

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Денеги Ірини Вікторівни

«Квадратичні диференціали та симетризаційні методи в задачах про

екстремальне розбиття комплексної площини»,

представленої на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

Робота присвячена розвитку методів і підходів для дослідження широкого кола екстремальних задач, які виникають в геометричній теорії функцій комплексної змінної та її застосуваннях. Дослідження, пов'язані з вивченням екстремальних задач геометричної теорії функцій комплексної змінної беруть початок у відомих роботах Б. Рімана, А. Пуанкаре, П. Кьобе, К. Каратеодорі, Ф. Ріса, М. Ріса, Р. Неванліни, Л. Бібербаха, Г. Пойї, Г. Сегьо та інших відомих вчених. Цією тематикою займалися М.О. Лаврентьєв, Грьотш, Т. Гронуолл, К. Льовнер, Г.М. Голузін, М.О. Лебедева, З. Нехарі, Дж. Дженкінс, В.К. Хейман, Г. Грунський, П.П. Куфарєв, Ю.Є. Алєніцин, І.Є.Базилевич, В.К. Дзядик, І.П. Мітюк, М. Шиффер, П. Дюрєн, П.М. Тамразов, І.А. Александров, В.Я. Гутлянський, М. Гарабєдян, Е. Рейх та багато інших видатних математиків. До теперішнього часу створені і продовжують інтенсивно розвиватися метод внутрішніх та граничних варіацій, принцип площ, параметричний метод Льовнера, метод екстремальних метрик і квадратичних диференціалів, метод симетризації та інші методи дослідження метрико-геометричних властивостей аналітичних функцій та конформних відображень. Починаючи з 80-х років минулого сторіччя В.М. Дубініним були створені декілька потужних методів дослідження екстремальних задач геометричної теорії функцій. Серед цих методів слід відмітити метод розділяючого перетворення, який, як показала практика, надає певні переваги при дослідженні екстремальних проблем про взаємно неперетинні області, що створюють добре відомий напрям геометричної теорії функцій комплексної змінної. Дисертаційна робота І.В. Денеги якраз відноситься до цього напрямку і її актуальність не викликає сумнівів як з точки зору досліджуваних в роботі проблем сучасної геометричної теорії функцій комплексної змінної, так і з точки зору можливих застосувань до задач комплексного аналізу.

Відмітимо також, що дисертація виконана в рамках наукових тем

№0116U003060 і №0117U004077, які розробляються в Інституті математики НАН України.

Дисертація складається з анотації, списку публікацій здобувачки, змісту, переліку умовних позначень, вступу, сімох розділів, висновків, списку цитованої літератури, який містить 236 найменувань, додатку, який містить список публікацій здобувачки за темою дисертації й відомості про апробацію результатів дисертації, і написана на 351 сторінці.

Метою дослідження є розробка нових і вдосконалення наявних методів і підходів для розв'язку задач про екстремальне розбиття комплексної площини, посилення й узагальнення відомих результатів. Для розв'язку поставлених задач застосовуються методи комплексного аналізу, теорії потенціалу і методи теорії квадратичних диференціалів.

Перед тим як перейти до короткої характеристики основних результатів дисертації, здійснимо короткий екскурс в історію досліджуваної проблеми.

В 1934 році М.О. Лаврентьев розв'язав наступну задачу: якщо пара функцій

$$\{f_1(z), f_2(z)\} \quad f_1(0) = a_1, \quad f_2(0) = a_2,$$

відображає конформно та однолисто одиничний круг відповідно на дві взаємно неперетинні області, то

$$|f_1'(0)| \cdot |f_2'(0)| \leq |a_1 - a_2|^2.$$

Знайдена оцінка є точною і вказані екстремальні конфігурації. При цьому були встановлені глибокі зв'язки між цією задачею, відомої задачею Чеботарьова про континууми найменшої ємності і проблемами поліноміальної апроксимації. В 1938–1946 роки було розроблено метод граничних і внутрішніх варіацій для однолистих аналітичних функцій, що дало змогу Г.М. Голузину в 1951 році поставити аналогічну задачу для систем із n функцій та записати необхідні умови екстремуму в термінах деякого диференціально-функціонального рівняння. При $n = 3$ йому вдалося розв'язати задачу до кінця, встановивши точну нерівність

$$|f_1'(0)| \cdot |f_2'(0)| \cdot |f_3'(0)| \leq \frac{64}{81\sqrt{3}} \cdot |a_1 - a_2| \cdot |a_1 - a_3| \cdot |a_2 - a_3|.$$

При $n = 4$ задача розв'язана Г.В. Кузьміною в 1981 році в її докторській дисертації. При $n \geq 5$ проблема залишається відкритою до нині, що стимулює появу нових методів і підходів до дослідження метрико-геометричних задач комплексного аналізу.

Робота є об'ємною й інформативно насиченою. Основні результати дисертації доведено в розділах 2 – 7. Наведемо короткий опис дисертації по розділах.

У вступі дається короткий огляд результатів автора. В першому розділі роботи дається історична довідка щодо проблем, які досліджуються, формулюються означення, поняття і допоміжні твердження, робиться історичний огляд результатів попередників.

У другому та третьому розділах розроблено метод отримання достатньо ефективних оцінок зверху широкого кола функціоналів, що досліджуються в задачах про екстремальне розбиття комплексної площини. За допомогою цього методу отримано ефективні оцінки добутків внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей з фіксованими полюсами відповідних квадратичних диференціалів на (n, m) -променевих системах точок комплексної площини як при будь-яких можливих значеннях степеня γ внутрішнього радіуса області, що містить нульову точку (теорема 2.2.1), так і для степеня γ внутрішніх радіусів областей відносно початку координат і нескінченно віддаленої точки (теорема 3.1.1). Як наслідки, одержано відповідні результати у випадку, коли полюси відповідних квадратичних диференціалів розміщені на одиничному колі (теореми 2.4.3, 3.2.3), та у випадку, коли області є симетричними відносно одиничного кола (теореми 2.4.4, 3.2.4). Встановлено умови, за яких конфігурація областей і точок неістотна. Варто відмітити, якщо в Зауваженні 2.2.1 покласти $n = 1$ і $m = 1$, то отримуємо відому нерівність М.О. Лаврентьєва для двох областей.

У 4–6 розділах в якості застосування і непрямого підтвердження ефективності отриманих вище оцінок функціоналів, знайдено посилені результати стосовно точних розв'язків відкритих екстремальних проблем про взаємно неперетинні області комплексної площини у випадку вільних полюсів відповідних квадратичних диференціалів.

Зокрема, у четвертому розділі розглядається відома задача В.М. Дубініна про максимум добутку

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

де γ – задане дійсне додатне число. У цьому розділі у теоремі 4.1.1 вперше одержано розв'язок цієї проблеми про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів двох областей відносно точок одиничного кола на степінь γ внутрішнього радіусу області відносно початку координат при довільному $\gamma \in (0, 2]$ за умови, що всі три області попарно не перетинаються, та доведено узагальнення цього результату (теорема 4.2.1). У теоремі 4.5.2 розв'язано задачу

про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деякий додатний степінь γ внутрішнього радіусу області відносно початку координат при $\gamma \in (0, \sqrt{n}]$, $n \geq 3$. У теоремі 4.5.1 отримано розв'язок цієї задачі при $\gamma \in (0, n]$, $n \geq 4$, за умови додаткового обмеження величини внутрішнього радіуса області B_0 відносно початку координат.

У п'ятому розділі розглядається узагальнена задача В.М. Дубініна, тобто замість одиничного кола розглядається n -променева система точок, яка задовольняє певні умови. І одержано її розв'язок для $\gamma \in (0, \sqrt{n}]$, $n \geq 3$ (теорема 5.3.2) і $\gamma \in (0, n^{\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{\ln n}}}]$, $n > e^9$ (теорема 5.2.2).

Шостий розділ дисертаційної роботи присвячений розв'язанню задачі про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деякий додатний степінь γ внутрішнього радіусу області відносно початку координат із додатковою умовою симетрії областей відносно одиничного кола. У теоремі 6.3.1 одержано її розв'язок для $\gamma \in (0, \sqrt{n}]$, $n \geq 8$.

У сьомому розділі наведено оцінки добутків внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок, розміщених на одній прямій за всіх можливих значень степеня γ внутрішнього радіуса області відносно початку координат (теорема 7.4.1) (степеня γ внутрішніх радіусів областей відносно початку координат і нескінченно віддаленої точки (теорема 7.4.2), степеня γ внутрішнього радіуса області відносно нескінченно віддаленої точки (теорема 7.4.3)). Як наслідки отримано результати, коли на двох променях міститься однакова кількість точок (наслідки 7.4.1, 7.4.2, 7.4.3).

ЗАУВАЖЕННЯ

1) Щодо структури самої дисертації, краще було б сформулювати спочатку точні розв'язки задач про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами відповідних квадратичних диференціалів, а потім навести оцінки добутків внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються, з фіксованими полюсами відповідних квадратичних диференціалів.

2) Зробити більше порівнянь одержаних оцінок зверху функціоналів з результатами робіт попередників. При порівнянні отриманих результатів з результатами попередників, авторка систематично використовує фразу «суттєві

узагальнення та посилення» не приводячи конкретного порівняння й аналізу відповідних результатів.

3) При доведенні теореми 3.1.1 слід було б детальніше розписати, що $r(B_0, 0) = r(B_0^+, \infty)$, $B^+ = \left\{ z: \frac{1}{z} \in B \right\}$.

4) Практично до кожного результату роботи варто було б сформулювати наслідок на мові регулярних конформних відображень відкритого одиничного круга на попарно неперетинні однозв'язні області.

5) В роботі є стилістичні помилки, русизми і ряд дрібних неточностей. Наприклад: а) на стор. 75 в 13 рядку зверху «границя» слід замінити «межа»; б) на стор. 77 в 9 рядку знизу замість B_k повинно бути $\bar{C} \setminus B_k$; в) у висновках до 3 розділу на стор. 148 в 4 рядку знизу замість $\gamma \in R^+$ повинно бути $\gamma \geq \frac{n+2}{2}$; г) на стор. 210 в 9 рядку зверху «задовільняють умові» слід замінити «задовольняють умову».

Переходячи до загальної оцінки, відзначу, що дисертаційна робота І.В. Денегі є завершеною науковою працею, присвяченою дослідженню актуальних проблем геометричної теорії функцій комплексної змінної. Результати дисертаційної роботи є новими, а їх обґрунтованість базується на строгих та повних доведеннях.

Основні результати дисертації своєчасно і достатньо детально висвітлені в 26 наукових публікаціях авторки у виданнях, включених до «Переліку наукових фахових видань України». Серед публікацій 13 статей опубліковано у виданнях, що індексуються у наукометричній базі Scopus. Результати роботи пройшли широку апробацію на багатьох міжнародних наукових конференціях, а також на провідних наукових семінарах.

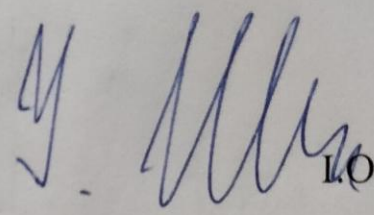
Автореферат правильно і достатньо повно відображає зміст дисертації. Наведені вище зауваження не є принциповими і не впливають на загальну високу оцінку дисертаційної роботи.

Враховуючи все сказане вище, вважаю, що дисертаційна робота «Квадратичні диференціали та симетризаційні методи в задачах про екстремальне розбиття комплексної площини» містить нові важливі наукові

результати, за рівнем наукових досліджень, їх науковою новизною, актуальністю, кількістю публікацій у наукових фахових виданнях і рівнем апробації відповідає вимогам пп. 9, 10, 12, 13, 14 «Порядку присудження наукових ступенів» (Постанова Кабінету Міністрів України №567 від 24.07.2013 зі змінами) щодо докторських дисертацій, а її авторка Ірина Вікторівна Деніга заслуговує на присудження їй наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Офіційний опонент

доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри математичного аналізу
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка


І.О. Шевчук

Підпис засвідчує
ВЧЕМ СЕКРЕТАР НДЧ
КАРАУЛЬНА Н.В.
08.02.2021р.



Нагітшов 8.02.2021р.