НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Вовчанський Микола Богданович

УДК 519.21

ДИСЕРТАЦІЯ

Стохастичні потоки зі склеюванням та точкові процеси

01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело __________________________ М. Б. Вовчанський

Науковий керівник:
Дороговцев Андрій Анатолійович
доктор фізико-математичних наук,
професор

Київ — 2021

Анотація

Вовчанський М. Б. Стохастичні потоки зі склеюванням та точкові процеси. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика. — Інститут математики НАН України, Київ, 2021.

Робота присвячена одновимірним стохастичним потокам зі склеюванням, їх апроксимаціям та асоційованим точковим процесам. Такі потоки широко використовуються в прикладних задачах, зокрема в задачах опису турбулентних явищ, при дослідженні граничної поведінки деревовидних випадкових графів, при описі моделей протікання чи як граничний розподіл генеалогічних моделей. Розглянуті в роботі потоки визначальною властивістю мають наявність феномену склеювання. Відповідно, виникають задачі, пов'язані з дослідженням розмірів кластерів, що утворюються при цьому, і з розподілом уцілілих частинок на прямій. Потоки зі склеювання не породжені напівгрупами розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь, однак можна вкласти такий потік в сім'ю випадкових відображень. В роботі для цього застосовується метод дробових кроків. Пов'язаною задачею є розглянута в роботі апроксимація потоків Харріса зі склеюванням потоками дифеоморфізмів, котрі породжені стохастичними диференціальними рівняннями.

Основна частина дисертації складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаної літератури та додатку зі списком опублікованих праць здобувача за темою дисертації та з відомостями про апробацію результатів дисертації.

У вступі відзначається актуальність теми дисертації, висвітлюється її зв'язок із сучасними дослідженнями в теорії випадкових процесів, за-

значається зв'язок проведеного дослідження з науковими програмами, планами, темами в місці виконання дисертаційної роботи, вказуються мета, задачі, об'єкт, предмет, методи дослідження, наукова новизна і практичне значення отриманих результатів, особистий внесок здобувача; перераховуються публікації, котрі містять основні результати роботи та вказуються дані щодо апробації результатів.

В першому розділі досліджуються асимптотичні властивості поведінки потоку Арратья як континуальної системи впорядкованих броунівських частинок на $\mathbb{R}$, зокрема встановлюється асимптотика розміру кластера, котрий містить точку, що стартувала з нуля. Відповідний результат, отриманий автором спільно з А.А.Дороговцевим та А.В.Гнєдіним, формулюється як аналог закону повторного логарифму при прямуванні часового параметру до 0. Зліченну систему частинок в потоці Арратья можна сконструювати із зліченного набору незалежних вінерівських процесів, що склеюються при зіткненні. Така процедура описується в другому підрозділі і є узагальненням запропонованої раніше А.А.Дороговцевим. Як наслідок, для отримання вказаної асимптотики використовується оцінка в термінах певних гаусівських полів, котра встановлюється шляхом застосування оцінок Судакова максимуму гаусівського процесу та нерівності концентрації.

Друга половина першого розділу присвячена встановленню асимптотики в нулі середніх розмірів кластерів в потоках Арратья з дрейфом. Спочатку розглядається випадок лінійного дрейфу, для якого розподіл розміру кластеру обчислюється явно. Встановлюється лема порівняння для семимартиналів і з її допомогою здійснюється перехід до випадку довільного дрейфу при умові, що останній задовольняє умову Ліпшиця.

В другому розділі метод дробових кроків застосовано до пари напівгруп, перша з котрих задана розв'язками детермінованого диференціального рівняння, а друга породжена броунівською сіткою – континуальною системою вінерівських процесів зі склеюванням, що розпочинають рух в усі невід'ємні моменти часу в усіх точках числової осі. Отримані апроксимації слабко збігаються в сенсі $n-$точкових рухів до потоку Арратья з дрейфом, заданим вказаним диференціальним рівнянням.

В другому підрозділі встановлюється результат, згідно з яким "інфінітезимальне випадкове поле", котре керує рухом частинок в броунівській сітці, не може бути відновлено зі спостережень за перенесеними сіткою частинками. Для цього перевіряється, що відповідні конструкції, на відміну від випадку потоків розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь, не утворюють збіжну послідовність. Як результат, для потоку Арратья збіжність апроксимацій в методі дробових кроків може бути лише слабкою.

Для перевірки існування слабкої границі послідовності $n-$точкових наближень в методі дробових кроків як елементів простору Скорохода на $[0;1]$ перевіряється щільність послідовності їх розподілів, після чого доводиться серія технічних тверджень, в яких довільна слабка границя охарактеризовується як семимартингал. Зокрема, перевіряється, що для будь-якої границі траєкторії частинок склеюються після зустрічі.

В другій половині розділу встановлюється оцінка на швидкість збіжності в термінах метрики Вассерштейна в просторі розподілів випадкових мір зі скінченними моментами довільного фіксованого порядку. Для цього розглядаються L_t, $L^{(n)}, n \in \mathbb{N}$, – образи міри Лебега на відрізку $[0;1]$ під дією відображень, породжених потоком Арратья з дрейфом та дограничними потоками відповідно. Такі випадкові міри наближаються своїми дискретними аналогами, що отримуються при розгляді скінченної кількості точок старту в потоці.

Доводяться технічні оцінки на відстані між розв'язками СДР та їх наближеннями в методі дробових кроків і в його модифікації при наявності збурень в початковий момент часу. З них виводяться оцінки на відстань між розподілами L_t, $L^{(n)}, n \in \mathbb{N}$, та апроксимуючими їх розподілами дискретних мір. Наслідуючи запропонований А.А.Дороговцевим та В.В.Фомичьовим підхід, ми конструюємо каплінг розподілів $n-$точкових рухів в даній реалізації методу дробових кроків та отримуємо оцінки на відстань між розподілами введених дискретних випадкових мір, звідки, із використанням результату попереднього параграфу, виводиться заявлена оцінка на $W_{1,p}(L_t, L_t^{(n)})$.

В третьому розділі розглядається клас потоків Харріса зі склеюванням, інфінітезимальна кореляція котрих задана характеристичною функцією стійкого центрованого закону, та задача апроксимації $n-$точкових рухів таких потоків розв'язками стохастичних диференціальних рівнянь відносно мартингалів з просторовими параметрами в сенсі H.Kunita (на відміну від запропонованого А.А.Дороговцевим, Т.В.Маловічко та В.В.Фомичьовим підходу через інтегрування по броунівському листу). Отримано узагальнення результату Th.E.Harris щодо збіжності $n-$точкових рухів в такій схемі та встановлено аналогічну збіжність асоційованого з вихідним та визначеного відповідним чином дуального потоку в зворотньому часі.

Для встановлення описаної вище збіжності для $n-$точкових рухів потоків розглядаються відповідні узагальнені мартингальні задачі, із яких отримується збіжність довільних зліченних наборів траєкторій частинок в потоках. Для всюди щільної множини точок старту набір траєкторій прямого потоку є випадковим елементом в добутку просторів $\mathcal{C}([0;1])$, і траєкторії дуального потоку отримуються як значення конструктивно заданого відображення на цьому просторі. В третьому підрозділі встановлюється неперервність цього відображення в певному сенсі, звідки виводиться слабка збіжність зліченних наборів тракторій дуальних потоків.

В п'ятому підрозділі встановлюється збіжність образів міри Лебега від дією прямого та дуального потоків в просторі локально скінченних невід'ємних борелівських мір на дійсній осі з слабкою-* топологією.

В четвертому розділі розглядаються потоки Арратья з дрейфом та породжені ними точкові процеси. Останні можуть описуватися в термінах точкових щільностей (кореляційних функцій). Встановлений у випадку нульового дрейфу R.Tribe, O.V.Zaboronski явний вигляд таких щільностей як кореляційних функцій деякого пфаффівського процесу є незадовільним з точки зору прикладних задач і не допускає тривіального узагальнення на випадок нетривіального дрейфу. Тому метою четвертого розділу є отримання альтернативних представлень точкових щільностей для потоків Арратья з дрейфом. Для цього вводяться поняття точкових щільностей $p_t^{a,n,k}$, котрі відповідають скінченним наборам точок старту, та точкових щільностей $p_t^{a,n,s,k}$, котрі відповідають конкретним реалізаціям послідовностей моментів зустрічі в системі із n частинок.

Встановлено збіжність $p_t^{a,n,k}$ до вихідних точкових щільностей при апроксимації інтервалу $[0;1]$ скінченними наборами точок. Отримано оцінку на швидкість збіжності одновимірних щільностей в рівномірній метриці.

Зв'язок між фундаментальними розв'язками задач Коші та перехідними функціями дифузійних процесів дає змогу отримати представлення для точкових щільностей як кратних інтегралів від функцій Гріна параболічних початково-крайових задач.

Друга половина четвертого розділу присвячена дослідженню зв'язку між $p_t^{a,n,s,k}$ та $p_t^{0,n,s,k}$. Застосований підхід базується на застосуванні аналога теореми Гірсанова для потоків Арратья, отриманого А.А.Дороговцевим та Т.В.Маловічко. Оскільки умови в означеннях точкових щільностей накладаються лише на поведінку потоку чи його $n-$точкового руху в фінальний момент часу, відшукання вказаних взаємозалежностей потребує обчислення умовних математичних сподівань спеціальних введених А.А.Дороговцевим стохастичних експонент для потоку Арратья з нульовим дрейфом при накладанні умови на положення частинок в термінальний момент часу. Використовуючи описаний в Підрозділі 1.2 конструктивний підхід, ми переформульовуємо останню задачу в термінах модифікованих стохастичних експонент вінерівських процесів зі склеюванням на множині тих елементарних подій, для котрих спостерігається певна фіксована послідовність моментів зустрічі, при умові фіксованого положення вінерівських процесів зі склеюванням в термінальний момент часу.

В підрозділі 4.6 проводяться додаткові побудови, що дає змогу обчислити такі умовні математичні очікування в термінах звичайних вінерівських процесів при умові їх фіксованого положення в термінальний момент часу. В свою чергу, такі маточікування обчислюються в сьомому підрозділі в термінах виразів для броунівських мостів. Досліджуються деякі властивості таких виразів, зокрема в підрозділі 4.8 встановлюється існування регулярної версії таких умовних маточікувань.

Спираючись на описані результати, ми наводимо представлення точкових щільностей для потоків Арратья з дрейфом в термінах гаусівських щільностей та математичних очікувань вищевказаних стохастичних експонент для броунівських мостів.

В підрозділі 4.10 також дається представлення таких щільностей в термінах субімовірнісних щільностей векторів уцілілих в термінальний момент часу частинок та умовних математичних очікувань введених А.А.Дороговцевим стохастичних експонент для потоку Арратья.

Ключові слова: потік Арратья, потік Харріса, точковий процес, ме-

тод дробових кроків, точкова щільність.

Abstract

Vovchanskyi M. B. Coalescing stochastic flows and point processes. —A manuscript.

A thesis for the scientific degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences, 01.01.05 — Probability Theory and Mathematical Statistics. — Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 2021.

The thesis to devoted to one-dimensional stochastic flows with coalescence, their approximations and related point processes. Such flow are widely used in applications, in particular, in descriptions of the turbulence phenomenon, in the studies of the limit behavior of tree-like random graphs, in percolation theory or as a limit distribution for genealogical models. The defining feature of the flows considered here is the phenomenon of coalescence. It results in appearance of problems concerning the distribution of surviving particles and the size of clusters that arise in the flow. Though the coalescing flows are not generated by the semigroups of the solutions to stochastic differentials equations it is still possible to have such a flow embedded into a family of random mappings. The fractional step method is used for this in the thesis. A related problem of the approximation of the coalescing Harris flows with the flows of diffeomorphisms generated by stochastic differential equations is also investigated.

The main body of the dissertation consists of an introduction, 4 chapters, conclusions, a list of references, and an appendix with the list of the articles authored or coauthored by the applicant and information on the presentation of the results of the thesis.

In the introduction we outline and discuss the relevance of the topic of the thesis, its relation to modern scientific research in theory of random processes, its connection to research programs held at Institute of Math-

ematics, goals, objectives, the object and subject, methods of research, scientific novelty and applied significance of the results, the candidate's contribution; the articles and proceedings where the main results of the research were published and reported in are listed and the information about presentation of the results is given, too.

Asymptotic properties of the behavior of the Arratia flow as a continual system of ordered Brownian particles on $\mathbb{R}$ are investigated in the first chapter. In particular, the size of the cluster which contains the particle started from zero is found. The corresponding result obtained in cooperation with A.A.Dorogovtsev and A.V.Gnedin is formulated as an analog of the law of iterated logarithm when the time parameter approaches 0. A countable system of particles in an Arratia flow can be constructed from a countable set of independent Wiener processes merging upon collisions. Such a procedure is described in the second subchapter and is a generalization of the one proposed earlier by A.A.Dorogovtsev. Hence, in order to obtain the asymptotics stated an estimate in terms of certain Gaussian fields is used. The estimate itself is proved by using the Sudakov estimates on the maximum of a Gaussian process and the concentration inequality.

The second half of the first chapter is devoted to obtaining the asymptotics of the means of the sizes of clusters in Arratia flows with drift. The case of linear drift is considered firstly, the distribution of the size of a cluster being calculable explicitly. We establish a comparison lemma for semimartingales and then apply it in order to proceed to the case of arbitrary Lipschitz continuous drift.

In the second chapter the fractional step method is applied to the pair of semigroups the first one of which is a semigroup of solutions to a deterministic differential equation while the second one is generated by a Brownian web, the latter being a continual system of coalescing Wiener processes that start from all point of the real line at all nonnegative times. The approximations obtained weakly converge in the sense of $n-$point motions to the Arratia flow with drift, with drift being given by the aforementioned differential equation.

The second subchapter contains the result according to which the "infinitesimal" random field that drives particles in a Brownian web cannot be restored from observations of particles carried by the web. For that, we check that the corresponding constructions do not form a convergent sequence, contrary to the case of the flow of solutions to a stochastic differential equation. Therefore only weak convergence of the approximations via the fractional step method for the Arratia flow is possible.

To prove the existence of the weak limit of the sequence of the $n-$point approximations introduced above and considered as elements in the Skorokhod space over $[0;1]$, the tightness of the sequence of the distributions of the elements of the sequence is checked, after which a series of technical statements is established, resulting in the characterization of an arbitrary weak limit as a semimartingale. In particular, it is shown that the trajectories of particles merge upon a collision for any limit.

In the second half of the chapter an estimate on the speed of the convergence is given in terms of Wasserstein distances in the space of the distributions of random measures having finite moment of any fixed order. The images L_t, $L^{(n)}, n \in \mathbb{N}$, of the Lebesgue measure on $[0;1]$ under the actions of the mappings generated by an Arratia flow with drift and the prelimit flows, respectively, are considered for that. These random measures are approximated with corresponding discrete analogs obtained by considering a finite number of starting points in a flow.

Technical estimates on divergence between solutions to stochastic differential equations and their approximations via splitting, as well as between the former ones and the approximations via the perturbed at start modification of the fractional step method, are proved. Estimates on the distance between the distributions of L_t, $L^{(n)}, n \in \mathbb{N}$, and the distributions of the corresponding discrete approximations are deduced from the previous results.

Following an approach proposed by A.A.Dorogotsev and V.V.Fomichov, we build a coupling of the distributions of $n-$point motions in the proposed realization of the fractional step method and obtain estimates on the distance between the distributions of the random discrete measures mentioned above and the initial images of the Lebesgue measure, from which, with the application of the results from the previous paragraph, the stated estimate on $W_{1,p}(L_t, L_t^{(n)})$ follows.

In the third chapter we consider the class of coalescing Harris flows the infinitesimal covariance of which is given via the characteristic function of a centered stable law and treat the problem of approximating $n-$point motions of such flows with solutions of stochastic differential equations w.r.t martingales with spatial parameters in the sense of H.Kunita (in contrast to integration w.r.t the Brownian sheet, which was proposed and used by A.A.Dorogovtsev, T.V.Malovīchko and V.V.Fomichov). The result of Th.E.Harris on the convergence of $n-$point motions in this scheme is generalized and, with the dual flow being properly defined, the analogous convergence of the dual flows associated with the initial ones on the inversed time scale is established, too.

To establish the stated convergence of $n-$ point motions, the corresponding generalized martingale problems are considered and the convergence of arbitrary countable sets of the trajectories of particles in the flows is subsequently established. Given a dense subset of $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ of starting points the set of the trajectories in the flow is a random element in the product of copies of $\mathcal{C}([0;1])$, and the trajectories in the dual flow can be obtained as a value of an explicit mapping acting on this space. An appropriate continuity of this mapping is established in the third subchapter, from which the weak convergence of countable sets of trajectories of the dual flows is deduced.

The convergence of the images of the Lebesgue measure under the action of the flows and their duals in the space of locally finite nonnegative Borel measures on $\mathbb{R}$ equipped with vague topology is proved in the fifth subchapter.

The fourth chapter is devoted to Arratia flows with drift and associated point processes. The latter ones admit a description in terms of point densities (correlation functions). An explicit expression for points densities as the correlation functions of some Pfaffian process was derived by R.Tribe, O.V.Zaboronski in the case of zero drift. Since such a description is rather complicated and cannot be easily extended to the case of nonzero drift, the problem of obtaining alternative representations of point densities is addressed. We provide alternative representations of point densities for Arratia flows with drift. To that end, the notion of point densities $p_t^{a,n,k}$ that correspond to finite collections of starting points and the notion of point densities $p_t^{a,n,s,k}$ that correspond to specific realizations of the sequence of collisions in a system of n particles are introduced.

The convergence of $p_t^{a,n,k}$ to the initial point densities when approximating the interval $[0;1]$ with its subsets is proved, and an estimate on the speed of the convergence of one-dimensional motions in uniform metric is given.

The connection between fundamental solutions of parabolic Cauchy problems and transition densities of diffusions leads to a representation of point densities as iterated integrals of Green functions of parabolic initial value-boundary problems.

In the second half of the fourth chapter, the connection between $p_t^{a,n,s,k}$ and $p_t^{0,n,s,k}$ is studied. The approach used is based on the application of the analog of the Girsanov theorem for Arratia flows derived by A.A.Dorogovtsev and T.V.Malovichko. The definitions of point densities imposing conditions on the behavior of a flow or its $n-$point motion only at terminal time, the need to calculate mathematical expectations of special stochastic exponentials for the Arratia flows that were introduced by A.A.Dorogovtsev conditional on a position of particles at terminal time arises. By using the constructive approach described in Subchapter 1.2, we reformulate the latter problem in terms of expectations of modified stochastic exponentials for coalescing Wiener processes on the set of those elementary events which a particular sequence of collision times is observed for when conditioning on a position of the coalescing Wiener processes at terminal time.

Additional constructions introduced in Subchapter 4.6 allow us to calculate such conditional expectations in terms of ordinary Wiener processes conditioned to hit specific points at terminal time. The latter expectations can, in turn, be expressed with using Brownian bridges, which is done is Subchapter 4.7. Some properties of the expressions appearing are investigated, in particular, the existence of the regular version for such expectations is shown in Subchapter 4.8.

Based on the above findings, representations of point densities for Arratia flows with drift in terms of Gaussian densities and mathematical expectations of the aforementioned stochastic exponentials for Brownian bridges are given.

In Subchapter 4.10, a representation of such densities in terms of subprobability densities of vectors composed of surviving particles and conditional mathematical expectations of stochastic exponentials for the Arratia flow introduced by A.A.Dorogovtsev is given.

Key words: Arratia flow, Harris flow, point process, fractional step method, point density.

Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації

Статті в наукових журналах

1. A.A.Dorogovtsev, A.V.Gnegin, and M.B.Vovchanskii, ”Iterated logarithm law for sizes of clusters in Arratia flow”, *Theory Stoch. Process.*, vol. 18, no. 2, pp. 1–7, 2012.

2. A.A.Dorogovtsev and M.B.Vovchanskii, ”Arratia flow with drift and Trotter formula for Brownian web”, *Commun. Stoch. Anal.*, vol. 12, no. 1, pp. 89–108, 2018.

3. M.B.Vovchanskii, ”Convergence of solutions of SDEs to Harris flows”, *Theory Stoch. Process.*, vol. 23, no. 2, pp. 80–91, 2018.

4. A.A.Dorogovtsev and M.B.Vovchanskii, ”On approximations of the point measures associated with the Brownian web by means of the fractional step method and the discretization of the initial interval”, *Ukrain. Math. J.*, vol. 72, no. 9, pp. 1179-1194, 2020.

5. A.A.Dorogovtsev and N.B.Vovchanskii, ”Representations of the finite-dimensional point densities in Arratia flows with drift”, *Theory Stoch. Process.*, vol. 25, no. 1, pp. 25–36, 2020.

Тези доповідей на конференціях

1. Н.Б.Вовчанский, ”Структурные свойства потока Арратья”, presented at 19-th International Conference of Young Scientists “Lomonosov”, Section ”Mathematics and Mechanics”, Moscow, April 9-13, 2012. [Online]. Available: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2012/1797/8210_3de5.pdf

2. М.Б.Вовчанський, ”Аналог формули Троттера для потоку Арратья”, *Всеукраїнська наукова конференція ”Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”. Тези доповідей*, Ворохта, Україна, 25 лютого – 3 березня, 2013.

3. Н.Б.Вовчанский, ”Аналог формулы Троттера для потока Арратья”, presented at 20-th International Conference of Young Scientists “Lomonosov”, Section ”Mathematics and Mechanics”, Moscow, Russian Federation, April 8-13, 2013. [Online]. Available: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2013/2190/2811_4d58.pdf

4. A.A.Dorogovtsev, M.B.Vovchansky, ”Noise and circulations in Brownian stochastic flows”, *Міжнародна математична конференція ”Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування” з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка. Тези доповідей*, Севастополь, Україна, 23 – 30 червня, 2013, ст. 327.

5. M.Vovchanskii, ”Perturbations of singular Brownian flows”, *Abstracts of 11th Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics*, Vilnius, Lithuania, June 30 – July 4, 2014, p. 249.

6. M.Vovchanskii, ”Perturbations of singular stochastic flows on the real line”, *Yu.V.Linnik Centennial Conference “Analytical Methods in Number Theory, Probability Theory and Mathematical Statistics”. Section ”Probability Theory and Mathematical Statistics”. Abstracts*, St.Petersburg, Russian Federation, September 14-18, 2015, p. 57.

7. M.B.Vovchanskii, ”Convergence of solutions of SDEs to coalescing Harris flows”, *Abstracts of International Conference “Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes”, dedicated to the 100th Anniversary of I.I.Gikhman*, Kyiv, Ukraine,

September 17-22, 2018, pp. 101–102.

8. A.A.Dorogovtsev, M.B.Vovchanskii, "Finite-dimensional densities for counting measures associated with the Arratia flows", *Proceedings of Scientific Conference "Modern Problems of Stochastic Analysis", dedicated to the 100th anniversary of the birth of academician S.Kh.Sirajdinov*, Tashkent, September 21-22, 2020, pp. 38-40.

Зміст

Вступ

Актуальність теми. Робота присвячена дослідженню одновимірних стохастичних потоків зі склеюванням та їх апроксимацій. Такі потоки з'явилися як граничні об'єкти в моделі голосування (R.A.Arratia [1]) і нині широко використовуються в прикладних задачах, зокрема в задачах опису турбулентних явищ (А.М.Яглом, А.М.Монін [2], C.Zirbel, W.Woyczyński [3], Y.Le Jan, S.Watanabe [4]), при дослідженні граничної поведінки динаміки конформних відображень в моделі Хастингса-Левітова двомірного випадкового росту (J.Norris, A.Turner [5]), деревовидних випадкових графів на просторовій решітці (R.Roy, K.Saha, A.Sarkar [6]), при описі моделей протікання для річкових систем (C.F.Coletti, L.R.G.Fontes, E.S.Dias [7]) чи як граничний розподіл шкалованих двовимірних генеалогічних моделей (M.Birkner, N.Gantert [8]).

Розглянуті в роботі потоки визначальною властивістю мають наявність феномену склеювання: траєкторії двох частинок в потоці після зіткнення склеюються в одну. Прикладами таких об'єктів виступають потік Арратья, вперше побудований в роботах R.A.Arratia [1], T.Bálint, W.Werner [9], введені Th.E.Harris [10] потоки Харріса (у випадку наявності склеювання) та потоки Арратья з дрейфом, визначені А.А.Дороговцевим [11]. В усіх цих прикладах траєкторія кожної окремої частинки є вінерівським процесом, а відмінність полягає у вигляді інфінітезимальної коваріації, котра задає форму взаємодії для пари частинок.

В потоках Арратья частинки незалежні до моменту зустрічі, і в будь-який відмінний від нуля момент часу множина значень траєкторій потоку є зліченною ніде не щільною множиною (R.A.Arratia [1], А.А.Дороговцев [12]). Відповідно, виникають задачі, пов'язані з дослідженням розмірів кластерів, що утворюються при цьому, і з розподілом уцілілих частинок на прямій.

Перший розділ дисертаційної роботи присвячений встановленню асимптотики розміру кластера, котрий містить точку, що стартувала з нуля. Відповідний результат, отриманий автором спільно з А.А.Дороговцевим та А.В.Гнєдіним, формулюється як аналог закону повторного логарифму й складає основну частину цього розділу. Відмітимо, що асимптотику розмірів таких кластерів та їх середніх значень при прямуванні часового параметру до нескінченності для потоку Арратья та широкого класу потоків Харріса отримав R.W.R.Darling [13], а О.О.Шамов [14] встановив асимптотику максимального відхилення частинок від точок старту в межах відрізку. Знання такої асимптотики дає змогу встановити грубі оцінки на розміри кластерів.

Важливою особливістю потоків зі склеюванням є те, що вони не породжуються напівгрупами розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь (J.Warren, S.Watanabe, B.Tsirelson [15], [16]). Однак при цьому все ж виявляється можливим, при певних умовах, вкласти такий потік в сім'ю випадкових відображень. Зауважимо, що у випадку потоків Харріса існування потоку як індексованої парою моментів часу сім'ї перетворень (можливо, розривних) числової осі було встановлено ще Th.E.Harris, причому напівгрупова властивість виконується для кожної трійки моментів часу на взагалі кажучи своїй множині повної ймовірності. Першу спробу запропонувати конструктивний підхід до визначення потоку зі склеюванням як динамічної системи здійснив R.W.R.Darling [17]. У випадку потоків Арратья відповідну побудову вдається здійснити використовуючи узагальнення потоку Арратья – броунівську сітку в прямому та зворотньому часі як випадковий елемент в деякому топологічному просторі (L. R. G. Fontes, M.Isopi, C. M.Newman, R.Ravishankar [18]). Броунівська сітка представляє собою континуальну систему вінерівських процесів, що розпочинають рух в усі невід'ємні моменти часу в усіх точках числової осі; у прямої сітки та у дуальної сітки траєкторії частинок не перетинаються, що й уможливлює одночасну побудову обох об'єктів. Г.В.Рябов [19] встановив, що можливо вибрати таку модифікацію сітки, щоб отримати стохастичну динамічну систему в розумінні [20] (властивості відповідної конструкції досліджувалися А.А.Дороговцевим, Г.В.Рябовим, B.Schmalfuß [21]). Як наслідок, природною є гіпотеза, що додавання дрейфу в потік зі склеюванням може бути здійснене так само, як і у випадку збурених динамічних систем. Класичним способом здійснити останнє є метод дробових кроків (H.F.Trotter, П.Р.Чернов, Г.І.Марчук [22]–[24]). У випадку стохастичних потоків дифеоморфізмів для стохастичних диференціальних рівнянь та стохастичних диференціальних рівнянь в частинних похідних даний метод розглядали, зокрема, A.Bensoussan, R.Glowinski, A.Rasçanu, P.Kotelenez, Н.Ю.Гончарук, I.Gyöngy, Н.В.Крилов, E.Faou [25]–[28]. В другому розділі представленої роботи метод застосовано до пари напівгруп, перша з котрих задана розв'язками детермінованого диференціального рівняння, а друга породжена броунівською сіткою. Отримані апроксимації слабко збігаються в сенсі $n-$точкових рухів до потоку Арратья з дрейфом, заданим вказаним диференціальним рівнянням. При цьому показано, що, на відміну від випадку породженого стохастичним рівнянням потоку, для потока Арратья збіжність тут можлива лише у слабкому сенсі. Відмітимо, що, розглядаючи збіжність потоків гомеоморфізмів до потоку Арратья при стягуванні носіїв кореляційних функцій в точку, А.А.Дороговцев та В.В.Фомичьов [29] отримали оцінку в метриці Васcерштейна на швидкість збіжності образів довільної скінченної міри під дією вказаних потоків. Аналог такої оцінки для описаного методу дробових кроків отримано в другій половині другому розділу.

Іншим пов'язаним з вищевикладеним питанням є можливість апроксимації потоків зі склеюванням потоками дифеоморфізмів, котрі породжені стохастичними диференціальними рівняннями. Це питання розглядається в третьому розділі для класу потоків Харріса зі склеюванням, інфінітезимальна кореляція котрих задана характеристичною функцією стійкого центрованого закону. Відмітимо відомі на момент написання роботи результати щодо апроксимації $n-$точкових рухів таких потоків $n-$точковими рухами, породженими напівгрупами неперервних перетворень. В роботі [30] І.І.Ніщенко запропонувала схему отримання потоку Арратья як слабкої границі перешкальованих випадкових блукань, причому К.В.Глиняна [31] описала поведінку при такому граничному переході функціоналу, що описує порушення порядку між частинками в дограничних потоках. А.А.Дороговцев [32] встановив слабку збіжність $n-$точкових рухів гладких стохастичних потоків до відповідних рухів потоку Арратья; такий підхід знайшов продовження в роботах А.А.Дороговцева, Т.В.Маловічко, В.В.Фомичьова [29], [33], [34]. Th.E.Harris в [10] встановив збіжність $n-$точкових рухів у випадку, коли дограничні інфінітезимальні коваріації є згортками вихідної та гаусівських щільностей і дисперсія останніх прямує до нуля.

Запропонований А.А.Дороговцевим, Т.В.Маловічко та В.В.Фомичьовим підхід використовує інтегрування по броунівському листу та не поширюється на випадок потоків Харріса напряму, тому в третьому розділі розглядається задача апроксимації $n-$точкових рухів вказаних вище потоків Харріса розв'язками стохастичних диференціальних рівнянь відносно мартингалів з просторовими параметрами в сенсі H.Kunita [35]. Отримано узагальнення результату Th.E.Harris та встановлено аналогічну збіжність асоційованого з вихідним і визначеного відповідним чином дуального потоку в зворотньому часі. Оскільки опис поведінки стохастичного потоку може проводитися шляхом аналізу образів мір під дією потоку (результати такого типу в випадку потоків гомеоморфізмів можуть бути знайдені в роботах H.Kunita, P.Baxendale, Th.E.Harris, C.Zirbel, E.Çinlar, В.В.Фомичьова [36]–[39]), також встановлюється збіжність образів міри Лебега від дією прямого та дуального потоків в слабкій* топології. Відмітимо, що А.А.Дороговцев та В.В.Фомичьов [29] для своєї схеми отримали оцінку на відстань Вассерштейна між розподілами образів скінченних мір під дією допграничних та граничного потоків.

Окрім вищезгаданих мір, іншим способом аналізу поведінки кластерів в потоках зі склеюванням є точкові міри та асоційовані з ними точкові процеси. У випадку потоку Арратья з нульовим дрейфом вони та породжені ними інтегральні оператори досліджувалися, зокрема, А.А.Дороговцевим, Я.А.Кореновською, К.В.Глиняною, В.В.Фомічьовим в [39]–[42]. Для вивчення подібних точкових процесів можуть застосовуватися кореляційні функції (напр., T.O.Masser, D.ben-Avraham, C.R.Doering [43]–[45] застосовували дані об'єкти при аналізі фізичних моделей частинок з миттєвим склеюванням чи анігіляцією), відомі в теорії випадкових матриць також під назвою точкових щільностей (огляд відповідних результатів наведений в роботах [46], [47], а зв'язок з дайсонівськими броунівськими рухами можна знайти в [48], [49]). Поєднуючи отримані T.O.Masser, D.ben-Avraham методи з результатами із теорії випадкових матриць, R.Munasinghe, R.Rajesh, R.Tribe, O.V.Zaboronski в [50], [51] отримали оцінки та асимптотику при контрольованому розширенні відрізку точок старту для точкових щільностей в потоці Арратья та дуальному потоці з анігіляцією й дали повний опис точкового процесу в термінах пфаффівського процесу з відомим ядром. Цей підхід був продовжений та узагальнений в роботах R.Tribe, O.V.Zaboronski, S.K.Yip, B.Garrod, M. Poplavskyi, J.Lukins, В.В.Фомічьова, К.В.Глиняної [52]–[56]. Відмітимо, що альтернативний підхід до опису розподілів точкових процесів в системах дифузійних процесів зі склеюванням запропонований J.Warren в [57] і продовжений спільно з T.Assiotis, N.O'Connell в [58].

Ядра пфаффівського процесу, отримані R.Tribe та O.V.Zaboronski, мають складну з точки зору прикладних задач форму й не можуть бути легко узагальнені на випадок нетривіального дрейфу. Тому метою четвертого розділу представленої роботи є отримання альтернативних представлень точкових щільностей для потоків Арратья з дрейфом. Такі представлення дані в термінах кратних інтегралів від функцій Гріна параболічних початково-краєвих задач, в термінах гаусівських щільностей та математичних очікувань деяких стохастичних експонент для броунівських мостів, а також у термінах щільностей векторів уцілілих частинок та умовних математичних очікувань введених А.А.Дороговцевим стохастичних експонент для потоку Арратья. Використаний підхід базується на застосуванні аналога теореми Гірсанова для потоків Арратья, отриманого А.А.Дороговцевим та Т.В.Маловічко (див. [11]). Також встановлені граничні теореми про можливість відновлення $n-$точкових щільностей із введених в роботі щільностей, котрі отримуються при розгляді скінченних наборів точок старту.

Відзначимо наостанок, що тематика стохастичних потоків активно розробляється в відділі теорії випадкових процесів Інституту математики НАНУ з початку нинішнього століття й представлена, окрім згаданих вище робіт, й іншими напрямками. Наведемо деякі приклади. Модель потоку Арратья зі змінною масою була запропонована

В.В.Конаровським [59]–[61]; її зв'язок з моделлю Діна-Кавасакі та властивості досліджувалися В.В.Конаровським, T.Lehmann, M.-K. von Renesse, V.Marx [62]–[64]. В.А.Кузнєцов [65]–[67] досліджував кути закручування та геометричні інваріанти траєкторій частинок в броунівських потоках гомеоморфізмів. А.А.Дороговцев запропонував теорію стохастичних потоків зі взаємодією [11]. Породжену ними мартингальну задачу досліджувала М.П.Карликова (Лагунова) [68], згодом встановивши асимптотику траєкторій на нескінченності [69]. П.П.Чернега досліджував локальний час в потоці Арратья [70]. Принцип великих відхилень для потоку Арратья був сформульований А.А.Дороговцевим та О.В.Остапенко в [71]. А.А.Дороговцев, Г.В.Рябов [72]–[75] розвивали стохастичний аналіз для потоків зі склеюванням й отримали, зокрема, аналог розкладу Крилова-Веретеннікова, тоді як К. В. Глиняна розглядала аналогічну проблему для дискретних наближень потоків зі взаємодією в [76], а напівгрупи n-точкових рухів потоків Харріса – в роботі [77]. А.Ю.Пилипенко в [78] довів аналог теореми Струка-Варадана про носій для потоків зі взаємодією, в роботах [79]–[83] досліджував стохастичні потоки з відбиттям, а спільно з М.В.Танцюрою [84] розглядав узагальнення системи частинок з нескінченною сумарною масою в моделі МакКіна-Власова. А.А.Дороговцев [85] ввів поняття квадратичної ентропії, за допомогою якого можна досліджувати скінченність образів множин в броунівських потоках; в [86] ним було запропоновано досліджувати стохастичні напівгрупи, котрі описують зсуви функцій уздовж стохастичних потоків, та поведінку поперечників компактів під дією відповідних операторів. Цей підхід було продовжено в роботах А.А.Дороговцева, Я.А.Кореновської, К.В.Глиняної [40]–[42].

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в Інституті математики НАН України у відділі теорії випадкових процесів в рамках держбюджетних тем «Стохастичний аналіз складних систем», державний реєстраційний номер 0111U001002, та «Стохастичні системи із сингулярною взаємодією», державний реєстраційний номер 0116U002066.

Мета і задачі дослідження. Метою представленої кваліфікаційної роботи є дослідження стохастичних потоків Арратья та потоків Харріса зі склеюванням та їх апроксимацій. Поставлені наступні задачі:

- встановлення асимптотики розмірів кластерів, утворених в потоці Арратья з дрейфом частинками, що зіткнулися з частинкою зі стартом в нулі; встановлення асимптотики в нулі математичних очікувань таких кластерів;
- доведення в методі дробових кроків для броунівської сітки збіжності апроксимуючих процесів до $n-$точкового руху потоку Арратья із дрейфом та отримання оцінок на швидкість збіжності розподілів образів міри Лебега під дією апроксимуючих потоків до розподілу міри Лебега під дією потоку Арратья з дрейфом;
- доведення збіжності $n-$точкових рухів в гладких стохастичних потоках до відповідних рухів в потоці Харріса зі склеюванням при умові, що інфінітезимальні коваріації гладких потоків збігаються до коваріації граничного потоку; доведення збіжності відповідних перетворень числової осі;
- отримання представлень точкових щільностей в термінах гаусівських щільностей та умовних математичних сподівань стохастичних експонент для потоку Арратья.

Об'єкт і предмет дослідження. *Об'єкт дослідження* — потоки Арратья, потоки Харріса та породжені ними точкові процеси. *Предмет дослідження* — випадкові міри, образи мір під дією стохастичних потоків, кластери в потоці Арратья, $n-$точкові рухи стохастичних потоків.

Методи дослідження. В роботі використовуються методи теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів.

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати дисертаційної роботи, які становлять її наукову новизну й виносяться на захист, наступні:

- Встановлено закон повторного логарифму для розмірів кластерів, утворених в потоці Арратья з дрейфом частинками, що зіткнулися з частинкою зі стартом в нулі.
- Доведено слабку збіжність апроксимуючих процесів, побудованих методом дробових кроків, до $n-$точкового руху потоку Арратья із дрейфом. Отримано оцінки на швидкість збіжності розподілів образів міри Лебега під дією вказаних вище апроксимуючих потоків до розподілу образу міри Лебега під дією потоку Арратья з дрейфом. Встановлена неможливість отримання більш сильної, ніж слабка, збіжності в запропонованій схемі.
- Встановлено слабку збіжність зліченних наборів рухів в гладких стохастичних потоках до відповідних зліченних наборів рухів в потоці Харріса з інфінітезимальною коваріацію, заданою характеристичною функцією центрованого стійкого закону, при умові, що інфінітезимальні коваріації гладких потоків збігаються до коваріації граничного потоку рівномірно на компактах. Встановлено

збіжність скінченних наборів породжених потоками перетворень числової осі в слабкій-* топології.

- Для потоків Арратья введено поняття точкових щільностей, котрі відповідають скінченному числу точок старту та конкретній послідовності моментів склейки. Встановлено збіжність таких точкових щільностей до точкових щільностей для всього потоку.
- Отримано наступні представлення точкових щільностей: в термінах функцій Гріна параболічних початково-краєвих задач; в термінах гаусівських щільностей та математичних сподівань деяких стохастичних експонент від броунівських мостів; в термінах умовних математичних сподівань стохастичних експонент для потоку Арратья та щільностей розподілів векторів уцілілих частинок.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати можуть мати подальші застосування в різноманітних розділах теорії випадкових процесів та теорії стохастичних потоків.

Особистий внесок здобувача. Постановка задач і вибір методів дослідження в дисертаційній роботі та у спільних статтях належать науковому керівнику дисертанта А. А. Дороговцеву. Всі представлені в дисертації результати отримані автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на наступних конференціях та наукових семінарах:

- 19-th International Conference of Young Scientists “Lomonosov”, Moscow, April 9-13, 2012;

- Всеукраїнська наукова конференція ”Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, Ворохта, Україна, 25 лютого – 3 березня, 2013;
- 20-th International Conference of Young Scientists “Lomonosov”, Moscow, Russian Federation, April 8-13, 2013;
- Міжнародна математична конференція ”Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування” з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, Севастополь, Україна, 23 – 30 червня, 2013;
- 11th Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, Vilnius, Lithuania, June 30 – July 4, 2014;
- Yu.V.Linnik Centennial Conference “Analytical Methods in Number Theory, Probability Theory and Mathematical Statistics”, St.Petersburg, Russian Federation, September 14-18, 2015;
- International Conference “Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes”, dedicated to the 100th Anniversary of I.I.Gikhman, Kyiv, Ukraine, September 17-22, 2018;
- International Mini-School in Probability, Jilin University, Changcnun, China, April 8-14, 2019;
- Scientific Conference ”Modern Problems of Stochastic Analysis”, dedicated to the 100th anniversary of the birth of academician S.Kh.Sirajdinov, Tashkent, September 21-22, 2020;
- науковий семінар ”Стохастика та її застосування” кафедри дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом професора О.М.Іксанова;

- науковий семінар ”Числення Маллявена та його застосування” відділу теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України під керівництвом професора А.А.Дороговцева;

- науковий семінар ”Стохастичні диференціальні рівняння” кафедри загальної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом професорів О.М.Станжицького та Г.Л.Кулініча;

- науковий семінар відділу теорії ймовірностей та математичної статистики Інституту прикладної математики та механіки НАН України під керівництвом професора С.Я.Махно;

- науково-навчальний семінар математичного інституту Університету м. Утрехт, Нідерланди, під керівництвом професора А.В.Гнєдіна.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані в 5 статтях [1^a–5^a] у фахових виданнях, що індексуються наукометричною базою Scopus, та 8 збірках тез міжнародних конференцій [6^a–13^a].

Структура і обсяг роботи. Дисертація загальним обсягом 195 сторінок складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаної літератури, що містить 125 найменувань, та додатку зі списком опублікованих праць здобувача за темою дисертації та відомостями про апробацію результатів дисертації.

Розділ 1

Асимптотичні властивості потоків броунівських частинок на прямій

1.1 Означення потоків Харріса та деякі факти про їх будову

Основні результати даного розділу опубліковані в роботі [1^a].

Відомо, що математичний опис руху однієї частинки в однорідному випадковому середовищі здійснюється за допомогою вінерівського процесу. Оскільки об'єкт дослідження в даній роботі – це впорядкована система броунівських частинок на прямій, зі стартом в усіх точках дійсної осі, то вивчається множина $\{w_u(t) \mid t \geq 0\}, u \in \mathbb{R}$, вінерівських процесів таких, що $w_u(0) = u$ і $w_u \leq w_v$ при $u \leq v$. Природно вважати, що рух частинок відбувається в спільному випадковому середовищі, отже процеси $w_u, u \in \mathbb{R}$, є вінерівськими мартингалами відносно спільної фільтрації.

В даному розділі досліджуються асимптотичні властивості поведінки континуальної системи впорядкованих броунівських частинок на $\mathbb{R}$. Така система математично може описуватися як за допомогою стохастичних диференціальних рівнянь (надалі – СДР), так і за допомогою мартингальних методів. Останнє дозволяє охопити випадок, коли частинки здатні склеюватися між собою. При цьому утворюються кластери, асимптотика розмірів яких і є предметом дослідження даного розділу. В цьому підрозділі наводяться необхідні означення потоків броунівських частинок.

Розглянемо приклад задання потоків впорядкованих броунівських частинок на прямій.

Приклад 1.1.1. Нехай $w_1, \ldots, w_m$ – незалежні стандартні вінерівські процеси, а функції $\sigma_k \in C_b^\infty(\mathbb{R}), k = \overline{1, m}$, задовольняють рівність $\sum_{i=1}^m \sigma_k^2(x) \equiv 1$, причому додатково $\sum_{k \geq 1} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \sigma_k'(x)\right)^2 < \infty$. Розглянемо потік розв'язків наступного СДР:

$$dX(u,t) = \sum_{i=1}^m \sigma_i(X(u,t))dw_i(t), X(u,0) = u, u \in \mathbb{R}.$$

Для кожного u існує єдиний сильний розв'язок $X(u, \cdot)$, який є м.н. неперервним квадратично інтегровним мартингалом з характеристикою

$$\langle X(u,\cdot)\rangle(t) = \int_0^t \sum_{k \geq 1} \sigma_k^2(X(u,s))\, ds = t.$$

Отже, $X(u, \cdot)$ є вінерівським процесом в силу теореми Леві [87, Теорема 18.3], причому згідно з [88, Теорема 5.51] потік $X : t \mapsto X(\cdot, t)$ є потоком гомеоморфізмів і, як наслідок, впорядкованість частинок, задана точками старту, зберігається: якщо для точок старту u_1, u_2 виконано $u_1 < u_2$, то частинки, котрі розпочали рух в цих точках, зберігають впорядкованість: для всіх $t \in \mathbb{R}_+$ $X(u_1, t) \leq X(u_2, t)$.

Зрозуміло, що в потоці впорядкованих броунівських частинок мартингали, котрі описують їх рух, повинні бути корельовані. У випадку, коли кореляція залежить лише від різниці відповідних броунівських рухів, тобто від відстані між частинками, потік називається потоком Харріса. Наведемо формальне означення, однак, оскільки в першому розділі розглядаються лише частинки зі стартом в нульовий момент часу, ми будемо використовувати спрощене означення потоків Харріса, при якому потік є набором траєкторій частинок, котрі здійснюють броунівський рух. Стандартне означення, при якому під потоком розуміють сім'ю перетворень фазового простору, буде наведене в Розділі 3.

Означення 1.1.1. ([10]) Сукупність випадкових величин

$$\{X(u,t) \mid u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+\}$$

називається потоком Харріса з інфінітезимальною коваріаційною функцією φ, якщо:

1. $\forall u \in \mathbb{R}$ процес $\{X(u,t) \mid t \geq 0\}$ є вінерівським мартингалом зі стартом в u відносно спільної фільтрації

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(X(v,s), v \in \mathbb{R}, s \in [0;t]\right);$$

2. $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ із того, що $u_1 < u_2$, випливає, що $X(u_1,t) \leq X(u_2,t)$ для $t \geq 0$;

3. $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ взаємна квадратична характеристика мартингалів $X(u_1,\cdot)$ та $X(u_2,\cdot)$ рівна

$$\int_0^t \varphi\left(X(u_1,s) - X(u_2,s)\right) ds.$$

В подальшому ми часто застосовуємо позначення $X(u,\cdot) = X(u)$.

Важливий частковий випадок виникає при $\varphi(x) = 1\!\!1_{x=0}$. Відповідний потік Харріса носить назву потоку Арратья [1], [9], [11], [18], [29], [32], [39], [55], [89], [90] (даний потік як сім'я відображень дійсної осі розглядається в Розділі 2). Оскільки взаємна характеристика мартингалів $X(u,\cdot)$ та $X(v,\cdot)$ в потоці Арратья дорівнює

$$\langle X(u,\cdot), X(v,\cdot)\rangle(t) = \int_0^t 1\!\!1_{X(u,s)=X(v,s)} ds =$$

$$= \left(t - \inf\left\{s \mid X(u,s) = X(v,s)\right\}\right)_+,$$

то вінерівські процеси $X(u_1, \cdot), \ldots, X(u_n, \cdot)$ можна неформально вважати незалежними до моменту першої зустрічі, після якого частинки склеюються та рухаються разом.

В роботі [10] показано, що потік Харріса існує для будь-якої симетричної неперервної невід'ємно визначеної функції φ, якщо φ задовольняє умову Ліпшиця поза будь-яким околом нуля та її перетворення Фур'є має неперервну відносно міри Лебега компоненту. Якщо φ достатньо гладка, то потік можна отримати як розв'язок СДР. Наступний приклад є продовженням 1.1.1.

Приклад 1.1.2. Нехай задано незалежні стандартні вінерівські процеси $\{w_k\}_{k\geq 1}$. Потік Харріса можна отримати як розв'язок

$$\begin{aligned} dX(u,t) &= \sum_{i\geq 1} \sigma_i(X(u,t))dw_i(t), \\ X(u,0) &= u, \end{aligned}$$

де $\{\sigma_i\}_{i\geq 1}$ визначаються наступним чином. Інфінітезимальна коваріація φ допускає спектральне зображення [91, Розділ 7, Теорема 8]

$$\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{itu} d\mu(t).$$

Нехай функції $e_k \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}, \mu), k \geq 1$, обмежені та утворюють ортонормований базис в $L_2(\mathbb{R}, \mu)$, а

$$\sigma_k(x) = \left(\mathrm{e}^{ix\cdot}, e_k\right)_{L_2(\mathbb{R},\mu)}, k \geq 1.$$

Тоді

$$\langle X(u,\cdot), X(v,\cdot)\rangle(t) = \int_0^t \sum_{k\geq 1} \sigma_k(X(u,s))\sigma_k(X(v,s))ds =$$

$$= \int_0^t \sum_{k\geq 1} \left(\mathrm{e}^{iX(u,s)\cdot}, e_k\right)_{L_2(\mathbb{R},\mu)} \left(\mathrm{e}^{iX(v,s)\cdot}, e_k\right)_{L_2(\mathbb{R},\mu)} ds =$$

$$= \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{it(X(u,s)-X(v,s))} d\mu(t)\right) ds = \int_0^t \varphi\left(X(u,s) - X(v,s)\right) ds.$$

Для відображення $\sigma : x \mapsto \{\sigma_i(x)\}_{i\geq 1} \in l_2$ маємо

$$\|\sigma(x) - \sigma(y)\|_{l_2} = \sum_{k\geq 1} (\sigma_k(x) - \sigma_k(y))^2 = 2(1 - \varphi(x-y)),$$

тож для $\varphi \in C_b^{1+\alpha}(\mathbb{R})$ при $\alpha \in (0;1)$ дане відображення (пор. з Прикладом 1.1.1) належить простору $C^{1+\alpha}(\mathbb{R}, l_2)$. Тому породжений потік є потоком гомеоморфізмів ([35, Розділ 4]).

Приклад 1.1.3. В потоці Арратья з ймовірністю 1 процеси $\{X(u,\cdot) \mid u \in [a;b]\}$ склеюються в одну точку за скінченний час. Дійсно, в силу впорядкованості

$$\mathsf{P}\{\#X([a;b],t) = 1\} = \mathsf{P}\{X(a,t) = X(b,t)\} =$$
$$= \mathsf{P}\left\{\inf_{s\in[0;t]} (X(b,s) - X(a,s)) \leq 0\right\}.$$

Тут при фіксованому t на множині $\{\omega \mid X(b,s) - X(a,s) > 0, s \in [0;t]\}$ розподіл $(X(a,\cdot), X(b,\cdot))$ співпадає з розподілом $(a + w_1, b + w_2)$, де w_1, w_2 – незалежні стандартні вінерівські процеси. Внаслідок цього

$$\mathsf{P}\{\#X([a;b],t) = 1\} = \mathsf{P}\left\{\inf_{s\in[0;t]} (b - a + w_2 - w_1) \leq 0\right\} =$$
$$= \mathsf{P}\left\{\sup_{s\in[0;t]} \sqrt{2} w_1(s) \leq b - a\right\} \to 1,\ t \to \infty.$$

В загальному потоці Харріса частинки теж можуть склеюватися між собою, утворюючи кластери. З побудови потоку в [10] випливає, що різниця положень двох частинок $\xi = (X(u_1,\cdot) - X(u_2,\cdot))$ є, на відміну від випадку потоку Арратья, не стандартним вінерівським процесом із загибеллю в нулі, а розв'язком СДР

$$d\xi(t) = \big(2(1-\varphi(\xi(t)))\big)^{1/2} dw(t),\ t \le \theta = \inf\{s \mid \xi(s) = 0\},$$

де w – стандартний вінерівський процес відносно породженої процесами $X(u_1,\cdot), X(u_2,\cdot)$ фільтрації. Якщо $\int_0^\delta \frac{x}{1-\varphi(x)}dx$ є скінченним для деякого малого δ, то з критерію Феллера [92, §21, Теорема 1] (див. також [10, ст. 188]) випливає, що процес ξ потрапляє в нуль за скінченний час м.н.. При цьому ξ є квадратично інтегровним неперервним невід'ємним мартингалом, тому $\xi(t) = 0, t \ge \theta$. Загальний результат про феномен склеювання може бути сформульований наступним чином.

Теорема 1.1.1. *[10, Теорема 7.4] Нехай X – потік Харріса з інфінітезимальною коваріацією φ, симетричною, неперервною, невід'ємно визначеною, яка задовольняє умову Ліпшиця поза будь-яким околом нуля. Нехай її перетворення Фур'є має неперервну відносно міри Лебега компоненту. Якщо додатково*

$$\exists C > 0, \varepsilon > 0, r \in (0;2)\colon 1-\varphi(x) \ge Cx^{2-r}, x \in (0;\varepsilon), \tag{1.1}$$

то для довільного s і для довільного компакту I образ множини $X(\mathbb{R}, s) \cap I$ скінченний м.н..

Для потоку Арратья аналогічний результат встановлено в [1]. Теорема 1.1.1 обгрунтовує можливість говорити у випадку 1.1 про потік Харріса $\{X(\cdot,t)\colon t \ge 0\}$ як про систему частинок зі склеюванням таку, що образ числової осі в будь-який додатній момент часу є зліченним.

1.2 Побудова потоку Арратья за допомогою склейки вінерівських процесів

Основним досліджуваним в першому розділі питанням є асимптотика розмірів кластерів в потоці Арратья. Оскільки, як було зазначено вище, вінерівські процеси, що описують рух окремих частинок в потоці Арратья, некорельовані до моменту зустрічі, то варто очікувати, що скінченну систему частинок в потоці Арратья можна описувати за допомогою скінченного набору незалежних вінерівських процесів, що зазнають склеювання в моменти зіткнень. Дійсно, відповідна побудова запропонована в [73, ст. 433-434]. Наведемо її опис.

Зафіксуємо натуральне n.

Означення 1.2.1. Блоком називається довільний непустий скінченний набір послідовних натуральних чисел.

Означення 1.2.2. Впорядкований набір блоків $A_1, \ldots, A_m$ називається розбиттям множини $A = \{1, \ldots, n\}$, якщо $A = \cup_{j=\overline{1,m}} A_m$, $A_i \cap A_i = \emptyset, i \neq j$.

Розглянемо для множини $\{1, \ldots, n\}$ всі можливі розбиття. Кожному такому розбиттю $\mathcal{A} = \{A_j \mid j = \overline{1,m}\}$ поставимо у відповідність деякий вектор $\lambda_{\mathcal{A}} = (\lambda_{\mathcal{A},1}, \ldots, \lambda_{\mathcal{A},n}) \in \mathbb{R}^n$ такий, що

$$\sum_{i \in A_j} \lambda^2_{\mathcal{A},i} = 1, \ j = \overline{1,m}.$$

Означення 1.2.3. Для довільних неперервних функцій $f, g\colon \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ моментом зустрічі назвемо

$$\theta(f, g) = \inf\{t \mid f(t) = g(t)\},$$

де інфінум по порожній множині вважається рівним нескінченності.

Сконструюємо набір траєкторій потоку Арратья, стартувавших із даного набору точок $u_1 < \ldots < u_n$, шляхом комбінування частин незалежних вінерівських процесів $\{w_k \mid k = \overline{1,n}\}, w_k(0) = u_k$, $k = \overline{1,n}$. Припустимо, що вже побудовано $\{X(u_1), \ldots, X(u_n)\}$ на проміжку $[0; \theta]$, де θ – деякий момент склейки в системі $\{X(u_1), \ldots, X(u_n)\}$, тобто $\exists l \in \overline{1,n}$ таке, що $X(u_l,s) < X(u_{l+1},s), s < \theta$, але $X(u_l,\theta) = X(u_{l+1},\theta)$. Визначимо розбиття $\mathcal{A} = \{A_1,\ldots,A_m\}$ множини $\{1,\ldots,n\}$ за правилом: i,j належать одному блоку розбиття $\mathcal{A}$ тоді і тільки тоді, коли $X(u_j,\theta) = X(u_i,\theta)$. Визначимо допоміжні процеси $\{\tilde{X}(u_1),\ldots,\tilde{X}(u_n)\}$ на $[\theta;\infty)$ наступним чином. Нехай довільний блок розбиття $\mathcal{A}$ має вигляд $\{l,\ldots,L\}$. Покладемо

$$\tilde{X}(u_k,t) = X(u_k,\theta) + \sum_{i=l}^{L} \lambda_{\mathcal{A},i}\left(w_i(t) - w_i(\theta)\right),\ k = \overline{l,L}.$$

Позначимо

$$S(\mathcal{A}) = \left\{\min A_j \mid j = \overline{1,m}\right\}.$$

Нехай θ' - перший після θ момент зустрічі в системі $\{\tilde{X}(u_j) \mid j \in S(\mathcal{A})\}$ (або $+\infty$, якщо такого моменту не існує). Процеси $\{X(u_1),\ldots,X(u_n)\}$ покладемо рівними процесам $\{\tilde{X}(u_1),\ldots,\tilde{X}(u_n)\}$ на $[\theta;\theta')$. Якщо розбиття $\mathcal{A}$ містить хоча б два блоки, то $\theta' = \theta(X(u_{j_1}),X(u_{j_2}))$, $j_1,j_2 \in S(\mathcal{A})$, і у випадку скінченності θ' ми можемо визначити нове розбиття $\mathcal{A}'$ множини $\{1,\ldots,n\}$ шляхом об'єднання тих двох блоків розбиття $\mathcal{A}$, котрі вміщують j_1 та j_2. Далі побудова проводиться аналогічним чином.

Продовжуючи дану рекурентну процедуру, отримуємо $\{X(u_k) \mid k = \overline{1,n}\}$ – набір квадратично інтегровних мартингалів відносно породженої вінерівськими процесами фільтрації. При цьому для довільного k :

$$X(u_k,0) = u_k, X(u_k,\cdot) \le X(u_{k+1},\cdot),$$

а взаємна квадратична характеристика $X(u_i)$ та $X(u_j)$ рівна

$$\int_0^t 1\!\!\mathrm{I}_{\{X(u_i,s)=X(u_j,s)\}} ds.$$

Оскільки в доведенні Леми 1.2.1 будуть використані аргументи, аналогічні застосованим в [59] для показу коректності даної побудови, ми не проводимо цю перевірку зараз.

В подальшому нам знадобиться аналогічна побудова для зліченної системи траєкторій. Нехай задана послідовність $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in ([0;1])^\infty$, $u_1 > u_2 > \ldots > u_0 = 0$.

Нехай $\{w_n\}_{n\geq 0}$ – послідовність незалежних стандартних вінерівських процесів, причому $w_k(0) = 0, k \geq 0$. Покладемо $\tilde{X}(u_1) = w_1 + u_1$.

Далі просуваємося рекурентним чином. Припустимо, що $\tilde{X}(u_1), \ldots,$ $\tilde{X}(u_{n-1})$ вже визначені. Тоді

$$\tilde{X}(u_n, t) = (u_n + w_n(t)) \cdot 1\!\!1_{\{t<\theta(u_n+w_n,\tilde{X}(u_{n-1}))\}} + \\ + \tilde{X}(u_{n-1}, t) \cdot 1\!\!1_{\{t\geq\theta(u_n+w_n,\tilde{X}(u_{n-1}))\}}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Залишається врахувати $\tilde{X}(0, \cdot) = w_0$. Остаточно:

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{X}}(u_n, t) = \tilde{X}(u_n, t) \cdot 1\!\!1_{\{t<\theta(\tilde{X}(u_n),w_0)\}} + w_0(t) \cdot 1\!\!1_{\{t\geq\theta(\tilde{X}(u_n),w_0)\}}, \\ t \geq 0,\ n \in \mathbb{N}, \\ \tilde{\tilde{X}}(0, t) = w_0(t),\ t \geq 0. \end{cases}$$

Лема 1.2.1. *Послідовності* $\{\tilde{\tilde{X}}(u_n)\}_{n\geq 0}$ *та* $\{X(u_n)\}_{n\geq 0}$ *мають однаковий розподіл як випадкові елементи в* $(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+))^\infty$.

Доведення. Спочатку перевіримо, що послідовність $\{\tilde{\tilde{X}}(u_n)\}_{n\geq 0}$ задовольняє умови Означення 1.1.1 для $\varphi = 1\!\!1_{\{0\}}$. Розглянемо процеси $\{\tilde{X}(u_k)\}_{k\geq 1}$. Скористаємося методом математичної індукції. Маємо:

$$w_k\Big(t \wedge \theta(u_k + w_k, \tilde{X}(u_{k-1}))\Big) = \int_0^t 1\!\!1_{\{s\leq\theta(u_k+w_k,\tilde{X}(u_{k-1}))\}} dw_k(s), t \geq 0, \tag{1.2}$$

та

$$\Big(\tilde{X}(u_{k-1}, t) - \tilde{X}(u_{k-1}, \theta(u_k + w_k, \tilde{X}(u_{k-1})))\Big) \cdot 1\!\!1_{\{t\geq\theta(u_k+w_k,\tilde{X}(u_{k-1}))\}} = \\ = \int_0^t 1\!\!1_{\{s\geq\theta(u_k+w_k,\tilde{X}(u_{k-1}))\}} d\tilde{X}(u_{k-1}, s). \tag{1.3}$$

Разом (1.2) та (1.3) дають

$$\tilde{X}(u_k,t) = \Big(u_k + w_k\Big(t\wedge\theta(u_k+w_k,\tilde{X}(u_{k-1}))\Big)\Big) + \\ + \Big(\tilde{X}(u_{k-1},t) - \tilde{X}(u_{k-1},\theta(u_k+w_k,\tilde{X}(u_{k-1})))\Big)\times \\ \times 1\!\!1_{\{t\geq\theta(u_k+w_k,\tilde{X}(u_{k-1}))\}} = \tag{1.4}$$

$$= u_k + \int_0^t 1\!\!1_{\{s\leq\theta(u_k+w_k,\tilde{X}(u_{k-1}))\}}dw_k(s) + \\ + \int_0^t 1\!\!1_{\{s\geq\theta(u_k+w_k,\tilde{X}(u_{k-1}))\}}d\tilde{X}(u_{k-1},s),\ t\geq 0. \tag{1.5}$$

Якщо припустити, що

$$\Big\langle \tilde{X}(u_l),\tilde{X}(u_k)\Big\rangle(t) = \int_0^t 1\!\!1_{\{\tilde{X}(u_l,s)=\tilde{X}(u_l,s)\}}ds$$

для $k,l\leq n-1$, то за допомогою (1.4) отримаємо

$$\Big\langle \tilde{X}(u_n),\tilde{X}(u_k)\Big\rangle(t) = \Big\langle \int_0^{\cdot} 1\!\!1_{\{s\leq\theta(u_n+w_n,\tilde{X}(u_{n-1}))\}}dw_n(s),\tilde{X}(u_k)\Big\rangle(t) + \\ + \Big\langle \int_0^{\cdot} 1\!\!1_{\{s\geq\theta(u_n+w_n,\tilde{X}(u_{n-1}))\}}d\tilde{X}(u_{n-1},s),\tilde{X}(u_k)\Big\rangle(t) = \\ = 0 + \int_0^t 1\!\!1_{\{s\geq\theta(u_n+w_n,\tilde{X}(u_{n-1}))\}}1\!\!1_{\{s\geq\theta(\tilde{X}(u_k,s),\tilde{X}(u_{n-1},s))\}}ds = \\ = \int_0^t 1\!\!1_{\{s\geq\theta(u_n+w_n,\tilde{X}(u_k))\}}ds.$$

Перехід від $\{\tilde{X}(u_k)\}_{k\geq 1}$ до послідовності $\{\tilde{\tilde{X}}(u_j)\}_{j\geq 0}$ проводиться аналогічно. Залишається помітити, що умови Означення 1.1.1 у нашому випадку повністю визначають розподіл в $(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+))^\infty$ [11, ст. 266]. $\square$

1.3 Кластери в потоці Арратья та оцінки максимуму гаусівських випадкових полів

За рахунок впорядкованності в потоці Арратья X кластери в ньому є інтервалами. Розглянемо розмір кластера, утвореного всіма частинками зі стартом вище нуля, що за час t приклеїлися до частинки зі стартом в 0 :

$$L(t) = \{u \mid u > 0, X(0,t) = X(u,t)\},$$

В роботі [12, Теорема 2] показано, що потік Арратья має таку модифікацію, що для довільного $T > 0$ відображення $\mathbb{R} \ni u \to \{X(u,t) \mid t \in [0;T]\} \in C([0;T])$ є неперервним справа. В подальшому така модифікація завжди вважається вибраною. Тоді $S(t) := \sup L(t) \in L(t)$. В подальшому встановлюється аналог закону повторного логарифму в нулі для процесу S. Одновимірні розподіли процесу S відомі. Дійсно,

$$\{\omega \mid \lambda(L(t)) > u\} = \{\omega \mid S(t) > u\} = \{\omega \mid X(0,t) = X(u,t)\},$$

де λ – міра Лебега, тому згідно з Прикладом 1.1.3

$$\mathsf{P}\{S(t) > u\} = \mathsf{P}\left\{\sup_{s\in[0;t]} X(0,s) \geq \frac{u}{\sqrt{2}}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{u}{\sqrt{2t}}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} dy. \qquad (1.6)$$

Проте при розгляді сукупності траєкторій зліченної кількості частинок необхідно використовувати багатовимірні розподілі даного процесу. При цьому, в позначеннях попереднього параграфа та використовуючи Лему 1.2.1, можна записати:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\{S(t_1) > u_1, \ldots, S(t_m) > u_m\} = \\
&\quad = \mathsf{P}\left\{X(u_k, t_k) > X(0, t_k), k = \overline{1,m}\right\} = \\
&\quad = \mathsf{P}\left\{\min_{t\in[0;t_k]} (X(u_k,t) - X(0,t)) > 0, k = \overline{1,m}\right\} = \\
&\quad = \mathsf{P}\left\{\min_{t\in[0;t_k]} \left(\tilde{\tilde{X}}(u_k,t) - \tilde{\tilde{X}}(0,t)\right) > 0, k = \overline{1,m}\right\} = \\
&\quad \leq \mathsf{P}\left\{\max_{k=\overline{1,m}} \max_{t\in[0;t_k]} \frac{w_0(t) - w_k(t)}{u_k} < 1\right\} + \\
&\qquad + \mathsf{P}\left\{\exists k = \overline{2,m} \colon \theta\left(\tilde{\tilde{X}}(u_k), \tilde{\tilde{X}}(u_{k-1})\right) < t\right\},
\end{aligned}$$

де $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}_+, m \in \mathbb{N}$. Перша ймовірність в останньому виразі є ймовірністю невиходу гаусівського поля на рівень 1, тому в подальшому нам знадобиться наступне технічне твердження, основну роль в доведенні якого відіграють класичні оцінки Судакова максимуму гаусівського процесу та нерівність концентрації [93], [94].

Теорема 1.3.1. *Нехай* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty$: $u_0 = 0, u_n, t_n \searrow 0, n \to \infty, t_1 < 1$; *нехай* $\{w_n\}_{n\geq 0}$ *– незалежні стандартні вінерівські процеси. Покладемо* $\sigma^{n,N} = \max_{k=\overline{n,N}} \frac{2t_k}{u_k^2}, \delta^{n,N} = \sqrt{\min_{k,j=\overline{n,N},k>j} \left(\frac{t_k}{u_k^2} + \frac{t_j}{u_j^2}\right)}$. *Тоді для довільних* n, N *при* $N - n \geq 24$ *і для всіх* r *таких, що*

$$0 < r < \left(1 - \frac{1}{(2(N-n))^{\frac{1}{2}}}\right) (\ln(N-n))^{\frac{1}{2}} \delta^{n,N} - 1$$

виконується

$$\mathsf{P}\left\{\max_{t\in[0;t_k]} \frac{w_0(t) - w_k(t)}{u_k} < 1,\ k = \overline{n,N}\right\} \leq \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2\sigma^{n,N}}}.$$

Доведення. Зафіксуємо n та N. Задамо центроване гаусівське поле $\left\{X_t^{n,N} \mid t \in T^{n,N}\right\}$:

$$T^{n,N} = \bigcup_{k=n}^{N} T_k^{n,N},\ T_n^{n,N} = [0;t_n],\ T_k^{n,N} = [k-1; k-1+t_k], k = \overline{n+1,N},$$

$$\begin{aligned} X_t^{n,N} =& \mathbb{1}_{\{t\in T_n^{n,N}\}} \cdot \frac{w_0(t) - w_n(t)}{u_n} + \\ &+ \sum_{k=n+1}^{N} \mathbb{1}_{\{t\in T_k^{n,N}\}} \cdot \frac{w_0(t-(k-1)) - w_k(t-(k-1))}{u_k}. \end{aligned}$$

Будь-яка пара із двох різних множин в наборі $T_k^{n,N}, k = \overline{n,N}$, не має спільних точок, оскільки $\sup_{l\in\mathbb{N}} t_l < 1$. Позначимо $\sup_{t\in T^{n,N}} X_t^{n,N} = \xi^{n,N}$. Тоді

$$\left\{\max_{t\in[0;t_k]} \frac{w_0(t) - w_k(t)}{u_k} < 1,\ k = \overline{n,N}\right\} = \left\{\xi^{n,N} < 1\right\}.$$

Очевидно, $\xi^{n,N} < \infty$ м.н.. Нехай $\sigma^{n,N} = \sup_{t\in T^{n,N}} \mathrm{Var}(X_t^{n,N})$. На множині $T^{n,N}$ введемо псевдометрику $\rho_{X^{n,N}}$, породжену полем $X^{n,N}$:

$$\rho_{X^{n,N}}(t,s) = \sqrt{\mathrm{Var}(X_t^{n,N} - X_s^{n,N})}.$$

Позначимо через $M^{n,N}$ метричну ємність відносно псевдометрики $\rho_{X^{n,N}}$ [93], [94] множини $T^{n,N}$. Застосувавши нерівність Судакова [93, §14, Теорема 5], маємо:

$$\mathrm{E}\,\xi^{n,N} \geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2M^{n,N}(\delta)}}\right) \cdot \delta\sqrt{\ln M^{n,N}(\delta)}, \qquad (1.7)$$

для всіх δ таких, що $M^{n,N}(\delta) \geq 24$. Нехай $N - n \geq 24$. Перевіримо, що для $\delta^{n,N} = \sqrt{\min_{k,j=\overline{n,N},k>j}\left(\frac{t_k}{u_k^2} + \frac{t_j}{u_j^2}\right)}$ виконується:

$$M^{n,N}(\delta^{n,N}) \geq N - n. \qquad (1.8)$$

Покажемо, що множина $\{k-1+t_k \mid k = \overline{n,N}\}$ є $\delta^{n,N}-$розрізнюваною підмножиною $T^{n,N}$. Дійсно, якщо $j < k$, то

$$\begin{aligned}
&(\rho_{X^{n,N}}(j-1+t_j, k-1+t_k))^2 = \\
&\quad = \mathrm{Var}\left(\frac{w_0(t_k) - w_k(t_k)}{u_k} - \frac{w_0(t_j) - w_j(t_j)}{u_j}\right) = \\
&\quad = \mathrm{Var}\left(\frac{w_0(t_k)}{u_k} - \frac{w_0(t_j)}{u_j}\right) + \mathrm{Var}\left(\frac{w_k(t_k)}{u_k}\right) + \mathrm{Var}\left(\frac{w_j(t_j)}{u_j}\right) = \\
&\quad = \frac{1}{u_k^2 u_j^2}\mathrm{Var}\Big(u_j(w_0(t_k) - w_0(t_j)) + (u_j - u_k)w_0(t_j)\Big) + \frac{t_k}{u_k^2} + \frac{t_j}{u_j^2} = \\
&\quad = \frac{1}{u_k^2 u_j^2}\left(u_j^2(t_k - t_j) + (u_k - u_j)^2 t_j\right) + \frac{t_k}{u_k^2} + \frac{t_j}{u_j^2} > \frac{t_k}{u_k^2} + \frac{t_j}{u_j^2} \geq \\
&\quad \geq \delta^{n,N},
\end{aligned}$$

що й доводить (1.8).

Згідно з нерівністю концентрації для гаусівської міри [94, Нерівність 1.23], для будь-якого $r > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\xi^{n,N} \le \mathrm{E}\,\xi^{n,N} - r\right\} \le \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2\sigma^{n,N}}}, \tag{1.9}$$

де

$$\sigma^{n,N} = \sup_{t\in T^{n,N}} \mathrm{Var}(X_t^{n,N}) = \max_{k=\overline{n,N}} \frac{\mathrm{Var}(w_0(t_k) - w_n(t_k))}{u_k^2} = \max_{k=\overline{n,N}} \frac{2t_k}{u_k^2}. \tag{1.10}$$

Поєднавши (1.8), (1.7) та (1.10), отримуємо твердження леми.

□

1.4 Закон повторного алгоритму для розміру кластера $L(t)$

Нагадаємо, що $L(t) = \{u \mid u > 0, X(0,t) = X(u,t)\}$, де X – потік Арратья. Покладемо $\nu(t) = \lambda(L(t))$. В даному підрозділі доводиться наступна теорема.

Теорема 1.4.1. *З ймовірністю* 1

$$\limsup_{t\to 0+} \frac{\nu(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t^{-1}}} \ge 1,$$
$$\limsup_{t\to 0+} \frac{\nu(t)}{2\sqrt{t\ln\ln t^{-1}}} \le 1.$$

Доведення. Спочатку доведемо оцінку зверху. Покладемо

$$\varphi(t) = 2\sqrt{t\ln\ln t^{-1}},\ t \le \mathrm{e}.$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та покладемо $t_n = \alpha^n, n \ge \frac{1}{\ln\alpha}$, для деякого фіксованого $\alpha \in (0;1)$. Випадкові події

$$A_n = \left\{\frac{\nu(t_n)}{\varphi(t_n)} \ge 1 + \varepsilon\right\},\ n \ge n_0 = \frac{1}{\ln\alpha},$$

коректно визначені. Тоді в силу (1.6)

$$\mathsf{P}(A_n) = \mathsf{P}\left\{\nu(t_n) \geq (1+\varepsilon)\varphi(t_n)\right\} = \mathsf{P}\left\{\sup_{s\in[0;t_n]} w(s) \geq \frac{(1+\varepsilon)\varphi(t_n)}{\sqrt{2}}\right\},$$

де w – стандартний вінерівський процес. Згідно з принципом відбиття та оцінкою гаусівського розподілу [95, Теорема 2.21, Лема 12.9] маємо

$$\sum_{n\geq n_0} \mathsf{P}(A_n) = \sum_{n\geq n_0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{u_n}{\sqrt{2t_n}}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}} dv \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n\geq n_0} \frac{\sqrt{t_n}}{u_n} \mathrm{e}^{-\frac{u_n^2}{4t_n}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}(1+\varepsilon)} \sum_{n\geq n_0} \frac{\mathrm{e}^{-(1+\varepsilon)^2 \ln\ln t_n^{-1}}}{\sqrt{\ln\ln t_n^{-1}}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}(1+\varepsilon)} \sum_{n\geq n_0} \frac{\mathrm{e}^{-(1+\varepsilon)^2 \ln(n\ln\alpha^{-1})}}{\sqrt{\ln(n\ln\alpha^{-1})}} < +\infty,$$

тому із леми Бореля-Кантеллі випливає, що

$$\mathsf{P}\left\{\exists n_1 \geq n_0\ \forall n \geq n_1\ \frac{\nu(t_n)}{\varphi(t_n)} < 1+\varepsilon\right\} = 1.$$

Оскільки для $t \in [t_{n+1}; t_n]$

$$\frac{\nu(t)}{\varphi(t)} \leq \frac{\nu(t_n)}{\varphi(t_{n+1})} = \frac{\nu(t_n)}{\varphi(t_n)} \cdot \frac{\varphi(t_n)}{\varphi(t_{n+1})} =$$
$$= \frac{\nu(t_n)}{\varphi(t_n)} \cdot \sqrt{\frac{\ln(n\ln\alpha^{-1})}{\alpha\ln((n+1)\ln\alpha^{-1})}} <$$
$$< \frac{\nu(t_n)}{\varphi(t_n)} \cdot \alpha^{-\frac{1}{2}}.$$

то

$$\mathsf{P}\left\{\sup\lim_{t\to 0+} \frac{\nu(t)}{2\sqrt{t\ln\ln t^{-1}}} \leq (1+\varepsilon)\alpha^{-\frac{1}{2}}\right\} = 1.$$

Виберемо послідовності $\{\varepsilon_k\}_{k\geq n_0}, \{\alpha_k\}_{k\geq n_0}, \varepsilon_k > 0, \alpha_k \in (0;1)$, так, щоб $(1+\varepsilon_k)\alpha_k^{-\frac{1}{2}} \searrow 1, k \to \infty$. В силу неперервності зверху ймовірності маємо

$$\mathsf{P}\left\{\limsup_{t\to 0+} \frac{\nu(t)}{2\sqrt{t\ln\ln t^{-1}}} \leq 1\right\} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \mathsf{P}\left\{\limsup\nolimits_{t\to 0+} \frac{\nu(t)}{2\sqrt{t\ln\ln t^{-1}}} \le (1+\varepsilon_k)\alpha_k^{-\frac{1}{2}}\right\} = 1.$$

Перейдемо до доведення другої частини. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Визначимо функцію $\psi(t) = \sqrt{2t\ln\ln t^{-1}}, t \le \mathrm{e}$. Розглянемо деяке $\alpha \in (0;1)$, точне значення якого буде вказано нижче; покладемо $t_n = \alpha^n$, $u_n = (1-\varepsilon)\psi(t_n)$, $n \ge n_0 = \frac{1}{\ln\alpha}$. Застосуємо описану в Підрозділі 1.2 побудову до потоку X та послідовності $\{u_n\}_{n\ge n_0}$, доповнивши її при $n < n_0$ довільним чином зі збереженням узгодженості з Підрозділом 1.2. Для $n \ge 1$ визначимо наступні випадкові події

$$\begin{aligned} B_n &= \left\{\frac{\nu(t_n)}{\psi(t_n)} \ge 1-\varepsilon\right\} = \{\theta(X(u_n), X(0)) \le t_n\}, \\ C_n &= \{\theta(u_n + w_n, w_0) \le t_n\}, \\ \tilde{B}_n &= \left\{\theta\left(\tilde{\tilde{X}}(u_n), \tilde{\tilde{X}}(0)\right) \le t_n\right\}. \end{aligned}$$

Внаслідок Леми 1.2.1

$$\mathsf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \tilde{B}_n\right) = \mathsf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} B_n\right). \tag{1.11}$$

Наступний крок – замінити події $\{\tilde{B}_n\}_{n\ge1}$ подіями $\{C_n\}_{n\ge1}$, чий опис можливий в термінах сім'ї незалежних вінерівських процесів. Для цього помітимо, що

$$C_n \backslash \tilde{B}_n \subset \left\{\theta(\tilde{X}(u_{n-1}), \tilde{X}(u_n)) \le t_n\right\}, n \ge n_0 + 1.$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} C_n \backslash \tilde{B}_n &= \left\{\theta(u_n + w_n, w_0) \le t_n, \theta\left(\tilde{\tilde{X}}(u_n), \tilde{X}(0)\right) > t_n\right\} = \\ &= \left\{\theta(u_n + w_n, w_0) \le t_n, \theta(\tilde{\tilde{X}}(u_n), w_0) > t_n\right\} = \\ &= \Big\{\theta(u_n + w_n, w_0) \le t_n, \theta(\tilde{\tilde{X}}(u_n), w_0) > t_n, \\ &\qquad \theta\left(\tilde{X}(u_{n-1}), \tilde{X}(u_n)\right) \le t_n\Big\}. \end{aligned}$$

Розглянемо ряд $\sum_{n\geq n_0} \mathsf{P}\left\{\theta(\tilde{X}(u_{n-1}),\tilde{X}(u_n)) \leq t_n\right\}$ та покажемо, що вибором α можна зробити його збіжним. Застосувавши принцип відбиття, отримаємо:

$$\sum_{n\geq n_0} \mathsf{P}\left\{\theta(\tilde{X}(u_{n-1}),\tilde{X}(u_n)) \leq t_n\right\} =$$

$$= \sum_{n\geq n_0} \mathsf{P}\left\{\theta(\tilde{X}(u_{n-1}),u_n+w_n) \leq t_n\right\} =$$

$$= \sum_{n\geq n_0} \mathsf{P}\left\{\theta(u_{n-1}+w_{n-1},u_n+w_n) \leq t_n\right\} =$$

$$= \sum_{n\geq n_0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{u_{n-1}-u_n}{\sqrt{2t_n}}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}} dv \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n\geq n_0} \frac{\sqrt{t_n}}{u_{n-1}-u_n} \mathrm{e}^{-\frac{(u_{n-1}-u_n)^2}{4t_n}}, \quad (1.12)$$

де

$$u_{n-1}-u_n = (1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}\,\alpha^{\frac{n}{2}} \left(\sqrt{\frac{\alpha^{n-1}\ln\ln\alpha^{-(n-1)}}{\alpha^n \ln n}} - \sqrt{\frac{\ln\ln\alpha^{-n}}{\ln n}}\right) =$$

$$= (1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}\,\alpha^{\frac{n}{2}} \left(\sqrt{\frac{1}{\alpha}}\sqrt{\frac{\ln((n-1)\ln\alpha^{-1})}{\ln n}} - \sqrt{\frac{\ln(n\ln\alpha^{-1})}{\ln n}}\right).$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{\alpha}}\sqrt{\frac{\ln((n-1)\ln\alpha^{-1})}{\ln n}} - \sqrt{\frac{\ln(n\ln\alpha^{-1})}{\ln n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - 1,$$

то останній ряд в (1.12) збігається, зокрема, й тоді, коли збіжним є ряд

$$\sum_{n\geq n_0+1} \frac{1}{\sqrt{\ln n}} \exp\left\{-\frac{(1-\varepsilon)^2 \ln n \left(\sqrt{\frac{1}{\alpha}}\sqrt{\frac{\ln((n-1)\ln\alpha^{-1})}{\ln n}} - \sqrt{\frac{\ln(n\ln\alpha^{-1})}{\ln n}}\right)^2}{2}\right\}.$$

Це виконується для будь-якого α такого, що

$$\frac{(1-\varepsilon)^2}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - 1\right)^2 > 1. \quad (1.13)$$

Отже, зафіксувавши таке α, ми отримуємо з (1.12) збіжність ряду $\sum_{n\geq n_0+1} \mathsf{P}\left\{\theta(\tilde{X}(u_{n-1}), \tilde{X}(u_n)) \leq t_n\right\}$. Як наслідок,

$$\left(\mathsf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} C_n\right) = 1\right) \Rightarrow \left(\mathsf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \tilde{B}_n\right) = 1\right).$$

В силу (1.11) для завершення доведення достатньо показати, що

$$\mathsf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} C_n\right) = 1,$$

або ж що

$$\mathsf{P}\left(\liminf_{n\to\infty} C_n^-\right) = \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to+\infty} \mathsf{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} C_k^-\right) = 0,$$

де знаком $^-$ позначено взяття доповнення. Оскільки

$$\bigcap_{k=n}^{N} C_k^- = \bigcap_{k=n}^{N} \{\theta(u_k + w_k, w_0) > t_k\} =$$
$$= \left\{\max_{t\in[0;t_k]} \frac{w_0(t) - w_k(t)}{u_k} < 1,\ k = \overline{n, N}\right\},$$

то ми можемо скористатися Лемою 1.3.1 для послідовностей $\{u_n\}_{n\geq 1}$, $\{t_n\}_{n\geq 1}$. При цьому

$$\sigma^{n,N} = \max_{k=\overline{n,N}} \frac{2t_k}{u_k^2} = \max_{k=\overline{n,N}} \frac{1}{(1-\epsilon)^2 \ln\ln t_k^{-1}} = \frac{1}{(1-\epsilon)^2 (\ln n + \ln\ln \alpha^{-1})},$$

тож $\sigma^{n,N} = \sigma^n$ й не залежить від N, а

$$\left(\delta^{n,N}\right)^2 = \min_{k,j=\overline{n,N},k>j} \left(\frac{s_k}{u_k^2} + \frac{s_j}{u_j^2}\right) = \frac{\min_{k,j=\overline{n,N},k>j} \left(\frac{1}{\ln\ln \alpha^{-k}} + \frac{1}{\ln\ln \alpha^{-j}}\right)}{2(1-\varepsilon)^2} \geq$$
$$\geq \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \frac{1}{\ln N + \ln\ln \alpha^{-1}}.$$

Тому для достатньо великих N існує $r \in (0;1)$ таке, що

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{(2(N-n))}}\right) (\ln(N-n))^{\frac{1}{2}}\, \delta^{n,N} - 1 \geq$$

$$\geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(2(N-n))}}\right) \frac{1}{1-\varepsilon} \sqrt{\frac{\ln(N-n)}{\ln N + \ln\ln\alpha^{-1}}} - 1 > r > 0,$$

причому r можна вибрати незалежним від N чином. З Леми 1.3.1 випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{N\to+\infty} \mathsf{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} C_k^-\right) \leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2\sigma^n}} = 0,$$

оскільки $\sigma^n \to 0, n \to \infty$. □

Зауваження 1.4.1. В [11] описано систему частинок зі стартом на дійсній осі, траєкторія кожної з яких є вінерівським процесом з дрейфом, при цьому до моменту зустрічі частинки незалежні, а після зіткнення склеюються в одну (строге означення даного об'єкту буде наведено в 1.5). Така система носить назву потоку Арратья з дрейфом. Показано [11, Розділ 7], що якщо дрейф є обмеженою функцією, котра задовольняє умову Ліпшиця на всій осі, то такий потік існує, і його розподіл в певному функціональному просторі є абсолютно неперервним відносно розподілу потоку Арратья без дрейфу (власне, шляхом нескладних додаткових обчислень доведення можна узагальнити на випадок необмеженого дрейфу, задовольняючого умову Ліпшиця на всій осі). В якості прикладу застосування даного результату ми отримуємо справедливість встановленого в Теоремі 1.4.1 закону і для потоку Арратья з дрейфом.

Зауваження 1.4.2. В [14] встановлена асимптотика при малому часі для максимального відхилення від точки старту частинок в потоці Харріса зі склеюванням:

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\sup_{u\in[0;1]} |X(u,t) - u|}{\sqrt{t \ln t^{-1}}} \leq 1$$

(для потоку Арратья має місце рівність). Із очевидної оцінки зверху $\nu(t) \leq 2\sup_{u\in[0;1]} |X(u,t) - u|$ випливає, що $\limsup_{t\to 0+} \frac{\nu(t)}{2\sqrt{t\ln t^{-1}}} \leq 1,$

тож наша оцінка є суттєво точнішою. Крім того, відмітимо, що оцінка знизу на $\nu(t), t \to 0+$, не випливає з результатів [14].

1.5 Потік Арратья з дрейфом та лема порівняння для семимартингалів

Наступні два підрозділи присвячені встановленню асимптотики при $t \to 0+$ математичного сподівання розміру кластера $\nu(t)$ в потоці Арратья з дрейфом.

Нехай $a\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ задовольняє умову Ліпшиця з константою L^a.

Означення 1.5.1. ([11]) Сукупність випадкових величин

$$\{Y^a(u,t) \mid u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+\}$$

називається потоком Арратья з дрейфом a, якщо:

1. $\forall u \in \mathbb{R}$ існує стандартний вінерівський відносно фільтрації

   $$\mathcal{F}_t = \sigma\left(Y^a(v,s), v \in \mathbb{R}, s \in [0;t]\right)$$

   процес w_u такий, що

   $$Y^a(u,t) = u + \int_0^t a(Y^a(u,s))ds + w_u(t), t \geq 0;$$

2. $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}\colon \ (u_1 < u_2) \Rightarrow \left(Y^a(u_1,t) \leq Y^a(u_2,t), t \geq 0\right);$

3. $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ взаємна квадратична характеристика мартингалів w_{u_1} та w_{u_1} рівна

   $$\int_0^t 1\!\!\mathrm{I}_{\{Y^a(u_1,s)=Y^a(u_2,s)\}}ds.$$

Існування потоку Арратья з дрейфом в випадку, коли обмежений дрейф задовольняє умову Ліпшиця, встановлено в [11]. Як вже відзначалося в Зауваженні 1.4.1, умова обмеженості не є суттєвою і може бути відкинутою.

По аналогії з вищевикладеним визначимо

$$\nu^a(t) = \lambda\{u > 0 \mid Y^a(u,t) = Y^a(0,t)\},$$

де λ – міра Лебега. Нагадаємо, що в [12] встановлено існування для потоку Арратья неперервної справа модифікації: для довільного $T > 0$ відображення $\mathbb{R} \ni u \to \{X(u,t) \mid t \in [0;T]\} \in \mathcal{C}([0;T])$ є неперервним справа. Доведення без суттєвих змін поширюється на випадок потоку Арратья з дрейфом, тому в подальшому завжди працюємо з такою модифікацією. Розподіл $\nu^a(t)$ задається як (пор. з (1.6)):

$$\mathsf{P}\left\{\nu^a(t) \geq r\right\} = \mathsf{P}\left\{\theta\left(Y^a(0), Y^a(r)\right) \leq t\right\},$$

де $Y^a(u) \equiv Y^a(u,\cdot)$.

Ми дослідимо асимптотику функції $\mathrm{E}\,\nu^a(t)$ при $t \to 0+$ та встановимо відсутність впливу дрейфу на неї. Для цього спочатку розглядається лінійний дрейф, коли розподіл $\nu^a(t)$ відомий, після чого для переходу до довільного випадку застосовується лема порівняння 1.5.1.

Для $L \neq 0$ покладемо $\varphi_L(r) = \frac{1}{2\sqrt{2}L}(1 - e^{-2\sqrt{2}Lr}), r \geq 0$.

Твердження 1.5.1. *Якщо* $a(u) = Lu, L \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$ *то*

$$P\{\theta\left(Y^a(u_1), Y^a(u_2)\right) > t\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{u/\sqrt{\varphi_L(t)}} e^{-v^2/2} dv. \tag{1.14}$$

Доведення. Розглянемо двоточковий рух в потоці Y^a, котрий стартує з u_1 та $u_2, u_1 < u_2$. Тоді

$$\begin{aligned} Y^a\left(u_2, t \wedge \theta(Y^a(u_1), Y^a(u_2))\right) - Y^a\left(u_1, t \wedge \theta(Y^a(u_1), Y^a(u_2))\right) = \\ = u_2 - u_1 + \\ + \int_0^{t \wedge \theta(Y^a(u_1), Y^a(u_2))} (a(Y^a(u_2, s)) - a(Y^a(u_1, s))\, ds + \\ + w_{u_2}(t \wedge \theta\left(Y^a(u_1), Y^a(u_2)\right)) - w_{u_1}(t \wedge \theta\left(Y^a(u_1), Y^a(u_2)\right)), \end{aligned} \tag{1.15}$$

де w_{u_1}, w_{u_2}– незалежні стандартні вінерівські процеси. Позначивши $\theta\left(Y^a(u_1), Y^a(u_2)\right) = \tau$, маємо в (1.15)

$$Y^a(u_2, t\wedge\tau) - Y^a(u_1, t\wedge\tau) = u_2 - u_1 + \\ + \int_0^{t\wedge\tau} L\left(Y^a(u_2, s) - Y^a(u_1, s)\right) ds + \sqrt{2}\beta(t\wedge\tau), \quad (1.16)$$

де β – стандартний вінерівський процес. Розв'язок (1.16) до моменту τ співпадає з процесом Орнштейна-Уленбека:

$$Y^a_{t\wedge\tau}(u_2) - Y^a_{t\wedge\tau}(u_1) = e^{\sqrt{2}Lt\wedge\tau}\left(u_2 - u_1\right) + \sqrt{2}e^{\sqrt{2}Lt\wedge\tau}\int_0^{t\wedge\tau} e^{-\sqrt{2}Ls} d\beta(s).$$

Тому τ – перший момент часу такий, що

$$\int_0^{t\wedge\tau} e^{-\sqrt{2}Ls} d\beta_s = -\frac{u_2 - u_1}{\sqrt{2}}.$$

В силу теореми Найта про представлення неперервних квадратично інтегровних мартингалів [87, Твердження 18.8] існує стандартний вінерівський процес $\widetilde{\beta}$ такий, що

$$\int_0^t e^{-\sqrt{2}Ls} d\beta_s = \widetilde{\beta}\left(m(t)\right),$$

причому

$$m(t) = \int_0^t e^{-2\sqrt{2}Ls} ds = \frac{1}{2\sqrt{2}L}(1 - e^{-2\sqrt{2}Lt}).$$

Оскільки функція m є детермінованою, за допомогою принципу відбиття можна обчислити розподіл моменту першого виходу процесу $\widetilde{\beta}(m(\cdot))$ на рівень $\frac{u_2-u_1}{\sqrt{2}}$:

$$\mathsf{P}\{\tau > t\} = \mathsf{P}\left\{\max_{s\in[0;\varphi_L(t)]} \widetilde{\beta}(s) < u\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{u/\sqrt{\varphi_L(t)}} e^{-v^2/2} dv.$$

$\square$

Наступний результат дає змогу звести випадок довільного дрейфу до випадку лінійного.

Лема 1.5.1. *Нехай функція α задовольняє умову Ліпшиця на дійсній осі з константою L. Нехай $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$ – розв'язки наступних СДР:*

$$\begin{cases} d\xi^{(k)}(t) = \gamma w^{(k)}(t) + \alpha(\xi^{(k)}(t))dt, \ \xi_0^{(k)} = u^{(k)}, \\ k = 1, 2, \ u^{(2)} \geq u^{(1)}, \end{cases}$$

де $w^{(1)}, w^{(2)}$ – незалежні стандартні вінерівські процеси, $\gamma \in \mathbb{R}$. Визначимо $\eta, \widetilde{\eta}$ як розв'язки для

$$\begin{cases} d\eta(t) = \gamma(dw^{(2)}(t) - dw^{(1)}(t)) + L\eta(t)dt, \\ d\widetilde{\eta}(t) = \gamma(dw^{(2)}(t) - dw^{(1)}(t)) - L\widetilde{\eta}(t)dt, \\ \eta(0) = \widetilde{\eta}(0) = u^{(2)} - u^{(1)}, \end{cases}$$

і покладемо $\tau = \theta(\xi^1, \xi^2)$. Тоді з ймовірністю 1 на $[0; \tau]$

$$\widetilde{\eta} \leq \xi^{(2)} - \xi^{(1)} \leq \eta.$$

Доведення. Позначимо $\xi^{(2)} - \xi^{(1)}$ як $\Delta\xi$. Покладемо

$$\zeta(t) = \int_0^t \left[L\Delta\xi(s) - \alpha(\xi^{(2)}(s)) + \alpha(\xi^{(1)}(s)) \right] ds.$$

Очевидно, $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \widetilde{\eta}, \eta$ є сильними єдиними розв'язками відповідних СДР. Тому

$$\eta(t) - \Delta\xi(t) = L\int_0^t \eta(s)ds - \int_0^t \left[\alpha(\xi^{(2)}(s)) - \alpha(\xi^{(1)}(s)) \right] ds =$$
$$= \zeta(s) + L\int_0^t (\eta(s) - \Delta\xi(s))\, ds.$$

Отже, м.н. маємо наступне представлення:

$$\eta - \Delta\xi(t) = e^{Lt} \int_0^t e^{-Ls} d\zeta(s),$$

оскільки з ймовірністю 1 абсолютно неперервний процес ζ має на скінченному інтервалі обмежену неперервну похідну. Як результат, для всіх t

$$\eta(t) - \Delta\xi(t) =$$
$$= e^{Lt}\int_0^t e^{-Ls}\Big[L(\xi^{(2)}(s) - \xi^{(1)}(s)) - \alpha(\xi^{(2)}(s)) + \alpha(\xi^{(1)}(s))\Big]\,ds.$$

Оскільки $|\alpha(u) - \alpha(v)| \le L(u - v)$ при $u \ge v$, та $\xi^{(2)}(s) \ge \xi^{(1)}(s), s \in [0;\tau]$, то

$$\eta(t) - \Delta\xi(t) \ge 0,\ t \le \tau.$$

Це дає верхню оцінку для $\Delta\xi$.

Визначимо

$$\widetilde{\zeta}(t) = \int_0^t \Big[L\Delta\xi(t) + \alpha(\xi^{(2)}(t)) - \alpha(\xi^{(1)}(t))\Big]\,ds.$$

Аналогічно тому, як це робиться вище, встановлюється, що

$$\Delta\xi_t - \widetilde{\eta}_t = e^{-Lt}\int_0^t e^{Ls}d\widetilde{\zeta}(s) \ge 0,$$

на $[0;\tau]$. $\square$

1.6 Асимптотика середнього розміру кластерів в нулі для потоку Арратья з дрейфом

В розділі встановлюється існування $\lim_{t\to 0+}\frac{\mathrm{E}\,\nu^a(t)}{\sqrt{t}}$ для задовольняючих умову Ліпшиця функцій a (Теорема 1.6.1). Відмітимо, що в роботі [13, Твердження 3.1] встановлено аналогічний Теоремі 1.6.1 результат

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{E}\,\nu(t)}{\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{1.17}$$

для потоків Харріса X з інфінітезимальною коваріацією такою, що $\int_0^1 \frac{xds}{1-\varphi(x)} < \infty$, зокрема для потоку Арратья. Ключовим моментом при встановленні даного результату є [13, Твердження 2.1]:

$$\lim_{t\to+\infty}\mathsf{P}\left\{\sup\{u \mid u > 0, X(0,t) = X(u,t)\} < y\sqrt{t}\right\} =$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{y}{2\sqrt{\pi r^3}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4r}} dr, \quad y \geq 0, \tag{1.18}$$

причому для потоку Арратья з нульовим дрейфом вираз під знаком границі не залежить від t. Оцінка (1.18) є наслідком оцінки на

$$p = \mathsf{P}\left\{X(u_1, t) = X(u_2, t)\right\} -$$

ймовірність того, що дві частинки з фіксованими точками старту u_1, u_2 встигли склеїтися за час t. При $t \to \infty$ ймовірність p прямує до 1 в силу критерію Феллера, й саме тому інфінітезимальна коваріація в виразі для границі відсутня. Для потоку Арратья з нульовим дрейфом X виконується принцип самоподібності [50, Пункт 2.3]: $\forall c > 0$

$$\mathrm{Law}\left(\{X(u,t) \mid u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+\}\right) = \\ = \mathrm{Law}\left(\left\{c^{-1} X(cu, c^2 t) \mid u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+\right\}\right),$$

тому із (1.17) можливо отримати наступний наслідок:

Твердження 1.6.1. $\lim_{t \to 0+} \frac{\mathrm{E}\, \nu^0(t)}{\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Доведення. Маємо:

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left\{\nu^0(t) \geq y\right\} &= \mathsf{P}\left\{\forall u \leq y \ X(u,t) = X(0,t)\right\} = \\ &= \mathsf{P}\left\{\forall u \leq y \ X(cu, c^2 t) = X(0, c^2 t)\right\} = \\ &= \mathsf{P}\left\{\forall u \leq cy \ X(u, c^2 t) = X(0, c^2 t)\right\} = \\ &= \mathsf{P}\left\{\nu^0(c^2 t) \geq cy\right\}, \end{aligned}$$

тому

$$\mathrm{E}\, \nu^0(t) = \int_0^\infty \mathsf{P}\left\{\nu^0(t) \geq y\right\} dy = c^{-1}\, \mathrm{E}\, \nu^0(c^2 t).$$

Поклавши $c(t) = t^{-1/2}$ та спрямувавши t до 0, отримуємо бажаний висновок. $\square$

Зауваження 1.6.1. Ми не можемо застосувати подібним чином принцип самоподібності у випадку Теореми 1.4.1, оскільки параметр c має залежати від часової змінної.

У випадку загального потоку Харріса, в тому числі охопленого результатом [13, Твердження 3.1], чи потоку Арратья з дрейфом принцип самоподібності не виконується, тому отриманий нами в Теоремі 1.6.1 результат не є наслідком [13, Твердження 3.1].

Розглянемо випадок лінійного дрейфу.

Твердження 1.6.2. *Нехай* $a(u) = Lu, L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Тоді*

$$\frac{\mathrm{E}\,\nu^a(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0+}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Доведення. В силу Твердження 1.5.1,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\nu^a(t) &= \int_0^1 dr\, \mathsf{P}\left\{\nu_t^a \geq r\right\} = \int_0^1 dr\, \mathsf{P}\left\{\theta(Y^a(0), Y^a(r)) \leq t\right\} = \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 dr \int_{r/\sqrt{\varphi_L(t)}}^{+\infty} dv\, e^{-v^2/2} = \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} dv \int_0^{v\sqrt{\varphi_L(t)}} dt\, e^{-v^2/2} = \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/\sqrt{\varphi_L(t)}} dv \int_0^{v\sqrt{\varphi_L(t)}} dt e^{-v^2/2} + \\
&\qquad + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{1/\sqrt{\varphi_L(t)}}^{+\infty} dv \int_0^1 dt\, e^{-v^2/2} = \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/\sqrt{\varphi_L(t)}} dv \sqrt{\varphi_L(t)} v e^{-v^2/2} + \\
&\qquad + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{1/\sqrt{\varphi_L(t)}}^{+\infty} dv\, e^{-v^2/2}.
\end{aligned}$$

Оскільки $\varphi_L(t) \to 0, t \to 0+$, то

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\mathrm{E}\,\nu_t^a}{\sqrt{\varphi_L(t)}} = \lim_{t\to 0+} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/\sqrt{\varphi_L(t)}} dv\, v e^{-v^2/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Залишається помітити, що $\lim_{t\to 0+} \frac{\varphi_L(t)}{t} = 1$. □

Основним результатом даного підрозділу є

Теорема 1.6.1. *Нехай функція a задовольняє умову Ліпшиця зі сталою L. Тоді*

$$\frac{\mathrm{E}\,\nu^a(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0+}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Доведення. Спираючись на розглянутий в Твердженні 1.6.2 випадок лінійного дрейфу, застосуємо Лему 1.5.1. Покладемо $a^*(x) = Lx$, $a_*(x) = -Lx$ та покажемо, що

$$\mathsf{P}\left\{\nu^{a_*}(t) \geq r\right\} \leq \mathsf{P}\left\{\nu^a(t) \geq r\right\} \leq \mathsf{P}\left\{\nu^{a^*}(t) \geq r\right\}. \tag{1.19}$$

Зафіксуємо u. Поклавши $\tau^f(u) = \theta\left(Y^f(u), Y^f(0)\right)$, аналогічно доведенню Твердження 1.5.1 маємо

$$Y^a(u, s\wedge\tau^a(u)) - Y^a(0, s\wedge\tau^a(u)) =$$
$$= \int_0^{s\wedge\tau^a(u)} \left(a(Y^a(u,r)) - a(Y^a(0,r))\right) dr + \sqrt{2}\beta(t\wedge\tau^a(u)) + u,$$

де β – стандартний вінерівський процес. Згідно з Лемою 1.5.1

$$Y^a(u, s\wedge\tau^a(u)) - Y^a(0, s\wedge\tau^a(u)) \leq \eta(s\wedge\tau^a(u)),$$

для процесу η такого, що

$$\eta(t) = u + \sqrt{2}\beta(t) + \int_0^t L\eta(s)ds.$$

Отже, $Y^a(u) - Y^a(0)$ потрапляє в 0 не пізніше, ніж процес η, чий момент потрапляння в 0 має такий же розподіл, як і $\theta\left(Y^{a^*}(u), Y^{a^*}(0)\right)$. Звідси випливає друга нерівність в (1.19), оскільки

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left\{\nu^{a^*}(t) \geq r\right\} &= \mathsf{P}\left\{\theta(Y^{a^*}(0), Y^{a^*}(r)) \leq t\right\} \geq \\ &\geq \mathsf{P}\left\{\theta(Y^{a}(0), Y^{a}(r)) \leq t\right\} = \\ &= \mathsf{P}\left\{\nu_t^a \geq r\right\}.\end{aligned}$$

Аналогічно перевіряється перша нерівність в (1.19), звідки випливає, що $E\nu^{a_*}(t) \leq E\nu^{a}(t) \leq E\nu^{a^*}(t)$. Залишається скористатися Твердженням 1.6.2. □

1.7 Висновки

- Для гаусівського випадкового поля, з якого утворюються траєкторії в потоці Арратья, отримано оцінки оцінку розподілу максимуму.
- Встановлено закон повторного логарифму для розмірів кластерів, утворених в потоці Арратья з дрейфом частинками, що зіткнулися з частинкою зі стартом в нулі.
- Для потоку Арратья з дрейфом встановлено асимптотику при $t \to 0+$ математичних очікувань кластерів, котрі містять 0.

Розділ 2

Метод дробових кроків для броунівської сітки

2.1 Броунівська сітка

Основні результати даного розділу опубліковані в роботах [2^a], [4^a].

При розгляді напівгруп, породжених розв'язками диференціальних рівнянь або стохастичних диференціальних рівнянь, буває зручним розділити вплив правої частини розкладаючи її на доданки та застосовуючи вплив кожного доданку почергово на малих інтервалах часу. Найпростішим прикладом даної процедури є формула Троттера для експонент від матриць $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$:

$$\mathrm{e}^{A_1+A_2} = \lim_{n\to\infty} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}A_1}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}A_2}\right)^n.$$

Інтерпретація даної формули наступна. Для диференціального рівняння

$$dx_t = (A_1 + A_2)\, x_t dt$$

можна отримати розв'язок так: послідовно розв'язуємо два диференціальні рівняння

$$dx_t^{(k)} = A_k x_t^{(k)} dt,\ k = 1, 2,$$

на малому інтервалі часу $\frac{1}{n}$, беремо композицію розв'язків, повторюємо процедуру на проміжках довжини $\frac{1}{n}$ та переходимо до границі по n. Такий підхід, відомий під назвами методу дробових кроків, формули Лі-Троттера-Като чи splitting methods, працює в набагато складніших випадках [96], [97] та є зручним, зокрема з точки зору обчислювальних методів [98], [99], якщо права частина рівняння дозволяє розкладення на доданки суттєво різної природи. Випадок стохастичних потоків, породжених СДР з гладкими коефіцієнтами та СДР в часткових похідних, розглянуто, зокрема, в [25]–[27].

В цьому розділі ми застосовуємо вказаний метод до потоку випадкових відображень, породжених броунівською сіткою – континуальним набором вінерівських процесів на прямій, котрі стартують із усіх точок прямої в усі невід'ємні моменти часу, склеюються після зустрічі та є незалежними до моменту зустрічі, та потоку розв'язків детермінованого диференціального рівняння. Строге формулювання вказаної процедури наведено в (2.3)-(2.4). Доводиться слабка збіжність $n-$точкових рухів збуреної сітки до $n-$точкових рухів потоку Арратья з дрейфом (Теорема 2.6.1). В другій половині розділу встановлюється швидкість збіжності в термінах метрики Вассерштейна в просторі розподілів випадкових мір зі скінченними моментами довільного фіксованого порядку.

Означення 2.1.1. Нехай $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ – фільтрація на деякому фіксованому ймовірнісному просторі. Нехай $(u_k, t_k) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, k = \overline{1, N}$. Набір N неперервних квадратично інтегровних випадкових процесів $\{B_{t_k,t}(u_k) \mid t \geq t_k\}, B_{t_k,t_k}(u_k) = u_k, k = \overline{1, N}$, називається вінерівськими процесами зі склеюванням відносно фільтрації $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$, якщо

1. $\forall j = \overline{1, N}$ процес $\{B_{t_j,t}(u_j) \mid t \geq t_j\}$ – $(\mathcal{F}_t)_{t\geq t_j}$-мартингал;

2. $\forall i, j = \overline{1, N}$ процес $\{B_{t_i,t}(u_i)B_{t_j,t}(u_j) - (t - \theta_{ij})_+ \mid t \geq t_i \vee t_j\}$ є

$(\mathcal{F}_t)_{t\geq t_i\vee t_j}$-мартингал, де

$$\theta_{ij} = \inf\left\{s \geq t_i \vee t_j \mid B_{t_i,s}(u_i) = B_{t_j,s}(u_j)\right\}.$$

Означення 2.1.2. Броунівська сітка [18], [89], [90] – набір випадкових процесів $\{\varphi_{t,\cdot}(u) \in \mathcal{C}([t;+\infty)) \mid u, t \in \mathbb{R}\}$ таких, що для довільних $(u_1, t_1), \ldots, (u_N, t_N)$ процеси $\varphi_{t_1,\cdot}(u_1), \ldots, \varphi_{t_N,\cdot}(u_N)$ є вінерівськими процесами зі склеюванням відносно фільтрації

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(\varphi_{s,r}(u), s \leq r \leq t, u \in \mathbb{R}\right), t \in \mathbb{R}.$$

Легко бачити, що набір траєкторій броунівської сітки зі стартом в нулі $\{\varphi_{0,\cdot}(y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ є потоком Арратья.

Броунівська сітка є потоком випадкових відображень: для будь-якої пари (s, t) визначено монотонно неспадне випадкове відображення $u \mapsto \varphi_{s,t}(u)$ з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. В силу наявності склеювання ці випадкові відображення є розривними. Методами роботи [12] встановлюється існування такої модифікації броунівської сітки, що реалізації $\varphi_{s,t} \colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ є càdlàg-функціями відносно просторової змінної. Тому броунівська сітка може розглядатися як сім'я вимірних càdlàg-відображень, проіндексованих парою часових відміток. Дійсно [89], для будь-яких фіксованих $p \leq q \leq r$ та u, м.н.

$$\varphi_{q,r}(\varphi_{p,q}(u)) = \varphi_{p,r}(u). \tag{2.1}$$

Тому броунівська сітка представляє собою приклад стохастичної динамічної системи в сенсі [20][Означення 1.1.1].

З цього моменту й до кінця розділу a – фіксована обмежена дійснозначна функція, котра задовольняє умову Ліпшиця на дійсній осі з постійною C_a. Нехай $\{A_t(u) \mid t \geq 0\}$, для довільного u, – розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} dA_t(u) = a(A_t(u))dt, \\ A_0(u) = u. \end{cases} \tag{2.2}$$

Розглянемо послідовність розбиттів відрізка $[0;1]:\ \{t_0^{(n)},\dots,t_{N^{(n)}}^{(n)}\}$, $n\in\mathbb{N}$, причому $\lambda^{(n)}=\max_{k=\overline{0,N^{(n)}-1}}(t_{k+1}^{(n)}-t_k^{(n)})\to 0,\ n\to\infty$. Для фіксованих $n,\ k\in\overline{0,N^{(n)}-1}$ та $t\in[t_k^{(n)};t_{k+1}^{(n)})$ визначимо наступні випадкові процеси:

$$X_t^{(n)}(u)=\varphi_{t_k^{(n)},t}\left(\mathop{\circ}_{j=1}^{k}A_{t_j^{(n)}-t_{j-1}^{(n)}}(\varphi_{t_{j-1}^{(n)},t_j^{(n)}}(\cdot))\right)(u), \tag{2.3}$$

$$\Delta_k^{(n)}(u)=X_{t_k^{(n)}}^{(n)}(u)-X_{t_k^{(n)}-}^{(n)}(u), \tag{2.4}$$

де $X_{t_k^{(n)}-}^{(n)}(u)=\lim_{s\nearrow t_k^{(n)}}X_s^{(n)}(u)$, а знак $\circ$ позначає композицію функцій. Довизначимо $X_1^{(n)}(u)=X_{1-}^{(n)}(u)$.

З цього моменту і до кінця розділу ми будемо вважати, що всі сигма-алгебри, які зустрічаються в тексті, поповнені усіма множинами нульової міри.

Таким чином, ми застосовуємо метод дробових кроків до пари напівгруп: перша породжена детермінованим диференціальним рівнянням і задана (2.2), тоді як друга визначена відображеннями $\varphi_{s,t}:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$. Відмітимо, що остання стохастична напівгрупа не є стискаючою.

2.2 Суми малих приростів броунівської сітки

Метою даного параграфа є демонстрація того, що шум, асоційований з броунівською сіткою, демонструє суттєво відмінну від випадку потоку розв'язків гладкого СДР поведінку. Для прикладу, розглянемо потік дифеоморфізмів $\{X_{s,t}(\cdot)\mid s\le t\}$, отриманий як система розв'язків (див. Приклад 1.1.1) СДР

$$dX_{s,t}(u)=\sigma(X_{s,t}(u))dw_t,\quad X_{s,s}(u)=u,$$

де w – звичайний вінерівський процес, $\sigma\in C_b^2(\mathbb{R})$. Коефіцієнт σ може бути відновлений зі спостережень потоку:

Твердження 2.2.1. *Для довільного* t

$$\mathrm{L}_2 - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(X_{t\frac{k}{n}, t\frac{k+1}{n}}(u) - u \right) = \sigma(u) w_t.$$

Доведення. Оскільки $\sigma(u)w_t = \int_0^t \sigma(u)dw_s$, то достатньо розглянути

$$\mathrm{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \int_{t\frac{k}{n}}^{t\frac{k+1}{n}} \left(\sigma\left(X_{t\frac{k}{n},s}(u) \right) - \sigma(u) \right) dw_s \right)^2 =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t\frac{k}{n}}^{t\frac{k+1}{n}} \mathrm{E}\left(\sigma\left(X_{t\frac{k}{n},s}(u) \right) - \sigma(u) \right)^2 ds \leq$$
$$\leq \sup_{y\in\mathbb{R}} \sigma'^2(y) \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t\frac{k}{n}}^{t\frac{k+1}{n}} \mathrm{E}\left(\int_{t\frac{k}{n}}^{s} \sigma\left(X_{t\frac{k}{n},r} \right) dw_r \right)^2 ds \leq$$
$$\leq \sup_{y\in\mathbb{R}} \sigma'^2(y) \sup_{y\in\mathbb{R}} \sigma^2(y) \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t\frac{k}{n}}^{t\frac{k+1}{n}} \left(s - t\frac{k}{n} \right) ds \to 0, n \to \infty.$$

□

Однак відображення $\{\varphi_{s,t} \mid s \leq t\}$, асоційовані з броунівською сіткою, поводять себе принципово інакше, що проілюстровано наступним твердженням.

Твердження 2.2.2. *Для довільного* u *та будь-якої послідовності* $\{s_1^{(n)}, \ldots, s_{M_n}^{(n)}\}, n \in \mathbb{N}$, *розбиттів відрізку* $[0; 1]$ *послідовність*

$$\sum_{k=0}^{M_n-1} \left(\varphi_{s_k^{(n)}, s_{k+1}^{(n)}}(u) - u \right), \ n \in \mathbb{N},$$

не є збіжною за ймовірністю.

Доведення. Нам потрібен аналог отриманих в [74] для потоку Арратья результатів, поширених на броунівську сітку.

Нехай задано броунівську сітку $\{\varphi_{t,s}(u) \mid t \leq t, u \in \mathbb{R}\}$. Зафіксуємо число $U > 0$ та $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_N)$ – впорядковану підмножину відрізка $[0; U]$. Для вимірної функції $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in (C([0;1]))^N$ покладемо

$$\mathcal{I}^N_{s,t}(\mathcal{U}; \alpha) = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{s}^{\tau_k(\mathcal{U})} \alpha_k(r) d\varphi_{s,r}(u_k),$$

$$\mathcal{J}^N_{s,t}(\mathcal{U}; \alpha) = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{s}^{\tau_k(\mathcal{U})} \alpha^2_k(r) dr,$$

де

$$\tau_1(\mathcal{U}) = t,$$
$$\tau_k(\mathcal{U}) = \inf \Big\{ t; r \mid \prod_{j=\overline{1,k-1}} (\varphi_{s,r}(u_j) - \varphi_{s,r}(u_k)) = 0 \Big\}, \ k = \overline{2, N}.$$

та

$$\mathcal{E}^N_{s,t}(\mathcal{U}; \alpha) = \exp\left(\mathcal{I}^N_{s,t}(\mathcal{U}; \alpha) - \frac{1}{2} \mathcal{J}^N_{s,t}(\mathcal{U}; \alpha) \right).$$

В [74] доведено, що для будь-якої щільної в $[0; U]$ послідовності $\{u_n\}_{n \geq 1}$ випадкові величини

$$\left\{ \mathcal{E}^N_{0,t}(\{u_1, \ldots, u_N\}; \alpha) \mid \alpha \in (\mathcal{C}([0;1]))^N, N \in \mathbb{N} \right\}$$

формують тотальну множину в $L^2\left(\sigma(\varphi_{0,r}(u), 0 \leq r \leq t, u \in [0; U]\right)$. Якщо

$$\mathcal{F}^U_{s,t} = \sigma\left(\varphi_{r_1,r_2}(u), s \leq r_1 \leq r_2 \leq t, u \in [0; U]\right), \ s \leq t,$$

то ті ж аргументи дозволяють отримати наступний висновок: якщо для довільних $N \in \mathbb{N}, \alpha \in (\mathcal{C}([0;1]))^N, s, t \in [0;1]$ та довільної впорядкованої множини $(u_1, \ldots, u_N) \subset [0; U]$ і довільної випадкової величини $\xi \in L^2\left(\mathcal{F}^U_{0,t}\right)$

$$\mathrm{E}\, \xi \mathcal{E}^N_{s,t}(\{u_1, \ldots, u_N\}; \alpha) = 0,$$

то $\xi = 0$ м.н..

Для простоти розглянемо лише випадок рівномірних розбиттів. Покладемо $\xi_n = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_{\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}}(0)$. Припустимо, що послідовність $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ має підпослідовність, збіжну за ймовірністю до випадкової величини ξ. Оскільки

$$\sup_n \mathrm{E}\,\xi_n^4 = \sup_n \left(6\frac{n-1}{n} + 3n^{-1}\right) < \infty,$$

то послідовність $\{\xi_n^2\}_{n\geq 1}$ рівномірно інтегровна. Як наслідок, $\xi_n \to \xi$, $n \to \infty$, в $L^2(\mathcal{F}_{0,t}^U)$. Якщо додатково виконується, що для довільних чисел $0 \leq s \leq t \leq 1$, функції $\alpha \in (\mathcal{C}([0;1]))^N$ та впорядкованої множини $\mathcal{U}$ із N елементів

$$\mathrm{E}\,\xi_n \mathcal{E}_{s,t}^N(\mathcal{U};\alpha) \to 0,\ n \to \infty, \tag{2.5}$$

то

$$\mathrm{E}\,\xi \mathcal{E}_{s,t}^N(\mathcal{U};\alpha) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\,\xi_n \mathcal{E}_{s,t}^N(\mathcal{U};\alpha) = 0$$

для всіх $\mathcal{U}, \alpha$, тож $\xi = 0$ м.н., що неможливо:

$$\mathrm{E}\,\xi^2 = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\,\xi_n^2 = 1.$$

Залишається перевірити (2.5). З метою уникнення переускладнення позначень дамо доведення лише у випадку $s = 0$, $t = 1$, $u = 0$. На протязі всього доведення функція $\alpha \in (\mathcal{C}([0;1]))^N$ та впорядкована множина $\mathcal{U} = \{u_n \mid n = \overline{1,N}\}$ фіксовані. Позначимо $\xi_{n,k} = \varphi_{\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}}(0)$, $k = \overline{0, n-1}, n \in \mathbb{R}$. Розглянемо

$$\mathcal{F}_{s,t} = \sigma\left(\varphi_{r_1,r_2}(v), s \leq r_1 \leq r_2 \leq t, v \in \mathbb{R}\right).$$

Для довільної впорядкованої множини $\mathcal{A}$ із M елементів та довільної функції $\beta \in (\mathcal{C}([0;1]))^M$ справедливо [74], що

$$\mathrm{E}\,\mathcal{E}_{s,t}^M(\mathcal{A};\beta) = 1. \tag{2.6}$$

Кількість елементів скінченної множини $\mathcal{A}$ позначатимемо $|A|$.

Визначимо для $k = \overline{0, n-1}$ множину $\mathcal{U}_k = \{u_{k,i} \mid i = \overline{1, M_k}\}$ як впорядковану множину всіх різних елементів $\{\varphi_{0,\frac{k}{n}}(u_j) \mid j = \overline{1, N}\}$, чий порядок наслідується від порядку в множині $\mathcal{U}$ очевидним чином. Для фіксованого k

$$
\begin{aligned}
& l_{k,i} = \min\left\{j \mid \varphi_{0,\frac{k}{n}}(u_j) = u_{k,i}\right\}, i = \overline{1, M_k}, \\
& \mathcal{L}_k = (l_{k,1}, \ldots, l_{k,M_k}).
\end{aligned}
$$

Із (2.1) випливає, для будь-якого k :

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}^N_{0,\frac{k+1}{n}}(\mathcal{U}; \alpha) = \mathcal{E}^N_{0,\frac{k}{n}}(\mathcal{U}; \alpha) \times \\
&\qquad \times \exp\left(\sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\tau_j(\mathcal{U}) \wedge \frac{k}{n}}^{\tau_j(\mathcal{U}) \vee \frac{k}{n}} \alpha_j(r) d\varphi_{\frac{k}{n},r}(\varphi_{0,\frac{k}{n}}(u_j)) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\tau_j(\mathcal{U}) \wedge \frac{k}{n}}^{\tau_j(\mathcal{U}) \vee \frac{k}{n}} \alpha_j^2(r) dr\right) \\
&\quad = \mathcal{E}^N_{0,\frac{k}{n}}(\mathcal{U}; \alpha) \times \\
&\qquad \times \exp\left(\sum_{j=1}^{M_k} \int\limits_{\frac{k}{n}}^{\tau_{l_{k,j}}(\mathcal{U})} \alpha_{l_{k,j}}(r) d\varphi_{\frac{k}{n},r}(\varphi_{0,\frac{k}{n}}(u_{l_{k,j}})) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{M_k} \int\limits_{\frac{k}{n}}^{\tau_{l_{k,j}}(\mathcal{U})} \alpha_{l_{k,j}}^2(r) dr\right) \\
&\quad = \mathcal{E}^N_{0,\frac{k}{n}}(\mathcal{U}; \alpha) \times \\
&\qquad \times \exp\left(\sum_{j=1}^{M_k} \int\limits_{\frac{k}{n}}^{\tau_j(\mathcal{U}_k)} \alpha_j(\mathcal{L}_k)(r) d\varphi_{\frac{k}{n},r}(u_{k,j}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{M_k} \int\limits_{\frac{k}{n}}^{\tau_j(\mathcal{U}_k)} \alpha_j(\mathcal{L}_k)^2(r) dr\right),
\end{aligned}
$$

де $\alpha(\mathcal{L}_k) = (\alpha_1(\mathcal{L}_k), \ldots, \alpha_{M_k}(\mathcal{L}_k))$ – випадкова $\mathcal{F}_{0,\frac{k}{n}}-$вимірна функція, визначена відношенням $\alpha_j(\mathcal{L}_k) = \alpha_{l_{k,j}}, j = \overline{1, M_k}$. Тому

$$
\mathcal{E}^N_{0,\frac{k+1}{n}}(\mathcal{U}; \alpha) = \mathcal{E}^N_{0,\frac{k}{n}}(\mathcal{U}; \alpha) \cdot \mathcal{E}^{M_k}_{\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}}(\mathcal{U}_k; \alpha(\mathcal{L}_k)).
$$

Оскільки $\mathcal{E}^N_{0,\frac{k}{n}}(\mathcal{U}; \alpha)$ є $\mathcal{F}_{0,\frac{k}{n}}-$вимірною випадковою величиною та для будь-якого детермінованої впорядкованої множини $\mathcal{A}$ та довільної вимірної функції β випадкова величина $\mathcal{E}^{|\mathcal{A}|}_{\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}}(\mathcal{A}; \beta)$ є незалежною від сигма-алгебри $\mathcal{F}_{0,\frac{k}{n}}$, маємо:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left(\xi_{n,k}\mathcal{E}^N_{0,\frac{k+1}{n}}(\mathcal{U};\alpha)\,\Big|\mathcal{F}_{0,\frac{k}{n}}\right) = \\
&= \mathrm{E}\left(\xi_{n,k}\mathcal{E}^N_{0,\frac{k}{n}}(\mathcal{U};\alpha)\cdot\mathcal{E}^{|\mathcal{U}_k|}_{\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}}(\mathcal{U}_k;\alpha(\mathcal{L}_k))\,\Big|\mathcal{F}_{0,\frac{k}{n}}\right) = \\
&= \mathcal{E}^N_{0,\frac{k}{n}}(\mathcal{U};\alpha)\,\mathrm{E}\left(\xi_{n,k}\mathcal{E}^{|\mathcal{A}|}_{\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}}(\mathcal{A};\alpha(\mathcal{K}))\right)\Big|_{\mathcal{A}=\mathcal{U}_k,\mathcal{K}=\mathcal{L}_k}. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Крім того, із (2.6) випливає:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\xi_{n,k}\mathcal{E}^N_{0,1}(\mathcal{U};\alpha)\,\Big|\mathcal{F}_{0,\frac{k+1}{n}}\right) &= \xi_{n,k}\mathcal{E}^N_{0,\frac{k+1}{n}}(\mathcal{U};\alpha)\,\mathrm{E}\left(\mathcal{E}^{|\mathcal{A}|}_{\frac{k+1}{n},1}(\mathcal{A};\alpha(\mathcal{K}))\right)\Big|_{\substack{\mathcal{A}=\mathcal{U}_k,\\ \mathcal{K}=\mathcal{L}_k}} \\
&= \xi_{n,k}\mathcal{E}^N_{0,\frac{k+1}{n}}(\mathcal{U};\alpha). \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Використовуючи (2.8) та (2.7), отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\sum_{k=1}^{n-1}\xi_{n,k}\mathcal{E}^N_{0,1}(\mathcal{U};\alpha) &= \sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{E}\,\mathrm{E}\left(\xi_{n,k}\mathcal{E}^N_{0,1}(\mathcal{U};\alpha)\,\Big|\mathcal{F}_{0,\frac{k+1}{n}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{E}\,\xi_{n,k}\mathcal{E}^N_{0,\frac{k+1}{n}}(\mathcal{U};\alpha) = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{E}\,\mathrm{E}\left(\xi_{n,k}\mathcal{E}^N_{0,\frac{k+1}{n}}(\mathcal{U};\alpha)\,\Big|\mathcal{F}_{0,\frac{k}{n}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{E}\,\mathcal{E}^N_{0,\frac{k}{n}}(\mathcal{U};\alpha)\,\mathrm{E}\left(\xi_{n,k}\mathcal{E}^{|\mathcal{A}|}_{\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}}(\mathcal{A};\alpha(\mathcal{K}))\right)\Big|_{\substack{\mathcal{A}=\mathcal{U}_k,\\ \mathcal{K}=\mathcal{L}_k}}. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Оцінимо $E\xi_{n,k}\mathcal{E}^{|\mathcal{A}|}_{\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}}(\mathcal{A};\alpha(\mathcal{K}))$ для фіксованих впорядкованих множин $\mathcal{A}$ і $\mathcal{K}, \mathcal{K}\subset\{1,\ldots,N\}$. Спочатку помітимо, що стаціонарність броунівської сітки дає наступне:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\xi_{n,k}\mathcal{E}^{|\mathcal{A}|}_{\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}}(\mathcal{A};\alpha(\mathcal{K})) &= \mathrm{E}\,\varphi_{\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}}(0)\mathcal{E}^{|\mathcal{A}|}_{\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}}(\mathcal{A};\alpha(\mathcal{K})) \\
&= \mathrm{E}\,\varphi_{0,\frac{1}{n}}(0)\mathcal{E}^{|\mathcal{A}|}_{0,\frac{1}{n}}(\mathcal{A};\alpha(\mathcal{K})).
\end{aligned}$$

Нехай $\mathcal{A}=\{a_j \mid j=\overline{1,M}\}$, $\alpha(\mathcal{K})=(\beta_1,\ldots,\beta_M), M\le N$. Тоді

$$\sup_{s\in[0;1],j=\overline{1,M}}|\beta_j(s)|\le\alpha^\star=\sup_{s\in[0;1],j=\overline{1,N}}|\alpha_j(s)|<\infty.$$

Застосувавши формулу Іто, маємо для $t \in [0; \frac{1}{n}]$:

$$\varphi_{0,t}(0)\mathcal{E}^{|\mathcal{A}|}_{0,t}(\mathcal{A};\beta) = \int\limits_0^t \mathcal{E}^{|\mathcal{A}|}_{0,s}(\mathcal{A};\beta)d\varphi_{0,s}(0) +$$

$$+\sum_{j=1}^M \int\limits_0^{t\wedge\tau_j(\mathcal{A})} \varphi_{0,s}(0)\mathcal{E}^{|\mathcal{A}|}_{0,s}(\mathcal{A};\beta)\beta_j(s)d\varphi_{0,s}(a_j)+$$

$$+\sum_{j=1}^M \int\limits_0^{t\wedge\tau_j(\mathcal{A})} \mathcal{E}^{|\mathcal{A}|}_{0,s}(\mathcal{A};\beta)d\left\langle \varphi_{0,\cdot}(0), \int\limits_0^{\cdot\wedge\tau_j(\mathcal{A})} \beta_j(r)d\varphi_{0,r}(a_j)\right\rangle_s,$$

тому

$$\left|\mathrm{E}\,\varphi_{0,t}(0)\mathcal{E}^{|\mathcal{A}|}_{0,t}(\mathcal{A};\beta)\right| = \left|\mathrm{E}\sum_{j=1}^M \int\limits_0^{t\wedge\tau_j(\mathcal{A})} \mathcal{E}^{|\mathcal{A}|}_{0,s}(\mathcal{A};\beta)\beta_j(s)1\!\!\mathrm{I}_{\{\varphi_{0,s}(0)=\varphi_{0,s}(a_j)\}}ds\right| \le$$

$$\le \alpha^\star \sum_{j=1}^M \int\limits_0^t \mathrm{E}\,\mathcal{E}^{|\mathcal{A}|}_{0,s}(\mathcal{A};\beta)1\!\!\mathrm{I}_{\{\varphi_{0,s}(0)=\varphi_{0,s}(a_j)\}}ds.$$

Оскільки

$$\mathsf{P}\left\{0 \in \mathcal{U}_k\right\} = 0,\ k = \overline{1, n-1},$$

можемо вважати, що всі $a_j \neq 0$. Процес $\frac{\varphi_{0,\cdot}(0)-\varphi_{0,\cdot}(a_j)}{\sqrt{2}}$ є вінерівським процесом, зупиненим в момент потрапляння в 0, тому можемо застосувати принцип відбиття:

$$\mathsf{P}\{\varphi_{0,s}(0) = \varphi_{0,s}(a_j)\} = \int_0^{\frac{2s}{a_j^2}} q(x)dx,$$

де $q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x^3}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x}}, x > 0$. Покладемо $q^\star = \max_{x>0} q(x) < +\infty$. Візьмемо $\kappa \in (0; \frac{1}{2})$. Скориставшись (2.6) та поклавши $t = n^{-1}$:

$$\left|\mathrm{E}\,\varphi_{0,t}(0)\mathcal{E}^{|\mathcal{A}|}_{0,t}(\mathcal{A};\beta)\right| \le$$

$$\leq \alpha^\star \sum_{j=1}^{M} \int_0^t \left[\left(\mathrm{E}\, \mathcal{E}_{0,s}^{|\mathcal{A}|}(\mathcal{A};\beta) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\frac{2s}{a_j^2}} q(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} ds \leq$$

$$\leq \alpha^\star \sum_{j=1}^{M} \int_0^t \left[\mathrm{E}\, \mathcal{E}_{0,s}^{|\mathcal{A}|}(\mathcal{A};2\cdot\beta) \exp\{t(\alpha^\star)^2 M\} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\frac{2s}{a_j^2}} q(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} ds \leq$$

$$\leq \alpha^\star \mathrm{e}^{(\alpha^\star)^2 \frac{N}{2}} \sum_{j=1}^{M} \int_0^t \left(\int_0^{\frac{2s}{a_j^2}} q(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(1\!\!\mathrm{I}_{\{\frac{2s}{a_j^2} \leq n^{-\kappa}\}} + 1\!\!\mathrm{I}_{\{\frac{2s}{a_j^2} > n^{-\kappa}\}} \right) ds \leq$$

$$\leq \alpha^\star \mathrm{e}^{(\alpha^\star)^2 \frac{N}{2}} \sum_{j=1}^{M} \int_0^t \left((q^\star n^{-\kappa})^{\frac{1}{2}} 1\!\!\mathrm{I}_{\{\frac{2s}{a_j^2} \leq n^{-\kappa}\}} + 1\!\!\mathrm{I}_{\{\frac{2s}{a_j^2} > n^{-\kappa}\}} \right) ds \leq$$

$$\leq \alpha^\star \mathrm{e}^{(\alpha^\star)^2 \frac{N}{2}} \left(N(q^\star)^{\frac{1}{2}} n^{-1-\frac{\kappa}{2}} + \sum_{j=1}^{M} \int_0^t 1\!\!\mathrm{I}_{\{a_j^2 < 2sn^\kappa\}} ds \right).$$

Повернувшись до (2.9) та знехтувавши членом для $k = 0$, для якого оцінка тривіальна, маємо:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left| \mathrm{E}\, \mathcal{E}_{0,\frac{k}{n}}^{N}(\mathcal{U};\alpha)\, \mathrm{E} \left(\xi_{n,k} \mathcal{E}_{\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}}^{|\mathcal{A}|}(\mathcal{A};\alpha(\mathcal{K})) \right) \Big|_{\substack{\mathcal{A}=\mathcal{U}_k,\\ \mathcal{K}=\mathcal{L}_k}} \right| \leq$$

$$\leq \alpha^\star \mathrm{e}^{(\alpha^\star)^2 \frac{N}{2}} \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{E}\, \mathcal{E}_{0,\frac{k}{n}}^{N}(\mathcal{U};\alpha) \times$$

$$\times \left(N(q^\star)^{\frac{1}{2}} n^{-1-\frac{\kappa}{2}} + \sum_{j=1}^{M} \int_0^{n^{-1}} 1\!\!\mathrm{I}_{\{a_j^2 < 2sn^\kappa\}} ds \right) \Bigg|_{\substack{a_j=u_{k,j},\\ j=\overline{1,M_k},\\ M=M_k}} \leq$$

$$\leq \alpha^\star \mathrm{e}^{(\alpha^\star)^2 \frac{N}{2}} \Bigg(N(q^\star)^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{\kappa}{2}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{E}\, \mathcal{E}_{0,\frac{k}{n}}^{N}(\mathcal{U};\alpha) \sum_{j=1}^{N} \int_0^{n^{-1}} 1\!\!\mathrm{I}_{\{\varphi_{0,\frac{k}{n}}(u_j)^2 < 2sn^\kappa\}} ds \Bigg) \leq$$

$$\leq \alpha^\star \mathrm{e}^{(\alpha^\star)^2 \frac{N}{2}} \Bigg(N(q^\star)^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{\kappa}{2}} +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{N}\int_0^{n^{-1}}\left[\mathsf{P}\left\{\varphi_{0,\frac{k}{n}}(u_j)^2<2sn^{\kappa}\right\}\times\right.$$

$$\left.\left.\times\,\mathrm{E}\left(\mathcal{E}^N_{0,\frac{k}{n}}(\mathcal{U};\alpha)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}ds\right)\le$$

$$\le\alpha^{\star}\mathrm{e}^{(\alpha^{\star})^2\frac{N}{2}}\left(N(q^{\star})^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{\kappa}{2}}+\right.$$

$$\left.+\,\mathrm{e}^{(\alpha^{\star})^2\frac{N}{2}}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{N}\int_0^{n^{-1}}\left[\mathsf{P}\{\varphi_{0,\frac{k}{n}}(u_j)^2<2sn^{\kappa}\}\right]^{\frac{1}{2}}ds\right)\le$$

$$\le\alpha^{\star}\mathrm{e}^{(\alpha^{\star})^2\frac{N}{2}}\left(N(q^{\star})^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{\kappa}{2}}+\right.$$

$$\left.+\,\mathrm{e}^{(\alpha^{\star})^2\frac{N}{2}}n^{-1}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{N}\mathsf{P}\left\{\varphi_{0,\frac{k}{n}}(u_j)^2<2n^{\kappa-1}\right\}\right)\le$$

$$\le\alpha^{\star}\mathrm{e}^{(\alpha^{\star})^2\frac{N}{2}}\left(N(q^{\star})^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{\kappa}{2}}+\right.$$

$$+\,\mathrm{e}^{(\alpha^{\star})^2\frac{N}{2}}n^{-1}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{N}\mathsf{P}\left\{\left(\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{2}}u_j+\eta\right)^2<2n^{\kappa}k^{-1}\right\}\times$$

$$\left.\times\left(1\!\!\mathrm{I}_{\{k\le n^{2\kappa}\}}+1\!\!\mathrm{I}_{\{k>n^{2\kappa}\}}\right)\right)\le$$

$$\le\alpha^{\star}\mathrm{e}^{(\alpha^{\star})^2\frac{N}{2}}\left(N(q^{\star})^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{\kappa}{2}}+\mathrm{e}^{(\alpha^{\star})^2\frac{N}{2}}Nn^{-1}(n^{2\kappa}+1)+\right.$$

$$\left.+\,\mathrm{e}^{(\alpha^{\star})^2\frac{N}{2}}\sum_{j=1}^{N}\max_{k=\overline{1,n-1}}\mathsf{P}\left\{\left(\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{2}}u_j+\eta\right)^2<2n^{-\kappa}\right\}\right)\le$$

$$\le\alpha^{\star}N\mathrm{e}^{(\alpha^{\star})^2\frac{N}{2}}\left((q^{\star})^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{\kappa}{2}}+\mathrm{e}^{(\alpha^{\star})^2\frac{N}{2}}n^{-1}(n^{2\kappa}+1)\right.$$

$$\left.+\mathrm{e}^{(\alpha^{\star})^2\frac{N}{2}}\,\mathsf{P}\left\{\eta^2<2n^{-\kappa}\right\}\right),$$

де η – стандартна гаусівська випадкова величина, і при останньому переході ми застосували нерівність Андерсона [100, Теорема 1.8.5]. □

Твердження 2.2.2 можна інтерпретувати неформально так: "інфінітезимальне випадкове поле", котре керує рухом частинок в броунівській сітці, не може бути відновлено зі спостережень за рухом перенесених сіткою частинок. Цей результат здається пов'язаним з теорією шумів, породжених сімействами відображень [15], [16], [101], [102], згідно з якою шум броунівської сітки "чорний". Оскільки, як вже згадувалося вище, сім'я відображень $\{\varphi_{s,t} \mid s \le t\}$ є динамічною системою на $\mathbb{R}$, то можемо сказати, що ця сім'я не породжується жодним "хорошим" інфінітезимальним векторним полем.

2.3 Деякі властивості дограничних процесів

В подальшому встановлюється існування слабкої границі послідовності $(X^{(n)}(u_1), \ldots, X^{(n)}(u_N))$ як елементів $\mathcal{D}([0;1])$ – простору Скорохода càdlàg-функцій на $[0;1]$ із J_1–топологією [103], заданою метрикою

$$d(f,g) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \exists \lambda \in \Lambda\colon \sup_{t\in[0;1]} |f(t) - g(\lambda(t))| \vee \\ \vee \sup_{\substack{t,s\in[0;1] \\ t\neq s}} \left| \ln \frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s} \right| \le \varepsilon\},$$

де Λ – множина строго зростаючих неперервних відображень відрізку $[0;1]$ на себе. В просторах $(\mathcal{D}([0;1]))^N, N \in \mathbb{N}$, розглядаються борелеві σ-алгебри та продакт-топології. Ці простори повні та сепарабельні [103, Теорема 12.2].

Буде встановлено щільність послідовності розподілів процесів

$$\left\{(X^{(n)}(u_1), \ldots, X^{(n)}(u_N))\right\}_{n\in\mathbb{N}},$$

що в силу теореми Прохорова [87, Теорема 16.3] еквівалентно відносній компактності, та охарактеризовано всі можливі слабкі часткові границі при $n \to \infty$. Для перевірки щільності нам необхідна оцінка на стрибки допграничних процесів, подана в Твердженні 2.3.1. Також використовуватимемо представлення допграничних процесів як корельованих між собою вінерівських процесів (Твердження 2.3.2) та як суми процесів стрибків, визначених в (2.4):

$$\Delta_k^{(n)}(u) = X^{(n)}_{t_k^{(n)}}(u) - X^{(n)}_{t_k^{(n)}-}(u).$$

Твердження 2.3.1. *Для всіх $n \in \mathbb{N}, k = \overline{0, n-1}$ та $u \in \mathbb{R}$ м.н.*

$$|\Delta_k^{(n)}(u)| \leq \sup_{t\in[0;1]} |a(X_t^{(n)}(u))| \cdot e^{C_a \lambda^{(n)}}(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}).$$

Доведення. За побудовою $X^{(n)}_{t_k^{(n)}}(u) = A_{t_k^{(n)}-t_{k-1}^{(n)}}(X^{(n)}_{t_k^{(n)}-}(u)) = y_{t_k^{(n)}-t_{k-1}^{(n)}}$, де процес $\{y_t \mid t \in [0; t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}]\}$ задовольняє рівняння

$$y_{t_k^{(n)}-t_{k-1}^{(n)}} = X^{(n)}_{t_k^{(n)}-}(u) + \int_0^{t_k^{(n)}-t_{k-1}^{(n)}} a\left(y_s\right) ds.$$

Застосувавши лему Гронуолла-Беллмана, отримуємо заявлений результат. □

Визначимо

$$A_t^{(n)}(u) = \sum_{k: t_k^{(n)} \leq t} \Delta_k^{(n)}(u),\ t \in [0;1], n \in \mathbb{N},$$
$$m_t^{(n)}(u) = X_t^{(n)}(u) - A_t^{(n)}(u),\ t \in [0;1], n \in \mathbb{N}.$$

Твердження 2.3.2. *Для довільних $u \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ процес $m^{(n)}(u)$ – стандартний вінерівський процес відносно фільтрації $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0;1]}$ (див Означення 2.1.2) зі стартом в u, причому для будь-яких $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$*

$$\langle m^{(n)}(u_1), m^{(n)}(u_2)\rangle_t = \int_0^t 1\!\!\mathrm{I}_{\{X_s^{(n)}(u_1)=X_s^{(n)}(u_2)\}} ds = \left(t - \tau^{(n)}\right)_+,$$

де $\tau^{(n)} = \inf\{1; s \mid X_s^{(n)}(u_1) = X_s^{(n)}(u_2)\}$.

Доведення. Для всіх $u \in \mathbb{R}$ та $n \in \mathbb{N}$ процес $m^{(n)}(u)$ за побудовою має м.н. неперервні траєкторії та є квадратично інтегровним, причому легко перевірити, що в силу властивостей броунівської сітки $m^{(n)}_{t_2}(u) - m^{(n)}_{t_1}(u)$ та $m^{(n)}_{s_2}(u) - m^{(n)}_{s_1}(u)$ незалежні для всіх $t_1, t_2, s_1, s_2 :$ $s_1 < s_2 < t_1 < t_2$. Отже, $m^{(n)}(u)$ – мартингал відносно $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0;1]}$. Обчислимо взаємну характеристику $m^{(n)}(u_1)$ і $m^{(n)}(u_2)$.

Спочатку покажемо вимірність відображення $F_{s,t} \colon \mathcal{C}([s;t]) \to \mathbb{R} :$

$$F_{s,t}(f) = \int_s^t 1\!\!1_{\{f_r=0\}} dr,$$

де λ – міра Лебега (всюди розглядаються борелівські $\sigma-$алгебри). Дійсно, нехай задано послідовність функцій $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (\mathcal{C}[s;t])^\infty$ таких, що $\varphi_n(0) = 1, \operatorname{supp}\varphi_n \subset [-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}], 0 \le \varphi_n \le 1, n \in \mathbb{N}$. Тоді відображення $I_n \colon \mathcal{C}([s;t]) \to \mathcal{C}([s;t]), I_n(f) = \varphi_n(f), n \in \mathbb{N}$, є неперервними, отже, для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ вимірним як композиція вимірних є і відображення $F_n \colon \mathcal{C}([s;t]) \to \mathbb{R}$, задане як

$$F_n(f) = \int_s^t \varphi_n(f(r)) dr.$$

Оскільки для довільної $f \in \mathcal{C}([s;t])$ $F_{s,t}(f) = \lim_{n\to\infty} F_n(f)$, відображення $F_{s,t}$ також є вимірним. Позначимо $F_t = F_{0,t}, t \in [0;1]$.

Покладемо для $0 \le s \le t \le 1$

$$\mathcal{I}_{s,t} = \mathrm{E}\left(m^{(n)}_t(u_1) m^{(n)}_t(u_2) - F_t\big(X^{(n)}(u_1) - X^{(n)}(u_2)\big) / \mathcal{F}_s \right).$$

Припустимо, що $t \in [t^{(n)}_j; t^{(n)}_{j+1})$, та $s < t$. Розглянемо два можливі випадки. Нехай $s \in [t^{(n)}_j; t)$. Тоді

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{s,t} = \mathrm{E}\Big(&(X^{(n)}_t(u_1) - A^{(n)}_t(u_1))(X^{(n)}_t(u_2) - A^{(n)}_t(u_2)) - \\
&- F_t\left(X^{(n)}(u_1) - X^{(n)}(u_2) \right) / \mathcal{F}_s \Big) = \\
= \mathrm{E}\Big(&X^{(n)}_t(u_1) X^{(n)}_t(u_2) - X^{(n)}_t(u_1) A^{(n)}_t(u_2) -
\end{aligned}$$

$$-\, X_t^{(n)}(u_2)A_t^{(n)}(u_1) + A_t^{(n)}(u_1)A_t^{(n)}(u_2) -$$
$$-F_s\left(X^{(n)}(u_1) - X^{(n)}(u_2)\right) - F_{s,t}\left(X^{(n)}(u_1) - X^{(n)}(u_2)\right)/\mathcal{F}_s\Big),$$

де $A_t^{(n)}(u_k) = A_s^{(n)}(u_k), k = 1,2$. За побудовою $A_s^{(n)}(u_k), X_s^{(n)}(u_k), k = 1,2$, і $F_s\big(X^{(n)}(u_1), X^{(n)}(u_2)\big)$ є $\mathcal{F}_s-$вимірними випадковими величинами. Для $r \in [s;t]$

$$X_r^{(n)}(u_k) = \varphi_{s,r}(X_s^{(n)}(u_k)),\ k = 1,2.$$

Отже, застосовуючи [87, Теорема 6.4] для визначеного вище відображення $F_{s,t}$, маємо:

$$\mathrm{E}\left(X_t^{(n)}(u_1)X_t^{(n)}(u_2) - F_{s,t}\left(X^{(n)}(u_1) - X^{(n)}(u_2)\right)/\mathcal{F}_s\right) =$$
$$= \mathrm{E}\Big(\varphi_{s,t}(X_s^{(n)}(u_1))\varphi_{s,t}(X_s^{(n)}(u_2)) -$$
$$- \int_s^t 1\!\!\mathrm{I}_{\{\varphi_{s,r}(X_s^{(n)}(u_1)) = \varphi_{s,r}(X_s^{(n)}(u_2))\}} dr/\mathcal{F}_s\Big) =$$
$$= \mathrm{E}\left(\varphi_{s,t}(v_1))\varphi_{s,t}(v_2) - \int_s^t 1\!\!\mathrm{I}_{\{\varphi_{s,r}(v_1)) = \varphi_{s,r}(v_2))\}} dr/\mathcal{F}_s\right)\Bigg|_{\substack{v_1 = X_s^{(n)}(u_1),\\ v_2 = X_s^{(n)}(u_2)}} =$$
$$= v_1 v_2\Bigg|_{v_1 = X_s^{(n)}(u_1), v_2 = X_s^{(n)}(u_2)} = X_s^{(n)}(u_1)X_s^{(n)}(u_2).$$

Тому, оскільки, для $k = 1,2$,

$$\mathrm{E}\left(X_t^{(n)}(u_k)/\mathcal{F}_s\right) = \mathrm{E}\left(\varphi_{s,t}(X_s^{(n)}(u_k))/\mathcal{F}_s\right) = X_s^{(n)}(u_k),$$

маємо

$$\mathcal{I}_{s,t} = X_s^{(n)}(u_1)X_s^{(n)}(u_2) + \mathrm{E}\Big(-X_t^{(n)}(u_1)A_s^{(n)}(u_2) - X_t^{(n)}(u_2)A_s^{(n)}(u_1) +$$
$$+ A_s^{(n)}(u_1)A_s^{(n)}(u_2) - F_s\big(X^{(n)}(u_1) - X^{(n)}(u_2)\big)/\mathcal{F}_s\Big) =$$
$$= X_s^{(n)}(u_1)X_s^{(n)}(u_2) - A_s^{(n)}(u_2)\,\mathrm{E}\left(X_t^{(n)}(u_1)/\mathcal{F}_s\right)$$

$$
\begin{aligned}
&- A_s^{(n)}(u_1)\,\mathrm{E}\left(X_t^{(n)}(u_2)/\mathcal{F}_s\right) + \\
&+ A_s^{(n)}(u_1)A_s^{(n)}(u_2) - F_s\left(X^{(n)}(u_1) - X^{(n)}(u_2)\right) = \\
= {}& X_s^{(n)}(u_1)X_s^{(n)}(u_2) - A_s^{(n)}(u_2)X_s^{(n)}(u_1) - A_s^{(n)}(u_1)X_s^{(n)}(u_2) - \\
&- F_s\left(X^{(n)}(u_1) - X^{(n)}(u_2)\right) = \\
= {}& m_s^{(n)}(u_1)m_s^{(n)}(u_2) - F_s\left(X^{(n)}(u_1) - X^{(n)}(u_2)\right). \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

Тепер припустимо, що $s < t_1^{(n)}$. Застосовуючи попередні результати, отримуємо:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_{s,t} = {}& \mathrm{E}\Bigg(\mathrm{E}\Big(m_t^{(n)}(u_1)m_t^{(n)}(u_2) - \qquad (2.11) \\
&- F_t\left(X^{(n)}(u_1) - X^{(n)}(u_2)\right)/\mathcal{F}_{t_j^{(n)}}\Big)/\mathcal{F}_s\Bigg) = \\
= {}& \mathrm{E}\left(m_{t_j^{(n)}}^{(n)}(u_1)m_{t_j^{(n)}}^{(n)}(u_2) - F_{t_j^{(n)}}\left(X^{(n)}(u_1) - X^{(n)}(u_2)\right)/\mathcal{F}_s\right). \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

Із визначення процесів $m^{(n)}(u_k), X^{(n)}(u_k), A^{(n)}(u_k)$ випливає, що

$$
\begin{aligned}
m_{t_j^{(n)}}^{(n)}(u_k) &= m_{t_j^{(n)}-}^{(n)}(u_k) = X_{t_j^{(n)}-}^{(n)}(u_k) - A_{t_j^{(n)}-}^{(n)}(u_k) = \\
&= \lim_{r\to t_j^{(n)}-}\left(X_r^{(n)}(u_k) - A_r^{(n)}(u_k)\right).
\end{aligned}
$$

Нехай $r_m \to t_j^{(n)}-, m \to \infty$. Використовуючи Твердження 2.3.1, можна показати, що послідовність

$$
\xi_m = \prod_{k=1,2}\left(X_{r_m}^{(n)}(u_k) - A_{r_m}^{(n)}(u_k)\right),\ m \in \mathbb{N},
$$

рівномірно інтегровна. Тому, продовжуючи (2.11) та використовуючи (2.10) для $\mathcal{I}_{s,r_m}$ маємо

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_{s,t} &= \lim_{m\to\infty}\mathrm{E}\left(\xi_m - F_{r_m}\left(X^{(n)}(u_1) - X^{(n)}(u_2)\right)/\mathcal{F}_s\right) = \\
&= m_s^{(n)}(u_1)m_s^{(n)}(u_2) - F_s\left(X^{(n)}(u_1) - X^{(n)}(u_2)\right).
\end{aligned}
$$

Випадок $s \in [t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}), t \in [t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}), j - i > 1$, розглядається аналогічно.

Оскільки $\langle m^{(n)}(u), m^{(n)}(u)\rangle_t = F_t(0) = t$, то згідно з теоремою Леві [87, Теорема 18.3] $m^{(n)}(u)$ – вінерівський процес.

Справедливість другої рівності в формулюванні Твердження 2.3.2 є наслідком того, що різниця $X^{(n)}(u_2) - X^{(n)}(u_1)$ ніколи не полишає 0 після потрапляння в нього. □

2.4 Відносна компактність послідовності $\left\{X^{(n)}(u)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ та слабка границя як дифузійний процес

В даному підрозділі ми встановимо відносну компактність послідовності

$$\left\{X^{(n)}(u_1), \ldots, X^{(n)}(u_N)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

та знайдемо характеристики її слабких границь.

Твердження 2.4.1. *Для довільного $u \in \mathbb{R}$ послідовність $\{X^{(n)}(u)\}_{n\geq 1}$ відносно компактна в $\mathcal{D}([0;1])$.*

Доведення. Спираючись на оцінку на різницю $m^{(n)}(u) - X^{(n)}(u)$ із Твердження 2.3.1 та результат Твердження 2.3.2, можна скористатися достатньою умовою відносної компактності в $\mathcal{D}([0;1])$ [103, Теореми 13.5, 13.14]. □

З теореми Тихонова [104, Теорема 4.42] випливає

Наслідок 2.4.1. *Для всіх $u_1, \ldots, u_N \in \mathbb{R}$ послідовність $\{(X^{(n)}(u_1), \ldots, X^{(n)}(u_N))\}_{n\geq 1}$ є відносно компактною в $(\mathcal{D}([0;1]))^N$.*

При $u_1 < \ldots < u_N$ позначимо довільну слабку часткову границю послідовності $\{(X^{(n)}(u_1), \ldots, X^{(n)}(u_N))\}_{n\geq 1}$ як $(X(u_1), \ldots, X(u_N))$.

Зауваження 2.4.1. Не втрачаючи загальність та для спрощення позначень до кінця розділу вважатимемо, що

$$\left(X^{(n)}(u_1), \dots, X^{(n)}(u_N)\right) \Rightarrow \left(X(u_1), \dots, X(u_N)\right), n \to \infty.$$

Твердження 2.4.2. *Для довільного $i = \overline{1, N}$ процес*

$$B_t(u_i) = X_t(u_i) - u_k - \int_0^t a(X_s(u_i))ds, \ t \in [0; 1],$$

є стандартним вінерівським.

Доведення. Нехай задано стандартний вінерівський процес $\{B_t \mid t \in [0; 1]\}$, $B_0 = 0$. Визначимо процеси $y^{(n)} \in \mathcal{D}([0; 1]), n \in \mathbb{N}$, наступним чином, повторюючи конструкцію в (2.3, 2.4). Маючи розбиття $\{t_0^{(n)}, \dots, t_{N^{(n)}}^{(n)}\}, n \in \mathbb{N}$, покладемо для $t \in [t_k^{(n)}; t_{k+1}^{(n)}), k \in \overline{0; N^{(n)} - 1}$,

$$y_t^{(n)} = B_t - B_{t_k^{(n)}} + \mathop{\circ}_{j=1}^{k} A_{t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}}(B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}} + \cdot)(u_i), \tag{2.13}$$

$$y_1^{(n)} = \lim_{t \nearrow 1} y_t^{(n)}, \tag{2.14}$$

$$\zeta_t^{(n)} = A_{t - t_k^{(n)}}(\mathop{\circ}_{j=1}^{k} A_{t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}}(B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}} + \cdot)(u_i),$$

$$\zeta_1^{(n)} = \lim_{t \nearrow 1} \zeta_t^{(n)}.$$

Нагадаємо, що

$$X_t^{(n)}(u) = m_t^{(n)}(u) + \sum_{k: t_k^{(n)} \le t} \Delta_k^{(n)}(u), \ t \in [0; 1], n \in N.$$

Легко бачити, що для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Law}(X^{(n)}(u_i), m^{(n)}(u_i)) = \mathrm{Law}(y^{(n)}, B)$$

в $(\mathcal{D}([0; 1]))^2$.

В [26, Твердження 2.5-2.8] показано, що

$$\mathrm{E}\int_0^1 (y_t^{(n)} - y_t)^2 dt \to 0,\ n \to \infty,$$
$$\mathrm{E}\int_0^1 (\zeta_t^{(n)} - y_t)^2 dt \to 0, n \to \infty,$$

де процес y є розв'язком СДР

$$dy_t = a(y_t)dt + dB_t, \quad y_0 = u_i.$$

Отже, залишається показати, що $y^{(n)} \Rightarrow y$ в $\mathcal{D}([0;1])$, оскільки з цього випливатиме те, що $\mathrm{Law}(X(u_i)) = \mathrm{Law}(y)$ в $\mathcal{D}([0;1])$.

За означенням процесів $y^{(n)}$ та $\zeta^{(n)}$ маємо, для $t \in [t_k^{(n)}; t_{k+1}^{(n)})$:

$$y_t^{(n)} = u_i + B_t + \int_0^{t_k^{(n)}} a(\zeta_s^{(n)}) ds,$$

тому

$$\left|y_t^{(n)} - y_t\right| = \left|\int_0^{t_k^{(n)}} (a(\zeta_s^{(n)}) - a(y_s)) ds\right| \leq$$
$$\leq C_a \int_0^{t_k^{(n)}} \left|\zeta_s^{(n)} - y_s\right| ds \leq C_a \int_0^1 \left|\zeta_s^{(n)} - y_s\right| ds.$$

Скориставшись нерівністю Чебишева, отримуємо для довільного $\delta > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[0;1]} \left|y_t - y_t^{(n)}\right| \geq \delta\right\} \leq \frac{1}{\delta^2}\,\mathrm{E}\sup_{t\in[0;1]}\left(y_t - y_t^{(n)}\right)^2 \leq$$
$$\leq \frac{1}{\delta^2}\,\mathrm{E}\, C_a^2 \left(\int_0^1 |\zeta_s^{(n)} - y_s| ds\right)^2 \leq$$
$$\leq \frac{C_a^2}{\delta^2}\,\mathrm{E}\int_0^1 \left(\zeta_s^{(n)} - y_s\right)^2 ds \to 0,\ n \to \infty.$$

Отже, $y_\cdot^{(n)} \xrightarrow{P} y$ в $\mathcal{D}([0;1])$, оскільки

$$d(f,g) \leq \sup_{t\in[0;1]} |f(t) - g(t)|,\ f, g \in \mathcal{D}([0;1]).$$

$\square$

2.5 Взаємна характеристика мартингальних складових координат процесів $(X(u_1), \ldots, X(u_N))$

В даному підрозділі ми обчислимо взаємну характеристику мартингальних складових координат процесу $(X(u_1), \ldots, X(u_N))$. Визначимо спершу для $f = \big(f^1, f^2\big) \in \mathcal{D}([0;1])$ випадковий момент

$$\theta(f) = \theta(f^1, f^2) = \inf\{1; s \mid f^1_s - f^2_s \geq 0\}.$$

Для довільної пари i, j при $u_i < u_j$ визначені в Твердженні 2.4.2 вінерівські процеси $(B_t(u_i), B_t(u_j))$ є мартингалами відносно спільної фільтрації. Покажемо, що

$$\langle B_t(u_i), B_t(u_j)\rangle_t = (t - \theta\left(X(u_i), X(u_j)\right))_+ = \int_0^t 1\!\!1_{\{X_s(u_i) = X_s(u_j)\}} ds.$$

Для цього перевіримо, що процеси $X(u_i)$ та $X(u_j)$ залишаються рівними після $\theta(X(u_i), X(u_j))$. Основною технічною проблемою є те, що множина

$$\big\{(f^1, f^2) \mid f^1(\theta(f^1, f^2) + \cdot) = f^2(\theta(f^1, f^2) + \cdot)\big\}$$

не є замкненою в просторі $(\mathcal{D}([0;1]))^2$, тому стандартні аргументи, що апелюють до теореми Александрова [87, Теорема 4.25], незастосовні. Наступні твердження дають змогу обійти цю складність.

Відмітимо, що в [60, Леми 2.10-2.13] схожа задача для системи процесів зі склеюванням розв'язується шляхом застосування теорії мартингалів. Однак наша ситуація є відмінною від розглянутої в [60] в силу наявності додаткового процесу стрибків і відсутності результату про збіжність зупинених в момент потрапляння в нуль процесів.

Твердження 2.5.1. *Наступна подія має нульову ймовірність:*

$$\exists i \in \{1, \ldots, N-1\}\ \exists t \in (0;1]\ X_t(u_i) = X_t(u_{i+1}) \text{ та } \sup_{s \in [t;1]} \left(X_s(u_{i+1}) - X_s(u_i)\right) > 0.$$

Доведення. Нехай $\mathcal{D}^+([0;1]) = \mathcal{D}([0;1]) \cap \{f \mid \inf_{r\in[0;1]} f_r \geq 0\}$. Покладемо

$$\Gamma_\varepsilon^\delta = \left\{ f \in \mathcal{D}^+([0;1]) \mid \exists t \in [0;1]\colon \ f(t) < \varepsilon, \int_t^1 f(r)dr > \delta \right\},$$
$$\Gamma^\delta = \left\{ f \in \mathcal{D}^+([0;1]) \mid \exists t \in [0;1]\colon f(t) = 0, \int_t^1 f(r)dr > \delta \right\}.$$

Для $i = \overline{1, N-1}$ позначимо через $P^{(n),i}$ розподіл процесу $\Delta X^{(n),i} = X^{(n)}(u_{i+1}) - X^{(n)}(u_i)$; а через $P^{(\infty),i}$ – розподіл процесу $\Delta X^i = X(u_{i+1}) - X(u_i)$. Достатньо показати, що для довільних фіксованих $i = \overline{1, N}$ та $\delta \in \mathbb{R}_+$ $P^{(\infty),i}(\Gamma^\delta) = 0$. Оскільки $\Gamma^\delta \subset \cap_{\varepsilon\geq 0}\Gamma_\varepsilon^\delta$ і $\Gamma_{\varepsilon_1} \subset \Gamma_{\varepsilon_2}$ при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, маємо:

$$P^{(\infty),i}\left(\Gamma^\delta\right) \leq \varliminf_{\varepsilon\to 0+} P^{(\infty),i}\left(\Gamma_\varepsilon^\delta\right).$$

Легко перевірити, що множина $\Gamma_\varepsilon^\delta$ відкрита в $\mathcal{D}([0;1])$. Отже, згідно з теоремою Александрова [87, Теорема 4.25]

$$P^{(\infty),i}\left(\Gamma_\varepsilon^\delta\right) \leq \varliminf_{n\to\infty} P^{(n),i}\left(\Gamma_\varepsilon^\delta\right),$$

тому що $\Delta X^{(n),i} \Rightarrow \Delta X^i,\ n \to \infty$, в $\mathcal{D}([0;1])$. Останнє випливає із того, що

$$\left(X^n(u_{i+1}), X^{(n)}(u_i)\right) \Rightarrow (X(u_{i+1}), X(u_i)),\ n \to \infty,$$

в $(\mathcal{D}([0;1]))^2$, і того, що $X(u_{i+1}), X(u_i)$ мають м.н. неперервні траєкторії. Отже,

$$P^{(\infty),i}\left(\Gamma^\delta\right) \leq \varliminf_{\varepsilon\to 0+} \varliminf_{n\to\infty} P^{(n),i}\left(\Gamma_\varepsilon^\delta\right). \tag{2.15}$$

Нам потрібна оцінка на модуль неперервності процесу $\Delta X^{(n),i}$. Позначивши для довільної функції f

$$\omega(f, a) = \sup_{s,t,\ |s-t|\leq a} |f_s - f_t|,$$

маємо для $s, t \in [t_k^{(n)}; t_{k+1}^{(n)})$

$$\begin{aligned}
\left|\Delta X_s^{(n),i} - \Delta X_t^{(n),i}\right| &\le \\
&\le \left|X_s^{(n)}(u_i) - X_t^{(n)}(u_i)\right| + \left|X_s^{(n)}(u_{i+1}) - X_t^{(n)}(u_{i+1})\right| = \\
&= \left|m_s^{(n)}(u_i) - m_t^{(n)}(u_i)\right| + \left|m_s^{(n)}(u_{i+1}) - m_t^{(n)}(u_{i+1})\right| \le \\
&\le \omega(m^{(n)}(u_i), \lambda^{(n)}) + \omega(m^{(n)}(u_{i+1}), \lambda^{(n)}),
\end{aligned}$$

оскільки $X_s^{(n)}(u_k) - X_t^{(n)}(u_k) = m_s^{(n)}(u_k) - m_t^{(n)}(u_k)$, $k = i, i+1$. Покладемо

$$\omega^{(n)} = \omega(m^{(n)}\left(u_i), \lambda^{(n)}\right) + \omega\left(m^{(n)}(u_{i+1}), \lambda^{(n)}\right).$$

Якщо $\inf_{r \in [t_{k-1}^{(n)}; t_k^{(n)})} \Delta X_r^{(n),i} < \varepsilon$, то

$$\sup_{r \in [t_{k-1}^{(n)}; t_k^{(n)})} \Delta X_r^{(n),i} \le \varepsilon + \omega^{(n)},$$

$$\Delta X_{t_k^{(n)}-}^{(n),i} = \lim_{r \nearrow t_k^{(n)}} \Delta X_r^{(n),i} \le \varepsilon + \omega^{(n)}.$$

Якщо для деякого $t \in [t_{k-1}^{(n)}; t_k^{(n)})$ $\Delta X_t^{(n),i} < \varepsilon$ і $\int_t^1 \Delta X_r^{(n),i} dr > \delta$, то

$$\begin{aligned}
\int_t^{t_k^{(n)}} \Delta X_r^{(n),i} dr \le (t_k^{(n)} - t) \sup_{r \in [t_{k-1}^{(n)}; t_k^{(n)})} \Delta X_r^{(n),i} \le \lambda^{(n)} \left(\varepsilon + \omega^{(n)}\right) \le \\
\le \varepsilon + \omega^{(n)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_k^{(n)}}^1 \Delta X_r^{(n),i} dr > \delta - \int_t^{t_k^{(n)}} \Delta X_r^{(n),i} dr \ge \delta - \lambda^{(n)} \left(\varepsilon + \omega^{(n)}\right) \ge \\
\ge \delta - (\varepsilon + \omega^{(n)}).
\end{aligned}$$

Із цих двох оцінок випливає, що

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}^{(n),i}(\Gamma_\varepsilon^\delta) = \mathsf{P}\left\{\exists t : \Delta X_t^{(n),i} < \varepsilon, \int_t^1 \Delta X_r^{(n),i} dr > \delta\right\} = \\
= \sum_{k=1}^{N^{(n)}} \mathsf{P}\left\{ \inf_{r \in [0; t_{k-1}^{(n)})} \Delta X_r^{(n),i} \ge \varepsilon; \exists t \in [t_{k-1}^{(n)}; t_k^{(n)}) \ \Delta X_t^{(n),i} < \varepsilon, \right.
\end{aligned}$$

$$\int_t^1 \Delta X_r^{(n),i} dr > \delta\Bigg\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N^{(n)}} \mathsf{P}\Bigg\{ \inf_{r\in[0;t_{k-1}^{(n)})} \Delta X_r^{(n),i} \geq \varepsilon; \inf_{r\in[t_{k-1}^{(n)};t_k^{(n)})} \Delta X_r^{(n),i} < \varepsilon;$$

$$\int_t^1 \Delta X_r^{(n),i} dr > \delta; \varepsilon + \omega^{(n)} \geq 2\varepsilon \wedge \frac{\delta}{2}\Bigg\} \leq$$

$$\leq \mathsf{P}\left\{\varepsilon + \omega^{(n)} \geq 2\varepsilon \wedge \frac{\delta}{2}\right\} + \sum_{k=1}^{N^{(n)}} \mathsf{P}\Bigg\{ \inf_{r\in[0;t_{k-1}^{(n)})} \Delta X_r^{(n),i} \geq \varepsilon;$$

$$\inf_{r\in[t_{k-1}^{(n)};t_k^{(n)})} \Delta X_r^{(n),i} < \varepsilon; \int_t^1 \Delta X_r^{(n),i} dr > \delta; \Delta X_{t_k^{(n)}-}^{(n),i} \leq 2\varepsilon;$$

$$\int_{t_k^{(n)}}^1 \Delta X_r^{(n),i} dr \geq \delta/2; \varepsilon + \omega^{(n)} < 2\varepsilon \wedge \frac{\delta}{2}\Bigg\} \leq$$

$$\leq \mathsf{P}\left\{\varepsilon + \omega^{(n)} \geq 2\varepsilon \wedge \frac{\delta}{2}\right\} + \sum_{k=1}^{N^{(n)}} \mathsf{P}\Bigg\{ \inf_{r\in[0;t_{k-1}^{(n)})} \Delta X_r^{(n),i} \geq \varepsilon;$$

$$\inf_{r\in[t_{k-1}^{(n)};t_k^{(n)})} \Delta X_r^{(n),i} < \varepsilon; \Delta X_{t_k^{(n)}-}^{(n),i} \leq 2\varepsilon;$$

$$\int_{t_k^{(n)}}^1 \Delta X_r^{(n),i} dr \geq \delta/2\Bigg\} =$$

$$= \mathsf{P}\left\{\varepsilon + \omega^{(n)} \geq 2\varepsilon \wedge \frac{\delta}{2}\right\} + \sum_{k=1}^{N^{(n)}} \mathsf{P}\Bigg(\inf_{r\in[0;t_{k-1}^{(n)})} \Delta X_r^{(n),i} \geq \varepsilon;$$

$$\Delta X_{t_k^{(n)}-}^{(n),i} \leq 2\varepsilon; \Delta X_{t_k^{(n)}-}^{(n),i} \leq 2\varepsilon;$$

$$\int_{t_k^{(n)}}^1 \Delta X_r^{(n),i} dr \geq \delta/2 \,\Bigg|\, \mathcal{F}_{t_k^{(n)}}\Bigg) =$$

$$= \mathsf{P}\left\{\varepsilon + \omega^{(n)} \geq 2\varepsilon \wedge \frac{\delta}{2}\right\} + \mathrm{E}\sum_{k=1}^{N^{(n)}} \mathbb{1}_{\{\inf_{r\in[0;t_{k-1}^{(n)})} \Delta X_r^{(n),i} \geq \varepsilon\}} \times$$

$$\times\, \mathbb{1}_{\{\inf_{r\in[t_{k-1}^{(n)};t_k^{(n)})} \Delta X_r^{(n),i} < \varepsilon\}} \mathbb{1}_{\{\Delta X_{t_k^{(n)}-}^{(n),i} \leq 2\varepsilon\}} \times$$

$$\times \mathsf{P}\left(\int_{t_k^{(n)}}^1 \Delta X_r^{(n),i} dr \geq \delta/2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_k^{(n)}}\right). \tag{2.16}$$

При $t \in [t_j^{(n)}; t_{j+1}^{(n)})$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\Delta X_t^{(n),i} \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_j^{(n)}}\right) &= \mathrm{E}\left(\varphi_{t_j^{(n)},t}\left(X_{t_j^{(n)}}^{(n)}(u_{i+1})\right) - \varphi_{t_j^{(n)},t}\left(X_{t_j^{(n)}}^{(n)}(u_i)\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_j^{(n)}}\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\varphi_{t_j^{(n)},t}\left(X_{t_j^{(n)}}^{(n)}(u_{i+1})\right) - \varphi_{t_j^{(n)},t}\left(X_{t_j^{(n)}}^{(n)}(u_i)\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_j^{(n)}}\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\varphi_{t_j^{(n)},t}(\xi_1) - \varphi_{t_j^{(n)},t}(\xi_2)\right)\Big|_{\xi_1 = X_{t_j^{(n)}}^{(n)}(u_{i+1}),\, \xi_2 = X_{t_j^{(n)}}^{(n)}(u_i)}.
\end{aligned}$$

За означенням броунівської сітки,

$$\mathrm{E}\left(\varphi_{t_j^{(n)},t}(\xi_1) - \varphi_{t_j^{(n)},t}(\xi_2)\right) = \mathrm{E}\,\sqrt{2} B_{(t - t_j^{(n)}) \wedge \theta}\left(\frac{\xi_2 - \xi_1}{\sqrt{2}}\right),$$

де $\{B_s(x) \mid s \geq 0\}$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}^+$ – вінерівський процес зі стартом в x, а θ – його перший момент потрапляння в 0. Тому

$$E\left(\Delta X_t^{(n),i} \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_j^{(n)}}\right) \leq \Delta X_{t_j^{(n)}}^{(n),i}.$$

Застосувавши лему Гронуолла-Беллмана, отримуємо:

$$\Delta X_{t_j^{(n)}}^{(n),i} \leq \Delta X_{t_j^{(n)}-}^{(n),i} \cdot \mathrm{e}^{C_a (t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)})}.$$

Оскільки

$$\begin{aligned}
\Delta X_{t_j^{(n)}-}^{(n),i} &= \lim_{r \nearrow t_j^{(n)}} \Delta X_r^{(n),i} = \\
&= \lim_{r \nearrow t_j^{(n)}} \left[\varphi_{t_{j-1}^{(n)},r}\left(X_{t_{j-1}^{(n)}}^{(n)}(u_{i+1})\right) - \varphi_{t_{j-1}^{(n)},r}\left(X_{t_{j-1}^{(n)}}^{(n)}(u_i)\right)\right] = \\
&= \varphi_{t_{j-1}^{(n)},t_j^{(n)}}\left(X_{t_{j-1}^{(n)}}^{(n)}(u_{i+1})) - \varphi_{t_{j-1}^{(n)},t_j^{(n)}}(X_{t_{j-1}^{(n)}}^{(n)}(u_i)\right),
\end{aligned}$$

приходимо до

$$\mathrm{E}\left(\Delta X_t^{(n),i}\,\Big|\mathcal{F}_{t_k^{(n)}}\right) \le e^{C_a(1-t_k^{(n)})}\Delta X_{t_k^{(n)}-}^{(n),i} \le e^{C_a}\Delta X_{t_k^{(n)}-}^{(n),i}.$$

Звідси, використавши лему Фату для умовних математичних сподівань (для спрощення позначень ми не вказуємо підпослідовність, для якої маємо збіжність м.н.),

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(\int_{t_k^{(n)}}^1 \Delta X_r^{(n),i}dr \ge \delta/2\,\Big|\mathcal{F}_{t_k^{(n)}}\right) \le \frac{2}{\delta}\,\mathrm{E}\left(\int_{t_k^{(n)}}^1 \Delta X_r^{(n),i}dr\,\Big|\mathcal{F}_{t_k^{(n)}}\right) \le \\
&\le \frac{2}{\delta}\,\mathrm{E}\left(\varliminf_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{m-1}\Delta X^{(n),i}_{(1-t_k^{(n)})\frac{j}{m}+t_k^{(n)}}\frac{1-t_k^{(n)}}{m}\,\Big|\mathcal{F}_{t_k^{(n)}}\right) \le \\
&\le \frac{2}{\delta}\varliminf_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{m-1}\mathrm{E}\left(\Delta X^{(n),i}_{(1-t_k^{(n)})\frac{j}{m}+t_k^{(n)}}\frac{1-t_k^{(n)}}{m}\,\Big|\mathcal{F}_{t_k^{(n)}}\right) \le \\
&\le \frac{2}{\delta}\varliminf_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{m-1}\mathrm{e}^{C_a}\Delta X_{t_k^{(n)}-}^{(n),i}\frac{1-t_k^{(n)}}{m} \le \frac{2}{\delta}\mathrm{e}^{C_a}\Delta X_{t_k^{(n)}-}^{(n),i}.
\end{aligned}$$

Підставивши останню оцінку в (2.16):

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}^{(n),i}(\Gamma_\varepsilon^\delta) \le \mathsf{P}&\left\{\varepsilon+\omega^{(n)} \ge 2\varepsilon\wedge\frac{\delta}{2}\right\} + \mathrm{E}\sum_{k=1}^{N^{(n)}}1\!\!1_{\{\inf_{r\in[0;t_{k-1}^{(n)})}\Delta X_r^{(n),i}\ge\varepsilon\}}\times \\
&\times 1\!\!1_{\{\inf_{r\in[t_{k-1}^{(n)};t_k^{(n)})}\Delta X_r^{(n),i}<\varepsilon\}}1\!\!1_{\{\Delta X_{t_k^{(n)}-}^{(n),i}\le 2\varepsilon\}}\cdot\frac{2}{\delta}\mathrm{e}^{C_a}\Delta X_{t_k^{(n)}-}^{(n),i} \le \\
&\le \mathsf{P}\left\{\varepsilon+\omega^{(n)} \ge 2\varepsilon\wedge\frac{\delta}{2}\right\} + \\
&\quad + \frac{4}{\delta}\mathrm{e}^{C_a}\varepsilon\sum_{k=1}^{N^{(n)}}\mathsf{P}\Big\{\inf_{r\in[0;t_{k-1}^{(n)})}\Delta X_r^{(n),i} \ge \varepsilon; \\
&\qquad\qquad \inf_{r\in[t_{k-1}^{(n)};t_k^{(n)})}\Delta X_r^{(n),i} < \varepsilon\Big\} = \\
&= \mathsf{P}\left\{\varepsilon+\omega^{(n)} \ge 2\varepsilon\wedge\frac{\delta}{2}\right\} + \frac{4}{\delta}\mathrm{e}^{C_a}\cdot\varepsilon.
\end{aligned}$$

Всі процеси $m^{(n)}$ є вінерівським процесами в силу Твердження 2.3.2, тому в силу теореми Леві [95, Теорема 1.14] для фіксованого додатного

$\varepsilon \le \frac{\delta}{4}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\varepsilon + \omega^{(n)} \ge 2\varepsilon \wedge \frac{\delta}{2}\right\} = 0.$$

Повертаючись до (2.15), маємо:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \varliminf_{n\to\infty} P^{(n),i}\left(\Gamma_\varepsilon^\delta\right) = 0.$$

□

Твердження 2.5.2. *Нехай обмежені функції* $a^{(1)}, a^{(2)}$ *задовольняють умову Ліпшиця на* $\mathbb{R}$. *Позначимо через* $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$ *єдині сильні розв'язки наступних СДР*

$$d\xi_t^{(k)} = w_t^{(k)} + a^{(k)}(\xi_t^{(k)})dt,$$
$$\xi_0^{(k)} = u^{(k)}, \quad t \in [0;1], k = 1,2,\ u^{(1)} \le u^{(2)},$$

з незалежними стандартними вінерівськими процесами $w^{(1)}, w^{(2)}$. *Тоді функція* θ *є* $\mathrm{Law}\left(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}\right)$ *−м.н. неперервною на* $\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R}^2)$.

Доведення. Позначимо $\xi = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$. Нехай $g^{(n)} = (g_1^{(n)}, g_2^{(n)}) \to \xi$ в просторі $(\mathcal{D}([0;1]))^2, n \to \infty$. Покладемо $\theta^{(n)} = \theta(g^{(n)}), \theta^\infty = \theta(\xi)$. В силу неперервності м.н. траєкторій $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$ процеси $\{g^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ збігаються до ξ покоординатно в рівномірній метриці, звідки легко вивести, що

$$\xi^{(1)}\left(\varliminf_{n\to\infty} \theta^{(n)}\right) = \xi^{(2)}\left(\varliminf_{n\to\infty} \theta^{(n)}\right),$$

тож $\theta^\infty \le \varliminf_{n\to\infty} \theta^{(n)}$.

Момент θ^∞ є марківським відносно фільтрації, породженої процесом ξ, тому для одновимірного процесу $t \mapsto \eta_t = 2^{-1/2}(\xi^{(2)}_{\theta^\infty+t} - \xi^{(1)}_{\theta^\infty+t})$ маємо

$$\eta_t = b_t + 2^{-1/2}\int_0^t \left(a^{(2)}\left(\xi^{(2)}_{\theta^\infty+s}\right) - a^{(1)}\left(\xi^{(1)}_{\theta^\infty+s}\right)\right)ds,$$

де $b = 2^{-1/2}(w^{(2)}_{\theta^\infty+\cdot} - w^{(1)}_{\theta^\infty+\cdot})$ – стандартний вінерівський процес. Оскільки для процесу η виконується умова Новікова [105, Твердження 5.12], тому в силу теореми Гірсанова[105, Теорема 5.1] для процесу η виконується закон повторного логарифму, тобто

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{\xi^{(2)}_{\theta^\infty+h} - \xi^{(1)}_{\theta^\infty+h}}{\sqrt{2h\log\log h^{-1}}} = 1,$$
$$\liminf_{h\to 0+} \frac{\xi^{(2)}_{\theta^\infty+h} - \xi^{(1)}_{\theta^\infty+h}}{\sqrt{2h\log\log h^{-1}}} = -1.$$

Позначимо $\zeta^{(n)} = g^{(n)}_1 - g^{(n)}_2$. Тоді з ймовірністю 1 для довільного $\varepsilon > 0$ існує випадковий номер N такий, що для всіх $n \geq N$

$$\max_{h\colon 0\leq h-\theta^\infty\leq\varepsilon} \zeta^{(n)}_{\theta^\infty+h} > 0,$$
$$\min_{h\colon 0\leq h-\theta^\infty\leq\varepsilon} \zeta^{(n)}_{\theta^\infty+h} < 0.$$

З цього випливає, що $\theta^\infty \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \theta^{(n)}$. Це завершує доведення. $\square$

Нагадаємо, що

$$\tau^{(n)} = \inf\left\{1; s \mid X^{(n)}_s(u_1) = X^{(n)}_s(u_2)\right\}, n \geq 1,$$

$u_1 < u_2$, та покладемо $\tau = \inf\left\{1; s \mid X_s(u_1) = X_s(u_2)\right\}$.

Твердження 2.5.3. $\tau^{(n)} \Rightarrow \tau, n \to \infty.$

Доведення. В силу теореми Скорохода [87, Теорема 4.30] ми можемо припустити, що з ймовірністю 1

$$\left(X^{(n)}(u_1), X^{(n)}(u_2)\right) \to \left(X(u_1), X(u_2)\right), n \to \infty,$$

в $(\mathcal{D}([0;1]))^2$. При цьому для кожної координати процесу $(X^{(n)}(u_1), X^{(n)}(u_2))$ виконується представлення лівої частини в (2.13, 2.14), де B замінено на відповідний вінерівський процес $m^{(n)}(u_k), k = 1, 2$; для процесів $(X(u_1), X(u_2))$ справедливе представлення із Твердження 2.4.2. Отже, достатньо перевірити, що

$$\theta(X^{(n)}(u_1), X^{(n)}(u_2)) \Rightarrow \theta(X(u_1), X(u_2)), n \to \infty.$$

Оскільки процеси $X(u_1)$ and $X(u_2)$ мають м.н. неперервні траєкторії, процес $(X^{(n)}(u_1)$, $X^{(n)}(u_2)$ збігається до $(X(u_1), X(u_2))$ рівномірно. Отже,

$$\theta(X(u_1), X(u_2)) \leq \varliminf_{n\to\infty} \theta(X^{(n)}(u_1), X^{(n)}(u_2)). \tag{2.17}$$

Нехай $\tilde{B}$ – незалежний від усіх використаних вище процесів стандартний вінерівський процес. Покладемо

$$\begin{aligned}\tilde{m}_t^{(n)}(u_2) = m_t^{(n)}(u_2)1\!\!1_{\{t<\tau^{(n)}\}} + \left(\tilde{B}_t - \tilde{B}_{\tau^{(n)}} + m^{(n)}_{\tau^{(n)}}(u_2)\right)1\!\!1_{\{t\geq\tau^{(n)}\}} = \\ = m^{(n)}_{t\wedge\tau^{(n)}}(u_2) + \tilde{B}_t - \tilde{B}_{t\wedge\tau^{(n)}},\end{aligned}$$

та розглянемо процес $\tilde{X}^{(n)}(u_2)$, сконструйований як в (2.13, 2.14) з використанням $\tilde{m}^{(n)}(u_2)$ замість B. Легко перевірити, що

$$\tilde{X}_t^{(n)}(u_2)1\!\!1_{\{t<\tau^{(n)}\}} = X_t^{(n)}(u_2)1\!\!1_{\{t<\tau^{(n)}\}}. \tag{2.18}$$

Введемо нові незалежні стандартні вінерівські процеси $b(u_1)$ and $b(u_2)$, незалежні також від усіх процесів вище, та знову сконструюємо $y^{(n)}(u_1), y^{(n)}(u_2)$ використовуючи (2.13, 2.14) з $b(u_1)$ чи $b(u_2)$ замість B відповідно. Тоді

$$\left(X^{(n)}(u_1), \tilde{X}^{(n)}(u_2)\right) \stackrel{d}{=} \left(y^{(n)}(u_1), y^{(n)}(u_2)\right). \tag{2.19}$$

В силу Твердження 2.4.2 існують процеси $(y(u_1), y(u_2))$ такі, що

$$\begin{aligned}&dy_t(u_k) = a(y_t(u_k))dt + d\tilde{m}_t(u_k),\\ &y_0(u_k) = u_k, \quad k = 1, 2,\end{aligned}$$

і для кожного k послідовність $\left\{y^{(n)}(u_k)\right\}_{n\geq 1}$ збігається до $y(u_k)$ в $L_2(\Omega\times(0;1))$ та в $\mathcal{D}([0;1])$. Тут $\tilde{m}(u_1)$ і $\tilde{m}(u_2)$ є стандартними вінерівськими процесами. Оскільки $b(u_1)$ та $b(u_2)$ незалежні, можно довести, що $\tilde{m}(u_1)$ і $\tilde{m}(u_2)$ теж незалежні, й такі ж $y(u_1)$ і $y(u_2)$.

Тому, в силу (2.18) та (2.19):

$$\tau^n \overset{d}{=} \theta(X^{(n)}(u_1), X^{(n)}(u_2)) = \theta(X^{(n)}(u_1), \tilde{X}^{(n)}(u_2)) \overset{d}{=}$$
$$\overset{d}{=} \theta(y^{(n)}(u_1), y^{(n)}(u_2)), n\in\mathbb{N}.$$

В силу Твердження 2.5.2 відображення θ є м.н. неперервним відносно розподілу пари $(y(u_1), y(u_2))$, звідки випливає, що

$$\theta(y^{(n)}(u_1), y^{(n)}(u_2)) \to \theta(y(u_1), y(u_2)), n\to\infty,\ \text{м.н.},$$

тож $\tau^n \Rightarrow \theta(y(u_1), y(u_2)), n\to\infty$. Залишається перевірити, що

$$\theta(X(u_1), X(u_2)) \overset{d}{=} \theta(y(u_1), y(u_2)). \tag{2.20}$$

Для цього згадаємо, що

$$\begin{aligned} dX_t(u_k) &= a(X_t(u_k))dt + dm_t(u_k),\\ X_0(u_k) &= u_k, \quad k=1,2, \end{aligned} \tag{2.21}$$

де $m(u_1)$ і $m(u_2)$ – стандартні вінерівські процеси. Для усіх t,

$$\int_0^t a(X_s^{(n)}(u_k))ds \to \int_0^t a(X_s(u_k))ds,$$

тому можна показати, що $m^{(n)}(u_k)\to m(u_k), n\to\infty$, рівномірно при фіксованому k. Тоді з Твердження 2.3.2 випливає, що

$$\begin{aligned} \langle m(u_1), m(u_2)\rangle_t &= \lim_{n\to\infty}\left\langle m^{(n)}(u_1), m^{(n)}(u_2)\right\rangle_t =\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(t-\theta(X^{(n)}(u_1), X^{(n)}(u_2)\right)_+ \leq\\ &\leq \left(t-\varliminf_{n\to\infty}\theta(X^{(n)}(u_1), X^{(n)}(u_2)\right)_+. \end{aligned}$$

Використовуючи (2.17), отримуємо

$$0 \leq \langle m(u_1), m(u_2) \rangle_t \leq (t - \theta(X(u_1), X(u_2))_+ ,$$

тож

$$\left\langle m_{\cdot \wedge \theta(X(u_1), X(u_2)}(u_1), m_{\cdot \wedge \theta(X(u_1), X(u_2)}(u_2) \right\rangle_t = 0, \quad t \in [0; 1].$$

Замінюючи в процесах $m(u_1), m(u_2)$ траєкторії після моменту $\theta(X(u_1), X(u_2))$ ділянками незалежних вінерівських процесів подібно тому, як це робилося при визначенні $\tilde{m}^{(n)}(u_2)$, побудуємо незалежні вінерівські процеси $z(u_1), z(u_2)$ такі, що

$$m_{\cdot \wedge \theta(X(u_1), X(u_2))}(u_k) = z_{\cdot \wedge \theta(X(u_1), X(u_2))}(u_k), \; k = 1, 2, \tag{2.22}$$

й розглянемо СДР

$$\begin{aligned} d\tilde{y}_t(u_k) &= a(\tilde{y}_t(u_k))dt + dz_t(u_k), \\ \tilde{y}_0(u_k) &= u_k, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Очевидно, $(y(u_1), y(u_1)) \stackrel{d}{=} (\tilde{y}(u_1), \tilde{y}(u_1))$. Оскільки θ є моментом виходу відповідної дифузії із області $\{(v_1, v_2) \mid v_1 \neq v_2\}$, то в силу [106, Теорема 1.13.2]

$$\begin{aligned} &\left(\tilde{X}_{\cdot \wedge \theta(X(u_1), X(u_2))}(u_1), \tilde{X}_{\cdot \wedge \theta(X(u_1), X(u_2))}(u_2) \right) \stackrel{d}{=} \\ &\qquad \stackrel{d}{=} \left(\tilde{y}_{\cdot \wedge \theta(y(u_1), y(u_2))}(u_1), \tilde{y}_{\cdot \wedge \theta(y(u_1), y(u_2))}(u_2) \right) . \end{aligned}$$

Однак в силу (2.22) для кожного k процеси $X(u_k)$ і $\tilde{X}(u_k)$ співпадають на $[0; \theta(X(u_1), X(u_2))]$, з чого й випливає (2.20). $\square$

Нагадаємо, що в силу 2.4.2

$$X_t(u_i) = u_i + \int_0^t a(X_s(u_i))ds + B_t(u_i), \; t \in [0; 1],$$

для всіх i.

Твердження 2.5.4. *Для всіх* $i, j\colon u_i < u_j$, *процеси* $B_t(u_i)$ *та* $B_t(u_j))$ *є мартингалами відносно спільної фільтрації, причому*

$$\langle B_t(u_i), B_t(u_j)\rangle_t = (t-\tau)_+ = \int_0^t 1\!\!\mathrm{I}_{\{X_s(u_i)=X_s(u_j)\}} ds,$$

де $\tau = \inf\{1; s \mid X_s(u_1) = X_s(u_2)\}$.

Доведення. Аналогічно доведенню Твердження 2.3.2, можна перевірити, що мартингальна властивість процесів $(m^{(n)}(u_i), m^{(n)}(u_j))$ зберігається для граничних процесів $(B_t(u_i), B_t(u_j))$. При цьому

$$\langle B_t(u_i), B_t(u_j)\rangle_t = \lim_{n\to\infty} \left\langle m^{(n)}(u_i), m^{(n)}(u_j)\right\rangle_t.$$

В силу Твердження 2.5.3 маємо для довільного $t \in [0;1]$,

$$E\big(t-\tau^{(n)}\big)_+ \to E\big(t-\tau\big)_+, n \to \infty,$$

тому із Твердження 2.5.1 випливає:

$$\big(t-\tau\big)_+ = \int_0^t 1\!\!\mathrm{I}_{\{X_s(u_i)=X_s(u_j)\}} ds.$$

□

2.6 Доведення слабкої збіжності

Сформулюємо та доведемо результат про слабку збіжність отриманих шляхом застосування методу дробових кроків апроксимацій.

Теорема 2.6.1. *Нехай* $\{Y_t^a(u) \mid u \in [0;1], t \in [0;1]\}$ *– потік Арратья із дрейфом* a. *Нехай* $N \in \mathbb{N}$, $(u_1, \ldots, u_N) \in \mathbb{R}^N$. *Тоді*

$$(X^{(n)}(u_1), \ldots, X^{(n)}(u_N)) \Rightarrow (Y^a(u_1), \ldots, Y^a(u_N)), n \to \infty,$$

в просторі $(\mathcal{D}([0;1]))^N$.

Доведення. Достатньо перевірити виконання умов Означення 1.1.1 для довільної слабкої границі $(X(u_1), \ldots, X(u_N))$. Для цього скористаємося Твердженнями 2.5.4 та 2.4.2. □

2.7 Відстані Вассерштейна

Оскільки в силу Твердження 2.2.2 в Теоремі 2.6.1 можливо отримати лише слабку збіжність, ми дамо оцінку швидкості збіжності в термінах відповідним чином визначених відстаней Вассерштейна між образами міри Лебега. Отриманню таких оцінок і присвячена друга половина даного розділу. Наш підхід споріднений застосованому в [29] і буде детально описаний нижче. В цьому підрозділі ми нагадуємо означення відстані Вассерштейна та вказуємо оцінювані нижче відстані явно.

Нехай X – сепарабельний метричний простір з метрикою d і відповідною борелівською σ-алгеброю. Множина $\mathcal{M}_p(X)$ всіх ймовірнісних мір μ на X таких, що для деякого (і, як наслідок, для всіх) елемента u

$$\int_X d(u,v)^p \mu\,(dv) < +\infty,$$

є сепарабельним метричним простором [107, Теорема 6.18] відносно відстані

$$W_p(\mu_1,\mu_2) = \left(\inf_{\varkappa \in \Pi(\mu_1,\mu_2)} \int\limits_{X^2} d(u,v)^p \varkappa(du,dv) \right)^{1/p}, \ p \geq 1,$$

де $\Pi(\mu_1,\mu_2)$ – множина всіх ймовірнісних мір на X^2 з маргінальними розподілами μ_1 та μ_2. Тут і надалі завжди на добутках просторів розглядаються продакт-топології.

Нехай потоки $X^{(n)}, n \in \mathbb{N}$, та Y^a – такі ж, як в Теоремі 2.6.1. Визначимо образи міри Лебега λ на відрізку $[0;1]$ під дією породжених цими потоками відображень:

$$\mu_t = \lambda \circ \left(Y_t^a\right)^{-1}, \qquad \mu_t^{(n)} = \lambda \circ \left(X_t^{(n)}\right)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, міри μ_t, $\mu_t^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, є випадковими елементами в $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ для будь-якого $p \geq 1$. Позначимо через L_t і $L_t^{(n)}$ розподіли μ_t та $\mu_t^{(n)}$ в

$\mathcal{M}_1\big(\mathcal{M}_p(\mathbb{R})\big)$, відповідно. При фіксованому $p \geq 1$ відповідна відстань Вассерштейна між ймовірнісними мірами $L', L'' \in \mathcal{M}_1\big(\mathcal{M}_p(\mathbb{R})\big)$ визначається як

$$W_1(L', L'') = \inf \mathrm{E}\ W_p(\mu', \mu''),$$

де інфінум береться по множині всіх пар $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$-значних випадкових елементів μ', μ'' таких, що $\mathrm{Law}(\mu') = L'$, $\mathrm{Law}(\mu'') = L''$. Щоб вказати конкретне p, писатимемо $W_{1,p}$ для відстані в $\mathcal{M}_1\big(\mathcal{M}_p(\mathbb{R})\big)$.

Ми наблизимо міри μ_t і $\mu_t^{(n)}$ точковими мірами

$$\mu_t^{(n),m} = m^{-1} \sum_{j=0}^{m-1} \delta_{X_t^{(n)}(j/m)},$$
$$\mu_t^{m} = m^{-1} \sum_{j=0}^{m-1} \delta_{Y_t^{a}(j/m)}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

2.8 Деякі L_p-оцінки в методі дробових кроків

В подальшому нам знадобляться оцінки на відстань між розв'язками СДР та їхніми апроксимаціями методом дробових кроків. Для зручності викладення ми змінимо позначення й будемо притримуватися нової схеми позначень до кінця даного розділу.

Нагадаємо опис методу дробових кроків в зручній для нас формі. Для обмеженої функції a, котра задовольняє умову Ліпшиця зі сталою C_a, покладемо $M_a = \sup_{\mathbb{R}} |a|$. Для стандартного вінерівського процесу w та початкової умови $u \in \mathbb{R}$ СДР

$$dx(t) = a(x(t))dt + dw(t), \quad x(0) = u, \tag{2.23}$$

має єдиний сильний розв'язок x на $[0; 1]$. Нехай задано послідовність $\big\{0 = t_0^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} = 1\big\}$ розбиттів відрізку $[0; 1]$, причому діаметри розбиттів δ_n збігаються до 0. Покладемо $\Delta_j^{(n)} = \big[t_j^{(n)}; t_{j+1}^{(n)}\big)$, $j = \overline{0, n-1}$. Для $t \in \Delta_j^{(n)}$, $j = \overline{0, n-1}$, визначимо

$$
\begin{aligned}
y^{(n)}(t) &= u + \int_0^{t_{j+1}^{(n)}} a\big(z^{(n)}(s)\big)\, ds + w(t), \\
z^{(n)}(t) &= u + \int_0^{t} a\big(z^{(n)}(s)\big)\, ds + w(t_j^{(n)}).
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

Кодуватимемо таке застосування методу дробових кроків записуючи $x = D(w, u)$, $(y^{(n)}, z^{(n)}) = S^{(n)}(w, u)$.

Наступний результат є прямим узагальненням [25, Наслідок 4.2] й доводиться аналогічно.

Лема 2.8.1. *Для довільного $p \geq 1$ існує стала $C > 0$ така, що*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E} \sup_{s \leq 1} \left| x(s) - y^{(n)}(s) \right|^p &\leq C \delta_n^{p/2}, \\
\sup_{s \leq 1} \mathrm{E} \left| x(s) - z^{(n)}(s) \right|^p &\leq C \delta_n^{p/2}.
\end{aligned}
$$

Наступні дві леми дають потрібні нам оцінки.

Лема 2.8.2. *Нехай $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$, а w_1, w_2 – незалежні стандартні вінерівські процеси. Нехай $x_k = D(w_k, u_k)$, $k = 1, 2$. Тоді для всіх $p \geq 1$ існує $C > 0$ таке, що*

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E} \sup_{s \leq 1} |x_1(s \wedge \theta) - x_2(s \wedge \theta)|^p \leq C \left(|u_1 - u_2| + |u_1 - u_2|^p \right), \ p \geq 2, \\
&\mathrm{E} \sup_{s \leq 1} |x_1(s \wedge \theta) - x_2(s \wedge \theta)|^p \leq C \Big(|u_1 - u_2|^{p/2} + |u_1 - u_2|^p \Big), \ p \in [1; 2),
\end{aligned}
$$

де $\theta = \inf\{1; s \mid x_1(s) = x_2(s)\}$.

Доведення. Позначимо $\Delta u = u_2 - u_1, \Delta x = x_2 - x_1$. Припустимо, що $u_2 > u_1$. Розглянемо СДР

$$
d\eta(t) = C_a \eta(t) dt + dw_2(t) - dw_1(t), \quad \eta(0) = \Delta u,
$$

котре, як легко перевірити застосовуючи формулу Іто, має єдиний сильний розв'язок

$$\eta(t) = \mathrm{e}^{C_a t}\Delta u + \sqrt{2}\mathrm{e}^{C_a t}\int_0^t \mathrm{e}^{-C_a s}\, dw(s), \tag{2.25}$$

де $w = \dfrac{w_2 - w_1}{\sqrt{2}}$. Маємо м.н.

$$\begin{aligned}\eta(t) - \Delta x(t) = C_a \int_0^t (\eta(s) - \Delta x(s))\, ds + \\ + \int_0^t \big(C_a \Delta x(s) - a(x_2(s)) + a(x_1(s))\big)\, ds,\end{aligned}$$

тож для $t \in [0;\theta]$

$$\eta(t) - \Delta x(t) = \mathrm{e}^{C_a t}\int_0^t \mathrm{e}^{-C_a s}\big(C_a \Delta x(s) - a(x_2(s)) + a(x_1(s))\big)\, ds \ge 0. \tag{2.26}$$

Застосувавши теорему Найта [87, Твердження 18.8] до стохастичного інтегралу в (2.25), отримуємо:

$$\eta(t) = \mathrm{e}^{C_a t}\Delta u + \sqrt{2}\mathrm{e}^{C_a t}\beta\Big(\int_0^t \mathrm{e}^{-2C_a s} ds\Big),$$

для деякого вінерівського процесу β. Тому із (2.26) випливає, що

$$\theta \le \varkappa = \inf\{1; s \mid \eta(s) = 0\} = \inf\Big\{1; s \mid \beta\Big(\int_0^t \mathrm{e}^{-2C_a s} ds\Big) = \frac{-\Delta u}{\sqrt{2}}\Big\}.$$

Отримуємо

$$\mathrm{E}\sup_{t\le\theta} |\Delta x(t)|^p \le \mathrm{E}\sup_{t\le\varkappa} |\eta(t)|^p \le 2^{p-1}\mathrm{e}^{pC_a}\Delta u^p + 2^{3p/2-1}\mathrm{e}^{pC_a}\,\mathrm{E}\sup_{t\le\varkappa}|\beta(t)|^p,$$

оскільки $\int_0^t \mathrm{e}^{-2C_a s} ds < t$, $t \ge 0$. З тієї ж причини випадковий момент $\varkappa$ є моментом зупинки відносно породженої $\{\beta(t) \mid t \in [0;1]\}$ фільтрації, тому, в силу нерівності Буркхольдера-Девіса-Ганді для $p \ge 2$ [87, Теорема 17.7],

$$\mathrm{E}\sup_{t\le\varkappa}|\beta(t)|^p \le C_p\,\mathrm{E}\,\varkappa^{p/2},$$

для певних додатних C_p. Розподіл $\varkappa$ задається наступний чином (див. доведення Твердження 1.5.1): для $t\in[0;1]$

$$\mathsf{P}(\varkappa\ge t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{a(t)}\mathrm{e}^{-y^2/2}dy,\quad a(t)=\frac{C_a^{1/2}(u_2-u_1)}{(1-\mathrm{e}^{-2t})^{1/2}},\tag{2.27}$$

тому, для фіксованого $p\ge 2$,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,\varkappa^{p/2}&=\frac{p}{2}\int_0^1 t^{\frac{p}{2}-1}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{a(t)}\mathrm{e}^{-y^2/2}dy\right)dt\le\\ &\le\frac{p}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 a(t)t^{p/2-1}dt\le C(u_2-u_1)\end{aligned}\tag{2.28}$$

для деякого C. У випадку $p\in[1;2)$ скористаємося нерівністю Ляпунова та попередніми оцінками. □

Зауваження 2.8.1. Оцінка для $p\in[1;2)$ в Лемі 2.8.2 є достатньою для наших потреб (див. доведення Теореми 2.10.1), але неточною. Наприклад, можна перевірити, використовуючи (2.27) та проводячи розрахунок аналогічно (2.28), що для визначеної в доведенні $\varkappa$

$$\mathrm{E}\,\varkappa^{1/2}\sim(u_2-u_1)\log\frac{1}{u_2-u_1},\ u_2-u_1\to 0+,$$

що дає точнішу оцінку для $p=1$.

Нам знадобиться наступна модифікація методу дробових кроків в (2.24): на інтервалі $\Delta_j^{(n)}$, $j=\overline{0,n-1}$,

$$\begin{aligned}y^{(n)}(t)&=u_y+\int_0^{t_{j+1}^{(n)}}a\big(z^{(n)}(s)\big)\,ds+w(t),\\ z^{(n)}(t)&=u_z+\int_0^{t}a\big(z^{(n)}(s)\big)\,ds+w(t_j^{(n)}),\quad t\in\Delta_j^{(n)},\end{aligned}$$

де невипадкові числа u_y та u_z необов'язково рівні. Отриману таким чином пару процесів $(y^{(n)},z^{(n)})$ позначатимемо як $S^{(n)}(w,u_y,u_z)$.

Лема 2.8.3. *Припустимо, що послідовність* $\{n\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *обмежена. Нехай* u_{y_1}, u_{y_2}, u_{z_1}, $u_{z_2} \in \mathbb{R}$; w_1, w_2 *- незалежні стандартні вінерівські процеси. Покладемо* $(y_k^{(n)}, z_k^{(n)}) = S^{(n)}(w_k, u_{y_k}, u_{z_k})$, $k = 1, 2$. *Тоді, для будь-яких* $p \geq 2$ *і* $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$ *існує* $C > 0$ *така, що для всіх* n

$$\mathrm{E} \sup_{s\leq 1} \left| y_1^{(n)}(s \wedge \theta^{(n)}) - y_2^{(n)}(s \wedge \theta^{(n)}) \right|^p \leq$$
$$\leq C \left(\delta_n^{1/2-\varepsilon} + \sum_{l=1}^{2} \left(|u_{z_l} - u_{y_l}| + |u_{z_l} - u_{y_l}|^p \right) + |u_{y_2} - u_{y_1}|^p + |u_{y_2} - u_{y_1}| \right),$$

де $\theta^{(n)} = \inf \left\{1; s \mid y_2^{(n)}(s) = y_1^{(n)}(s)\right\}$.

Доведення. Припустимо, що $u_{z_2} - u_{z_1} \geq 0$, $u_{y_2} - u_{y_1} \geq 0$. Позначимо $\Delta u_y = u_{y_2} - u_{y_1}$, $\Delta u_z = u_{z_2} - u_{z_1}$, і нехай процес η задано як в (2.25) з $\Delta u = \Delta u_y$. Тоді для $t \leq \theta^{(n)}$, $t \in \Delta_j^{(n)}$ для деякого j, і при $\Delta y = y_2 - y_1$ маємо

$$\begin{aligned}
\Delta y(t) - \eta(t) = C_a \int_0^t (\Delta y(s) - \eta(s))\, ds + \\
+ \int_t^{t_{j+1}^{(n)}} \Big(a(z_2^{(n)}(s)) - a(z_1^{(n)}(s)) \Big)\, ds + \\
+ \int_0^t \Big(a(z_2^{(n)}(s)) - a(z_1^{(n)}(s)) - C_a \Delta y(s) \Big)\, ds \leq \\
\leq C_a \int_0^t (\Delta y(s) - \eta(s))\, ds + \\
+ C_a \int_0^t \sum_{l=1}^{2} (-1)^l \big(z_l^{(n)}(s) - y_l^{(n)}(s) \big)\, ds + 2\delta_n M_a,
\end{aligned}$$

оскільки $z_2^{(n)} \geq z_1^{(n)}$ на $[0; \theta^{(n)}]$. Для $s \in \Delta_i^{(n)}$, $i \leq j$,

$$\begin{aligned}
\left| z_k^{(n)}(s) - y_k^{(n)}(s) - w_k(t_i^{(n)}) + w_k(s) \right| \leq \\
\leq \int_s^{t_{i+1}^{(n)}} \left| a\left(z_k^{(n)}(s) \right) \right| ds + |u_{z_k} - u_{y_k}| \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \big(t_{i+1}^{(n)} - s\big) M_a + |u_{z_k} - u_{y_k}|,$$

тому, для $t \in \Delta_j^{(n)}$, $t \leq \theta^{(n)}$,

$$\Delta y(t) - \eta(t) \leq C_a \int_0^t (\Delta y(s) - \eta(s))\, ds +$$
$$+ C_a \sum_{k=0}^{j-1} \int_{\Delta_k^{(n)}} \sum_{l=1}^{2} (-1)^l \big(w_l(t_{k+1}^{(n)}) - w_l(s)\big)\, ds +$$
$$+ 2C_a M_a \sum_{k=0}^{j-1} \int_{\Delta_k^{(n)}} (t_{k+1}^{(n)} - s)\, ds + 2\delta_n M_a + \sum_{l=1}^{2} |u_{z_l} - u_{y_l}|.$$

Оскільки

$$2C_a M_a \sum_{k=0}^{j-1} \int_{\Delta_k^{(n)}} \big(t_{k+1}^{(n)} - s\big)\, ds \leq C_a M_a \delta_n,$$

то, застосувавши нерівність Гронуолла-Беллмана, отримуємо:

$$\Delta y(t) \leq \eta(t) + \mathrm{e}^{C_a} M_a (C_a + 2)\delta_n + \mathrm{e}^{C_a} \sum_{l=1}^{2} |u_{z_l} - u_{y_l}| + \mathrm{e}^{C_a} C_a \max_{j=\overline{1,n}} |\xi_j|\,,$$

де

$$\xi_j = \sum_{l=1}^{2} \sum_{k=0}^{j-1} \int_{\Delta_k^{(n)}} (-1)^l \left(w_l(t_{k+1}^{(n)}) - w_l(s) \right) ds, \quad j = \overline{1,n}.$$

Отже,

$$\mathrm{E} \sup_{s \leq \theta^{(n)}} |\Delta y(s)|^p \leq 4^{p-1} \Bigg(\mathrm{E} \sup_{s \leq \theta^{(n)}} |\eta(s)|^p + \mathrm{e}^{pC_a} M_a^p (C_a + 2)^p \delta_n^p +$$
$$+ \mathrm{e}^{pC_a} \left(\sum_{l=1}^{2} |u_{z_l} - u_{y_l}| \right)^p + \mathrm{e}^{pC_a} C_a^p \; \mathrm{E} \max_{j=\overline{1,n}} |\xi_j|^p \Bigg). \tag{2.29}$$

Випадкові величини $\xi_{j+1} - \xi_j$, $j = \overline{1, n-1}$, є незалежними центрованими сумісно гаусівськими; $\mathrm{Var}(\xi_n) \leq 2n\delta_n^2$. В силу нерівності Леві існує постійна C така, що

$$\mathrm{E} \max_{j=\overline{1,n}} |\xi_j|^p \leq 2\, \mathrm{E}\, |\xi_n|^p \leq C n^p \delta_n^{2p} \tag{2.30}$$

і, для всіх $x_n > 0$,

$$\mathsf{P}\left(\max_{k=\overline{1,n}}|\xi_k| \geq x_n\right) \leq 2\,\mathsf{P}\left(|\mathcal{N}(0,1)| \geq \frac{x_n}{(\mathrm{Var}(\xi_n))^{1/2}}\right) \leq C\frac{n^{1/2}\delta_n}{x_n}\mathrm{e}^{-\frac{x_n^2}{4n\delta_n^2}}. \tag{2.31}$$

Разом з тим, повторюючи викладки в доведенні Леми 2.8.2, отримуємо, що

$$\mathrm{E}\sup_{t\leq\theta^{(n)}}\left|\eta(t)\right|^p \leq 2^{p-1}\mathrm{e}^{pC_a}\Delta u_y^p + 2^{3p/2-1}\mathrm{e}^{pC_a}C_p\,\mathrm{E}(\theta^{(n)})^{p/2}. \tag{2.32}$$

Але в момент $\theta^{(n)}$

$$\eta(\theta^{(n)}) \geq -\mathrm{e}^{C_a}M_a(C_a+2)\delta_n - \mathrm{e}^{C_a}\sum_{l=1}^{2}|u_{z_l}-u_{y_l}| - \mathrm{e}^{C_a}C_a\max_{j=\overline{1,n}}|\xi(j)|,$$

тож, при фіксованому $x_n > 0$,

$$\mathrm{E}(\theta^{(n)})^{p/2} \leq \mathsf{P}\left(\max_{k=\overline{1,n}}|\xi_k| \geq x_n\right) + \mathrm{E}\,\tau_n^{p/2},$$

де

$$\tau_n = \inf\left\{1; s \;\Big|\; \eta(s) = -\mathrm{e}^{C_a}M_a(C_a+2)\delta_n - \mathrm{e}^{C_a}\sum_{l=1}^{2}|u_{z_l}-u_{y_l}| - \mathrm{e}^{C_a}C_a x_n\right\}.$$

Покладемо $K = \sup_{k\in\mathbb{N}} k\delta_k$. Аргументи, що привели до (2.28), в поєднанні з (2.31), дають:

$$\mathrm{E}(\theta^{(n)})^{p/2} \leq C\left(\Delta u_y + \delta_n + \sum_{l=1}^{2}|u_{z_l}-u_{y_l}| + x_n + K^{1/2}\frac{\delta_n^{1/2}}{x_n}\mathrm{e}^{-\frac{x_n^2}{4K\delta_n}}\right) \tag{2.33}$$

з новою сталою C. Для завершення доведення виберемо деяке $\varepsilon \in (0;\frac{1}{2})$, покладемо $x_n = \delta_n^{1/2-\varepsilon}$ і підставимо (2.30), (2.32) та (2.33) в (2.29). $\square$

2.9 Каплінг для $(\mu_t^m, \mu^{(n),m})$

Одним з стандартних методів отримання оцінок на відстань Вассерштейна є побудова каплінгу, оскільки будь-який каплінг дає верхню оцінку. В даному підрозділі ми побудуємо каплінги для $(\mu_t^m, \mu^{(n),m})$, $n \in \mathbb{N}$, при кожному фіксованому m (пор. з [29]).

Нехай $w_1, \ldots, w_m$ – незалежні стандартні вінерівські процеси. Позначавши $u_j = \frac{j}{m}$, $j = \overline{0, m}$, покладемо $\widetilde{x}_1 = x_1$, $\widetilde{y}_1^{(n)} = y_1^{(n)}$, $\widetilde{z}_1^{(n)} = z_1^{(n)}$ та

$$x_j = D(w_j, u_j), \quad \left(y_j^{(n)}, z_j^{(n)}\right) = S^{(n)}(w_j, u_j),\ n \in \mathbb{N}.$$

Покладемо

$$\begin{aligned}
\theta_j &= \inf\left\{1; s \mid x_j(s) = \widetilde{x}_{j-1}(s)\right\}, \\
\theta_j^{(n)} &= \inf\left\{1; s \mid y_j^{(n)}(s) = \widetilde{y}_{j-1}^{(n)}(s)\right\}, \\
\widetilde{x}_j(t) &= x_j(t)1\!\!1\left(t < \theta_j\right) + \widetilde{x}_{j-1}(t)1\!\!1\left(t \geq \theta_j\right), \\
\widetilde{y}_j^{(n)}(t) &= y_j^{(n)}(t)1\!\!1\left(t < \theta_j^{(n)}\right) + \widetilde{y}_{j-1}^{(n)}(t)1\!\!1\left(t \geq \theta_j^{(n)}\right), \quad j = \overline{2, m}.
\end{aligned}$$

Для випадкового номера $k_j^{(n)}$ такого, що $\theta_j^{(n)} \in \Delta_j^{(n)}$, покладемо

$$\begin{aligned}
\widetilde{z}_j^{(n)}(t) &= z_j^{(n)}(t)1\!\!1\left(t < t_{k_j^{(n)}+1}^{(n)}\right) + \widetilde{z}_{j-1}^{(n)}(t)1\!\!1\left(t \geq t_{k_j^{(n)}+1}^{(n)}\right), \\
&\qquad t \in [0;1), \quad j = \overline{2, m}.
\end{aligned}$$

Значення при $t = 1$ покладемо рівними відповідним лівим границям в цій точці. Визначимо процеси

$$\begin{aligned}
\widetilde{w}_1 &= w_1, \quad \widetilde{w}_1^{(n)} = w_1, \\
\widetilde{w}_j(t) &= w_j(t)1\!\!1\left(t < \theta_j\right) + \widetilde{w}_{j-1}(t)1\!\!1\left(t \geq \theta_j\right), \\
\widetilde{w}_j^{(n)}(t) &= w_j(t)1\!\!1\left(t < \theta_j^{(n)}\right) + \widetilde{w}_{j-1}^{(n)}(t)1\!\!1\left(t \geq \theta_j^{(n)}\right),\ j = \overline{2, m},\ n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Аналогічно Лемі 1.2.1 доводиться наступний результат.

Лема 2.9.1. *Для всіх* $n, m \in \mathbb{N}$ *процеси* $\widetilde{w}_j, \widetilde{w}_j^{(n)}, j = \overline{2, m}, n \in \mathbb{N}$, *є стандартними вінерівськими процесами.*

Доведення двох наступних лем базуються на ітерованому застосуванні (2.24) і не приводяться.

Лема 2.9.2. *Для всіх* $n, m \in \mathbb{N}$ *та* $j = \overline{1, m}$

$$\widetilde{x}_j = D(\widetilde{w}_j, u_j),$$
$$\left(\widetilde{y}_j^{(n)}, \widetilde{z}_j^{(n)}\right) = S^{(n)}(\widetilde{w}_j^{(n)}, u_j).$$

Лема 2.9.3. *Для всіх* $n, m \in \mathbb{N}$

$$(Y^a(u_1), \ldots, Y^a(u_m)) \stackrel{d}{=} (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m)\,,$$
$$\left(X^{(n)}_{\cdot}(u_1), \ldots, X^{(n)}_{\cdot}(u_m)\right) \stackrel{d}{=} \left(\widetilde{y}_1^{(n)}, \ldots, \widetilde{y}_m^{(n)}\right)$$

в просторі $(\mathcal{D}([0;1]))^m$.

2.10 Відстань Вассерштейна між $\mathrm{Law}(\mu_t)$ and $\mathrm{Law}(\mu_t^{(n)})$

Для визначених вище випадкових елементів в $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

$$\mu_t = \lambda \circ (Y_t^a)^{-1}\,, \qquad \mu_t^m = \left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m \delta_{j/m}\right) \circ (Y_t^a)^{-1}\,,$$
$$\mu_t^{(n)} = \lambda \circ \left(X_t^{(n)}\right)^{-1}, \qquad \mu_t^{(n),m} = \left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m \delta_{j/m}\right) \circ \left(X_t^{(n)}\right)^{-1},$$

ми розглядаємо їх розподіли як елементи простору $\mathcal{M}_1(\mathcal{M}_p(\mathbb{R}))$:

$$L_t = \mathrm{Law}(\mu_t), \qquad L_t^m = \mathrm{Law}\left(\mu_t^m\right),$$
$$L_t^{(n)} = \mathrm{Law}\left(\mu_t^{(n)}\right), \qquad L_t^{(n),m} = \mathrm{Law}\left(\mu_t^{(n),m}\right), \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

В даному підрозділі встановлюються оцінки на $W_{1,p}(L_t, L_t^{(n)})$.

По аналогії з [29, Теорема 2.1] маємо наступний результат.

Лема 2.10.1. *Для будь-якого* $p \geq 2$ *існує стала* $C > 0$ *така, що*

$$W_{1,p}\left(L_t, L_t^m\right) \leq Cm^{-1/p}.$$

Якщо додатково $\{n\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *обмежена, то для кожного* $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$

$$W_{1,p}\left(L_t^{(n)}, L_t^{(n),m}\right) \leq C_\varepsilon \left(m^{-1} + \delta_n^{1/2-\varepsilon}\right)^{1/p}$$

зі своєю сталою C_ε.

Доведення. Оскільки випадкові міри $\big(\mu_t, \mu_t^m\big)$ є каплінгом для пари $\big(L_t, L_t^m\big)$, маємо, за означенням відстані Вассерштейна $W_{1,p}$:

$$W_{1,p}\big(L_t, L_t^m\big) \leq \mathrm{E}\; W_p\big(\mu_t, \mu_t^m\big).$$

Тому, в силу [107, Теорема 2.18, Зауваження 2.19] і Леми 2.8.2, для деякого C виконується наступне:

$$W_{1,p}\big(L_t, L_t^m\big) \leq \left(\sum_{j=0}^{m-1} \int_{j/m}^{(j+1)/m} \mathrm{E}\,|Y_t^a(y) - Y_t^a(j/m)|^p\, dy\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq C\left(\sum_{j=0}^{m-1} \int_{j/m}^{(j+1)/m} (y - j/m)\, dy\right)^{1/p} = Cm^{-1/p}$$

оскільки для процесів x_1, x_2 із Леми 2.8.2 при $u_1 = y$, $u_2 = \frac{j}{m}$ в просторі $(\mathcal{C}([0;1]))^2$

$$\big(Y^a_{\cdot\wedge\theta_1}(y), Y^a_{\cdot\wedge\theta_1}(j/m)\big) \stackrel{d}{=} \left(x_1(\cdot\wedge\theta_2), x_2(\cdot\wedge\theta_2)\right),$$

де θ_1, θ_2 – відповідні моменти зустрічі. Аналогічним чином, використовуючи Лему 2.8.3 при $u_{z_k} = u_{y_k}$, $k = 1, 2$, отримуємо:

$$W_{1,p}\big(L_t^{(n)}, L_t^{(n),m}\big) \leq C\left(\sum_{j=0}^{m-1} \int_{j/m}^{(j+1)/m} (y - j/m)\; dy + \delta_n^{1/2-\varepsilon}\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq C\big(m^{-1} + \delta_n^{1/2-\varepsilon}\big)^{1/p},$$

для деякого, взагалі кажучи, іншого C. $\square$

Теорема 2.10.1. *Припустимо, що послідовність* $\{n\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *обмежена. Тоді для будь-якого* $p \geq 2$ *існує додатна стала* C *така, що для всіх* $n \in \mathbb{N}$

$$W_{1,p}\big(L_t, L_t^{(n)}\big) \leq C\left[\log\log\delta_n^{-1}\right]^{-1/p}.$$

Доведення. Використовуємо позначення Підрозділу 2.9. Повторюючи аргументи із доведення Леми 2.10.1 та використовуючи Лему 2.9.3, отримуємо

$$\begin{aligned}\big(W_{1,p}\big(L_t^m, L_t^{(n),m}\big)\big)^p &\leq \sum_{j=0}^{m-1}\int_{j/m}^{(j+1)/m} \mathrm{E}\left|\widetilde{x}_j(t) - \widetilde{y}_j^{(n)}(t)\right|^p du = \\ &= m^{-1}\sum_{j=0}^{m-1} \mathrm{E}\left|\widetilde{x}_j(t) - \widetilde{y}_j^{(n)}(t)\right|^p.\end{aligned} \tag{2.34}$$

Для кожного $k = \overline{1, m-1}$ маємо

$$\begin{aligned}&\left|\widetilde{x}_{k+1}(t) - \widetilde{y}_{k+1}^{(n)}(t)\right|^p = \left|\widetilde{x}_{k+1}(t) - \widetilde{y}_{k+1}^{(n)}(t)\right|^p \times \Big[1\!\!\mathrm{I}\big(t \geq \theta_k \wedge \theta_k^{(n)}\big) + \\ &\quad + 1\!\!\mathrm{I}\big(\theta_k^{(n)} \leq t < \theta_k\big) + 1\!\!\mathrm{I}\big(\theta_k \leq t < \theta_k^{(n)}\big) + 1\!\!\mathrm{I}\big(t < \theta_k^{(n)} \wedge \theta_k\big)\Big] \leq \\ &\leq \left|\widetilde{x}_k(t) - \widetilde{y}_k^{(n)}(t)\right|^p 1\!\!\mathrm{I}\big(t \geq \theta_k \wedge \theta_k^{(n)}\big) + \\ &\quad + \left|x_{k+1}(t) - y_{k+1}^{(n)}(t)\right|^p 1\!\!\mathrm{I}\big(t < \theta_k^{(n)} \wedge \theta_k\big) + \\ &\quad + 2^{p-1}\left[\left|x_{k+1}(t) - \widetilde{x}_k(t)\right|^p + \left|\widetilde{x}_k(t) - \widetilde{y}_k^{(n)}(t)\right|^p\right] 1\!\!\mathrm{I}\big(\theta_k^{(n)} \leq t < \theta_k\big) + \\ &\quad + 2^{p-1}\left[\left|\widetilde{x}_k(t) - \widetilde{y}_k^{(n)}(t)\right|^p + \left|\widetilde{y}_k^{(n)}(t) - y_{k+1}^{(n)}(t)\right|^p\right] \times \\ &\qquad \times 1\!\!\mathrm{I}\big(\theta_k \leq t < \theta_k^{(n)}\big) \leq \\ &\leq 2^{p-1}\left|\widetilde{x}_k(t) - \widetilde{y}_k^{(n)}(t)\right|^p + 2^{p-1}\left|\widetilde{x}_k(t) - x_{k+1}(t)\right|^p 1\!\!\mathrm{I}\big(\theta_k^{(n)} \leq t < \theta_k\big) + \\ &\quad + 2^{p-1}\left|\widetilde{y}_k^{(n)}(t) - y_{k+1}^{(n)}(t)\right|^p 1\!\!\mathrm{I}\big(\theta_k \leq t < \theta_k^{(n)}\big) + \left|x_{k+1}(t) - y_{k+1}^{(n)}(t)\right|^p.\end{aligned}$$

Отже, в силу Леми 2.8.1

$$\mathrm{E}\sup_{s\in[0;1]}\left|\widetilde{x}_{k+1}(s) - \widetilde{y}_{k+1}^{(n)}(s)\right|^p \leq C_1\delta_n^{p/2} +$$

$$+\, 2^{p-1}\,\mathrm{E}\sup_{s\in[0;1]}\bigl|\widetilde{x}_k(s)-\widetilde{y}_k^{(n)}(s)\bigr|^p+$$
$$+\, 2^{p-1}\,\mathrm{E}\sup_{\theta_k^{(n)}\le s\le\theta_k}\bigl|\widetilde{x}_k(s)-x_{k+1}(s)\bigr|^p 1\!\!\mathrm{I}\bigl(\theta_k^{(n)}\le\theta_k\bigr)+$$
$$+\, 2^{p-1}\,\mathrm{E}\sup_{\theta_k\le s\le\theta_k^{(n)}}\bigl|\widetilde{y}_k^{(n)}(s)-y_{k+1}^{(n)}(s)\bigr|^p 1\!\!\mathrm{I}\bigl(\theta_k\le\theta_k^{(n)}\bigr). \qquad (2.35)$$

Розглянемо два останні доданки в (2.35) окремо. Оскільки $x_{k+1} = D(w_{k+1}, u_{k+1})$ і в силу Леми 2.9.2 $\widetilde{x}_k = D(\widetilde{w}_k, u_k)$, де процеси w_{k+1} і $\widetilde{w}_k$ незалежні, можна, використовуючи строго марківську властивість розв'язків СДР, показати, що

$$\mathrm{E}\sup_{\theta_k^{(n)}\le s\le\theta_k}\bigl|\widetilde{x}_k(s)-x_{k+1}(s)\bigr|^p 1\!\!\mathrm{I}\bigl(\theta_k^{(n)}\le\theta_k\bigr)\le$$
$$\le \mathrm{E}\,1\!\!\mathrm{I}\bigl(\theta_k^{(n)}\le\theta_k\bigr)\,\mathrm{E}\sup_{0\le s\le\tau_1}\bigl|\eta_1(s)-\eta_2(s)\bigr|^p, \quad (2.36)$$

де $\eta_j = D(\beta_j, v_j)$, $j = 1, 2$, для незалежних вінерівських процесів β_1, β_2, котрі також сумісно незалежні з усіма w_i, (а отже, й з $\widetilde{x}_k, x_{k+1}$). Тут

$$v_1 = \widetilde{x}_k\bigl(\theta_k^{(n)}\bigr), \qquad v_2 = x_{k+1}\bigl(\theta_k^{(n)}\bigr),$$
$$\tau_1 = \inf\bigl\{1; s \mid \eta_1(s) = \eta_2(s)\bigr\}.$$

Визначимо функцію $F_p(u) = |u| + |u|^p, u \in \mathbb{R}$. В силу першої нерівності Леми 2.8.1

$$\sup_{j=\overline{1,m}}\mathrm{E}\sup_{s\in[0;1]}F_p\bigl(x_j(s)-y_j^{(n)}(s)\bigr)\le C_2\delta_n^{1/2} \qquad (2.37)$$

для деякого додатного C_2. Розглянемо

$$\mathrm{E}\sup_{0\le s\le\tau_1}\bigl|\eta_1(s)-\eta_2(s)\bigr|^p$$

в (2.36) при фіксованих реалізаціях $\theta_k^{(n)}, \theta_k, \widetilde{x}_1(\theta_1^{(n)}) = v_1$ і $x_2(\theta_1^{(n)}) = v_2$. Кожна така реалізація породжує на відрізку $[\theta_k^{(n)}; 1]$ розбиття із точок

$\{\theta_k^{(n)}; t_j^{(n)} \mid t_j^{(n)} > \theta_k^{(n)}\}$. Добудовуючи дане розбиття на $(1; 1+\theta_k^{(n)}]$ довільним чином, ми можемо застосувати Лему 2.8.2 до процесів η_1, η_2. Повертаючись до (2.36) та використовуючи (2.37), матимемо

$$\begin{aligned}
\mathrm{E} \sup_{\theta_k^{(n)} \le s \le \theta_k} &\big|\widetilde{x}_k(s) - x_{k+1}(s)\big|^p \mathbb{1}\big(\theta_k^{(n)} \le \theta_k\big) \le \\
&\le \frac{C_3}{2^{p-1}C_2} \,\mathrm{E}\, \mathbb{1}\big(\theta_k^{(n)} \le \theta_k\big) F_p\Big(\widetilde{x}_k\big(\theta_k^{(n)}\big) - x_{k+1}\big(\theta_k^{(n)}\big)\Big) \le \\
&\le C_3 \,\mathrm{E} \sup_{s\in[0;1]} F_p\big(\widetilde{x}_k(s) - \widetilde{y}_k^{(n)}(s)\big) + \\
&\qquad + \frac{C_3}{C_2} \,\mathrm{E} \sup_{s\in[0;1]} F_p\big(x_{k+1}(s) - y_{k+1}^{(n)}(s)\big) \le \\
&\le C_3 \,\mathrm{E} \sup_{s\in[0;1]} F_p\big(\widetilde{x}_k(s) - \widetilde{y}_k^{(n)}(s)\big) + C_3 \delta_n^{1/2} \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

для деякої константи $C_3 > 0$.

Аналогічно, для останнього доданку в (2.35):

$$\begin{aligned}
\mathrm{E} \sup_{\theta_k \le s \le \theta_k^{(n)}} &\big|\widetilde{y}_k^{(n)}(s) - y_{k+1}^{(n)}(s)\big|^p \mathbb{1}\big(\theta_k \le \theta_k^{(n)}\big) \le \\
&\le \mathrm{E}\, \mathbb{1}\big(\theta_k \le \theta_k^{(n)}\big) \,\mathrm{E} \sup_{0 \le s \le \tau_2} \big|\xi_1(s) - \xi_2(s)\big|^p,
\end{aligned}$$

для $\xi_j = \big(S^{(n)}(\beta_j, v_{j1}, v_{j2})\big)_1$, $j = 1, 2$, і

$$\begin{aligned}
v_{11} &= \widetilde{y}_1^{(n)}(\theta_1), \qquad v_{12} = \widetilde{z}_1^{(n)}(\theta_1), \\
v_{21} &= y_2^{(n)}(\theta_1), \qquad v_{22} = z_2^{(n)}(\theta_1), \\
\tau_2 &= \inf\big\{1; s \mid \xi_1(s) = \xi_2(s)\big\}.
\end{aligned}$$

Розглянемо вираз в правій частині останньої нерівності при фіксованих реалізаціях $\theta_k, \theta_k^{(n)}$ та v_{ij}. Отримане розбиття $\{\theta_k; t_j^{(n)} \mid t_j^{(n)} > \theta_k\}$ відрізку $[\theta_k; 1]$ добудуємо на $(1; 1+\theta_k]$ довільним, але узгодженим з умовою Леми 2.8.3 чином та застосуємо цю Лему при $u_{y_1} = v_{11}$, $u_{y_2} = v_{21}$, $u_{z_1} = v_{12}$, $u_{z_2} = v_{22}$ і деякому фіксованому $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$:

$$\mathrm{E}\sup_{\theta_k\le s\le\theta_k^{(n)}}\left|\widetilde{y}_k^{(n)}(s)-y_{k+1}^{(n)}(s)\right|^p 1\!\mathrm{I}\Big(\theta_k\le\theta_k^{(n)}\Big)\le C_4\delta_n^{1/2-\varepsilon}+$$
$$+C_4\,\mathrm{E}\,1\!\mathrm{I}\left(\theta_k\le\theta_k^{(n)}\right)\left[F_p\left(y_{k+1}^{(n)}(\theta_k)-\widetilde{y}_k^{(n)}(\theta_k)\right)+\right.$$
$$+F_p\left(y_{k+1}^{(n)}(\theta_k)-z_{k+1}^{(n)}(\theta_k)\right)+$$
$$\left.+F_p\left(\widetilde{y}_k^{(n)}(\theta_k)-\widetilde{z}_k^{(n)}(\theta_k)\right)\right],\tag{2.39}$$

де $C_4>0$ – деяка стала. Розглянемо доданки під знаком маточікування по черзі. Оскільки $x_{k+1}(\theta_k)=\widetilde{x}_k(\theta_k)$, в силу (2.37)

$$\mathrm{E}\,F_p\left(y_{k+1}^{(n)}(\theta_k)-\widetilde{y}_k^{(n)}(\theta_k)\right)\le$$
$$\le 2^{p-1}\left(\mathrm{E}\,F_p\big(y_{k+1}^{(n)}(\theta_k)-x_{k+1}(\theta_k)\big)+\mathrm{E}\,F_p\big(\widetilde{y}_k^{(n)}(\theta_k)-\widetilde{x}_k(\theta_k)\big)\right)\le$$
$$\le 2^{p-1}C_2\delta_n^{1/2}+2^{p-1}\,\mathrm{E}\sup_{s\in[0;1]}F_p\big(\widetilde{x}_k(s)-\widetilde{y}_k^{(n)}(s)\big).\tag{2.40}$$

Далі, для довільного $r\ge 1$

$$\mathrm{E}|y_{k+1}^{(n)}(\theta_k)-z_{k+1}^{(n)}(\theta_k)|^r\le 4^{r-1}\,\mathrm{E}\sup_{s\in[0;1]}|y_{k+1}^{(n)}(s)-x_{k+1}(s)|^r+$$
$$+4^{r-1}\,\mathrm{E}\left|x_{k+1}(\theta_k)-x_{k+1}\left(t_{j_\star}^{(n)}\right)\right|^r+$$
$$+4^{r-1}\sup_{s\in[0;1]}\mathrm{E}\left|x_{k+1}(s)-z_{k+1}^{(n)}(s)\right|^r+$$
$$+4^{r-1}\,\mathrm{E}\left|z_{k+1}^{(n)}\left(t_{j_\star}^{(n)}\right)-z_{k+1}^{(n)}(\theta_k)\right|^r,\tag{2.41}$$

де $j_\star=\min\{j\mid t_j^{(n)}\ge\theta_k\}$. Користуючись обома нерівностями в Лемі 2.8.1 для першого і третього доданків, строго марківською властивістю розв'язків СДР та оцінкою на відхилення від точки старту [92, Розділ 1, §6, Теорема 4] для другого доданку, лемою Гронуолла-Беллмана для четвертого доданку, спираючись на обмеженість множини точок старту $[0;1]$, можна показати, що для деякої $C_5>0$

$$\mathrm{E}\,F_p\left(y_{k+1}^{(n)}(\theta_k)-z_{k+1}^{(n)}(\theta_k)\right)\le C_5\delta^{1/2}.\tag{2.42}$$

Ми не наводимо детальні обчислення.

Визначимо $\zeta = D(\widetilde{w}_k^{(n)}, u_k)$. Тоді аналогічно (2.41), для довільного $r \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}|\widetilde{y}_k^{(n)}(\theta_k) - \widetilde{z}_k^{(n)}(\theta_k)|^r &\leq 4^{r-1}\,\mathrm{E}\sup_{s\in[0;1]}|\widetilde{y}_k^{(n)}(s) - \zeta(s)|^r + \\ &+ 4^{r-1}\,\mathrm{E}\left|\zeta(\theta_k) - \zeta\left(t_{j_\star}^{(n)}\right)\right|^r + \\ &+ 4^{r-1}\sup_{s\in[0;1]}\mathrm{E}\left|\zeta\,(s) - \widetilde{z}_k^{(n)}(s)\right|^r + \\ &+ 4^{r-1}\,\mathrm{E}\left|\widetilde{z}_k^{(n)}\left(t_{j_\star}^{(n)}\right) - \widetilde{z}_k^{(n)}(\theta_k)\right|^r, \end{aligned}$$

де $j_\star = \min\{j \mid t_j^{(n)} \geq \theta_k\}$. Повторюючи наведені вище аргументи, маємо

$$\mathrm{E}\,F_p\left(\widetilde{y}_k^{(n)}(\theta_k) - \widetilde{z}_k^{(n)}(\theta_k)\right) \leq C_5\delta^{1/2}. \tag{2.43}$$

Користуючись (2.38), (2.39), (2.40), (2.42), (2.43) та повертаючись до (2.35), встановлюємо для $k = \overline{1, m-1}$:

$$\mathrm{E}\sup_{s\in[0;1]}\left|\widetilde{x}_{k+1}(s) - \widetilde{y}_{k+1}^{(n)}(s)\right|^p \leq C_6\delta_n^{1/2-\varepsilon} + C_6\,\mathrm{E}\sup_{s\in[0;1]}F_p\left(\widetilde{x}_k(s) - \widetilde{y}_k^{(n)}(s)\right) \tag{2.44}$$

для деякого додатного C_6, причому, прослідкувавши константи в доведеннях, помічаємо, що, взагалі кажучи, $C_6 > 1$. Оскільки $\widetilde{x}_1 = x_1$, $\widetilde{y}_1^{(n)} = y_1^{(n)}$, в силу (2.37)

$$\mathrm{E}\sup_{s\leq 1}F_p\big(\widetilde{x}_1(s) - \widetilde{y}_1^{(n)}(s)\big) \leq C_2\delta_n^{1/2}.$$

Оскільки вищенаведені обчислення справедливі і для $p = 2$, ми, застосувавши нерівність Коші та (2.44), отримаємо

$$\mathrm{E}\sup_{s\leq 1}F_p\big(\widetilde{x}_2(s) - \widetilde{y}_2^{(n)}(s)\big) \leq C_6\delta_n^{1/2-\varepsilon} + C_6C_7\delta_n^{\frac{1/2-\varepsilon}{2}} \leq 2C_6C_7\delta_n^{\frac{1/2-\varepsilon}{2}}.$$

Підставляючи останню оцінку в (2.44) для $k = 2$, знову застосовуючи нерівність Коші та повторюючи дії необхідну кількість разів, врешті отримуємо для правої частини в (2.34) наступну оцінку:

$$m^{-1}\sum_{j=0}^{m-1}\mathrm{E}\left|\widetilde{x}_j(t)-\widetilde{y}_j^{(n)}(t)\right|^p \le m^{-1}\sum_{j=1}^{m} C_8^j\delta_n^{(1/2-\varepsilon)2^{-(j-1)}},$$

для деякого $C_8 \ge 1$. Тому в силу Леми 2.10.1 існує $C > 1$ така, що

$$W_{1,p}\big(L_t, L_t^{(n)}\big) \le C\big(m^{-1}+\delta_n^{1/2-\varepsilon}\big)^{1/p} + C\big(C^m\delta_n^{(1/2-\varepsilon)2^{-m}}\big)^{1/p},$$

де

$$C^m\delta_n^{(1/2-\varepsilon)2^{-m}} = \exp\left\{m\ln C-(1/2-\varepsilon)\tfrac{\ln\delta_n^{-1}}{2^m}\right\},$$

тож, обираючи для достатньо великих n

$$m = m(n) = \tfrac{1}{4}\log_2\left[\tfrac{1/2-\varepsilon}{C}\ln\delta_n^{-1}\right],$$

завершуємо доведення теореми. □

2.11 Висновки

- Доведено слабку збіжність апроксимуючих процесів, побудованих запропонованим методом дробових кроків, до $n-$точкового руху потоку Арратья із дрейфом.
- Отримано оцінки на швидкість збіжності розподілів образів міри Лебега під дією вказаних вище апроксимуючих потоків до розподілу міри Лебега під дією потоку Арратья з дрейфом. Оцінки дано в термінах відповідних відстаней Вассерштейна для всіх $p \ge 2$.
- Встановлено неможливість отримання більш сильної, ніж слабка, збіжності в запропонованій схемі.

Розділ 3

Апроксимація потоків зі склеюванням розв'язками гладких СДР

3.1 Потік Харріса як сім'я перетворень числової осі

Основні результати даного розділу опубліковані в роботі [3^a].

Цей розділ присвячений апроксимації потоків Харріса потоками гомеоморфізмів, котрі отримуються як розв'язки СДР відносно неперервних мартингалів з просторовими параметрами (загальну теорію такого стохастичного інтегрування можна знайти в [35], [108]). Оскільки для нас важлива характеризація потоку як набору випадкових перетворень числової осі, ми наведемо відмінне від використаного в Розділі 1 означення потоку Харріса та змінимо позначення. Вперше таке означення було дане в [10], однак ми використовуватимемо модифікований варіант (для прикладів див. [11], [15]). Нехай $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ – простір Скорохода на $\mathbb{R}$ [103], [109]. Нагадаємо, що простір $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ сепарабельний та має метрику, відносно котрої він повний (див. Підрозділ 2.3). Композицію функції $f(g)$ ми позначатимемо як $f \circ g$, а тотожне перетворення числової осі як Id.

Означення 3.1.1. Потік Харріса X із інфінітезимальною коваріацією φ – це набір $\mathcal{D}(\mathbb{R})-$значних випадкових елементів $\{X(s,t) \mid X(s,t) \equiv X(\cdot,s,t), s \leq t\}$ таких, що

1. для будь-яких $s \leq t \leq r$ $\mathsf{P}\{X(\cdot,s,r) = X(\cdot,t,r) \circ X(\cdot,s,t)\} = 1$; $X(s,s) = \mathrm{Id}$ м.н.;

2. для всіх $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$ випадкові елементи $X(t_1,t_2),\ldots,$ $X(t_{n-1},t_n)$ незалежні;

3. для будь-яких $t_1,t_2 \in \mathbb{R}$ та $h > 0$
$$\mathrm{Law}\left(X(t_1,t_2)\right) = \mathrm{Law}\left(X(t_1+h,t_2+h)\right);$$

4. якщо $h \to 0+$, $X(0,h) \to \mathrm{Id}$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ за ймовірністю;

5. для будь-якого x процес $t \mapsto X(x,0,t) - x$ є стандартним вінерівським процесом відносно фільтрації
$$\sigma\left\{X(u_1,u_2), 0 \leq u_1 \leq u_2 \leq t\right\},\ t \geq 0;$$

6. для всіх $x,y \in \mathbb{R}$
$$\left\langle X(x,0,\cdot), X(y,0,\cdot)\right\rangle(t) = \int_0^t \varphi\left(X(x,0,s) - X(y,0,s)\right)ds;$$

7. для будь-яких t_1,t_2 відображення $X(t_1,t_2)$ монотонно неспадне;

Ми розглядаємо потоки Харріса з інфінітезимальною коваріацією, заданою формулою
$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\beta|x|^\alpha}, x \in \mathbb{R}, \beta \in (0;+\infty), \alpha \in (0;2).$$

Як було зазначено в Розділі 1, такі потоки існують і є потоками зі склеюванням.

Зауваження 3.1.1. Отримані в даному розділі результати узагальнюються на більш широкий клас інфінітезимальних коваріацій.

Ми розглядаємо потік розв'язків СДР

$$X_\varepsilon(x,s,t) = x + \int_s^t F_\varepsilon(X_\varepsilon(x,s,r),dr), \tag{3.1}$$

де для кожного значення параметру $\varepsilon \in (0;1)$ набір випадкових величин $F_\varepsilon = \{F_\varepsilon(x,t) \mid x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+\}$ – гаусівський центрований процес з коваріацією

$$\mathrm{Cov}(F_\varepsilon(t,x), F_\varepsilon(s,y)) = \min\{t,s\}\varphi_\varepsilon(x-y).$$

Такий процес F_ε є неперервним $\mathcal{C}(\mathbb{R})-$значним мартингалом в розумінні [35]. Тут $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0;1)}$ – довільна фіксована послідовність обмежених двічі неперервно диференційовних з обмеженими похідними симетричних невід'ємно визначених функцій таких, що $\varphi_\varepsilon \to \varphi, \varepsilon \to 0+$, рівномірно на компактах, причому $\varphi_\varepsilon(0) = 1$. В розділі показується слабка збіжність відповідних зліченних наборів $n-$точкових рухів потоків X_ε при $\varepsilon \to 0+$ до зліченних наборів $n-$точкових рухів потоку Харріса з інфінітезимальною коваріацією φ, що в термінології [35, Розділ 5] відповідає збіжності стохастичних потоків як дифузій. При цьому також встановлюється збіжність відповідних зліченних наборів $n-$точкових рухів дуальних потоків, строге визначення котрих для випадку потоків зі склеюванням буде наведене нижче. Крім того, ми розглядаємо збіжність $\mathcal{D}(\mathbb{R})-$значних випадкових елементів із визначень для прямих та дуальних потоків. Відповідний результат ми формулюємо в термінах слабкої збіжності образів міри Лебега під дією прямих та зворотніх потоків:

$$\mathrm{Leb} \circ X_\varepsilon(\cdot,s,t)^{-1}, \quad \mathrm{Leb} \circ \left(\widehat{X}_\varepsilon(\cdot,s,t)\right)^{-1},\ 0 \le s \le t,$$

як випадкових елементів в $(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}))^*$ зі слабкою-* топологією, де $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ – простір неперервних функцій з компактними носіями з топологією рівномірної збіжності на компактах.

Запропонований в даному розділі спосіб апроксимації потоку Харріса мотивований результатами роботи [32], в якій було отримано наступний результат. Нехай W – броунівський лист [110]. Припустимо, що послідовність нескінченно диференційовних функцій $\{\kappa_n\}_{n\geq 1}$ слабко в розумінні узагальнених функцій збігається до дельта-функції δ_0 при $n \to \infty$ і що існують нескінченно диференційовні функції $\rho_n \in L_2(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}$, такі, що $\rho_n * \rho_n = \kappa_n, n \in \mathbb{N}$. Тоді існує єдиний розв'язок наступного СДР

$$X_n(x,t) = x + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \rho_n(y - X_n(x,s)) W(ds, dy), \tag{3.2}$$

(загальну теорію інтегрування відносно броунівського листа можна знайти в [11], [110]). Нехай $\{\varphi(u,s,t) \mid u \in \mathbb{R}, 0 \leq s \leq t\}$ – броунівська сітка. При заданих $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ послідовність $\{X_n(x_1,\cdot), \ldots, X_n(x_m,\cdot)\}_{n\geq 1}$ слабко збігається при $n \to \infty$ в просторі $(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+))^m$ до процесу $(\varphi(x_1,0,\cdot), \ldots, \varphi(x_m,0,\cdot))$.

У випадку $\alpha < 1$ інфінітезимальна коваріація φ, як характеристична функція центрованого стійкого закону із нескінченним середнім, не має згорткового кореню ρ: $\rho * \rho = \varphi$ такого, щоб $\rho \in L^2(\mathbb{R})$. Як наслідок, результати про існування розв'язку для (3.2) виявляються незастосовними. Для того, щоб подолати цю складність, й розглядаються потоки розв'язків (3.1) замість (3.2).

Приклад 3.1.1. Для того, щоб навести приклад функцій $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0;1)}$, розглянемо нескінченно диференційовну симетричну функцію h з компактним носієм таку, що $\int_{\mathbb{R}} h(x)dx = 1$. Покладемо

$$\varphi_\varepsilon(\cdot) = \varepsilon^{-1}\varphi * h\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right), \varepsilon \in (0;1). \tag{3.3}$$

Тоді φ_ε збігаються до φ при $\varepsilon \to 0+$ рівномірно на компактах [111, Додаток С.5].

Приклад 3.1.2. В Прикладі 3.1.1 замість функції h можна взяти щільність центрованого гаусівського розподілу. В цьому випадку [10, Лема 10.4] стверджує, що $n-$точкові рухи потоків Харріса із інфінітезимальними коваріаціями з (3.3) слабко збігаються при $\varepsilon \to 0+$ до відповідних $n-$точкових рухів потоку Харріса із інфінітезимальною коваріацією φ.

3.2 Існування потоків гомеоморфізмів X_ε

Ми розпочнемо з визначення набору $\mathcal{C}(\mathbb{R})-$значних броунівських рухів $F_\varepsilon, \varepsilon \in (0;1)$ в розумінні [35, Розділ 3].

Твердження 3.2.1. *Для будь-якого $\varepsilon \in (0;1)$ існує гаусівський випадковий процес $F_\varepsilon \equiv \{F_\varepsilon(x,t) \mid x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+\}$ з коваріацією*

$$\mathrm{Cov}(F_\varepsilon(t,x), F_\varepsilon(s,y)) = \min\{t,s\}\varphi_\varepsilon(x-y).$$

При цьому

1. $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad F_\varepsilon(\cdot,t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$;
2. $\forall t_1 < \ldots < t_n \ F_\varepsilon(\cdot,t_1), F_\varepsilon(\cdot,t_2) - F_\varepsilon(\cdot,t_1), \ldots, F_\varepsilon(\cdot,t_n) - F_\varepsilon(\cdot,t_{n-1})$ *є незалежними $\mathcal{C}(\mathbb{R})-$значними випадковими елементами;*
3. $\forall t \geq 0, s \geq 0 \ F_\varepsilon(\cdot,t+s) - F_\varepsilon(\cdot,s) \overset{d}{=} F_\varepsilon(\cdot,t) \overset{d}{=} \sqrt{t}F_\varepsilon(\cdot,1)$;
4. *процес $t \to F_\varepsilon(\cdot,t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ є м.н. неперервним.*

Доведення. Оскільки відображення $(t,s,x,y) \to \min\{t,s\} \cdot \varphi_\varepsilon(x-y)$ невід'ємно визначене як добуток двох коваріаційних функцій існує центрований гаусівський процес F_ε з такою коваріацією. Перевіримо виконання вказаних в формулюванні властивостей. Маємо для $t_1, t_2 \in$

$[0;T], x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(F_\varepsilon(x_1,t_1)-F_\varepsilon(x_2,t_2)\right)^2 &= t_1+t_2-2\left(t_1\wedge t_2\right)\varphi_\varepsilon(x_1-x_2) = \\ &= (t_1\vee t_2 - t_1\wedge t_2)\varphi_\varepsilon(x_1-x_2) + \\ &\quad + (t_1\vee t_2 + t_1\wedge t_2)(1-\varphi_\varepsilon(x_1-x_2)) \le \\ &\le C_T\left[(x_1-x_2)^2+(t_1-t_2)^2\right]^{1/2} = \\ &= C_T\|z_1-z_2\|, \qquad (3.4)\end{aligned}$$

де $C_T = 2^{1/2}(2T\|\varphi'_\varepsilon\|_{L_\infty(\mathbb{R})}+\|\varphi_\varepsilon\|_{L_\infty(\mathbb{R})}) < \infty$, $z_k=(x_k,t_k)\in\mathbb{R}^2, k=1,2$. В силу гаусовості F_ε

$$\mathrm{E}\left(F_\varepsilon(x_1,t_1)-F_\varepsilon(x_2,t_2)\right)^4 \le 3C_T^2\|z_1-z_2\|^2,$$

тому згідно з критерієм Колмогорова для існування неперервної модифікації процес $\{F_\varepsilon(x,t) \mid x\in\mathbb{R}, t\in[0;T]\}$ має модифікацію з неперервними відносно обох аргументів траєкторіями. Використовуючи стандартний аргумент, отримуємо існування такої модифікації і для $\{F(x,t) \mid x\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R}^+\}$. В подальшому ми завжди обираємо таку модифікацію.

Властивості 2 й 3 завдяки гаусовості процесу F_ε перевіряються стандартним обчисленням відповідних коваріацій.

Для перевірки Властивості 4 помітимо, що в силу (3.4)

$$\begin{aligned}\rho_T(u) \coloneqq \sup_{(x-y)^2+(t-s)^2\le u^2, t,s\le T}\left[\mathrm{E}\left(F_\varepsilon(x,t)-F_\varepsilon(y,s)\right)^2\right]^{1/2} &\le \\ \le C_T u,&\end{aligned}$$

тож, застосовуючи [112, Теорема 1.4.1] з абсолютною сталою K, маємо для деякого випадкового додатнього $\delta \ll 1$:

$$\sup_{|t_1-t_2|\le\delta,\ t,s\le T}\left(F(x,t_1)-F(x,t_2)\right) \le K\int_0^{\rho_T(\delta)}\left(\ln u^{-1}\right)^{1/2}\, d\rho_T(u) \le$$

$$\leq K\left(\left(\ln u^{-1}\right)^{1/2}\ p_T(u)\Big|_0^{\rho_T(\delta)} + \int_{(\ln\delta^{-1})^{1/2}}^{\infty} \rho_T(\mathrm{e}^{-x^2})dx\right) \leq$$

$$\leq KC_T\left(\left(\ln\delta^{-1}\right)^{1/2}\delta + \int_{(\ln\delta^{-1})^{1/2}}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}dx\right),$$

тому легко перевірити, що з ймовірністю 1

$$\sum_{k\geq 1} 2^{-k}\left(1 \wedge \sup_{x\in[-k;k]} |F(x,t_1) - F(x,t_2)|\right) \to 0,\ |t_1 - t_2| \to 0+,$$

що й встановлює Властивість 4. □ □

Процес F_ε є неперервним $\mathcal{C}(\mathbb{R})-$значним мартингалом в сенсі [35].

Твердження 3.2.2. *Нехай* $\varepsilon \in (0;1)$. *Тоді потік* $X_\varepsilon = \{X_\varepsilon(\cdot,s,t) \mid 0 \leq s \leq t\}$ *розв'язків СДР*

$$X_\varepsilon(x,s,t) = x + \int_s^t F_\varepsilon(X_\varepsilon(x,s,r),dr),\ x \in \mathbb{R}, 0 \leq s \leq t,$$

має модифікацію таку, що X_ε *є потоком Харріса з інфінітезимальною коваріацію* φ_ε. *Крім того, для всіх* $0 \leq s \leq t$ *м.н. відображення* $X_\varepsilon(\cdot,s,t)$ *– гомеоморфізм на* $\mathbb{R}$.

Доведення. Скористаємося Теоремою 4.5.1 із [35], котра встановлює умови існування такого потоку на скінченному інтервалі. В даному випадку ці умови редукуються до наступної:

$$\sup_{\substack{x,x',y,y'\in K,\\ x\neq x',y\neq x'}} \frac{|\varphi_\varepsilon(x-y) + \varphi_\varepsilon(x'-y') - \varphi_\varepsilon(x-y') - \varphi_\varepsilon(x'-y)|}{|x-x'||y-y'|} < \infty$$

для всіх компактів K в $\mathbb{R}$. Оскільки φ_ε має обмежені другі похідні, скінченність даного виразу випливає із теореми про середнє значення. □

В подальшому ми завжди маємо на увазі таку модифікацію потоку розв'язків.

3.3 Дуальні потоки

В даному підрозділі ми наводимо означення дуального потоку у випадку наявності склеювання та формулюємо технічний результат про неперервність його траєкторій.

У випадку двічі неперервно диференційовної інфінітезимальної коваріації дуальний потік $\widehat{X}$ визначається як потік розв'язків аналогічного Рівнянню (3.1) СДР в оберненому часі та відносно т.з. оберненого інфінітезимального генератора [35, Розділ 4], тому процес $\widehat{X}(\cdot, s, t)$ м.н. є гомеоморфізмом $\mathbb{R}$ на себе. Додатково, якщо інфінітезимальна коваріація симетрична, то потоки $\widehat{X}$ та X однаково розподілені [35, Теорема 4.2.10]. Однак у випадку наших φ відображення $X(\cdot, s, t)$ є м.н. сходинковою функцією [10], [113]. Все ж можливо визначити дуальний потік [10], [42] на кожному фіксованому відрізку $[t_1; t_2]$ як

$$\widehat{X}(x, t_1, t_2, s) = \inf_{\substack{X(y,r,t_2)\geq x,\ y\in\mathbb{R},\\ r\in[t_1;t_1+t_2-s]}} X(y, r, t_1 + t_2 - s),$$
$$x \in \mathbb{R}, s \in [t_1; t_2], \tag{3.5}$$

тобто дуальний потік конструюється з усіх траєкторій частинок в потоці на відрізку $[t_1; t_2]$. Визначений таким чином потік у випадку потоків гомеоморфізмів співпадає з визначеним вище дуальним потоком в силу впорядкованості траєкторій частинок. Відзначимо, що для довільного потоку Харріса X відображення $\widehat{X}(\cdot, 0, t, s)$ та $X(\cdot, s, t)$ теж однаково розподілені [10, Теорема 10.5] як випадкові елементи в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

В подальшому використовуються наступні позначення. Через $\mathcal{C}(\Delta)$, де Δ – обмежений замкнений інтервал, числова вісь або піввісь, ми позначаємо простір неперервних функцій на Δ з топологією рівномірної збіжності на компактах. В добутках просторів завжди розглядається продакт-топологія. Позначимо $\mathcal{C}([s; t])^\infty = (\mathcal{C}([s; t]))^\infty$, $\mathcal{C}([s; t])^N = (\mathcal{C}([s; t]))^N$, $N \in \mathbb{N}$. Для заданих дійсних чисел a, a_1, b: $a < a_1 < b$

та довільної функції $f \in \mathcal{C}([a_1; b])$ визначимо $\mathcal{P}_{a,b} f \in \mathcal{C}([a; b])$:

$$\mathcal{P}_{a,b} f(s) = 1\!\!1_{s \in [a; a_1]} f(a_1) + f(s) 1\!\!1_{s \in (a_1; b]}, \ s \in [a; b].$$

Відповідно, для будь-яких невід'ємних s, r, t: $s < r < t$ і довільного потоку Харріса X виконується $\mathcal{P}_{s,t} X(x, r, \cdot) \in \mathcal{C}([s; t])$, $\mathcal{P}_{s,t} \widehat{X}(x, r, t, r + t - \cdot) \in \mathcal{C}([s; t])$ й $\mathcal{P}_{s,t} \widehat{X}(x, r, t, r + t - \cdot)(u) = \widehat{X}(x, r, t, t), u \in [s; r]$.

Зафіксуємо $T > 0$ та розглянемо щільну в $\mathbb{R} \times [0; T]$ множину $\{(x_n, t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, котра містить всі можливі пари, що складаються з двійково-раціональних чисел. Покладемо

$$\begin{aligned}
\chi_\varepsilon^N &= \left(\mathcal{P}_{0,T} X_\varepsilon(x_1, t_1, \cdot), \ldots, \mathcal{P}_{0,T} X_\varepsilon(x_N, s_N, \cdot)\right), \\
\widehat{\chi}_\varepsilon^N &= \Big(\mathcal{P}_{0,T} \widehat{X}_\varepsilon(x_1, t_1, T, T + t_1 - \cdot), \ldots, \mathcal{P}_{0,T} \widehat{X}_\varepsilon(x_N, t_N, T, T + t_N - \cdot)\Big), \\
&\quad \varepsilon \in (0; 1), \\
\chi^N &= \left(\mathcal{P}_{0,T} X(x_1, t_1, \cdot), \ldots, \mathcal{P}_{0,T} X(x_N, t_N, \cdot)\right), \\
\widehat{\chi}^N &= \Big(\mathcal{P}_{0,T} \widehat{X}(x_1, t_1, T, T + t_1 - \cdot), \ldots, \mathcal{P}_{0,T} \widehat{X}(x_N, t_N, T, T + t_N - \cdot)\Big).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Позначивши через π^K проекцію в просторі $\mathcal{C}([0; T])^\infty$ на перші K координат, розглянемо $\mathcal{C}([0; T])^\infty-$значні випадкові елементи $\chi_\varepsilon, \widehat{\chi}_\varepsilon, \chi, \widehat{\chi}$, чиї скінченновимірні розподіли задані наступним чином:

$$\begin{aligned}
&\pi^N(\chi_\varepsilon) = \chi_\varepsilon^N, \quad \pi^N(\chi) = \chi^N, \\
&\pi^N(\widehat{\chi}_\varepsilon) = \widehat{\chi}_\varepsilon^N, \quad \pi^N(\widehat{\chi}) = \widehat{\chi}^N, \ \varepsilon \in (0; 1), N \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Існування таких випадкових елементів гарантується теоремою Колмогорова.

В наступному підрозділі для випадкових процесів $\chi_\varepsilon^N, \varepsilon \in (0; 1)$, та χ^N далі розглядаються відповідні узагальнені мартингальні задачі [106], [114], що дає змогу шляхом застосування стандартних прийомів (див. [10, Глави 2-3], [115, Розділ 3]) встановити слабку збіжність

χ_ε^N до χ^N при $\varepsilon \to 0+$ при кожному фіксованому N. Тому нас цікавить можливість отримати слабку збіжність χ_ε та $\widehat{\chi}_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0+$ до χ і $\widehat{\chi}$, відповідно, із слабкої збіжності відповідних визначених вище скінченновимірних рухів.

У випадку прямих потоків ця можливість грунтується на наступному твердженні, котре легко випливає з означення продакт-топології.

Твердження 3.3.1. *Нехай $\varkappa_\varepsilon, \varkappa \in \mathcal{C}([0;T])^\infty$. Якщо для всіх $N \in \mathbb{N}$ $\pi^N \varkappa_\varepsilon \Rightarrow \pi^N \varkappa, \varepsilon \to 0$, в $\mathcal{C}([0;T])^N$, то $\varkappa_\varepsilon \Rightarrow \varkappa, \varepsilon \to 0$, в $\mathcal{C}([0;T])^\infty$.*

Збіжність дуальних потоків буде виведена із збіжності прямих потоків шляхом використання наступної конструкції (пор. [71, §6]). Для фіксованого $\varkappa \in \mathcal{C}([s;t])^\infty$ позначимо $j-$у координату $\varkappa$ через $\varkappa_j$ та введемо відображення $\mathcal{I}\colon \mathcal{C}([0;T])^\infty \mapsto \mathcal{C}([0;T])^\infty$:

$$\begin{cases} (\mathcal{I}(\varkappa))_j(r) & = \inf\left\{\varkappa_i(r) \mid \varkappa_i(T) \geq x_j, t_i \leq r\right\}, r \in [t_j;T], \\ (\mathcal{I}(\varkappa))_j(r) & = (\mathcal{I}(\varkappa))_j(t_j), r \in [0;t_j), \\ j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Для спрощення позначень покладемо $(\mathcal{I}(\varkappa))_i = \mathcal{I}_i(\varkappa), i \in \mathbb{N}$. Оскільки потоки Харріса мають модифікацію, при фіксованих часових параметрах неперервну справа [10, §4], і множина $\{(x_n,t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ щільна в $\mathbb{R} \times [0;T]$, то $\mathcal{I}(\chi_\varepsilon) = \widehat{\chi}_\varepsilon$ м.н., $\varepsilon \in (0;1)$, та $\mathcal{I}(\chi) = \widehat{\chi}$ м.н. в силу (3.5).

Відображення $\mathcal{I}$ є, очевидно, розривним, однак для того, щоб із $\chi_\varepsilon \Rightarrow \chi, \varepsilon \to 0+$, випливало те, що $\mathcal{I}(\chi_\varepsilon) = \widehat{\chi}_\varepsilon \Rightarrow \mathcal{I}(\chi) = \widehat{\chi}, \varepsilon \to 0+$, достатньо, згідно з теоремою про неперервне відображення [87, Теорема 4.27 + Вправа 4.27], вказати дві множини $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}([0;T])^\infty$ такі, щоб виконувалися два наступні твердження.

Твердження 3.3.2. *Якщо $\psi_n \to \psi, n \to \infty$, в $\mathcal{C}([0;T])^\infty$, $\psi_n \in \mathcal{C}_1, n \in \mathbb{N}, \psi \in \mathcal{C}_2$, то $\mathcal{I}(\psi_n) \to \mathcal{I}(\psi), n \to \infty$, в $\mathcal{C}([0;T])^\infty$.*

Твердження 3.3.3. *Для всіх $\varepsilon \in (0;1)$ м.н. $\chi_\varepsilon \in \mathcal{C}_1$. М.н. $\chi \in \mathcal{C}_2$.*

Для задання множини $\mathcal{C}_1$ візьмемо ті елементи $\mathcal{C}([0;T])^\infty$, для котрих виконується умова впорядкованості траєкторій в потоці, а значення в моменти $t_i, i \in \mathbb{N}$, фіксовані. Тобто, $\psi \in \mathcal{C}_1$ тоді і тільки тоді, коли $\forall j_1, j_2 \in \mathbb{N}$

$$\big(\exists s\colon \psi_{j_1}(s) \geq \psi_{j_2}(s)\big) \Rightarrow \big(\psi_{j_1}(t) \geq \psi_{j_2}(t), t \geq s\big),$$

і $\psi_k(t_k) = x_k, k \in \mathbb{N}$. На елементи множини $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$ накладемо дві додаткові умови: $\psi \in \mathcal{C}_2$ тоді і тільки тоді, коли $\psi \in \mathcal{C}_1$ і

1. $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists \delta_k > 0$

$$\begin{cases} \forall i\colon \Big((x_i \geq \mathcal{I}_k(\psi)(t_i)) \Rightarrow (\psi_i\,(T) - x_k \geq \delta_k) \Big), \\ \forall i\colon \Big((x_i < \mathcal{I}_k(\psi)(t_i)) \Rightarrow (x_k - \psi_i\,(T) \geq \delta_k) \Big); \end{cases} \tag{3.7}$$

2. $\forall \delta > 0\ \forall M > 0\ \exists L \in \mathbb{N}$

$$\sup_{l=\overline{0,\lceil T\rceil 2^L}}\ \sup_{j\colon |x_j| \leq M, t_j = l2^{-L}}\ \sup_{\Delta t \in [0;2^{-L}]} \big|\psi_j(t_j + \Delta t) - x_j\big| \leq \delta. \tag{3.8}$$

Перша з цих умов означає, що для будь-якого $s < T$ м.н. множина $\{X(u,s,T) \mid u \in [0;1]\}$ є зліченною множиною без точок згущення. Друга ж забезпечує, що віддалення траєкторій частинок від точок старту (x_i, t_i) є рівномірно малим на достатньо малому часовому проміжку. Для зручності доведення Тверджень 3.7 першу умову переформульовано відразу в термінах дуальних потоків, тобто через властивості відображення $\mathcal{I}$.

Доведення Твердження 3.3.2. Доведемо від супротивного. Припустимо, що існують послідовність $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0;T]^\infty$ та числа $s \in [0;T], \delta \in \mathbb{R}^+$ і $k \in \mathbb{N}$ такі, що $s_n \to s, n \to \infty$, і

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} |\mathcal{I}_k(\psi_n)(s_n) - \mathcal{I}_k(\psi)(s_n)| \geq \delta.$$

Оскільки усі $\mathcal{I}_k(\psi)$ є неперервними функціями, то для кожного k

$$\liminf_{n\to\infty} |\mathcal{I}_k(\psi_n)(s_n) - \mathcal{I}_k(\psi)(s)| \geq \frac{\delta}{2},$$

тому існує послідовність $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}, t_{j_n} \leq s_n, n \in \mathbb{N}$, така, що для кожного n виконується одна із двох наступних умов:

$$\psi_{n_{j_n}}(s_n) - \mathcal{I}_k(\psi)(s) \geq \frac{\delta}{4} \quad \big(\psi_{n_{j_n}}(T) < x_k \text{ нескінченно часто}\big)\,, \tag{3.9}$$

$$\mathcal{I}_k(\psi)(s) - \psi_{n_{j_n}}(s_n) \geq \frac{\delta}{4} \quad \big(\psi_{n_{j_n}}(T) \geq x_k \text{ нескінченно часто}\big)\,. \tag{3.10}$$

При потребі обираючи деяку підпослідовність, припустимо, що виконується (3.9) для всіх n. Випадок з (3.10) розглядається аналогічно.

В силу (3.8) існують $\varepsilon > 0$ й $j \in \mathbb{N}$ такі, що

$$\begin{cases} t_j \leq s - \varepsilon, \\ \sup\limits_{t\in[s-\varepsilon;s+\varepsilon]} |\psi_j(t) - \mathcal{I}_k(\psi)(s)| \leq \frac{\delta}{8}, \\ \psi_j(s) - \mathcal{I}_k(\psi)(s) > 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

В силу (3.11) і (3.7) отримуємо:

$$\psi_j(T) \geq x_k + \delta_k. \tag{3.12}$$

Поєднуючи (3.11) з (3.9), маємо:

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \big(\psi_{n_{j_n}}(s_n) - \psi_j(s_n)\big) \geq \frac{\delta}{8}.$$

Разом з тим, $\psi_{n_j} \to \psi_j, n \to \infty$, в $\mathcal{C}([0;T])$, тому існує натуральне число n_0 таке, що

$$\forall n \geq n_0 \ \big(\psi_{n_{j_n}}(s_n) - \psi_{n_j}(s_n)\big) \geq \frac{\delta}{16}. \tag{3.13}$$

Із (3.13) та (3.9) випливає, що

$$\psi_j(T) = \lim_{n\to\infty} \psi_{n_j}(T) \leq \liminf_{n\to\infty} \psi_{n_{j_n}}(T) < x_k.$$

Це суперечить (3.12), тому $\mathcal{I}(\psi_n) \to \mathcal{I}(\psi), n \to \infty$, в $\mathcal{C}([0;T])^\infty$. $\square$

Доведення Твердження 3.3.3. Перше включення очевидне. Для того, щоб перевірити, що $\chi \in \mathcal{C}_2$, достатньо перевірити лише властивості (3.7) і (3.8). Ми стверджуємо, що для довільних додатних δ та M

$$\mathsf{P}\left\{ \bigcup_{l=\overline{0,\lceil T\rceil 2^L}} \left\{ \sup_{u\in[-M;M]} \sup_{t\in[l2^{-L};(l+1)2^{-L}]} \left|X(u,l2^{-L},t)-u\right| \geq \delta \right\} \right. \\ \left. \text{для нескінченно багатьох } L \right\} = 0. \tag{3.14}$$

Справді, якщо

$$U_{lL} = \left\{ \sup_{u\in[-M;M]} \sup_{t\in[l2^{-L};(l+1)2^{-L}]} \left|X(u,l2^{-L},t)-u\right| \geq \delta \right\},$$

то для (3.14) достатньо, в силу леми Бореля-Кантеллі, щоб

$$\sum_{L\geq 1} \sum_{l=\overline{0,\lceil T\rceil 2^L}} \mathsf{P}\left(U_{lL}\right) < \infty.$$

Повторюючи викладки в доведенні Теореми 4.7 в [10] і використовуючи оцінку (4.8) в [10], отримуємо:

$$\sum_{L\geq 1} \sum_{l=\overline{0,\lceil T\rceil 2^L}} \mathsf{P}\left(U_{lL}\right) \leq \left(\frac{16M}{\delta}+2\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{L\geq 1} \left(\lceil T\rceil 2^L + 1\right) \int\limits_{\delta 2^{\frac{L}{2}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$
$$\leq \left(\frac{16M}{\delta}+2\right)\frac{2}{\delta}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lceil T\rceil \sum_{L\geq 1} 2^{\frac{L}{2}} e^{-\delta 2^L} < +\infty.$$

Легко бачити, що із (3.14) випливає властивість (3.8). Перейдемо до перевірки (3.7). Згідно з [10, Розділ 7] відображення $X(\cdot,s,t)$ є функцією стрибків, тому в силу [10, Розділ 4] маємо для будь-якого $s \in [0;T)$:

$$\mathsf{P}\Big\{\{X(x,s,T) \mid x\in\mathbb{R}\} \cap \{x_1,\ldots,x_N\} \neq \emptyset\Big\} =$$
$$= \mathsf{P}\left\{ \{X(x,s,T) \mid x=u, u\in\mathbb{Q}\} \cap \{x_1,\ldots,x_N\} \neq \emptyset\right\} \leq$$
$$\leq \sum_{u\in\mathbb{Q}} \mathsf{P}\left\{X\left(u,s,T\right) \in \{x_1,\ldots,x_N\}\right\} = 0,$$

звідки випливає (3.7). Отже, $\chi \in \mathcal{C}_2$ м.н.. $\square$

3.4 Збіжність прямих та дуальних потоків як дифузій

В цьому підрозділі доводиться наступний результат.

Теорема 3.4.1. *Нехай* $\{X_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0;1)}$ *– потоки Харріса, розглянуті в Твердженні 3.2.2, а* X *– потік Харріса з інфінітезимальною коваріацією* φ*. Зафіксуємо* $T>0$ *і множину* $\{(x_n,t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}\times[0;T])^\infty$. *Тоді*

$$\Big(\mathcal{P}_{0,T}X_\varepsilon(x_1,t_1,\cdot),\mathcal{P}_{0,T}\widehat{X}_\varepsilon(x_1,t_1,T,T+t_1-\cdot),\ldots,$$
$$\mathcal{P}_{0,T}X_\varepsilon(x_N,t_N,\cdot),\mathcal{P}_{0,T}\widehat{X}_\varepsilon(x_N,t_N,T,T+t_N-\cdot),\ldots\Big)$$
$$\Rightarrow\Big(\mathcal{P}_{0,T}X(x_1,t_1,\cdot),\mathcal{P}_{0,T}\widehat{X}(x_1,t_1,T,T+t_1-\cdot),\ldots,$$
$$\mathcal{P}_{0,T}X(x_N,t_N,\cdot),\mathcal{P}_{0,T}\widehat{X}(x_N,t_N,T,T+t_N-\cdot),\ldots\Big),$$

при $\varepsilon\to 0+$ *в* $\mathcal{C}([0;T])^\infty$.

Відмітимо, що в [10, Лема 10.4] встановлено збіжність

$$(X_\varepsilon(x_1,s,\cdot),\ldots,X_\varepsilon(x_N,s,\cdot))$$

для одного конкретного вибору $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0;1)}$ (див Приклад 3.1.2). Оскільки наш випадок має загальний характер, а також задля повноти викладення, ми наводимо повне доведення, узагальнюючи результат [10, Лема 10.4].

Доведення Теореми 3.4.1. Будемо вважати, що множина $\{(x_n,t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ містить всі можливі пари двійково-раціональних чисел в $\mathbb{R}\times[0;T]$, при потребі додаючи їх в вихідну множину. Використовуватимемо введені в (3.6) позначення.

Спочатку встановимо збіжність $\{\chi^N_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0;1)}$ для довільного N. Наступне означення введене та досліджене в [10, §§2-3].

Зафіксуємо натуральне K. Припустимо, що функції $a_{ij}, b_i, i, j = \overline{1, K}$, неперервні та обмежені, матриця $\|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,K}}$ завжди невід'ємно визначена. Задамо оператор $\mathfrak{A}$ на множині нескінченно диференційовних функцій з обмеженими похідними:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=\overline{1,K}} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=\overline{1,K}} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Позначимо через C множину функцій, координати котрих залишаються рівними після того, як зустрінуться. Для довільних $y \in \mathbb{R}^K$ і $s \in \mathbb{R}^+$ ймовірнісна міра $P^K_{y,s}$ на $\mathcal{C}([s; +\infty))^K$ називається $C-$розв'язком мартингальної задачі для оператора $\mathfrak{A}$, якщо для довільної нескінченно диференційовної f з компактним носієм процес

$$[s, +\infty) \ni r \mapsto f(\omega(r)) - \int_s^r \mathfrak{A} f(\omega(q)) dq$$

є мартингалом відносно $P^K_{y,s}$ (через ω позначено канонічну реалізацію дифузійного процесу [106, §1.14]), $P^K_{y,s}\{\omega(s) = y\} = 1$, $P^K_{y,s}(C) = 1$ і $\{\omega(r + \cdot) \mid \omega \in C\} \subset C$.

Розв'язки $P^K_{y,s}, y \in \mathbb{R}^K, s \in \mathbb{R}+$, є феллеровськими та сильно марківськими процесами [10, §§2-3]. Вони існують для всіх

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{K} g(x_i - x_j) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

$g = \varphi_\varepsilon$ чи $g = \varphi$, та єдині (idem). Оскільки коефіцієнти оператора $\mathfrak{A}$ не залежать від часу, то всі міри $P^K_{y,s}, s \geq 0$, – насправді зсуви $P^K_{y,0}$. Неформально можна сказати, що $\{P^K_{y,0}\}$ задає процес, котрий розв'язує мартингальну задачу для $\mathfrak{A}$ до моменту потрапляння на границю множини $\{z \in \mathbb{R}^K \mid z_1, \ldots, z_K \text{ всі різні}\}$, після чого залишається на границі, а ті його координати, котрі нерівні між собою, є розв'язком мартингальної задачі для оператора такої ж форми, але в просторі меншої розмірності до тих пір, доки не станеться нове зіткнення координат і т.д.. В нашому випадку кожна координата є вінерівським процесом.

Зафіксуємо $s \geq 0$, $y_1 \leq \ldots \leq y_K$. Для будь-якого ε розподіл

$$\eta_\varepsilon^K(y_1, \ldots, y_K) = (X_\varepsilon(y_1, s, \cdot), \ldots, X_\varepsilon(y_K, s, \cdot))$$

є $C-$розв'язком мартингальної задачі для $\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^K \varphi_\varepsilon(x_i - x_j)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$. Послідовність $\{\eta_\varepsilon^K(y_1, \ldots, y_K)\}_{\varepsilon\in(0;1)}$ відносно компактна в просторі $\mathcal{C}([s; +\infty))^K$ в силу теореми Тихонова. Припустимо, що η^K – довільна слабка границя даної послідовності при $\varepsilon \to 0+$. Покажемо, що $\eta^K \in C$, використовуючи відмінні від застосованих при доведенні [10, Лема 10.4] аргументи. Дійсно, оскільки допграничні процеси були мартингалами, легко бачити, що й кожна координата η^K є мартингалом відносно їх спільної фільтрації. Оскільки $B = \{(f_1, \ldots, f_N) \mid f_i - f_j$ ніколи не змінює знак$\}$ є замкненою множиною в $\mathcal{C}([s; \infty))^K$, і кожна різниця $\eta_k^K - \eta_i^K \in B$, отримуємо бажане.

Стандартні аргументи (наприклад, [115, Зауваження після Теореми 9 в Розділі 3]) дають можливість, спираючись на те, що $\{\varphi_\varepsilon\}_\varepsilon$ збігається до φ рівномірно на компактах, встановити вигляд взаємної характеристики для всіх пар координат процесу η^K на довільному скінченному інтервалі та довести, що процес

$$r \mapsto f(\eta^K(r)) - \int_s^r \mathfrak{A} f(\eta^K(q))dq$$

залишається мартингалом для оператора $\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^K \varphi(x_i - x_j)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$. Аргументи, ідентичні застосованим при доведенні [10, Лема 3.2], показують, що $\mathrm{Law}(\eta^K) = P_{y,s}^K$.

Тепер розглянемо різні моменти старту $s_1 \leq \ldots \leq s_K$. Зафіксуємо $N \in \mathbb{N}$. Послідовність

$$\xi_\varepsilon = (\mathcal{P}_{0,T} X_\varepsilon(x_1, s_1, \cdot), \ldots, \mathcal{P}_{0,T} X_\varepsilon(x_N, s_N, \cdot)),\ \varepsilon \in (0; 1),$$

відносно компактна в $\mathcal{C}([0;+\infty))^N$ в силу теореми Тихонова, оскільки кожна координата неперервна, є вінерівським процесом після певного моменту часу і дорівнює відповідній константі до цього моменту. Ми покажемо, що розподіл довільної слабкої границі $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ послідовності $\{\xi_\varepsilon\}_\varepsilon$ однозначно визначений.

Для спрощення позначень припустимо, що всі $s_1, \ldots, s_N$ різні. Загальний випадок можна отримати незначними корекціями нижчевикладеного. Зафіксуємо $M \geq N$ та $r_1, \ldots, r_M$ такі, щоб $s_1 \leq r_1 \leq \ldots \leq r_M$. Нехай

$$
\begin{gathered}
\{r_1, \ldots, r_M\} = \bigcup_{i=\overline{1,N}} A_i, \\
A_i \subset [s_i; s_{i+1}),\ i = \overline{1, N-1},\ A_N \subset [s_N; +\infty).
\end{gathered}
$$

При цьому $\xi_j(r) = \xi_j(s_j), r \leq s_j, j = \overline{1,N}$. Нехай $f_j, j = \overline{1,M}$, – обмежені неперервні дійснозначні функції на $\mathbb{R}^N$. Визначимо наступні вимірні відображення

$$
\begin{gathered}
g_N(Y) = \int_\Omega \prod_{j \in A_N} f_j(\omega(r_j)) P^N_{Y, s_N}(d\omega),\ Y \in \mathbb{R}^N, \\
g_l(Y) = \int_\Omega \prod_{j \in A_l} f_j\big(\omega(r_j)\big) g_{l+1}\big(\omega(s_{l+1})\big) Q^l_Y(d\omega),\ Y \in \mathbb{R}^N, \\
Q^l_Y = P^l_{(Y_1, \ldots, Y_l), s_l} \otimes \bigotimes_{j=\overline{l+1,N}} \delta(Y_j),\ l = \overline{1, N-1},
\end{gathered}
$$

де міра $\delta(u)$ – це атомарна міра, зосереджена на функції, тотожно рівній u. Нижче добуток по порожній множині вважається рівним 1. Тоді

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E} \prod_{j=\overline{1,M}} f_j(\xi(r_j)) = \mathrm{E}\,\mathrm{E} \left(\prod_{j=\overline{1,M}} f_j(\xi(r_j)) \mid \xi(r), r \leq s_N \right) = \\
= \mathrm{E} \prod_{j \in \bigcup_{j=\overline{1,N-1}} A_j} f_j(\xi(r_j)) \times
\end{aligned}
$$

$$\times \mathrm{E}\left(\prod_{k\in A_N} f_k(\xi(r_k)-\xi(s_N)+\xi(s_N)) \mid \xi(r), r\le s_N\right) =$$

$$= \mathrm{E}\prod_{j\in\bigcup_{j=\overline{1,N-1}}A_j} f_j(\xi(r_j))\left(\int_\Omega \prod_{k\in A_N} f_k\left(\omega(r_k)\right) P^N_{Y,s_N}(d\omega)\right)\Big|_{Y=\xi(s_N)} =$$

$$= \mathrm{E}\prod_{j\in\bigcup_{j=\overline{1,N-1}}A_j} f_j(\xi(r_j))g_N(\xi(s_N)) =$$

$$= \mathrm{E}\prod_{j\in\bigcup_{j=\overline{1,N-2}}A_j} f_j(\xi(r_j))\times$$

$$\times \mathrm{E}\left(\prod_{i\in A_{N-1}} f_j(\xi(r_i))g_N(\xi(s_N))\Big|\xi_r, r\le s_{N-1}\right) =$$

$$= \mathrm{E}\prod_{j\in\bigcup_{j=\overline{1,N-2}}A_j} f_j(\xi(r_j))g_{N-1}(\xi(s_{N-1})) = \ldots =$$

$$= g_1(y).$$

Оскільки всі g_j визначені однозначно, те саме справедливо й для розподілу ξ.

Отже, ми встановили, що $\chi^N_\varepsilon \Rightarrow \chi^N$ при $\varepsilon\to 0+$ в $\mathcal{C}([0;T])^N$ для всіх N. Застосовуючи Твердження 3.3.1, 3.3.2 та 3.3.3, отримуємо

$$(\chi_\varepsilon, \widehat{\chi}_\varepsilon) \Rightarrow (\chi, \widehat{\chi}), \varepsilon\to 0+,$$

що еквівалентно, після тривіального переформулювання, твердженню теореми. □

3.5 Збіжність породжених потоками просторових відображень числової осі

Легко бачити, що при фіксованих s, t скінченновимірні розподіли послідовності випадкових відображень $\{X_\varepsilon(\cdot, s, t)\}_{\varepsilon\in(0;1)}$ слабко збігаються до відповідних розподілів відображення $X(\cdot, s, t)$, однак сама послідовність $\{X_\varepsilon(\cdot,s,t)\}_{\varepsilon\in(0;1)}$ не є відносно компактною в просторі $\mathcal{D}(\mathbb{R})$: гранична функція $X(\cdot,s,t)$ є м.н. розривною, тоді як допграничні – неперервними, тож $X(\cdot,s,t)$ не може бути границею в топології Скорохода. Натомість ми розглядаємо слабку топологію в просторі $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Формалізації даного підходу та доведенню відповідної граничної теореми присвячений цей підрозділ.

Зауваження 3.5.1. В роботі [29] отримано оцінки на відстань Васерштейна між розподілами $n-$точкових рухів одновимірних потоків Харріса, коваріаційні функції котрих мають компактні носії, причому оцінки записані в термінах діаметрів відповідних носіїв. Оскільки в нашому випадку для будь-якої послідовності функцій $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0;1)}$, котрі б збігалися до φ рівномірно на компактах, послідовність діаметрів відповідних носіїв необмежена, вказані результати незастосовні. Інша відмінність – ми встановимо збіжність не лише для прямих, але й дуальних потоків.

Нехай $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ – простір локально скінченних невід'ємних борелівських мір на дійсній осі з слабкою-* топологією. Покладемо $\mathcal{M}^N(\mathbb{R}) = (\mathcal{M}(\mathbb{R}))^N$, $N\in\mathbb{N}$. Простір $\mathcal{M}^N(\mathbb{R})$ сепарабельний [116, Теорема 15.7.7].

Через $\mathrm{Lip}_C(\mathbb{R})$ позначатимемо множину функцій, для котрих виконується умова Ліпшиця на $\mathbb{R}$ зі сталою C, а через $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ – множину неперервних функцій з обмеженими носіями. Покладемо $\mathrm{Lip}(\mathbb{R}) = \cup_{C\geq 0}\mathrm{Lip}_C(\mathbb{R})$.

Нехай $\{X_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0;1)}$ – потоки Харріса, розглянуті в Твердженні 3.2.2, а X – потік Харріса з інфінітезимальною коваріацією φ. Зафіксуємо $T>0$. Нехай λ – міра Лебега на дійсній осі. Для всіх $\varepsilon\in(0;1), 0\leq s\leq t\leq T$, визначимо наступні $\mathcal{M}(\mathbb{R})-$значні випадкові елементи:

$$\mu_\varepsilon(s,t) = \lambda\circ X_\varepsilon(\cdot,s,t)^{-1},$$
$$\mu(s,t) = \lambda\circ X(\cdot,s,t)^{-1},$$

$$\widehat{\mu}_\varepsilon(s,t) = \lambda \circ \left(\widehat{X}_\varepsilon(\cdot,0,t,s)\right)^{-1},$$
$$\widehat{\mu}(s,t) = \lambda \circ \left(\widehat{X}(\cdot,0,t,s)\right)^{-1}.$$

Теорема 3.5.1. *Для довільних* $s_1 \le, \ldots \le s_N, t_1 \le, \ldots \le t_N, s_i \le t_i, i = \overline{1,N}, N \in \mathbb{N}$, *маємо*

$$\begin{aligned}(\mu_\varepsilon(s_1,t_1),\ldots,\mu_\varepsilon(s_N,t_N),\widehat{\mu}_\varepsilon(s_1,t_1),\ldots,\widehat{\mu}_\varepsilon(s_N,t_N))\\ \Rightarrow (\mu(s_1,t_1),\ldots,\mu(s_N,t_N),\widehat{\mu}(s_1,t_1),\ldots,\widehat{\mu}(s_N,t_N)),\end{aligned}$$

при $\varepsilon \to 0+$ *в* $\mathcal{M}^{2N}(\mathbb{R})$.

Доведення. Спочатку перевіримо, що для будь-яких $s,t,s<t$, виконується, що $\mu_\varepsilon(s,t) \Rightarrow \mu(s,t)$ в $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ при $\varepsilon \to 0+$, що еквівалентно [116, Теорема 4.2] тому, що для будь-якої неперервної функції $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$

$$\langle \mu_\varepsilon(s,t), f\rangle \Rightarrow \langle \mu(s,t), f\rangle, \varepsilon \to 0,$$

де для довільної міри $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ і вимірної функції g

$$\langle \nu, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} g(y)\nu(dy),$$

в припущенні, що інтеграл існує. Спершу ми доведемо цю збіжність при додатковому припущенні, що функція $f \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$.

Припустимо, що $\mathrm{supp}(f) \subset [-S;S]$ для деякого $S>0$, C_f – стала Ліпшиця для f, а $R_f := \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(y)|$. Для стандартного вінерівського процесу W та довільних $\varepsilon \in (0;1)$ і $M>S$ отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left|\int\limits_{|y|\ge M} f\left(X_\varepsilon\left(y,s,t\right)\right)dy\right| \le \mathrm{E}\sum_{k\ge M}\int_k^{k+1}\Big(\left|f\left(X_\varepsilon\left(y,s,t\right)\right)\right| +\\ +\left|f\left(X_\varepsilon\left(-y,s,t\right)\right)\right|\Big)dy \le\\ \le R_f\sum_{k\ge M}\int_k^{k+1}\Big(\mathsf{P}\left\{X_\varepsilon\left(y,s,t\right)\in[-S;S]\right\}+\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\mathsf{P}\left\{X_\varepsilon\left(-y,s,t\right)\in[-S;S]\right\}\Big)dy\le\\
&\le 2R_f\sum_{k\ge M}\mathsf{P}\left\{X_\varepsilon\left(k,s,t\right)\le S\right\}\le\\
&\le 2R_f\sum_{k\ge M}\mathsf{P}\left\{W(t-s)\ge k-S\right\}.
\end{aligned}
$$

Така ж оцінка, очевидно, справедлива і для потоку X. Тому для довільного фіксованого $\delta>0$ існує M таке, що

$$
\sup_{\varepsilon\in(0;1)}\mathrm{E}\left|\int_{|y|\ge M}f\left(X_\varepsilon\left(y,s,t\right)\right)dy\right|\vee\mathrm{E}\left|\int_{|y|\ge M}f\left(X\left(y,s,t\right)\right)dy\right|\le\delta. \tag{3.15}
$$

Покладемо

$$
\begin{aligned}
\langle\mu_\varepsilon^N,f\rangle&=\sum_{k=-N}^{N}f\left(X_\varepsilon\left(\tfrac{kM}{N},s,t\right)\right)MN^{-1},\\
\langle\mu^N,f\rangle&=\sum_{k=-N}^{N}f\left(X\left(\tfrac{kM}{N},s,t\right)\right)MN^{-1},\ N\in\mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Розглянемо функцію $g\in\mathrm{Lip}_{C_g}(\mathbb{R})$ для деякого C_g. Покладемо

$$
\begin{aligned}
A_N&=\mathrm{E}\,g\left(\langle\mu^N(s,t),f\rangle\right)-\mathrm{E}\,g\left(\langle\mu(s,t),f\rangle\right),\\
A_{\varepsilon N}&=\mathrm{E}\,g\left(\langle\mu_\varepsilon^N(s,t),f\rangle\right)-\mathrm{E}\,g\left(\langle\mu_\varepsilon(s,t),f\rangle\right),\ \varepsilon\in(0;1).
\end{aligned}
$$

В силу стаціонарності потоків Харріса відносно часової змінної, маємо, використавши (3.15):

$$
\begin{aligned}
|A_{\varepsilon N}|&=\left|\mathrm{E}\,g\left(\langle\mu_\varepsilon(s,t),f\rangle\right)-\mathrm{E}\,g\left(\langle\mu_\varepsilon^N(s,t),f\rangle\right)\right|\\
&\le C_g\,\mathrm{E}\left|\langle\mu_\varepsilon(s,t),f\rangle-\langle\mu_\varepsilon^N(s,t),f\rangle\right|\le\\
&\le C_g\,\mathrm{E}\left|\int_{-M}^{M}f\left(X_\varepsilon\left(y,s,t\right)\right)dy-\sum_{k=-N}^{N}f\left(X_\varepsilon\left(\tfrac{kM}{N},s,t\right)\right)MN^{-1}\right|+\\
&\qquad+C_g\delta\le
\end{aligned}
$$

$$\leq C_g \,\mathrm{E} \sum_{k=-N}^{N} \int_{\frac{kM}{N}}^{\frac{(k+1)M}{N}} \left| f\left(X_\varepsilon\left(y,s,t\right)\right) - f\left(X_\varepsilon\left(\tfrac{kM}{N},s,t\right)\right)\right| dy +$$

$$+ C_g\delta =$$

$$= 2C_g N \,\mathrm{E} \int_0^{MN^{-1}} \left| f\left(X_\varepsilon\left(y,s,t\right)\right) - f\left(X_\varepsilon\left(0,s,t\right)\right)\right| dy + C_g\delta \leq$$

$$\leq 2C_g C_f N \int_0^{MN^{-1}} \left[E\left(X_\varepsilon\left(y,s,t\right) - X_\varepsilon\left(0,s,t\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dy + C_g\delta. \quad (3.16)$$

Результат [85, Лема 5] може бути переформульовано наступним чином: існує стала K така, що для довільного потоку Харріса Y і будь-яких $y_1, y_2 \in \mathbb{R}, 0 \leq s \leq t, t-s \leq 1$,

$$\mathrm{E}\left(Y(y_1,s,t) - Y(y_2,s,t)\right)^2 \leq K\left((y_1-y_2)^2 + |y_1-y_2|\right). \quad (3.17)$$

Використовуючи (3.16) й (3.17) отримуємо для $MN^{-1} \leq 1$:

$$|A_{\varepsilon N}| \leq C_g\delta + 2KC_fC_gN \int_0^{MN^{-1}} y^{\frac{1}{2}} dy \leq C_g\delta + 2KC_gC_fM^{\frac{3}{2}}N^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.18)$$

Така ж оцінка отримується для A_N. Як наслідок, для достатньо великих N

$$\sup_{\varepsilon\in(0;1)} |A_{\varepsilon N}| + |A_N| \leq 2C_g\delta + 4KC_gC_fM^{\frac{3}{2}}N^{-\frac{1}{2}}.$$

Отже,

$$|\mathrm{E}\, g\left(\langle \mu_\varepsilon(s,t), f\rangle\right) - \mathrm{E}\, g\left(\langle \mu(s,t), f\rangle\right)| \leq$$
$$\leq \left|\mathrm{E}\, g\left(\langle \mu_\varepsilon^N(s,t), f\rangle\right) - \mathrm{E}\, g\left(\langle \mu^N(s,t), f\rangle\right)\right| +$$
$$+ 2C_g\delta + 4KC_gC_fM^{\frac{3}{2}}N^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.19)$$

Тут δ можна покласти як завгодно малим шляхом вибору достатньо великого M. В силу Теореми 3.4.1 для будь-яких натуральних N, M

$$\Big(X_\varepsilon(-M,s,t),\ldots,X_\varepsilon\left(-\tfrac{kM}{N},s,t\right),\ldots,X_\varepsilon(0,s,t),\ldots,$$
$$X_\varepsilon\left(\tfrac{kM}{N},s,t\right),\ldots,X_\varepsilon(M,s,t)\Big)\Rightarrow$$
$$\Big(X(-M,s,t),\ldots,X\left(-\tfrac{kM}{N},s,t\right),\ldots,X(0,s,t),\ldots,$$
$$X\left(\tfrac{kM}{N},s,t\right),\ldots,X(M,s,t)\Big)$$

в $\mathbb{R}^{2N+1}$ при $\varepsilon\to 0$. Тому для довільного $N\in\mathbb{N}$

$$\mathrm{E}\,g\left(\langle\mu_\varepsilon^N(s,t),f\rangle\right)-\mathrm{E}\,g\left(\langle\mu^N(s,t),f\rangle\right)\to 0,\ \varepsilon\to 0. \tag{3.20}$$

З цього та (3.19) випливає, що

$$\mathrm{E}\,g\left(\langle\mu_\varepsilon(s,t),f\rangle\right)\to\mathrm{E}\,g\left(\langle\mu(s,t),f\rangle\right),\ \varepsilon\to 0.$$

Це еквівалентно тому, що

$$\langle\mu_\varepsilon(s,t),f\rangle\Rightarrow\langle\mu(s,t),f\rangle \text{ в } \mathbb{R},\ \varepsilon\to\ 0. \tag{3.21}$$

Тепер покажемо, що (3.21) виконується і для довільної неперервної f, чий носій є підмножиною $[-S;S]$. Достатньо показати, що для довільного $\delta>0$ існує функція $f^\star\in\mathrm{Lip}(\mathbb{R})$ така, що

$$\sup_{\varepsilon\in(0;1)}\left|\mathrm{E}\,g\left(\langle\mu_\varepsilon(s,t),f\rangle\right)-\mathrm{E}\,g\left(\langle\mu_\varepsilon(s,t),f^\star\rangle\right)\right|\le C\delta,$$
$$\left|\mathrm{E}\,g\left(\langle\mu(s,t),f\rangle\right)-\mathrm{E}\,g\left(\langle\mu(s,t),f^\star\rangle\right)\right|\le C\delta,$$

причому стала C не повинна залежати від $f^\star$. Очевидно, можна вибрати $f^\star\in\mathrm{Lip}(\mathbb{R})$ так, щоб $\mathrm{supp}(f^\star)\subset[-S;S]$ і $\max_{y\in\mathbb{R}}|f(y)-f^\star(y)|\le\delta$. Позначимо через ν $\mu(s,t)$ або будь-яку з мір $\{\mu_\varepsilon(s,t)\}_{\varepsilon\in(0;1)}$. Тоді

$$\left|\mathrm{E}\,g\left(\langle\nu,f\rangle\right)-\mathrm{E}\,g\left(\langle\nu,f^\star\rangle\right)\right|\le C_g\,\mathrm{E}\int_{-S}^{S}|f(y)-f^\star(y)|\nu(dy)\le$$
$$\le C_g\delta\,\mathrm{E}\,\nu((-S;S]).$$

Разом з тим

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\mu(s,t)((-S;S]) &= \mathrm{E}\,\lambda\{y \mid X(y,s,t)\in(-S;S]\} = \\
&= \int_0^\infty \mathsf{P}\left\{\lambda\{y \mid X(y,s,t)\in(-S;S]\}\ge c\right\} dc \le \\
&\le \int_0^\infty \mathsf{P}\Big\{\exists y_1,y_2\colon y_2-y_1\ge c; \\
&\qquad X(y_1,s,t),X(y_2,s,t)\in[-S;S]\Big\} dc \le \\
&\le 2S+\int_{2S}^\infty \mathsf{P}\left\{\exists y\colon |y|\ge \frac{c}{2}, X(y,s,t)\in[-S;S]\right\} dc \le \\
&\le 2S+\int_{2S}^\infty \mathsf{P}\left\{X\left(\tfrac{c}{2},s,t\right)\le S \text{ or } X\left(\tfrac{-c}{2},s,t\right)\ge -S\right\} dc \le \\
&\le 2S+2\int_{2S}^\infty \mathsf{P}\left\{\frac{c}{2}+W(t-s)\le S\right\} dc = \\
&= 2S+2\int_{2S}^\infty \mathsf{P}\left\{W(t-s)\ge \frac{c}{2}-S\right\} dc = \\
&= 2S+4\int_0^\infty \mathsf{P}\left\{W(t-s)\ge c\right\} dc \le \\
&\le 2S+2\,\mathrm{E}\,|W(t-s)| \le \\
&\le 2S+2T.
\end{aligned}
$$

Така ж оцінка справедлива для усіх $\mu_\varepsilon(s,t)$, тож

$$
|\mathrm{E}\,g\left(\langle\nu,f\rangle\right)-\mathrm{E}\,g\left(\langle\nu,f^\star\rangle\right)|\le C_g(2S+2T)\delta,
$$

внаслідок чого (3.21) виконується для усіх $f\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Отже, $\mu_\varepsilon(s,t)\Rightarrow \mu(s,t)$ в $\mathcal{M}(\mathbb{R}), \varepsilon\to 0$.

Згідно з [10, Теорема 10.5]

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Law}(\mu_\varepsilon(s,t)) &= \mathrm{Law}(\hat\mu_\varepsilon(s,t)),\ \varepsilon\in(0;1), \\
\mathrm{Law}(\mu(s,t)) &= \mathrm{Law}(\hat\mu(s,t)).
\end{aligned}
$$

Як було відмічено раніше, простір $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ – сепарабельний, тому легко перевірити, що, якщо $(s_1,t_1)\cap(s_2,t_2)=\emptyset$, то випадкові відображення

$\mu_\varepsilon(s_1, t_1)$ і $\mu_\varepsilon(s_2, t_2)$ – незалежні, й аналогічний висновок вірний для породжених дуальними потоками відображень. Звідси відразу випливає твердження теореми. $\square$

3.6 Висновки

- Встановлено слабку збіжність зліченних наборів рухів в гладких стохастичних потоках до відповідних зліченних наборів рухів в потоці Харріса з інфінітезимальною коваріацію, заданою характеристичною функцією центрованого стійкого закону, при умові, що інфінітезимальні коваріації гладких потоків збігаються до коваріації граничного потоку рівномірно на компактах.

- В аналогічних умовах встановлено збіжність скінченних наборів породжених потоками перетворень числової осі в слабкій-* топології.

- Доведено, що введене в роботі відображення, котре задає конструктивним чином дуальний потік в термінах зліченного набору рухів прямого потоку, є неперервним відносно розподілу потоку зі склеюванням.

Розділ 4

Представлення точкових щільностей в потоках Арратья

4.1 Точкові щільності в потоках Арратья

Основні результати даного розділу опубліковані в роботах [4^a], [5^a].

Всюди в даному розділі використовується означення потоків Арратья з дрейфом $X^a = \{X^a(u,t)|u \in [0;1], t \in [0;T]\}$ із Розділу 1, причому коефіцієнт дрейфу завжди задовольняє умову Ліпшиця та обмежений. У випадку нульового дрейфу верхній індекс не пишеться.

З кожним таким потоком Арратья можна асоціювати випадкову локально скінченну міру $\mu_t^a, t \in (0;T]$:

$$\mu_t^a(\Delta) = \big|X(\mathbb{R},t) \cap \Delta\big|,\ \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Часткове вивчення структури таких мір та відповідного точкового процесу на прямій здійснювалося, зокрема, в роботах [39]–[42]. Для вивчення подібних точкових процесів можуть застосовуватися кореляційні функції (напр., [43]–[45]), відомі також під назвою точкових щільностей (напр. [50]–[56], [117]). Останньої назви ми і будемо притримуватися.

Для потоку Арратья з дрейфом X^a введемо позначення:

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_t^a &= \{X^a(v,t) \mid v \in [0;1]\},\\ \mathfrak{X}_t^a(u) &= \{X^a(u_k,t) \mid k = \overline{1,n}\},\\ \overrightarrow{X}^a(u,\cdot) &= (X^a(u_1,\cdot),\ldots,X^a(u_n,\cdot))\,,\ u=(u_1,\ldots,u_n)\in\mathbb{R}^n, n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Наступне означення взяте із [51, Додаток B] (див. також [50], [55]), з невеликими модифікаціями.

Означення 4.1.1. Нехай $t \in (0;T], k \in \mathbb{N}$. k-точковою щільністю p_t^k називається вимірна функція на $\mathbb{R}^k$ така, що для довільної невід'ємної вимірної функції $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{E} \sum_{\substack{v_1,\ldots,v_k \in \mathfrak{X}_t^a,\\ v_1,\ldots,v_k \text{ всі різні}}} f(v_1,\ldots,v_k) 1\!\!1\,(|\,\mathfrak{X}_t^a\,| \geq k) = \int_{\mathbb{R}^k} p_t^{a,k}(y) f(y) dy. \qquad (4.1)$$

Наведемо повний опис точкового процесу в потоці Арратья з нульовим дрейфом, отриманий в [50]. Для цього введемо функцію $F(x) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_x^\infty \mathrm{e}^{-y^2/2} dy, x \in \mathbb{R}$, та покладемо

$$K(u,v) = \begin{pmatrix} -F''(v-u) & -F'(v-u) \\ F'(v-u) & \operatorname{sign}(v-u) F(|u-v|) \end{pmatrix}$$

Теорема 4.1.1 ([50, Теорема 2]). *Точковий процес в потоці Арратья з нульовим дрейфом в момент часу t є пфаффівським точковим процесом [118] з ядром $t^{-1/2} K(t^{-1/2}u, t^{-1/2}v)$, тобто, для всіх $A_1,\ldots,A_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, та чисел $k_1,\ldots,k_m \in \mathbb{N}\cup\{0\}\colon \sum k_i = k$ виконується*

$$\mathrm{E} \prod_{j=1}^m |A_j| \cdot \ldots \cdot (|A_j| + 1 - k_j) = \int_{A_1^{k_1} \times \ldots \times A_m^{k_m}} p_t^k(x_1,\ldots,x_k) dx_1 \ldots dx_k,$$

причому k-точкова щільність $p_t^k(x_1,\ldots,x_k)$ задається як пфаффіан матриці розміром $2k \times 2k$, сформованої з k^2 блоків $K(x_i,x_j)$.

Зауваження 4.1.1. В теоремі розглядається потік, що стартує із усіх точок дійсної осі.

Нагадаємо, що пфаффіаном квадратної матриці [119] $\|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$ називається сума

$$\sum_{\sigma\in\ \Sigma_{2n}} \mathrm{sign}(\sigma) a_{i_1 j_1} \dots a_{i_n j_n},$$

де Σ_{2n} – множина всіх перестановок множини $\{1, \dots, 2n\}$ таких, що $\sigma \in \Sigma_{2n}$ тоді і тільки тоді, коли

$$i_k = \sigma(2k-1),\ j_k = \sigma(2k),$$
$$i_k < j_k,\ k = \overline{1,n},\ i_1 < \dots < i_n.$$

З допомогою даного представлення, зокрема, встановлюється явний вигляд сталих в асимптотиці точкових щільностей [50, Теорема 1] та отримуються прикладні результати – обчислення певних ймовірностей та граничні теореми [50], [56], [77], однак лише для обмеженого набору подій, сформульованих для даного точкового процесу, явно відомі вирази в термінах пфаффіанів певних матриць (пор. з [57, §5]). Така структура даних виразів ускладнює практичне застосування результату Теореми 4.1.1, особливо у випадку, коли важливий аналіз поведінки відповідних матриць та їх пфаффіанів при зростаючій розмірності.

Другою проблемою є те, що результат не може бути легко поширений на випадок нетривіального дрейфу. Необхідно також враховувати Зауваження 4.1.1.

Як наслідок, метою даного розділу є отримання альтернативних представлень точкових щільностей у випадках нетривіального дрейфу. Для цього в наступному підрозділі будуть введені додаткові об’єкти ((n, k)-щільності та щільності, що відповідають т.з. схемам склейки, визначеним нижче), котрі виникають при розгляді як множини точок старту скінченного набору чисел замість всього відрізку $[0; 1]$. Разом з тим, встановлені відповідні граничні теореми про можливість відновлення $n-$точкових щільностей із (n, k)-щільностей при зростанні кількості точок старту.

Запропонований нами підхід базується на застосуванні теореми Гірсанова для потоків Арратья, доведеної в [11, §§7.2-7.3]. Наведемо цей результат в скороченому вигляді.

Нехай $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. Покладемо

$$\tau_1(u) = T,$$
$$\tau_k(u) = \inf\left\{T; s \mid \prod_{j=1}^{k-1} (X(u_k, s) - X(u_j, s)) = 0\right\}, \quad k = \overline{2, n},$$

і

$$I_n(u) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\tau_k(u)} a(X(u_k, t)) dX(u_k, t),$$
$$J_n(u) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\tau_k(u)} a^2(X(u_k, t)) dt.$$

Тут інтеграли в виразі для I_n є звичайними інтегралами Іто відносно вінерівських процесів $X(u_j, \cdot), j = \overline{1, n}$, а інтеграли в виразі для J_n – потраєкторні інтеграли Лебега.

Теорема 4.1.2 ([11, §7.2])**.** *Нехай задано щільну в* $[0; 1]$ *множину* $\mathcal{U} = \{u_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. *Покладемо* $u^{(n)} = (u_1, \dots, u_n), n \in \mathbb{N}$. *Тоді існують*

$$I = L_2\text{-}\lim_{n\to\infty} I_n\left(u^{(u)}\right), \quad J = L_2\text{-}\lim_{n\to\infty} J_n\left(u^{(u)}\right),$$

котрі не залежать від множини $\mathcal{U}$.

Теорема 4.1.3 ([11, Теорема 7.3.1])**.** *Нехай* $n \in \mathbb{N}$. *Для будь-якого* $u \in \mathbb{R}^n$ *розподіл* $\overrightarrow{X}^a(u, \cdot)$ *абсолютно неперервний відносно розподілу* $\overrightarrow{X}(u, \cdot)$ *в просторі* $(\mathcal{C}([0; T]))^n$ *зі щільністю*

$$\widetilde{\mathcal{E}}^a_{T,n}(u) = \exp\left\{I_n(u) - \frac{1}{2} J_n(u)\right\}.$$

Теорема 4.1.4 ([11, Теорема 7.3.1])**.** *Розподіл* X^a *як випадкового елементу в просторі* $\mathcal{D}([0; 1], \mathcal{C}([0; T]))$ *абсолютно неперервний відносно розподілу* X *зі щільністю*

$$\widetilde{\mathcal{E}}^a_T = \exp\left\{I - \frac{1}{2}J\right\}.$$

Цей результат дає змогу отримати представлення для $p_t^{a,n,k}$ в термінах $p_t^{0,n,k}$. Неформально це можна записати наступним чином:

$$\begin{aligned}
p_t^{a,n,k}(u;y) &= p_t^{0,n,k}(u;y)\,\mathrm{E}\left(\widetilde{\mathcal{E}}^a_T/\{y_1,\ldots,y_k\}\subset\mathfrak{X}_T(u)\right) = \\
&= p_t^{0,n,k}(u;y)\,\mathrm{E}\left(\widetilde{\mathcal{E}}^a_{T,n}(u)/\{y_1,\ldots,y_k\}\subset\mathfrak{X}_T(u)\right) = \\
&= p_t^{0,n,k}(u;y)\,\mathrm{E}\left(\exp\left\{\sum_{k=1}^n\int_0^{\tau_k(u)} a(X(u_k,t))dX(u_k,t)-\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\int_0^{\tau_k(u)} a^2(X(u_k,t))dt\right\}/\{y_1,\ldots,y_k\}\subset\mathfrak{X}_T(u)\right)
\end{aligned}$$

Друга половина поточного розділу й присвячена формалізації даної ідеї, причому, оскільки умови накладаються лише на поведінку $\overrightarrow{X}(u,\cdot)$ в момент часу T, ми зведемо дану задачу до задачі обчислення умовних математичних сподівань стохастичних експонент спеціального виду від незалежних вінерівських процесів при умові фіксованого положення даних вінерівських процесів в момент T.

4.2 Точкові щільності для скінченної множини точок старту

Для $n\in\mathbb{N}$ покладемо $\Delta_n = \{u\in\mathbb{R}^n \mid u_1 < \ldots < u_n\}$.

Означення 4.2.1. Нехай задано потік Арратья X^a. Називатимемо $(n,k)-$точковою щільністю, що відповідає $u\in\Delta_n$ та $k\in\{1,\ldots,n\}$, вимірну функцію $p_t^{a,n,k}(u;\cdot)$ на $\mathbb{R}^k$ таку, що для довільної невід'ємної вимірної функції $f\colon\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$

$$\mathrm{E}\sum_{\substack{v_1,\ldots,v_k\in\mathfrak{X}^a_t(u),\\ v_1,\ldots,v_k \text{ всі різні}}} f(v_1,\ldots,v_k)1\!\!1\left(|\mathfrak{X}^a_t(u)|\ge k\right) = \int_{\mathbb{R}^k} p_t^{a,n,k}(u;y)f(y)dy.$$

Наступні побудови дадуть змогу описувати функції $p_t^{a,n,k}(u;\cdot)$ в термінах об'єктів простішої природи. Мотивацією такого підходу є необхідність спростити обчислення обговорюваних в попередньому підрозділі умовних математичних сподівань: розглядаючи замість щільностей $p_t^{a,n,k}(u;\cdot)$ щільності, обраховані при умові реалізації конкретної послідовності моментів зустрічі, ми зможемо використати описаний в Підрозділі 1.2 підхід та переписати $\widetilde{\mathcal{E}}^a_{T,n}(u)$ та $\widetilde{\mathcal{E}}^a_n(u)$ в термінах модифікованих стохастичних експонент вінерівських процесів на множині тих елементарних подій, на котрих спостерігається така ж послідовність моментів зустрічі, і тим самим звести проблему обчислення згаданих вище умовних математичних сподівань до обрахунків в термінах звичайних вінерівських процесів.

Надалі $\mathfrak{C}_n$ – множина тих функцій $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in (\mathcal{C}([0;T]))^n$, для котрих виконується три наступні умови:

1. $|\{\xi_k(0) \mid k = \overline{1,n}\}| = n$;

2. склейка:
$$\forall i, j, i \neq j\colon\ (\exists s\colon \xi_i(s) = \xi_j(s)) \Rightarrow ((\xi_i(t) = \xi_j(t),\ t \geq s)\,;$$

3. немає потрійних зіткнень: не існує моменту часу s та попарно різних номерів i, j, k таких, що
$$\xi_k(s) = \xi_j(s) = \xi_i(s), \quad |\{\xi_k(t), \xi_j(t), \xi_i(t)\}| = 3, t < s.$$

Покладемо
$$\mathcal{S}_{n,k} = \{(j_1, \ldots, j_k) \mid j_i \in \{1, \ldots, n-i\}\,, i = \overline{1,k}\}, \quad k = \overline{1,n},$$
$$\mathcal{S}_n = \{\varnothing\} \cup \bigcup_{k=\overline{1,n-1}} \mathcal{S}_{n,k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Нехай $n - \varkappa = |\{\xi_j(T) \mid j = \overline{1,n}\}|$. Очевидно, що $\varkappa$ приймає значення в $\{0, \ldots, n-1\}$. Якщо $\varkappa > 0$, то існують $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_\varkappa$

– моменти зіткнень для процесу ξ, тобто для кожного τ_k існує пара i, j така, що $\xi_i(\tau_k) = \xi_j(\tau_k)$, але $\xi_i(s) \neq \xi_j(s)$ для будь-якого $s < \tau_k$. Покладемо $j_1 = \min\{i \mid \exists j \neq i \ \xi_j(\tau_1) = \xi_i(\tau_1)\}$ і визначимо процес ξ^{n-1} видаляючи координату з номером j_1 в векторі ξ. Далі покладемо $j_2 = \min\{i \mid \exists\, j \neq i \ \xi_j^{n-1}(\tau_2) = \xi_i^{n-1}(\tau_2)\}$, визначимо ξ^{n-2} шляхом видалення в процесі ξ^{n-1} координати з номером j_2 і продовжимо повторювати ці два кроки, поки не отримаємо набір $S(\xi) = (j_1, \ldots, j_\varkappa) \in \mathcal{S}_{n,\varkappa}$. У випадку відсутності зіткнень ($\varkappa = 0$) за означенням $S(\xi) = \varnothing$.

Означення 4.2.2. $S(\xi)$ називається схемою склейки для ξ.

З означення потоку Арратья X випливає, що для довільного $u \in \mathbb{R}^n$ м.н. $\overrightarrow{X}(u) \equiv \overrightarrow{X}(u, \cdot) \in \mathfrak{C}_n$, тому визначена випадкова схема склейки $S(\overrightarrow{X}(u))$.

Зауваження 4.2.1. Схема склейки $S(\overrightarrow{X}(u))$ може слугувати альтернативним способом запису описаної в Підрозділі 1.2 реалізації схеми побудови $n-$точкового руху в потоці Арратья із відповідного числа незалежних вінерівських процесів. Цей зв'язок буде суттєво використано нижче.

Означення 4.2.3. Нехай X^a – потік Арратья з дрейфом. Для заданих $u \in \Delta_n$, схеми склейки $s \in \mathcal{S}_{n,j}$ для певного j та $k \leq n-j$ називатимемо відповідною $(n, k)-$точковою щільністю вимірну функцію $p_t^{a,n,s,k}(u; \cdot)$ на $\mathbb{R}^k$ таку, що для довільної невід'ємної вимірної функції $f \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{E} \sum_{\substack{v_1,\ldots,v_k \in \mathfrak{X}_t^a(u), \\ v_1,\ldots,v_k \text{ всі різні}}} f(v_1, \ldots, v_k) 1\!\!\mathrm{I}(S(\overrightarrow{X}^a(u) = s) = \int_{\mathbb{R}^k} p_t^{a,n,s,k}(u; y) f(y) dy. \tag{4.2}$$

Для заданої множини $K \subset \{1, \ldots, n\}$ і точки $z \in \mathbb{R}^n$ ми будемо позначати через z^{-K} вектор, отриманий внаслідок видалення у вектора z всіх координат з номерами із K, а через z^K – вектор, отриманий внаслідок видалення всіх координат окрім тих, що в K.

Лема 4.2.1. *Для всіх* $s \in \mathcal{S}_{n,k}$, $u \in \Delta_n$ *та* $j \le n-k$ *існує щільність* $p_t^{a,n,s,j}(u;\cdot)$.

Доведення. Нехай $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^j)$. В силу Теореми 4.1.4 маємо

$$\begin{aligned}
\mathrm{E} \sum_{\substack{v_1,\dots,v_j \in \mathfrak{X}_t^a(u), \\ v_1,\dots,v_j \text{ всі різні}}} & 1\!\!1_A\left(v_1,\dots,v_j\right) 1\!\!1\left(S(\overrightarrow{X}^a(u)) = s\right) = \\
&= \mathrm{E} \sum_{\substack{v_1,\dots,v_j \in \mathfrak{X}_t(u), \\ v_1,\dots,v_j \text{ всі різні}}} 1\!\!1_A\left(v_1,\dots,v_j\right) 1\!\!1\left(S(\overrightarrow{X}(u)) = s\right) \widetilde{\mathcal{E}}^a_{T,n}\left(u\right) \le \\
&\le \sum_{\substack{L=\{l_1,\dots,l_j\}, \\ l_i \in \{1,\dots,n-k\},\ i=\overline{1,j}}} \mathrm{E}\, 1\!\!1_A\left(\overrightarrow{X}(u^L,t)\right) \mathrm{E}\left(\widetilde{\mathcal{E}}^a_{T,n}\left(u\right) / \overrightarrow{X}(u^L,t)\right) \le \\
&\le \sum_{\substack{L=\{l_1,\dots,l_j\}, \\ l_i \in \{1,\dots,n-k\},\ i=\overline{1,j}}} \int_A p_t^{0,j,j}(u^L;y)\, \mathrm{E}\left(\widetilde{\mathcal{E}}^a_{T,n}\left(u\right) / \overrightarrow{X}(u^L,t) = y\right) dy,
\end{aligned}$$

звідки випливає абсолютна неперервність визначеної в (4.2) міри на $\mathbb{R}^j$ відносно міри Лебега. □

Із формули повної ймовірності легко вивести наступний результат, котрий описує зв'язок між щільностями $p_t^{a,n,k}$ та $p_t^{a,n,s,k}$.

Лема 4.2.2. *Для всіх* $n \in \mathbb{N}, u \in \Delta_n$ *і* $k \in \{1,\dots,n\}$ *щільність* $p_t^{a,n,k}(u,\cdot)$ *існує, причому м.в.*

$$p_t^{a,n,k}(u;\cdot) = \sum_{l=0}^{n-k} \sum_{s \in \mathcal{S}_{n,l}} p_t^{a,n,s,k}(u;\cdot).$$

В подальшому ми називатимемо всі види введених вище щільностей просто точковими щільностями, вказуючи в кожному окремому випадку конкретний тип щільності явно.

Для узгодженості позначень покладемо $p_t^{a,n,k}(u,\cdot) = 0$ всюди при $k > n$.

4.3 Представлення точкових щільностей в термінах розв'язків параболічних задач

В даному підрозділі на основі зв'язку між фундаментальними розв'язками певних задач Коші та перехідними функціями дифузійних процесів отримуються представлення для точкових щільностей. Використовується та ж детально описана нижче схема побудови послідовності задач Коші в симплексах змінної розмірності, що й описана в [77, Леми 2-3] для випадку багатовимірного вінерівського процесу.

Нехай $W_n^a = (w_1^a, \ldots, w_n^a)$ – n незалежних копій одновимірного вінерівського процесу з дрейфом a. Ми будемо писати $\mathrm{E}_{a,r,z}$ для математичного сподівання, обчисленого відносно міри $P_{a,r,z}$ в просторі $(\mathcal{C}([0;\infty]))^n$ – розподілу процесу $W_n^a(r+\cdot)+z$.

Загальновідомим є наступний результат [120, §2.2][121, Розділ VIII, §5].

Теорема 4.3.1. *Нехай $F(z,r), z \in \overline{\Delta}_n, r \in [s;t]$, – обмежений розв'язок задачі Коші*

$$-\frac{\partial}{\partial r}F(z,r) = \frac{1}{2}\Delta_z F(z,r) + \sum_{k=1}^{n} a(z_k)\frac{\partial}{\partial z_k}F(z,r) \ \text{в}\ \Delta_n \times (s;t),$$
$$F(z,t) = 0,\ z \in \overline{\Delta}_n,$$
$$F(z,r) = \varphi(z,r),\ z \in \partial\Delta_n,\ r \in (s;t),$$
$$\varphi \in \mathcal{C}_0^2(\Delta_n \times (s;t))$$

Якщо $F \in \mathcal{C}^{2,1}(\Delta_n \times (s;t))$, то

$$F(z,r) = \mathrm{E}_{a,r,z}\,\varphi(W_n^a(\theta))1\!\!1\,(\theta < t)\,,$$

де $\theta = \inf\{r \mid W_n^a(r) \notin \Delta_n\}$.

Покладемо

$$\partial\Delta_{n,j} = \{(u_1, \ldots, u_n) | u_1 < \ldots < u_j = u_{j+1} < \ldots < u_n\}, j = \overline{1, n-1}.$$

Розв'язок F може бути записаний в явному вигляді як

$$F(z, r) = -\frac{1}{2} \int_r^t dt_1 \int_{\partial\Delta_n} m_n(dy) \frac{\partial}{\partial\nu_y} g_{t-t_1}^{a,n}(z; y) \varphi(y, t_1), \tag{4.3}$$

де тут і далі m_k –поверхнева міра на $\partial\Delta_k, k = \overline{1, n}$, $\frac{\partial}{\partial\nu_y}$ позначає зовнішню нормальну похідну відносно $y-$змінних, а $g_{t-s}^{a,n}(z; \cdot)$– перехідна щільність в момент часу t вбитого в момент виходу із області процесу W_n^a зі стартом в z в момент s. У випадку нульового дрейфу ця щільність задається визначником Карліна-МакГрегора:

$$g_t^{0,m}(x; y) = \det \left\| g_t(x_i - y_j) \right\|_{i,j=\overline{1,m}}, \quad x, y \in \Delta_m,$$

де $g_t(a) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-a^2/2t}$.

Теорема 4.3.2. *Для будь-яких* $n \in \mathbb{N}, x \in \Delta_n, t \in [0; T], k \in \{1, \ldots, n\}$, *будь-якої схеми склейки* $s = (j_1, \ldots, j_{n-k}) \in \mathcal{S}_{n,n-k}$ *та довільного* $j \in \{1, \ldots, k\}$

$$\begin{aligned}
p_t^{a,n,s,j}(x; y) = (-1)^k 2^{-k} &\int_{0 \le t_1 \le \ldots \le t_{n-k} \le t} dt_1 \ldots dt_{n-k} \\
&\int_{\partial\Delta_{n,j_1}} m_n(dz_1) \int_{\partial\Delta_{n-1,j_2}} m_{n-1}(dz_2) \ldots \int_{\partial\Delta_{k+1,j_{n-k}}} m_{k+1}(dz_{n-k}) \\
&\times \frac{\partial}{\partial\nu_{z_1}} g_{t_1}^{a,n}(x, z_1) \times \frac{\partial}{\partial\nu_{z_2}} g_{t_2-t_1}^{a,n-1} \left(S_{j_1}^n z_1, z_2\right) \times \ldots \times \\
&\times \frac{\partial}{\partial\nu_{z_{n-k}}} g_{t_{n-k}-t_{n-k-1}}^{a,k+1} \left(S_{j_{n-k-1}}^{k+2} z_{n-k-1}, z_{n-k}\right) \times \\
&\times \sum_{\substack{L=\{l_1,\ldots,l_j\}\subset \\ \{1,\ldots,k\}}} \int_{\mathbb{R}^{k-j}} dv^{-L} g_{t-t_{n-k}}^{a,k} \left(S_{j_{n-k}}^{k+1} z_{n-k}, v\right) \Big|_{\substack{v\in\mathbb{R}^k, \\ v^L = y}},
\end{aligned}$$

де відображення $S_j^m \colon \partial\Delta_{m,j} \to \Delta_{m-1}, j = \overline{1, m-1}, m \in \mathbb{N}$, *видаляє координату з номером* $j+1:$

$$S_j^m(u_1, \ldots, u_j, u_{j+1}, u_{j+2}, \ldots, u_m) = (u_1, \ldots, u_j, u_{j+2}, \ldots, u_m),$$
$$j = \overline{1, m-1}, m \in \mathbb{N}.$$

Доведення. Доведення запозичує ідеї з [77, §§2-3] та узагальнює їх на випадок нетривіального дрейфу. Для спрощення позначень спочатку розглянемо випадок $j = k$.

Виберемо довільну кулю A в $\mathbb{R}^k$ та розглянемо рівномірно обмежену послідовність функцій $\varphi_\varepsilon, \varepsilon \in (0;1)$, таку, що $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^k), \varphi_\varepsilon \to 1\!\!\mathrm{I}_A$ при $\varepsilon \to 0+$ поточково.

Сконструюємо процес $\widetilde{W}^a = (\widetilde{w}_1^a, \ldots, \widetilde{w}_n^a)$:

$$\widetilde{w}_1^a = w_1^a,\ \theta_1 = \inf\{s \mid w_2^a(s) = \widetilde{w}_1^a(s)\},$$
$$\widetilde{w}_l^a(s) = w_l^a(s) 1\!\!\mathrm{I}\,(s < \theta_{l-1}) + \widetilde{w}_{l-1}^a(s) 1\!\!\mathrm{I}\,(s \geq \theta_{l-1})\,,\ l = \overline{2, n},$$
$$\theta_l = \inf\{s \mid w_{l+1}^a(s) = \widetilde{w}_l^a(s)\},\ l = \overline{2, n-1}.$$

Стандартним чином можна перевірити, використовуючи теорему Гірсанова, що всі моменти $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ різні м.н.. В силу Леми 2.9.3 $n-$точковий рух потоку Арратья зі стартом в x має той же розподіл, що й процес $\widetilde{W}^a$ як канонічна реалізація дифузійного процесу на ймовірнісному просторі $(\mathcal{C}([0;\infty]))^n$ з мірою $P_{a,0,x}$.

Нехай $2 \leq m \leq n$. Для процесу $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathfrak{C}_m$ на $[0;\infty)$, з $\xi(0) \in \Delta_m$, покладемо

$$\rho_j = \inf\{s \mid \xi_j(s) = \xi_{j+1}(s)\},\ j = \overline{1, m-1},$$

та позначимо впорядковані за зростанням моменти зіткнення $\{\rho_l \mid l = \overline{1, m-1}\}$ як $\tau_1^m(\xi), \ldots, \tau_{m-1}^m(\xi)$. Зокрема,

$$\tau_1^n(\widetilde{W}^a) = \min\{\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}\}\,,$$
$$\tau_l^n(\widetilde{W}^a) = \min\left\{\theta_j \mid \theta_j > \tau_{l-1}^n(\widetilde{W}^a)\right\},$$
$$l = \overline{2, n-1}.$$

Покладемо $\theta_j^m(\xi) = \inf\{s \mid \xi(s) \in \partial\Delta_{m,j}\}$, $j = \overline{1, m-1}$.

Маємо м.н.

$$
\begin{aligned}
\tau_1^n(\widetilde{W}^a) &= \sum_{j=1}^{n-1} \theta_j^n(\widetilde{W}^a) 1\!\!\mathrm{I}\left(\tau_1^n(\widetilde{W}^a) = \theta_j^n(\widetilde{W}^a)\right), \\
\tau_2^n(\widetilde{W}^a) &= \sum_{j=1}^{n-1} \tau_1^{n-1}(S_j^n \widetilde{W}^a) 1\!\!\mathrm{I}\left(\tau_1^n(\widetilde{W}^a) = \theta_j^n(\widetilde{W}^a)\right) = \\
&= \sum_{j_1=1}^{n-1} \sum_{j_2=1}^{n-2} \theta_{j_2}^{n-1}(S_{j_1}^n \widetilde{W}^a) 1\!\!\mathrm{I}\left(\tau_1^n(\widetilde{W}^a) = \theta_{j_1}^n(\widetilde{W}^a)\right) \times \\
&\quad \times 1\!\!\mathrm{I}\left(\tau_1^{n-1}(S_{j_1}^n \widetilde{W}^a) = \theta_{j_2}^{n-1}(S_{j_1}^n \widetilde{W}^a)\right).
\end{aligned}
$$

Повторюючи розклад, врешті отримаємо

$$
\begin{aligned}
\tau_{n-k}^n(\widetilde{W}^a) = \sum_{j_1=1}^{n-1} \sum_{j_2=1}^{n-2} \cdots \sum_{j_{n-k}=1}^{k+1} & \theta_{j_{n-k}}^k \left(S_{j_{n-k-1}}^{k+2} \dots S_{j_1}^n \widetilde{W}^a\right) \times \\
& \times 1\!\!\mathrm{I}\left(\tau_1^n(\widetilde{W}^a) = \theta_{j_1}^n(\widetilde{W}^a)\right) \times \\
& \times 1\!\!\mathrm{I}\left(\tau_1^{n-1}(S_{j_1}^n \widetilde{W}^a) = \theta_{j_2}^{n-1}(S_{j_1}^n \widetilde{W}^a)\right) \times \dots \times \\
& \times 1\!\!\mathrm{I}\left(\tau_1^{k+1}(S_{j_{n-k-1}}^{k+2} \dots S_{j_1}^n \widetilde{W}^a) = \theta_{j_{n-k}}^{k+1}(S_{j_{n-k-1}}^{k+2} \dots S_{j_1}^n \widetilde{W}^a)\right).
\end{aligned}
$$

Отже, встановлюється взаємно однозначне співвідношення між схемами склейки $(j_1, \dots, j_{n-k}) \in \mathcal{S}_{n,n-k}$ та добутками індикаторів в попередньому виразі:

$$
\tau_{n-k}^n(\widetilde{W}^a) = \sum_{(j_1,\dots,j_{n-k}) \in \mathcal{S}_{n,n-k}} \theta_{j_{n-k}}^{k+1} \left(S_{j_{n-k-1}}^{k+2} \dots S_{j_1}^n \widetilde{W}^a\right) \cdot A_{j_1,\dots,j_{n-k}},
$$

де

$$
\begin{aligned}
A_{j_1,\dots,j_{n-k}} = 1\!\!\mathrm{I} & \left(\tau_1^n(\widetilde{W}^a) = \theta_{j_1}^n(\widetilde{W}^a)\right) \times \\
& \times 1\!\!\mathrm{I}\left(\tau_1^{n-1}(S_{j_1}^n \widetilde{W}^a) = \theta_{j_2}^{n-1}(S_{j_1}^n \widetilde{W}^a)\right) \times \dots \times
\end{aligned}
$$

$$\times \mathbb{1}\left(\tau_1^{k+1}(S_{j_{n-k-1}}^{k+2}\dots S_{j_1}^{n}\widetilde{W}^a) = \theta_{j_{n-k}}^{k+1}(S_{j_{n-k-1}}^{k+2}\dots S_{j_1}^{n}\widetilde{W}^a)\right) =$$
$$= \mathbb{1}\left(S(\widetilde{W}^a) = (j_1,\dots,j_{n-k})\right). \tag{4.4}$$

Покладемо

$$I_\varepsilon = \mathrm{E}_{a,0,x}\,\varphi_\varepsilon\left(T\widetilde{W}^a(t)\right)\mathbb{1}\left(\tau_{n-k}^{n}(\widetilde{W}^a)\le t\right),$$

де відображення T залишає у вектора лише попарно різні координати. Тому для $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_m)\in\mathfrak{C}_m$, з $\xi(0)\in\Delta_m$:

$$\mathbb{1}\big(S(\xi) = (l_1,\dots,l_{m-p})\big)T\xi(t)\mathbb{1}\left(\tau_{m-p}^{m}(\xi)<t\right) =$$
$$= \mathbb{1}\big(S(\xi) = (l_1,\dots,l_{m-p})\big)\mathbb{1}\left(\tau_{m-p}^{m}(\xi)<t\right)\left[S_{l_{m-p}}^{p+1}\dots S_{l_1}^{m}\xi(t)\right]\in\mathbb{R}^p.$$

Введемо

$$\widetilde{W}_m^a = (\widetilde{w}_1^a,\dots,\widetilde{w}_m^a),\ m<n.$$

Користуючись строго марківською властивістю вінерівського процесу, отримуємо

$$I_\varepsilon = \mathrm{E}_{a,0,x}\,\mathrm{E}\left(\varphi_\varepsilon\left(T\widetilde{W}^a(t)\right)\mathbb{1}\left(\tau_{n-k}^{n}(\widetilde{W}^a)\le t\right)/\widetilde{W}^a(r), r\le\tau_1^n(\widetilde{W}^a)\right) =$$
$$= \mathrm{E}_{a,0,x}\,\mathbb{1}\left(\tau_1^n(\widetilde{W}^a)\le t)\right)\Phi_\varepsilon^{n-1}(t_1,z_1)\Big|_{\substack{t_1=\tau_1^n(\widetilde{W}^a),\\ z_1=\widetilde{W}^a(\tau_1^n(\widetilde{W}^a))}},$$

де

$$\Phi_\varepsilon^{n-1}(t_1,z_1) = \mathrm{E}_{a,t_1,Tz_1}\,\varphi_\varepsilon\left(T\widetilde{W}_{n-1}^a(t)\right)\mathbb{1}\left(\tau_{n-k-1}^{n-1}(\widetilde{W}_{n-1}^a)\le t\right).$$

Беручи у виразі для Φ_ε^{n-1} умовне маточікування відносно $\sigma(\widetilde{W}_{n-1}^a(r)$, $r\le\tau_1^{n-1}(\widetilde{W}_{n-1}^a))$ та продовжуючи аналогічним чином дану рекурентну процедуру, отримаємо:

$$\Phi_\varepsilon^{n-1}(t_1,z_1) = \mathrm{E}_{a,t_1,Tz_1}\,\mathbb{1}\left(\tau_1^{n-1}(\widetilde{W}_{n-1}^a)\le t\right)\Phi_\varepsilon^{n-2}(t_2,z_2)\Big|_{\substack{t_2=\tau_1^{n-1}(\widetilde{W}_{n-1}^a),\\ z_2=\widetilde{W}_{n-1}^a(t_2)}},$$

$$\Phi_\varepsilon^{n-i}(t_i, z_i) = \mathrm{E}_{a,t_i,Tz_i}\, 1\!\!1 \left(\tau_1^{n-i}(\widetilde{W}^a_{n-i}) \le t\right) \times$$
$$\times\, \Phi_\varepsilon^{n-i-1}(t_{i+1}, z_{i+1})\Big|_{\substack{t_{i+1}=\tau_1^{n-i}(\widetilde{W}^a_{n-i}),\\ z_{i+1}=\widetilde{W}^a_{n-i}(t_{i+1})}},$$
$$i = \overline{2, k-1},$$
$$\Phi_\varepsilon^{k}(t_{n-k}, z_{n-k}) = \mathrm{E}_{a,t_{n-k},Tz_{n-k}}\, \varphi_\varepsilon\left(T\widetilde{W}^a_{k+1}(t)\right),$$
$$t_{n-k} < t_{n-k-1} < \ldots < t_1 = t,$$
$$z_i \in \partial\Delta_{n+1-i}, i = \overline{1, n-k}.$$

Останній вираз може бути обчислений явно:

$$\Phi_\varepsilon^{k}(t_{n-k}, z_{n-k}) = \sum_{j_{n-k}=1}^{k} 1\!\!1\left(z_{n-k} \in \partial\Delta_{k+1}, j_{n-k}\right) \times$$
$$\int_{\mathbb{R}^k} \varphi_\varepsilon(y) g^{a,k}_{t-t_{n-k}}\left(S^{k+1}_{j_{n-k}} z_{n-k}, y\right) dy. \tag{4.5}$$

В результаті отримано послідовність початково-краєвих параболічних задач для функцій Φ_ε^i в симплексах змінної розмірності з нульовими початковими умовами, причому краєва умова для Φ_ε^i визначається функцією Φ_ε^{i-1}. Ця послідовність еквівалентна, з певною корекцією, введеній в [77, §§2-3]. На відміну від вказаного джерела, у нашому випадку присутній дрейф, але, використовуючи стандартні гаусівські параболічні оцінки на перехідні щільності та їх похідні [122, Розділ 4, §4], можна, аналогічно [77, Лема 3], показати, що розв'язки вказаних вище початково-краєвих задач, отримані шляхом рекурентного застосування формули (4.3) та явного виразу (4.5), належать просторам $\mathcal{C}^{2,1}(\Delta_i \times (t_{i+1}; t))$ для відповідних i й тому [120, §2.2] допускають ймовірнісне представлення, а отже, співпадають з функціями Φ_ε^i.

Зокрема, застосовуючи (4.3) до (4.5), матимемо

$$\Phi_\varepsilon^{k+1}(t_{n-k-1}, z_{n-k-1}) = -\frac{1}{2} \sum_{j_{n-k-1}=1}^{k+1} \sum_{j_{n-k}=1}^{k} 1\!\!1\left(z_{n-k-1} \in \partial\Delta_{k+2,j_{n-k-1}}\right) \times$$

$$\times \int_{t_{n-k-1}}^{t} dt_{n-k} \int_{\partial\Delta_{k+2,j_{n-k}}} m_{k+1}(dz_{n-k})$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu_{z_{n-k}}} g^{a,k+1}_{t-t_{n-k}} \left(S^{k+2}_{j_{n-k-1}} z_{n-k-1}, z_{n-k}\right) \int_{\mathbb{R}^k} dy\ g^{a,k}_{t_{n-k}} \left(S^{k+1}_{j_{n-k}} z_{n-k}, y\right) \varphi_\varepsilon(y).$$

Повторивши необхідну кількість разів, приходимо до

$$I_\varepsilon = \sum_{(j_1,\ldots,j_{n-k})\in\mathcal{S}_{n,n-k}} (-1)^k 2^{-k} \int_{0\le t_1\le\ldots\le t_{n-k}\le t} dt_1 \ldots dt_{n-k}$$

$$\int_{\partial\Delta_{n,j_1}} m_n(dz_1) \int_{\partial\Delta_{n-1,j_2}} m_{n-1}(dz_2) \ldots \int_{\partial\Delta_{k+1,j_{n-k}}} m_{k+1}(dz_{n-k})$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu_{z_1}} g^{a,n}_{t_1}(x, z_1) \times \frac{\partial}{\partial\nu_{z_2}} g^{a,n-1}_{t_2-t_1} \left(S^n_{j_1} z_1, z_2\right) \times \ldots \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial\nu_{z_{n-k}}} g^{a,k+1}_{t_{n-k}-t_{n-k-1}} \left(S^{k+2}_{j_{n-k-1}} z_{n-k-1}, z_{n-k}\right) \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^k} dy\ g^{a,k}_{t_{n-k}} (S^{k+1}_{j_{n-k}} z_{n-k}, y) \varphi_\varepsilon(y).$$

Здійснюючи перехід до границі при $\varepsilon \to 0+$ і користуючись (4.4), отримуємо твердження теореми.

У випадку $j < k$ обчислення такі ж, але додаються два кроки. На початку доведення замість одного індикатору вигляду

$$1\!\!1 \left(y \in \mathop{\times}_{i=1}^{j} [z_i; z_i + \delta] \right)$$

для $y \in \mathbb{R}^j, (z_1, \ldots, z_j) \in \Delta_j, 0 < \delta \ll 1$, розглядається в силу (4.2)

$$\sum_{\substack{L=\{l_1,\ldots,l_j\}\subset \\ \{1,\ldots,k\}}} 1\!\!1 \left(y^L \in \mathop{\times}_{i=1}^{j} [z_i; z_i + \delta] \right) 1\!\!1 \left(y^{-L} \in \left[\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^{j} [z_i; z_i + \delta] \right]^{k-j} \right)$$

$$y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k, (z_1, \ldots, z_j) \in \Delta_j, 0 < \delta \ll 1,$$

після чого послідовність $\varphi_\varepsilon, \varepsilon \in (0; 1)$, будується окремо для кожного індикатора в сумі. Аргументи, що обгрунтовують отримання при переході до границі при $\varepsilon \to 0+$ значення точкової щільності $p^{a,n,s,j}_t(u; \cdot)$

в точці z, дослівно повторюють відповідну частину доведення Теореми 4.9.1 (див. (4.19)) й не наводяться тут. $\square$

Зауваження 4.3.1. Використовуючи Лему 4.2.2, можна отримати явний вираз для щільностей виду $p_t^{a,n,k}(u;\cdot)$.

Зауваження 4.3.2. В нашому випадку оператор диференціювання по нормалі має простий вигляд: на $\partial\Delta_{n,m}$

$$\frac{\partial}{\partial\nu_z} = \frac{1}{2^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial z_m} - \frac{\partial}{\partial z_{m+1}}\right).$$

Зауваження 4.3.3. Нескладно перевірити, що отримані представлення задають неперервні функції $p_t^{0,n,s,k}(u;\cdot)$, тому ці щільності в подальшому будемо вважати неперервними.

4.4 Збіжність точкових щільностей при апроксимації $[0;1]$ скінченними наборами точок

Основним результатом підрозділу є наступна теорема та оцінка швидкості збіжності в ній в одновимірному випадку.

Теорема 4.4.1. *Нехай задано потік Арратья X^a і послідовність $u^{(n)} = (u_1^{(n)}, \ldots, u_n^{(n)}) \in \Delta^n$ таку, що $u_1^{(n)} = 0$, $u_n^{(n)} = 1$, $n \in \mathbb{N}$, і*

$$\left\{u_1^{(n)}, \ldots, u_n^{(n)}\right\} \subset \left\{u_1^{(n+1)}, \ldots, u_{n+1}^{(n+1)}\right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

і

$$\lim_{n\to\infty} \max_{j=\overline{1,n-1}} \left(u_{j+1}^{(n)} - u_j^{(n)}\right) = 0.$$

Тоді для всіх $k \in \mathbb{N}$ м.в.

$$p_t^{a,n,k}\left(u^{(n)};\cdot\right) \nearrow p_t^{a,k}, n \to \infty.$$

Доведення. З означень точкових щільностей випливає, що м.в.

$$p_t^{a,n,k}\big(u^{(n)};\cdot\big) \le p_t^{a,n+1,k}\big(u^{(n+1)};\cdot\big) \le p_t^{a,k},\ n \in \mathbb{N}.$$

Отже, м.в. існує $q(y) = \lim_{n\to\infty} p_t^{a,n,k}(u^{(n)}; y)$. Для довільної обмеженої неперервної функції f в силу теореми Лебега про мажоровану збіжність отримуємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} q(y)f(y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^k} p_t^{a,n,k}(u^{(n)}; y)f(y)\,dy =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathrm{E} \sum_{\substack{v_1,\dots,v_k \in \mathfrak{X}_t^a(u^{(n)}) \\ v_1,\dots,v_k \text{ всі різні}}} f(v_1,\dots,v_k) 1\!\!\mathrm{I}\Big(\big|\mathfrak{X}_t^a(u^{(n)})\big| \ge k\Big) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^k} p_t^k(y)f(y)\,dy,$$

звідки випливає твердження теореми. $\square$

Наступна теорема ілюструє можливість отримання швидкості збіжності в попередньому результаті.

Теорема 4.4.2. *Нехай послідовність $\{u^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ – така ж, як в Теоремі 4.4.1. Тоді існує абсолютна стала C така, що*

$$0 \le p_t^{0,1}(y) - p_t^{0,n,1}(u^{(n)}; y) \le C \max_{j=\overline{1,n-1}} \left(u_{j+1}^{(n)} - u_j^{(n)}\right)^2$$

для всіх y.

Доведення. Покладемо $A_\varepsilon = [x; x+\varepsilon]$ для деякого фіксованого $x \in \mathbb{R}$ та будь-якого $\varepsilon \ll 1$. Розглянемо

$$0 \le \int\limits_{A_\varepsilon} \big(p_t^{0,1}(y) - p_t^{0,1}(u^{(n)}; y)\big)\,dy = \mathrm{E} \sum_{u\in\mathfrak{X}_t} 1\!\!\mathrm{I}_{A_\varepsilon}(u) - \mathrm{E} \sum_{u\in\mathfrak{X}_t(u^{(n)})} 1\!\!\mathrm{I}_{A_\varepsilon}(u) =$$

$$= \mathrm{E}\, N_\varepsilon - \mathrm{E}\, N_{\varepsilon n},$$

де $N_\varepsilon = |\mathfrak{X}_t \cap A_\varepsilon|$, $N_{\varepsilon n} = |\mathfrak{X}_t(u^{(n)}) \cap A_\varepsilon|$. При цьому в силу Означення 4.1.1 та оцінки на щільність $p_t^{0,2}$ [51, Лема 2]

$$0 < \mathrm{E}\, N_\varepsilon - \mathsf{P}(N_\varepsilon \geq 1) = \mathrm{E}\,(N_\varepsilon - 1)\,1\!\!\mathrm{I}(N_\varepsilon \geq 1) \leq \mathrm{E}\,(N_\varepsilon - 1)\, N_\varepsilon = \\ = \int_{A_\varepsilon}\int_{A_\varepsilon} dy_1\, dy_2\, p_t^{0,2}(y_1, y_2) \leq C_t \varepsilon^2.$$

Оскільки завжди $p_t^{0,2,2}(u;\cdot) \leq p_t^{0,2}$, то аналогічно отримуємо для всіх n

$$0 < \mathrm{E}\, N_{\varepsilon n} - \mathsf{P}(N_{\varepsilon n} \geq 1) \leq C_t \varepsilon^2,$$

де стала C_t не залежить від x. Як наслідок,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^{-1} \int_{A_\varepsilon} \big(p_t^{0,1}(y) - p_t^{0,1}(u^{(n)}; y)\big)\, dy = \\ = \limsup_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^{-1} \Big(\mathsf{P}\big(\mathfrak{X}_t \cap A_\varepsilon \neq \varnothing\big) - \mathsf{P}\big(\mathfrak{X}_t(u^{(n)}) \cap A_\varepsilon \neq \varnothing\big)\Big). \tag{4.6}$$

Потік X можна розглядати як реалізацію частини броунівської сітки $\{X(u,s,t) \mid u \in \mathbb{R}, 0 \leq s \leq t\}$. Для неї можна розглянути дуальну броунівську сітку $\{\widetilde{X}(u,s,t) \mid u \in \mathbb{R},\ s \leq t\}$ як континуальний набір вінерівських процесів, котрі незалежні до зіткнення, склеюються після нього, стартують з усіх точок числової осі в усі додатні моменти t та рухаються в зворотньому часі таким чином, що траєкторії частинок прямої та дуальної сітки не перетинаються м.н. [50, §2.2]. Спираючись на останній факт та позначаючи $\widetilde{X}(u,s) = \widetilde{X}(u, t-s, t), u \in \mathbb{R}, s \in [0;t]$, отримуємо

$$\mathsf{P}\big(\mathfrak{X}_t \cap A_\varepsilon \neq \varnothing\big) - \mathsf{P}\big(\mathfrak{X}_t(u^{(n)} \cap A_\varepsilon \neq \varnothing\big) = \\ = \mathsf{P}\Big(\forall j = \overline{1,n}\ \ X(u_j^{(n)}, t) \notin A_\varepsilon,\ \ \mathfrak{X}_t \cap A_\varepsilon \neq \varnothing\Big) \leq \\ \leq \mathsf{P}\Big(\widetilde{X}(x+\varepsilon, t) \neq \widetilde{X}(x,t),\ \exists\, j \in \{1, \ldots, n-1\}\colon \\ \Big(\widetilde{X}(x,t); \widetilde{X}(x+\varepsilon,t)\Big) \subset \big(u_j^{(n)}; u_{j+1}^{(n)}\big)\Big) \leq$$

$$\leq \mathrm{E}\,\mathbb{1}\left(X(x+\varepsilon,t)-X(x,t)\leq \max_{j=\overline{1,n-1}}\left(u_{j+1}^{(n)}-u_j^{(n)}\right)\right)\times$$
$$\times\,\mathbb{1}\left(S\left(\overrightarrow{X}((x,x+\varepsilon))\right)=\varnothing\right)=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^2} dy_1\,dy_2\,\mathbb{1}\left(y_2-y_1<\max_{j=\overline{1,n-1}}\left(u_{j+1}^{(n)}-u_j^{(n)}\right)\right)\times$$
$$\times\, p_t^{0,2,\varnothing,2}\big((x,x+\varepsilon);(y_1,y_2)\big) \tag{4.7}$$

оскільки X та $\widetilde{X}$ мають однаковий розподіл. Тут

$$p_t^{0,2,\varnothing,2}(a;b)=g_t^{0,2}(a;b)=\frac{1}{2\pi t}e^{-\frac{\|a-b\|^2}{2t}}\left(1-e^{-(b_2-b_1)(a_2-a_1)}\right),$$

тому існує нова стала $C>0$ така, що при $(y_1,y_2)\in\Delta_2$, $y_2-y_1\leq\delta_n$, де $\delta_n=\max_{j=\overline{1,n-1}}\left(u_{j+1}^{(n)}-u_j^{(n)}\right)$, виконується

$$p_t^{0,2,\varnothing,2}\big((x;x+\varepsilon);(y_1,y_2)\big)\leq C g_t(x-y_1)\times\varepsilon\delta_n.$$

Підставивши останню оцінку в (4.7) і повертаючись до (4.6):

$$\limsup_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon^{-1}\int_{A_\varepsilon}\left(p_t^{0,1}(y)-p_t^{0,1}\big(u^{(n)};y\big)\right)dy\leq$$
$$\leq C\int_{\mathbb{R}}dy_1\int_{y_1}^{y_1+\delta_n}dy_2\,g_t(x-y_1)\delta_n\leq$$
$$\leq C\delta_n^2$$

для нової константи C, після чого застосування теореми Лебега про диференціювання завершує доведення, оскільки щільності неперервні.

□

4.5 Броунівські мости

В даному підрозділі ми зведемо обчислення умовних математичних сподівань для виразів $\widetilde{\mathcal{E}}_{T,n}^{a}(u)$ із Теореми 4.1.3 при накладанні умови на значення випадкового вектору $(X(u_1, T), \ldots, X(u_n, T))$ до обчислення відповідно визначених стохастичних експонент для звичайних вінерівських процесів, котрі, в свою чергу, будуть переписані в термінах броунівських мостів.

Всюди в подальшому додатній час T, точка $u \in \Delta_n$ та число $n \in \mathbb{N}$ вважається фіксованими.

Використаємо наступну модифікацію використаної в Підрозділі 2.9 конструктивної схеми. Нехай $W = (w_1, \ldots, w_n)$ – стандартний вінерівський процес в $\mathbb{R}^n$, $W(0) = 0$. Покладемо $\widetilde{w}_1 = w_1, \theta_1(u) = T$ і

$$\theta_k(u) = \inf\left\{T; t \mid \widetilde{w}_{k-1}(t) + u_{k-1} = w_k(t) + u_k\right\},$$
$$\widetilde{w}_k(t) = -u_k + (u_k + w_k(t))1\!\!1(t < \theta_k(u)) + (u_{k-1} + \widetilde{w}_{k-1}(t))1\!\!1\left(t \geq \theta_k(u)\right),$$
$$k = \overline{2, n}. \tag{4.8}$$

Визначимо $\widetilde{W} = (\widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_n)$ і

$$\mathcal{E}^a_{T,n}(W, u) = \exp\Big\{\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\theta_k(u)} a(u_k + w_k(t))dw_k(t) - \\ - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\theta_k(u)} a^2(u_k + w_k(t))dt\Big\}.$$

Нескладно перевірити справедливість наступного результату.

Лема 4.5.1. *В просторі* $(\mathcal{C}([0; T]))^n$

$$(X(u_1, \cdot), \ldots, X(u_n, \cdot)) \stackrel{d}{=} u + \widetilde{W}.$$

Зокрема,

$$\widetilde{\mathcal{E}}^a_{T,n}(u) \stackrel{d}{=} \mathcal{E}^a_{T,n}(W, u).$$

Інтеграли Іто в виразі для $\mathcal{E}^a_{T,n}$ можуть бути виражені через стохастичні інтеграли по асоційованим з W броунівським мостам $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$:

$$w_k(t) = \frac{t}{T} w_k(T) + \eta_k(t),\ t \in [0;T],\ k = \overline{1,n}. \tag{4.9}$$

Загальний виклад теорії броунівських мостів можна знайти в [105, §5.6.B][88, ст. 299-300]. Наведемо короткий огляд потрібних нам фактів.

Визначимо фільтрацію

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(\eta_k(s), s \le t, k = \overline{1,n}\right), \quad t \in [0;T],$$

котра в подальшому вважається поповненою множинами нульової ймовірності та неперервною справа (після стандартної модифікації). Кожний процес η_k є єдиним сильним розв'язком СДР

$$\begin{aligned} d\eta_k(t) &= d\beta_k(t) - \frac{\eta_k(t)}{T-t} dt,\ t \in [0;T), \\ \eta_k(0) &= 0, \end{aligned} \tag{4.10}$$

де процес β_k є $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0;T]}$−вінерівським процесом, причому $\eta_k(T) = 0$. Одночасно кожний η_k представляється як

$$\eta_k(t) = (T-t) b_k\left(\tfrac{t}{T(T-t)}\right), \quad t \in [0;T), \tag{4.11}$$

де b_k – вінерівський процес, відмінний від β_k. Отже, η_k – центрований гаусівський процес з коваріацією $\mathrm{Cov}(s,t) = \frac{(T-s\vee t)s\wedge t}{T}$. Всі описані процеси незалежні при різних k.

Ми підсумовуємо необхідні властивості інтегрування по процесам $\eta_1, \ldots, \eta_n$ наступною лемою (розвинену теорію такого інтегрування можна знайти в [123], [124]).

Лема 4.5.2. *Нехай задані випадкові функції* $f_m : [0;T] \times \Omega \to \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$, *для котрих виконується наступні умови:*

1. $\exists\ C \in \mathbb{R}_+ \quad \sup_{m\in\mathbb{N}} |f_m(t,\omega)| \le C \quad \mathrm{Leb} \otimes \mathsf{P}$ *-м.в.*;

2. *справедливі представлення*

$$f_m(t) = c_{m0}1\!\!\mathrm{I}(t=0) + \sum_{j=0}^{N_m-1} c_{mj+1} 1\!\!\mathrm{I}_{(t_j^m;t_{j+1}^m]}(t).$$

де $0 = t_0^m < \ldots < t_{N_m}^m = T, m \in \mathbb{N}$, *– набір розбиттів відрізку* $[0;T]$, *а для кожної пари* $(m,k), k = \overline{0, N_m}, m \in \mathbb{N}$, *випадкова величина* c_{mk} *є вимірною відносно* $\mathcal{F}_{t_k^m}$.

Якщо існує прогресивно вимірна відносно фільтрації $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0;T]}$ *випадкова функція* $f\colon [0;T]\times\Omega \mapsto \mathbb{R}$ *з м.н. càdlàg-траєкторіями, причому на деякій множині повної ймовірності* Ω' *виконується*

$$f_m(t,\omega) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} f(t,\omega) \quad \text{для майже всіх} \quad t \in [0;T],$$

то для будь-якого $k \in \{1,\ldots,n\}$

$$\sum_{j=0}^{N_m-1} c_{mj+1}\left(\eta_k(t_{j+1}^m) - \eta_k(t_j^m)\right) \xrightarrow[m\to\infty]{\mathsf{P}} \int_0^T f(t)d\beta_k(t) - \frac{1}{2}\int_0^T f(t)\frac{\eta_k(t)}{T-t}dt,$$

де перший інтеграл в правій частині є інтегралом Іто, а другий – потраєкторним інтегралом Лебега, визначеним щонайменше на Ω'.

Доведення. В силу рівномірної обмеженості $f_m, m \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{E}\int_0^T f_m^2(t)dt < +\infty$$

і

$$\mathrm{E}\int_0^T |f_m(t)|\frac{|\eta_k(t)|}{T-t}dt \le C\int_0^T \frac{(\mathrm{E}\,\eta_k^2(t))^{1/2}}{T-t}dt \le$$
$$\le C\int_0^T \left(\frac{t}{(T-t)T}\right)^{1/2} dt < +\infty,$$

тож обидва інтеграли в правій частині висновку леми є коректно визначеними. В силу (4.10),

$$\sum_{j=0}^{N_m-1} c_{mj}\left(\eta_k(t_{j+1}^m) - \eta_k(t_j^m)\right) = \int_0^T f_m(t)d\beta_k(t) - \int_0^T f_m(t)\frac{\eta_k(t)}{T-t}dt,$$

де, згідно з теоремою про мажоровану збіжність,

$$\mathrm{E}\int_0^T \left((f_m(t)-f(t))^2 + |f_m(t)-f(t)|\frac{|\eta_k(t)|}{T-t}\right)dt \to 0,\ m\to\infty,$$

оскільки всі функції $t\mapsto \mathrm{E}(f_m(t)-f(t))^2$ та $t\mapsto \mathrm{E}\,|f_m(t)-f(t)|\frac{\eta_k(t)}{T-t}$ належать до $L_1([0;T])$ і збігаються до 0 м.в. при $m\to\infty$. Це завершує доведення. □

4.6 Деякі технічні результати щодо властивостей моментів зіткнень для η та стохастичних експонент спеціального вигляду

В силу Леми 4.5.1 обчислення умовних матсподівань для $\widetilde{\mathcal{E}}^a_{T,n}(u)$ може бути замінене обчисленням відповідних виразів для $\mathcal{E}^a_{T,n}(W,u)$ при накладанні умов на $\widetilde{W}(T)$. В даному підрозділі здійснюються додаткові побудови, що дають змогу замінити умову для $\widetilde{W}(T)$ умовою для вихідного вінерівського $W(T)$. Стохастичні інтеграли в показнику $\mathcal{E}^a_{T,n}(W,u)$ можуть бути переписані завдяки (4.9) та (4.10) через інтеграли Іто по вінерівським процесам $\beta_k, k=\overline{1,n}$. Оскільки процес η (і, відповідно, й вінерівські $\beta_k, k=\overline{1,n}$) та випадковий вектор $W(T)$ незалежні, таке умовне матсподівання обчислюється шляхом усереднення по броунівським мостам.

Для кожного $y\in\mathbb{R}^n$ визначимо випадковий процес в $\mathbb{R}^n$

$$\eta^{u,y}(t) = \eta(t) + \left(1-\frac{t}{T}\right)u + \frac{t}{T}y,\ t\in[0;T].$$

Покладемо

$$\begin{gathered}
\theta_{ij}(u) = \inf\left\{T; s \mid w_i(s) + u_i = w_j(s) + u_j\right\}, \\
\theta_{ij}(u,y) = \inf\left\{T; t \mid \eta_i^{u,y}(t) = \eta_j^{u,y}(t)\right\}, \\
j = \overline{1, i-1}, i = \overline{2, n}, y \in \mathbb{R}^n.
\end{gathered}$$

Додатково нехай $\theta_{kk}(u) = \theta_{jj}(u,y) = T,\ k, j = \overline{1,n}$. Тоді, очевидно, з ймовірністю 1

$$\theta_{ij}(u) = \theta_{ij}(u, W(T) + u),\ j = \overline{1, i-1}, i = \overline{2, n}.$$

Лема 4.6.1. *Процес $\{W(t) + u \mid t \in [0;T]\} \in \mathfrak{C}_n$ м.н.. Для кожного $y \in \mathbb{R}^n$ процес $\{\eta^{u,y}(t) \mid t \in [0;T]\} \in \mathfrak{C}_n$ м.н..*

Доведення. Згідно з означенням $\mathfrak{C}_n$ твердження леми еквівалентне наступним двом умовам: по-перше, з ймовірністю 1 всі $\theta_{ij}(u)$ такі, що $\theta_{ij}(u) < T$, різні; по-друге, для будь-якого $y \in \mathbb{R}^n$ з ймовірністю 1 всі $\theta_{ij}(u,y)$ такі, що $\theta_{ij}(u,y) < T$, різні.

Перше твердження очевидне. Щоб встановити справедливість другого, застосуємо представлення із (4.11), із якого отримуємо при $f(s) = \frac{T^2 s}{Ts+1}, f(\infty) = T, f^{-1}(t) = \frac{t}{T(T-t)}$

$$\begin{aligned}
&\theta_{ij}(u,y) = f\left(s_{ij}(y)\right), \\
&\quad s_{ij}(y) = \inf\left\{s \geq 0 \mid b_i(s) - b_j(s) + s(y_i - y_j) + \frac{u_i - u_j}{T} = 0\right\}, \\
&\qquad j = \overline{1, i-1}, i = \overline{1, n}, y \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}$$

де інфінум приймає значення ∞ у випадку відсутності зустрічі. Процес $s \mapsto b(s) + sy + \frac{u}{T}$ має лінійний дрейф, тому на будь-якому скінченному інтервалі для нього виконується умова Новікова [105, Твердження 5.12]. Отже, застосовуючи теорему Гірсанова [105, Теорема 5.1] та позначивши $r_{ij} = \inf\left\{s \geq 0 \mid b_i(s) - b_j(s) + \frac{u_i - u_j}{T} = 0\right\}, j = \overline{1, i-1}, i = \overline{1, n}$, отримуємо

$$\mathsf{P}\left(\text{ всі } \theta_{ij}(u,y),\ \text{для яких } \theta_{ij}(u,y) < T,\ \text{різні }\right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{m\to\infty} \mathsf{P}\left(\text{всі } \theta_{ij}(u,y), \text{ для яких } \theta_{ij}(u,y) < T - \frac{1}{m}, \text{ різні } \right) = \\
&= \lim_{m\to\infty} \mathsf{P}\left(\text{всі } s_{ij}(y), \text{ для яких } s_{ij}(y) < f^{-1}\left(T - \frac{1}{m}\right), \text{ різні}\right) = \\
&= \lim_{m\to\infty} \mathsf{P}\left(\text{всі } r_{ij}, \text{ для яких } r_{ij} < \frac{mT-1}{T}, \text{ різні}\right) = \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

в силу властивостей вінерівського процесу. □

З метою опису послідовностей зіткнень в процесі $W+u$ введемо наступні позначення. В силу Леми 4.6.1 існують випадкові номери $\Lambda_{ij}, i = 1,2, j = \overline{1,n}, \Lambda_{1p} \in \{1,\ldots,p\},\ \Lambda_{2p} \in \{1,\ldots,\Lambda_{1p}\}, p = \overline{1,n}$, такі, що м.н.

$$\theta_k(u)1\!\!\mathrm{I}\left(S(W+u)=s\right) = \theta_{\Lambda_{1k}\Lambda_{2k}}(u)1\!\!\mathrm{I}\left(S(W+u)=s\right), \quad k=\overline{1,n},$$

для моментів $\theta_k(u), k = \overline{1,n}$, визначених в (4.8). При цьому існують невипадкові номери $\{\lambda_{ij}(s) \mid i=1,2, j=\overline{1,n}\}$ такі, що м.н.

$$\Lambda_{ij} = \sum_{s\in\mathcal{S}_n} \lambda_{ij}(s)1\!\!\mathrm{I}\left(S(W+u)=s\right), \quad i=1,2, j=\overline{1,n}.$$

Набір $\{\lambda_{ij}(s) \mid i = 1,2, j = \overline{1,n}\}$ однозначно визначається схемою склейки s та може бути відновлений з останньої. Явний вигляд відповідних відношень нас в подальшому не цікавитиме.

Покладемо

$$
\begin{aligned}
&a_k(t,u,y,s) = 1\!\!\mathrm{I}(t \le \theta_{\lambda_{1k}(s)\lambda_{2k}(s)}(u,y)) \cdot a\left(\eta_k^{u,y}(t)\right), \\
&\qquad\qquad t\in[0;T],\ k=\overline{1,n},\ y\in\mathbb{R}^n,\ s\in\mathcal{S}_n; \\
&\mathfrak{e}^a_{T,n}(u,y,s) = \exp\left\{ \sum_{k=1}^n \int_0^T a_k(t,y,s)d\beta_k(t) + \right.
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int_0^T a_k(t,u,y,s)\left(\frac{y_k-u_k}{T}-\frac{\eta_k(t)}{T-t}-\frac{1}{2}a_k(t,u,y,s)\right)ds\Bigg\},$$

$y\in\mathbb{R}^n,\ s\in\mathcal{S}_n.$

Лема 4.6.2. *Нехай ξ – одновимірний броунівський міст із 0 в 0 на $[0;T]$. Для всіх додатніх C*

$$\mathrm{E}\exp\left\{C\int_0^T\frac{|\xi(t)|}{T-t}dt\right\}<+\infty.$$

Доведення. Як було показано в доведенні Леми 4.5.2, процес $t\mapsto\frac{\xi(t)}{T-t}$ є центрованим гаусівським випадковим елементом в просторі $L_1([0;T])$, тож висновок леми випливає із теореми Ферніка [125, Теорема 3.1]. $\square$

Тут і далі позначатимемо через $\|\ \|_\infty$ норму в $L_\infty(\mathbb{R})$.

Лема 4.6.3. *Для всіх $y\in\mathbb{R}^n,\ s\in\mathcal{S}_n$ та $p\geq 0$*

$$\mathrm{E}\left(\mathfrak{e}^a_{T,n}(u,y,s)\right)^p\leq C_1e^{C_2\|y\|},$$

де

$$C_1=\mathrm{e}^{np|2p-1|T\cdot\|a\|^2_\infty+pn^{1/2}\|u\|\cdot\|a\|_\infty}\left(\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{2p\|a\|_\infty\int_0^T\frac{|\eta_1(t)|}{T-t}dt}\right)^{n/2},$$

$$C_2=pn^{1/2}\|a\|_\infty.$$

Доведення. За нерівністю Коші

$$\left(\mathrm{E}\left(\mathfrak{e}^a_{T,n}(u,y,s)\right)^p\right)^2\leq\Bigg[\mathrm{E}\exp\Bigg\{\sum_{k=1}^{n}\int_0^T 2pa_k(t,y,s)d\beta_k(t)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^T\left(2pa_k(t,y,s)\right)^2dt\Bigg\}\Bigg]\times$$

$$\times\Bigg[\mathrm{E}\exp\Bigg\{\sum_{k=1}^{n}\int_0^T\Bigg(p(2p-1)a_k^2(t,y,s)-\frac{2pa_k(t,y,s)\eta_k(t)}{T-t}+$$

$$+\frac{2p(y_k-u_k)}{T}a_k(t,y,s)\Big)dt\Big\}\Bigg] \le$$

$$\le \exp\Big\{2C_2\|y\| + 2np|2p-1|T\cdot\|a\|_\infty^2 + 2pn^{1/2}\|u\|\cdot\|a\|_\infty\Big\}\times$$

$$\times \mathrm{E}\exp\Big\{2p\|a\|_\infty\sum_{k=1}^{n}\int_0^T\frac{|\eta_k(t)|}{T-t}dt\Big\},$$

після чого залишається скористатися Лемою 4.6.2. □

4.7 Представлення $\mathcal{E}^a_{T,n}(W,u)$ через $\mathfrak{e}^a_{T,n}$

Даний підрозділ присвячений доведенню наступної теореми.

Теорема 4.7.1. *Для всіх $y\in\mathbb{R}^n$ та $s\in\mathcal{S}_n$ м.в.*

$$\mathrm{E}\left(1\!\!\mathrm{I}(S(W+u)=s)\mathcal{E}^a_{T,n}(W,u)/W(T)=y-u\right)=$$
$$=\mathrm{E}\,1\!\!\mathrm{I}(S(\eta^{u,y})=s)\mathfrak{e}^a_{T,n}(u,y,s).$$

Доведення. Покладемо

$$a^m_{k,j}(y,s)=\int_{\frac{j-1}{m}T}^{\frac{j}{m}T}a_k(t,u,y,s)dt,\ \ k=\overline{1,n}, j=\overline{1,m-1},$$

$$a^m_k(t,y,s)=\sum_{j=1}^{m-1}1\!\!\mathrm{I}_{(\frac{j}{m}T;\frac{j+1}{m}T]}(t)a^m_{k,j}(y,s),\ \ t\in[0;T], m\in\mathbb{N}.$$

Помітимо, що на множині $\{S(W+u)=s\}$

$$a(w_k(t)+u_k)1\!\!\mathrm{I}\left(t\le\theta_k(u)\right)=a_k(t,u,W(T)+u,s),\ \ k=\overline{1,n}, t\in[0;T].$$

В силу представлення (4.9)

$$\int_0^T a^m_k(t,W(T)+u,s)dw_k(t)=\frac{w_k(T)}{T}\int_0^T a^m_k(t,W(T)+u,s)dt+$$
$$+\sum_{j=1}^{m-1}a^m_{k,j}(W(T)+u,s)\left(\eta_k\left(\tfrac{j+1}{m}T\right)-\eta_k\left(\tfrac{j}{m}T\right)\right). \quad (4.12)$$

Оскільки $W(T)$ і η незалежні, маємо в силу (4.12)

$$\mathrm{E}\left(1\!\!1(S(W+u)=s)\alpha_m(u)/W(T)=y-u\right)= \\ =\mathrm{E}\,1\!\!1(S(\eta^{u,y})=s)e_m(u,y,s), \quad (4.13)$$

де використано позначення

$$\alpha_m(u)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\int_0^T a_k^m(t,W(T)+u,s)dw_k(t)- \right. \\ \left. -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^T\left(a_k^m(t,W(T)+u,s)\right)^2 dt\right\},$$

$$e_m(y,s)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m-1}a_{k,j}^m(y,s)\left(\eta_k\left(\tfrac{j+1}{m}T\right)-\eta_k\left(\tfrac{j}{m}T\right)\right)+\right. \\ \left.+\sum_{k=1}^{n}\int_0^T a_k^m(t,y,s)\left(\frac{y_k-u_k}{T}-\frac{1}{2}a_k^m(t,y,s)\right)dt\right\}.$$

Оскільки функції $a_k, k=\overline{1,n}$ є кусково-неперервними м.н., можна перевірити, що існує подія Ω' повної ймовірності така, що $\forall\omega\in\Omega'$ для майже всіх t в $[0;T]$

$$a_k^m(t,W(T)+u,s)\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}a_k(t,u,W(T)+u,s) \text{ в } \mathbb{R}.$$

Отже, в силу Леми 4.5.2

$$\log e_m(u,y,s)\big|_{y=W(T)+u}\ \underset{m\to\infty}{\overset{\mathsf{P}}{\longrightarrow}}\log\mathfrak{e}_{T,n}^a(u,y,s)\big|_{y=W(T)+u}. \quad (4.14)$$

Крім того, легко перевірити, що

$$\log\alpha_m(u)\underset{m\to\infty}{\overset{\mathsf{P}}{\longrightarrow}}\log\mathcal{E}_{T,n}^a(W,u). \quad (4.15)$$

Повторюючи викладки в доведенні Леми 4.6.3 можна перевірити, що при заданих y,s оцінка Леми 4.6.3 справедлива для кожного $e_m(u,y,s)$, тож послідовність

$$\left\{ 1\!\!\mathrm{I}(S(\eta^{u,y}) = s) e_m(u, y, s) \Big|_{y=W(T)+u} \right\}_{m \in \mathbb{N}}$$

рівномірно інтегровна. Із обмеженості функції a легко вивести рівномірну інтегровність послідовності $\{1\!\!\mathrm{I}(S(W+u) = s)\alpha_m(u)\}_{m\in\mathbb{N}}$. Тому в силу (4.14), (4.15) та (4.13) для довільної $\Delta \in \sigma(W(T))$ маємо

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\, 1\!\!\mathrm{I}(\Delta) 1\!\!\mathrm{I}(S(W+u) = s)\mathcal{E}^a_{T,n}(W, u) = \\ &\qquad = \lim_{m\to\infty} \mathrm{E}\, 1\!\!\mathrm{I}(\Delta) 1\!\!\mathrm{I}(S(W+u) = s)\alpha_m(u) = \\ &\qquad = \lim_{m\to\infty} \mathrm{E}\, 1\!\!\mathrm{I}(\Delta) 1\!\!\mathrm{I}(S(\eta^{u,y}) = s) e_m(u, y, s)|_{y=W(T)+u} = \\ &\qquad = \mathrm{E}\, 1\!\!\mathrm{I}(\Delta) 1\!\!\mathrm{I}(S(\eta^{u,y}) = s)\mathfrak{e}^a_{T,n}(u, y, s)\Big|_{y=W(T)+u}, \end{aligned}$$

звідки випливає твердження теореми. □

4.8 Деякі властивості $\mathfrak{e}^a_{T,n}$

Мета даного підрозділу – встановити регулярність отриманих в Теоремі 4.7.1 представлень.

Лема 4.8.1. *Для всіх $k, j, k = \overline{1, j-1}, j = \overline{1, n}$,*

$$\theta_{kj}(u, y^m) \underset{m\to\infty}{\overset{\text{м.н.}}{\longrightarrow}} \theta_{kj}(u, y),$$

якщо $y_m \to y, m \to \infty$.

Доведення. Зафіксуємо u. В силу (4.11) маємо, при $f(s) = \frac{T^2 s}{Ts+1}$,

$$\begin{aligned} &\theta_{ij}(u, y) = f\left(s_{ij}(y)\right), \\ &\quad s_{ij}(y) = \inf\left\{ s \geq 0 \mid b_i(s) - b_j(s) + s(y_i - y_j) + \frac{u_i - u_j}{T} = 0 \right\}, \\ &\qquad j = \overline{1, i-1}, i = \overline{2, n}, y \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

де $f(\infty) = T$ за означенням. Оскільки $\eta^{u,y}(T) = y$, ймовірність

$$\mathsf{P}\left(\exists k \neq j \colon \eta^{u,y}_k(t) \neq \eta^{u,y}_j(t), t \in [0; T), \eta^{u,y}_k(T) = \eta^{u,y}_j(T)\right)$$

може бути відмінною від нуля лише якщо $y_j = y_k$ для деяких $k, j, k \neq j$, однак в такому випадку

$$\mathsf{P}\left(\eta_k^{u,y}(t) \neq \eta_j^{u,y}(t), t \in [0;T), \eta_k^{u,y}(T) = \eta_j^{u,y}(T)\right) = \\ = \mathsf{P}\left(\forall s \geq 0 \ b_k(s) - b_j(s) + \frac{u_k - u_j}{T} \neq 0\right) = 0.$$

Тому з ймовірністю 1 для кожної пари (k, j) виконується або $\theta_{kj}(u, y) < T$, або

$$\inf_{t \in [0;T]} \left|\eta_k^{u,y}(t) - \eta_j^{u,y}(t)\right| > 0. \tag{4.16}$$

Зафіксуємо y та з цього моменту розглядаємо лише множину повної ймовірності, на котрій виконується умова (4.16) або ж її альтернатива для кожної з координат процесу $\eta^{u,y}$.

Виберемо деяке додатне $\varepsilon \ll 1$. Припустимо, що $\theta_{kj}(u, y) < T$ (супротивний випадок тривіальний). Очевидно, існує випадкове $r > 0$ таке, що з умови $\|y - y'\| < r$ випливає, що $\theta_{k_j}(u, y') \geq \theta_{k_j}(u, y) - \varepsilon$. Момент зустрічі $\theta_{k_j}(u, y)$ є марківським відносно породженої процесом η фільтрації, тому, скориставшись представленням (4.11) та законом повторного логарифму для вінерівського процесу, легко бачити, що існують випадкові $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : 0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < \varepsilon$ такі, що

$$\eta_k\left(\theta_{k_j}(u, y) + \varepsilon_1\right) - \eta_j\left(\theta_{k_j}(u, y) + \varepsilon_1\right) + (u_k - u_j)\Big(1 - \frac{\theta_{k_j}(u, y)}{T}\Big) + \\ + (y_k - y_j)\frac{\theta_{k_j}(u, y)}{T} + +\varepsilon_1\Big(\frac{y_k - y_j}{T} + \frac{u_j - u_k}{T}\Big) > 0 \tag{4.17}$$

та

$$\eta_k\left(\theta_{k_j}(u, y) + \varepsilon_2\right) - \eta_j\left(\theta_{k_j}(u, y) + \varepsilon_2\right) + (u_k - u_j)\Big(1 - \frac{\theta_{k_j}(u, y)}{T}\Big) + \\ + (y_k - y_j)\frac{\theta_{k_j}(u, y)}{T} + +\varepsilon_2\Big(\frac{y_k - y_j}{T} + \frac{u_j - u_k}{T}\Big) < 0. \tag{4.18}$$

Отже, щоб при $\|y-y'\| \le \delta$ виконувалося $\theta_{k_j}(u,y') \le \theta_{k_j}(u,y)+\varepsilon$, достатньо вибрати випадкове δ таким чином, щоб знаки в нерівностях (4.17) та (4.18) не змінювалися при заміні в них y_k і y_j на y'_k й y'_j, відповідно, що завжди можливо зробити. □

Лема 4.8.2. *Для усіх* $y \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathcal{S}_n$

$$\mathbb{1}(S(\eta^{u,y_m}) = s) \xrightarrow[m\to\infty]{\text{м.н.}} \mathbb{1}(S(\eta^{u,y}) = s),$$

якщо $y_m \to y, m \to \infty$.

Доведення. В силу Леми 4.6.1 достатньо перевірити, що зі ймовірністю 1 порядок моментів $\theta_{ij}(u,y)$ зберігається в достатньо малому випадковому околі точки y. Останнє випливає із Леми 4.8.1. □

Лема 4.8.3. *Для будь-якої схеми склейки* $s \in \mathcal{S}_n$ *відображення* $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto \mathrm{E}\,\mathbb{1}(S(\eta^{u,y}) = s)\mathfrak{e}^a_{T,n}(u,y,s)$ *неперервне.*

Доведення. Для всіх $k \in \{1,\ldots,n\}$

$$\sup_{t\in[0;T]} |a_k(t,u,y,s) - a_k(t,u,y',s)| \le C_a|y_k - y'_k| +$$
$$+ \|a\|_\infty \left|\theta_{\lambda_{1k}(s)\lambda_{2k}(s)}(u,y) - \theta_{\lambda_{1k}(s)\lambda_{2k}(s)}(u,y')\right|,$$

де за означенням числа $\lambda_{1k}(s), \lambda_{2k}(s)$ не залежать від точки y. Тому в силу Леми 4.8.1 з ймовірністю 1

$$\sup_{t\in[0;T]} |a_k(t,u,y,s) - a_k(t,u,y',s)| \to 0,\ y' \to y,$$

звідки легко вивести, що

$$\log \mathfrak{e}^a_{T,n}(u,y',s) \xrightarrow[m\to\infty]{\mathsf{P}} \log \mathfrak{e}^a_{T,n}(u,y,s),\ y' \to y.$$

Оскільки в силу Леми 4.6.3 для довільних y та $R > 0$ сім'я випадкових величин

$$\left\{\mathbb{1}(S(\eta^{u,y'}) = s)\mathfrak{e}^a_{T,n}(u,y',s) \mid \|y'-y\| \le R\right\}$$

є рівномірно інтегровною, то застосування Леми 4.8.2 і теореми про мажоровану збіжність завершують доведення. □

4.9 Представлення точкових щільностей через гаусівські щільності і $\mathfrak{e}^a_{T,n}$

В даному підрозділі буде отримано представлення для точкових щільностей в термінах умовних матсподівань спеціальних стохастичних експонент від стандартних вінерівських процесів.

Нагадаємо, що для множини $K \subset \{1, \ldots, n\}$ і точки $z \in \mathbb{R}^n$ вектор z^{-K} отримується шляхом видалення у вектора z всіх координат з номерами із K, а вектор z^K – внаслідок видалення всіх координат окрім тих, що в K. Писатимемо $z^{K_1, \pm K_2}$ замість $(z^{K_1})^{\pm K_2}$ для спрощення позначень.

Нам знадобиться наступне означення. Нехай задані $u \in \mathbb{R}^n$ і $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Користуючись описаною в Підрозділі 1.2 та взятою в [73, ст. 433-434] схемою, поставимо у відповідність кожній схемі склейки $s = (j_1, \ldots, j_k)$ деяке розбиття множини $\{1, \ldots, n\}$ наступним чином. Розпочинаючи з розбиття із одноточкових множин, послідовно на кожному кроці $i = 1, \ldots, k$ об'єднаємо два послідовні блоки розбиття з номерами j_i та $j_i + 1$, при умові, що блоки впорядковані за зростанням їхніх мінімальних елементів. Нехай фінальне розбиття складається з блоків $\pi_1, \ldots, \pi_k$. Покладемо $I(s) = \{\min \pi_i \mid i = \overline{1, n-k}\}$. В результаті,

$$|\{X^a(u_i, T) \mid i \in I(s)\}| = n - k$$

на $\{S(\overrightarrow{X}^a(u)) = s\}$. Очевидно, схема склейки однозначно задає множину $I(s)$, причому остання не залежить від точки u та реалізації потоку X^a.

Зауваження 4.9.1. В позначеннях Підрозділу 1.2 $I(s) = S(\{\pi_1, \ldots, \pi_k\})$.

Надалі $q^m_T(u; \cdot)$ – m-вимірна гаусівська щільність з середнім u та дисперсією $T\mathrm{Id}_{m\times m}$, де $\mathrm{Id}_{p\times p}$ – квадратна одинична матриця розміром $p \times p$.

Теорема 4.9.1. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $u \in \Delta_n$ *і* $s \in \mathcal{S}_{n,n-k}$ *для деякого* $k \in \{0, \dots, n-1\}$. *Тоді для кожного* $j \in \{1, \dots, k\}$ *для всіх* $y \in \Delta_k$

$$p_T^{a,n,s,j}(u;y) = \sum_{L=\{l_1,\dots,l_j\}\subset\{1,\dots,k\}} q_T^j\big(u^{I(s),L}; z^{I(s),L}\big)\times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^{k-j}} dz^{I(s),-L} q_T^{k-j}\big(u^{I(s),-L}; z^{I(s),-L}\big) \int_{\mathbb{R}^{n-k}} dz^{-I(s)} q_T^{n-k}\big(u^{-I(s)}; z^{-I(s)}\big)$$
$$\big(\mathrm{E}\, 1\!\!\mathrm{I}(S(\eta^{u,z}) = s)\mathfrak{e}_{T,n}^a(u,z,s)\big)\Big|_{\substack{z\in\mathbb{R}^n,\\ z^{I(s),L}=y}}.$$

Доведення. Користуватимемося позначеннями Підрозділу 4.5. Нехай

$$B_\delta^+(v) = [v; v+\delta),\ v \in \mathbb{R}, \delta > 0,$$
$$\mathcal{W} = \big\{\widetilde{w}_1(T) + u_1, \dots, \widetilde{w}_n(T) + u_n\big\}.$$

В силу означення точкової щільності, теореми про диференціювання та Теореми 4.1.3 для майже всіх y

$$p_T^{a,n,s,j}(u;y) = \lim_{\delta\to 0+} \delta^{-j}\, \mathrm{E} \prod_{i=1}^{j} \big|B_\delta^+(y_i) \cap \mathfrak{X}_T^a(u)\big| \cdot 1\!\!\mathrm{I}(S(\overrightarrow{X}^a(u) = s) =$$
$$= \lim_{\delta\to 0+} \delta^{-j}\, \mathrm{E} \prod_{i=1}^{j} \big|B_\delta^+(y_i) \cap \mathcal{W}\big| \cdot \mathcal{E}_{T,n}^a(W,u) 1\!\!\mathrm{I}(S(W+u) = s),$$

оскільки в силу Леми 4.5.1 $(X(u_1,\cdot), \dots, X(u_n,\cdot)) \overset{d}{=} \widetilde{W} + u$. Модифікуючи ідею в [51, Додаток B] і поєднуючи її з Лемою 4.6.3, доведемо, що в останньому виразі можна підставити $1\!\!\mathrm{I}(|B_\delta^+(y_i) \cap \mathcal{W}| = 1)$ замість $|B_\delta^+(y_i) \cap \mathcal{W}|$ для всіх i. Позначимо $N_i = |B_\delta^+(y_i) \cap \mathcal{W}|$, $i = \overline{1,j}$. Оскільки

$$N_j - 1\!\!\mathrm{I}\,(N_j = 1) = N_j 1\!\!\mathrm{I}\,(N_j > 1) \le N_j(N_j - 1),$$

то для будь-якого δ такого, що всі попарно $B_\delta^+(y_i)$ не перетинаються,

$$D_j(\delta) \coloneqq \Bigg| \mathrm{E} \prod_{i=1}^{j} N_i \, \mathcal{E}^a_{T,n}(W,u) 1\!\!1(S(W+u)=s) -$$
$$- \mathrm{E} \prod_{i=1}^{j-1} N_i \, \mathcal{E}^a_{T,n}(W,u) 1\!\!1(S(W+u)=s) 1\!\!1\left(N_j=1\right) \Bigg| \leq$$
$$\leq \left| \mathrm{E} \prod_{i=1}^{j-1} N_i \, \mathcal{E}^a_{T,n}(W,u) 1\!\!1(S(W+u)=s) \left(N_j-1\right) N_j \right| =$$
$$= \mathrm{E} \prod_{i=1}^{j-1} N_i \, \left(N_j-1\right) N_j \, \mathrm{E} \left(\mathcal{E}^a_{T,n}(W,u) 1\!\!1(S(W+u)=s)/W(T) \right).$$

Тут використано те, що за означенням множини $I(s)$ на множині елементарних подій $\{S(W+u)=s\}$ маємо

$$\mathcal{W} = \{w_i(T)+u_i \mid i \in I(s)\},$$

тож $N_i, i = \overline{1,j}$, – вимірні відносно $\sigma(W(T))$. Застосовуючи Теорему 4.7.1, вводячи позначення

$$f(z) = \mathrm{E}\, 1\!\!1(S(\eta^{u,z})=s)\mathfrak{e}^a_{T,n}(u,z,s),$$
$$F_{s'}(v_1,\ldots,v_l) = \left(\mathrm{E}\, f(z)\right)\Big|_{\substack{z\in\mathbb{R}^n,\\ z^{I(s')}=(v_1,\ldots,v_l),\\ z^{-I(s')}\sim\mathcal{N}\left(u^{-I(s')},T\mathrm{Id}_{n-l\times n-l}\right)}},$$
$$s' \in \mathcal{S}_{n,n-l}, l=\overline{j,n},$$
$$v_i \in \mathbb{R}, i=\overline{1,n},$$

та помітивши, що $S(W+u)$ – $\sigma(\widetilde{W})-$ вимірна величина, матимемо

$$D_j(\delta) \leq \mathrm{E} \prod_{i=1}^{j-1} N_i \, \left(N_j-1\right) N_j \left(\mathrm{E}\, 1\!\!1(S(\eta^{u,y})=s)\mathfrak{e}^a_{T,n}(u,y,s)\right) \Big|_{y=W(T)+u} =$$
$$= \sum_{l=k}^{n} \sum_{s'\in\mathcal{S}_{n,n-l}} \mathrm{E} \prod_{i=1}^{j-1} N_i \, \left(N_j-1\right) N_j \, 1\!\!1\left(S(W+u)=s'\right) \times$$
$$\times \mathrm{E} \left(f(W(T)+u)/\widetilde{W}(T) \right) =$$

$$= \sum_{l=j+1}^{n} \sum_{s' \in \mathcal{S}_{n,n-l}} \mathrm{E} \prod_{i=1}^{j-1} N_i \, (N_j - 1) \, N_j \, \mathbb{1} \left(S(W+u) = s' \right) \times$$

$$\times F_{s'} \left((W(T)+u)^{I(s')} \right) =$$

$$= \sum_{l=j+1}^{n} \sum_{s' \in \mathcal{S}_{n,n-l}} \mathrm{E} \sum_{\substack{v_1,\dots,v_{j+1} \in \mathcal{W}, \\ v_1,\dots,v_{j+1} \text{ всі різні}}} \mathbb{1} \left(S(W+u) = s' \right) \times$$

$$\times F_{s'} \left((W(T)+u)^{I(s')} \right) \prod_{i=1}^{j} \mathbb{1} \left(v_i \in B_\delta^+(y_i) \right) \mathbb{1} \left(v_{j+1} \in B_\delta^+(y_j) \right) \leq$$

$$\leq \sum_{l=j+1}^{n} \sum_{s' \in \mathcal{S}_{n,n-l}} \mathrm{E} \sum_{\substack{M=\{m_1,\dots,m_{j+1}\} \subset \\ \{1,\dots,l\}}} \mathbb{1} \left(S(W+u) = s' \right) \times$$

$$\times F_{s'} \left((W(T)+u)^{I(s')} \right) \times$$

$$\times \mathbb{1} \left((W(T)+u)^{I(s'),M} \in \left(\mathop{\times}_{i=1}^{j} B_\delta^+(y_i) \right) \times B_\delta^+(y_j) \right).$$

Для фіксованих s' та M випадкові вектори $W(T)^{I(s'),M}$, $W(T)^{I(s'),-M}$ незалежні. Покладемо, при $d(s') = |I(s')| - j - 1$,

$$\widetilde{F}(v_1, \dots, v_{j+1}) =$$

$$= \sum_{l=j+1}^{n} \sum_{s' \in \mathcal{S}_{n,n-l}} \sum_{\substack{M=\{m_1,\dots,m_{j+1}\} \subset \\ \{1,\dots,l\}}} \left(\mathrm{E} \, F_{s'}(z) \right) \Big|_{\substack{z \in \mathbb{R}^{|I(s')|}, \\ z^M = (v_1,\dots,v_{j+1}), \\ z^{-M} \sim \mathcal{N}\left(u^{I(s'),-M}, T \mathrm{Id}_{d(s') \times d(s')} \right)}},$$

$$v_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}.$$

Користуючись Лемою 4.6.3, можна показати, що усі доданки в виразі для $\widetilde{F}$ локально обмежені на $\mathbb{R}^{j+1}$, тож такою є і сама $\widetilde{F}$. Тому

$$\widetilde{F}^\star = \sup_{z \in \left(\mathop{\times}_{i=1}^{j} B_\delta^+(y_i) \right) \times B_\delta^+(y_j)} \widetilde{F}(z) < \infty.$$

В результаті,

$$D_j(\delta) \le \sum_{l=j+1}^{n} \sum_{s' \in \mathcal{S}_{n,n-l}} \mathrm{E} \sum_{\substack{M=\{m_1,\dots,m_{j+1}\}\subset \\ \{1,\dots,l\}}} \widetilde{F}(W(T)+u)^{I(s'),M}) \times$$
$$\times \mathbb{1}\left((W(T)+u)^{I(s'),M} \in \left(\mathop{\times}_{i=1}^{j} B_\delta^+(y_i) \right) \times B_\delta^+(y_j) \right) \le$$
$$\le \widetilde{F}^\star \sum_{l=j+1}^{n} \sum_{s' \in \mathcal{S}_{n,n-l}} \sum_{\substack{M=\{m_1,\dots,m_{j+1}\}\subset \\ \{1,\dots,l\}}}$$
$$\mathsf{P}\left(\mathcal{N}\left(u^{I(s'),M}, T\mathrm{Id}_{(j+1)\times(j+1)} \right) \in \left(\mathop{\times}_{i=1}^{j} B_\delta^+(y_i) \right) \times B_\delta^+(y_j) \right)$$
$$\le C\delta^{j+1},$$

де стала C залежить виключно від T, u, s, n, j та y. Повторивши дану викладку ще $j-1$ раз, отримаємо потрібний висновок.

Отже, можна вважати, що

$$\begin{aligned} p_T^{a,n,s,j}(u;y) &= \\ &= \lim_{\delta\to 0+} \delta^{-j}\, \mathrm{E}\, \mathcal{E}_{T,n}^a(W,u) \mathbb{1}(S(W+u)=s) \times \\ &\times \prod_{i=1}^{j} \mathbb{1}\left(\left| B_\delta^+(y_i) \cap \mathcal{W} \right| = 1 \right) = \\ &= \lim_{\delta\to 0+} \delta^{-j} \sum_{\substack{L=\{l_1,\dots,l_j\}\subset \\ \{1,\dots,k\}}} \mathrm{E}\, A_{\delta,L}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

де

$$\begin{aligned} A_{\delta,L} = \mathcal{E}_{T,n}^a(W,u) &\mathbb{1}(S(W+u)=s) \times \\ &\times \mathbb{1}\left((W(T)+u)^{I(s),L} \in \mathop{\times}_{i=1}^{j} B_\delta^+(y_i) \right) \times \\ &\times \mathbb{1}\left((W(T)+u)^{I(s),-L} \in \left[\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^{j} B_\delta^+(y_i) \right]^{k-j} \right), \end{aligned}$$

з очевидною домовленістю при $k = j$. Знову застосовуючи Теорему 4.7.1, маємо

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\, A_{\delta,L} &= \mathrm{E}\,\mathrm{E}\,(A_{\delta,L}/W(T)) = \\
&= \mathrm{E}\,\mathbb{1}\left((W(T)+u)^{I(s),L} \in \mathop{\times}_{i=1}^{j} B^{+}_{\delta}(y_i)\right) \times \\
&\quad \times \mathbb{1}\left((W(T)+u)^{I(s),-L} \in \left[\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^{j} B^{+}_{\delta}(y_i)\right]^{k-j}\right) \times \\
&\quad \times \left(\mathrm{E}\,\mathbb{1}(S(\eta^{u,z}) = s)\mathfrak{e}^{a}_{T,n}(u,z,s)\right)\Big|_{z=W(T)+u} = \\
&= \mathrm{E}\,\mathbb{1}\left(z^{I(s),L} \in \mathop{\times}_{i=1}^{j} B^{+}_{\delta}(y_i)\right) \times \\
&\quad \times \mathbb{1}\left(z^{I(s),-L} \in \left[\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^{j} B^{+}_{\delta}(y_i)\right]^{k-j}\right) \times \\
&\quad \times \left(\mathrm{E}\,\mathbb{1}(S(\eta^{u,z}) = s)\mathfrak{e}^{a}_{T,n}(u,z,s)\right)\Bigg|_{\substack{z\in\mathbb{R}^n,\\ z^{I(s),L}=\alpha,\\ z^{I(s),-L}=\beta,\\ z^{-I(s)}=\gamma,}}
\end{aligned}
$$

де гаусівські випадкові величини

$$
\begin{aligned}
&\alpha \sim \mathcal{N}(u^{I(s),L}, T\mathrm{Id}_{j\times j}),\\
&\beta \sim \mathcal{N}(u^{I(s),-L}, T\mathrm{Id}_{(k-j)\times(k-j)}),\\
&\gamma \sim \mathcal{N}(u^{-I(s)}, T\mathrm{Id}_{(n-k)\times(n-k)})
\end{aligned}
$$

є сумісно незалежними. Залишається застосувати теорему Лебега про диференціювання та Лему 4.8.3 і повернутися до (4.19). Ми не наводимо деталі. □

Зауваження 4.9.2. В силу Леми 4.2.2, Теорема 4.9.1 дає також явні вирази для щільностей вигляду $p^{a,n,k}_{T}(u;\cdot)$.

4.10 Представлення точкових щільностей через $\widetilde{\mathcal{E}}^{a}_{T}$

В даному підрозділі ми застосовуємо теорему Гірсанова 4.1.3 для потоків Арратья для отримання представлення точкових щільностей.

Введемо додаткові позначення. Припустимо, що елементи випадкової множини $\mathfrak{X}_T(u)$ впорядковані за зростанням. Для довільного набору $L = \{l_1, \ldots, l_k\}, l_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1,k}, k \in \mathbb{N}$, покладемо

$$\mathcal{X}_T^L(u) = \begin{cases} \big((\mathfrak{X}_T(u))_{l_1,\ldots,}(\mathfrak{X}_T(u))_{l_k}\big), & \text{якщо} \max_{i=\overline{1,k}} l_i \le |\mathfrak{X}_T(u)|\,, \\ \varkappa, & \text{інакше}, \end{cases}$$

де $\varkappa$ – виділений стан ("кладовище"), який не належить $\mathbb{R}^k$. Через $\rho_T^L(u;\cdot)$ позначимо субімовірнісну щільність абсолютно неперервної відносно міри Лебега компоненти розподілу цього випадкового вектора $\mathcal{X}_T^L(u)$. Аналогічно можемо ввести, розглядаючи множину $\mathfrak{X}_T$,

$$\mathcal{X}_T^L = \begin{cases} \big((\mathfrak{X}_T)_{l_1}, \ldots, (\mathfrak{X}_T)_{l_k}\big), & \text{якщо} \max_{i=\overline{1,k}} l_i \le |\mathfrak{X}_T|\,, \\ \varkappa, & \text{інакше}, \end{cases}$$

та відповідну субімовірнісну щільність $\rho_T^L(\cdot)$.

Теорема 4.10.1. *Для довільних $n \in \mathbb{N}$, $u \in \Delta_n$ та $k \in \{1, \ldots, n\}$ м.в.*

$$p_T^{a,n,k}(u;y) = \sum_{\substack{L=\{l_1,\ldots,l_k\},\\ l_i\in\mathbb{N},\ i=\overline{1,k}}} \rho_T^L(u;y)\,\mathrm{E}\left(\widetilde{\mathcal{E}}_{T,n}^a(u)/\mathcal{X}_T^L(u)=y\right).$$

Доведення. Так само, як в доведенні Теореми 4.9.1, можна, поєднуючи аргументи [51, Додаток B] з Лемою 4.8.3 та використовуючи локальність умовного математичного сподівання [87, Лема 6.2], показати, що м.в. виконується наступний аналог (4.19):

$$p_T^{a,n,k}(u;y) = \lim_{\delta\to 0+} \delta^{-k} \sum_{\substack{L=\{l_1,\ldots,l_k\},\\ l_i\in\mathbb{N},\ i=\overline{1,k}}} \mathrm{E}\,\widetilde{\mathcal{E}}_{T,n}^a(u) 1\!\!1\left(\mathcal{X}_T^L(u)\ne\varkappa\right)\times$$

$$\times 1\!\!1\left(\mathcal{X}_T^L(u) \in \mathop{\times}_{i=1}^{k} B_\delta^+(y_i)\right) =$$

$$= \lim_{\delta\to 0+} \delta^{-k} \sum_{\substack{L=\{l_1,\ldots,l_k\},\\ l_i\in\mathbb{N},\ i=\overline{1,k}}} \mathrm{E}\,1\!\!1\left(\mathcal{X}_T^L(u)\ne\varkappa\right)\times$$

$$\times \mathbb{1}\left(\mathcal{X}_T^L(u) \in \mathop{\times}_{i=1}^{k} B_\delta^+(y_i)\right) \mathrm{E}\left(\widetilde{\mathcal{E}}_{T,n}^a(u)/\mathcal{X}_T^L(u)\right). \quad (4.20)$$

Застосування теореми Лебега при диференціювання завершує доведення. Ми не наводимо деталі. □

Для отримання аналога попереднього результату для точкової щільності $p^{a,n}$, нам знадобиться наступний технічний результат.

Лема 4.10.1. *Нехай* $u^{(n)} = (u_1, \ldots, u_n), n \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$\mathrm{E}\left(\widetilde{\mathcal{E}}_{T,m}^a\left(u^{(m)}\right)/\overrightarrow{X}(u^{(n)}, \cdot)\right) = \widetilde{\mathcal{E}}_{T,n}^a\left(u^{(n)}\right), \ m \geq n,$$

$$\mathrm{E}\left(\widetilde{\mathcal{E}}_T^a/\overrightarrow{X}(u^{(n)}, \cdot)\right) = \widetilde{\mathcal{E}}_{T,n}^a\left(u^{(n)}\right).$$

Доведення. Покладемо $\mathcal{G}_n = \sigma(\overrightarrow{X}(u^{(n)}, \cdot))$. Спочатку покажемо, що

$$\mathrm{E}\left(\widetilde{\mathcal{E}}_{T,m}^a\left(u^{(m)}\right)/\mathcal{G}_n\right) = \widetilde{\mathcal{E}}_{T,n}^a\left(u^{(n)}\right), m \geq n. \quad (4.21)$$

Припустимо, що номери n і $m > n$ фіксовані. Якщо

$$e_k(t) = \exp\left\{\int_0^t a(X(u_k, s))dX(u_k, s) - \frac{1}{2}\int_0^t a^2(X(u_k, s))ds\right\},$$
$$t \in [0; T], k \in \mathbb{N},$$

то можна перевірити, застосовуючи формулу Іто, що для $k \in \mathbb{N}$

$$e_k(\tau_k) = 1 + \int_0^{\tau_k} e_k(t)a(X(u_k, t))dX(u_k, t),$$

оскільки кожен момент τ_k є моментом зупинки відносно породженої процесами $X(u_j, \cdot)$, $j \in \mathbb{N}$, фільтрації. Тому

$$\mathrm{E}\left(\widetilde{\mathcal{E}}_{T,m}^a\left(u^{(m)}\right)/\mathcal{G}_n\right) = \widetilde{\mathcal{E}}_{T,n}^a\left(u^{(n)}\right)\mathrm{E}\left(\prod_{j=n+1}^m e_j/\mathcal{G}_n\right) =$$

$$= \widetilde{\mathcal{E}}_{T,n}^a\left(u^{(n)}\right)\left(1 + \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{m-n}\sum_{j_1<\ldots<j_k} A_{j_1\ldots j_k}/\mathcal{G}_n\right)\right),$$

де використано позначення

$$A_{j_1\dots j_k} = \prod_{l=1}^{k} \int_0^{\tau_{j_l}} a(X(u_{j_l}, t)) e_{j_l}(t) dX(u_{j_l}, t).$$

Переписуючи внутрішні стохастичні інтеграли в виразі для $A_{j_1\dots j_k}$ як

$$\int_0^T a_{j_l}(t) dX(u_{j_l}, t), \quad l = \overline{1, k},$$

для прогресивно вимірних відносно породженої процесами $X(u_j, \cdot)$, $j \in \mathbb{N}$, фільтрації процесів наступного вигляду:

$$a_{j_l}(t) = 1\!\!\mathrm{I}(t \le \tau_{j_l}) a(X(u_{j_l}, t)) e_{j_l}(t),$$

ми можемо застосувати таку ж апроксимацію, як в доведенні Теореми 4.7.1, і встановити стандартним чином, спираючись на незалежність будь-яких $X(u_i)$ та $X(u_j)$ до моменту зустрічі, що

$$\mathrm{E}\,(A_{j_1\dots j_k} / \mathcal{G}_n) = 0.$$

Знайдемо тепер $\mathrm{E}(\widetilde{\mathcal{E}}^a_T / \mathcal{G}_n)$. Послідовність випадкових величин $\{\widetilde{\mathcal{E}}^a_{T,m}\left(u^{(m)}\right)\}_{m\in\mathbb{N}}$ рівномірно інтегровна ([11, Доведення теореми 7.3.1, ст. 268–270]), тому для довільної події $A \in \mathcal{G}_n$ в силу (4.21)

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,1\!\!\mathrm{I}(A)\,\mathrm{E}\left(\widetilde{\mathcal{E}}^a_T / \mathcal{G}_n\right) = \mathrm{E}\,1\!\!\mathrm{I}(A) \widetilde{\mathcal{E}}^a_T = \lim_{m\to\infty} \mathrm{E}\,1\!\!\mathrm{I}(A)\,\mathrm{E}\left(\widetilde{\mathcal{E}}^a_{T,m}(u^{(m)}) / \mathcal{G}_n\right) = \\ = \mathrm{E}\,1\!\!\mathrm{I}(A) \widetilde{\mathcal{E}}^a_{T,n}(u^{(n)}),\end{aligned}$$

звідки випливає, що $\mathrm{E}(\widetilde{\mathcal{E}}^a_T / \mathcal{G}_n) = \widetilde{\mathcal{E}}^a_{T,n}(u^{(n)})$. $\square$

Теорема 4.10.2. *Для довільних* $k \in \mathbb{N}$ *та* $u \in \Delta_n$ *м.в.*

$$p^{a,k}_T(y) = \sum_{\substack{L=\{l_1,\dots,l_k\},\\ l_i\in\mathbb{N},\ i=\overline{1,k}}} \rho^L_T(y)\,\mathrm{E}\left(\widetilde{\mathcal{E}}^a_T / \mathcal{X}^L_T = y\right).$$

Доведення. Доведення повторює доведення Теореми 4.10.1, з додатковим застосування Леми 4.10.1 для отримання потрібного аналога першої рівності в (4.20). $\square$

4.11 Висновки

- Для потоків Арратья введено поняття точкових щільностей, котрі відповідають скінченному числу точок старту та конкретній послідовності моментів склейки.

- Встановлено таких точкових щільностей до точкових щільностей для всього потоку. Отримано оцінку на швидкість збіжності одновимірних щільностей в рівномірній метриці.

- Встановлено представлення точкових щільностей в термінах розв'язків параболічних початково-краєвих задач.

- Отримано представлення точкових щільностей в термінах гаусівських щільностей та математичних сподівань деяких стохастичних експонент від броунівських мостів. Встановлено регулярність згаданих математичних сподівань.

- Отримано представлення точкових щільностей в термінах умовних математичних сподівань стохастичних експонент для потоку Арратья та щільностей розподілів векторів уцілілих частинок.

Висновки

Основними результатами, отриманими в роботі, є наступні:

- Встановлено закон повторного логарифму для розмірів кластерів, утворених в потоці Арратья частинками, що зіткнулися з частинкою зі стартом в нулі. Для потоку Арратья з дрейфом встановлено асимптотику при $t \to 0+$ математичних очікувань таких кластерів.

- Доведено слабку збіжність апроксимуючих процесів, побудованих методом дробових кроків, до $n-$точкового руху потоку Арратья із дрейфом. Отримано оцінки на швидкість збіжності розподілів образів міри Лебега під дієї вказаних вище апроксимуючих потоків до розподілу міри Лебега під дією потоку Арратья з дрейфом. Встановлена неможливість отримання більш сильної, ніж слабка, збіжності в запропонованій схемі.

- Встановлено слабку збіжність зліченних наборів рухів в гладких стохастичних потоках до відповідних зліченних наборів рухів в потоці Харріса з інфінітезимальною коваріацію, заданою характеристичною функцією центрованого стійкого закону, при умові, що інфінітезимальні коваріації гладких потоків збігаються до коваріації граничного потоку рівномірно на компактах. Встановлено збіжність скінченних наборів породжених потоками перетворень числової осі в слабкій-* топології.

- Для потоків Арратья введено поняття точкових щільностей, котрі відповідають скінченному числу точок старту та конкретній послідовності моментів склейки. Встановлено збіжність таких точкових щільностей до точкових щільностей для всього потоку.

- Отримано наступні представлення точкових щільностей: в термінах розв'язків параболічних початково-краєвих задач; в термінах гаусівських щільностей та математичних сподівань деяких стохастичних експонент від броунівських мостів; в термінах умовних математичних сподівань стохастичних експонент для потоку Арратья та щільностей розподілів векторів уцілілих частинок.

Список використаних джерел

[1] R. A. Arratia, “Coalescing Brownian motions on the line”, PhD thesis, The University of Wisconsin - Madison, Ann Arbor, MI, 1979, p. 134.

[2] A. S. Monin and A. M. Yaglom, “On the laws of small-scale turbulent flow of liquids and gases”, *Russian Mathematical Surveys*, vol. 18, no. 5, pp. 89–109, 1963.

[3] C. L. Zirbel and W. A. Woyczyński, “Rotation of particles in polarized Brownian flows”, *Stoch. Dyn.*, vol. 2, no. 1, pp. 109–129, 2002.

[4] Y. Le Jan and S. Watanabe, “Stochastic flows of diffeomorphisms”, *Stochastic analysis (Katata/Kyoto, 1982)*, ser. North-Holland Math. Library, vol. 32, Amsterdam: North-Holland, 1984, pp. 307–332.

[5] J. Norris and A. Turner, “Hastings-Levitov aggregation in the small-particle limit”, *Commun. Math. Phys.*, vol. 316, no. 3, pp. 809–841, 2012.

[6] R. Roy, K. Saha, and A. Sarkar, “Random directed forest and the Brownian web”, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat.*, vol. 52, no. 3, pp. 1106–1143, 2016.

[7] C. F. Coletti, L. R. G. Fontes, and E. S. Dias, “Scaling limit for a drainage network model”, *J. Appl. Probab.*, vol. 46, no. 4, pp. 1184–1197, 2009.

[8] M. Birkner and N. Gantert, “Ancestral lineages in spatial population models with local regulation”, *DFG SPP Priority Programme 1590*, ser. Probabilistic Structures in Evolution, 2019.

[9] B. Tóth and W. Werner, “The true self-repelling motion”, *Probab. Theory Related Fields*, vol. 111, no. 3, pp. 375–452, 1998.

[10] T. E. Harris, “Coalescing and noncoalescing stochastic flows in $\mathbf{R}^1$”, *Stochastic Process. Appl.*, vol. 17, no. 2, pp. 187–210, 1984.

[11] А.А.Дороговцев, *Мерозначные процесы и стохастические потоки.* Киев: Институт математики НАН Украины, 2007, p. 290.

[12] A. A. Dorogovtsev, “Some remarks on a Wiener flow with coalescence”, *Ukr. Math. J.*, vol. 57, no. 10, pp. 1550–1558, 2005.

[13] R. W. R. Darling, “Rate of growth of the coalescent set in a coalescing stochastic flow”, *Stochastics*, vol. 23, no. 4, pp. 465–508, 1988.

[14] A. Shamov, “Short-time asymptotics of one-dimensional Harris flows”, *Commun. Stoch. Anal.*, vol. 5, no. 3, pp. 527–539, 2011.

[15] J. Warren and S. Watanabe, “On spectra of noises associated with Harris flows”, *Stochastic analysis and related topics in Kyoto*, ser. Adv. Stud. Pure Math. Vol. 41, Tokyo: Math. Soc., 2004, pp. 351–373.

[16] B. Tsirelson, “Scaling limit, noise, stability”, *Lectures on probability theory and statistics*, ser. Lecture Notes in Math. Vol. 1840, Berlin: Springer, 2004, pp. 1–106.

[17] R. W. R. Darling, *Constructing nonhomeomorphic stochastic flows.* Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 1987, vol. 376, p. 97.

[18] L. R. G. Fontes, M. Isopi, C. M. Newman, and K. Ravishankar, "The Brownian web: Characterization and convergence", *Ann. Probab.*, vol. 32, no. 4, pp. 2857–2883, 2004.

[19] G. V. Riabov, "Random dynamical systems generated by coalescing stochastic flows on $\mathbb{R}$", *Stoch. Dyn.*, vol. 18, no. 4, p. 24, 2018.

[20] L. Arnold, *Random dynamical systems*, ser. Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1998, pp. xvi+586.

[21] A. A. Dorogovtsev, G. V. Riabov, and B. Schmalfuß, "Stationary points in coalescing stochastic flows on $\mathbb{R}$", *Stochastic Processes Appl.*, vol. 130, no. 8, pp. 4910–4926, 2020.

[22] H. F. Trotter, "On the product of semi-groups of operators", *Proc. Am. Math. Soc.*, vol. 10, pp. 545–551, 1959.

[23] P. R. Chernoff, "Note on product formulas for operator semigroups", *J. Funct. Anal.*, vol. 2, pp. 238–242, 1968.

[24] G. I. Marchuk, *Methods of numerical mathematics*, 2nd ed., ser. Applications of Mathematics. New York-Berlin: Springer-Verlag, 1982, vol. 2, pp. xiii+510.

[25] A. Bensoussan, R. Glowinski, and A. Rasçanu, "Approximation of some stochastic differential equations by the splitting up method", *Appl. Math. and Optim.*, vol. 25, pp. 81–106, 1992.

[26] N. Y. Goncharuk and P. Kotelenez, "Fractional step method for stochastic evolution equations", *Stochastic Processes and their Applications*, vol. 73, no. 1, pp. 1–45, 1998.

[27] I. Gyöngy and N. Krylov, "On the splitting-up method and stochastic partial differential equations", *Ann. Probab.*, vol. 31, no. 2, pp. 564–591, 2003.

[28] E. Faou, “Analysis of splitting methods for reaction-diffusion problems using stochastic calculus”, *Math. Comput.*, vol. 78, no. 267, pp. 1467–1483, 2009.

[29] A. A. Dorogovtsev and V. V. Fomichov, “The rate of weak convergence of the n-point motions of Harris flows”, *Dynam. Systems Appl.*, vol. 25, no. 3, pp. 377–392, 2016.

[30] I. I. Nishchenko, “Discrete time approximation of coalescing stochastic flows on the real line”, *Theory Stoch. Process.*, vol. 17, no. 1, pp. 70–78, 2011.

[31] E. V. Glinyanaya, “Disordering asymptotics in the discrete approximation of an Arratia flow”, *Theory Stoch. Process.*, vol. 18, no. 2, pp. 8–14, 2012.

[32] A. A. Dorogovtsev, “One Brownian stochastic flow”, *Theory Stoch. Process.*, vol. 10, no. 3-4, pp. 21–25, 2004.

[33] T. V. Malovichko, “Convergence of solution of stochastic differential equations to the Arratia flow”, *Ukrain. Mat. Zh.*, vol. 60, no. 11, pp. 1529–1538, 2008.

[34] V. V. Fomichov, “A note on weak convergence of the n-point motions of Harris flows”, *Theory Stoch. Process.*, vol. 21, no. 2, pp. 4–13, 2016.

[35] H. Kunita, *Stochastic flows and stochastic differential equations*, ser. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 1990, vol. 24, pp. xiv+346.

[36] C. L. Zirbel and E. Çinlar, “Mass transport by Brownian flows”, *Stochastic models in geosystems. Based on a workshop, held during the week of May 16, 1994 at IMA, Minneapolis, MN, USA*, Berlin: Springer, 1997, pp. 459–492.

[37] C. L. Zirbel, “Translation and dispersion of mass by isotropic Brownian flows”, *Stochastic Processes Appl.*, vol. 70, no. 1, pp. 1–29, 1997.

[38] P. Baxendale and T. E. Harris, “Isotropic stochastic flows”, *Ann. Probab.*, vol. 14, no. 4, pp. 1155–1179, 1986.

[39] V. V. Fomichev, “Level-crossing intensity for the density of the image of the Lebesgue measure under the action of Brownian stochastic flow”, *Ukr. Math. J.*, vol. 69, no. 6, pp. 933–954, 2017.

[40] A. A. Dorogovtsev, I. A. Korenovska, and E. V. Glinyanaya, “On some random integral operators generated by an Arratia flow”, *Theory Stoch. Process.*, vol. 22, no. 2, pp. 8–18, 2017.

[41] A. A. Dorogovtsev and I. A. Korenovska, “Essential sets for random operations constructed from an Arratia flow”, *Commun. Stoch. Anal.*, vol. 11, no. 3, pp. 301–312, 2017.

[42] Y. A. Korenovskaya, “Properties of strong random operators constructed with respect to an Arratia flow”, *Ukr. Math. J.*, vol. 69, no. 2, pp. 186–204, 2017.

[43] T. O. Masser and D. ben-Avraham, “Correlation functions for diffusion-limited annihilation, $a{+}a{\to}0$”, *Phys. Rev. E*, vol. 64, no. 6, p. 062 101, 2001.

[44] C. R. Doering and D. ben-Avraham, “Interparticle distribution functions and rate equations for diffusion-limited reactions”, *Phys. Rev. A*, vol. 38, no. 6, pp. 3035–3042, 1988.

[45] T. O. Masser and D. ben-Avraham, “Method of intervals for the study of diffusion-limited annihilation, $a + a{\to}0$”, *Phys. Rev. E*, vol. 63, no. 6, p. 066 108, 2001.

[46] M. L. Mehta, *Random matrices*, 2nd ed. Boston, MA: Academic Press, Inc., 1991, pp. xviii+562.

[47] C. A. Tracy and H. Widom, "Correlation functions, cluster functions, and spacing distributions for random matrices", *J. Statist. Phys.*, vol. 92, no. 5-6, pp. 809–835, 1998.

[48] K. Johansson, "Universality of the local spacing distribution in certain ensembles of Hermitian Wigner matrices", *Comm. Math. Phys.*, vol. 215, no. 3, pp. 683–705, 2001.

[49] C. Itzykson and J. B. Zuber, "The planar approximation. II", *J. Math. Phys.*, vol. 21, no. 3, pp. 411–421, 1980.

[50] R. Tribe and O. V. Zaboronski, "Pfaffian formulae for one dimensional coalescing and annihilating systems", *Electron. J. Probab.*, vol. 16, no. 76, pp. 2080–2103, 2011.

[51] R. Munasinghe, R. Rajesh, R. Tribe, and O. Zaboronski, "Multi-scaling of the n-point density function for coalescing Brownian motions", *Comm. Math. Phys.*, vol. 268, no. 3, pp. 717–725, 2006.

[52] R. Tribe, S. K. Yip, and O. Zaboronski, "One dimensional annihilating and coalescing particle systems as extended Pfaffian point processes", *Electron. Commun. Probab.*, vol. 17, no. 40, 7, 2012.

[53] B. Garrod, M. Poplavskyi, R. Tribe, and O. V. Zaboronski, "Examples of interacting particle systems on Z as Pfaffian point processes : Annihilating and coalescing random walks", *Annales Henri Poincare*, vol. 19, no. 12, pp. 3635–3662, 2018.

[54] J. Lukins, R. Tribe, and O. V. Zaboronski, "Multi-point correlations for two dimensional coalescing random walks", *Journal of Applied Probability*, vol. 55, no. 4, pp. 1158–1185, 2018.

[55] V. Fomichov, "The distribution of the number of clusters in the Arratia flow", *Commun. Stoch. Anal.*, vol. 10, no. 3, pp. 257–270, 2016.

[56] E. V. Glinyanaya and V. V. Fomichov, “Limit theorems for the number of clusters of the Arratia flow”, *Theory Stoch. Process.*, vol. 23, no. 2, pp. 33–40, 2018.

[57] J. Warren, “Dyson’s Brownian motions, intertwining and interlacing”, *Electron. J. Probab.*, vol. 12, pp. 573–590, 2007.

[58] T. Assiotis, N. O’Connell, and J. Warren, *Interlacing diffusions*, 2019. arXiv: `1607.07182 [math.PR]`.

[59] V. V. Konarovskii, “On an infinite system of diffusing particles with coalescing”, *Teor. Veroyatn. Primen.*, vol. 55, no. 1, pp. 157–167, 2010.

[60] V. Konarovskyi, “A system of coalescing heavy diffusion particles on the real line”, *Ann. Probab.*, vol. 45, no. 5, pp. 3293–3335, 2017.

[61] V. Konarovskyi, “On asymptotic behavior of the modified Arratia flow”, *Electron. J. Probab.*, vol. 22, Paper No. 19, 31 pp. 2017.

[62] V. Konarovskyi and V. Marx, *Conditional distribution of independent brownian motions to event of coalescing paths*, 2020. arXiv: `2008.02568 [math.PR]`.

[63] V. Konarovskyi, T. Lehmann, and M. Von Renesse, “On Dean-Kawasaki dynamics with smooth drift potential”, *J. Stat. Phys.*, vol. 178, no. 3, pp. 666–681, 2020.

[64] V. Konarovskyi and M.-K. von Renesse, “Modified massive Arratia flow and Wasserstein diffusion”, *Commun. Pure Appl. Math.*, vol. 72, no. 4, pp. 764–800, 2019.

[65] V. A. Kuznetsov, “The variance of the number of windings of the random field along the planar curve”, *Theory Stoch. Process.*, vol. 18, no. 2, pp. 33–53, 2012.

[66] V. A. Kuznetsov, “Mutual winding angles of particles in Brownian stochastic flows with a top Lyapunov exponent equal to zero”, *Ukraïn. Mat. Zh.*, vol. 68, no. 9, pp. 1197–1228, 2016.

[67] V. A. Kuznetsov, “Limiting distribution of the mutual winding angles of particles in a Brownian stochastic flow with a top Lyapunov exponent equal to zero”, *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki*, no. 9, pp. 14–22, 2016.

[68] M. P. Karlikova, “The martingale problem for stochastic differential equations with interaction”, *Theory Stoch. Process.*, vol. 11, no. 1-2, pp. 69–73, 2005.

[69] M. P. Lagunova, “Stochastic differential equations with interaction and the law of iterated logarithm”, *Theory Stoch. Process.*, vol. 18, no. 2, pp. 54–58, 2012.

[70] P. P. Chernega, “Local time at zero for Arratia flow”, *Ukrain. Math. J.*, vol. 64, no. 4, pp. 616–633, 2012.

[71] A. A. Dorogovtsev and O. V. Ostapenko, “Large deviations for flows of interacting Brownian motions”, *Stoch. Dyn.*, vol. 10, no. 3, pp. 315–339, 2010.

[72] A. A. Dorogovtsev, “One version of the Clark representation theorem for Arratia flows”, *Theory Stoch. Process.*, vol. 11, no. 3-4, pp. 63–70, 2005.

[73] A. A. Dorogovtsev, “Krylov-Veretennikov expansion for coalescing stochastic flows”, *Commun. Stoch. Anal.*, vol. 6, no. 3, pp. 421–435, 2012.

[74] А. А. Дороговцев, “Преобразование Фурье-Винера функционалов от потока Арратья”, *Укр. мат. вісн.*, т. 4, № 3, с. 333—354, 2007.

[75] G. V. Riabov, "Itô-Wiener expansion for functionals of the Arratia's flow n-point motion", *Theory Stoch. Process.*, vol. 19, no. 2, pp. 64–89, 2014.

[76] E. V. Glinyanaya, "Krylov-Veretennikov representation for the m-point motion of a discrete-time flow", *Theory Stoch. Process.*, vol. 20, no. 1, pp. 63–77, 2015.

[77] E. V. Glinyanaya, "Semigroups of m-point motions of the Arratia flow, and binary forests", *Theory Stoch. Process.*, vol. 19, no. 2, pp. 31–41, 2014.

[78] A. Y. Pilipenko, "The Stroock-Varadhan theorem for flows generated by stochastic differential equations with interaction", *Ukraïn. Mat. Zh.*, vol. 54, no. 2, pp. 227–236, 2002.

[79] A. Pilipenko, "Differentiability of stochastic reflecting flow with respect to starting point", *Commun. Stoch. Anal.*, vol. 7, no. 1, pp. 17–37, 2013.

[80] A. Y. Pilipenko, "Flows generated by stochastic equations with reflection", *Random Oper. Stochastic Equations*, vol. 12, no. 4, pp. 385–392, 2004.

[81] A. Y. Pilipenko, "Properties of flows generated by stochastic equations with reflection", *Ukraïn. Mat. Zh.*, vol. 57, no. 8, pp. 1069–1078, 2005.

[82] A. Y. Pilipenko, "On the generalized differentiability with initial data of a flow generated by a stochastic equation with reflection", *Teor. Īmovīr. Mat. Stat.*, no. 75, pp. 127–139, 2006.

[83] A. Pilipenko, "On properties of Brownian reflecting flow in a wedge", *Theory Stoch. Process.*, vol. 17, no. 1, pp. 79–89, 2011.

[84] M. V. Tantsiura, "On the generalization of the McKean-Vlasov equation to the case where the total mass of particles is infinite", *Theory Stoch. Process.*, vol. 18, no. 1, pp. 119–127, 2012.

[85] A. A. Dorogovtsev, "Entropy of stochastic flows", *Sb. Math.*, vol. 201, no. 5, pp. 645–653, 2010.

[86] A. A. Dorogovtsev, "Semigroups of finite-dimensional random projections", *Lith. Math. J.*, vol. 51, no. 3, pp. 330–341, 2011.

[87] O. Kallenberg, *Foundations of modern probability*, 2nd ed., ser. Probability and its Applications (New York). new York: Springer-Verlag, 2002, pp. xx+638.

[88] P. E. Protter, *Stochastic integration and differential equations*, 2nd ed., ser. Applications of Mathematics (New York). Berlin: Springer-Verlag, 2004, vol. 21, pp. xiv+415.

[89] C. Howitt and J. Warren, "Dynamics for the Brownian web and the erosion flow", *Stochastic Process. Appl.*, vol. 119, no. 6, pp. 2028–2051, 2009.

[90] L. R. Fontes and C. M. Newman, "The full Brownian web as scaling limit of stochastic flows", *Stoch. Dyn.*, vol. 6, no. 2, pp. 213–228, 2006.

[91] А. В. Булинский и А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов.* Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005, с. 400.

[92] И. Гихман и А. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения.* Издательство "Наукова думка", 1968.

[93] M. A. Lifshits, *Gaussian random functions*, ser. Mathematics and its Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995, vol. 322, pp. xii+333.

[94] M. Ledoux, "Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities", *Séminaire de Probabilités, XXXIII*, ser. Lecture Notes in Math. Vol. 1709, Berlin: Springer, 1999, pp. 120–216.

[95] P. Mörters and Y. Peres, *Brownian motion.* Cambridge: Cambridge University Press, 2010, vol. 30, pp. xii + 403.

[96] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, ser. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer-Verlag, 1983, vol. 44, pp. viii+279.

[97] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics: Functional analysis*, ser. Methods of Modern Mathematical Physics. Academic Press, 1972, p. 344.

[98] R. Glowinski, S. Osher, and W. Yin, *Splitting Methods in Communication, Imaging, Science, and Engineering*, ser. Scientific Computation. Springer International Publishing, 2017, p. 820.

[99] W. Hundsdorfer and J. Verwer, *Numerical solution of time-dependent advection-diffusion-reaction equations*, ser. Springer Series in Computational Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2003, vol. 33, pp. x+471.

[100] В. И. Богачев, *Гауссовские меры.* Москва: Наука. Физматлит, 1997, p. 352.

[101] S. Watanabe, "Stochastic flow and noise associated with the Tanaka stochastic differential equation", *Ukr. Math. J.*, vol. 52, no. 9, pp. 1346–1365, 2000.

[102] T. Ellis and O. N. Feldheim, "The Brownian web is a two-dimensional black noise", *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, vol. 52, no. 1, pp. 162–172, 2016.

[103] P. Billingsley, *Convergence of probability measures.* New York-London-Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1968, pp. xii+253.

[104] G. B. Folland, *Real analysis. Modern techniques and their applications*, 2nd ed., ser. Pure and Applied Mathematics (New York). New York: John Wiley & Sons, Inc., 1999, pp. xvi+386.

[105] I. Karatzas and S. E. Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus*, 2nd ed., ser. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1991, vol. 113, pp. xxiv+470.

[106] R. G. Pinsky, *Positive harmonic functions and diffusion: an integrated analytic and probabilistic approach*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995, vol. 45, pp. xvi + 474.

[107] C. Villani, *Topics in optimal transportation*, ser. Graduate Studies in Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society, 2003, vol. 58, pp. xvi+370.

[108] H. Kunita, *Stochastic flows and jump-diffusions*. Singapore: Springer, 2019, vol. 92, pp. xvii + 352.

[109] D. Ferger and D. Vogel, "Weak convergence of the empirical process and the rescaled empirical distribution function in the Skorokhod product space", *Teor. Veroyatn. Primen.*, vol. 54, no. 4, pp. 750–770, 2009.

[110] P. Kotelenez, *Stochastic ordinary and stochastic partial differential equations*, ser. Stochastic Modelling and Applied Probability. New York: Springer, 2008, vol. 58, pp. x+458.

[111] L. C. Evans, *Partial differential equations*, 2nd ed., ser. Graduate Studies in Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society, 2010, vol. 19, pp. xxii+749.

[112] R. Adler and J. Taylor, *Random Fields and Geometry*, ser. Springer Monographs in Mathematics. New York: Springer, 2009, p. 454.

[113] H. Matsumoto, "Coalescing stochastic flows on the real line", *Osaka J. Math.*, vol. 26, no. 1, pp. 139–158, 1989.

[114] S. N. Ethier and T. G. Kurtz, *Markov processes. Characterization and convergence*, ser. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1986, pp. x+534.

[115] Н. И. Портенко, А. В. Скороход и В. М. Шуренков, *Марковские процессы*, сер. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. ВИНИТИ, 1989, т. 46, с. 248.

[116] O. Kallenberg, *Random measures*, 3rd ed. Berlin/London: Akademie-Verlag; Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], 1983, p. 187.

[117] B. Garrod, R. Tribe, and O. Zaboronski, "Examples of interacting particle systems on $\mathbb{Z}$ as Pfaffian point processes: Coalescing-branching random walks and annihilating random walks with immigration", *Ann. Henri Poincaré*, vol. 21, no. 3, pp. 885–908, 2020.

[118] A. Soshnikov, "Determinantal random point fields", *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 55, no. 5(335), pp. 107–160, 2000.

[119] J. R. Stembridge, "Nonintersecting paths, Pfaffians, and plane partitions", *Adv. Math.*, vol. 83, no. 1, pp. 96–131, 1990.

[120] M. Freidlin, *Functional integration and partial differential equations*, ser. Annals of Mathematics Studies. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1985, vol. 109, pp. x+545.

[121] И. И. Гихман и А. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*, 2-е изд. Москва: Издат. "Наука", 1977, с. 567.

[122] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1964, pp. xiv+347.

[123] T. Jeulin and M. Yor, "Inégalité de Hardy, semimartingales, et faux-amis", *Séminaire de Probabilités, XIII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1977/78)*, ser. Lecture Notes in Math. Vol. 721, Berlin: Springer, 1979, pp. 332–359.

[124] P. Gosselin and T. Wurzbacher, "An Itô type isometry for loops in $\mathbf{R}^d$ via the Brownian bridge", *Séminaire de Probabilités, XXXI*, ser. Lecture Notes in Math. Vol. 1655, Berlin: Springer, 1997, pp. 225–231.

[125] H.-H. Kuo, *Gaussian measures in Banach spaces.* Cham: Springer, 1975, vol. 463.

Додаток

Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації

1[a] A.A.Dorogovtsev, A.V.Gnegin, and M.B.Vovchanskii, "Iterated logarithm law for sizes of clusters in Arratia flow", *Theory Stoch. Process.*, vol. 18, no. 2, pp. 1–7, 2012.

2[a] A.A.Dorogovtsev and M.B.Vovchanskii, "Arratia flow with drift and Trotter formula for Brownian web", *Commun. Stoch. Anal.*, vol. 12, no. 1, pp. 89–108, 2018.

3[a] M.B.Vovchanskii, "Convergence of solutions of SDEs to Harris flows", *Theory Stoch. Process.*, vol. 23, no. 2, pp. 80–91, 2018.

4[a] A.A.Dorogovtsev and M.B.Vovchanskii, "On approximations of the point measures associated with the Brownian web by means of the fractional step method and the discretization of the initial interval", *Ukrain. Math. J.*, vol. 72, no. 9, pp. 1179-1194, 2020.

5[a] A.A.Dorogovtsev and N.B.Vovchanskii, "Representations of the finite-dimensional point densities in Arratia flows with drift", *Theory Stoch. Process.*, vol. 25, no. 1, pp. 25–36, 2020.

6[a] Н.Б.Вовчанский, "Структурные свойства потока Арратья", presented at 19-th International Conference of Young Scientists

"Lomonosov", Section "Mathematics and Mechanics", Moscow, April 9-13, 2012. [Online]. Available: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2012/1797/8210_3de5.pdf

7[a] М.Б.Вовчанський, "Аналог формули Троттера для потоку Арратья", *Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей*, Ворохта, Україна, 25 лютого – 3 березня, 2013.

8[a] Н.Б.Вовчанский, "Аналог формулы Троттера для потока Арратья", presented at 20-th International Conference of Young Scientists "Lomonosov", Section "Mathematics and Mechanics", Moscow, Russian Federation, April 8-13, 2013. [Online]. Available: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2013/2190/2811_4d58.pdf

9[a] A.A.Dorogovtsev, M.B.Vovchansky, "Noise and circulations in Brownian stochastic flows", *Міжнародна математична конференція "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка. Тези доповідей*, Севастополь, Україна, 23 – 30 червня, 2013, ст. 327.

10[a] M.Vovchanskii, "Perturbations of singular Brownian flows", *Abstracts of 11th Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics*, Vilnius, Lithuania, June 30 – July 4, 2014, p. 249.

11[a] M.Vovchanskii, "Perturbations of singular stochastic flows on the real line", *Yu.V.Linnik Centennial Conference "Analytical Methods in Number Theory, Probability Theory and Mathematical Statistics". Section "Probability Theory and Mathematical Statistics". Abstracts*, St.Petersburg, Russian Federation, September 14-18, 2015, p. 57.

12[a] M.B.Vovchanskii, ”Convergence of solutions of SDEs to coalescing Harris flows”, *Abstracts of International Conference “Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes”, dedicated to the 100th Anniversary of I.I.Gikhman*, Kyiv, Ukraine, September 17-22, 2018, pp. 101–102.

13[a] A.A.Dorogovtsev, M.B.Vovchanskii, ”Finite-dimensional densities for counting measures associated with the Arratia flows”, *Proceedings of Scientific Conference ”Modern Problems of Stochastic Analysis”, dedicated to the 100th anniversary of the birth of academician S.Kh.Sirajdinov*, Tashkent, September 21-22, 2020, pp. 38-40.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на наступних конференціях та наукових семінарах:

- 19-th International Conference of Young Scientists “Lomonosov”, Moscow, April 9-13, 2012;
- Всеукраїнська наукова конференція ”Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, Ворохта, Україна, 25 лютого – 3 березня, 2013;
- 20-th International Conference of Young Scientists “Lomonosov”, Moscow, Russian Federation, April 8-13, 2013;
- Міжнародна математична конференція ”Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування” з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, Севастополь, Україна, 23 – 30 червня, 2013;

- 11th Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, Vilnius, Lithuania, June 30 – July 4, 2014;
- Yu.V.Linnik Centennial Conference "Analytical Methods in Number Theory, Probability Theory and Mathematical Statistics", St.Petersburg, Russian Federation, September 14-18, 2015;
- International Conference "Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes", dedicated to the 100th Anniversary of I.I.Gikhman, Kyiv, Ukraine, September 17-22, 2018;
- International Mini-School in Probability, Jilin University, Changcnun, China, April 8-14, 2019;
- Scientific Conference "Modern Problems of Stochastic Analysis", dedicated to the 100th anniversary of the birth of academician S.Kh.Sirajdinov, Tashkent, September 21-22, 2020;
- науковий семінар "Стохастика та її застосування" кафедри дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом професора О.М.Іксанова;
- науковий семінар "Числення Маллявена та його застосування" відділу теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України під керівництвом професора А.А.Дороговцева;
- науковий семінар "Стохастичні диференціальні рівняння" кафедри загальної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом професорів О.М.Станжицького та Г.Л.Кулініча;

- науковий семінар відділу теорії ймовірностей та математичної статистики Інституту прикладної математики та механіки НАН України під керівництвом професора С.Я.Махно;
- науково-навчальний семінар математичного інституту Університету м. Утрехт, Нідерланди, під керівництвом професора А.В.Гнєдіна.