

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертацію Денеги Ірини Вікторівни „Квадратичні диференціали та симетризаційні методи в задачах про екстремальне розбиття комплексної площини“, подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз (111 — математика).

Актуальність дослідження та його мета. Дослідження у даній дисертаційній роботі зосереджуються на різноманітних задачах з одновимірного комплексного аналізу, насамперед з геометричної теорії функцій. Значимо, що геометрична теорія функцій комплексної змінної давно стала важливою та змістовною частиною математичного аналізу. В розробці фундаментальних основ цієї теорії брали участь такі видатні математики як А. Пуанкаре, Л. Бібербах, К. Каратеодорі, Т. Гронуолл, М.О. Лаврентьев, Г. Пойя, Д. Гільберт, О. Тейхмюллер, Л. Альфорс, Г.М. Голузін, М.В. Келдиш, А. Шеффер і Д. Спенсер, М.О. Лебедев, В.К. Хейман, П.М. Тамразов, К. Померенке, та багато інших. У працях цих вчених була створена теорія однолистих та багатолістих функцій від комплексної змінної. Розвиток цього напрямку зумовлений задачами самого комплексного аналізу та його застосуваннями. В Україні наукові традиції київської школи комплексного аналізу та теорії потенціалу в першу чергу пов'язані з роботами М.О. Лаврентьева та його учня М.В. Келдиша.

Основою для досліджень виконаних здобувачкою послужили напрацювання відділу комплексного аналізу та теорії потенціалу інституту математики НАН України. Зокрема, тут у свій час були проведені систематичні дослідження в теорії екстремальних метрик та квадратичних диференціалів, наведено їх застосування до теорії однолистих функцій і конформних відображень, розв'язано екстремальні проблеми для конформних відображень, пов'язані з багатополісними квадратичними диференціалами. П.М. Тамразов розробив метод для розв'язання екстремальної проблеми, поставленої М.Г. Чеботарьовим в середині 1920-х років. Одне з її формулювань таке: для скінченного числа точок $E := \{a_1, \dots, a_n\} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ знайти конформне відображення $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \setminus E$ таке, що $f(0) = 0$ і $|f'(0)|$ набуває максимального значення.

В геометричній теорії функцій комплексної змінної розроблено багато різних методів дослідження екстремальних задач, зокрема, параметричний метод, варіаційний метод, метод площ, метод контурного інтегрування, метод екстремальних метрик, метод симетризації, метод квадратичних диференціалів та інші. Наразі ці методи, а також результати, які вдається з їх допомогою отримати, складають зміст численних монографій та статей. Велику увагу цим методам приділено в роботах Г.М. Голузїна, В.К. Хеймана, М.О. Лебедева, Б.В. Шабата, П.М. Тамразова, В.М. Дубїніна, В.Я.

Гутлянського, В.І. Рязанова, Є.О. Севостьянова та інших. Деякі методи та фундаментальні результати геометричної теорії функцій комплексної змінної знайшли своє застосування в теорії наближення. У геометричній теорії функцій комплексної змінної помітне місце займає теорія екстремальних задач на класах однолистих та багатолістих функцій, а також їхні узагальнення. Дана робота присвячена дослідженню екстремальних задач в теорії конформних відображень багатозв'язних областей. Ця тематика бере початок з відомої статті М.О. Лаврентьєва за 1934 рік, в якій вперше розглянута й розв'язана задача про максимум добутку конформних радіусів двох взаємно неперетинних однозв'язних областей. Ця задача викликала цілий потік результатів багатьох авторів, які узагальнювали та посилювали її в різних напрямках. Зауважимо, що переважно спершу вивчали задачі про неперетинні області, яким відповідають квадратичні диференціали з фіксованими полюсами. В 1968 році П.М. Тамразов привернув увагу до екстремальних задач, полюси відповідних квадратичних диференціалів яких не фіксовані, а володіють певною "свободою". Перші задачі з вільними полюсами про неперетинні області були сформульовані й частково розв'язані Г.П. Бахтіною в 1974-1975 рр. Згодом В.М. Дубініну вдалося розв'язати низку таких задач за допомогою розробленого ним методу розділювального перетворення. Цей метод згодом застосували інші математики. Проте, попри значну кількість досліджень, ряд складних проблем в теорії екстремальних задач про неперетинні області залишаються відкритими, адже розв'язання одних задач часто породжує нові складніші задачі. А це спричиняє потребу у розробці методів та підходів щодо їх розв'язання.

Беручи це все до уваги, дослідження, проведені у дисертаційній роботі, актуальні.

Наукова новизна результатів дисертаційної роботи. Усі результати, отримані в дисертаційній роботі, нові. У дисертації розв'язано ряд цікавих задач з геометричної теорії функцій від комплексної змінної. Зокрема, отримано ефективні оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей з фіксованими та з вільними полюсами відповідних квадратичних диференціалів на променевих системах точок комплексної площини, а також у випадках, коли полюси відповідних квадратичних диференціалів розміщені на одиничному колі або на довільній прямій та коли ці області симетричні відносно одиничного кола. Ба більше, здобувачка розв'язала відкриту проблему про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів двох областей відносно точок одиничного кола на степінь γ внутрішнього радіуса області відносно початку координат при довільному $\gamma \in (0, 2]$, за умови, що всі три області попарно не перетинаються.

Обґрунтованість і правильність результатів дисертації. Всі формулювання математичних результатів дисертаційної роботи Денеги І. В.

правильні. Їхні доведення достатньо строгі й вичерпно обґрунтовані, а правильність міркувань та висновків не викликає сумнівів.

Зауваження. Дисертаційну роботу оформлено на належному науковому рівні. Однак, у ній наявне певне число деяких недоглядів та неточностей. Зокрема,

1. код 517.5 — досить загально описує зміст дисертації. Йому відповідає теорія функцій. До тематики дисертації, на мою думку, найбільше підходить 517.54 „Конформні відображення і геометричні питання теорії функцій комплексної змінної. Аналітичні функції та їх узагальнення.“
2. с.3¹ і далі скрізь у дисертації використовується термін розділяюче перетворення. Сам термін не відповідає сучасній українській мові. Найкращим варіантом, либонь, буде розділювальне або роздільне перетворення. Втім, зважаючи на те, що англійський відповідник звучить як *separating transformation* вірогідно більше підходить відокремлювальне перетворення.
3. с.4⁸ Початок речення „Із якої слідуєть ...“ варто замінити на „Із неї слідуєть...“
4. с.4¹³⁻¹⁴ У реченні „Встановлено умови при яких в доведених результатах“ пропущена кома перед „при яких“.
5. с.5^{1,7}, словосполучення „додатній степінь“ треба замінити на „додатний степінь“, бо у називному та знахідному відмінках маємо додатний.
6. с. 6, другий абзац: „Наслідки загальних теорем — це суттєві узагальнення та посилення раніше відомих в цьому напрямку результатів В.М. Дубініна, Г.В. Кузьміної, Є.Г. Ємельянова, Л.В. Ковальова, О.К. Бахтіна, Я.В. Заболотного.“ Пасувало б конкретніше описати, в якому напрямку йшло узагальнення та посилення відносно відомих раніше результатів перерахованих математиків. Подібне зауваження стосується с.32, другий абзац зверху.
7. с.8, третій абзац зверху „Two an open problems“ потрібно замінити на „Two open problems“
8. с.10, другий абзац зверху „In fifth chapter“ варто замінити на „In the fifth chapter“
9. Англійську анотацію доволі складно читати, бо вона перенасичена двома часами Past Perfect і особливо Present Perfect Tense, а речення не ймовірно довгі. Вартувало б складні речення ділити на простіші. А замість часів Perfect використовувати речення від першої особи множини.
10. с. 31² „найбільш ефективних“ на „найефективніших“.
11. с. 39¹³, 108¹² „більш прості“ на „простіші“.
12. с. 35-36 не згадано доповідь на семінарі з теорії аналітичних функцій

21 жовтня 2020 року у ЛНУ ім. І. Франка (керівники проф. Скасків

О.Б., проф. Чижиков І.Е., проф. Філевич П.В., проф. Заболоцький М.В.)

13. с. 40, 83, 84, 91, 107, 186, 206, 297 „такого виду“ на „такого вигляду“
14. с. 28, 96, 109, 118, 185, 206, 208 „керуючий функціонал“ на „керівний функціонал“
15. с. 91₇ „більш загального“ на „загальнішого“
16. с. 91₇ „мебіусового інваріанта виду“ на „мебіусового інваріанта вигляду“
17. с. 156₄ „більш загальну“ на „загальнішу“
18. с. 202₂ „більш простій“ на „простішій“
19. с. 295¹⁰ „робота“ на „робота“
20. с. 295_{7,8}, розділ 7.3 Словосполучення „декартова степінь“ треба замінити на „декартовий степінь“, бо слово степінь в українській мові чоловічого роду, а не жіночого.
21. с. 295₂ „компактно“ на „компактний“, бо там йде мова про простір $\overline{\mathbb{C}}^n$, а він має чоловічий рід, а не середній в українській мові.
22. с.27₃ використовується позначення \mathbb{D} . Вірогідно, це відкритий одиничний круг, але відповідне позначення ніде не розшифровано у дисертації. Воно використовується тільки раз в актуальності. Тому думаю, що тут же в актуальності варто пояснити зміст \mathbb{D} , тим паче, що \mathbb{C} , \mathbb{N} розшифровані у списку позначень дисертації.
23. с.38₁₅₋₁₁ Речення „Тоді за теоремою Харнака про зростаючі послідовності гармонічних функцій впливає, що для кожної точки ... послідовність гармонічних функцій ..., визначена за неперервністю в точці a та рівномірно збігається на компактних підмножинах...“ містить недоречний сполучник „та“ перед рівномірно. Пропоную замінити „та“ на кому.
24. с.39¹⁶ У формулі $\alpha_0 := \alpha_n := \frac{1}{\pi}[2\pi - \theta_k]$ треба θ_k замінити на θ_n .
25. с.39₅ Написано „Очевидно, що $L_1(A_{n,m}) = L(A_{n,m})$.“ Либонь замість очевидно треба було написати покладемо, адже тут просто відбувається спрощення позначень.
26. с.44₁ Фраза „яка як можливо менше відхиляється“ має бути замінена на фразу „яка якнайменше відхиляється“.
27. с.49⁹ Написано „Використовуючи теорему 6.11“. Має бути „Використовуючи теорему 6.11“.
28. с.80, с.81, другий абзац та с. 82, перший абзац терміни „полосоподібна“ та „полоса“ — це не українські слова. Відповідниками слугують слова „смугаста“ та „смуга“.
29. с.38₅, 40₄, 46⁵, 49¹², 49₁, 51⁷, 53², 53₁₀, 55⁶, 56¹³, 64⁸ і т.д. здобувачка використовує кальку з російської „має місце“ замість таких слів як виконується, справджується або справедливе.
30. с. 49₃, 128¹ „непересічних“ на „неперетинних“

31. с. 295⁵ „неперейнних“ на „неперетинних“

32. с. 56, 76, 81, 111, 150, 153, 242, 261 „співпадає з“ на „збігається з“

33. с. 299 „Згідно роботі“ на „Згідно з роботою“

Зрозуміло, що перераховані зауваження не справляють сильний вплив на розуміння наукових положень дисертації та не викликають сумнівів у правильності основних математичних здобутків дисертантки.

Публікації та апробація результатів роботи. Результати дисертації доповідалися на 12 семінарах та на 17 конференціях, про що свідчать опубліковані тези цих конференцій. До того ж результати дисертації опубліковано в 26 статтях, серед них — 5 статей надруковано у виданнях, які внесені безпосередньо до міжнародних наукометричних баз Scopus та/або Web of Science, 8 статей у виданнях, перекладна версія яких внесена до міжнародних наукометричних баз Scopus та/або Web of Science, 8 статей в українських фахових виданнях, 5 статей в закордонних фахових виданнях.

Зважаючи на викладені показники, можна вважати, що дисертація пройшла належну апробацію.

Розділ про особистий внесок здобувачки написаний дещо неграмотно. Зокрема чітко не вказано внесок співавторів. Наведемо три речення, перші два з яких суперечать третьому, а саме — „Визначення напрямку та загального плану досліджень, постановка задач, формулювання робочих гіпотез, а також допомога у підборі методів досліджень належать науковому консультанту — О.К. Бахтіну. Доведення всіх основних результатів дисертації, які виносяться на захист, проведено особисто автором. В спільних роботах внесок всіх співавторів однаковий.“

Останнє третє речення суперечить другому з цитати, а також першому з відповідною згадкою про наукового консультанта Бахтіна О. К.

На мою думку, Автореферат вичерпно розкриває основні положення та зміст дисертаційної роботи. А основні результати опубліковані у відповідних наукових виданнях.

Практичне значення результатів роботи. Основні здобутки та результати дисертації мають теоретичний характер. Встановлені результати та методи, використані в їхньому доведенні, можуть знадобитися при вивченні геометричних властивостей функцій від комплексної та гіперкомплексної змінної, в голоморфній динаміці, а також в теорії апроксимацій. Застосовуючи знайдені здобувачкою оцінки, можна вивести ряд нових оцінок для функцій, що здійснюють конформне відображення кола на області з деякими спеціальними властивостями.

Висновки. Наведені нами зауваження не зменшують наукової цінності дисертації.

Зважаючи на вище викладене, можна стверджувати, що дисертаційна робота І. В. Денегі є завершеним, повноцінним та виконаним на актуальну

тематику науковим дослідженням з новим внеском у геометричну теорію функцій комплексної змінної, зокрема, в теорію екстремальних задач. Знайдені здобувачкою оцінки функціоналів дозволили знайти посилені результати стосовно точних розв'язків відкритих екстремальних проблем про взаємно неперетинні області комплексної площини у випадку вільних полюсів відповідних квадратичних диференціалів. Відповідно, дисертація І. В. Денегі „Квадратичні диференціали та симетризаційні методи в задачах про екстремальне розбиття комплексної площини“, подана на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз, відповідає вимогам „Порядку присудження наукових ступенів“, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України №567 від 24 липня 2013 р., а її авторка Денегі Ірина Вікторівна заслуговує на присудження їй наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Офіційний опонент,
професор, доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри вищої математики
Івано-Франківського національного
технічного університету нафти і газу

А. І. Бандура

Підпис(и) А. І. Бандури
посвідчую В. В. Процик
Учений секретар ІФНТУНГ
« 5 » лютого 2021 р.



Надійшов 8.02.2021 р.