

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Денеги Ірини Вікторівни

«Квадратичні диференціали та симетризаційні методи в задачах про екстремальне розбиття комплексної площини»,

представленої на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

Представлена робота присвячена дослідженню широкого класу екстремальних задач в геометричній теорії функцій комплексної змінної, а саме – екстремальним задачам по знаходженню максимумів функціоналів, складених із добутків внутрішніх радіусів областей. Інтерес до задач про розбиття комплексної площини отримав потужний імпульс після опублікування статті М.О. Лаврентьєва у 1934 році в якій він розв'язав задачу про знаходження максимуму добутку конформних радіусів двох неперетинних областей відносно двох фіксованих точок комплексної площини. Надалі розв'язуванням задач про екстремальне розбиття займалися такі відомі вчені, як Г.М. Голузін, В.Я. Гутлянський, В.М. Дубінін, Г.В. Кузьміна, Н.І. Колбіна, П.П. Куфарєв, М.О. Лебедев, Ю.Є. Аленіцин, Дж. Дженкінс, В.К. Хейман, В.Р. Кюнау, З. Нехарі, І.П. Мітюк, І.О. Олександров, П.М. Тамразов, Г.П. Бахтіна, Л.В. Ковальов, Є.Г. Ємельянов, О.К. Бахтін та багато інших. Слід відмітити, що такі задачі пов'язані з дослідженням структури траєкторій квадратичних диференціалів, оскільки межі екстремальних областей складаються із дуг цих траєкторій.

Далі узагальнення задачі М.О. Лаврентьєва проявилось через збільшення числа областей, відмови від фіксації полюсів квадратичних диференціалів, переходу до розширеної комплексної площини, розширення об'єкту дослідження – області, що взаємно не перетинаються, замінюють деяким класом відкритих множин або частково перетинних областей. Прогрес у розв'язанні таких задач потребував розвитку нових і вдосконалення вже відомих методів дослідження – параметричних, екстремальних метрик, квадратичних диференціалів, симетризації та варіації. Найбільш яскраві результати були отримані в напрямі глибокого розвитку та ефективного поєднання симетризаційних перетворень з теорією квадратичних диференціалів та числовими методами. М.О. Лебедев вдосконаливши метод площ розв'язав значну низку задач з фіксованими полюсами відповідних квадратичних диференціалів. Слід зазначити побудову В.М. Дубініним ефективного методу

кусково-поділяючого перетворення, за допомогою якого ним розв'язана низка задач з довільною, але фіксованою кількістю вільних полюсів на одиничному колі. Г.В. Кузьміна розв'язала екстремальну задачу, що стосується чотирьох вільних полюсів на площині, а Є.Г. Ємельянов – задачу з двома колами. У роботах О.К. Бахтіна, А.Л. Таргонського, В.Є. В'юн, Я.В. Заболотного, Л.В. Вигівської, І.Я. Дворак відбулося істотне послаблення вимог щодо геометрії взаємного розташування вільних полюсів квадратичних диференціалів, які відповідають задачам, що вивчаються, розроблення методу "керуючих" функціоналів, введення поняття променевих систем точок, що дало змогу розширити класи екстремальних задач, для яких отримано повний розв'язок. Це далеко не повний перелік важливих результатів в цьому напрямі за останній період. Тому тематика пов'язана з розв'язуванням екстремальних задач на класах областей, які попарно не перетинаються, є безумовно актуальною.

Але не зважаючи на велику кількість досліджень (особливо в останнє десятиріччя), ряд важливих проблем в цій теорії залишаються відкритими. Саме тому актуальність дисертаційної роботи І.В. Денегі не викликає сумнівів з точки зору досліджуваних в роботі проблем геометричної теорії функцій комплексної змінної. Ця робота вносить свій вклад у виконання програми, яка була намічена провідними математиками, а її зміст гармонійно доповнює і розвиває початкові ідеї та методи.

Зауважимо, що з кожного результату дисертації можна отримати, як простий наслідок, новий результат на класі однолистих функцій.

Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, 7 розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 236 найменувань, і додатка, який містить список публікацій здобувачки за темою дисертації й відомості про апробацію результатів дисертації. Повний обсяг дисертації становить 351 сторінку.

У роботі запропоновано метод отримання достатньо ефективних оцінок зверху трьох функціоналів, що досліджуються в задачах про екстремальне розбиття розширеної комплексної площини.

У першому розділі описано відомі результати, які або використовуються здобувачкою у своїх дослідженнях, або займають важливе місце в цій тематиці.

У другому та третьому розділах одержано оцінки зверху функціоналів першого, другого та третього типу на фіксованих (n, m) -променевих системах точок за всіх можливих значень деякого параметра γ (теорема 2.2.1, теорема 2.3.1, теорема 3.1.1). Як наслідки одержано відповідні результати у випадку, коли полюси відповідних квадратичних диференціалів розміщені на одиничному колі (теорема 2.4.3, теорема 3.2.3), та у випадку, коли області є

симетричними відносно одиничного кола (теорема 2.4.4, теорема 3.2.4). Встановлено умови, за яких конфігурація областей і точок неістотна. Варто відмітити, що Зауваження 2.2.1 є узагальненням теореми М.О. Лаврентьєва для випадку скінченного числа конгруентних областей.

У четвертому, п'ятому та шостому розділах на основі отриманих оцінок функціоналів, знайдено посилені результати стосовно точних розв'язків відкритих екстремальних проблем про взаємно неперетинні області комплексної площини у випадку вільних полюсів відповідних квадратичних диференціалів.

У четвертому розділі розглядається відома задача В.М. Дубініна про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деякий додатний степінь γ внутрішнього радіусу області відносно початку координат. Вперше одержано розв'язок цієї проблеми про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів двох областей відносно точок одиничного кола на степінь γ внутрішнього радіусу області відносно початку координат при довільному $\gamma \in (0, 2]$ за умови, що всі три області попарно не перетинаються, (теорема 4.1.1) і доведено узагальнення цього результату (теорема 4.2.1). Також розв'язано цю задачу при $\gamma \in (0, \sqrt{n}]$, $n \geq 3$ (теорема 4.5.2) та $\gamma \in (0, n]$, $n \geq 4$ за умови додаткового обмеження величини внутрішнього радіуса області B_0 відносно початку координат (теорема 4.5.1).

У п'ятому розділі одержано розв'язок узагальненої задачі В.М. Дубініна (замість одиничного кола розглядається n -променева система точок, яка задовольняє певні умови) для $\gamma \in (0, \sqrt{n}]$, $n \geq 3$ (теорема 5.3.2) і $\gamma \in (0, n^{\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{11n}}}]$, $n > e^9$ (теорема 5.2.2).

У шостому розділі одержано розв'язок задачі про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деякий додатній степінь γ внутрішнього радіусу області відносно початку координат із додатковою умовою симетрії областей відносно одиничного кола для $\gamma \in (0, \sqrt{n}]$, $n \geq 8$ (теорема 6.3.1).

У сьомому розділі доведено оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок, розміщених на одній прямій за всіх можливих значень деякого параметра γ (теорема 7.4.1, теорема 7.4.2, теорема 7.4.3). Як наслідки отримано результати, коли на двох променях міститься однакова кількість точок (наслідки 7.4.1, 7.4.2, 7.4.3).

Отже, дисертація є завершеним дослідженням з геометричної теорії функцій комплексної змінної. Основні результати дисертації є новими, чітко обґрунтованими і повністю викладені в опублікованих 26 роботах у виданнях, включених до «Переліку наукових фахових видань України». Серед публікацій 13 статей опубліковано у виданнях, що індексуються в наукометричній базі Scopus. Частково вони також висвітлені у матеріалах 17 міжнародних конференцій. Результати мають достатньо широку апробацію, оскільки доповідались на семінарах в наукових установах України та за кордоном. Здійснені дослідження є актуальними і їх результати можуть бути використані як у подальших теоретичних дослідженнях у різноманітних областях математики, так і при вивченні питань комплексного аналізу, голоморфної динаміки, теорії функцій і теорії апроксимації. Зміст автореферату ідентичний основним положенням дисертації. Автореферат достатньо повно відображає основні положення та висновки дисертації.

До дисертації є зауваження:

- 1) Слід було навести більше наслідків для класу однолистих функцій.
- 2) На с. 122, с. 133 використовується нерівність $\prod_{k=1}^n \alpha_k \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n$, потрібно було пояснити її справедливість.
- 3) На с. 136 варто було б детальніше розписати перехід від співвідношення (3.1) до співвідношення (3.2).
- 4) На с. 75 в 13 рядку зверху «границя» слід замінити «межа».
- 5) На с. 77 в 9 рядку знизу замість V_k повинно бути $\bar{C} \setminus V_k$.
- 6) На с. 113 в 1 рядку зверху, на с. 137 в 9 рядку зверху, на с. 304 в 10 рядку зверху авторка використовує нерівність Коші, написано «із нерівності Коші ...», варто було б детальніше розписати узагальнену нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним.
- 7) На с. 148 в 4 рядку знизу в висновках до 3 розділу замість $\gamma \in \mathbb{R}^+$ повинно бути $\gamma \geq \frac{n+2}{2}$.
- 8) На с. 210 в 9 рядку зверху «задовільняють умові» слід замінити «задовольняють умову».
- 9) На с. 174 при доведенні теореми 4.5.2 суттєво використовується формула для розкладу $\ln \frac{1-x}{1+x}$ в ряд, тому було б доцільно надати коротке доведення розкладу або посилання на джерело.
- 10) В роботі є стилістичні помилки, описки, русизми.

Наведені зауваження не впливають на загальний позитивний відгук про дисертацію.

Вважаю, що дисертаційна робота Денеги Ірини Вікторівни «Квадратичні диференціали та симетризаційні методи в задачах про екстремальне розбиття комплексної площини» за рівнем наукових досліджень, їх науковою новизною, актуальністю, кількістю публікацій у наукових фахових виданнях і рівнем апробації відповідає вимогам пп. 9, 10, 12, 13, 14 «Порядку присудження наукових ступенів» (Постанова Кабінету Міністрів України № 567 від 24.07.2013 зі змінами) щодо докторських дисертацій, а її авторка Денега Ірина Вікторівна заслуговує присудження їй наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Офіційний опонент

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник,
професор кафедри математичного аналізу,
бізнес-аналізу та статистики

Житомирського державного університету
імені Івана Франка

Євген СЕВОСТ'ЯНОВ

Підпис доктора фізико-математичних наук,
старшого наукового співробітника,
професора кафедри математичного аналізу,
бізнес-аналізу та статистики

ЖДУ імені Івана Франка Євгена Севост'янова
засвідчую:

проректор з наукової і міжнародної роботи
ЖДУ імені Івана Франка,
кандидат економічних наук,
доцент



Тетяна БОЦЯН

Надійшов 25.01.2021 р.