Анотація

Сатур О.Р. Аналіз поведінки траєкторій в моделях складних динамічних систем з притягальною взаємодією. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 "Математика". – Інститут математики НАН України, Київ, 2020.

Ця робота присвячена дослідженню та побудові моделей дискретних динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією. Поняття динамічної системи конфлікту виникло як математичний інструмент для опису поведінки різноманітних складних фізичних систем з двох і більше конфліктно взаємодіючих сторін. Фактично, динамічна система конфлікту – це система, що об'єднує декілька динамічних систем, еволюція яких деформується під дією конфліктної взаємодії між окремими підсистемами. Встановлення закону динаміки всієї системи є нетривіальною задачею в кожному конкретному випадку, адже він має включити в себе інформацію про стани окремих її компонент у кожен момент часу, спосіб конфліктної взаємодії і його вплив на поведінку в наступні моменти часу. Навіть найпростіші випадки є цікавими в силу нелінійності. Мета теорії динамічних систем конфлікту – дати адекватний опис реальним фізичним системам, які складаються не тільки двох, але і багатьох альтернативно взаємодіючих сторін.

Основна задача цієї роботи – розвинути теорію динамічних систем конфлікту, побудувати конкретні моделі та дослідити поведінку траєкторій у випадку, коли окремі підсистеми притягуються між собою. В такому разі ефект конфліктності полягає у тому, що деформується вільна поведінка опонентів. Зокрема, вони можуть втрачати регіони успішної присутності, концентруючись у регіонах спільних атракторів. Знаходження таких граничних атракторів, опис їхньої структури, басейнів притя-

гання, нерухомих рівноважних станів, існування циклічних орбіт – типові задачі в цьому напрямку, які досі були досліджені лише частково.

Конкретизація таких задач щодо моделей складних динамічних систем з притягальною взаємодією є актуальною з точки зору можливих застосувань до різних проблем в економіці, екології, соціології. Знаходження рівноваги між виробництвом та споживанням, використанням ресурсів і їхнім природним відновленням в екологічному балансі, зокрема, пошук компромісів у суперечливих, часто гостро конфліктних соціальних процесах (наприклад, етнічних, релігійних, національних, мовних) – навряд чи можливі без побудови адекватних математичних моделей динамічних систем з різного типу взаємодіями, як відштовхувального, так і притягального характеру.

Окрім чисто теоретичних задач про поведінку траєкторій у конкретних моделях складних динамічних системах з притягальною взаємодією в дисертаційній роботі досліджено залежність основних динамічних характеристик системи від вибору стратегічних параметрів, таких, як активність конфліктної взаємодії, роль мережевих зв'язків між агентами системи, вибору пріоритетних регіонів присутності у процесі ітераційного подрібнення простору, випадкових впливів і змін статистичних даних.

Дисертація складається з анотацій українською й англійською мовами, вступу, трьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел і додатка.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання і методи дослідження, зазначено наукову новизну отриманих результатів, їхнє практичне значення, зв'язок роботи з науковими темами й особистий внесок здобувачки, наведено інформацію про апробацію результатів дисертації.

В основній частині дисертаційної роботи розглядаються динамічні системи конфлікту з притягальною взаємодією в дискретному часі в термінах двох або більше стохастичних (нормованих на одиницю) векторів $\mathbf{p}_i^t = (p_{ij}^t)_{j=1}^n$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $m \geq 2$, $n \geq 2$, залежних від часу. Еволюція в часі задається відображенням, яке позначається символом $\circledast$ і діє у просторі $\mathbb{R}_+^n$.

Відображення $\circledast$ генерує багатокомпонентну динамічну систему в дискретному часі з траєкторіями:

$$\{\mathbf{p}_i^t\} \xrightarrow{\circledast, t} \{\mathbf{p}_i^{t+1}\}, \quad t = 0, 1, \ldots.$$

У загальному випадку координати векторів $\mathbf{p}_i^{t+1}$ визначаються ітеративно за координатами попередніх векторів згідно з системою різницевих рівнянь:

$$p_{ij}^{t+1} = \frac{1}{z^t}\Big(p_{ij}^t\big(\theta^t + 1\big) + \tau_j^t\Big), \quad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n, \ t = 0, 1, \ldots, \quad (1)$$

де $\theta^t = \theta\big(\mathbf{p}_1^t, \mathbf{p}_2^t, \ldots, \mathbf{p}_m^t\big)$ – деяка обмежена додатна функція, яка визначає вільну еволюцію системи, а набір додатних функцій τ_j^t (певним чином залежних від координат векторів $\mathbf{p}_i^t$) відповідає ефекту взаємодії. Значення цих функцій при кожному фіксованому t утворюють деякий нестохастичний вектор з невід'ємними координатами, який позначено символом $\boldsymbol{\mathcal{T}}^t = \big(\tau_j^t\big)_{j=1}^n$ і названо показником атрактора, оскільки його властивості визначають ефект притягання між початковими векторами. Нормувальний знаменник z^t забезпечує стохастичність векторів $\mathbf{p}_i^{t+1}$. Згідно з наведеними рівняннями, відстань між векторами $\mathbf{p}_i^t$ в l_1-нормі збігається до нуля,

$$\|\mathbf{p}_i^t - \mathbf{p}_k^t\|_1 = \sum_{j=1}^n |p_{ij}^t - p_{kj}^t| \to 0, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, \ldots, m,$$

тому відображення $\circledast$, задане цими рівняннями, описує притягальну взаємодію.

Побудова динамічної системи на основі різницевих рівнянь (1) і аналіз її загальних властивостей наведено у розділі 2 після огляду літератури за темою дисертації у розділі 1. У підрозділах 2.1–2.4 вивчаються різні моделі динамічних систем конфлікту з притяганням, які описують поведінку спочатку пари, а потім довільної скінченної кількості опонентів, із різним способом задання координат τ_j^t для показника атрактора. Зокрема, досліджено модель динамічної системи конфлікту у випадку, коли τ_j^t вибирається як мінімальне значення j-их координат у векторів $\mathbf{p}^t$, $\mathbf{r}^t$. Таку динамічну систему узагальнено на випадок скінченної кількості взаємодіючих сторін. Доведено існування нерухомих станів та наведено їхній опис у термінах граничних значень вектора $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{t=\infty}$. Побудовано декілька конкретних варіантів цієї моделі. Встановлено явний взаємозв'язок граничного стану системи й показника атрактора. Знайдено умови на спосіб визначення $\boldsymbol{\mathcal{T}}$, за яких усі траєкторії збігаються до ω-граничної множини $\boldsymbol{\Gamma}^\infty$, яка є циклом. Доведена нестійкість таких граничних орбіт. Усі результати проілюстровано прикладами з комп'ютерними симуляціями. Важливо, що моделі динамічних систем такого типу можуть описувати динаміку реальних процесів. Як ілюстрація, можна вважати, що показнику атрактора $\boldsymbol{\mathcal{T}}^t$ відповідає характер зовнішнього впливу на систему (наприклад, інформаційний вплив на суспільство). Керуючи значеннями величин показника атрактора, можна як описувати, так і контролювати поведінку системи.

Розділ 3 повністю присвячений побудові конкретних моделей. Так, підрозділ 3.1 присвячено різним варіантам моделі поширення переконань, які з часом наближаються до консенсусу. Ця модель фактично є аналогом відомих побудов, але ґрунтується на зовсім іншому законі взаємовпливу між агентами й істотно використовує теорію динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією. Механізм взаємодії між двома агентами задається за допомогою різницевих рівнянь виду (1) і припускає детальний аналіз динаміки. Зокрема, в роботі описано поведінку агентів у випадку прийняття бінарних рішень у термінах часової еволюції векторів і траєкторій як з двома, так і з багатьма альтернативними позиціями. Показано, що відмінність між переконаннями агентів впливає на інтенсивність взаємодії.

Підрозділ 3.2 описує проблему існування достовірної події в динамічних системах конфлікту. Тут розглянуто найпростішу абстрактну модель динамічної системи конфлікту з притягальною взаємодією у випадку лише двох векторів $\mathbf{p}^t$ та $\mathbf{r}^t$, коли функція $\theta^t = 0$, а координати τ_j^t показника атрактора визначено як добутки координат векторів $\mathbf{p}^t$, $\mathbf{r}^t$, тобто $\tau_j^t = p_j^t r_j^t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$. Достовірність події характеризує стан системи зі скінченною множиною позицій ω_i, коли всі координати стають нульовими, крім однієї, яка дорівнює одиниці для обох векторів. Модель припускає інтерпретацію задачі про пошук умов, коли різні дискретні випадкові розподіли притягуються та концентруються у фіксованій позиції із одиничною ймовірністю. Одержано ряд достатніх ознак існування достовірної події при $t \to \infty$. Найпростіші з них формулюються в термінах максимальних значень координат p_i, r_i, добутків цих координат $\rho_i = p_i r_i$, їхніх сум $\sigma_i = p_i + r_i$ або деяких комбінацій з $\kappa_i = \sigma_i + 2\rho_i$. Навіть у цьому простому випадку виникають питання нерозв'язані досі повністю. Зокрема питання про повний опис координат із властивістю $p_j^t \to 0$, $r_j^t \to 0$, $t \to \infty$. Якщо достовірну подію інтерпретувати, як стан консенсусу в соціальних мережах, то одержані результати можуть бути застосовані у моделях виборів та моделях формування поглядів.

У підрозділі 3.3 розглянуто спектральну задачу для розподілів динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією на просторах з ітераційним фрактальним подрібненням. Знайдено критерій у термінах початкових розподілів, який гарантує виникнення точкового спектру у граничних розподілах. Основний результат стверджує, що головна умова виникнення точкового спектру – це стратегія пріорітету над опонентом у єдиному регіоні ω_i на кожному кроці.

Нарешті, у підрозділі 3.4 побудовано модель динамічної системи конфлікту, що описує еволюцію поширення біологічних популяцій на ресурсному просторі при постійних зовнішніх умовах для існування. Як і в абстрактному випадку, динаміка розглядається в термінах двох векторів $\mathbf{p}^t$ та $\mathbf{r}^t$. Координати першого з них змінююся згідно з рівняннями (1), де $\theta^t = 0$, а τ_j^t визначені через координати вектора $\mathbf{r}^t$ з додатковими параметрами c_j, $j = 1, \ldots, n$. Доведено існування рівноважного атрактора, досліджено його стійкість та встановлено явний вигляд граничного стану залежно від c_j. Параметри c_j трактуються як незмінні в часі величини, які характеризують умови сприятливості для існування популяції в кожному з регіонів ω_j. Обчислення явних значень граничних координат (а також численні комп'ютерні симуляції) доводять, що існує пряма їх залежність цих параметрів: чим більше значення c_j, тим більше значення відповідної j-ої граничної координати. Тобто сприятливіші умови для існування популяції в деякому регіоні приводять до збільшення кількості особин популяції в цьому регіоні. Це підтверджує адекватність математичної моделі.

Додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Ключові слова: складна динамічна система, динамічна система конфлікту, різницеве рівняння, багатокомпонентна динамічна система, композиція (перетворення чи відображення) конфлікту, притягальна взаємодія, нерухома точка, граничний стан, стійкість граничного стану, дискретна міра, стохастичний вектор, достовірна подія, стратегія пріоритету, ітераційне подрібнення простору, точковий спектр.

Abstract

Satur O.R. Analysis of trajectories behavior in models of complex dynamical systems with attractive interaction. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Philosophy, speciality 111 “Mathematics”. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2020.

The thesis is devoted to the study and construction of models of discrete dynamic conflict systems with attractive interaction. The notion of dynamic conflict system has appeared as a mathematical tool for describing the behavior of various complex physical systems with two or more conflicting sides. In fact, dynamic conflict system is a system that unites several dynamic systems, whose evolution is deformed under influence of conflict interaction between separate subsystems. Identification of the law of the dynamics of the entire system is a non-trivial task in each specific case; this law must include information about the states of individual components of the system at each moment of time, the type of conflict interaction and its influence on behavior of the system at next moments of time. Even the simplest cases are interesting because of their nonlinearity. The purpose of the theory of dynamic systems of conflict is to give an adequate description of real physical systems, which consist not only of two, but also of many interacting sides.

The purpose of the thesis is to develop the theory of dynamic conflict systems, to build specific models and to study the trajectories behavior in the case when separate subsystems attract each other. In this case, the effect of conflict is that the free opponents behavior is deformed. In particular, they can lose regions of successful presence by concentrating in regions of joint attractors. Finding such limiting attractors, describing their structure, basins of attraction, stationary equilibrium states, the existence of cyclic orbits are typical problems in this research area, which have so far been studied only partially.

The specification of such problems in relation to models of complex dynamic systems with attractive interaction is relevant from the point of view of possible applications in various problems in economics, ecology and sociology. Finding a balance between production and consumption, the use of resources and their natural restoration in the ecological balance, in particular, the search for compromises in contradictory, often acutely conflicting social processes (for example, ethnic, religious, national, linguistic) are not possible without constructing adequate mathematical models of dynamic systems with different types of interactions, both repulsive and attractive.

In addition to purely theoretical problems on the trajectories behavior in specific models of complex dynamic systems with attractive interaction, the thesis concerns the dependence of the main dynamic characteristics of the system on the choice of strategic parameters, such as the activity of conflict interaction, the role of network connections between system agents, the choice of priority regions of presence in the iterative process, division of space, random influences and changes in statistical data.

The dissertation consists of annotations in Ukrainian and in English, introduction, three chapters of the main results, conclusions, the list of references and appendix.

The introduction grounds the relevance of the research topic, formulates the purpose, object, subject, task, and methods of the research, indicates the scientific novelty of the obtained results, their practical significance, the relation of the research to scientific programs, the personal contribution of the applicant, and also points out where the results of the dissertation have been disseminated in both conference talks and journal publications.

The main part of the thesis is devoted to dynamic conflict systems with attractive interaction in discrete time in terms of two and more stochastic (normalized to one) time-dependent vectors $\mathbf{p}_i^t = (p_{ij}^t)_{j=1}^n$, $i = 1, \dots, m$, $m \geq 2$, $j = 1, \dots, n$, $n \geq 2$. Evolution in time is given by the mapping, which is denoted by the symbol $\circledast$ and acting in space $\mathbb{R}_+^n$.

The mapping $\divideontimes$ generates multicomponent dynamical system in discrete time with trajectories

$$\{\mathbf{p}_i^t\} \xrightarrow{\divideontimes, t} \{\mathbf{p}_i^{t+1}\}, \quad t = 0, 1, \ldots.$$

In the general case, the coordinates of the vectors $\mathbf{p}_i^{t+1}$ are determined iteratively from the coordinates of the previous vectors using the system of difference equations:

$$p_{ij}^{t+1} = \frac{1}{z^t}\big(p_{ij}^t\big(\theta^t + 1\big) + \tau_j^t\big), \quad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n, \ t = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

where $\theta^t = \theta\big(\mathbf{p}_1^t, \mathbf{p}_2^t, \ldots, \mathbf{p}_m^t\big)$ is some bounded positive function that determines the free evolution of the system, and the set of positive functions τ_j^t (depending on the vectors coordinates $\mathbf{p}_i^t$) corresponds to the interaction effect. The values of these functions for each fixed t form some non-stochastic vector with non-negative coordinates, denoted by the symbol $\boldsymbol{\mathcal{T}}^t = \big(\tau_j^t\big)_{j=1}^n$ and called the attractor index, since its properties determine the effect of attraction between the initial vectors. The normalizing denominator z^t ensures the stochasticity of the vectors $\mathbf{p}_i^{t+1}$. According to the above equations, the distance between vectors $\mathbf{p}_i^t$ in l_1-norm converges to zero,

$$\|\mathbf{p}_i^t - \mathbf{p}_k^t\|_1 = \sum_{j=1}^n |p_{ij}^t - p_{kj}^t| \to 0, \quad i \neq k, \ i, k = 1, \ldots, m,$$

so the mapping $\divideontimes$ given by these equations describes an attractive interaction.

The construction of dynamical system based on difference equations (1) and an analysis of its general properties are given in Chapter 2 after review of literature on the topic of the thesis given in Chapter 1. In Sections 2.1–2.4 we study various models of dynamic conflict systems with involvement, which firstly describe the behavior of a pair, and then of an arbitrary finite number of opponents, with a different way of specifying the coordinates τ_j^t for the attractor index. In particular, a model of dynamic conflict system is investigated in the case when τ_j^t is chosen as the minimum value of the coordinates of the index j in vectors $\mathbf{p}^t$, $\mathbf{r}^t$. Such dynamical system is generalized for the case of a finite number of interacting opponents. The existence of fixed points is proved and their description in terms of the limiting values of the vector $\mathcal{T}^{t=\infty}$ is given. Several specific variants of this model have been constructed is given. An explicit relationship was established between the limiting state of the system and the attractor index. Conditions for the method of defining $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ are found, under which all trajectories coincide with the ω-limit set $\mathbf{\Gamma}^{\infty}$, which is a cycle. The instability of such limiting orbits is proved. All results are illustrated with examples from computer simulations. It is important that models of dynamical systems of this kind can describe the dynamics of real processes. As an illustration, we can assume that the attractor index $\boldsymbol{\mathcal{T}}^t$ corresponds to the nature of the external influence on the system (for example, informational influence on society). By controlling the values of the attractor exponent, one can both describe and control the behavior of the system.

Chapter 3 is entirely devoted to building specific models. So Section 3.1 is concerned with various variants of the model of the spread of beliefs, which approach a consensus over time. This model is essentially an analogue of well-known constructions, but is based on a completely different law of mutual influence between agents and essentially uses the theory of dynamic conflict systems with attractive interaction. The mechanism of interaction between two agents is specified using difference equations of the form (1) and involves a detailed analysis of the dynamics. In particular, the thesis describes the behavior of agents in the case of making binary decisions in terms of the time evolution of vectors and trajectories with both two and many alternative positions. It is shown that the difference between agents opinion affects the intensity of interaction.

Section 3.2 deals with the problem of the existence of sure event in dynamic conflict systems. Here we consider the simplest abstract model of dynamic conflict system with attractive interaction in the case of only two vectors $\mathbf{p}^t$ and $\mathbf{r}^t$, where function $\theta^t = 0$, and coordinates τ_j^t of the attractor index are defined as the product of coordinates of vectors $\mathbf{p}^t$, $\mathbf{r}^t$, that is $\tau_j^t = p_j^t r_j^t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$. The sure event is characterized by the state of a system with finitely many positions ω_i when all coordinates of the distribution are equal to zero, except a single fixed coordinate equal to 1. The model assumes the interpretation of the problem of searching for conditions when various discrete random distributions are attracted and concentrated in fixed position with unit probability. We establish a number of sufficient conditions under $t \to \infty$. The simplest of them are formulated in terms of the maximum values of the coordinates p_i, r_i, the products of these coordinates $\rho_i = p_i r_i$, their sums $\sigma_i = p_i + r_i$ or some combinations with $\kappa_i = \sigma_i + 2\rho_i$. Even in this simple case, questions arise that have not yet been fully resolved. In particular, the question of a complete description of coordinates with the property $p_j^t \to 0$, $r_j^t \to 0$, $t \to \infty$. If the sure event is interpreted as the state of consensus in social networks, then the obtained results can be used in voter and opinion-formation models.

Section 3.3 treated the spectral problem for the distributions of dynamic conflict systems with attractive interaction on spaces with iterative division. Conditions are found in terms of initial distributions that guarantees the existence of the point spectrum in the limiting distributions. The main result states that the main condition for the existence of the point spectrum is the strategy of priority over the opponent in a single region ω_i at every step.

Finally in Section 3.4 model of dynamic conflict system is constructed, which describes evolution of the distribution of biological populations on the resource space under constant external conditions for existence. As in the abstract case, the dynamics is considered in terms of two vectors $\mathbf{p}^t$ and $\mathbf{r}^t$. The coordinates of the first of them change according to the equations (1), where $\theta^t = 0$ and τ_j^t are defined through the coordinates of the vector $\mathbf{r}^t$ with additional parameters c_j, $j = 1, \ldots, n$. The existence of an equilibrium attractor is proved, its stability is investigated and an explicit form of the limiting state is established depending on c_j. Constants c_j are interpreted as time-invariable values that characterize the conditions for the existence of a population in each ω_j. Calculations of the explicit values of the limiting coordinates (as well as numerous computer simulations) prove that there is a direct dependence of these parameters: the larger the value of c_j, the larger the value of the corresponding limit coordinate. Thus favorable conditions for the existence of a population in a certain region lead to an increase in the number of individuals of the population in this region. This confirms the adequacy of the mathematical model.

Appendix contains the applicant's publications list concerning the topic of the thesis and the list of seminars and conferences where the results of the dissertation have been reported and discussed.

Key words: complex dynamic system, dynamical conflict system, difference equation, multi-component dynamical system, conflict composition (interaction or mapping), attractive interaction, fixed point, limit state, stability of limit state, discrete measure, stochastic vector, sure event, strategy of priority, iterative division of space, point spectrum.