НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Салімов Руслан Радікович

УДК 517.9

МЕТОД НЕКОНФОРМНОГО МОДУЛЯ У ТЕОРІЇ ВІДОБРАЖЕНЬ ЗІ СКІНЧЕННИМ СПОТВОРЕННЯМ

01.01.01 — математичний аналіз
111 — математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико–математичних наук

Київ — 2021

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий консультант:

доктор фізико–математичних наук, професор
ПЛАКСА Сергій Анатолійович,
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу.

Офіційні опоненти:

доктор фізико–математичних наук, професор,
член–кореспондент НАН України
ГУТЛЯНСЬКИЙ Володимир Якович,
Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
м. Слов'янськ, радник при дирекції;

доктор фізико–математичних наук, професор
СКАСКІВ Олег Богданович,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
в.о. завідувача кафедри теорії функцій і функціонального аналізу;

доктор фізико–математичних наук, професор
ФАВОРОВ Сергій Юрійович,
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,
професор кафедри фундаментальної математики.

Захист відбудеться "23" квітня 2021 р. о 15^{00} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий "19" березня 2021 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **РОМАНЮК А. С.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Теорія відображень — це добре розвинена частина сучасного математичного аналізу. Ця теорія бере свій початок зі знаменитих робіт Е. Бельтрамі, К. Гауса, Д. Гільберта, Ж. Ліувіля, А. Пуанкаре, Б. Рімана, Г. Шварца та інших відомих математиків. Теорія аналітичних функцій давно вже стала взірцем найрозвиненіших і ретельно розроблених гілок математики. У цій теорії особливу увагу приділяють конформним відображенням, які знайшли численні важливі застосування у теорії уніформізації, теорії потенціалу, математичній фізиці, гідродинаміці, аеродинаміці, електростатиці й магнітостатиці.

Наприкінці 20-х і на початку 30-х років минулого сторіччя Г. Греч, М.О. Лаврентьєв і Ч. Моррі ввели більш загальний клас відображень, згодом названих квазіконформними. Незабаром квазіконформні відображення були застосовані до класичних проблем про накриваючі ріманових поверхонь (Л. Альфорс), модулі ріманових поверхонь (О. Тейхмюллер) і класифікацію однозв'язних ріманових поверхонь (Л.І. Волковиський). Згодом квазіконформні відображення були визначені у просторах більших розмірностей (М.О. Лаврентьєв, Ф. Герінг, Ю. Вяйсяля), а потім узагальнені до відображень із обмеженим спотворенням (Ю.Г. Решетняк), що називаються також квазірегулярними відображеннями (О. Мартіо, С. Рікман, Ю. Вяйсяля). Відзначимо, що квазірегулярні відображення можуть мати точки розгалуження і є у певному сенсі просторовим аналогом аналітичних функцій. Квазіконформні і квазірегулярні відображення виявилися корисними при вивченні клейнових груп, комплексної динаміки, мероморфних функцій, у топології, теорії пружності, в гідродинаміці, електро- і магнітостатиці в неоднорідних середовищах. У роботах Л. Альфорса, К. Андріян Казаку, Л. Берса, П.П. Белінського, Б.В. Боярського, І.Н. Векуа, С.К. Водопьянова, К. Вертанена, Л.І. Волковиського, М. Вуорінена, Ю. Вяйсяля, Ф. Герінга, В.М. Гольдштейна, В.Я. Гутлянського, В.А. Зоріча, П. Карамана, С.Л. Крушкаля, М.О. Лаврентьєва, О. Лехто, О. Мартіо, Ч. Моррі, Р. Няккі, І.М. Песіна, Ю.Г. Решетняка, С. Рікмана, Б.В. Шабата та інших були вивчені основні властивості таких відображень.

На межі XX-XXI сторіч відбувся перехід від вивчення відображень із обмеженим спотворенням за Решетняком до вивчення так званих відображень зі скінченним спотворенням за Іванцем, характеристики яких вже не є обмеженими в області визначення, а лише скінченними майже скрізь. Такі класи відображень природньо узагальнюють конформні, квазіконформні і квазірегулярні відображення. Вивченню відображень зі скінченним спотворенням присвячені роботи багатьох провідних фахівців із сучасної теорії відображень. Серед них можна виділити роботи К. Астала, Е. Вілламора, С.К. Водопьянова, Ф. Герінга, Т. Іванця, П. Коскели, Дж. Манфреді, Г. Мартіна, О. Мартіо, У. Сребро, В.І. Рязанова, Ю. Хейнонена, І. Холопаінена, Е. Якубова та інших.

Відзначимо, що вказаному переходові передувало вивчення так званих квазіконформних у середньому відображень, що беруть свій початок від робіт С.Л. Крушкаля; згадаємо тут також роботи А. Гольберга, В.І. Круглікова, В.С. Кудьявіна, Р. Кюнау, В.М. Міклюкова, М. Перовіча, І.М. Песіна, Ю.Ф. Стругова, А.В. Сичова та інших авторів. Також маємо згадати вивчення відображень із обмеженим інтегралом Діріхле у донецькій школі з теорії відображень на чолі з Г.Д. Суворовим, де істотно розвинуто теорію граничної поведінки і теорію збіжності таких відображень.

Не зважаючи на значну кількість робіт із теорії квазіконформних відображень і їхніх узагальнень, залишаються актуальними такі проблеми: встановлення мінімальних умов, достатніх для диференційовності відображень майже скрізь, і їхній зв'язок зі класами Соболєва; встановлення оцінок спотворення міри множин і відстаней при відображеннях; дослідження локальної, асимптотичної і граничної поведінки відображень; встановлення умов одностайної неперервності й нормальності сімей відображень; застосування квазіконформних відображень і їхніх узагальнень до дослідження властивостей відображень зі класів Соболєва й Орліча-Соболєва.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана у відділі комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України в рамках наукових тем "Метричні та геометричні задачі теорії аналітичних і субгармонічних функцій та множин", номер державної реєстрації 0116U003060, і "Розробка аналітичних та чисельно–аналітичних методів дослідження задач сучасного природознавства", номер державної реєстрації 0117U004077.

Мета і завдання дослідження. *Об'єкт дослідження* — плоскі і просторові відображення зі скінченним спотворенням.

Предмет дослідження — кільцеві й нижні Q-гомеоморфізми, визначені в термінах неконформного p-модуля.

Мета дисертаційної роботи — дослідження диференціальних, локальних, асимптотичних і граничних властивостей відображень, які задовольняють p-модульні оцінки.

Завдання дослідження:

- розробити метод неконформного модуля для дослідження диференціальних, локальних, асимптотичних і граничних властивостей відображень зі скінченним спотворенням;
- для кільцевих і нижніх Q-гомеоморфізмів, визначених у термінах неконформного p-модуля, довести аналоги нерівності М.О. Лаврентьєва про спотворення площі круга при квазіконформних відображеннях, леми Герінга про локальну ліпшицевість і теореми Ікоми–Шварца;
- встановити нові критерії неперервного й гомеоморфного продовження гомеоморфних розв'язків вироджених рівнянь Бельтрамі з узагальненими похідними й довести теореми існування регулярних розв'язків задачі Діріхле для вироджених рівнянь Бельтрамі в довільних жорданових областях за певних умов на дотичну дилатацію;
- встановити співвідношення між класами Соболєва, Орліча–Соболєва, кільцевими й нижніми Q-відображенями, визначеними в термінах неконформного p-модуля.

Методи дослідження. В дисертаційній роботі використовуються методи геометричної теорії функцій і теорії потенціалу.

Наукова новизна. Усі отримані в роботі результати нові і полягають в наступному:

- отримано характеризацію кільцевих і нижніх Q-гомеоморфізмів у термінах p-модуля і встановлено взаємозв'язок між цими гомеоморфізмами;
- доведено аналоги нерівності М.О. Лаврентьєва про спотворення площі круга при квазіконформних відображеннях, леми Герінга про локальну ліпшицевість і теореми Ікоми–Шварца для кільцевих і нижніх Q-гомеоморфізмів, визначених у термінах p-модуля;
- встановлено, що гомеоморфні розв'язки вироджених рівнянь Бельтрамі з узагальненими похідними — це кільцеві й нижні Q-гомеоморфізми, де Q — дотична дилатація, і доведено узагальнені теореми про неперервне і гомеоморфне продовження вказаних розв'язків і їхню асимптотичну поведінку на нескінченності;
- встановлено загальні умови на дотичну дилатацію, достатні для існування регулярних розв'язків задачі Діріхле для вироджених рівнянь Бельтрамі в довільних жорданових областях;

- встановлено зв'язок класів Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ в областях комплексної площини, а також класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, за умови типу умови Кальдерона на функцію φ, з нижніми й кільцевими Q-гомеоморфізмами, визначеними в термінах p-модуля; узагальнено умови локальної й логарифмічної гельдеровості, степеневого й логарифмічного порядку зростання гомеоморфізмів, що належать наведеним класам Соболєва чи Орліча–Соболєва;

- встановлено достатні умови належності Q-відображень, визначених у термінах p-модуля, до класів Соболєва й доведено узагальнення теореми Боярського–Іванця про невиродженість якобіана відображення; отримано оцінки зверху якобіана й операторної норми матриці Якобі, p-внутрішніх і α-зовнішних дилатацій кільцевих Q-відображень відносно p-модуля; узагальнено результат Ю. Вяйсяля про абсолютну неперервність на лініях квазіконформних відображень на відкриті дискретні відображення, що задовольняють деяку p-модульну нерівність.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертація має теоретичний характер. Результати можуть бути використані у дослідженні різних класів відображень на площині й у просторі. Зокрема, результати дисертації можна застосовувати в теорії нелінійних систем рівнянь із частинними похідними й у теорії класів Соболєва й Орліча–Соболєва.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, здобувач одержав самостійно. У статтях, що опубліковані у співавторстві, особистий внесок здобувача такий: із робіт [4, 7, 8, 10, 14, 15, 17, 18, 24, 28–30, 33, 39, 40] до дисертації увійшли результати, які отримав особисто здобувач; у роботах [5, 9, 16, 19, 22, 34–36] визначення напрямку досліджень належить А. Гольбергу, а доведення всіх тверджень належить здобувачеві; у роботі [38] Є.О. Севостьянову належить ідея послаблення умови гомеоморфності відображень, а дослідження виконав здобувач.

Апробація результатів. Результати роботи доповідались на таких конференціях: International scientific conference "Conformal Structures and Dynamics" (CODY) Third Year Conference, Bendlewo, Poland, September 21–26, 2009; International Conference on Complex Analysis, dedicated to the memory of A.Goldberg, Lviv, May 31 – June 5, 2010; Міжнародній конференції із сучасного аналізу, м. Донецьк, 20–23 червня 2011 року; Міжнародній науковій конференції, присвяченій 120-річчю з дня народження С. Банаха, Львів, 2012; Mathematical Colloquium, Holon Institute of Technology, Holon, Israel,

August 15, 2012; Міжнародній науковій конференції "Комплексний аналіз, теорія потенціалу та застосування", Київ, 2013; International Conference "Complex Analysis and Related Topics", Lviv, 23–28 September 2013; Науковій конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м.Чернівці, 1–4 липня 2015 р., с. 147-148; X конгресі Міжнародного товариства з аналізу, його застосувань і обчислень ISAAC, Макао, Китай, 2015; Міжнародній конференції молодих математиків, Київ, Україна, 2015; International Conference "Complex Analysis and Related Topics", Lviv, May 30-June 4, 2016; International scientific conference "Algebraic and geometric methods of analysis", Odesa, May 31 – June 5, 2017; Міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування" , присвяченій 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця, Слов'янськ, 2017; International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, September 18–23, 2017, Lviv, Ukraine; International scientific conference "(Hyper)Complex Analysis in Differential Equations, Geometry and Physical Applications", Bendlewo, Poland, 2018; International scientific conference "Algebraic and geometric methods of analysis", May 30 – June 4, 2018, Odesa, Ukraine; Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", Ворохта, 2018; XII конгресі Міжнародного товариства з аналізу, його застосувань і обчислень ISAAC, Авейро, Португалія, 2019; International scientific conference "(Hyper)Complex Analysis in Differential Equations, Geometry and Physical Applications", Bedlewo, Poland, July 07 – July 14, 2019; Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", Ворохта, 26 лютого – 1 березня, 2020 року;
і на семінарах: відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук С. А. Плакса); кафедри математичного аналізу Житомирського державного університету імені Івана Франка (керівники: доктори фіз.-мат. наук А. О. Погоруй і Є. О. Севостьянов, канд. фіз.-мат. наук О. Ф. Герус); Київському семінарі з функціонального аналізу (керівники: академік НАН України Ю. С. Самойленко, член-кор. НАН України А. Н. Кочубей, доктори фіз.-мат. наук О. В. Антонюк, В. А. Михайлець, В. Л. Островський); Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівник: доктор фіз.-мат. наук О. Б. Скасків); загальноінститутському семінарі Інституту прикладної математики і механіки НАН України, м. Слов'янськ (керівник: член-кор. НАН України В. Я. Гутлян-

ський); Харківському міському семінарі з теорії функції (керівники: доктори фіз.-мат. наук С. Ю. Фаворов і Л. Б. Голінський); семінарі з диференціальних рівнянь Інституту математики Польської академії наук (керівник: академік ПАН Б. Боярський), м. Варшава, Польща; семінарі з геометричної теорії функцій в Холонському Інституті технологій (керівник: проф. А. Гольберг), м. Холон, Ізраїль.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 40 наукових роботах [1—40], внесених до переліку фахових видань із фізико–математичних наук, серед яких монографія [15] у співавторстві і 26 статей [1,4,6–8,10–14,16,17,19,21,25,26,28–30,32–36,38,39] у виданнях, внесених до міжнародних науково–метричних баз Scopus і Web of Science. Частково вони також висвітлені у матеріалах міжнародних конференцій [41–62].

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, 6 розділів, висновків, списку використаних джерел (що містить 453 найменування) і додатка, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації й відомості про апробацію результатів дисертації. Повний обсяг роботи становить 365 сторінок друкованого тексту.

Подяки. Висловлюю щиру подяку науковому консультанту, професорові Плаксі Сергію Анатолійовичу за постійну увагу до роботи, корисні поради й підтримку, а також професорові Рязанову Володимиру Іллічу за обговорення результатів і плідні наукові дискусії за темою роботи.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** визначено об'єкт і предмет дослідження, обґрунтовано актуальність теми дисертаційного дослідження, сформульовану мету і завдання, визначено методи дослідження, його наукову новизну, теоретичне і практичне значення, прокоментовано апробацію, описано структуру дисертаційної роботи і її основний зміст.

У **розділі 1** дисертаційної роботи викладено огляд літератури за темою дослідження і вказано на місце отриманих здобувачем результатів у загальній теорії з окреслених напрямків.

Виклад *основних результатів* дисертації починається з **розділу 2**, де розглянуті кільцеві Q-гомеоморфізми відносно p-модуля.

Надалі D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, m — міра Лебега в $\mathbb{R}^n$. В записі $f : D \to \mathbb{R}^n$ припускаємо, що відображення f неперервне в D.

Кривою γ називається неперервне відображення відрізка $[a, b]$ в $\mathbb{R}^n$. Під *сім'єю* Γ *кривих* γ розуміємо довільний набір кривих. Позначимо $f(\Gamma) :=$

$\{f \circ \gamma \,|\, \gamma \in \Gamma\}$ і через $\Delta(E, F, D)$ — сім'ю всіх кривих, таких, що $\gamma(0) \in E$, $\gamma(1) \in F$ і $\gamma(t) \in D$ при $t \in (0, 1)$.

Борелеву функцію $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ називають допустимою для сім'ї кривих Γ в $\mathbb{R}^n$ і пишуть $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, якщо $\int\limits_\gamma \rho(x)\,|dx| \geqslant 1$ для всіх кривих $\gamma \in \Gamma$. *p-модулем* сім'ї кривих Γ в $\mathbb{R}^n$ при $p > 1$ називають величину

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\, dm(x)\,. \tag{1}$$

У випадку $p = n$ модуль $M_n(\Gamma)$ є конформним інваріантом (тобто зберігається при конформних відображеннях) і називається конформним модулем сім'ї кривих Γ. Якщо $p \neq n$, то $M_p(\Gamma)$ загалом не зберігається при конформних відображеннях. Тому $M_p(\Gamma)$ при $p \neq n$ називають також неконформним модулем сім'ї кривих Γ.

Нехай $Q : D \to [0\,, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція і $p > 1$. Гомеоморфізм $f : D \to D'$ називають *Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля*, якщо

$$M_p(f\Gamma) \leqslant \int\limits_D Q(x)\, \rho^p(x)\, dm(x) \tag{2}$$

для будь-якої сім'ї Γ кривих у D і будь-якої функції $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$.

Інтегральні оцінки типу (2) при $p = n = 2$ вказані в роботах Л. Альфорса, О. Лехто і К. Віртанена для квазіконформних відображень на площині й у роботі Ю.Ф. Стругова при $p = n$ для відображень, квазіконформних у середньому. У роботі В.Я. Гутлянського, К. Бішопа, О. Мартіо і М. Вуорінена (2000 р.) нерівність вигляду (2) була доведена при вивченні локальних властивостей просторових квазіконформних відображень, що стало безпосереднім поштовхом для введення поняття Q-гомеоморфізму. Це поняття узагальнює поняття квазіконформного відображення за Вяйсяля і було введене при $p = n$ у роботі О. Мартіо, В. Рязанова, У. Сребро і Е. Якубова, а при $p \neq n$ у роботі А. Гольберга.

Нехай $x_0 \in \mathbb{R}^n$ і r_1, r_2 такі, що $0 < r_1 < r_2 < \infty$. Позначимо $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_1, r_2) := \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$, $S(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, $B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$, $\mathbb{B}^n := B(0, 1)$, $\mathbb{S}^{n-1} := S(0, 1)$. Надалі ω_{n-1} — площа сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ і Ω_n — об'єм кулі $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Через d_0 позначимо відстань від точки $x_0 \in D$ до межі області D, тобто $d_0 := \operatorname{dist}(x_0\,, \partial D)$.

Нехай $Q : D \to [0\,, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція і $p > 1$. Гомеоморфізм $f : D \to D'$ називають *кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля* *в точці* $x_0 \in D$, якщо співвідношення

$$M_p\left(\Delta\left(fS_1, fS_2; fD\right)\right) \leqslant \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x)\cdot \eta^p(|x-x_0|)\, dm(x) \tag{3}$$

виконується для кожного кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, і кожної вимірної функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такої, що $\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \;=\; 1$, при цьому $S_i := S(x_0, r_i), \quad i = 1, 2.$

Кажуть, що гомеоморфізм $f : D \to D'$ *кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля в області* D, якщо f кільцевий відносно p-модуля у кожній точці $x_0 \in D$.

Поняття кільцевого Q-гомеоморфізму узагальнює поняття квазіконформного відображення за Герингом і вперше зустрічається при $p = n = 2$ при дослідженні невироджених рівнянь Бельтрамі в роботах В. Рязанова, У. Сребро і Е. Якубова. У роботі В.Я. Гутлянського і А. Гольберга (2009) оцінка (3) при $p = n$ і з деякою функцією Q встановлена для просторових квазіконформних відображень.

Зауважимо, що кожен Q-гомеоморфізм $f : D \to D'$ відносно p-модуля є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля в області D.

Головною метою розділу 2 є опис локальних властивостей кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля. В наступній теоремі встановлено критерій належності гомеоморфізмів класу кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля при $p > 1$.

Теорема 2.2.1. *Нехай* D *і* D' *— області в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. *Припустимо, що* $Q : D \to [0, \infty]$ *— вимірна функція, у якої середнє значення* $q_{x_0}(r)$ *на сфері* $S(x_0, r)$ *скінченне для майже всіх* $r \in (0, d_0)$. *Гомеоморфізм* $f : D \to D'$ *є кільцевим* Q*-гомеоморфізмом відносно* p*-модуля в точці* $x_0 \in D$ *тоді і тільки тоді, коли для довільних* $0 < r_1 < r_2 < d_0$ *виконується умова*

$$M_p\left(\Delta\left(fS_1,\, fS_2\,,\, f\mathbb{A}\right)\right) \leqslant \frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}\,,$$

де $S_1 := S(x_0, r_1)$, $S_2 := S(x_0, r_2)$ *і*

$$I \;=\; I(x_0, r_1, r_2) := \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}\,.$$

Будемо говорити, що вимірна за Лебегом функція $Q : D \to [0, \infty]$ задовольняє (p, λ)*-умову в точці* $x_0 \in D$, якщо існує стала $\lambda = \lambda(x_0) > 1$ така, що

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \ \varepsilon^{\frac{n-p}{p-1}} \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} > 0\,,$$

де $q_{x_0}(t)$ — середнє значення Q на сфері $S(x_0, t)$.

У наступній теоремі встановлено достатні умови диференційовності майже скрізь кільцевого Q-гомеоморфізму відносно p-модуля.

Теорема 2.3.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Припустимо, що $f : D \to D'$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля, $p > n-1$. Якщо функція Q задовольняє (p, λ)-умову майже скрізь у D, то f диференційовний майже скрізь у D.*

З теореми 2.3.1 випливає таке твердження.

Наслідок 2.3.3. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Припустимо, що $f : D \to D'$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля, $p > n - 1$. Якщо $Q \in L^1_{\rm loc}(D)$, то f диференційовний майже скрізь у D.*

Задача про спотворення площ при квазіконформних відображеннях бере свій початок від робіт Б. Боярського. Точна верхня оцінка площі образу круга при квазіконформних відображеннях зустрічається в монографії М.О. Лаврентьєва (1962 р.). Ряд узагальнень цих результатів отримано у роботах Ф. Герінга і Е. Рейча, К. Астали, А. Єременка і Д. Гамільтона й у монографії Б. Боярського, В.Я. Гутлянського, О. Мартіо і В.І. Рязанова.

Подальша теорема узагальнює результат М.О. Лаврентьєва про оцінку спотворення площі образу круга при квазіконформному відображенні на комплексній площині.

Теорема 2.4.1. *Нехай $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \geqslant 2$, — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля в точці $x_0 = 0$. Тоді при $1 < p < n$ виконуеться оцінка*

$$m(f\overline{B}_r) \leqslant \Omega_n \left(1 + \frac{n-p}{p-1} \int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\, q^{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{-\frac{n(p-1)}{n-p}},$$

а при $p = n$ — оцінка

$$m(f\overline{B}_r) \leqslant \Omega_n \, \exp\left(-\, n \int\limits_r^1 \frac{dt}{t q^{\frac{1}{n-1}}(t)} \right),$$

де $\overline{B}_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant r\}$, $q(t)$ — середнє значення функції Q на сфері $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = t\}$.

Доведено наступний аналог теореми Ікоми–Шварца.

Теорема 2.5.1. *Нехай $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n, n\geqslant 2,$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля в точці $x_0=0$, який задовольняє умову $f(0)=0$. Тоді при $1<p<n$ виконується оцінка*

$$\liminf_{x\to 0}\,|f(x)|\left(1+\frac{n-p}{p-1}\int\limits_{|x|}^{1}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\,q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{p-1}{n-p}}\leqslant 1,$$

а при $p=n$ – оцінка

$$\liminf_{x\to 0}\,|f(x)|\,\exp\left(\,\int\limits_{|x|}^{1}\frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right)\leqslant 1\,,$$

де $q(t)$ — середнє значення функції Q на сфері $\{x\in\mathbb{R}^n:\,|x|=t\}$.

Досліджено асимптотичну поведінку на нескінченності кільцевих Q-гомеоморфізмів та отримано аналог результату Мартіо–Рікмана–Вяйсяля про оцінку швидкості зростання відображень із обмеженим спотворенням в околі нескінченно віддаленої точки (теорема 2.6.1).

Встановлено достатні умови скінченної ліпшицевості (теорема 2.7.1, яка є узагальненням у певному сенсі теореми Герінга про локальну ліпшицевість гомеоморфізмів), локальної гельдеровості (теорема 2.8.2) і локальної логарифмічної гельдеровості (теорема 2.9.1) кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля. Доведено «ліпшицевий» (теорема 2.7.2) і «степеневий» (теорема 2.8.3) аналоги теореми Ікоми–Шварца.

У **розділі 3** досліджені властивості нижніх Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля і встановлено їхній зв'язок із кільцевими Q-гомеоморфізмами відносно p-модуля.

$(n-1)$-*вимірною поверхнею* S у просторі $\mathbb{R}^n$ називають довільне неперервне відображення $S:\omega\to\mathbb{R}^n$, де ω – відкрита множина в $\overline{\mathbb{R}^{n-1}}:=\mathbb{R}^{n-1}\cup\{\infty\}$. *Функцією кратності* поверхні S називають число прообразів елемента $y\in\mathbb{R}^n$:

$$N(S,y)=\operatorname{card}S^{-1}(y)=\operatorname{card}\{x\in\omega:\;S(x)=y\}\,.$$

Для борелевої функції $\rho:\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ *інтеграл по поверхні* S визначається рівністю

$$\int\limits_S\rho\,d\mathcal{A}:=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\rho(y)\,N(S,y)\,dH^{n-1}(y)\,,$$

де через H^{n-1} позначено $(n-1)$-*вимірну міру Хаусдорфа* в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$.

Борелеву функцію $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ називають *допустимою* для сім'ї Γ $(n-1)$-вимірних поверхонь і пишуть $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, якщо

$$\int\limits_S \rho^{n-1}\, d\mathcal{A} \geqslant 1 \tag{4}$$

для кожної поверхні $S \in \Gamma$. Тоді *p-модулем* сім'ї Γ при $p > 1$ називають величину (1).

Будемо говорити, що певна властивість виконується для *p-майже всіх* $(n-1)$-вимірних поверхонь сім'ї Γ, якщо підсім'я поверхонь сім'ї Γ, для яких ця властивість порушується, має p-модуль нуль.

Назвемо вимірну за Лебегом функцію $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ *узагальнено p-допустимою* для сім'ї Γ, що складається із $(n-1)$-вимірних поверхонь у просторі в $\mathbb{R}^n$, і писатимемо $\rho \in \operatorname{ext}_p \operatorname{adm}\Gamma$, якщо нерівність (4) виконується для p-майже всіх $S \in \Gamma$.

Нехай $Q : D \to (0, \infty)$ — вимірна за Лебегом функція. Гомеоморфізм $f : D \to D'$ називатимемо *нижнім Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля у точці* $x_0 \in D$, якщо

$$M_p\left(f\Sigma_{\mathbb{A}}\right) \geqslant \inf_{\rho \in \mathrm{ext_p\,adm}\,\Sigma_{\mathbb{A}}} \int\limits_{\mathbb{A}} \frac{\rho^p(x)}{Q(x)}\, dm(x) \tag{5}$$

для кожного кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 < d_0$, де $\Sigma_{\mathbb{A}}$ — сім'я всіх сфер $S(x_0, r)$, $r \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Гомеоморфізм $f : D \to D'$ назвемо *нижнім Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля в області D*, якщо умова (5) виконується для будь-якого $x_0 \in D$. Нижні Q-гомеоморфізми відносно конформного n-модуля називають нижніми Q-гомеоморфізмами (у точці $x_0 \in D$ чи в області D).

У наступній теоремі встановлено критерій належності гомеоморфізмів класу нижніх Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля при $p > n-1$.

Теорема 3.2.1. *Нехай D — область у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$. Припустимо, що $Q : D \to (0, \infty)$ — вимірна функція. Гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{R}^n$ є нижнім Q-гомеоморфізмом у точці x_0 відносно p-модуля при $p > n-1$ тоді і тільки тоді, коли*

$$M_p(f\Sigma_{\mathbb{A}}) \geqslant \int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dr}{||\,Q||_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)} \quad \textit{для всіх} \quad 0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 < d_0,$$

де $\Sigma_{\mathbb{A}}$ *— сім'я всіх сфер* $S(x_0,r)$, $r\in(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, *і*

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r):=\left(\int\limits_{S(x_0,r)} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\,d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}.$$

Інфімум у (5) досягається для функції

$$\rho_0(x)=\left(\frac{Q(x)}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(|x-x_0|)}\right)^{\frac{1}{p-n+1}}.$$

У наступній теоремі встановлено зв'язок між нижніми і кільцевими Q-гомеоморфізмами відносно p-модуля.

Теорема 3.2.2. *Нехай* D *і* D' *— області у просторі* $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $x_0\in D$. *Припустимо, що* $Q:D\to(0,\infty)$ *— вимірна за Лебегом функція така, що* $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)\neq\infty$ *для м.в.* $r\in(0,d_0)$ *і* $f:D\to D'$ *— нижній* Q*-гомеоморфізм у точці* x_0 *відносно* p*-модуля при* $p>n-1$. *Тоді* f *є кільцевим* Q_**-гомеоморфізмом відносно* $\frac{p}{p-n+1}$*-модуля у точці* x_0 *при* $Q_*(x)=Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)$.

Із теореми 3.2.2. випливає таке твердження.

Наслідок 3.2.1. *У просторі* $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, *будь-який нижній* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля* $f:D\to D'$ *у точці* $x_0\in D$ *за умов* $p>n-1$ *і* $Q\in L_{\mathrm{loc}}^{\frac{n-1}{p-n+1}}(D)$ *є кільцевим* Q_**-гомеоморфізмом відносно* $\frac{p}{p-n+1}$*-модуля в точці* x_0 *при* $Q_*(x)=Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)$.

Знайдено достатні умови локальної гельдеровості нижніх Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля (теорема 3.3.1). Доведено «степеневий» аналог теореми Ікоми–Шварца (теорема 3.3.2) й аналог результату Мартіо–Рікмана–Вяйсяля про оцінку швидкості зростання відображень із обмеженим спотворенням в околі нескінченно віддаленої точки (теорема 3.4.1).

У **розділі 4** вивчені відображення зі скінченним спотворенням класу Соболєва $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ на комплексній площині.

Нехай D — область у комплексній площині $\mathbb{C}$ і нехай $\mu:D\to\mathbb{C}$ — вимірна функція, для якої $|\mu(z)|<1$ майже скрізь (м.с.) в D. Розглянемо *рівняння Бельтрамі*

$$f_{\bar z}=\mu(z)f_z, \tag{6}$$

де $f_{\bar z}=\overline{\partial}f=(f_x+if_y)/2$, $f_z=\partial f=(f_x-if_y)/2$, $z=x+iy$, f_x і f_y — узагальнені частинні похідні відображення f відповідно за x і y. Рівняння

(6) називається *виродженим*, якщо дилатаційне відношення

$$K_\mu(z) := \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|}$$

істотно необмежене, тобто $K_\mu \notin L^\infty(D)$. *Дотична дилатація* відображення f у точці $z \in D$ щодо точки $z_0 \in \overline{D}$ визначена рівністю

$$K^T_\mu(z, z_0) := \frac{\left|1 - \frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}\mu(z)\right|^2}{1-|\mu(z)|^2}\,.$$

Далі нехай $K^T_\mu(z, z_0) = 0$, якщо z лежить поза областю D. Добре відомо, що для всіх z і $z_0 \in D$ виконується оцінка $K^T_\mu(z, z_0) \leqslant K_\mu(z)$.

Теорема 4.1.1. *Нехай f — гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (6) класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$. Тоді f є нижнім Q-гомеоморфізмом у кожній точці $z_0 \in \overline{D}$ при $Q(z) = K^T_\mu(z, z_0)$.*

З теореми 4.1.1 випливає наступне твердження.

Наслідок 4.1.1. *Нехай f — гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (6) класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$. Тоді f є нижнім Q-гомеоморфізмом у кожній точці $z_0 \in \overline{D}$ при $Q(z) = K_\mu(z)$.*

Гомеоморфізм $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ називається *кільцевим Q-гомеоморфізмом у точці* z_0 межі ∂D, якщо f задовольняє співвідношення

$$M\left(\Delta\left(fC_1, fC_2; fD\right)\right) \leqslant \int\limits_{\mathbb{A}\cap D} Q(z)\cdot \eta^2(|z-z_0|)\, dm(z) \tag{7}$$

для будь-якого кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$ і довільних континуумів C_1 і C_2 в D, які належать різним компонентам доповнення кільця $\mathbb{A}$ в $\overline{\mathbb{C}}$, і для кожної вимірної функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, такої, що $\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(t)\, dt \geqslant 1$. Гомеоморфізм $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ називається *кільцевим Q-гомеоморфізмом* у $\overline{D}$, якщо умова (7) виконується для кожної точки $z_0 \in \overline{D}$.

Теорема 4.1.2. *Нехай f — гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (6) класу $W^{1,1}_{\rm loc}$ і $K^T_\mu(z, z_0) \in L^1_{\rm loc}$. Тоді f є кільцевим Q-гомеоморфізмом у кожній точці $z_0 \in \overline{D}$ при $Q(z) = K^T_\mu(z, z_0)$.*

Наслідок 4.1.4. *Нехай f — гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (6) класу $W^{1,1}_{\rm loc}$ та $K_\mu \in L^1_{\rm loc}$. Тоді f є кільцевим Q-гомеоморфізмом у кожній точці $z_0 \in \overline{D}$ при $Q(z) = K_\mu(z)$.*

У термінах дотичної дилатації $K^T_\mu(z,z_0)$ послаблено умови, достатні для існування регулярного розв'язку задачі Діріхле для рівняння Бельтрамі в однозв'язній області.

Задача Діріхле для рівняння Бельтрамі (6) в області D полягає у знаходженні неперервної функції $f:\overline{D}\to\mathbb{C}$, яка м.с. у D має частинні похідні першого порядку і м.с. у D задовольняє рівняння (6), а також задовольняє граничну умову

$$\lim_{z\to\zeta}\operatorname{Re} f(z)=\varphi(\zeta)\qquad \forall\ \zeta\in\partial D \tag{8}$$

при заданій неперервній функції $\varphi:\partial D\to\mathbb{R}$.

При $\varphi(\zeta)\not\equiv\mathrm{const}$ *регулярним розв'язком* такої задачі називатимемо неперервну функцію $f:\overline{D}\to\mathbb{C}$, яка є дискретним і відкритим відображенням класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ у D з якобіаном $J_f(z)=|f_z|^2-|f_{\overline{z}}|^2\neq 0$ м.с. в D і м.с. в D задовольняє рівняння (6), а також задовольняє граничну умову (8). У випадку $\varphi(\zeta)\equiv c=\mathrm{const}$, $\zeta\in\partial D$, під *регулярним розв'язком* задачі Діріхле (8) для рівняння Бельтрамі (6) розумітимемо функцію $f(z)=c+ic'$, $c'\in\mathbb{R}$.

Задача Діріхле добре вивчена для рівномірно еліптичних систем рівнянь у роботах Б.В. Боярського й І.Н. Векуа. Для виродженого рівняння Бельтрамі у роботі Ю. Дибова вивчалася задача Діріхле для одиничного круга.

Наведемо основні твердження про існування регулярного розв'язку задачі Діріхле для виродженого рівняння Бельтрамі в довільній жордановій області.

Теорема 4.3.1. *Нехай $\mu:D\to\mathbb{C}$ – вимірна в жордановій області D функція, для якої $|\mu(z)|<1$ м.с., така, що $K_\mu\in L^1_{\rm loc}(D)$ і*

$$K^T_\mu(z,z_0)\leqslant Q(z)\in \mathrm{FMO}(\overline{D}).$$

Тоді для будь-якої неперервної функції $\varphi:\partial D\to\mathbb{R}$ існує регулярний розв'язок f задачі Діріхле (8) для рівняння Бельтрамі (6).

Наслідок 4.3.1. *Твердження теореми 4.3.1 справедливе, якщо $K^T_\mu(z,z_0)\leqslant Q(z)\in \mathrm{BMO}(\overline{D})$.*

Наслідок 4.3.2. *Твердження теореми 4.3.1 справедливе, якщо*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\ -\!\!\!\!\!\!\int_{B(z_0,\varepsilon)} K^T_\mu(z,z_0)\,dm(z)<\infty\qquad \forall\ z_0\in\overline{D}.$$

Теорема 4.3.2. *Нехай $\mu:D\to\mathbb{C}$ – вимірна в жордановій області D*

функція, для якої $|\mu(z)|<1$ *м.с., така, що* $K_\mu \in L^1_{\rm loc}(D)$ *і*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{||K_\mu^T||_1(z_0,\, r)} = \infty \qquad \forall\ z_0 \in \overline{D},$$

де $||K_\mu^T||_1(z_0,\, r) := \int_{S(z_0,\,r)} K_\mu^T(z,z_0)\,ds$ *і* $\delta(z_0) < \sup\limits_{z\in D}|z-z_0|$. *Тоді для будь-якої неперервної функції* $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ *існує регулярний розв'язок* f *задачі Діріхле (8) для рівняння Бельтрамі (6).*

Доведено наступний аналог теореми Ікоми–Шварца, який є уточненням теореми 2.5.1 для гомеоморфних розв'язків рівняння Бельтрамі.

Теорема 4.4.1. *Нехай* $\mu\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *— вимірна функція, така, що* $|\mu(z)|<1$ *м.с., і* $f\colon \mathbb{B}\to\mathbb{B}$ *— гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі (6) класу Соболева* $W^{1,1}_{\rm loc}$*, який задовольняє умову* $f(0)=0$*. Тоді*

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)|\, \exp\left(2\pi\int\limits_{|z|}^{1}\frac{dt}{\|\, K_\mu^T\|_1\,(0,t)}\right) \leqslant 1\,.$$

Досліджено асимптотичну поведінку на нескінченності гомеоморфних розв'язків рівняння Бельтрамі, при цьому доведено аналог результату Мартіо–Рікмана–Вяйсяля про оцінку швидкості зростання відображень із обмеженим спотворенням в околі нескінченно віддаленої точки.

Нехай $R>0$ і $z_0\in\mathbb{C}$. Для гомеоморфізма $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ покладемо

$$L(z_0,f,R) := \sup_{|z-z_0|\leqslant R} |f(z)-f(z_0)|\,.$$

Теорема 4.5.1. *Нехай* $\mu\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *— вимірна функція, така, що* $|\mu(z)|<1$ *м.с.,* z_0 *— деяка фіксована точка в* $\mathbb{C}$ *і* r_0 *— довільне фіксоване додатне число. Тоді будь-який гомеоморфний розв'язок* $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *рівняння Бельтрамі (6) класу Соболева* $W^{1,1}_{\rm loc}$ *задовольняє умову*

$$\liminf_{R\to\infty} L(z_0,f,R)\, \exp\left(-\,2\pi\int\limits_{r_0}^{R}\frac{dt}{\|\, K_\mu^T\|_1\,(z_0,t)}\right) = M_0 > 0\,.$$

Встановлено зв'язок гомеоморфізмів зі скінченним спотворенням із нижніми і кільцевими Q-гомеоморфізмами відносно p-модуля. Нехай D — область у $\mathbb{C}$. Відображення $f : D \to \mathbb{C}$ називається *відображенням зі скінченним спотворенням,* якщо $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ і

$$\|f'(z)\|^2 \leqslant K(z) \cdot J_f(z) \qquad \text{м.с.}$$

для деякої майже скрізь скінченної функції $K(z) \geqslant 1$, де $\|f'(z)\| = |f_z| + |f_{\overline{z}}|$ і $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$.

Надалі вважаємо

$$K_p(z,f) := \begin{cases} \frac{\|f'(z)\|^p}{J_f(z)}, & \text{якщо } J_f(z) \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } f'(z) = 0, \\ \infty & \text{в інших точках.} \end{cases}$$

Теорема 4.6.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{C}$. Тоді будь-який гомеоморфізм $f : D \to D'$ зі скінченним спотворенням є нижнім Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля при $Q(z) = K_p(z,f)$ і будь-якому $p > 1$.*

Наслідок 4.6.2. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{C}$ і $p > 1$. Припустимо, що $f : D \to D'$ — гомеоморфізм зі скінченним спотворенням і $K_p(z,f) \in L^{\frac{1}{p-1}}_{\mathrm{loc}}(D)$. Тоді f є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p'-модуля при $Q(z) = K_p^{\frac{1}{p-1}}(z,f)$, де $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

Встановлено достатні умови скінченної ліпшицевості (теорема 4.7.1), локальної гельдеровості (теорема 4.7.2) і локальної логарифмічної гельдеровості (теорема 4.7.3) гомеоморфізмів класів Соболєва $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$.

У наступній теоремі, яка є уточненням теореми 2.4.1 у разі гомеоморфізмів зі скінченним спотворенням, узагальнено оцінку М.О. Лаврентьєва про спотворення площі образу круга при квазіконформних відображеннях.

Теорема 4.7.4. *Нехай $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ — гомеоморфізм зі скінченним спотворенням. Тоді при $p = 2$ справедлива оцінка*

$$m\left(f\overline{B}_r\right) \leqslant \pi \exp\left(-4\pi \int\limits_r^1 \frac{d\tau}{\|\, K\|_{\,1}(0,\tau)}\right),$$

а при $p > 2$ — оцінка

$$m(f\overline{B}_r) \leqslant \pi \left(1 + (2\pi)^{p-1}(p-2) \int\limits_r^1 \frac{d\tau}{\|\, K_p\|_{\frac{1}{p-1}}(0,\tau)}\right)^{-\frac{2}{p-2}}.$$

Доведено наступний аналог теореми Ікоми–Шварца, який є уточненням теореми 2.5.1 для гомеоморфізмів зі скінченним спотворенням.

Теорема 4.7.5. *Нехай $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ — гомеоморфізм зі скінченним спотворенням, $f(0) = 0$. Тоді при $p > 2$ справедлива оцінка*

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(1 + (2\pi)^{p-1}(p-2)\int\limits_{|z|}^{1} \frac{dr}{\| K_p\|_{\frac{1}{p-1}}(0,r)}\right)^{\frac{1}{p-2}} \leqslant 1.$$

У **розділі 5** вивчаються відображення зі скінченним спотворенням класів Орліча–Соболєва й Соболєва у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

У роботах Ю.Г. Решетняка, С.К. Водопьянова, В.М. Гольдштейна та інших розвинено теорію відображень із обмеженим спотворенням, яка стала класикою теорії відображень. Узагальненням поняття відображення з обмеженим спотворенням є поняття відображення зі скінченним спотворенням.

Відображення f відкритої множини $U \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, називається *відображенням зі скінченним спотворенням*, якщо $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$ і

$$\|f'(x)\|^n \leqslant K(x) \cdot J_f(x) \qquad \text{м.с.}$$

для деякої майже скрізь скінченної функції $K(x) \geqslant 1$, де $\|f'(x)\|$ — операторна норма матриці Якобі f' відображення f в x і $J_f(x)$ — його якобіан. *Зовнішньою дилатацією* відображення f у точці x називається величина

$$K_O(x,f) := \begin{cases} \frac{\|f'(x)\|^n}{|J_f(x)|}, & \text{якщо } J_f(x) \neq 0,\\ 1, & \text{якщо } f'(x) = 0,\\ \infty & \text{в інших точках,}\end{cases}$$

а *внутрішньою дилатацією* відображення f у точці x — величина

$$K_I(x,f) \quad = \quad \begin{cases} \frac{|J(x,f)|}{l(f'(x))^n}, & \text{якщо } J(x,f) \neq 0,\\ 1, & \text{якщо } f'(x) = 0,\\ \infty, & \text{в інших } \quad \text{випадках}\ ,\end{cases} \ ,$$

де $l\left(f'(x)\right) = \min\limits_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}$.

Нехай D — область у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Для заданої опуклої зростаючої функції $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\varphi(0) = 0$, через $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(D)$ позначимо *клас Орліча–Соболєва* всіх локально інтегровних вектор-функцій $f : D \to \mathbb{R}^m$, таких, що компоненти f_i, $i = 1,\ldots,m$, вектор-функції $f = (f_1,\ldots,f_m)$ належать класові Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ і

$$\int\limits_G \varphi\left(|\nabla f(x)|\right)\, dm(x) < \infty$$

для кожної області G, такої, що $\overline{G} \subset D$, де $|\nabla f(x)| := \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$.

Також використовуватимемо термін "клас Орліча–Соболєва" і збережемо позначення $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ у разі, коли на функцію φ накладені слабші умови, ніж у наведеному означенні класу Орліча–Соболєва.

Подальша теорема є узагальненням результатів Меньшова–Герінга–Лехто на площині й теореми Вяйсяля в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, на відкриті відображення класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\Omega)$ за умови типу умови Кальдерона на функцію φ.

Теорема 5.3.1. *Нехай Ω — відкрита множина в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — неперервне відкрите відображення класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\Omega)$, де $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неспадна функція, яка задовольняє умову*

$$\int\limits_{t_*}^{\infty}\left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty \tag{9}$$

для деякого $t_* \in (0,\infty)$. Тоді відображення f має майже скрізь повний диференціал у Ω.

Зауважимо, що умови теореми 5.3.1 виконуються, зокрема, для відображень f класу Соболева $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$.

Неперервні відображення класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ за умови (9) типу умови Кальдерона на функцію φ мають (N)-властивість Лузіна на майже всіх гіперплощинах, що випливає з наступної теореми.

Теорема 5.4.2. *Нехай U — відкрита множина в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неспадна функція, така, що задовольняє умову (9). Тоді будь-яке неперервне відображення $f : U \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ має N-властивість і, більш того, є локально абсолютно неперервним відносно $(n-1)$-вимірної хаусдорфової міри на майже всіх гіперплощинах $\mathcal{P}$, паралельних довільній фіксованій гіперплощині $\mathcal{P}_0$. Крім того, на майже всіх таких $\mathcal{P}$ виконується рівність $H^{n-1}(f(E)) = 0$, якщо $|\nabla f| = 0$ на $E \subset \mathcal{P}$.*

Доведено твердження про компактність класів Орліча–Соболєва (теорема 5.5.1), про належність обернених відображень до класу гомеоморфізмів із обмеженим інтегралом Діріхле (теорема 5.6.1), про одностайну неперервність і нормальність сімей обернених відображень (наслідок 5.6.4), а також про напівнеперервність дилатацій відображень зі скінченним спотворенням (теорема 5.7.1).

Ключовою для застосування результатів розділів 2, 3 до дослідження відображень класів Орліча–Соболєва є наступна теорема.

Теорема 5.8.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неспадна функція, така, що задовольняє умову (9). Тоді будь-який гомеоморфізм $f : D \to D'$ класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ зі скінченним спотворенням є нижнім Q-гомеоморфізмом при $Q(x) = K_I^{\frac{1}{n-1}}(x, f)$.*

Наслідок 5.8.1. *Будь-який гомеоморфізм у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, класу $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$ зі скінченним спотворенням є нижнім Q-гомеоморфізмом при $Q(x) = K_I^{\frac{1}{n-1}}(x, f)$.*

Наслідок 5.8.2. *Будь-який гомеоморфізм f класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, за умови (9) на функцію φ (зокрема, будь-який гомеоморфізм класу Соболєва $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$) і за умови $K_I(x, f) \in L^1_{\rm loc}(D)$ є кільцевим Q_*-гомеоморфізмом у кожній точці $x_0 \in D$ при $Q_*(x) = K_I(x, f)$.*

Встановлено результати про асимптотичну поведінку на нескінченності гомеоморфізмів класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ за умови (9) на функцію φ (теореми 5.10.1, 5.10.2) і про одностайну неперервність сімей таких гомеоморфізмів (теореми 5.9.4 – 5.9.6).

Встановлено зв'язок гомеоморфізмів класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, за умови типу умови Кальдерона на функцію φ з нижніми і кільцевими Q-гомеоморфізмами відносно p-модуля (теореми 5.11.1 і 5.11.2), завдяки чому у подальших двох теоремах послаблено достатні умови відповідно локальної й логарифмічної гельдеровості вказаних гомеоморфізмів.

Теорема 5.11.3. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, і $f : D \to D'$ — гомеоморфізм класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ зі скінченним спотворенням, де $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неспадна функція, яка задовольняє умову (9). Припустимо, що для деяких чисел $\lambda > 1$, $\sigma > 0$ і $C_{x_0} > 0$ виконується умова*

$$\varepsilon^{\sigma} \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\| K_p \|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)} \geqslant C_{x_0}$$

для будь-якого $\varepsilon \in \left(0, \frac{d_0}{\lambda^2}\right)$. Тоді при $p \in \left(n, n + \frac{1}{n-2}\right)$ виконується нерівність

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \nu_0 \, C_{x_0}^{-\frac{1}{p-n}} \, |x - x_0|^{\frac{\sigma}{p-n}}$$

для всіх $x \in B(x_0, \delta_0)$, де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n, p, λ і σ.

Теорема 5.11.5. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, і $f : D \to D'$ — гомеоморфізм класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ зі скінченним спотворенням, де $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неспадна функція, яка задовольняє умову (9). Якщо $p \in \left(n, n+\frac{1}{n-2}\right)$, $\|\,K_p\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r) \neq \infty$ для майже всіх $r \in (0,d_0)$ і для деяких чисел $\kappa \in \left[0, \frac{p}{p-n+1}\right)$, $C_{x_0} > 0$ виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{[K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\,dm(x)}{|x-x_0|^{\frac{p}{p-n+1}}} \leqslant C_{x_0}\,\ln^{\kappa}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)$$

для будь-яких $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<d_0$, то

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant \nu_0\,C_{x_0}^{\gamma}\,\ln^{-\theta}\frac{1}{|x-x_0|}$$

для всіх $x \in B(x_0,\delta_0)$, де $\delta_0 \leqslant \min\{1, d_0^4\}$,

$$\gamma = \frac{n(p-n+1)}{(n-1)(p-n)}, \quad \theta = \frac{p-\kappa(p-n+1)}{(n-1)(p-n)}$$

і ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n, p і κ.

Доведено теореми 5.12.1 і 5.14.1, які є уточненнями відповідно теорем 2.4.1 і 2.5.1 для гомеоморфізмів класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ зі скінченним спотворенням у просторі $\mathbb{R}^n, n \geqslant 3$, за умови (9) на функцію φ. В наступній теоремі наведено достатні умови скінченної ліпшицевості вказаних гомеоморфізмів.

Теорема 5.13.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, і $f : D \to D'$ — гомеоморфізм класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ зі скінченним спотворенням, де $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неспадна функція, яка задовольняє умову (9). Якщо $p \in \left(n, n+\frac{1}{n-2}\right)$ і*

$$k_p(x_0) = \limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\fint_{B(x_0,\varepsilon)} [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\,dm(x)\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}} < \infty\,,$$

то

$$\limsup_{x\to x_0}\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \leqslant \nu_0\,k_p^{\frac{1}{p-n}}(x_0) < \infty\,,$$

де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від n і p.

Підкреслимо, що множина гомеоморфізмів зі скінченним спотворенням класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в $\mathbb{R}^n, n \geqslant 3$, за умови (9) на функцію φ охоплює гомеоморфізми класу Соболєва $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$. У випадку критичного показника $p = n-1$, тобто для гомеоморфізмів класу Соболєва $W^{1,n-1}_{\rm loc}$, доведено наступне твердження (зауважимо при цьому, що гомеоморфізми класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ за умови $K_O \in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$ належать до класу Соболєва $W^{1,n-1}_{\rm loc}$).

Теорема 5.15.1. *Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і $f : D \to D'$ — гомеоморфізм класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$, такий, що $K_O \in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$. Тоді f є нижнім Q-гомеоморфізмом у довільній точці $x_0 \in \overline{D}$ при $Q(x) = K_O(x, f)$.*

Наслідок 5.15.4. *Нехай $f : D \to D'$ — гомеоморфізм класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$ такий, що $K_O \in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$. Тоді f є кільцевим Q_*-гомеоморфізмом при $Q_*(x) = K^{n-1}_O(x, f)$.*

У розділі 6 досліджені кільцеві Q-відображення відносно p-модуля, які є узагальненням квазірегулярних відображень.

Нехай D — область у просторі $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$, $p > 1$ і $Q : D \to [0\,,\infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ є *кільцевим Q-відображенням відносно p-модуля у точці* x_0, якщо співвідношення (3) виконується для всіх кілець $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, і всіх вимірних функцій $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, таких, що $\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1$. Відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ є *кільцевим Q-відображенням відносно p-модуля в області* D, якщо f — кільцеве Q-відображення у кожній точці $x_0 \in D$.

Для відкритих дискретних кільцевих Q-відображень відносно p-модуля при $n - 1 < p < n$ отримані оцінки якобіана й операторної норми матриці Якобі.

Теорема 6.1.1. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне кільцеве Q-відображення відносно p-модуля, при цьому $Q \in L^1_{\rm loc}$ і $n-1 < p < n$. Тоді $|J_f(x)| \leqslant \nu_0\, Q^{\frac{n}{n-p}}(x)$ і $\|f'(x)\| \leqslant \nu_0\, Q^{\frac{1}{n-p}}(x)$ для майже всіх $x \in D$, де ν_0 — деяка додатна стала, що залежить тільки від n і p.*

Для відкритих дискретних кільцевих Q-відображень відносно p-модуля при $p > n - 1$ отримані оцінки зовнішньої α-дилатації і внутрішньої p-дилатації через функцію Q.

Нехай $p > 1$. Для відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$, яке має частинні похідні м.с., внутрішня p-дилатація відображення f у точці x визначається рівністю

$$K_{I,p}(x, f) = \begin{cases} \frac{|J_f(x)|}{l^p(f'(x))}, & \text{якщо } |J_f(x)| \neq 0 \\ 1, & \text{якщо } f'(x) = 0 \\ \infty, & \text{в інших точках}, \end{cases}$$

де $l(f'(x)) = \min\limits_{|h|=1} |f'(x) \cdot h|$.

Теорема 6.2.1. *Нехай $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне кільцеве Q-відображення відносно p-модуля, $p > n-1$, при цьому $Q \in L^1_{\rm loc}(D)$ і $J_f(x) \neq 0$ майже скрізь. Тоді $K_{I,p}(x, f) \leqslant c_0\, Q(x)$ для майже всіх $x \in D$, де c_0 — деяка додатна стала, що залежить тільки від n і p.*

Встановлено достатні умови скінченної ліпшицевості (теорема 6.3.1), локальної гельдеровості (теорема 6.3.2) і логарифмічної гельдеровості (теорема 6.3.3) кільцевих Q-відображень відносно p-модуля.

Нехай D і D' — області в $\mathbb{R}^n\,, n \geqslant 2$, $p > 1$ і $Q : D \to\ [0\,,\infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Відображення $f : D \to D'$ називатимемо *Q-відображенням відносно p-модуля*, якщо нерівність (2) виконується для кожної сім'ї Γ кривих у D і кожної допустимої функції ρ для Γ.

У подальшій теоремі наведено достатні умови належності Q-відображень відносно p-модуля до класів Соболєва.

Теорема 6.4.3. *Нехай D — область у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне Q-відображення відносно p-модуля, при цьому $n-1 < p < n$ і $Q \in L^{\frac{\alpha}{n-p}}_{\rm loc}$, де $\alpha > 1$. Тоді f належить до класу Соболєва $W^{1,\alpha}_{\rm loc}$.*

Оскільки відображення f класу Соболєва $W^{1,n}_{\rm loc}$ має N-властивість Лузіна, тобто $m(fE) = 0$, якщо $m(E) = 0$, то з теореми 6.4.3 випливає наступне твердження.

Наслідок 6.4.3. *Нехай $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне Q-відображення відносно p-модуля, при цьому $n-1 < p < n$ і $Q \in L^{\frac{n}{n-p}}_{\rm loc}$. Тоді f має N-властивість Лузіна.*

У наступній теоремі встановлено достатні умови того, щоб Q-відображення відносно p-модуля мало N^{-1}-властивість Лузіна.

Теорема 6.4.4. *Нехай D — область у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне Q-відображення відносно p-модуля, при цьому $p \geqslant n$ і $Q \in L^1_{\rm loc}$. Тоді f має N^{-1}-властивість Лузіна, тобто $m\left(f^{-1}E\right) = 0$, якщо $m(E) = 0$.*

Із теореми 6.4.4. випливає наступне твердження, яке э узагальненням теореми Боярського–Іванця про невиродженість майже скрізь якобіана квазірегулярного відображення.

Наслідок 6.4.8. *Нехай D — область у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне Q-відображення відносно p-модуля, при цьому $p \geqslant n$ і $Q \in L^1_{\rm loc}$. Тоді $J_f(x) \neq 0$ м.с. в D.*

У теоремі 6.5.1 уточнено твердження теореми 6.2.1 для відкритих дискретних Q-відображень відносно p-модуля, а саме: показано, що в цьому разі $c_0 = 1$.

Узагальнено результат Ю. Вяйсяля про абсолютну неперервність на лініях квазіконформних відображень на відкриті дискретні відображення, що задовольняють деяку p-модульну нерівність відносно циліндрів у просторі.

Циліндром у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, називають трійку $Z = (G, E_1, E_2)$, де G – область в $\mathbb{R}^n$ і E_1, E_2 — підмножини межі ∂G, таку, що існує гомеоморфізм множини $\overline{G}$ на одиничний циліндр $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leqslant 1, 0 \leqslant x_n \leqslant 1\}$, при якому E_1 і E_2 відображаються на основи цього одиничного циліндра. Нехай сім'я Γ_Z складається з дуг, що з'єднують E_1 і E_2 в G. Її p-модуль називають *модулем циліндра* Z й позначають $M_p(Z)$.

Теорема 6.6.1. *Нехай* $p > 1$, $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ – *локально інтегровна функція і* $f : D \to \mathbb{R}^n$ – *відкрите дискретне відображення, яке задовольняє умову*

$$M_p(Z) \leqslant \int\limits_{f(D)} Q(y) \cdot \rho_*^p(y) dm(y)$$

для будь-якого циліндра $Z \subset D$ *й довільної функції* $\rho_* \in \operatorname{adm} f(\Gamma_Z)$. *Тоді* $f \in ACL$.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена розвитку теорії відображень скінченновимірних просторів.

Основні результати дисертації такі:

1. Отримано характеризацію кільцевих і нижніх Q-гомеоморфізмів у термінах p-модуля і встановлено взаємозв'язок між цими гомеоморфізмами.

2. Доведено аналоги нерівності М.О. Лаврентьєва про спотворення площі круга при квазіконформних відображеннях, леми Герінга про локальну ліпшицевість і теореми Ікоми–Шварца для кільцевих і нижніх Q-гомеоморфізмів, визначених у термінах p-модуля.

3. Встановлено, що гомеоморфні розв'язки вироджених рівнянь Бельтрамі з узагальненими похідними є кільцевими та нижніми Q-гомеоморфізмами, де Q — дотична дилатація, й доведено узагальнені теореми про неперервне і гомеоморфне продовження вказаних розв'язків і їхню асимптотичну поведінку на нескінченності.

4. Встановлено загальні умови на дотичну дилатацію, достатні для існування регулярних розв'язків задачі Діріхле для вироджених рівнянь Бельтрамі в довільних жорданових областях.

5. Встановлено зв'язок класів Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ в областях комплексної площини, а також класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, за умови типу умови Кальдерона на функцію φ, з нижніми й кільцевими Q-гомеоморфізмами, визначеними в термінах p-модуля; узагальнено умови локальної й логарифмічної гельдеровості, степеневого й логарифмічного порядку зростання гомеоморфізмів, що належать наведеним класам Соболєва чи Орліча–Соболєва.

6. Встановлено достатні умови належності Q-відображень, визначених у термінах p-модуля, до класів Соболєва й доведено узагальнення теореми Боярського–Іванця про невиродженість якобіана відображення; отримано оцінки зверху якобіана й операторної норми матриці Якобі, p-внутрішних і α-зовнішних дилатацій кільцевих Q-відображень відносно p-модуля; узагальнено результат Ю. Вяйсяля про абсолютну неперервність на лініях квазіконформних відображень на відкриті дискретні відображення, що задовольняють деяку p-модульну нерівність.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Salimov R. On regular homeomorphisms in the plane // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. — 2010. — 35. — P. 285–289.

2. Salimov R. On Q-homeomorphisms with respect to p-modulus // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. — 2011. — **60**, № 2. — P. 207–213.

3. Salimov R. On finitely Lipschitz space mappings // Сиб. электрон. мат. изв. — 2011. — **8**. — P. 284–295.

4. Ковтонюк Д.А., Салимов Р.Р. Асимптотическое поведение в точке обобщенных квазиизометрий // Укр. мат. журн. — 2011. — **63**, № 4. — С. 481–488. (переклад у виданні: Ukr. Math. J. — 2011. — **63** (4). — P. 555–563.)

5. Golberg A., Salimov R. Topological mappings of integrally bounded p-moduli // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. — 2012. — **3** (LXI), № 1. — P. 49–66.

6. Салимов Р.Р. Об оценке меры образа шара // Сиб. мат. журн. — 2012. — **53**, № 6. — С. 920–930. (переклад у виданні: Siberian Math. J. — 2012. — **53** (4). — P. 739–747.)

7. Ryazanov V., Salimov R., Srebro U., Yakubov E., On Boundary Value Problems for the Beltrami Equations // Contemporary Mathematics. — 2013. — V. 591. — P. 211–242.

8. Ryazanov V.I., Salimov R.R., Sevost'yanov E.A. On convergence analysis of space homeomorphisms // Siberian Advances in Mathematics. — 2013. — **23**, no. 4. — P. 263–294.

9. Golberg A., Salimov R. Equicontinuity of plane homeomorphisms with controlled p-module // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 4–5. — С. 115–125.

10. Рязанов В.И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. О классах Орлича-Соболева и отображениях с ограниченным интегралом Дирихле // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 9. — С. 1254–1265. (переклад у виданні: Ukr. Math. J. — 2014. — **65** (9). — P. 1394–1405.)

11. Салимов Р.Р. О липшицевости одного класса отображений // Мат. заметки. — 2013. — **94**, № 4. — С. 591–599. (переклад у виданні: Math. Notes — 2013. — **94** (4). — P. 559–566.)

12. Салимов Р.Р. К теории кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля // Укр. мат. вісник. — 2013. — **10**, № 3. — С. 379–396. (переклад у виданні: J. Math. Sci. — 2014. — **196** (5). — P. 679–692.)

13. Салимов Р.Р. Об одном свойстве кольцевых Q -гомеоморфизмов относительно p-модуля // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 5. — С. 728–733. (переклад у виданні: Ukr. Math. J. — 2013. — **65** (5). — P. 806–813.)

14. Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. К теории классов Орлича-Соболева // Алгебра и анализ. — 2013. — **25**, № 6. — С. 50–102. (переклад у виданні: St. Petersburg Math. J. — 2014. — **25** (6). — P. 929-963.)

15. Ковтонюк Д.А., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. К теории отображений классов Соболева и Орлича–Соболева. — К.: Наукова думка, 2013. — 303 с.

16. Golberg A., Salimov R. Logarithmic Holder continuity of ring homeomorphisms with controlled p-module // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2014. — **59**, no. 1. — P. 91–98.

17. Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. Граничное поведение классов Орлича-Соболева // Мат. заметки. — 2014. — **95**, №

4. — С. 564–576. (переклад у виданні: Math. Notes — 2014. — **95** (4). — P. 509–519.)

18. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Distortion estimates under mappings with controlled p-module // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math 5 (LXIII) — 2014. — P. 95–114.

19. Golberg A., Salimov R. Extension of the Schwarz Lemma to homeomorphisms with controlled p-module // Georgian Math. J. — 2014. — **21**, no. 3. — P. 273–279.

20. Салимов Р.Р. О кольцевых Q-отображениях относительно неконформного модуля // Дальневост. матем. журн. — 2014. — **14**, № 2. — С. 257–269.

21. Салимов Р.Р. Нижние оценки p-модуля и отображения класса Соболева // Алгебра и анализ. — 2014. — **26**, № 6. — С. 143–171. (переклад у виданні: St. Petersburg Math. J. — 2015. — **26** (6). — P. 965–984.)

22. Golberg A., Salimov R. Homeomorphisms Lipschizian in the mean // Complex Analysis and Potential Theory with Applications, Camb. Sci. Publ., Cambridge. — 2014. — P. 95–111.

23. Салимов Р.Р. О конечной липшицевости классов Орлича-Соболева // Владикавк. матем. журн. — 2015. — **17**, № 1. — С. 64–77.

24. Афанасьева Е.С., Салимов Р.Р. Асимптотическое поведение на бесконечности решений уравнения Бельтрами // Збірник праць Ін-ту математики НАНУ. — 2015. — **12**, № 3. — С. 9–16.

25. Салимов Р.Р. О новом условии конечной липшицевости классов Орлича–Соболева // Мат. студії. — 2015. — **44**, №1. — С. 27–35.

26. Салимов Р.Р. Нижние Q-гомеоморфизмы относительно p-модуля // Укр. мат. вісник. — 2015. — **12**, № 4. — С. 484–510. (переклад у виданні: J. Math. Sci. — 2016. — **218** (1). — P. 47–68.)

27. Салимов Р.Р. Асимптотическое поведение классов Орлича–Соболева на бесконечности // Збірник праць Ін-ту математики НАНУ. — 2015. — **12**, № 4. — С. 273–284.

28. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Poletskii Type Inequality for Mappings from the Orlicz–Sobolev Classes // Complex Anal. Oper. Theory. — 2016. — 10. — P. 881–901.

29. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Estimates for jacobian and dilatation coefficients of open discrete mappings with controlled p-module // Complex Anal. Oper. Theory. — 2017. — **11**, № 7, — P. 1521–1542.

30. Рязанов В.И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. Нормальность классов Орлича–Соболева // Укр. мат. журнал. — 2016. — **68**, № 1. — С. 106–116. (переклад у виданні: Ukr. Math. J. — 2016. — **68** (1). — P. 115–126.)

31. Салимов Р.Р. Об оценке меры образа шара для нижних Q-гомеоморфизмов // Доп. НАН України. — 2016. — № 1. — С. 19–25.

32. Салимов Р.Р. Метрические свойства классов Орлича-Соболева // Укр. мат. вісник. — 2016. — **13**, № 1. — С. 129–141. (переклад у виданні: J. Math. Sci. — 2017. — **220** (5). — P. 633–642.)

33. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Normal Families of Discrete Open Mappings with Controlled p-Module // Contemporary Mathematics. — 2016. — V. 667. — P. 83–103.

34. Golberg A., Salimov R. Mappings with upper bounds p-moduli // Contemporary Mathematics. — 2016. — V. 659. — P. 91–113.

35. Golberg A., Salimov R. Differentiability of ring homeomorphisms with controlled p-module. Contemp. Math. — 2017. — V. 699. — P. 121–217.

36. Golberg A., Salimov R. Holder continuity of homeomorphisms with controlled growth of their spherical means // Complex Anal. Oper. Theory. — 2017. — **11**, № 8. — P. 1825–1838.

37. Салимов Р.Р. О степенном порядке роста нижних Q-гомеоморфизмов // Владикавк. матем. журн. — 2017. — **19**, № 2. — С. 36–48.

38. Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. Об абсолютной непрерывности отображений, искажающих модули цилиндров // Укр. мат. журн. — 2017. — **69**, № 6. — С. 860–864. (переклад у виданні: Ukr. Math. J. — 2017. — **69** (6). — P. 1001—1006.)

39. Афанасьева Е.С., Рязанов В.И., Салимов Р.Р. К теории отображений класса Соболева с критическим показателем // Укр. мат. вісник. — 2018. — **15**, № 2. — С. 154–176. (переклад у виданні: J. Math. Sci. — 2019. — **239** (1). — P. 1 – 16.)

40. Афанасьева Е.С., Рязанов В.И., Салимов Р.Р. К теории классов Соболева с критическим показателем// Доп. НАН України. — 2019. — № 8. — С. 3–8.

41. Salimov R.R., Sevostyanov E.A. Differentiability a.e. and ACL – property of some generalizations of quasiregular mappings. // Conformal Structures and Dynamics (CODY) Third Year Conference, Bendlewo, Poland, September 21–26, 2009, abstracts. – 2009. – P. 8–9.

42. Salimov R.R. Asymptotic behavior of generalized quasi-isometries. // International Conference on Complex Analysis, dedicated to the memory of A. Goldberg, Lviv, May 31 – June 5, 2010, abstracts. – 2010. – P. 51–52.

43. Salimov R.R., Sevostyanov E.A. Estimate of inner dilatation of the mappings with non-bounded characteristics of quasiconformality. // International Conference on Complex Analysis, dedicated to the memory of A. Goldberg, Lviv, May 31 – June 5, 2010, abstracts. – 2010. – P. 52–54.

44. Salimov R.R. On finite Lipschitz of space mappings. // International Conference on the modern analysis, Donetsk, Ukraine, June 20–23, 2011, P. 97.

45. Kovtonyuk D.A., Ryazanov V.I., Salimov R.R., Sevost'yanov E.A. On mappings in the Orlicz-Sobolev classes // International Conference on the modern analysis, Donetsk, Ukraine, June 20–23, 2011, P. 59.

46. Salimov R.R. About some properties of space mappings. // Abstract of report of the internat. conf. dedic. to the 120th anniv. of Stefan Banach. — Lviv. — 2012. — P. 155.

47. Salimov R.R. Holder continuity for the ring Q-homeomorphisms with respect to p-modulus. // International Conference "Complex Analysis and Related Topics", Lviv, 23–28 September, 2013. P. 66.

48. Salimov R., Afanaseva O. On some mappings in $\lambda(r)$-regular metric spaces. // International Conference "Complex Analysis and Related Topics", Lviv, 23–28 September, 2013. P. 70.

49. Salimov R. Hölder continuity of ring Q-homeomorphisms with respect to p-module. // Abstract of Int. Conf. "Complex Analysis, Potential Theory and Applications", Kyiv, Ukraine, August 19 – 23, 2013 (режим доступу: http://www.imath.kiev.ua/ $\sim$ complex/conf2013/abstracts.html)

50. Salimov R.R., Sevost'yanov E.A. On some local properties of space generalized quasiisometries. // Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге, Чернівецький національний

університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, 1-4 липня 2015 р., с. 147-148.

51. Salimov R.R. On finite lipschitz Orlicz -Sobolev classes. // Міжнародна конференція молодих математиків, Київ: Тези доповідей. – Київ, 2015. – С. 59.

52. Salimov R.R. Extremal problem for areas of images of discs. // International Conference "Complex Analysis and Related Topics", Lviv, May 30-June 4, 2016, p. 71.

53. Salimov R., Klishchuk B. On extremal problem for area functional. // Міжнародна конференція молодих математиків, Київ: Тези доповідей. – Київ, 2017. – С. 32.

54. Salimov R., Klishchuk B. The extremal problem for the area of an image of an disc. // International scientific conference "Algebraic and geometric methods of analysis" (Odesa, May 31 – June 5, 2017): Abstracts. – 2017. – P. 70.

55. Salimov R., Klishchuk B. A lower bound for areas of images of discs. // Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 75-річчю з дня народження члена–кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця, Слов'янськ, : Тези доповідей. – Слов'янськ, 2017.

56. Golberg A., Salimov R. Mappings with integrally controlled p-moduli // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, September 18-23, 2017, Lviv, Ukraine, p. 116-117.

57. Салимов Р.Р., Клищук Б.А. Нижняя оценка для объёма образа шара. // International scientic conference "Algebraic and geometric methods of analysis", Odesa (Ukraine) May 30 — June 4, 2018.

58. Salimov R., Klishchuk B. Lower bounds for the area of the image of a disc. // Hypercomplex Seminar 2018: (Hyper)Complex Analysis in Differential Equations, Geometry and Physical Applications, Mathematical Conference Center at Bedlewo (Poland).

59. Салімов Р.Р., Кліщук Б.А. Нижні оцінки для площі образу круга. // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", Ворохта: Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2018.

60. Salimov R., Klishchuk B. An extremal problem for the volume of the image of a ball. // Hypercomplex Seminar 2019: (Hyper)Complex Analysis in Differential Equations, Geometry and Physical Applications (including (de)composition problems of binary up to senary structures in alloy and polymer physics), Mathematical Conference Center at Bedlewo (Poland), July 07 – July 14.

61. Салімов Р.Р., Кліщук Б.А. Про поведінку одного класу гомеоморфізмів на нескінченності // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу, Всеукраїнська наукова конференція, Ворохта, 26 лютого - 1 березня, 2020 р., с. 54-56.

62. Салімов Р.Р., Стефанчук М.В. Про локальні властивості розв'язків нелінійних рівнянь Бельтрамі // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу, Всеукраїнська наукова конференція, Ворохта, 26 лютого — 1 березня, 2020 р., с. 80-82.

АНОТАЦІЇ

Салімов Р. Р. Метод неконформного модуля у теорії відображень зі скінченним спотворенням. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико–математичних наук за спеціальністю 01.01.01 "Математичний аналіз" (111 — математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2021.

У дисертації розвинуто метод неконформного модуля для дослідження диференціальних, локальних, асимптотичних і граничних властивостей відображень зі скінченним спотворенням, кільцевих і нижніх Q-гомеоморфізмів, визначених у термінах неконформного p-модуля.

Отримано характеризацію кільцевих і нижніх Q-гомеоморфізмів у термінах p-модуля і встановлено взаємозв'язок між цими гомеоморфізмами. Доведено аналоги нерівності М.О. Лаврентьєва про спотворення площі круга при квазіконформних відображеннях, леми Герінга про локальну ліпшицевість і теореми Ікоми–Шварца для кільцевих і нижніх Q-гомеоморфізмів, визначених у термінах p-модуля.

Встановлено, що гомеоморфні розв'язки вироджених рівнянь Бельтрамі з узагальненими похідними є кільцевими й нижніми Q-гомеоморфізмами, де Q — дотична дилатація, й доведено узагальнені теореми про неперервне і гомеоморфне продовження вказаних розв'язків і їхню асимптотичну поведінку на нескінченності. Встановлено загальні умови на дотичну дилатацію, достатні

для існування регулярних розв'язків задачі Діріхле для вироджених рівнянь Бельтрамі в довільних жорданових областях.

Встановлено зв'язок класів Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ в областях комплексної площини, а також класів Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, за умови типу умови Кальдерона на функцію φ, з нижніми й кільцевими Q-гомеоморфізмами, визначеними в термінах p-модуля. Знайдено достатні умови локальної й логарифмічної гельдеровості, степеневого й логарифмічного порядку зростання гомеоморфізмів, що належать наведеним класам Соболєва чи Орліча–Соболєва.

Встановлено достатні умови належності Q-відображень, визначених у термінах p-модуля, до класів Соболєва й доведено узагальнення теореми Боярського–Іванця про невиродженість якобіана відображення. Отримано оцінки зверху якобіана й операторної норми матриці Якобі, p-внутрішних і α-зовнішних дилатацій кільцевих Q-відображень відносно p-модуля.

Узагальнено результат Ю. Вяйсяля про абсолютну неперервність на лініях квазіконформних відображень на відкриті дискретні відображення, що задовольняють певну p-модульну нерівність.

Ключові слова: р-модуль сім'ї кривих, р-ємність конденсатора, відображеня зі скінченним спотворенням, квазіконформні відображення, класи Соболєва, класи Орліча-Соболєва, Q-гомеоморфізми, кільцеві Q-гомеоморфізми, нижні Q-гомеоморфізми, Q-відображення, рівняння Бельтрамі з виродженням, задача Діріхле для рівняння Бельтрамі, локальна поведінка, ліпшицевість, гельдеровість.

Salimov R. R. Non-conformal modulus method in the theory of mappings with finite distortion. — The Manuscript.

Thesis for a Doctor Degree in Physical and Mathematical Sciences on Speciality 01.01.01 "Mathematical analysis" (111 — mathematics). — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2021.

The thesis is devoted to the study of the properties of mappings with finite distortion, that is actively studied during the last 20 years. In the thesis, the method of the non conformal modulus is developed to research differential, local, asymptotic and boundary properties of mappings with finite distortion, ring and lower Q-homeomorphisms defined in terms of non conformal p-modulus.

The characterization of ring and lower Q -homeomorphisms in terms of p-modulus is obtained and the relationship between these homeomorphisms is established. Analogues of the M.O. Lavrentyev inequality on the distortion of the area of a disk for quasiconformal mappings, the Gehring lemma on local Li-

pschitz property and the Ikoma–Schwartz theorem are proved for ring and lower Q-homeomorphisms defined in terms of p-modulus.

It is established that homeomorphic solutions of degenerate Beltrami equations with generalized derivatives are ring and lower Q-homeomorphisms, where Q is a tangent dilatation, and generalized theorems on continuous and homeomorphic extension of these solutions and their asymptotic behavior at infinity are proved. The general conditions on the tangential dilatation sufficient for the existence of regular solutions of the Dirichlet problem for the degenerate Beltrami equation in an arbitrary Jordan domain are established.

The connection of Sobolev classes $W^{1,1}_{\rm loc}$ in the domains of complex plane, as well as the classes of Orlicz–Sobolev $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ in the space $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, under the Calderon type condition on the function φ, with lower and ring Q-homeomorphisms defined in terms of p-modulus is established. Sufficient conditions of local and logarithmic Hölder properties, power and logarithmic orders of growth of homeomorphisms belonging to the mentioned Sobolev and Orlicz–Sobolev classes are found.

Sufficient conditions for Q-mappings defined in terms of p-modulus to belong to the Sobolev classes are established, and a generalization of the Bojarski–Iwaniec result on nonvanishing Jacobian is proved. Upper bounds of the Jacobian and the operator norm of the Jacobian matrix, p-inner and α-outer dilatations of ring Q-mappings with respect to p-modulus are obtained.

An analogue of the Väisälä's result on absolute continuity on lines for mappings satisfying p-modulus inequality with respect to spatial cylinders is also given.

Key words: p-modulus of curve family, p-capacity of the condenser, mappings with finite distortion, quasiconformal mappings, quasiregular mappings, Sobolev classes, Orlicz–Sobolev classes, Q-homeomorphisms, ring Q-homeomorphisms, lower Q-homeomorphisms, Q-mappings, Beltrami equation, Dirichlet problem, local behaviour, Lipschitz property, Hölder property.

Підписано до друку 10.03.2021. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 2. Умов. друк. арк. 1,9. Тираж 120 пр. Зам. 39.

Інститут математики НАН України,
01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.