконформных отображениях шара на шар // Докл. АН СССР. — 1969. — **188**, № 4. — С. 734 – 735.

91. Миклюков В.М. Граничные свойства n-мерных квазиконформных отображений // Докл. АН СССР. — 1970. — **193**, № 3. — С. 525 – 527.

92. Миклюков В.М. Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения // Волгоград: Изд–во ВолГУ, 2005. — 273 с.

93. Миклюков В.М., Кругликов В.И. О некоторых классах плоских топологических отображений с обобщенными производными // Метрические вопросы теории функций и отображений — Киев: Наук. думка. — 1973. — Вып. 6. — С. 102 – 122.

94. Миклюков В.М., Суворов Г.Д. О существовании и единственности квазиконформых отображений с неограниченными характеристиками // В сб.: Исследов. по теор. функц. компл. переменн. и ее применениям, Киев: Наук. думка. — 1972. — С. 45 – 53.

95. Овчинников И.С. Метрические свойства отображений класса $BL^{3/2}$ // Докл. АН СССР. — 1965. — **161**, № 3. — С. 526 – 529.

96. Овчинников И.С. О несуществовании отображений класса $BL^{n/2}$ шара на область // Докл. АН СССР. — 1968. — **179**, № 1. — С. 24 – 27.

97. Овчинников И.С. Метрические свойства отображений, оставляющих ограниченными некоторые интегральные функционалы // Докл. АН СССР. — 1969. — **187**, № 1. — С. 36 – 39.

98. Овчинников И.С. Некоторые свойства плоских и пространственных отображений // Докл. АН СССР. — 1970. —**190**, № 2. — С. 276 – 279.

99. Овчинников И.С. Оценка снизу величины интеграла Дирихле при отображениях шара на область // Сиб. мат. журн. — 1972. — **13**, № 1 — С. 142 – 152.

100. Овчинников И.С., Суворов Г.Д. Преобразования интеграла Дирихле и пространственные отображения // Докл. АН СССР. — 1964. — **154**, № 3. — С. 523 – 526.

101. Перович М. О глобальном гомеоморфизме отображений квазиконформных в среднем // Докл. АН СССР. — 1976. — **230**, № 4. — С. 781 – 784.

102. Песин И.Н. Метрические свойства Q-квазиконформных отображений // Матем. сб. — 1956. — **40(82)** , № 3, — С. 281 – 294.

103. Песин И.Н. Отображения, квазиконформные в среднем // ДАН СССР. — 1969. — **187**, № 4. — С. 740 – 742.

104. Полецкий Е.А. Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // Матем. сб. — 1970. — **83**, № 2. — С. 261 – 272.

105. Полецкий Е.А. О стирании особенностей квазиконформных отображений // Матем. сб. — 1973. — **92 (174)**, № 2 (10). — С. 242 – 256.

106. Пономарёв С.П. Об N-свойстве гомеоморфизмов класса W_p^1 // Сиб. мат. ж. – 1987. – **28**, № 2. — С. 140 – 148.

107. Пономарёв С.П. N^{-1}–свойство отображений и условие (N) Лузина // Мат. заметки. — 1995. — **58**, № 3. — С. 411 – 418.

108. Пономарёв С.П. Интегральный критерий квазирегулярности // Сиб. матем. ж. — 1997. — **38**, № 1. — С. 173 – 181.

109. Решетняк Ю.Г. Об условии N для пространственных отображений класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}$ // Сиб. мат. ж. — 1987. — **28**, № 5. — С. 149 – 153.

110. Решетняк Ю.Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982. — 285 с.

111. Решетняк Ю.Г. Обобщённые производные и дифференцируемость почти всюду // Докл. АН СССР. — 1966. — **170**, № 6. — С. 1273 – 1275.

112. Решетняк Ю.Г. Оценки модуля непрерывности для некоторых отображений // Сиб. мат. журн. — 1966. — **7**, № 5. — С. 1106 – 1114.

113. Решетняк Ю.Г. Некоторые геометрические свойства функций и отображений с обобщёнными производными // Сиб. матем. ж. — 1966. — **7**, № 4. — С. 886 – 919.

114. Решетняк Ю.Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением // Докл. АН СССР. — 1967. — **174**, № 6. — С. 1281 – 1283.

115. Решетняк Ю.Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением // Сиб. матем. ж. — 1967. — **8**, № 3. — С. 629 – 658.

116. Решетняк Ю.Г. Об условии ограниченности индекса для отображений с ограниченным искажением // Сиб. матем. ж. — 1968. — **9**, № 2. — С. 354 – 367.

117. Решетняк Ю.Г. Обобщённые производные и дифференцируемость почти всюду // Матем. сб. — 1968. — **75**, № 3. — С. 323 – 334.

118. Решетняк Ю.Г. О множестве точек ветвления отображений с ограниченным искажением // Сиб. матем. ж. — 1970. — **11**, № 6. — С. 1333 – 1339.

119. Решетняк Ю.Г. О граничном поведении функций с обобщёнными производными // Сиб. матем. ж. — 1972. — **13**, № 2. — С. 411 – 420.

120. Решетняк Ю.Г. Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. ж. — 1997. — **38**, № 3. — С. 657 – 675.

121. Рудин У. Теория функций в поликруге. — М.: Мир, 1974. — 160 с.

122. Рязанов В.И. О квазиконформных отображениях с ограничениями по мере // Укр. мат. ж. — 1993. — **45**, № 7. — С. 1009 – 1019.

123. Рязанов В.И. Об отображениях, квазиконформных в среднем // Сиб. матем. ж. — 1996. — **37**, № 2. — С. 378 – 388.

124. Рязанов В.И. О компактификации классов с интегральными ограничениями на характеристики Лаврентьева // Сиб. матнем. ж. — 1992. — **33**, № 1. — С. 87 – 104.

125. Рязанов В.И., Салимов Р.Р. Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Укр. мат. вестник. —- 2007. — **3**, № 2. — С. 199 – 234.

126. Рязанов В.И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. О классах Орлича-Соболева и отображениях с ограниченным интегралом Дирихле // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 9. — С. 1254 – 1265.

127. Рязанов В.И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. Нормальность классов Орлича-Соболева // Укр. мат. журнал. — 2016. — **68**, № 1. — С. 106 – 116.

128. Рязанов В.И., Севостьянов Е.А. Равностепенно непрерывные классы кольцевых $Q-$гомеоморфизмов // Сиб. мат. ж. — 2007. — **48**, № 6. — С. 1361 – 1376.

129. Рязанов В.И., Севостьянов Е.А. Равностепенная непрерывность квазиконформных в среднем отображений // Сиб. мат. ж. — 2011. — **52**, № 3. — С. 665 – 679.

130. Рязанов В., Сребро У., Якубов Э. К теории BMO-квазирегулярных отображений // Доклады АН России. — 1999. — **369**, № 1. — С. 13 – 15.

131. Сакс С. Теория интеграла. – М.: ИЛ, 1949. — 495 с.

132. Салимов Р.Р. Абсолютная непрерывность на линиях и дифференцируемость одного обобщения квазиконформных отображений // Изв. АН России, сер. мат. — 2008. — **72**, № 5. — С. 141 – 148.

133. Салимов Р.Р. Об оценке меры образа шара // Сиб. мат. журн. — 2012. — **53**, № 6. — С. 920 – 930.

134. Салимов Р.Р. О липшицевости одного класса отображений // Мат. заметки. — 2013. — **94**, №4. — С. 591 – 599.

135. Салимов Р.Р. К теории кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля // Укр. мат. вiсник. — 2013. — **10**, № 3. — С. 379 – 396.

136. Салимов Р.Р. Об одном свойстве кольцевых Q -гомеоморфизмов относительно p-модуля // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 5. — С. 728 – 733.

137. Салимов Р.Р. Нижние оценки p-модуля и отображения класса Соболева // Алгебра и анализ. — 2014. — **26**, № 6. — С. 143 – 171.

138. Салимов Р.Р. О кольцевых Q-отображениях относительно неконформного модуля // Дальневост. матем. журн. — 2014. — **14**, № 2. — С. 257 – 269.

139. Салимов Р.Р. О конечной липшицевости классов Орлича-Соболева // Владикавк. матем. журн. — 2015. — **17**, № 1. — С. 64 – 77.

140. Салимов Р.Р. О новом условии конечной липшицевости классов Орлича-Соболева // Мат. Студії. — 2015. — **44**, № 1. — С. 27-35.

141. Салимов Р.Р. Нижние Q-гомеоморфизмы относительно p-модуля // Укр. мат. вісник. — 2015. — **12**, № 4. — С. 484 – 510.

142. Салимов Р.Р. Асимптотическое поведение классов Орлича-Соболева на бесконечности // Збірник праць Ін-ту математики НАНУ. — 2015. — **12**, №4. — С. 273 – 284.

143. Салимов Р.Р. Метрические свойства классов Орлича-Соболева // Укр. мат. вісник. — 2016. — **13**, № 1. — С. 129 – 141.

144. Салимов Р.Р. Об оценке меры образа шара для нижних Q-гомеоморфизмов // Доповіді НАН України. -== 2016. — № 1. — С. 19 – 25.

145. Салимов Р.Р. О степенном порядке роста нижних Q-гомеоморфизмов // Владикавк. матем. журн. — 2017. — **19**, № 2. — С. 36 – 48.

146. Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. Теория кольцевых Q–отображений в геометрической теории функций // Мат. сб. —– 2010. — **201**, № 6. — С. 131 – 158.

147. Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. Об оценке дилатаций для отображений, более общих, чем квазирегулярные // Укр. матем. ж. — 2010. — **62**, № 11. — С. 1531 – 1537.

148. Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. О теореме Лаврентьева - Зорича для отображений, более общих, чем квазиконформные // Доклады АН Украины. — 2010. — № 7. – С. 22–27.

149. Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. О внутренних дилатациях отображений с неограниченной характеристикой // Укр. матем. вестник. — 2011. — **8**, № 1. — С. 129 – 143.

150. Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. Аналоги леммы Икома–Шварца и теоремы Лиувилля для отображений с неограниченной характеристикой // Укр. матем. ж. — 2011. — **63**, № 10. — С. 1368 – 1380.

151. Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. Об абсолютной непрерывности отображений, искажающих модули цилиндров // Укр. мат. журн. — 2017. — **69**, № 6. — С. 860 – 864.

152. Севостьянов Е.А. Теоремы Лиувилля, Пикара и Сохоцкого для кольцевых отображений // Украинский матем. вестник. — 2008. — **5**, № 3. — С. 366 – 381.

153. Севостьянов Е.А. О нормальности семейств пространственных отображений с ветвлением // Укр. матем. ж. — 2008. — **60**, № 10. — С. 1389 – 1400.

154. Севостьянов Е.А. Устранение особенностей и аналоги теоремы Сохоцкого – Вейерштрасса для Q-отображений // Укр. матем. ж. — 2009. — **61**, № 1. — С. 116 – 126.

155. Севостьянов Е.А. Об одном модульном неравенстве для отображений с конечным искажением длины // Укр. матем. ж. — 2009. — **61**, № 5. — С. 680 – 688.

156. Севостьянов Е.А. Обобщение одной леммы Е.А. Полецкого на классы пространственных отображений // Укр. матем. ж. — 2009. — **61**, № 7. — С. 969 – 975.

157. Севостьянов Е.А. Об интегральной характеризации некоторых обобщений квазирегулярных отображений и значении условия расходимости

интеграла в геометрической теории функций // Укр. матем. ж. — 2009. — **61**, № 10. — С. 1367 – 1380.

158. Севостьянов Е.А. К теории устранения особенностей отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Изв. АН России, сер. мат. — 2010. — **74**, № 1. — С. 159 – 174.

159. Севостьянов Е.А. О множествах точек ветвления отображений, более общих, чем квазирегулярные // Укр. матем. ж. — 2010. — **62**, № 2. — С. 215 – 230.

160. Севостьянов Е.А. О точках ветвления отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Сиб. матем. ж. — 2010. — **51**, № 5. — С. 1129 – 1146.

161. Севостьянов Е.А. О некоторых свойствах обобщённых квазиизометрий с неограниченной характеристикой // Укр. матем. ж. — 2011. — **63**, № 3. — С. 385 – 398.

162. Севостьянов Е.А. О точках ветвления трёхмерных отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Укр. матем. ж. — 2011. — **63**, № 1. — С. 69 – 79.

163. Севостьянов Е.А. Об открытости и дискретности отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Укр. матем. ж. — 2011. — **63**, № 8. — С. 1128 – 1134.

164. Севостьянов Е.А. О граничном поведении открытых дискретных отображений с неограниченной характеристикой // Укр. матем. ж. — 2012. — **64**, № 6. — С. 855 – 859.

165. Севостьянов Е.А. О пространственных отображениях с интегральными ограничениями на характеристику // Алгебра и анализ. — 2012. — **24**, № 1. — С. 131 – 156.

166. Севостьянов Е.А. О локальном поведении отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Сиб. матем. ж. — 2012. — **53**, № 3. — С. 648 – 662.

167. Севостьянов Е.А. Исследование пространственных отображений геометрическим методом // Киев: Наукова думка. — 2014.

168. Смоловая Е.С. Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах // Укр. мат. ж. — 2010. — **62**, № 5. — С. 682 — 689.

169. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988. — 333 с.

170. Солынин А.Ю. Модули и экстремально-метрические проблемы // Алгебра и анализ. — 1999. — **11**, № 1. — С. 3 – 86.

171. Стоилов С. Лекции о топологических принципах теории аналитических функций // М.: Наука. — 1964. — 228 с.

172. Стругов Ю.Ф. Компактность классов отображений, квазиконформных в среднем // ДАН СССР. — 1978. — **243**, № 4. — С. 859 – 861.

173. Стругов Ю.Ф. Об одном дифференциальном свойстве экстремального отображения, квазиконформного в среднем // Докл. АН СССР. — 1978. — **243**, №5. — С. 1138 – 1141.

174. Стругов Ю.Ф. Отображения, квазиконформные в среднем // Препринт Института математики АН СССР, Сиб. отделение, Новосибирск. — 1979. — 40 с.

175. Стругов Ю.Ф. Квазиконформные в среднем отображения и экстремальные задачи. Часть 1 //Омск. — 1994. — 154 с. Деп. в ВИНИТИ 05.12.94, №2786 – В94.

176. Стругов Ю.Ф. Квазиконформные в среднем отображения и экстремальные задачи. Часть 2 // Омск. — 1994. — 114 с. Деп. в ВИНИТИ 05.12.94, №2787 – B94.

177. Стругов Ю.Ф., Сычев А.В. О различных классах отображений, квазиконформных в среднем // Вестник ПАНИ. — 2002. — 7. — С. 14 – 19.

178. Сычев А.В. Модули и пространственные квазиконформные отображения. — Новосибирск: Наука. — 1983. — 152 с.

179. Сычев А.В., Малютина А.Н. Об отображениях с ограниченным в среднем искажением // Докл. АН СССР. — 1985. — **283**, № 2. — С. 317 – 320.

180. Суворов Г.Д. Метрические свойства плоских однолистных отображений замкнутых областей // Докл. АН СССР. — 1964. — **157**, № 4. — С. 802 – 805.

181. Суворов Г.Д. Семейства плоских топологических отображений // Новосибирск: Изд-во СО АН СССР. — 1965. — 264 с.

182. Суворов Г.Д. Метрическая теория простых концов и граничные свойства плоских отображений с ограниченными интегралами Дирихле // К.: Наукова Думка. — 1981. — 168 с.

183. Суворов Г.Д. Обобщенный принцип длины и площади в теории отображений // К.: Наукова Думка. — 1985. — 280 с.

184. Суворов Г.Д. Простые концы и последовательности плоских отображений // К.: Наукова Думка. — 1986. — 192 с.

185. Тамразов П. М. О непрерывности некоторых конформных инвариантов // Укр. мат. журн. — 1966. — **18**, № 6. — С. 78 – 84.

186. Тамразов П.М. Модули и экстремальные метрики в неориентируемых и скрученных римановых многообразиях // // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 10. — С. 1388 – 1398.

187. Федерер Г. Геометрическая теория меры // М.: Наука. — 1987. — 760 с.

188. Шабат Б.В. Метод модулей в пространстве // Докл. АН СССР. — 1960. — **130**, № 6. — С. 1210 – 1213.

189. Шабат Б.В. К теории квазиконформных отображений в пространстве // Докл. АН СССР. — 1960. — **132**, № 5. — С. 1045 – 1048.

190. Шлык В.А. О равенстве p-емкости и p-модуля // Сиб. мат. ж. — 1993. — **34**, № 6. — С. 216 – 221.

191. Agard S., Marden A. A removable singularity theorem for local homeomorphisms // Indiana Math. J. — 1970. — **20**. — P. 455 – 461.

192. Ahlfors L., Beurling A. Conformal invariants and function-theoretic null-sets // Acta Math. — 1950. — **83**. — P. 101 – 129.

193. Alberico A., Cianchi A. Differentiability properties of Orlicz-Sobolev functions // Ark. Mat. — 2005. — **43**. — P. 1 – 28.

194. Ambrosio L. Metric space valued functions of bounded variation // Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). — 1990. — **17**, № 3. — P. 439 – 478.

195. Andreian Cazacu C. Sur les transformations pseudoanalytiques // Rev. Math. Pures Appl. — 1957. — **2**. — P. 383 – 397.

196. Andreian Cazacu C. On the length-area dilatation // Complex Var. Theory Appl. — 2005. — **50**, № 7–11. — P. 765 – 776.

197. Andreian Cazacu C. Foundations of quasiconformal mappings // Handbook of complex analysis: geometric function theory. Elsevier, Amsterdam. — 2005. — **2**. — P. 687 – 753.

198. Andreian Cazacu C. Moduli inequalities for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. — 1976. — **2**. — P. 17 – 28.

199. Andreian Cazacu C. Modules and quasiconformality // Symposia Mathematica 18. – Academic Press, London. — 1976. — P. 519 – 534.

200. Andreian Cazacu C. A generalization of the quasiconformality, in Topics in Analysis, Colloquium on Mathematical Analysis, Jyvaskyla 1970 [Lecture Notes in Mathematics 419, Springer-Verlag, 1974, — P. 4 – 17].

201. Andreian Cazacu C. Partial differential equations related to extremal problems for quasiconformal mappings, in Ordinary and Partial Differential Equations. [Lecture Notes in Mathematics, 415, Springer-Verlag. — 1974. — P. 1 – 14].

202. Andreian Cazacu C., Stanciu V. BMO-mappings in the plane // Topics in analysis and its applications, 11-30, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 147. – Kluwer Acad. Publ., Dordrecht. — 2004.

203. Astala K. A remark on quasiconformal mappings and BMO-functions // Michigan Math. J. — 1983. — **80** — P. 209 – 212.

204. Astala K. Area dislortron of quasrconformal mapprngs // Acta Math. — 1994. — **173**. — P. 37 – 60.

205. Astala K., Iwaniec T., Koskela P., Martin G. Mappings of BMO-bounded distortion // Math. Annalen. — 2000. — **317**. — P. 703 – 726.

206. Astala K., Gehring F.W. Injectivity, the BMO norm and the universal Teichmfiller space // J. Analyse Math. — 1986. — **46**. — P. 16 – 57.

207. Astala K., Iwaniec T., Martin G. Elliptic Partial Differential Equations and Quasiconformal Mappings in the Plane // Princeton: Princeton University Press. — 2009. — 677 p.

208. Balogh Z.M. Hausdorff dimension distribution of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // J. Anal. Math. — 2001. — **83**. — P. 289 – 312.

209. Balogh Z., Koskela, P. Quasiconformality, quasisymmetry, and removability in Loewner spaces // With an appendix by Jussi Vaisala. Duke Math. J. — 2000. — **101**, № 3. — P. 554 – 577.

210. Balogh Z.M., Monti R., Tyson J.T. Frequency of Sobolev and qusiconformal dimension distortion // Research Report 2010-11, 22.07.2010. — P. 1 – 36.

211. Bates S.M. On the image size of singular maps // Proc. Amer. Math. Soc. — 1992. — **114**. — P. 699 – 705.

212. Bishop C.J. Quasiconformal mappings which increase dimension // Ann. Acad. Sci. Fenn. — 1999. — **24**. — P. 397 – 407.

213. Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M. On conformal dilatation in space //Preprint, Department of Mathematics, University of Helsinki. — 2000. — **256**. — 22 p.

214. Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M. On conformal dilatation in space // Intern. Journ. Math. and Math. Sci. — 2003. — **22**. — P. 1397 – 1420.

215. Birnbaum Z., Orlicz W. Über die Verallgemeinerungen des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen // Studia. Math. — 1931. — **3**. — P. 1 – 67.

216. Bojarski B., Gutlyanskii V., Martio O., Ryazanov V. Infinitesimal geometry of quasiconformal and bi-Lipschitz mappings in the plane // EMS Tracts in Mathematics, 19, European Mathematical Society (EMS), Zurich. — 2013. — 205 p.

217. Bojarski B.V., Gutlyanskiĭ V.Ya., Ryazanov V.I. General Beltrami equations and BMO // Ukr. Math. Bull. — 2008. — **5**, № 3. — P. 305 – 326.

218. Bojarski B.V., Gutlyanskiĭ V.Ya., Ryazanov V.I. On the Beltrami equations with two characteristics // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2009. — **54**, № 10. — P. 935 – 950.

219. Bojarski B., Gutlyanskiĭ V., Ryazanov V. On Integral Condition for General Beltrami Equations // Complex Anal. Oper. Theory. — 2011. — **5**, № 3. — P. 835 – 845.

220. Bojarski B., Hajlasz P., Strzelecki P. Sard's theorem for mappings in Hölder and Sobolev spaces // Manuscripta Math. — 2005. — **118**. — P. 383 – 397.

221. Bojarski B., Iwaniec T. Analytical foundations of the theory of quasiconformal mappings in $\mathbb{R}^n$ // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. — 1983. — **8**, № 2. — P. 257 – 324.

222. Brakalova M.A., Jenkins J.A. On solutions of the Beltrami equation // J. Anal. Math. — 1998. — **76**. — P. 67 – 92.

223. Brakalova M.A., Jenkins J.A. On solutions of the Beltrami equation // II. Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.). — 2004. — **75** (89). — P. 3 – 8.

224. Brania A., Yang Sh. Domains with controlled modulus and quasiconformal mappings // Nonlinear Stud. — 2002. — **9**, 1. — P. 57 – 73.

225. Calderon A.P. On the differentiability of absolutely continuous functions // Riv. Math. Univ. Parma. – 1951. — **2**. — P. 203 – 213.

226. Caraman P. n-dimensional quasiconformal mappings. – Newfoundland, NJ: Haessner Publishing. — 1974.

227. Cesary L. Sulle funzioni assolutamente continue in due variabili // Ann. Scuola Norm. Super. — 1941. — **10**(2). — P. 91 – 101.

228. Cesari L. Sulle transformazioni continue // Annali di Mat. Pura ed Appl. — 1942. — **IV**, № 21. — P. 157 – 188.

229. Chiarenza F., Frasca M., Longo P. $W^{2,p}$-solvability of the Dirichlet problem for nondivergence elliptic equations with VMO coefficients // Trans. Amer. Math. Soc. — 1993. — **336**, № 2. — P. 841 – 853.

230. Church P.T., Timourian J.G. Differentiable Maps with Small Critical Set or Critical Set Image // Indiana Univ. Math. J. — 1978. — **27**. — P. 953 – 971.

231. Church P.T., Timourian J.G. Maps having 0-dimensional critical set image // Indiana Univ. Math. J. — 1978. — **27**. — P. 813 – 832.

232. Cianchi A. A sharp embedding theorem for Orlicz-Sobolev spaces // Indiana Univ. Math. J. — 1996. — **45**, № 1. — P. 39 – 65.

233. Cristea M. Dilatations of homeomorphisms satisfying some modular inequalities. // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. — 2011. — **56**, № 4. — P. 275 – 282.

234. Cristea M. Open discrete mapping having local ACL^n inverses // Complex Var. Elliptic Equ. — 2010. — **55**, № 1-3. — P. 61 – 90.

235. Cristea M. Local homeomorphisms having local ACL^n inverses // Complex Var. Elliptic Equ. — 2008. — **53**, № 1. — P. 77 – 99.

236. Cristea M. Mappings with finite distortion and arbitrary Jacobian sign // Complex Var. Elliptic Equ. — 2007. — **52**, № 1. — P. 43 – 57.

237. Cristea M. Mappings of finite distortion: Zoric's theorem, and equicontinuity results // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. — 2007. — **52**, № 5. — P. 539 – 554.

238. Cristea M. Mappings of finite distortion: boundary extension // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. — 2006. — **51**, № 5-6. — P. 607 – 631.

239. Csörnyei M., Hencl S., Maly J. Homeomorphisms in the Sobolev space $W^{1,n-1}$ // J. Reine Angew. Math. — 2010. — **644**. — P. 221 – 235.

240. David G. Solutions de l'equation de Beltrami avec $\|\mu\|_\infty = 1$ // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. — 1988. — **13**. — P. 25 – 70.

241. Donaldson T. Nonlinear elliptic boundary-value problems in Orlicz-Sobolev spaces // J. Diff. Eq. — 1971. — **10**. — P. 507 – 528.

242. Dybov Yu. On regular solutions of the Dirichlet problem for the Beltrami equations // Complex Var. Elliptic Equ. — 2010. — **55**, № 12. — P. 1099 – 1116.

243. Eremenko A., Hamilton D.H. On the area distortion by quasiconformal mappings // Proc. Amer. Math. Soc. — 1995. — **123**. — P. 2793 – 2797.

244. Fadell A.G. A note on a theorem of Gehring and Lehto // Proc. Amer. Math. Soc. — 1975. — **49**. — P. 195 – 198.

245. Faraco D., Koskela P., Zhong X. Mappings of finite distortion: The degree of regularity. Adv. Math. — 2005. — **190** (2), — P. 300 – 318.

246. Fuglede B. Extremal length and functional completion // Acta Math. — 1957. — **98**. — P. 171 – 219.

247. Gehring F.W. The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping // Acta Math. — 1973. – **130.** — P. 265 – 277.

248. Gehring F.W. Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. — 1962. — **103**. — P. 353 – 393.

249. Gehring F.W. Lipschitz mappings and the p-capacity of ring in n-space // Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N.Y., 1969), Ann. of Math. Studies. — 1971. — **66**. — P. 175–193.

250. Gehring F.W. Quasiconformal mappings, in Complex Analysis and its Applications, V. 2. – International Atomic Energy Agency: Vienna. — 1976.

251. Gehring F.W. Characteristic Properties of Quasidisks, Les presses de l'Universite de Montreal. — 1982.

252. Gehring F.W., Iwaniec T. The limit of mappings with finite distortion. Ann. Acad. Sei. Fenn. Math. — 1999. — **24**. — P. 253 – 264.

253. Gehring F.W., Lehto O. On the total differentiability of functions of a complex variable // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. AI. — 1959. — **272**. — P. 1 – 9.

254. Gehring F.W., Martio O. Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings // J. Anal. Math. — 1985. — **45**. — P. 181 – 206.

255. Gehring F.W., Reich E. Area distortion under quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. — 1966. — **388**. — P. 1 – 15

256. Gehring F.W., Väisälä J. Hausdorff dimension and quasiconformal mappings // J. London Math. Soc. — 1973. — **6**, № 2. — P. 504 – 512.

257. Golberg A. Differential properties of (α, Q)-homeomorphisms // Further Progress in Analysis, World Scientific Publ. — 2009. — P. 218 – 228.

258. Golberg A. Integrally quasiconformal mappings in space // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — **7**, № 2. — P. 53 – 64.

259. Golberg A. Homeomorphism with finite mean dilatations / A. Golberg // Contemp. Math. — 2005. — **382**. — P. 177 – 186.

260. Golberg A., Salimov R. Topological mappings of integrally bounded p-moduli // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. — 2012. — **V. 3** (LXI), № 1. — P. 49 – 66.

261. Golberg A., Salimov R. Equicontinuity of plane homeomorphisms with controlled p-module // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 4-5. — С. 115 – 125.

262. Golberg A., Salimov R. Logarithmic Holder continuity of ring homeomorphisms with controlled p-module // Complex Variables and Elliptic Equations. — **59**, no. 1. — 2014. — P. 91 – 98.

263. Golberg A., Salimov R. Homeomorphisms Lipschizian in the mean // Complex Analysis and Potentioal Theory with Applications, Camb. Sci. Publ., Cambridge. — 2014. — P. 95-111.

264. Golberg A., Salimov R. Extension of the Schwarz Lemma to homeomorphisms with controlled p-module // Georgian Math. J. — 2014. — **21**, no. 3. — P. 273 – 279.

265. Golberg A., Salimov R. Mappings with upper bounds p-moduli // Contemporary Mathematics. — 2016. — **659**. — P. 91 – 113.

266. Golberg A., Salimov R. Holder continuity of homeomorphisms with controlled growth of their spherical means // Complex Anal. Oper. Theory. — 2017. — **11**, № 8. — P. 1825 – 1838.

267. Golberg A., Salimov R. Differentiability of ring homeomorphisms with controlled p-module. Contemp // Math. 699. — 2017. — P. 121 -– 217.

268. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Distortion estimates under mappings with controlled p-module // Ann. Univ. Bucharest. — 2014. — Ser. Math 5 (LXIII). — P. 95 – 114.

269. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Poletskii Type Inequality for Mappings from the Orlicz-Sobolev Classes // Complex Anal. Oper. Theory 10. — 2016. — P. 881 — 901.

270. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Normal Families of Discrete Open Mappings with Controlled p-Module // Contemporary Mathematics. — 2016. — **667**. — P. 83 – 103.

271. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Estimates for jacobian and dilatation coefficients of open discrete mappings with controlled p-module // Complex Anal. Oper. Theory. — 2017. — **11**, № 7, — P. 1521 – 1542.

272. Gossez J.-P., Mustonen V. Variational inequalities in Orlicz-Sobolev spaces // Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl. — 1987. — **11**. — P. 379 – 392.

273. Grinberg E.L. On the smoothness hypothesis in Sard's theorem // Amer. Math. Monthly. — 1985. — **92**, № 10. — P. 733 – 734.

274. Gutlyanskii V.Ya., Golberg A. On Lipschitz continuity of quasiconformal mappings in space // J. Anal. Math. — 2009. — **109**. — P. 233 – 251.

275. Gutlyanskiĭ V.Y., Martio O., Ryazanov V.I., Vuorinen M. On convergence theorems for space quasiregular mappings // Forum Math. — 1998. — **10**. — P. 353 – 375.

276. Gutlyanski V., Martio O., Sugava T., Vuorinen M. On the degenerate Beltrami equation // Trans. Amer. Math. Soc. — 2005. — **357**, № 3. — P. 875 – 900.

277. Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I., Martio O., Vuorinen M. On local injectivity and asymptotic linearity of quasiregular mappings // Studia Math. — 1998. — **128**, № 3. — P. 243 – 271.

278. Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I., Martio O., Vuorinen M. Infinitesimal geometry of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. – 2000. — **25**, № 1. — P. 101 – 130.

279. Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On recent advances in the degenerate Beltrami equations // Укр. мат. вісник. — 2010. — **7**, № 4. — С. 467 – 515.

280. Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. The Beltrami Equation: A Geometric Approach, Developments in Mathematics, **26**. New York: Springer. — 2012. — 301 p.

281. Hajlasz P. Sobolev spaces on an arbitrary metric space // Potential Anal. — 1996. — **5**. — P. 403 – 415.

282. Hajlasz P. Whitney's example by way of Assouad's embedding // Proc. Amer. Math. Soc. — 2003. — **131**. — P. 3463 – 3467.

283. Heinonen J. A capacity estimate on Carnot groups // Bull. Sci. Math. — 1995. — **119**, 1. — P. 475 – 484.

284. Heinonen J. Lectures on Analysis on Metric Spaces // Springer, New York etc. — 2000. — 150 p.

285. Heinonen J., Holopainen I. Quasiregular mappings on Carnot groups // J. Geom. Anal. — 1997. — **7**, 1. — P. 109 – 148.

286. Heinonen J., Kilpelainen T., Martio O. Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations // Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford–New York–Tokio. — 1993.

287. Heinonen J., Koskela P. Sobolev mappings with integrable dilatations // Arch. Rational Mech. Anal. — 1993. — **125**. — P. 81 – 97.

288. Heinonen J., Koskela P. Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry // Acta Math. — 1998. — **181**. — P. 1 – 41.

289. Heinonen J., Koskela P., Shanmugalingam P., Tyson J.T. Sobolev spaces of Banach space-valued functions and quasiconformal mappings // J. Anal. Math. — 2001. — **85**. — P. 87 – 139.

290. Hencl S., Koskela P. Mappings with finite distortion: discreteness and openness for quasi– light mappings // Ann. Inst. H. Poincare Anal. linéaire. — **22** (3). — P. 331 – 342.

291. Hencl S., Koskela P. Regularity of the inverse of a planar Sobolev homeomorphism // Arch. Rat. Mech. Anal. — **180**, 1. — 2006. — P. 75 – 95.

292. Hencl S., Koskela P., Onninen J. A note on extremal mappings of finite distortion // Math. Res. Lett. — 2005. — **12**, № 2–3. — P. 231 – 237.

293. Herron D.A., Koskela P. Mappings with finite distortion: Gauge dimension of generalized quasicircles // Illinois J. Math. — 2003. — **47**, (4). — P. 1243 – 1259.

294. Hesse J. A p-extremal length and p-capacity equality // Ark. Mat. — 1975. — **13**. — P. 131 – 144.

295. Holopainen I., Pankka P. Mappings of finite distortion: Global homeomorphism theorem // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. — 2004. — **29** (1). — P. 59 – 80.

296. Hsini M. Existence of solutions to a semilinear elliptic system through generalized Orlicz-Sobolev spaces // J. Partial Differ. Equ. — 2010. — **23**, № 2. — P. 168 – 193.

297. Hurewicz W., Wallman H. Dimension Theory // Princeton Univ. Press, Princeton. — 1948.

298. Ikoma K. On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space // Nagoya Math. J. — 1965. — **25**. — P. 175 – 203.

299. Iwaniec T., Koskela P., Onninen J. Mappings of finite distortion: Monotonicity and continuity // Invent. Math. — 2001. — **144** (3). — P. 507 – 531.

300. Iwaniec T., Koskela P., Onninen J. Mappings of finite distortion: Compactness // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. — 2002. — **27**, № 2. — P. 391 – 417.

301. Iwaniec T., Martin G. Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis // Clarendon Press, Oxford. — 2001. — 568 p.

302. Iwaniec T., Sbordone C. Riecz transforms and elliptic PDEs with VMO coefficients // J. d'Anal. Math. — 1998. – **74**. — P. 183 – 212.

303. Iwaniec T., Sverák V., On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. — 1993. — **118**. — P. 181 – 188.

304. Jones P.W. Extension theorems for BMO // Indiana Univ. Math. J. — 1980. — **29** — P. 41 – 66.

305. John F., Nirenberg L. On functions of bounded mean oscillation // Comm. Pure Appl. Math. — 1961. — **14**. — P. 415 – 426.

306. Kallunki S. Mappings of finite distortion: The metric definition. Dissertation // Univ. Jyvaskyla, Jyvaskyla. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. — 2002. — **131**. — 33 p.

307. Kaufman R. A singular map of a cube onto a square // J. Diff. Geom. — 1979. — **14**. — P. 593 – 594.

308. Kauhanen J., Koskela P., Maly J. Mappings of finite distortion: condition N // Michigan Math. J. — 2001. — **49**. — P. 169 – 181.

309. Kauhanen J., Koskela P., Maly J. On functions with derivatives in a Lorentz space // Manuscripta Math. — 1999. — **10**. — P. 87 – 101.

310. Koranyi A., Reimann H. Quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Invent, math. — 1985. — **80**. — P. 309 – 338.

311. Koranyi A., Reimann H. Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. — 1995. — **111**, № 1. — P. 1 – 87.

312. Koskela P., Maly J. Mappings of finite distortion: The zero set of Jacobian // J. Eur. Math. Soc. — 2003. — **5**, № 2. — P. 95 – 105.

313. Koskela, P., Martio O. Removability theorems for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. — 1990. — **15**. — P. 381 – 399.

314. Koskela P., Onninen J. Mappings on finite distortion: The sharp modulus of continuity // Trans. Amer. Math. Soc. — 2003. — **355**. — P. 1905 – 1920.

315. Koskela P., Onninen J. Mappings of finite distortion: Capacity and modulus inequalities // J. Reine Angew. Math. — 2006. — **599**. — P. 1–26.

316. Koskela P., Onninen J., Rajala K. Mappings of finite distortion: Injectivity radius of a local homeomorphism. Future trends in geometrical function theory, — P. 169 – 174, Rep. Univ. Jyvaskyla Dep. Math. Stat., 92, Univ. Jyvaskyla, Jyvaskyla. — 2003.

317. Koskela P., Rajala K. Mappings of finite distortion: Removable singularities. Israel J. Math. — 2003. — **136**. — P. 269 – 283.

318. Kovalev L., Onninen J. Boundary values of mappings of finite distortion // Rep. Univ. Jyvaskyla Dep. Math. Stat. — 2003. — **92**. — P. 175 – 182.

319. Kovtonyuk D., Ryazanov V. On the theory of mappings with finite area distortion // J. Anal. Math. — 2008. — **104**. — P. 291 – 306.

320. Khruslov E.Ya., Pankratov L.S. Homogenization of the Dirichlet variational problems in Sobolev-Orlicz spaces. – Operator theory and its applications (Winuipeg, MB, 1998), P. 345-366, Fields Inst. Commun., 25, Amer. Math. Soc,. Providence, RI. — 2000.

321. Koronel J.D. Continuity and k-th order differentiability in Orlicz-Sobolev spaces: $W^k L_A$ ” // Israel J. Math. — 1976. — **24**, № 2. — P. 119 – 138.

322. Krushkal S.L. Quasiconformal mappings and Riemann surfaces, John Wiley and Sons, New York-Toronto, Ont.-London, 1979.

323. Landes R., Mustonen V. Pseudo-monotone mappings in Sobolev-Orlicz spaces and nonlinear boundary value problems on unbounded domains // J. Math. Anal. Appl. — 1982. — **88**. — P. 25 – 36.

324. Lappalainen V., Lehtonen A. Embedding of Orlicz-Sobolev spaces in Hölder spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. — 1989. — **14**, № 1. — P. 41 – 46.

325. Lehto O., Virtanen K. Quasiconformal Mappings in the Plane. – Springer–Verlag, New York. — 1973. — 258 p.

326. Lehto O. Homeomorphisms with a prescribed dilatation. Lecture Notes in Math. – 1968. — **118**. — P. 58 – 73.

327. Lelong-Ferrand J. Sur certaines classes de representations d'un domaine plan variable // Journ. Math, pure et appl. — 1952. — XXXI, № 2. — P. 103 – 126. — XXXI, № 3. — P. 245 – 252.

328. Lelong-Ferrand J. Representation Conforme et transformations a integrale de Dirichlet Bornee // Paris: Gauthier-Villars. — 1955. — 257 p.

329. Lomako T., Salimov R., Sevost'yanov E. On equicontinuity of solutions to the Beltrami equations // Ann. Univ. Bucharest, Math. Ser. — 2010. — **1 (LIX)**, № 2. — P. 263 – 274.

330. Maly J. A simple proof of the Stepanov theorem on differentiability alsmost everywhere // Exposition Math. — 1999. — **17**. — P. 59 – 61.

331. Maly J., Martio O. Lusin's condition (N) and mappings of the class $W^{1,n}$ // J. Reine Angew. Math. — 1995. — **485**. — P. 19 – 36.

332. Manfredi J.J., Villamor E. Mappings with integrable dilatation in higher dimensions // Bull. Amer. Math. Soc. — 1995. — **32**, № 2. — P. 235 – 240.

333. Marcus M., Mizel V. Transformations by functions in Sobolev spaces and lower semicontinuity for parametric variational problems // Bull. Amer. Math. Soc. — 1973. — **79**, № 4. — P. 790 – 795.

334. Margulis G.A., Mostow G.D. The differential of quasi–conformal mapping of a Carnot–Caratheodory spaces // Geom. Func. An. – 1995. — **5**, № 2. — P. 402 – 433.

335. Martio O. Modern tools in the theory of quasiconformal maps // Texts in Math. Ser. B, **27**, Univ. Coimbra, Dept. Mat., Coimbra. — 2000. — P. 1 – 43.

336. Martio O., Miklyukov V. On existence and uniqueness of degenerate Beltrami equation // Complex Var. Theory Appl. – 2004. — **49**, № 7–9. — P. 647 – 656.

337. Martio O., Rickman S. Boundary behavior of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. — 1972. — **507**. — P. 1 – 17.

338. Martio O., Rickman S. Measure properties of the branch set and its image of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. — 1973. — **541**. — P. 1 – 15.

339. Martio O., Rickman S., Väisälä J. Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. — 1969. — **448**. — P. 1 – 40.

340. Martio O., Rickman S., Väisälä J. Distortion and singularities of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. AI. — 1970. — **465**. — P. 1 -– 13.

341. Martio O., Rickman S., Väisälä J. Topological and metric properties of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. — 1971. — **488**. — P. 1 – 31.

342. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Moduli in Modern Mapping Theory // Springer Monographs in Mathematics. – Springer, New York etc. — 2009. — 367 p.

343. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Q-homeomorphisms // Contemporary Math. — 2004. — **364**. — P. 193 – 203.

344. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On Q-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. — 2005. — **30**. — P. 49 – 69.

345. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Mappings with finite length distortion // J. Anal. Math. — 2004. — **93**. — P. 215 – 236.

346. Martio O., Ryazanov V., Vuorinen M. BMO and Injectivity of Space Quasiregular Mappings // Math. Nachr. – 1999. — **205**. — P. 149 – 161.

347. Martio O., Sarvas J. Injectivity theorems in plane and space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. — 1978/1979. — **4**. — P. 384 – 401.

348. Martio O., Väisälä J. Elliptic equations and maps of bounded length distortion // Math. Ann. — 1988. — **282**. — P. 423 – 443.

349. Mattila P. Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Fractals and rectifiability. // Cambridge University Press, Cambridge. — 1995. — 356 p.

350. Maz'ya V. Sobolev Spaces // Springer-Verlag, Berlin. — 1985. — 486 p.

351. Maz'ya V. Lectures on isoperimetric and isocapacitary inequalities in the theory of Sobolev spaces // Contemp. Math. — 2003. — **338**. — P. 307 – 340.

352. Menchoff D. Sur les differentielles totales des fonctions univalentes / D. Menchoff // Math. Ann. — 1931. — **105**. — P. 75 – 85.

353. Miniowitz R. Normal families of quasimeromorphic mappings // Proc. Amer. Math. Soc. — 1982. — **84**, № 1. — P. 35 – 43.

354. Mitchell J. On Carnot-Caratheodory metrics // J. Diff. Geom. — 1985. — **21**. — P. 35 – 45.

355. Nakki R. Boundary behavior of quasiconformal mappings in n-space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. — 1970. — **484**. — P. 1 – 50.

356. Norton A. A critical set with nonnull image has large Hausdorff dimension // Trans. Amer. Math. Soc. – 1986. — **296**, № 1. — P. 367 – 376.

357. Onninen J. Differentiability of monotone Sobolev functions // Real. Anal. Exchange. — 2000/2001. — **26**, № 2. — P. 761 – 772.

358. Onninen J. Mappings of finite distortion: minors of the differential matrix // Calc. Var. Partial Differential Equations. — 2004. — **21**, № 4. — P. 335 – 348.

359. Onninen J. Mappings of finite distortion: continuity // Dept. Math. Stat., University of Jyväskylä, Dissertation. — 2002. — **84**. — 24 p.

360. Orlicz W. Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B // Bull. Intern. de l'Acad. Pol. Serie A, Cracovie. — 1932. — P. 207 – 220.

361. Orlicz W. Über Räume (L^M) // Bull. Intern. de l'Acad. Pol. Serie A, Cracovie. — 1936. — P. 93 – 107.

362. Palagachev D.K. Quasilinear elliptic equations with VMO coefficients // Trans. Amer. Math. Soc. — 1995. — **347**, № 7. — P. 2481 – 2493.

363. Pankka P. Mappings of finite distortion and weighted parabolicity // Future trends in geometrical function theory. — P. 175–182, Rep. Univ. Jyvaskyla Dep. Math. Stat., **92**, Jyvaskyla.

364. Pansu P. Metriques de Carnot-Caratheodory et quasiisometries des espaces symetriques de rang un // Ann. of Math. — 1989. — **119**. — P. 1 – 60.

365. Perovich M. Isolated singularity of the mean quasiconformal mappings // Lecture Notes in Math. — 1979. — **743**. — P. 212 – 214.

366. Plaksa S.A. Schwarz boundary-value problems for solutions of a generalized Cauchy—Riemann system with a singular line // Укр. мат. вісник. — 2019. — **16**, № 2. — С. 200–214.

367. Quinn F., Sard A. Hausdorff conullity of critical images of Fredholm maps // Amer. J. Math. — 1972. — **94**. — P. 1101 – 1110.

368. Rado T., Reichelderfer P.V. Continuous Transformations in Analysis // Springer–Verlag, Berlin. — 1955. — 441 p.

369. Ragusa M.A. Elliptic boundary value problem in vanishing mean oscillation hypothesis // Comment. Math. Univ. Carolin. — 1999. — **40**, № 4. — P. 651 – 663.

370. Rajala K., Rajala K. Mappings of finite distortion: the Rickman-Picard theorem for mappings of finite lower order // J. Anal. Math. — 2004. — **94**. — P. 235 – 248.

371. Rajala K. Mappings of finite distortion: Removability of Cantor Sets // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. — 2004. — **29**, № 2. — P. 269 – 281.

372. Rajala K. Mappings of finite distortion: removable singularities for locally homeomorphic mappings // Proc. Amer. Math. Soc. — 2004. — **132**, № 11. — P. 3251 – 3258.

373. Rajala K., Zapadinskaya A., Zürcher T. Generalized Hausdorff dimension distortion in euclidean spaces under Sobolev mappings // ArXiv:1007.2091v1 [math.CA]. — 2010. — P. 1 – 13.

374. Ransford T. Potential Theory in the Complex Plane // Cambridge University Press. — 1995. — 244 p.

375. Rickman S. Path lifting for discrete open mappings // Duke Math. J. — 1973. — **40**. — P. 187 – 191.

376. Rickman S. A path lifting construction for discrete open mappings with application to quasimeromorphic mappings // Duke Math. J. — 1975. — **42**, № 4. — P. 797 – 809.

377. Rickman S. On the value distribution of quasimeromorphic maps / S. Rickman // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. — 1976. — **2**. — P. 447 – 466.

378. Rickman S. On the number of omitted values of entire quasiregular mappings // J. d'Anal. Math. — 1980. — **37**. — P. 100 – 117.

379. Rickman S. The analogue of Picard's theorem for quasiregular mappings in dimension three // Acta Math. — 1985. — **154**, № 3–4. — P. 246 – 250.

380. Rickman S. Nonremovable Cantor sets for bounded quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. — 1995. — **20**. — P. 155 – 165.

381. Rickman S. Defect relation and its realization for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. — 1995. — **20**. — P. 207 – 243.

382. Rickman S. Quasiregular Mappings // Springer, Berlin etc. — 1993. — 213 p.

383. Rickman S., Srebro U. Remarks on the local index of quasiregular mappings // J. d'Anal. Math. — 1986. — **46**. — P. 246 – 250.

384. Reich E., Walczak H. On the behavior of quasiconformal mappings at point // Trans. Amer. Math. Soc. — 1965. — **117**. — P. 335 – 351.

385. Reimann H.M., Rychener T. Functions of bounded mean oscillation and quasiconformal mappings // Comment. Math. Helv. — 1974. — **49**. — P. 260 – 276.

386. Reimann H.M., Rychener T. Funktionen Beschränkter Mittlerer Oscillation // Lecture Notes in Math. — 1975. — **487**.

387. Ryazanov V.I., Salimov R.R., Sevost'yanov E.A. On convergence analysis of space homeomorphisms // Siberian Advances in Mathematics. — 2013. — **23**, no. 4. — P. 263 – 294.

388. Ryazanov V., Salimov R., Srebro U., Yakubov E. On Boundary Value Problems for the Beltrami Equations // Contemp. Math. — 2013. — **591**. — P. 211 – 242.

389. Ryazanov V., Sevostyanov E. Equicontinuity of mappings quasiconformal in the mean // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. — 2011. — **36**. — P. 231 – 244.

390. Ryazanov V., Sevost'yanov E. On compactness of Orlicz-Sobolev mappings // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. — 2012. — **3 (LXI)**, № 1. — P. 79-87.

391. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. BMO-quasiconformal mappings // J. Anal. Math. — 2001. — **83**. — P. 1 – 20.

392. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Plane mappings with dilatation dominated by functions of bounded mean oscillation // Sib. Adv. Math. — 2001. — **11**, № 2. — P. 94 – 130.

393. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Beltrami equation and FMO functions // Contemp. Math. — 2005. — **382**. — P. 357 – 364.

394. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On ring solutions of Beltrami equation // J. Anal. Math. — 2005. — **96**. — P. 117 – 150.

395. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Finite mean oscillation and the Beltrami equation // Israel J. Math. — 2006. — **153**. — P. 247 – 266.

396. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On the theory of the Beltrami equation // Укр. мат. ж. — 2006. — **58**, № 11. — С. 1571 – 1583.

397. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. The Beltrami equation and ring homeomorphisms // Укр. мат. вісник. — 2007. — **4**, № 1. — P. 79 – 115; transl. in Ukr. Math. Bull. - 2007. - 4, no. 1. — P. 79 – 115.

398. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On convergence theory for Beltrami equations // Укр. мат. вісник. — 2008. — **5**, № 4. — P. 524 – 535; transl. in Ukr. Math. Bull. — 2008. — **5**, № 4. — P. 517 – 528.

399. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. To strong ring solutions of the Beltrami equations // Uzbek. Math. J. — 2009. — № 1. — P. 127 – 137.

400. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On strong solutions of the Beltrami equations // Complex Var. Elliptic Equ. — 2010. — **55**, № 1-3, — P. 219 – 236. DOI 10.1080/17476930903100417. MR2599622 (2011c:30068)

401. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On strong solutions of the Beltrami equations // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2010. — **55**, № 1–3. — P. 219 – 236.

402. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On strong solutions of the Beltrami equations // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2010. — **55**, № 1–3. — P. 219 – 236.

403. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Integral conditions in the mapping theory // Укр. мат. вест. — 2010. — **7**, № 1. — С. 73 – 87.

404. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Integral conditions in the mapping theory // Укр. мат. вiсник. — 2010. — **7**, № 1. — С. 73 – 87; transl. in Math. Sci. J. — 2011. — **173**, № 4. — P. 397 – 407.

405. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Integral conditions in the theory of the Beltrami equations // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2012. — **57**, № 12. — P. 1247 – 1270.

406. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Integral conditions in the theory of the Beltrami equations // Complex Variables and Elliptic Equations **57**, № 12, December 2012, — P. 1247 – 1270.

407. Ryazanov V., Salimov R., Srebro U., Yakubov E. On Boundary Value Problems for the Beltrami Equations // Contemporary Math. — 2013. — **591**. — P. 211 – 243.

408. Salimov R. On regular homeomorphisms in the plane // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. — 2010. — **35**. — P. 285 – 289.

409. Salimov R. On Q-homeomorphisms with respect to p-modulus // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. — 2011. — V. 60, № 2. — P. 207 – 213.

410. Salimov R. On finitely Lipschitz space mappings // Сиб. электрон. мат. изв. — 2011. — V. 8. — P. 284 – 295.

411. Salimov R. ACL and differentiability of Q-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. — 2008. — **33**. — P. 295 – 301.

412. Salimov R.R., Sevost'yanov E.A. ACL and differentiability of open discrete ring (p, Q)-mappings // Мат. Студiї. — 2011. — **35**, № 1. — P. 28 – 36.

413. Salimov R., Sevost'yanov E. The Poletskii and Vaisala inequalities for the mappings with (p,q)-distortion // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2014. — **59**, № 2. — P. 217 – 231.

414. Salimov R.R., Sevost'yanov E.A. ACL and differentiability of the open discrete ring mappings // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2010. — **55**, № 1–3. — P. 49 – 59.

415. Sarason D. Functions of vanishing mean oscillation // Trans. Amer. Math. Soc. — 1975. — **207**. — P. 391 – 405.

416. Sard A. The measure of the critical values of differentiable maps // Bull. Amer. Math. Soc. — 1942. — **48**. — P. 883 – 890.

417. Sard A. The equivalence of n-measure and Lebesgue measure in E_n // Bull. Amer. Math. Soc. — 1943. — **49**. — P. 758 – 759.

418. Sard A. Images of critical sets // Ann. Math. — 1958. — **68**, № 2. — P. 247 – 259.

419. Sard A. Hausdorff measure of critical images on Banach manifolds // Amer. J. Math. — 1965. — **87**. — P. 158 – 174.

420. Sevost'yanov E. Compactness theory and mappings with finite length distortion // Sib. Adv. in Math. — 2009. — **19**, № 3. — P. 179 – 191.

421. Sevost'yanov E.A. The Väisälä inequality for mappings with finite length distortion // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2010. — **55**, № 1–3. — P. 91 – 101.

422. Serrin J. On the differentiability of functions of several variables // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1961. — **7**. — P. 359 – 372.

423. Srebro U. Conformal capacity and quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. Math. — 1973. — **529**. — P. 1 – 8.

424. Srebro U., Yakubov E. The Beltrami equation // Handbook of Complex Analysis, In: Geometry Function Theory, Amsterdam: Elsevier. — 2005. — **2**. — P. 555 – 597.

425. Stein E.M. Editor's note: The differentiability of functions in $\mathbb{R}^n$ // Ann. Math. — 1981. — **113**. — P. 383 – 385.

426. Stepanoff W. Sur la résolution du probléme de Dirichlet á l'aide de l'intégrale de Poisson // Мат. сб. — 1924. — **32**, № 1. — P. 111 – 114.

427. Tengvall V. Differentiability in the Sobolev space $W^{1,n?1}$ // Calculus of variations and partial differential equations — 2014. — **51**, № 1–2. — P. 381 – 399.

428. Tengvall V. Absolute continuity of mappings with finite geometric distortion // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A 1. Math. — 2015. — **40**. — P. 3 – 15.

429. Troyanov M., Vodop'yanov S. Liouville type theorems for mappings with bounded (co)-distortion // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. — 2002. — **52**, № 6. — P. 1753 – 1784.

430. Tukia P. Compactness properties of $\mu-$homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. 1. — 1991. — **16**. — P. 47 – 69.

431. Tuominen H. Characterization of Orlicz-Sobolev space // Ark. Mat. — 2007. — **45**, № 1. — P. 123 – 139.

432. Tyson J.T. Metric and geometric quasiconformality in Ahlfors regular Loewner spaces // Conform. Geom. Dyn. (electronic). — 2001. — **5**. — P. 21 – 73.

433. Ukhlov A., Vodop'yanov S. Mappings associated with weighted Sobolev Spaces // Complex Anal. Dynam. Sys. III. Contemp. Math. — 2008. — **455**. — P. 363 – 382.

434. Väisälä J. On quasiconformal mappings in space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. — 1961. — **298**. — P. 1 – 36.

435. Vaisala J. Two new characterizations for quasiconformality // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A 1. Math. — 1965. — **362**. — P. 1 — 12.

436. Väisälä J. Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lecture Notes in Math. Springer–Verlag, Berlin. — 1971. — **229**. — 144 p.

437. Väisälä J. Modulus and capacity inequalities for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1 Math. — 1972. — **509**. — P. 1 – 14.

438. Vasil'ev A. Moduli of families of curves for conformal and quasiconformal mappings // Lecture Notes in Math. Springer–Verlag, Berlin-–New York.— 2002. — **1788**. — 211 p.

439. Vodop'yanov S.K. Description of composition operators of Sobolev spaces // Doklady Mathematics. — 2005. — **71**, № 1. — P. 5 – 9.

440. Vodop'yanov S.K. Composition operators on Sobolev spaces // Complex Analysis and Dynamical Systems II, Contemporary Mathematics Series. — 2005. — **382**. — P. 401 – 415.

441. Vodopyanov S.K. Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The interaction of analysis and geometry, Contemporary mathematics, Amer. Math. Soc., Providence, RI — 2007. — **424**. — P. 247 — 301.

442. Vopyanov S.K. Foundations of the theory of mappings with bounded distortion on carnot groups, Interaction of Analysis and Geometry, Contemporary Mathematics Series. — 2007. — **424**. — P. 303 – 344.

443. Vuillermot P.A. Hölder-regularity for the solutions of strongly nonlinear eigenvalue problems on Orlicz-Sobolev space // Houston J. Math. — 1987. — **13**. — P. 281 – 287.

444. Vuorinen M. Conformal Geometry and Quasiregular Mappings // Lecture Notes in Math. 1319. – Berlin: Springer–Verlag. — 1988. — 209 p.

445. Vuorinen M. Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n-space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1. Math. Dissertationes. — 1976. — **11**. — P. 1 – 44.

446. Vuorinen M. On the Iversen-Tsuji theorem for quasiregular mappings // Math. Scand. — 1977. — **41**. — № 1. — P. 90 – 98.

447. Vuorinen M. Some inequalities for the moduli of curve families // Michigan Math. J. — 1983. — **30**. — P. 369 – 380.

448. Whitney H. A function not constant on a connected set of critical points // Duke Math. J. — 1935. — **1**. — P. 514 – 517.

449. Whyburn G.T. Analytic Topology // Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 28, Amer. Math. Soc., New York. — 1942.

450. Wilder R.L. Topology of Manifolds // AMS, New York. — 1949. — 409 p.

451. Ziemer W.P. Extremal length and conformal capacity // Trans. Amer. Math. Soc. — 1967. — **126**, № 3. — P. 460 – 473.

452. Ziemer W.P. Extremal length and p-capacity // Michigan Math. J. — 1969. — 16, № 1, — P. 43 – 51.

453. Zorich V.A. The global homeomorphism theorem for space quasiconformal mappings, its development and related open problems // Berlin etc.: Springer–Verlag, 1992. — P. 132 – 148. – (Quasiconformal Space Mappings – A collection of Surveys 1960–1990: Lecture Notes in Math., V. 1508).

ДОДАТОК

Цей додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Salimov R. On regular homeomorphisms in the plane // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. — 2010. — 35. — P. 285–289.

2. Salimov R. On Q-homeomorphisms with respect to p-modulus // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. — 2011. — **60**, № 2. — P. 207–213.

3. Salimov R. On finitely Lipschitz space mappings // Сиб. электрон. мат. изв. — 2011. — **8**. — P. 284–295.

4. Ковтонюк Д.А., Салимов Р.Р. Асимптотическое поведение в точке обобщенных квазиизометрий // Укр. мат. журн. — 2011. — **63**, № 4. — С. 481–488. (переклад у виданні: Ukr. Math. J. — 2011. — **63** (4). — P. 555–563.)

5. Golberg A., Salimov R. Topological mappings of integrally bounded p-moduli // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. — 2012. — **3** (LXI), № 1. — P. 49–66.

6. Салимов Р.Р. Об оценке меры образа шара // Сиб. мат. журн. — 2012. — **53**, № 6. — С. 920–930. (переклад у виданні: Siberian Math. J. — 2012. — **53** (4). — P. 739–747.)

7. Ryazanov V., Salimov R., Srebro U., Yakubov E., On Boundary Value Problems for the Beltrami Equations // Contemporary Mathematics. — 2013. — V. 591. — P. 211–242.

8. Ryazanov V.I., Salimov R.R., Sevost'yanov E.A. On convergence analysis of space homeomorphisms // Siberian Advances in Mathematics. — 2013. — **23**, no. 4. — P. 263–294.

9. Golberg A., Salimov R. Equicontinuity of plane homeomorphisms with controlled p-module // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 4–5. — С. 115–125.

10. Рязанов В.И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. О классах Орлича-Соболева и отображениях с ограниченным интегралом Дирихле // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 9. — С. 1254–1265. (переклад у виданні: Ukr. Math. J. — 2014. — **65** (9). — P. 1394–1405.)

11. Салимов Р.Р. О липшицевости одного класса отображений // Мат. заметки. — 2013. — **94**, № 4. — С. 591–599. (переклад у виданні: Math. Notes — 2013. — **94** (4). — P. 559–566.)

12. Салимов Р.Р. К теории кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля // Укр. мат. вісник. — 2013. — **10**, № 3. — С. 379–396. (переклад у виданні: J. Math. Sci. — 2014. — **196** (5). — P. 679–692.)

13. Салимов Р.Р. Об одном свойстве кольцевых Q -гомеоморфизмов относительно p-модуля // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 5. — С. 728–733. (переклад у виданні: Ukr. Math. J. — 2013. — **65** (5). — P. 806–813.)

14. Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. К теории классов Орлича-Соболева // Алгебра и анализ. — 2013. — **25**, № 6. — С. 50–102. (переклад у виданні: St. Petersburg Math. J. — 2014. — **25** (6). — P. 929-963.)

15. Ковтонюк Д.А., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. К теории отображений классов Соболева и Орлича–Соболева. — К.: Наукова думка, 2013. — 303 с.

16. Golberg A., Salimov R. Logarithmic Holder continuity of ring homeomorphisms with controlled p-module // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2014. — **59**, no. 1. — P. 91–98.

17. Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. Граничное поведение классов Орлича-Соболева // Мат. заметки. — 2014. — **95**, № 4. — С. 564–576. (переклад у виданні: Math. Notes — 2014. — **95** (4). — P. 509–519.)

18. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Distortion estimates under mappings with controlled p-module // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math 5 (LXIII) — 2014. — P. 95–114.

19. Golberg A., Salimov R. Extension of the Schwarz Lemma to homeomorphisms with controlled p-module // Georgian Math. J. — 2014. — **21**, no. 3. — P. 273–279.

20. Салимов Р.Р. О кольцевых Q-отображениях относительно неконформного модуля // Дальневост. мат. журн. — 2014. — **14**, № 2. — С. 257–269.

21. Салимов Р.Р. Нижние оценки p-модуля и отображения класса Соболева // Алгебра и анализ. — 2014. — **26**, № 6. — С. 143–171. (переклад у виданні: St. Petersburg Math. J. — 2015. — **26** (6). — P. 965–984.)

22. Golberg A., Salimov R. Homeomorphisms Lipschizian in the mean // Complex Analysis and Potentioal Theory with Applications, Camb. Sci. Publ., Cambridge. — 2014. — P. 95–111.

23. Салимов Р.Р. О конечной липшицевости классов Орлича-Соболева // Владикавк. мат. журн. — 2015. — **17**, № 1. — P. 64–77.

24. Афанасьева Е.С., Салимов Р.Р. Асимптотическое поведение на бесконечности решений уравнения Бельтрами // Збірник праць Ін-ту математики НАНУ. — 2015. — **12**, № 3. — С. 9–16.

25. Салимов Р.Р. О новом условии конечной липшицевости классов Орлича–Соболева // Мат. студії. — 2015. — **44**, №1. — С. 27–35.

26. Салимов Р.Р. Нижние Q-гомеоморфизмы относительно p-модуля // Укр. мат. вісник. — 2015. — **12**, № 4. — С. 484–510. (переклад у виданні: J. Math. Sci. — 2016. — **218** (1). — P. 47–68.)

27. Салимов Р.Р. Асимптотическое поведение классов Орлича–Соболева на бесконечности // Збірник праць Ін-ту математики НАНУ. — 2015. — **12**, № 4. — С. 273–284.

28. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Poletskii Type Inequality for Mappings from the Orlicz–Sobolev Classes // Complex Anal. Oper. Theory. — 2016. — 10. — P. 881–901.

29. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Estimates for jacobian and dilatation coefficients of open discrete mappings with controlled p-module // Complex Anal. Oper. Theory. — 2017. — **11**, № 7, — P. 1521–1542.

30. Рязанов В.И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. Нормальность классов Орлича–Соболева // Укр. мат. журнал. — 2016. — **68**, № 1. — С. 106–116. (переклад у виданні: Ukr. Math. J. — 2016. — **68** (1). — P. 115–126.)

31. Салимов Р.Р. Об оценке меры образа шара для нижних Q-гомеоморфизмов // Доп. НАН України. — 2016. — № 1. — С. 19–25.

32. Салимов Р.Р. Метрические свойства классов Орлича-Соболева // Укр. мат. вісник. — 2016. — **13**, № 1. — С. 129–141. (переклад у виданні: J. Math. Sci. — 2017. — **220** (5). — P. 633–642.)

33. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Normal Families of Discrete Open Mappings with Controlled p-Module // Contemporary Mathematics. — 2016. — V. 667. — P. 83–103.

34. Golberg A., Salimov R. Mappings with upper bounds p-moduli // Contemporary Mathematics. — 2016. — V. 659. — P. 91–113.

35. Golberg A., Salimov R. Differentiability of ring homeomorphisms with controlled p-module // Contemporary Mathematics. — 2017. — V. 699. — P. 121–217.

36. Golberg A., Salimov R. Holder continuity of homeomorphisms with controlled growth of their spherical means // Complex Anal. Oper. Theory. — 2017. — **11**, N 8. — P. 1825–1838.

37. Салимов Р.Р. О степенном порядке роста нижних Q-гомеоморфизмов // Владикавк. мат. журн. — 2017. — **19**, № 2. — С. 36–48.

38. Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. Об абсолютной непрерывности отображений, искажающих модули цилиндров // Укр. мат. журн. — 2017. — **69**, № 6. — С. 860–864. (переклад у виданні: Ukr. Math. J. — 2017. — **69** (6). — P. 1001—1006.)

39. Афанасьева Е.С., Рязанов В.И., Салимов Р.Р. К теории отображений класса Соболева с критическим показателем // Укр. мат. вісник. — 2018. — **15**, № 2. — С. 154–176. (переклад у виданні: J. Math. Sci. — 2019. — **239** (1). — P. 1 – 16.)

40. Афанасьева Е.С., Рязанов В.И., Салимов Р.Р. К теории классов Соболева с критическим показателем// Доп. НАН України. — 2019. — № 8. — С. 3–8.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Salimov R.R., Sevostyanov E.A. Differentiability a.e. and ACL – property of some generalizations of quasiregular mappings. // Conformal Structures and Dynamics (CODY) Third Year Conference, Bendlewo, Poland, September 21–26, 2009, abstracts. – 2009. – P. 8–9.

2. Salimov R.R. Asymptotic behavior of generalized quasi-isometries. // International Conference on Complex Analysis, dedicated to the memory of A. Goldberg, Lvov, May 31 – June 5, 2010, abstracts. – 2010. – P. 51–52.

3. Salimov R.R., Sevostyanov E.A. Estimate of inner dilatation of the mappings with non-bounded characteristics of quasiconformality. // International Conference on Complex Analysis, dedicated to the memory of A. Goldberg, Lvov, May 31 – June 5, 2010, abstracts. – 2010. – P. 52–54.

4. Salimov R.R. On finite Lipschitz of space mappings. // International Conference on the modern analysis, Donetsk, Ukraine, June 20–23, 2011, P. 97.

5. Kovtonyuk D.A., Ryazanov V.I., Salimov R.R., Sevost'yanov E.A. On mappings in the Orlicz-Sobolev classes // International Conference on the modern analysis, Donetsk, Ukraine, June 20–23, 2011, P. 59.

6. Salimov R.R. About some properties of space mappings. // Abstract of report of the internat. conf. dedic. to the 120th anniv. of Stefan Banach. — Lviv. — 2012. — P. 155.

7. Salimov R.R. Holder continuity for the ring Q-homeomorphisms with respect to p-modulus. // International Conference "Complex Analysis and Related Topics Lviv, 23–28 September 2013, c. 66.

8. Salimov R., Afanaseva O. On some mappings in $\lambda(r)$-regular metric spaces. // International Conference "Complex Analysis and Related Topics Lviv, 23–28 September 2013, c. 70.

9. Salimov R. Hölder continuity of ring Q-homeomorphisms with respect to p-module. // Abstract of Int. Conf. "Complex Analysis, Potential Theory and Applications Kyiv, Ukraine, August 19 – 23, 2013 (режим доступу: http://www.imath.kiev.ua/ $\sim$ complex/conf2013/abstracts.html)

10. Salimov R.R., Sevost'yanov E.A. On some local properties of space generalized quasiisometries. // Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, 1-4 липня 2015 р., с. 147-148.

11. Salimov R.R. On finite lipschitz Orlicz -Sobolev classes. // Міжнародна конференція молодих математиків, Київ: Тези доповідей. – Київ, 2015. – С. 59.

12. Salimov R.R. Extremal problem for areas of images of discs. // International Conference "Complex Analysis and Related Topics Lviv, May 30-June 4, 2016, p. 71.

13. Salimov R., Klishchuk B. On extremal problem for area functional. // Міжнародна конференція молодих математиків, Київ: Тези доповідей. – Київ, 2017. – с. 32.

14. Salimov R., Klishchuk B. The extremal problem for the area of an image of an disc. // International scientific conference " Algebraic and geometric methods of analysis" (Odesa, May 31 – June 5, 2017): Abstracts. – 2017. – P. 70.

15. Salimov R., Klishchuk B. A lower bound for areas of images of discs. // Міжнародна конференція «Теорія наближення функцій та її застосування», присвячена 75-річчю з дня народження члена–кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця, Слов'янськ, : Тези доповідей. – Слов'янськ, 2017.

16. Golberg A., Salimov R. Mappings with integrally controlled p-moduli // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, September 18-23, 2017, Lviv, Ukraine, p. 116-117.

17. Салимов Р.Р., Клищук Б.А. Нижняя оценка для объёма образа шара. // International scientic conference «Algebraic and geometric methods of analysis», Odesa (Ukraine) May 30 — June 4, 2018.

18. Salimov R., Klishchuk B. Lower bounds for the area of the image of a disc. // Hypercomplex Seminar 2018: (Hyper)Complex Analysis in Differential Equations, Geometry and Physical Applications, Mathematical Conference Center at Bedlewo (Poland).

19. Салімов Р.Р., Кліщук Б.А. Нижні оцінки для площі образу круга. // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, Ворохта: Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2018.

20. Salimov R., Klishchuk B. An extremal problem for the volume of the image of a ball. // Hypercomplex Seminar 2019: (Hyper)Complex Analysis in Differential Equations, Geometry and Physical Applications (including (de)composition problems of binary up to senary structures in alloy and polymer physics), Mathematical Conference Center at Bedlewo (Poland), July 07 – July 14.

21. Салімов Р.Р., Кліщук Б.А. Про поведінку одного класу гомеоморфізмів на нескінченності // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу, Всеукраїнська наукова конференція, Ворохта, 26 лютого - 1 березня, 2020 року, с. 54-56.

22. Салімов Р.Р., Стефанчук М.В. Про локальні властивості розв’язків нелінійних рівнянь Бельтрамі // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу, Всеукраїнська наукова конференція, Ворохта, 26 лютого - 1 березня, 2020 року, с. 80-82.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

— International scientific conference ”Conformal Structures and Dynamics” (CODY) Third Year Conference, Bendlewo, Poland, September 21–26, 2009;

— International Conference on Complex Analysis, dedicated to the memory of A.Goldberg, Lviv, May 31 – June 5, 2010;

— Міжнародній конференції із сучасного аналізу, м. Донецьк, 20–23 червня 2011 року;

— Міжнародній науковій конференції, присвяченій 120-річчю з дня народження С. Банаха, Львів, 2012;

— Mathematical Colloquium, Holon Institute of Technology, Holon, Israel, August 15, 2012;

— Міжнародній науковій конференції ”Комплексний аналіз, теорія потенціалу та застосування”, Київ, 2013;

— International Conference ”Complex Analysis and Related Topics”, Lviv, 23–28 September 2013;

— Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м.Чернівці, 1–4 липня 2015 р., с. 147-148;

— X конгресі Міжнародного товариства з аналізу, його застосувань і обчислень ISAAC, Макао, Китай, 2015;

— Міжнародна конференція молодих математиків, Київ, Україна, 2015;

— International Conference "Complex Analysis and Related Topics Lviv, May 30-June 4, 2016;

— International scientific conference "Algebraic and geometric methods of analysis Odesa, May 31 – June 5, 2017;

— Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця, Слов'янськ, 2017;

— International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, September 18–23, 2017, Lviv, Ukraine;

— International scientific conference ”(Hyper)Complex Analysis in Differential Equations, Geometry and Physical Applications”, Bendlewo, Poland, 2018;

— International scientific conference ”Algebraic and geometric methods of analysis”, May 30 – June 4, 2018, Odesa, Ukraine;

— Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, Ворохта, 2018;

— XII конгресі Міжнародного товариства з аналізу, його застосувань і обчислень ISAAC, Авейро, Португалія, 2019;

— International scientific conference "(Hyper)Complex Analysis in Differential Equations, Geometry and Physical Applications", Bedlewo, Poland, July 07 – July 14, 2019;

— Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу, Всеукраїнська наукова конференція, Ворохта, 26 лютого – 1 березня, 2020 року.