НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Вовчанський Микола Богданович УДК 519.21

Стохастичні потоки зі склеюванням та точкові процеси

01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика

А в т о р е ф е р а т

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2021

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
ДОРОГОВЦЕВ Андрій Анатолійович
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу теорії випадкових процесів.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Іксанов Олександр Маратович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри дослідження операцій
факультету комп'ютерних наук та кібернетики;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Осипчук Михайло Михайлович,
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
професор кафедри математичного і функціонального аналізу
факультету математики та інформатики

Захист відбудеться « 13 » квітня 2021 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «____» березня 2021 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Василик В. Б.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Робота присвячена дослідженню одновимірних стохастичних потоків зі склеюванням та їх апроксимацій. Такі потоки з'явилися як граничні об'єкти в моделі голосування і нині використовуються в прикладних задачах, зокрема в задачах опису турбулентних явищ , при дослідженні граничної поведінки динаміки конформних відображень в моделі Хастингса-Левітова двомірного випадкового росту, деревовидних випадкових графів на просторовій решітці, при описі моделей протікання для річкових систем чи як граничний розподіл двовимірних генеалогічних моделей.

Розглянуті в роботі потоки визначальною властивістю мають наявність феномену склеювання: траєкторії двох частинок в потоці після зіткнення склеюються в одну. Прикладами таких об'єктів є: потік Арратья, вперше побудований в роботах R.A.Arratia[1], T.Bálint, W.Werner[2], введені Th.E.Harris[3] потоки Харріса (у випадку наявності склеювання) та потоки Арратья з дрейфом, означені А.А.Дороговцевим[4]. В усіх цих прикладах траєкторія кожної окремої частинки є вінерівським процесом, в той час, як інфінітезимальні коваріації, котрі задає форму взаємодії для пари частинок, різні.

В потоках Арратья частинки незалежні до моменту зустрічі, і в будь-який відмінний від нуля момент часу множина значень траєкторій потоку є зліченною ніде не щільною множиною. Відповідно, виникають задачі, пов'язані з дослідженням розмірів кластерів, що утворюються при цьому, і з розподілом уцілілих частинок на прямій.

Перший розділ дисертаційної роботи присвячений встановленню асимптотики розміру кластера, котрий містить точку, що стартувала з нуля. Асимптотику розмірів таких кластерів та їх середніх значень при прямуванні часового параметру до нескінченності для потоку Арратья та широкого класу потоків Харріса отримав R.W.R.Darling[5], а О.О.Шамов[6]

[1]R. A. Arratia, "Coalescing Brownian motions on the line", PhD thesis, The University of Wisconsin - Madison, Ann Arbor, MI, 1979, p. 134.

[2]B. Tóth and W. Werner, "The true self-repelling motion", *Probab. Theory Related Fields*, vol. 111, no. 3, pp. 375–452, 1998.

[3]T. E. Harris, "Coalescing and noncoalescing stochastic flows in $\mathbf{R}^1$", *Stochastic Process. Appl.*, vol. 17, no. 2, pp. 187–210, 1984.

[4]А.А.Дороговцев, *Мерозначные процесы и стохастические потоки*, Russian. Киев: Институт математики НАН Украины, 2007, p. 290.

[5]R. W. R. Darling, "Rate of growth of the coalescent set in a coalescing stochastic flow", English, *Stochastics*, vol. 23, no. 4, pp. 465–508, 1988.

[6]A. Shamov, "Short-time asymptotics of one-dimensional Harris flows", *Commun. Stoch. Anal.*, vol. 5, no. 3, pp. 527–539, 2011.

встановив асимптотику максимального відхилення частинок від точок старту в межах відрізку.

Потоки зі склеюванням не породжуються напівгрупами розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь (J.Warren, S.Watanabe[7]). Однак при цьому все ж виявляється можливим, при певних умовах, вкласти такий потік в сім'ю випадкових відображень. У випадку потоків Харріса існування потоку як індексованої парою моментів часу сім'ї перетворень (можливо, розривних) числової осі було встановлено ще Th.E.Harris. Для потоків Арратья відповідну побудову вдається здійснити використовуючи узагальнення потоку Арратья – броунівську сітку в прямому та зворотньому часі (L. R. G. Fontes, M.Isopi, C. M.Newman, R.Ravishankar[8]). Як наслідок, природною є гіпотеза, що додавання дрейфу в потік зі склеюванням може бути здійснене так само, як і у випадку збурених динамічних систем, і в другому розділі до пари напівгруп, перша з котрих задана розв'язками детермінованого диференціального рівняння, а друга породжена броунівською сіткою, застосовано метод дробових кроків. Показано, що отримані апроксимації слабко збігаються в сенсі $n-$точкових рухів до потоку Арратья з відповідним дрейфом та встановлено аналог отриманої А.А.Дороговцевим та В.В.Фомичьовим[9] у випадку наближення потоку Арратья потоками гомеоморфізмів оцінки на швидкість збіжності образів довільної скінченної міри під дією потоків.

Пов'язана задача апроксимації $n-$точкових рухів стохастичних потоків $n-$точковими рухами, породженими напівгрупами неперервних перетворень, розглядалася, зокрема, І.І.Ніщенко[10], котра запропонувала схему отримання потоку Арратья як слабкої границі перешкальованих випадкових блукань, причому К.В.Глиняна[11] описала поведінку при такому граничному переході функціоналу, що описує порушення порядку між частинками. А.А.Дороговцев[12] встановив слабку збіжність $n-$точкових рухів гладких стохастичних потоків до відповідних рухів потоку Арратья; такий підхід знайшов продовження в робо-

[7] J. Warren and S. Watanabe, "On spectra of noises associated with Harris flows", *Stochastic analysis and related topics in Kyoto*, ser. Adv. Stud. Pure Math. Vol. 41, Tokyo: Math. Soc., 2004, pp. 351–373.

[8] L. R. G. Fontes, M. Isopi, C. M. Newman, *et al.*, "The Brownian web: Characterization and convergence", *Ann. Probab.*, vol. 32, no. 4, pp. 2857–2883, 2004.

[9] A. A. Dorogovtsev and V. V. Fomichov, "The rate of weak convergence of the n-point motions of Harris flows", *Dynam. Systems Appl.*, vol. 25, no. 3, pp. 377–392, 2016.

[10] I. I. Nishchenko, "Discrete time approximation of coalescing stochastic flows on the real line", English, *Theory Stoch. Process.*, vol. 17, no. 1, pp. 70–78, 2011.

[11] E. V. Glinyanaya, "Disordering asymptotics in the discrete approximation of an Arratia flow", English, *Theory Stoch. Process.*, vol. 18, no. 2, pp. 8–14, 2012.

[12] A. A. Dorogovtsev, "One Brownian stochastic flow", English, *Theory Stoch. Process.*, vol. 10, no. 3-4, pp. 21–25, 2004.

тах А.А.Дороговцева[13], Т.В.Маловічко[14], В.В.Фомичьова[15]. Th.E.Harris встановив збіжність $n-$точкових рухів у випадку, коли дограничні інфінітезимальні коваріації є згортками вихідної та гаусівських щільностей.

В третьому розділі $n-$точкові рухи для одного класу потоків Харріса зі склеюванням апроксимуються розв'язками стохастичних диференціальних рівнянь відносно мартингалів з просторовими параметрами. Оскільки опис поведінки стохастичного потоку може проводитися шляхом аналізу образів мір під дією потоку (напр, P.Baxendale, Th.E.Harris[16], C.Zirbel, E.Çinlar[17]), також встановлюється збіжність образів міри Лебега від дією прямого та дуального потоків.

Іншим способом аналізу поведінки кластерів в потоках зі склеюванням є точкові міри та асоційовані з ними точкові процеси. У випадку потоку Арратья з нульовим дрейфом вони та породжені ними інтегральні оператори досліджувалися А.А.Дороговцевим, Я.А.Кореновською, К.В.Глиняною[18][19].Для вивчення подібних точкових процесів можуть застосовуватися точкові щільності (кореляційні функції). Зокрема, R.Munasinghe, R.Rajesh, R.Tribe, O.V.Zaboronski[20][21] отримали оцінки та асимптотику при контрольованому розширенні відрізку точок старту для точкових щільностей в потоці Арратья й дали повний опис точкового процесу в термінах пфаффівського процесу з відомими ядрами, однак ядра цього процесу мають складну форму й не можуть бути легко узагальнені на випадок нетривіального дрейфу. Тому метою четвертого розділу є отримання альтернативних представлень точко-

---

[13] A. A. Dorogovtsev and V. V. Fomichov, "The rate of weak convergence of the n-point motions of Harris flows", *Dynam. Systems Appl.*, vol. 25, no. 3, pp. 377–392, 2016.

[14] T. V. Malovichko, "Convergence of solution of stochastic differential equations to the Arratia flow", *Ukrain. Mat. Zh.*, vol. 60, no. 11, pp. 1529–1538, 2008.

[15] V. V. Fomichov, "A note on weak convergence of the n-point motions of Harris flows", English, *Theory Stoch. Process.*, vol. 21, no. 2, pp. 4–13, 2016.

[16] P. Baxendale and T. E. Harris, "Isotropic stochastic flows", *Ann. Probab.*, vol. 14, no. 4, pp. 1155–1179, 1986.

[17] C. L. Zirbel and E. Çinlar, "Mass transport by Brownian flows", English, *Stochastic models in geosystems. Based on a workshop, held during the week of May 16, 1994 at IMA, Minneapolis, MN, USA*, Berlin: Springer, 1997, pp. 459–492.

[18] A. A. Dorogovtsev, I. A. Korenovska, and E. V. Glinyanaya, "On some random integral operators generated by an Arratia flow", *Theory Stoch. Process.*, vol. 22, no. 2, pp. 8–18, 2017.

[19] A. A. Dorogovtsev and I. A. Korenovska, "Essential sets for random operations constructed from an Arratia flow", *Commun. Stoch. Anal.*, vol. 11, no. 3, pp. 301–312, 2017.

[20] R. Tribe and O. V. Zaboronski, "Pfaffian formulae for one dimensional coalescing and annihilating systems", *Electron. J. Probab.*, vol. 16, no. 76, pp. 2080–2103, 2011.

[21] R. Munasinghe, R. Rajesh, R. Tribe, *et al.*, "Multi-scaling of the n-point density function for coalescing Brownian motions", *Comm. Math. Phys.*, vol. 268, no. 3, pp. 717–725, 2006.

вих щільностей для потоків Арратья з дрейфом та їх апроксимацій у випадку скінченної кількості точок старту. Використаний підхід базується на застосуванні теореми Гірсанова для потоків Арратья, отриманої А.А.Дороговцевим та Т.В.Маловічко.

Тематика стохастичних потоків активно розробляється в відділі теорії випадкових процесів Інституту математики НАНУ і представлена й іншими напрямками. Наведемо деякі приклади. Модель потоку Арратья зі змінною масою була запропонована В.В.Конаровським. В.А.Кузнєцов досліджував кути закручування та геометричні інваріанти траєкторій частинок в броунівських потоках гомеоморфізмів. М.П.Карликова (Лагунова) досліджувала мартингальну задачу, породжену введеними А.А.Дороговцевим стохастичними потоками зі взаємодією, встановивши асимптотику траєкторій частинок на нескінченності. П.П.Чернега досліджував локальний час в потоці Арратья. Принцип великих відхилень для потоку Арратья був сформульований А.А.Дороговцевим та О.В.Остапенко. В низці робіт А.А.Дороговцев, Г.В.Рябов розвивали стохастичний аналіз для потоків зі склеюванням й отримали, зокрема, аналог розкладу Крилова-Веретеннікова, тоді як К. В. Глиняна розглядала аналогічну проблему для дискретних наближень потоків зі взаємодією та досліджувала напівгрупи n-точкових рухів потоків Харріса. А.Ю.Пилипенко довів аналог теореми Струка-Варадана про носій для потоків зі взаємодією та досліджував стохастичні потоки з відбиттям, спільно з М.В.Танцюрою розглядав систему частинок з нескінченною сумарною масою в моделі МакКіна-Власова. А.А.Дороговцев ввів поняття квадратичної ентропії для броунівських потоків.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в Інституті математики НАН України у відділі теорії випадкових процесів у рамках держбюджетних тем «Стохастичний аналіз складних систем», державний реєстраційний номер 0111U001002, і «Стохастичні системи із сингулярною взаємодією», державний реєстраційний номер 0116U002066.

Мета і задачі дослідження. Метою представленої кваліфікаційної роботи є дослідження стохастичних потоків Арратья та потоків Харріса зі склеюванням та їх апроксимацій. Поставлені наступні задачі:

- встановлення асимптотики розмірів кластерів, утворених в потоці Арратья з дрейфом частинками, що зіткнулися з частинкою зі стартом в нулі;
- доведення в методі дробових кроків для броунівської сітки збіжності апроксимуючих процесів до $n-$точкового руху потоку Арратья із дрейфом та отримання оцінок на швидкість збіжності;

- доведення збіжності $n-$точкових рухів в гладких стохастичних потоках до відповідних рухів в потоці Харріса зі склеюванням при умові, що інфінітезимальні коваріації гладких потоків збігаються до коваріації граничного потоку; доведення збіжності відповідних перетворень числової осі;
- отримання представлень точкових щільностей в термінах гаусівських щільностей та умовних математичних сподівань стохастичних експонент для потоку Арратья.

Об'єкт і предмет дослідження. *Об'єкт дослідження* — потоки Арратья, потоки Харріса та породжені ними точкові процеси. *Предмет дослідження* — випадкові міри, образи мір під дією стохастичних потоків, кластери в потоці Арратья, $n-$точкові рухи стохастичних потоків.

Методи дослідження. В роботі використовуються методи теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів.

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати дисертаційної роботи, які становлять її наукову новизну й виносяться на захист, наступні:

- Встановлено закон повторного логарифму для розмірів кластерів, утворених в потоці Арратья з дрейфом частинками, що зіткнулися з частинкою зі стартом в нулі.
- Доведено слабку збіжність апроксимуючих процесів, побудованих методом дробових кроків, до $n-$точкового руху потоку Арратья із дрейфом. Отримано оцінки на швидкість збіжності розподілів образів міри Лебега під дією вказаних вище апроксимуючих потоків до розподілу образу міри Лебега під дією потоку Арратья з дрейфом. Встановлена неможливість отримання більш сильної, ніж слабка, збіжності в запропонованій схемі.
- Встановлено слабку збіжність зліченних наборів рухів в гладких стохастичних потоках до відповідних зліченних наборів рухів в потоці Харріса з інфінітезимальною коваріацію, заданою характеристичною функцією центрованого стійкого закону, при умові, що інфінітезимальні коваріації гладких потоків збігаються до коваріації граничного потоку рівномірно на компактах. Встановлено збіжність скінченних наборів породжених потоками перетворень числової осі в слабкій-* топології.
- Для потоків Арратья введено поняття точкових щільностей, котрі відповідають скінченному числу точок старту та конкретній послі-

довності моментів склейки. Встановлено збіжність таких точкових щільностей до точкових щільностей для всього потоку.

- Отримано наступні представлення точкових щільностей: в термінах функцій Гріна параболічних початково-країових задач; в термінах гаусівських щільностей та математичних сподівань деяких стохастичних експонент від броунівських мостів; в термінах умовних математичних сподівань стохастичних експонент для потоку Арратья та щільностей розподілів векторів уцілілих частинок.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати можуть мати подальші застосування в теорії випадкових процесів і теорії стохастичних потоків.

Особистий внесок здобувача. Постановка задач і вибір методів дослідження в дисертаційній роботі й у спільних статтях належать науковому керівнику дисертанта А. А. Дороговцеву. Всі представлені в дисертації результати отримані автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на таких конференціях і наукових семінарах:

- 19-th International Conference of Young Scientists “Lomonosov”, Moscow, April 9-13, 2012;
- Всеукраїнська наукова конференція ”Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, Ворохта, Україна, 25 лютого – 3 березня, 2013;
- 20-th International Conference of Young Scientists “Lomonosov”, Moscow, Russian Federation, April 8-13, 2013;
- Міжнародна математична конференція ”Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування” з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, Севастополь, Україна, 23 – 30 червня, 2013;
- 11th Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, Vilnius, Lithuania, June 30 – July 4, 2014;
- Yu.V.Linnik Centennial Conference “Analytical Methods in Number Theory, Probability Theory and Mathematical Statistics”, St.Petersburg, Russian Federation, September 14-18, 2015;
- International Conference “Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes”, dedicated to the 100th Anniversary of I.I.Gikhman, Kyiv, Ukraine, September 17-22, 2018;

- International Mini-School in Probability, Jilin University, Changcnun, China, April 8-14, 2019;
- Scientific Conference "Modern Problems of Stochastic Analysis", dedicated to the 100th anniversary of the birth of academician S.Kh.Sirajdinov, Tashkent, September 21-22, 2020;
- науковий семінар "Стохастика та її застосування" кафедри дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом професора О.М.Іксанова;
- науковий семінар "Числення Маллявена та його застосування" відділу теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України під керівництвом професора А.А.Дороговцева;
- науковий семінар "Стохастичні диференціальні рівняння" кафедри загальної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом професорів О.М.Станжицького та Г.Л.Кулініча;
- науковий семінар відділу теорії ймовірностей та математичної статистики Інституту прикладної математики та механіки НАН України під керівництвом професора С.Я.Махно;
- науково-навчальний семінар математичного інституту Університету м. Утрехт, Нідерланди, під керівництвом професора А.В.Гнєдіна.

Публікації. Результати дисертації опубліковані у п'яти статтях у фахових виданнях, що входять до наукометричної бази Scopus, і восьми збірках тез конференцій.

Структура і обсяг роботи. Дисертація загальним обсягом 195 сторінок складається з анотацій українською й англійською мовами, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаної літератури, що містить 125 найменувань, і додатку зі списком опублікованих праць здобувача за темою дисертації та переліком наукових семінарів і конференцій, на яких доповідались отримані результати.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

Основна частина дисертаційної роботи складається з чотирьох розділів.

В *першому розділі* досліджуються асимптотичні властивості поведінки континуальної системи впорядкованих броунівських частинок на

$\mathbb{R}$ – потоку Арратья, котрий може розглядатися як частковий приклад потоку Харріса при $\varphi(x) = 1\!\!1_{x=0}$.

Означення 1.1.1. *Сукупність випадкових величин*

$$\{X(u,t) \mid u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+\}$$

називається потоком Харріса з інфінітезимальною коваріаційною функцією φ, якщо:

1. *$\forall u \in \mathbb{R}$ процес $\{X(u,t) \mid t \geq 0\}$ є вінерівським мартингалом зі стартом в u відносно спільної фільтрації*

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(X(v,s), v \in \mathbb{R}, s \in [0;t]\right);$$

2. *$\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ із того, що $u_1 < u_2$, випливає, що $X(u_1,t) \leq X(u_2,t)$ для $t \geq 0$;*
3. *$\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ взаємна квадратична характеристика мартингалів $X(u_1,\cdot)$ та $X(u_2,\cdot)$ рівна*

$$\int_0^t \varphi\left(X(u_1,s) - X(u_2,s)\right) ds.$$

Розглянемо розмір кластера, утвореного всіма частинками зі стартом вище нуля, що за час t приклеїлися до частинки із 0 :

$$L(t) = \{u \mid u > 0, X(0,t) = X(u,t)\}.$$

Покладемо $\nu(t) = \lambda(L(t))$.

Зліченну систему частинок в потоці Арратья можна сконструювати із зліченного набору незалежних вінерівських процесів, що склеюються при зіткненні. Така процедура описується в Підрозділі 1.2 і є узагальненням запропонованої раніше А.А.Дороговцевим. Як наслідок, для отримання вказаної асимптотики використовується оцінка в термінах певних гаусівських полів, котра встановлюється шляхом застосування оцінок Судакова максимуму гаусівського процесу та нерівності концентрації (Підрозділ 1.3).

Теорема 1.4.1. *З ймовірністю* 1

$$\limsup_{t\to 0+} \frac{\nu(t)}{\sqrt{2t \ln\ln t^{-1}}} \geq 1,$$

$$\limsup_{t\to 0+} \frac{\nu(t)}{2\sqrt{t \ln\ln t^{-1}}} \leq 1.$$

Підрозділи 1.5 та 1.6 присвячені встановленню асимптотики середніх розмірів кластерів в потоках Арратья з дрейфом $\{Y^a(u,t) \mid u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+\}$.

Покладемо $\nu^a(t) = \lambda\{u > 0 \mid Y^a(u,t) = Y^a(0,t)\}$, де λ– міра Лебега. Для встановлення асимптотики $\mathrm{E}\,\nu^a(t)$ при $t \to 0+$ спочатку розглядається лінійний дрейф, коли розподіл $\nu^a(t)$ відомий, після чого для переходу до довільного випадку застосовується лема порівняння 1.5.1.

Теорема 1.6.1. *Нехай функція a задовольняє умову Ліпшиця зі сталою L. Тоді*

$$\frac{\mathrm{E}\,\nu^a(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0+}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Другий розділ присвячений застосуванню методу дробових кроків до потоку випадкових відображень, породжених броунівською сіткою $\{\varphi_{t,\cdot}(u) \in C([t;+\infty)) \mid u,t \in \mathbb{R}\}$ – континуальним набором одновимірних вінерівських процесів зі склеюванням, котрі стартують із усіх точок прямої в усі невід'ємні моменти часу та є незалежними до моменту зустрічі, та потоку розв'язків детермінованого диференціального рівняння.

Розглянемо послідовність розбиттів відрізка $[0;1]$: $\{t_0^{(n)}, \ldots, t_{N^{(n)}}^{(n)}\}$, $n \in \mathbb{N}$, причому $\lambda^{(n)} = \max_{k=\overline{0,N^{(n)}-1}}(t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \to 0,\ n \to \infty$. Для фіксованих n, $k \in \overline{0, N^{(n)}-1}$ та $t \in [t_k^{(n)}; t_{k+1}^{(n)})$ визначимо наступні випадкові процеси:

$$X_t^{(n)}(u) = \varphi_{t_k^{(n)},t}\left(\mathop{\circ}_{j=1}^{k} A_{t_j^{(n)}-t_{j-1}^{(n)}}(\varphi_{t_{j-1}^{(n)},t_j^{(n)}}(\cdot))\right)(u).$$

В Підрозділі 2.2 встановлюється неможливість отримання сильнішої, ніж слабка, збіжності в досліджуваній схемі:

Твердження 2.2.2. *Для довільного $u \in \mathbb{R}$ та будь-якої послідовності $\{s_1^{(n)}, \ldots, s_{M_n}^{(n)}\}, n \in \mathbb{N}$, розбиттів відрізку $[0;1]$ при $\max_{k=\overline{1,M_n-1}}(s_{k+1} - s_k) \to 0, n \to \infty$, послідовність*

$$\left\{ \sum_{k=0}^{M_n-1} \left(\varphi_{s_k^{(n)},s_{k+1}^{(n)}}(u) - u\right) \mid n \geq 1 \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

не є збіжною за ймовірністю.

Для існування слабкої границі послідовності $(X^{(n)}(u_1), \ldots, X^{(n)}(u_N))$ як елемента простору Скорохода $(\mathcal{D}([0;1]))^n$ перевіряється щільність послідовності розподілів процесів

$$\left\{(X^{(n)}(u_1), \ldots, X^{(n)}(u_N))\right\}_{n\in\mathbb{N}},$$

після чого в серії технічних тверджень встановлюється потрібна характеризація довільної слабкої границі.

Теорема 2.6.1. *Нехай* $\{Y_t^a(u) \mid u \in [0;1], t \in [0;1]\}$ *– потік Арратья із дрейфом a. Нехай* $N \in \mathbb{N}$, $(u_1, \ldots, u_N) \in \mathbb{R}^N$. *Тоді*

$$(X^{(n)}(u_1), \ldots, X^{(n)}(u_N)) \Rightarrow (Y^a(u_1), \ldots, Y^a(u_N)), n \to \infty,$$

в просторі $(\mathcal{D}([0;1]))^N$.

В Підрозділах 2.7-2.10 встановлюється швидкість збіжності в термінах метрики Вассерштейна в просторі розподілів випадкових мір зі скінченними моментами довільного фіксованого порядку.

Визначимо образи міри Лебега λ на відрізку $[0;1]$ під дією породжених розглянутими вище потоками відображень:

$$\mu_t = \lambda \circ (Y_t^a)^{-1}, \qquad \mu_t^{(n)} = \lambda \circ \left(X_t^{(n)}\right)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Позначимо через L_t і $L_t^{(n)}$ розподіли μ_t та $\mu_t^{(n)}$ в $\mathcal{M}_1\big(\mathcal{M}_p(\mathbb{R})\big)$, відповідно. Міри μ_t і $\mu_t^{(n)}$ наближаються точковими мірами

$$\mu_t^{(n),m} = m^{-1}\sum_{j=0}^{m-1}\delta_{X_t^{(n)}(j/m)}, \quad \mu_t^m = m^{-1}\sum_{j=0}^{m-1}\delta_{Y_t^a(j/m)}.$$

Доводяться технічні оцінки на відстані між розв'язками СДР та їх наближеннями в методі дробових кроків та в методі дробових кроків зі збуренням в початковий момент часу (Підрозділ 2.8). З допомогою явно побудованого каплінгу для $(\mu_t^m, \mu^{(n),m})$ встановлюється наступна оцінка.

Лема 2.10.1. *Для будь-якого* $p \geq 2$ *існує стала* $C > 0$ *така, що*

$$W_{1,p}\left(L_t, L_t^m\right) \leq Cm^{-1/p}.$$

Якщо додатково $\{n\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *обмежена, то для кожного* $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$

$$W_{1,p}\left(L_t^{(n)}, L_t^{(n),m}\right) \le C_\varepsilon \left(m^{-1} + \delta_n^{1/2-\varepsilon}\right)^{1/p}$$

зі своєю сталою C_ε.

Теорема 2.10.1. *Припустимо, що послідовність* $\{n\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *обмежена. Тоді для будь-якого* $p \ge 2$ *існує додатна стала* C *така, що для всіх* $n \in \mathbb{N}$

$$W_{1,p}\big(L_t, L_t^{(n)}\big) \le C\left[\log\log \delta_n^{-1}\right]^{-1/p}.$$

Третій розділ присвячений апроксимації потоків Харріса потоками гомеоморфізмів, котрі отримуються як розв'язки СДР відносно неперервних мартингалів з просторовими параметрами. Наведемо використане в Розділі 3 означення потоку Харріса.

Означення 3.1.1. *Потік Харріса* X *із інфінітезимальною коваріацією* φ *– це набір* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$*–значних випадкових елементів* $\{X(s,t) \mid X(s,t) \equiv X(\cdot,s,t), s \le t\}$ *таких, що*

1. *для будь-яких* $s \le t \le r$ $\mathsf{P}\{X(\cdot,s,r) = X(\cdot,t,r)\circ X(\cdot,s,t)\} = 1$; $X(s,s) = \mathrm{Id}$ *м.н.;*
2. *для всіх* $t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n$ *випадкові елементи* $X(t_1,t_2),\ldots, X(t_{n-1},t_n)$ *незалежні;*
3. *для будь-яких* $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ *та* $h > 0$
$$\mathrm{Law}\,(X(t_1,t_2)) = \mathrm{Law}\,(X(t_1+h, t_2+h))\,;$$
4. *якщо* $h \to 0+$, $X(0,h) \to \mathrm{Id}$ *в* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *за ймовірністю;*
5. *для будь-якого* x *процес* $t \mapsto X(x,0,t) - x$ *є стандартним вінерівським процесом відносно фільтрації*
$$\sigma\{X(u_1,u_2), 0 \le u_1 \le u_2 \le t\},\ t \ge 0;$$
6. *для всіх* $x, y \in \mathbb{R}$
$$\langle X(x,0,\cdot), X(y,0,\cdot)\rangle(t) = \int_0^t \varphi\left(X(x,0,s) - X(y,0,s)\right) ds;$$
7. *для будь-яких* t_1, t_2 *відображення* $X(t_1,t_2)$ *монотонно неспадне.*

Розглядаються потоки Харріса з інфінітезимальною коваріацією $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\beta|x|^\alpha}, x \in \mathbb{R}, \beta \in (0;+\infty), \alpha \in (0;2)$. Нехай задано $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0;1)}$ –

довільна фіксована послідовність обмежених двічі неперервно диференційовних з обмеженими похідними симетричних невід'ємно визначених функцій таких, що $\varphi_\varepsilon \to \varphi, \varepsilon \to 0+$, рівномірно на компактах, причому $\varphi_\varepsilon(0) = 1$.

Наближення потоку будуються як потоки розв'язків СДР відносно неперервного мартингала з просторовими параметрами:

$$X_\varepsilon(x, s, t) = x + \int_s^t F_\varepsilon(X_\varepsilon(x, s, r), dr),\ x \in \mathbb{R}, 0 \leq s \leq t,$$

де для будь-якого $\varepsilon \in (0; 1)$ $\{F_\varepsilon(x, t) \mid x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+\}$ – гаусівський випадковий процес з коваріацією

$$\mathrm{Cov}(F_\varepsilon(t, x), F_\varepsilon(s, y)) = \min\{t, s\}\varphi_\varepsilon(x - y).$$

У випадку потоку розривних відображень, породженого потоком X, можна визначити дуальний потік на кожному фіксованому відрізку $[t_1; t_2]$ як

$$\widehat{X}(x, t_1, t_2, s) = \inf_{\substack{X(y, r, t_2) \geq x,\ y \in \mathbb{R}, \\ r \in [t_1; t_1 + t_2 - s]}} X(y, r, t_1 + t_2 - s),$$
$$x \in \mathbb{R}, s \in [t_1; t_2].$$

Для всюди щільної множини точок старту набір траєкторій прямого потоку є випадковим елементом в добутку просторів $\mathcal{C}([0; 1])$, і траєкторії дуального потоку отримуються як значення конструктивно заданого відображення на цьому просторі. В Підрозділі 3.3 встановлюється неперервність цього відображення в певному сенсі, звідки виводиться слабка збіжність зліченних наборів траєкторій дуальних потоків.

Для заданих дійсних чисел a, a_1, b: $a < a_1 < b$ функція $f \in \mathcal{C}([a_1; b])$ може розглядатися як елемент простору $\mathcal{C}([a; b])$ шляхом трансформації $\mathcal{P}_{a,b} f(s) = 1\!\!1_{s \in [a; a_1]} f(a_1) + f(s) 1\!\!1_{s \in (a_1; b]}, s \in [a; b]$.

Теорема 3.4.1. *Нехай* $\{X_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0;1)}$ *– потоки Харріса, розглянуті в Твердженні 3.2.2, а* X *– потік Харріса з інфінітезимальною коваріацією* φ. *Зафіксуємо* $T > 0$ *і множину* $\{(x_n, t_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R} \times [0; T])^\infty$. *Тоді*

$$\Big(\mathcal{P}_{0,T} X_\varepsilon(x_1, t_1, \cdot), \mathcal{P}_{0,T} \widehat{X}_\varepsilon(x_1, t_1, T, T + t_1 - \cdot), \ldots,$$
$$\mathcal{P}_{0,T} X_\varepsilon(x_N, t_N, \cdot), \mathcal{P}_{0,T} \widehat{X}_\varepsilon(x_N, t_N, T, T + t_N - \cdot), \ldots\Big)$$

$$\Rightarrow \Big(\mathcal{P}_{0,T}X(x_1,t_1,\cdot),\mathcal{P}_{0,T}\widehat{X}(x_1,t_1,T,T+t_1-\cdot),\ldots,$$
$$\mathcal{P}_{0,T}X(x_N,t_N,\cdot),\mathcal{P}_{0,T}\widehat{X}(x_N,t_N,T,T+t_N-\cdot),\ldots\Big),$$

при $\varepsilon \to 0+$ *в* $\mathcal{C}([0;T])^{\infty}$.

Нехай $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ – простір локально скінченних невід'ємних борелівських мір на дійсній осі з слабкою-* топологією. Для всіх $\varepsilon \in (0;1), 0 \le s \le t \le T$, визначимо наступні $\mathcal{M}(\mathbb{R})-$значні випадкові елементи:

$$\mu_\varepsilon(s,t) = \lambda \circ X_\varepsilon(\cdot,s,t)^{-1}, \quad \mu(s,t) = \lambda \circ X(\cdot,s,t)^{-1},$$
$$\widehat{\mu}_\varepsilon(s,t) = \lambda \circ \Big(\widehat{X}_\varepsilon(\cdot,0,t,s)\Big)^{-1}, \quad \widehat{\mu}(s,t) = \lambda \circ \Big(\widehat{X}(\cdot,0,t,s)\Big)^{-1}.$$

Теорема 3.5.1. *Для довільних* $s_1 \le,\ldots \le s_N, t_1 \le,\ldots \le t_N, s_i \le t_i, i = \overline{1,N}, N \in \mathbb{N}$, *маємо*

$$(\mu_\varepsilon(s_1,t_1),\ldots,\mu_\varepsilon(s_N,t_N),\widehat{\mu}_\varepsilon(s_1,t_1),\ldots,\widehat{\mu}_\varepsilon(s_N,t_N))$$
$$\Rightarrow (\mu(s_1,t_1),\ldots,\mu(s_N,t_N),\widehat{\mu}(s_1,t_1),\ldots,\widehat{\mu}(s_N,t_N)),$$

при $\varepsilon \to 0+$ *в* $(\mathcal{M}(\mathbb{R}))^{2N}$.

В четвертому розділі розглядаються потоки Арратья з дрейфом $X^a = \{X^a(u,t) \mid u \in [0;1], t \in [0;T]\}$. Коефіцієнт дрейфу задовольняє умову Ліпшиця та обмежений. Опис точкових мір, асоційованих з такими потоками, може здійснюватися в термінах наступних точкових щільностей. Спочатку введемо позначення:

$$\mathfrak{X}_t^a = \{X^a(v,t) \mid v \in [0;1]\};$$
$$\mathfrak{X}_t^a(u) = \{X^a(u_k,t) \mid k = \overline{1,n}\},$$
$$\overrightarrow{X}^a(u,\cdot) = (X^a(u_1,\cdot),\ldots,X^a(u_n,\cdot)),\ u = (u_1,\ldots,u_n) \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}.$$

Означення 4.1.1. *Нехай* $t \in (0;T], k \in \mathbb{N}$. k*-точковою щільністю* p_t^k *називається вимірна функція на* $\mathbb{R}^k$ *така, що для довільної невід'ємної вимірної функції* $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{E} \sum_{\substack{v_1,\ldots,v_k \in \mathfrak{X}_t^a, \\ v_1,\ldots,v_k \text{ всі різні}}} f(v_1,\ldots,v_k)1\!\!1(\mid \mathfrak{X}_t^a \mid \ge k) = \int_{\mathbb{R}^k} p_t^{a,k}(y)f(y)dy. \qquad (1)$$

Для нульового дрейфу точковий процес є пфаффівським процесом з відомим ядром[22]. Ми отримуємо альтернативні представлення точкових щільностей у випадках нетривіального дрейфу. Використаний підхід базується на теоремі Гірсанова для потоків Арратья[23]. Нехай $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. Покладемо $\tau_1(u) = T$,

$$\tau_k(u) = \inf\left\{T; s \mid \prod_{j=1}^{k-1} (X(u_k, s) - X(u_j, s)) = 0\right\}, \quad k \geq 2,$$

$$I_n(u) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\tau_k(u)} a(X(u_k, t)) dX(u_k, t),$$

$$J_n(u) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\tau_k(u)} a^2(X(u_k, t)) dt.$$

Для щільної в $[0; 1]$ множини $\mathcal{U} = \{u_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ покладемо $u^{(n)} = (u_1, \ldots, u_n), n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$\widetilde{\mathcal{E}}^a_{T,n}(u) = \exp\left\{I_n(u) - \frac{1}{2} J_n(u)\right\},$$

$$\widetilde{\mathcal{E}}^a_T = \exp\left\{L_2\text{-}\lim_{n\to\infty} I_n\left(u^{(u)}\right) - \frac{1}{2} L_2\text{-}\lim_{n\to\infty} J_n\left(u^{(u)}\right)\right\},$$

причому границі не залежать від $\mathcal{U}$.

Для $n \in \mathbb{N}$ покладемо $\Delta_n = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u_1 < \ldots < u_n\}$. Тоді (n, k)−точковою щільністю (Означення 4.2.1), що відповідає $u \in \Delta_n$ та $k \in \{1, \ldots, n\}$, називатимемо таку вимірну функцію $p_t^{a,n,k}(u; \cdot)$ на $\mathbb{R}^k$, що виконується (1) з заміною $\mathfrak{X}^a_t$ на $\mathfrak{X}^a_t(u)$.

Нехай для $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in (\mathcal{C}([0; T]))^n$ виконуються три наступні умови: $|\{\xi_k(0) \mid k = \overline{1, n}\}| = n$, координати склеюються після зустрічі та відсутні потрійні зіткнення. Покладемо

$$\mathcal{S}_{n,k} = \{(j_1, \ldots, j_k) \mid j_i \in \{1, \ldots, n - i\}, i = \overline{1, k}\}, \quad k = \overline{1, n},$$

$$\mathcal{S}_n = \varnothing \vee \bigcup_{k=\overline{1,n-1}} \mathcal{S}_{n,k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

[22] R. Tribe and O. V. Zaboronski, "Pfaffian formulae for one dimensional coalescing and annihilating systems", *Electron. J. Probab.*, vol. 16, no. 76, pp. 2080–2103, 2011.

[23] А.А.Дороговцев, *Мерозначные процесы и стохастические потоки*, Russian. Киев: Институт математики НАН Украины, 2007, p. 290.

Нехай $n - \varkappa = |\{\xi_j(T) \mid j = \overline{1,n}\}|$. Нехай $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_\varkappa$ – моменти зіткнень для процесу ξ. Покладемо $j_1 = \min\{i \mid \exists j \neq i \ \xi_j(\tau_1) = \xi_i(\tau_1)\}$ і визначимо процес ξ^{n-1} видаляючи координату з номером j_1 в векторі ξ. Далі покладемо $j_2 = \min\{i \mid \exists \ j \neq i \ \xi_j^{n-1}(\tau_2) = \xi_i^{n-1}(\tau_2)\}$, визначимо ξ^{n-2} шляхом видалення в процесі ξ^{n-1} координати з номером j_2 і продовжимо повторювати ці два кроки, поки не отримаємо схему склейки $S(\xi) = (j_1, \ldots, j_\varkappa) \in \mathcal{S}_{n,\varkappa}$.

Визначена випадкова схема склейки $S(\overrightarrow{X}(u))$.

Означення 4.2.3. *Нехай X^a – потік Арратья з дрейфом. Для заданих $u \in \Delta_n$, схеми склейки $s \in \mathcal{S}_{n,k}$ для певного k та $j \leq n-k$ називатимемо відповідною (n,j)–точковою щільністю вимірну функцію $p_t^{a,n,s,j}(u;\cdot)$ на $\mathbb{R}^k$ таку, що для довільної невід'ємної вимірної функції $f\colon \mathbb{R}^j \to \mathbb{R}$*

$$\mathrm{E} \sum_{\substack{v_1,\ldots,v_j \in \mathfrak{X}_t^a(u), \\ v_1,\ldots,v_j \ \text{всі різні}}} f(v_1,\ldots,v_j) 1\!\!\mathrm{I}(S(\overrightarrow{X}^a(u) = s) = \int_{\mathbb{R}^j} p_t^{a,n,s,j}(u;y) f(y) dy.$$

Для всіх $n \in \mathbb{N}, u \in \Delta_n$ і $k \in \{1,\ldots,n\}$ м.в.

$$p_t^{a,n,k}(u;\cdot) = \sum_{l=0}^{n-k} \sum_{s \in \mathcal{S}_{n,l}} p_t^{a,n,s,k}(u;\cdot).$$

В Підрозділі 4.3 зв'язок між фундаментальними розв'язками задач Коші та перехідними ймовірностями дифузійних процесів використовується для отримання представлення точкових щільностей як кратних інтегралів від функцій Гріна параболічних початково-краєвих задач.

В Підрозділі 4.4 встановлено збіжність $p_t^{a,n,k}$ до вихідних точкових щільностей при апроксимації інтервалу $[0;1]$ скінченними наборами точок та отримано оцінку на швидкість збіжності одновимірних щільностей в рівномірній метриці.

Нехай $W = (w_1,\ldots,w_n)$ – стандартний вінерівський процес в $\mathbb{R}^n$, $W(0) = 0$, а $\widetilde{W} = (\widetilde{w}_1,\ldots,\widetilde{w}_n)$ – отриманий з нього вінерівський процес зі склеюванням; через $\theta_k(u), k = \overline{1,n}$, позначаємо моменти склейки в $\widetilde{W} + u$. Покладемо

$$\mathcal{E}_{T,n}^a(W,u) = \exp\Big\{ \sum_{k=1}^n \int_0^{\theta_k(u)} a(u_k + w_k(t)) dw_k(t) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\theta_k(u)} a^2(u_k + w_k(t))dt\Big\}.$$

Надалі $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ – асоційовані з W броунівські мости. Для кожного $y \in \mathbb{R}^n$ визначимо випадковий процес в $\mathbb{R}^n$

$$\eta^{u,y}(t) = \eta(t) + \left(1 - \frac{t}{T}\right)u + \frac{t}{T}y,\ t \in [0; T].$$

Нехай $\theta_{ij}(u)$ – момент зустрічі координат процесу $W+u$ з номерами i та j; $\theta_{ij}(u, y)$ – момент зустрічі координат процесу $\eta^{u,y}$ з номерами i та j. Додатково нехай $\theta_{kk}(u) = \theta_{jj}(u, y) = T,\ k, j = \overline{1, n}$. Існують невипадкові номери $\{\lambda_{ij}(s) \mid i = 1, 2, j = \overline{1, n}\}$:

$$\theta_k(u)\mathbb{1}\left(S(W + u) = s\right) = \theta_{\lambda_{1k}(s)\lambda_{2k}(s)}(u)\mathbb{1}\left(S(W + u) = s\right)$$

Покладемо

$$\begin{aligned}
&a_k(t, u, y, s) = \mathbb{1}(t \le \theta_{\lambda_{1k}(s)\lambda_{2k}(s)}(u, y)) \cdot a\left(\eta_k^{u,y}(t)\right),\\
&\mathfrak{e}^a_{T,n}(u, y, s) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\int_0^T a_k(t, y, s)d\beta_k(t) + \right.\\
&\qquad \left. + \sum_{k=1}^{n}\int_0^T a_k(t, u, y, s)\left(\frac{y_k - u_k}{T} - \frac{\eta_k(t)}{T - t} - \frac{1}{2}a_k(t, u, y, s)\right)ds\right\},\\
&\qquad t \in [0; T],\ k = \overline{1, n},\ y \in \mathbb{R}^n,\ s \in \mathcal{S}_n.
\end{aligned}$$

Теорема 4.7.1. *Для всіх $y \in \mathbb{R}^n$ та $s \in \mathcal{S}_n$ м.в.*

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\mathbb{1}(S(W + u) = s)\mathcal{E}^a_{T,n}(W, u)/W(T) = y - u\right) =\\
= \mathrm{E}\,\mathbb{1}(S(\eta^{u,y}) = s)\mathfrak{e}^a_{T,n}(u, y, s).
\end{aligned}$$

Отримані в Теоремі 4.7.1 представлення є неперервними функціями.

Нехай задані $u \in \mathbb{R}^n$ і $k \in \{0, \ldots, n - 1\}$. Поставимо у відповідність кожній схемі склейки $s = (j_1, \ldots, j_k)$ деяке розбиття множини $\{1, \ldots, n\}$ послідовно на кожному кроці $i = 1, \ldots, k$ об'єднуючи два сусідні блоки розбиття з номерами j_i та $j_i + 1$. Нехай фінальне розбиття складається з блоків $\pi_1, \ldots, \pi_k$. Покладемо $I(s) = \{\min \pi_i \mid i = \overline{1, n - k}\}$. Надалі $q^m_T(u; \cdot)$ – m-вимірна гаусівська щільність з середнім u та дисперсією $T\mathrm{Id}_{m\times m}$.

Теорема 4.9.1. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $u \in \Delta_n$ *і* $s \in \mathcal{S}_{n,n-k}$ *для деякого* $k \in \{0, \dots, n-1\}$. *Тоді для кожного* $j \in \{1, \dots, k\}$ *для всіх* $y \in \Delta_k$

$$p_T^{a,n,s,j}(u;y) = \sum_{L=\{l_1,\dots,l_j\}\subset\{1,\dots,k\}} q_T^j\big(u^{I(s),L}; z^{I(s),L}\big)\times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^{k-j}} dz^{I(s),-L} q_T^{k-j}\big(u^{I(s),-L}; z^{I(s),-L}\big) \int_{\mathbb{R}^{n-k}} dz^{-I(s)} q_T^{n-k}\big(u^{-I(s)}; z^{-I(s)}\big)$$
$$\big(\mathrm{E}\,1\!\!\mathrm{I}(S(\eta^{u,z}) = s)\mathfrak{e}^a_{T,n}(u,z,s)\big)\Big|_{\substack{z\in\mathbb{R}^n,\\ z^{I(s),L}=y}}.$$

В Підрозділі 4.10 отримано представлення точкових щільностей шляхом застосування теореми Гірсанова для потоків Арратья.

ВИСНОВКИ

- Встановлено закон повторного логарифму для розмірів кластерів, утворених в потоці Арратья частинками, що зіткнулися з частинкою зі стартом в нулі. Для потоку Арратья з дрейфом встановлено асимптотику при $t \to 0+$ математичних очікувань таких кластерів.
- Доведено слабку збіжність апроксимуючих процесів, побудованих методом дробових кроків, до $n-$точкового руху потоку Арратья із дрейфом. Отримано оцінки на швидкість збіжності розподілів образів міри Лебега під дієї вказаних вище апроксимуючих потоків до розподілу міри Лебега під дією потоку Арратья з дрейфом. Встановлена неможливість отримання більш сильної, ніж слабка, збіжності в запропонованій схемі.
- Встановлено слабку збіжність зліченних наборів рухів в гладких стохастичних потоках до відповідних зліченних наборів рухів в потоці Харріса з інфінітезимальною коваріацію, заданою характеристичною функцією центрованого стійкого закону, при умові, що інфінітезимальні коваріації гладких потоків збігаються до коваріації граничного потоку рівномірно на компактах. Встановлено збіжність скінченних наборів породжених потоками перетворень числової осі в слабкій-* топології.
- Для потоків Арратья введено поняття точкових щільностей, котрі відповідають скінченному числу точок старту та конкретній послідовності моментів склейки. Встановлено збіжність таких точкових щільностей до точкових щільностей для всього потоку.

- Отримано наступні представлення точкових щільностей: в термінах розв'язків параболічних початково-краєвих задач; в термінах гаусівських щільностей та математичних сподівань деяких стохастичних експонент від броунівських мостів; в термінах умовних математичних сподівань стохастичних експонент для потоку Арратья та щільностей розподілів векторів уцілілих частинок.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. A.A.Dorogovtsev, A.V.Gnegin, and M.B.Vovchanskii, "Iterated logarithm law for sizes of clusters in Arratia flow", *Theory Stoch. Process.*, vol. 18, no. 2, pp. 1–7, 2012.
2. A.A.Dorogovtsev and M.B.Vovchanskii, "Arratia flow with drift and Trotter formula for Brownian web", *Commun. Stoch. Anal.*, vol. 12, no. 1, pp. 89–108, 2018.
3. M.B.Vovchanskii, "Convergence of solutions of SDEs to Harris flows", *Theory Stoch. Process.*, vol. 23, no. 2, pp. 80–91, 2018.
4. A.A.Dorogovtsev and M.B.Vovchanskii, "On approximations of the point measures associated with the Brownian web by means of the fractional step method and the discretization of the initial interval", *Ukrain. Math. J.*, vol. 72, no. 9, pp. 1179-1194, 2020.
5. A.A.Dorogovtsev and N.B.Vovchanskii, "Representations of the finite-dimensional point densities in Arratia flows with drift", *Theory Stoch. Process.*, vol. 25, no. 1, pp. 25-36, 2020.
6. Н.Б.Вовчанский, "Структурные свойства потока Арратья", presented at 19-th International Conference of Young Scientists "Lomonosov", Section "Mathematics and Mechanics", Moscow, April 9-13, 2012. [Online]. Available: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2012/1797/8210_3de5.pdf
7. М.Б.Вовчанський, "Аналог формули Троттера для потоку Арратья", *Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей*, Ворохта, Україна, 25 лютого – 3 березня, 2013.
8. Н.Б.Вовчанский, "Аналог формулы Троттера для потока Арратья", presented at 20-th International Conference of Young Scientists "Lomonosov", Section "Mathematics and Mechanics", Moscow, Russian Federation, April 8-13, 2013. [Online]. Available: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2013/2190/2811_4d58.pdf
9. A.A.Dorogovtsev, M.B.Vovchansky, "Noise and circulations in Brownian stochastic flows", *Міжнародна математична конференція "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народже-*

ння академіка А. М. Самойленка. Тези доповідей, Севастополь, Україна, 23 – 30 червня, 2013, ст. 327.

10. M.Vovchanskii, "Perturbations of singular Brownian flows", *Abstracts of 11th Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics*, Vilnius, Lithuania, June 30 – July 4, 2014, p. 249.
11. M.Vovchanskii, "Perturbations of singular stochastic flows on the real line", *Yu.V.Linnik Centennial Conference "Analytical Methods in Number Theory, Probability Theory and Mathematical Statistics". Section "Probability Theory and Mathematical Statistics". Abstracts*, St.Petersburg, Russian Federation, September 14-18, 2015, p. 57.
12. M.B.Vovchanskii, "Convergence of solutions of SDEs to coalescing Harris flows", *Abstracts of International Conference "Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes", dedicated to the 100th Anniversary of I.I.Gikhman*, Kyiv, Ukraine, September 17-22, 2018, pp. 101–102.
13. A.A.Dorogovtsev, M.B.Vovchanskii, "Finite-dimensional densities for counting measures associated with the Arratia flows", *Proceedings of Scientific Conference "Modern Problems of Stochastic Analysis", dedicated to the 100th anniversary of the birth of academician S.Kh.Sirajdinov*, Tashkent, September 21-22, 2020, pp. 38-40.

АНОТАЦІЇ

Вовчанський М. Б. Стохастичні потоки зі склеюванням та точкові процеси. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика. — Інститут математики НАН України, Київ, 2021.

Робота присвячена одновимірним стохастичним потокам зі склеюванням, їх апроксимаціям та асоційованим точковим процесам. Для потока Арратья встановлюється аналог закону повторного логарифму для розміру кластера в нулі. Доведено слабку збіжність процесів, отриманих при застосуванні методу дробових кроків до броунівської сітки, до $n-$точкового руху потоку Арратья із дрейфом та встановлено оцінку на швидкість збіжності в термінах метрики Вассерштейна в просторі розподілів випадкових мір. Для одного класу потоків Харріса зі склеюванням побудовано апроксимації розв'язками стохастичних диференціальних рівнянь, встановлені збіжність прямого та дуального потоків та збіжність образів міри Лебега від дією таких потоків. Для потоків Арратья введено поняття точкових щільностей, котрі відповідають скінченному числу точок старту та конкретній послідовності моментів скле-

ювання. Отримані представлення точкових щільностей в термінах функцій Гріна параболічних задач, гаусівських щільностей, броунівських мостів, стохастичних експонент для потоку Арратья та розподілів векторів уцілілих частинок.
Ключові слова: потік Арратья, потік Харріса, точковий процес, метод дробових кроків, точкова щільність.

Вовчанский Н. Б. Стохастические потоки со склеиванием и точечные процессы. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 — теория вероятности и математическая статистика. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2021.

Работа посвящена одномерным стохастическим потокам со склеиванием, их аппроксимациям и ассоциированным точечным процессам. Для потока Арратья установлен аналог закона повторного логарифма для розмера кластера в нуле. Доказано слабую сходимость полученных при применении метода дробных шагов к броуновской сети процессов к $n-$точечному движению потока Арратья со сносом и получено оценку на скорость сходимости в терминах метрики Вассерштейна в пространстве распределений случайных мер. Для одного класса потоков Харриса со склеиванием построено аппроксимации решениями стохастических дифференциальных уравнений, показаны сходимость прямого и двойственного потоков и сходимость образов меры Лебега под действием данных потоков. Для потоков Арратья введено понятие точечных плотностей, отвечающих конечному числу точек старта и конкретной последовательности моментов склейки. Получены представления точечных плотностей в терминах функций Грина параболических задач, гауссовских плотностей, броуновских мостов, стохастических экспонент для потока Арратья и распределений векторов уцелевших частиц.
Ключевые слова: поток Арратья, поток Харриса, точечный процесс, метод дробных шагов, точечная плотность.

Vovchanskyi M. B. Coalescing stochastic flows and point processes. — A manuscript.

A thesis for the scientific degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences, 01.01.05 — Probability Theory and Mathematical Statistics. — Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 2021.

The thesis is devoted to one-dimensional stochastic flows with coalescence, their approximations and related point processes. In the first chapter asymp-

totic properties of the behavior of the Arratia flow as a continual system of ordered Brownian particles on $\mathbb{R}$ are studied, and the size of the cluster which contains the particle started from zero is found, the corresponding result being formulated as an analog of the law of iterated logarithm when the time parameter approaches 0. The second half of the first chapter is devoted to obtaining the asymptotics of the means of the sizes of clusters in Arratia flows with drift. The case of linear drift having been considered initially, in order to proceed to the case of arbitrary Lipschitz continuous drift a comparison lemma for semimartingales is established.

In the second chapter the fractional step method is applied to the pair of semigroups the first one of which is driven by a deterministic differential equation while the second one is generated by a Brownian web. The approximations obtained weakly converge in the sense of $n-$point motions to the Arratia flow with the corresponding drift. It is shown that only weak convergence of such approximations via the fractional step method is possible. By using the approach proposed by A.A.Dorogotsev and V.V.Fomichov an estimate on the speed of the convergence is obtained in terms of Wasserstein distances in the space of the distributions of random measures having finite moment of any fixed order. For that, the images of the Lebesgue measure on $[0;1]$ under the actions of the mappings generated by an Arratia flow with drift and the prelimit flows, respectively, are discretized by considering a finite number of starting points, and a coupling of the distributions of $n-$point motions in the proposed realization of the fractional step method is build, leading to estimates on the distance between the distributions of such discrete measures and the initial images of the Lebesgue measure. With necessary technical estimates on the distance between solutions to stochastic differential equations and their approximations via splitting, as well as between the former ones and their approximations via the perturbed at start modification of the fractional step method being established, the stated estimate on the Wasserstein distance follows.

In the third chapter one class of coalescing Harris flows is approximated with solutions of stochastic differential equations w.r.t martingales with spatial parameters in the sense of H.Kunita. The result of Th.E.Harris on the convergence of $n-$point motions in this scheme is generalized and, with the dual flow being properly defined, the analogous convergence of the dual flows associated with the initial ones on the inversed time scale is established, too. The convergence of the images of the Lebesgue measure under the action of the flows and their duals in the space of locally finite nonnegative Borel measures on $\mathbb{R}$ equipped with vague topology is proved.

The fourth chapter is devoted to Arratia flows with drift and associated point processes. The latter ones admit a description in terms of point densities. An explicit expression for points densities as the correlation functions of some Pfaffian process was derived by R.Tribe, O.V.Zaboronski in the case of zero drift. Since such a description is rather complicated and cannot be easily extended to the case of nonzero drift, the problem of obtaining alternative representations of the point densities is addressed. To that end, point densities $p_t^{a,n,k}$ that correspond to finite collections of starting points and point densities $p_t^{a,n,s,k}$ that correspond to specific realizations of the sequence of collisions in a system of n particles are introduced. The convergence of $p_t^{a,n,k}$ to the initial point densities when the interval $[0;1]$ is being approximated with its finite subsets is proved, and an estimate on the speed of the convergence of one-dimensional motions in uniform metric is given. The connection between fundamental solutions of parabolic initial value-boundary problems and transition densities of diffusions gives a representation of the point densities as iterated integrals of Green functions of parabolic initial value-boundary problems.

In the second half of the fourth chapter, the connection between $p_t^{a,n,s,k}$ and $p_t^{0,n,s,k}$ is studied. The approach used is based on the application of the analog of the Girsanov theorem for Arratia flows derived by A.A.Dorogovtsev and T.V.Malovīchko. Since the definitions of the point densities impose conditions on the behavior of a flow or its $n-$point motion only at terminal time, the need to calculate corresponding conditional expectations of special stochastic exponentials for the Arratia flows that were introduced by A.A.Dorogovtsev arises. The latter problem can be reformulated in terms of conditional expectations of modified stochastic exponentials for coalescing Wiener processes on the set of those elementary events which a particular sequence of collision times is observed for, with the condition being imposed on the position of the coalescing Wiener processes at terminal time. Such conditional expectations can be expressed by means of ordinary Wiener processes conditioned to hit specific points, which leads to expressions in terms of stochastic exponentials of Brownian bridges. As a result, representations of point densities for Arratia flows with drift in terms of Gaussian densities and expectations of the aforementioned stochastic exponentials for Brownian bridges are given. Also a representation of such densities in terms of subprobability densities of vectors composed of surviving particles and conditional mathematical expectations of stochastic exponentials for the Arratia flow defined by A.A.Dorogovtsev is derived.

Key words: Arratia flow, Harris flow, point process, fractional step method, point density.