НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова

праця на правах рукопису

**Денега Ірина Вікторівна**

УДК 517.5

# ДИСЕРТАЦІЯ

## КВАДРАТИЧНІ ДИФЕРЕНЦІАЛИ ТА СИМЕТРИЗАЦІЙНІ МЕТОДИ В ЗАДАЧАХ ПРО ЕКСТРЕМАЛЬНЕ РОЗБИТТЯ КОМПЛЕКСНОЇ ПЛОЩИНИ

01.01.01 — Математичний аналіз

111 — Математика

Подається на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ________ І.В. Денега

Науковий консультант:

**Бахтін Олександр Костянтинович**

доктор фізико-математичних наук,

професор

Київ — 2020

# АНОТАЦІЯ

Денега І.В. Квадратичні диференціали та симетризаційні методи в задачах про екстремальне розбиття комплексної площини. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — "Математичний аналіз" (111 — Математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2020.

Дисертаційна робота присвячена розробці нових і вдосконаленню наявних підходів і методів дослідження відкритих екстремальних проблем геометричної теорії функцій комплексної змінної. Основний об'єкт дослідження — це екстремальні задачі про конформні відображення з фіксованими та вільними полюсами відповідних квадратичних диференціалів. Важливі результати в даній області були отримані М.О. Лаврентьєвим, Г.М. Голузіним, М.О. Лєбєдєвим, Дж. Дженкінсом, Н.І. Колбіною, П.М. Тамразовим, Г.П. Бахтіною, П.Л. Дюреном, П.П. Куфарєвим, В.Я. Гутлянським, А.Е. Фалесом, В.М. Дубініним, Г.В. Кузьміною та багатьма іншими відомими вченими.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету досліджень, коротко викладено зміст основної частини роботи та показано наукову новизну одержаних результатів.

У першому розділі дисертаційної роботи зроблено огляд літератури за темою і виділено напрямки досліджень, викладено основні ідеї методів дослідження даних проблем, наведено означення і теореми, необхідні для формулювання і доведення основних результатів дисертації. Зокрема, у розділі 1 зроблено короткий історичний огляд теорії екстремальних задач про неперетинні області, введено поняття та основні твердження теорії квадратичних диференціалів, введена класифікація типів функціоналів та екстремальних задач, описані частинні випадки методу

розділяючого перетворення, для компакту $F \subset \mathbb{C}$ наведено рівності, за якими визначається його (логарифмічна) ємність, сформульовано результати попередників, які зіграли вирішальну роль при доведенні тверджень даної роботи: теорема В.М. Дубініна для фіксованих полюсів відповідних квадратичних диференціалів, теорема про мінімізацію площі, теорема О.К. Бахтіна, яка визначає повну екстремальну конфігурацію функціонала четвертого типу, теорема О.К. Бахтіна, яка визначає повну екстремальну конфігурацію інваріантного відносно довільного конформного автоморфізму комплексної площини функціонала для чотирьох взаємно неперетинних областей, результат А.Л. Таргонського про оцінку функціонала третього типу.

В другому розділі дисертаційної роботи одержано ефективні оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей з фіксованими полюсами відповідних квадратичних диференціалів на $(n, m)$-променевих системах точок комплексної площини при всіх можливих значеннях степеня $\gamma \in (0, nm]$ внутрішнього радіуса області відносно початку координат.

Зокрема, ці оцінки застосовано до вивчення двох відкритих екстремальних проблем з вільними полюсами відповідних квадратичних диференціалів на комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}$. Одержано оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються, у випадках, коли полюси відповідних квадратичних диференціалів розміщені на одиничному колі та у випадку, коли області є симетричними відносно одиничного кола. Встановлено умови, за яких в доведених результатах розділу 2 конфігурація областей та точок не є істотною. Зроблено порівняльний аналіз одержаних оцінок функціоналів та величин екстремалей, отриманих в роботах попередників.

У третьому розділі дисертаційної роботи одержано ефективну оцінку зверху добутків внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей з фіксованими полюсами відповідних квадратичних диференціалів на $(n, m)$-променевих системах точок комплексної площини при всіх можливих значеннях степеня $\gamma \in \mathbb{R}^+$ внутрішніх радіусів областей відносно початку координат та нескінченно віддаленої точки. Отримано оцінку зверху функціонала третього типу для будь-якої фіксованої системи різних точок комплексної площини при всіх значеннях параметра $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Із якої слідують відповідні результати для $n$-променевих систем точок та для будь-яких систем різних точок одиничного кола. При умові, що область $B_0 \subset U$ міститься у відкритому одиничному крузі, отримано оцінку зверху функціонала, що містить області, симетричні відносно одиничного кола, при всіх значеннях степеня $\gamma \in \mathbb{R}^+$ внутрішнього радіуса області відносно початку координат. Встановлено умови при яких в доведених результатах розділу 3 конфігурація областей та точок не є істотною.

Доведені в другому та третьому розділах оцінки функціоналів дозволили знайти посилені результати стосовно точних розв'язків відкритих екстремальних проблем про взаємно неперетинні області комплексної площини у випадку вільних полюсів відповідних квадратичних диференціалів.

У четвертому розділі розв'язано відкриту проблему про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів двох областей відносно точок одиничного кола на степінь $\gamma$ внутрішнього радіусу області відносно початку координат при довільному $\gamma \in (0, 2\,]$ за умови, що всі три області попарно не перетинаються, й узагальнено її для випадку двох довільних точок комплексної площини.

Одержано розв'язок задачі про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деякий додатній степінь $\gamma$ внутрішнього радіусу області відносно початку координат для $\gamma \in (1, \sqrt{n}\,]$, $n \geqslant 3$. Також дано розв'язок цієї задачі для $\gamma \in (1, n\,]$, $n \geqslant 4$, при додатковому обмеженні величини внутрішнього радіуса області $B_0$ відносно початку координат.

У п'ятому розділі розв'язується задача про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно $n$-променевих систем точок на деякий додатній степінь $\gamma$ внутрішнього радіусу області відносно початку координат для значно ширших інтервалів параметра $\gamma$. Запропоновано метод для дослідження цієї проблеми, що характеризує екстремальні області при $\gamma \in (0, n^{\delta}\,]$, $\frac{1}{3} < \delta < \frac{2}{3}$, та з'ясовано межі його застосування. Також отримано розв'язки цієї узагальненої проблеми при додатковому обмеженні величини внутрішнього радіуса області $B_0$ відносно точки нуль та для випадку $\gamma \in (1, \sqrt{n}\,]$, $n \geqslant 3$.

Встановлено оцінку зверху для внутрішнього радіуса $r\,(B_0, 0)$ області $B_0$ відносно початку координат для довільної системи різних точок на комплексній площині.

У шостому розділі досліджується задача про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деякий додатній степінь $\gamma$ внутрішнього радіусу області відносно початку координат з додатковою умовою симетрії областей відносно одиничного кола. Одержано розв'язок цієї проблеми при $n = 2$ і $\gamma \in (0, 2]$ для фіксованих полюсів $0$, $1$, $-1$. Показано, що якщо кутові параметри задовольняють умову $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{2\gamma}$ ($\alpha_k$, $k = \overline{1, n}$, — кутові параметри системи точок), то множина тих $\gamma$, для яких отримана точна оцінка добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей, значно ширша порівняно з загальним випадком ($\gamma \in (0, 0{,}25n^2]$, $n \geqslant 4$). Для загального випадку дано розв'язок цієї задачі при $\gamma \in (1, \sqrt{n}\,]$, $n \geqslant 8$.

У сьомому розділі дисертаційної роботи дано оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок, розміщених на одній прямій, при всіх можливих значеннях степеня $\gamma$ внутрішнього радіуса області відносно початку координат (степеня $\gamma$ внутрішніх радіусів областей відносно початку координат і нескінченно віддаленої точки, степеня $\gamma$ внутрішнього радіуса області відносно нескінченно віддаленої точки). Як наслідки отримано результати, коли на двох променях міститься однакова кількість точок.

Наслідки загальних теорем — це суттєві узагальнення та посилення раніше відомих в цьому напрямку результатів В.М. Дубініна, Г.В. Кузьміної, Є.Г. Ємельянова, Л.В. Ковальова, О.К. Бахтіна, Я.В. Заболотного.

**Практичне значення одержаних результатів.** Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати і методика їх отримання можуть бути використані при вивченні питань комплексного та гіперкомплексного аналізу, голоморфної динаміки, теорії функцій, теорії апроксимацій. На основі доведених оцінок можна одержати ряд нових оцінок для функцій, що реалізують конформне відображення кола на області, з деякими спеціальними властивостями. Результати можуть бути застосовані до теорем покриття, теорем спотворення, оцінок коефіцієнтів однолистих функцій та при вивченні кількості критичних точок у параболічних басейнах.

**Ключові слова:** області, що взаємно не перетинаються, променева система точок, конформний і внутрішній радіус області, одиничне коло, функціонал, функція Гріна області, розділяюче перетворення, квадратичний диференціал, логарифмічна ємність, трансфінітний діаметр, теорема про мінімізацію площі.

# ABSTRACT

Denega I.V. Quadratic differentials and symmetrization methods in problems on extremal decomposition of the complex plane. — Manuscript.

Doctor of Sciences Thesis on Physics and Mathematics, speciality 01.01.01 "Mathematical analysis" (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2020.

The thesis is devoted to the development of new and improvement of existing approaches and methods of research of open extremal problems of geometric function theory of a complex variable. The main object of the study is the extremal problems with fixed and free poles of the corresponding quadratic differentials. Important results in this area were obtained by M.O. Lavrentyev, G.M. Goluzin, M.O. Lebedev, J. Jenkins, N.I. Kolbina, P.M. Tamrazov, G.P. Bakhtina, P.L. Duren, P.P. Kufarev, V.Ya. Gutlyanskii, A.E. Thales, V.N. Dubinin, G.V. Kuz'mina and many other well-known scientists.

In the introduction the relevance of the dissertation topic is substantiated, the purpose of research is formulated, the content of the main part of the work is summarized and scientific novelty of the obtained results is shown.

In the first chapter of the thesis the review of the literature on the subject of research is outlined and areas of research are highlighted, the main ideas of methods of research of the problems are stated, the definitions and theorems necessary for the formulation and proof of the main results of the dissertation are given.

In particular, in the first chapter a brief historical overview of the theory of extremal problems on non-overlapping domains is described, concepts and basic statements of the theory of quadratic differentials are introduced, classification of types of functionals and extremal problems is introduced, partial cases of the method of separating transformation of V.N. Dubinin are described, for the compact $F \subset \mathbb{C}$ the equalities on which its defined (loga-

rithmic) capacity are given, the results of predecessors which played a crucial role in proving the statements of this work are formulated: the theorem of V.N. Dubinin for fixed poles corresponding quadratic differentials, the theorem of minimizing of the area, the theorem of A.K. Bakhtin, which determines the complete extremal configuration of the fourth type functional, the theorem of A.K. Bakhtin, which determines the complete extremal configuration of the functional, which is an invariant relatively to an arbitrary conformal automorphism of the complex plane, for four mutually non-overlapping domains the result of A.L. Targonskii on the assessment of the third type functional.

In the second chapter of the thesis, an effective upper estimates of the products of inner radii of mutually non-overlapping domains with fixed poles corresponding quadratic differentials on the $(n, m)$-radial systems of points of the complex plane at all possible values of the degree $\gamma \in (0,\, nm]$ of the inner radius of the domain relative to the origin are obtained.

Two an open extremal problems with free poles of the corresponding quadratic differentials on the complex plane $\overline{\mathbb{C}}$ are investigated. An upper estimates of the functionals of the first type on an arbitrary fixed $n$-radial systems of points of the complex plane at all possible values of the parameter $\gamma \in (0,\, n]$ are obtained. As a consequence, the corresponding results are obtained for the case where the poles corresponding quadratic differentials are located on the unit circle and in the case when the domains are mirror-symmetric relative to the unit circle.

The conditions under which in the proved results of the second chapter the structure of points and domains is irrelevant are established.

A comparative analysis of the obtained estimates of the functionals and the values of the extremals obtained in the works of the predecessors is made.

In the third chapter of the thesis, an effective upper estimate of the products of inner radii of mutually non-overlapping domains with fixed poles corresponding quadratic differentials on the $(n,m)$-radial systems of points of the complex plane at all possible values of the degree $\gamma \in \mathbb{R}^+$ of the inner radii of the domains relative to the origin and the infinitely distant point is obtained.

As a consequence, an upper estimate of the third type functional for an arbitrary fixed system of different points of the complex plane at all possible values of the parameter $\gamma \in \mathbb{R}^+$ is obtained. From which follow the corresponding results for $n$-radial systems of points and for any systems of different points of the unit circle.

Provided that the domain $B_0 \subset U$ is contained in an open unit circle, an upper estimate of the functional containing domains which are mirror-symmetric with respect to a unit circle, at all possible values of the degree $\gamma \in \mathbb{R}^+$ of the inner radius of the domain relative to the origin is proved.

The conditions under which in the proved results of the third chapter the structure of points and domains is irrelevant are established.

Proved in the second and third chapters estimates of the functionals have made it possible to find enhanced exact solutions in open extremal problems on mutually non-overlapping domains on the complex plane with free poles corresponding quadratic differentials.

In the fourth chapter of the thesis an open problem of finding the maximum of product of inner radii of two domains relative to the points of a unit circle on the degree $\gamma$ of the inner radius of the domain relative to the origin at arbitrary $\gamma \in (0,2\,]$, provided that all three domains are mutually non-overlapping domains is solved. And it is generalized for the case of two arbitrary fixed points on the complex plane.

The solution of the problem of finding a maximum of the product of inner radii of mutually non-overlapping domains with respect to the points on the unit circle on a certain positive degree of $\gamma$ of the inner radius of the domain with respect to the origin for $\gamma \in (1, \sqrt{n}\,]$, $n \geqslant 3$, is obtained. The solution of this problem is also given for $\gamma \in (1, n\,]$, $n \geqslant 4$, with additional restriction of the value of inner radius of the domain $B_0$ with respect to the origin.

In fifth chapter of the thesis the problem of finding a maximum of the product of inner radii of mutually non-overlapping domains with respect to $n$-radial systems of points on the complex plane on a certain positive degree of $\gamma$ of the inner radius of the domain with respect to the origin for much wider intervals for the parameter $\gamma$ is solved.

Method for studying this problem, which characterizes extremal domains at $\gamma \in (0, n^{\delta}\,]$, $\frac{1}{3} < \delta < \frac{2}{3}$ is proposed and limits of its application are found.

The solutions of this generalized problem is also given at additional restriction of the value of inner radius of the domain $B_0$ with respect to the origin and for the case when $\gamma \in (1, \sqrt{n}\,]$, $n \geqslant 3$.

The upper estimate for the inner radius $r\,(B_0, 0)$ of the domain $B_0$ with respect to the origin for an arbitrary system of different points on the complex plane is established.

In the sixth chapter of the thesis the problem of finding a maximum of the product of inner radii of mutually non-overlapping domains with respect to the points on the unit circle on a certain positive degree of $\gamma$ of the inner radius of the domain with respect to the origin with additional condition of symmetry of the domains with respect to the unit circle is investigated.

The solution of this problem is obtained at $n = 2$ and $\gamma \in (0,\, 2]$ for the fixed poles $0$, $1$, $-1$. It is shown that if the angular parameters satisfy the condition $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{2\gamma}$ ($\alpha_k$, $k = \overline{1, n}$, — angular parameters of the points system), then the set of those $\gamma$, for which an accurate estimate of the product of inner radii of mutually non-overlapping domains is obtained, is much wider, compared with the general case ($\gamma \in (0,\, \gamma_n]$, $\gamma_n = 0,25n^2$, $n \geqslant$

4). For the general case the solution of this problem is given at $\gamma \in (1, \sqrt{n}\,]$, $n \geqslant 8$.

In the seventh chapter of the thesis, an upper estimates are given for the maximum of the products of inner radii of mutually non-overlapping domains with respect to the points located on one line with all possible values of the degree $\gamma$ of the inner radius of the domain relative to the origin (the degree of $\gamma$ of the inner radii of the domains relative to the origin and the infinitely distant point, the degree $\gamma$ of the inner radius of the domain relative to the infinitely distant point). As a consequence, the results are obtained when two rays contain the same number of points.

The consequences of the general theorems are significant generalizations and enhancements of the results previously known in this direction by V.N. Dubinin, G.V. Kuz'mina, E.G. Yemelyanov, L.V. Kovalev, A.K. Bakhtin, Ya.V. Zabolotnii.

**The practical significance of the results.** Thesis is a theoretical investigation. The obtained results and methods of their production can be used in the study of complex and hypercomplex analysis, holomorphic dynamics, function theory, approximation theory. On the basis of the proved estimations it is possible to obtain a number of new estimations for the functions realizing conformal mapping of a circle on domains, with some special properties. The results can be applied to coverage theorems, distortion theorems, estimates of coefficients of univalent functions and in the study of the number of critical points in parabolic basins.

**Key words:** non-overlapping domains, radial system of points, conformal radius of the domain, an inner radius of the domain, the unit circle, functional, the Green function of domain, separating transformation, quadratic differential, logarithmic capacity, transfinite diameter, theorem on minimizing of the area.

# СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Бахтин А.К., Денега И.В. Метод разделяющего преобразования в задачах о максимуме произведения степеней внутренних радиусов неналегающих областей // Аналіз і застосування / Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, 2012, Т. 9, № 2, С. 32–44.

2. Denega I.V. Generalization of some extremal problems on non-overlapping domains with free poles // Annales universitatis Mariae Curie-Skladovska, Lublin-Polonia, 2013, V. LXVII, No. 1, P. 11–22.

3. Денега И.В. Об одной экстремальной задаче о частично неналегающих областях // Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування / Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2013, Т. 10, № 4-5, С. 442–449.

4. Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Денега И.В. Разделяющее преобразование в задачах об экстремальном разбиении комплексной плоскости // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2015, Т. 12, № 3, С. 17–23.

5. В'юн В.Е., Денега І.В., Таргонський А.Л. Екстремальне розбиття комплексної площини і нерівності для добутків внутрішніх радіусів областей // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2015, Т. 12, № 4, С. 138–143.

6. Bakhtin A., Dvorak I., Denega I. Separating transformation and extremal decomposition of the complex plane // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations, 2016, V. LXVI, No. 2, P. 13–20.

7. Денега И.В., Заболотный Я.В. Обобщение некоторых результатов о неналегающих областях // Праці ІПММ НАН України, 2016, Т. 30, С. 43–52.

8. Denega I.V., Zabolotnii Ya.V. Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane // Complex Variables and Elliptic Equations, 2017, V. 62, No. 11, P. 1611–1618.

9. Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Денега И.В. Экстремальное разбиение комплексной плоскости с фиксированными полюсами // Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 2017, Т. 14, № 1, С. 34–38.

10. Денега И.В., Заболотный Я.В. Задача о неналегающих полицилиндрических областях с полюсами на границе поликруга // Український математичний вісник, 2017, Т. 14, № 1, С. 33–41. (переклад: Denega I.V., Zabolotnyi Y.V. Problem of nonoverlapping polycylindrical domains with poles on the boundary of a polydisk // Journal of Mathematical Sciences, 2017, V. 227, No. 1, P. 26–32.)

11. Денега И., Клищук Б. К задаче об экстремальном разбиении комплексной плоскости // Український математичний вісник, 2017, Т. 14, № 4., С. 472–480. (переклад: Denega I.V., Klishchuk B.A. To the problem of extremal partition of the complex plane // Journal of Mathematical Sciences, 2018, V. 234, No. 1, P. 14–20.)

12. Zabolotnyi Y., Denega I. On conformal radii of non-overlapping simply connected domains // International Journal of Advanced Research in Mathematics, 2018, V. 11, P. 1–7.

13. Bakhtin A., Vyhivska L. and Denega I. Inequality for the inner radii of symmetric non-overlapping domains // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź. Recherches sur les déformations, 2018, V. 68, No. 2, P. 37–44.

14. Денега И.В. Некоторые оценки для экстремального разбиения комплексной плоскости // Праці ІПММ НАН України, 2018, Т. 32, С. 42–47.

15. Denega I. Problem on extremal decomposition of the complex plane

// Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations, 2018, V. 68, No. 3, P. 71–78.

16. Zabolotnii Ya., Denega I. Extremal decomposition of multidimensional complex space for five domains // Український математичний вісник, 2018, Т. 15, № 3, С. 431–441. (переклад: Zabolotnii Ya., Denega I. Extremal decomposition of a multidimensional complex space for five domains // Journal of Mathematical Sciences, 2019, V. 241, No. 1, P. 101–108.)

17. Bakhtin A.K., Denega I.V. Sharp estimates of inner radii of nonoverlapping domains in the complex plane // Probl. Anal. Issues Anal., 2019, V. 8(26), No. 1, P. 17–31.

18. Denega I., Zabolotnii Ya. Problem on extremal decomposition of the complex plane // An. St. Univ. Ovidius Constanta, 2019, V. 27, No. 1, P. 61–77.

19. Бахтин А.К., Денега И.В. Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей // Укр. мат. журн., 2019, Т. 71, № 7, С. 996–1002. (переклад: Bakhtin A.K., Denega I.V. Inequalities for the inner radii of nonoverlapping domains // Ukr. Math. J., 2019, 71, P. 1138–1145.)

20. Bakhtin A.K., Denega I.V. Weakened problem on extremal decomposition of the complex plane // Matematychni Studii, 2019, V. 51, No. 1, P. 35–40.

21. Denega I. Estimates of the inner radii of non-overlapping domains // Український математичний вісник, 2019, Т. 16, № 1, С. 77–87. (переклад: Denega I. Estimates of the inner radii of non-overlapping domains // Journal of Mathematical Sciences, 2019, V. 242, No. 6, P. 787–795.)

22. Денега І.В. Оцінка добутків внутрішніх радіусів областей з додатковою умовою симетрії // Праці ІПММ НАН України, 2019, Т. 33, С. 83–90.

23. Бахтин А.К., Денега И.В. Экстремальное разбиение комплексной

плоскости со свободными полюсами // Український математичний вісник, 2019, Т. 16, № 3, С. 307–328. (переклад: Bakhtin A.K., Denega I.V. Extremal decomposition of the complex plane with free poles // Journal of Mathematical Sciences, 2020, V. 246, No. 1, P. 1–17.)

24. Бахтин А.К., Денега И.В. Экстремальное разбиение комплексной плоскости со свободными полюсами II // Український математичний вісник, 2019, Т. 16, № 4, С. 477–495. (переклад: Bakhtin A.K., Denega I.V. Extremal decomposition of the complex plane with free poles II // Journal of Mathematical Sciences, 2020, V. 246, No. 5, P. 602–616.)

25. Бахтін О.К., Денега І.В. Оцінки максимума добутків внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються // Укр. мат. журн., 2020, Т. 72, № 2, С. 173–183. (переклад: Bakhtin A.K., Denega I.V. Estimation of the maximum product of inner radii of mutually disjoint domains // Ukr. Math. J., 2020, 72, P. 191–202.)

26. Denega I.V. Estimate of maximum of the products of inner radii of non-overlapping domains // Probl. Anal. Issues Anal., 2020, V. 9(27), No. 1, P. 60–65.

# ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ НА КОНФЕРЕНЦІЯХ

1. Денега І.В. Задачі про екстремальне розбиття комплексної площини // International conference of young mathematicians. June 3–6, 2015, Kyiv, Ukraine. Abstracts. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015. – P. 72.

2. Bakhtin A., Dvorak I., Denega I. Extremal decomposition of the complex plane // X літня школа «Алгебра, Топологія, Аналіз». 3–15 серпня 2015, Одеса, Україна: Тези доповідей. – Київ: Інститут математики НАН України, 2015. – С. 65–66.

3. Vygivska L., Denega I. Sharp estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane // International 11th Summer School «Algebra, Topology, Analysis». August 1–14, 2016, Odessa, Ukraine. Abstracts. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2016. – P. 59 – 60.

4. Denega I. $N$-radial systems of points and problems for non-overlapping domains // 5th International Conference for Young Scientists On Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky. November 9–11, 2016, Kyiv, Ukraine. – Book of Abstracts. – P. 53–55.

5. Denega I., Zabolotnij Ya. On the problem of extremal decomposition of the complex plane // Ukraine Scientific Conference «Modern Problems Theory of Probability and Mathematical Analysis». February 22–25, 2017, Vorokhta, Ivano-Frankivsk Region, Ukraine. Abstracts. – Івано-Франківськ: ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», 2017. – С. 73–75.

6. Denega I. Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane // International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis». May 31 – June 5, 2017, Odessa, Ukraine.

Book of abstracts. – P. 53–54.

7. Denega I., Zabolotnij Ja. On one Dubinin extremal problem // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy. June 7–10, 2017, Kyiv, Ukraine. Abstracts. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2017. – P. 29.

8. Denega I. Problem on extremal decomposition of the complex plane // Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвячена 85-річчю відомого українського математика, педагога та організатора освіти Шкіля Миколи Івановича (13.12.1932—14.11.2015). 13–14 грудня, 2017, Київ, Україна. Тези доповідей. – С. 38–39.

9. Denega I. Problem on non-overlapping polycylindrical domains with poles on the boundary of a polydisk // International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis». May 30 – June 4, 2018, Odessa, Ukraine. Book of abstracts. – P. 14–15.

10. Bakhtin A., Denega I. Problems on extremal decomposition of the complex plane with free poles // International Conference «Harmonic analysis and approximations», VII, dedicated to 90th Anniversary of Alexandr Talalyan. September 16–22, 2018, Tsaghkadzor, Armenia. Abstracts, Yerevan, 2018. – P. 25–26.

11. Denega I. Inequalities for the inner radii of non-overlapping domains // International Conference of Young Mathematicians. June 6–8, 2019, Kyiv, Ukraine. Abstracts. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2019. – P. 98.

12. Denega I. Estimates of the inner radii of non-overlapping domains on the complex plane // International conference «Functional methods in approximation theory, differential equations and numerical mathematics IV»,

dedicated to the 100th anniversary of V.K. Dzyadyk (1919–1998). June 20–26, 2019, Svityaz' village, Volyn' region, Ukraine. Abstracts. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2019. – P. 16.

13. Denega I. Extremal decomposition of the complex plane with free poles // 12th International ISAAC Congress. 29 July – 2 August 2019, University of Aveiro, Portugal. Volume of Abstracts. – P. 32.

14. Denega I. Estimates of the inner radii of symmetric non-overlapping domains // Bogolyubov Kyiv Conference «Problems of theoretical and mathematical physics». September 24–26, 2019, Kyiv, Ukraine. Program and Abstracts. – P. 100.

15. Denega I. Extremal decomposition problems // International Conference on Mathematical Analysis and Its Applications. December 14–16, 2019, New Delhi, India.

16. Denega I. Estimate of maximum of the products of inner radii of mutually non-overlapping domains // International scientific online conference «Algebraic and geometric methods of analysis». May 26–30, 2020, Odesa, Ukraine. Book of abstracts. – P. 9–10.

17. Bakhtin A.K., Denega I.V. Extremal decomposition of the complex plane with fixed points // International e-Conference on Nonlinear Analysis and its Applications. July 27–29, 2020, Department of Mathematics, Dayanand Science College, Latur, India. Abstract book. – P. 78.

## АПРОБАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НА СЕМІНАРАХ

1. Denega I. Separating transformation and extremal decomposition of the complex plane // Hypercomplex Seminar 2015: (Hyper)Complex and Dynamical Processes, Modelling and Simulations. Mathematical Conference Center at Bedlewo, Poland, July 2–9, 2015.

2. Denega I. Sharp estimates of products of inner radii of nonoverlapping domains in the complex plane // Hypercomplex Seminar 2016: (Hyper)Complex and Harmonic Dynamical Modelling vs. Special Ternary or Quaternary Nanostructures and Related Problems (30 years of the direct cooperation agreement Łódź – Paris VI). Mathematical Conference Center at Bedlewo, Poland, June 30 – July 7, 2016.

3. Denega I. Problems on extremal decomposition of the complex plane // 9th Elgersburg School 2017 «Control theory of digitally networked dynamic systems, Optimal control techniques». Elgersburg, Germany, March 26 – April 1, 2017.

4. Denega I. Problems on extremal decomposition of the complex plane // Workshop «Young Women in Geometry». Bonn, Germany, April 3–5, 2017.

5. Denega I. On conformal radii of symmetric disjoint domains // Hypercomplex Seminar 2017: (Hyper)Complex and Harmonic Dynamical Modelling: Topology in Physics of Dynamical Systems and Molecular Nanoengines (30 years of the direct cooperation agreement Łódź [University and Łódź Society of Sciences and Arts] – Kyiv [National Academy of Sciences of Ukraine]). Mathematical Conference Center at Bedlewo, Poland, July 22–29, 2017.

6. Denega I. Problem on extremal decomposition of the complex plane // World Meeting for Women in Mathematics. Rio de Janeiro, Brazil, July 31, 2018.

7. Denega I. Problem on extremal decomposition of the complex plane // International Congress of Mathematicians. Rio de Janeiro, Brazil, August 1–9, 2018.

8. Denega I. Estimates of the inner radii of non-overlapping domains // Hypercomplex Seminar 2019: (Hyper)Complex Analysis in Differential Equations, Geometry and Physical Applications. Mathematical Conference Center at Bedlewo, Poland, July 7–14, 2019.

9. Denega I. Problems on extremal decomposition of the complex plane // OTHA online workshop 2020 on operator theory and harmonic analysis and their applications. Rostov-on-Don, Russia, August 24–25, 2020. http://otha.sfedu.ru/online-workshops/otha-workshop/src/OTHA-online-2020.pdf

10. Virtual Heidelberg Laureate Forum. Heidelberg, Germany, September 21–25, 2020.

11. Семінарах відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор С.А. Плакса).

12. Семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор А.С. Романюк).

13. Київському семінарі з функціонального аналізу (керівники: академік НАН України Ю.С. Самойленко, член-кор. НАН України А.Н. Кочубей).

14. Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор О.Б. Скасків).

15. Семінарі «Сучасний аналіз» в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (керівники: доктори фіз.-мат. наук, професори О.О. Курченко, В.М. Радченко, І.О. Шевчук).

16. Семінарі кафедри математичного аналізу Житомирського державного університету імені Івана Франка (керівники: доктор фіз.-мат. наук А.О. Погоруй, доктор фіз.-мат. наук Є.О. Севостьянов, канд. фіз.-мат. наук, доцент О.Ф. Герус).

# ЗМІСТ

# ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел;

$\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел;

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — розширена комплексна площина;

$\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$; $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$;

$x \in E$ — елемент $x$ належить множині $E$;

$X \subset E$ — множина $X$ є підмножиною множини $E$;

$U = \{z : |z| < 1\}$ – одиничний круг;

$R(B, a)$ — конформний радіус однозв'язної області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$;

$r(B, a)$ — внутрішній радіус багатозв'язної області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$;

$g_B(z, z_0)$ — функція Гріна області $B$ з полюсом в точці $z_0$;

$A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$ — $(n, m)$-променева система точок; $A_n = \{a_k\}$, $k = \overline{1, n}$, — $n$-променева система точок;

$\alpha_k$, $k = \overline{1, n}$ — кутові параметри системи $A_n$;

$Q(z)dz^2$ — квадратичний диференціал;

$\operatorname{cap} F$ — (логарифмічна) ємність компакта $F \subset \mathbb{C}$;

$d(E)$ — трансфінітний діаметр компактної множини $E \subset \mathbb{C}$;

$\mu E$ – лебегова міра компактної множини $E$;

$\chi(t) = \frac{1}{2}\left(t + t^{-1}\right)$ — функція Жуковського.

# ВСТУП

**Актуальність теми.** Геометрична теорія функцій комплексної змінної є важливою та змістовною частиною математичного аналізу. В розробці фундаментальних основ цієї теорії брали участь такі видатні математики як А. Пуанкаре, П. Кьобе, Л. Бібербах, К. Каратеодорі, Т. Гронуолл, М. Шиффер, Д.О. Граве, М.О. Лаврентьєв, Г. Пойя, Г. Грьотш, Д. Гільберт, О. Тейхмюллер, Л. Альфорс, Г.М. Голузін, Г. Льовнер, П.П. Куфарєв, М.В. Келдиш, А. Шеффер і Д. Спенсер, П. Дюрен, Дж. А. Дженкінс, М.О. Лєбєдєв, В.К. Хейман, І.М. Мілін, П.М. Тамразов, К. Померенке, З. Нехарі, Ю.Є. Алєніцин, І.Є. Базілевич, І.А. Алєксандров, І.П. Мітюк, К. Фітцджеральд та багато інших. В роботах цих вчених була створена теорія однолистих та багатолистих функцій комплексної змінної. Розвиток цього напряму зумовлений задачами самого комплексного аналізу та його застосуваннями.

В Україні наукові традиції комплексного аналізу та теорії потенціалу в першу чергу пов'язані з роботами М.О. Лаврентьєва та його учня М.В. Келдиша. Їм належить започаткування розвитку у відділі теорії потенціалу та геометричної теорії функцій комплексної змінної, що має численні застосування в теорії еліптичних рівнянь та методах комплексного аналізу, у крайових задачах математичної фізики та суміжних дисциплінах. Українська математична школа комплексного аналізу, теорії потенціалу та їх застосувань займає одне з передових місць у світовій науці. Серед основних напрямків цих дисциплін дослідження українських вчених грають провідну роль, а у багатьох напрямках йде гостре змагання з вченими інших країн. Порівняльними по широті та рівню досліджень в області комплексного аналізу та теорії потенціалу є математичні школи США, Франції, Швеції. Активні дослідження по окремих напрямках цих дисциплін ведуться в Англії, Німеччині, Фінляндії, Японії, Ізраїлі, Італії, Росії, Польщі, Румунії, Мексиці. Цей напрям наукових досліджень у відділі комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України проводиться в рамках наукової школи «комплексний аналіз», заснованої академіком М.О. Лаврентьєвим.

Основа для виконання завдань даної роботи — це багаторічні напрацювання відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України. Зокрема, у відділі були проведені систематичні дослідження в теорії екстремальних метрик і квадратичних диференціалів, застосування їх до теорії однолистих функцій і конформних відображень, розв'язані екстремальні проблеми для конформних відображень, пов'язані з мультиполюсними квадратичними диференціалами, доповнено загальну теорему коефіцієнтів Дж. Дженкінса, знайдені екстремальні метрики і модулі деяких неорієнтовних ріманових многовидів. П.М. Тамразов розробив метод для розв'язання екстремальної проблеми, поставленої М.Г. Чеботарьовим в середині 1920-х років, що полягає в знаходженні континууму найменшої ємності, що містить фіксовані точки $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 3)$ комплексної площини $\mathbb{C}$, і досягнуто суттєве просування на шляху до її розв'язання. З проблемою Чеботарьова більш-менш безпосередньо пов'язане значне коло екстремальних проблем геометричної теорії функцій. Добре відома її еквівалентна форма: для скінченного числа точок $E := \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ знайти конформне відображення $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\backslash E$ таке, що $f(0) = 0$ і $|f'(0)|$ є максимальним. У роботах співробітників відділу (О.К. Бахтін [11, 142, 143], А.Л. Таргонський [123, 225, 226, 227], В.Є. В'юн [36], Я.В. Заболотний [69, 70, 71, 234], Л.В. Вигівська [38, 141, 147], І.Я. Дворак [45]) відбулося істотне послаблення вимог щодо геометрії взаємного розташування вільних полюсів квадратичних диференціалів, які відповідають задачам, що вивчаються, розроблення методу "керуючих" функціоналів, введення поняття променевих систем точок, що дало змогу розширити класи екстремальних задач, для яких отримано повний розв'язок.

В геометричній теорії функцій комплексної змінної розроблено багато різних методів дослідження екстремальних задач, зокрема, параметричний метод, варіаційний метод, метод площ, метод контурного інтегрування, метод екстремальних метрик, метод симетризації, метод квадратичних диференціалів та інші. На даний час ці методи, а також результати, які вдається з їх допомогою отримати, складають зміст численних монографій та статей (див., наприклад, [40, 46, 57, 92, 102, 127, 128, 167, 206, 230]). Велику увагу цим методам приділено в роботах Г.М. Голузіна [40], В.К. Хеймана [127], Дж. Дженкінса [46], М.О. Лєбєдєва [92, 93], М. Шиффера та Д.К. Спенсера [131], З. Нехарі [202], І.О. Алєксандрова [1], Б.В. Шабата [128], П.М. Тамразова [109, 113, 117], В.М. Дубініна [57, 165], В.Я. Гутлянського [43, 44], В.Я. Гутлянського та В.І. Рязанова [155, 177, 180, 181, 182], В.І. Рязанова [200, 217], Є.О. Севостьянова [191, 224] та інших.

Деякі методи та фундаментальні результати геометричної теорії функцій комплексної змінної знайшли своє застосування в теорії наближення (див., наприклад, М.О. Лаврентьєв [91], М.В. Келдиш [74], О.І. Маркушевич [94], С.М. Мергелян [95], В.К. Дзядик [6], П.М. Тамразов [109, 113, 117], І.О. Шевчук [130] та інші), топології та геометрії (див., наприклад, Г.Д. Суворов [103], Ю.Ю. Трохимчук [124], В.В. Шарко [129], Ю.Б. Зелінський [11, 72, 73] та інші).

В геометричній теорії функцій комплексної змінної помітне місце займає теорія екстремальних задач на класах однолистих та багатолистих функцій та їх узагальнення.

Дана робота присвячена дослідженню екстремальних задач в теорії конформних відображень багатозв'язних областей. Ця тематика бере початок з відомої статті М.О. Лаврентьєва [91] 1934 року, в якій вперше розглянута й розв'язана задача про максимум добутку конформних радіусів двох взаємно неперетинних однозв'язних областей. Ця задача викликала цілий потік результатів багатьох авторів, які узагальнювали та посилювали її в різних напрямах. Зауважимо, що переважна кількість задач про неперетинні області, що були розглянуті у 1930-60 рр. були задачами, яким відповідають квадратичні диференціали з фіксованими полюсами. В 1968 році П.М. Тамразов привернув увагу до екстремальних задач, полюси відповідних квадратичних диференціалів яких не фіксовані, а володіють певною "свободою". Такі задачі отримали назву екстремальних задач з вільними полюсами. Перші задачі з вільними полюсами про неперетинні області були сформульовані і частково розв'язані Г.П. Бахтіною в 1974 – 1975 рр. В подальшому, інтерес до задач про неперетинні області з вільними полюсами відповідних квадратичних диференціалів значно зріс, так як В.М. Дубініну вдалося розв'язати низку задач за допомогою розробленого ним методу розділяючого перетворення.

Цей напрямок був розвинений в роботах П.П. Куфарєва [90], Г.М. Голузіна [40], З. Нехарі [202], Ю.Є. Аленіцина [2, 3], М.О. Лєбєдєва [92, 93], Дж. Дженкінса [46, 186, 187], В.К. Хеймана [127], П. Дюрена [167], П. Дюрена і М. Шиффера [166], М. Шиффера [131, 223], А. Шеффера і Д. Спенсера [222], П.М. Тамразова [109, 117, 117], Н.І. Колбіної [79, 80], Л.Л. Громової [42], І.О. Алєксандрова [1], В.Р. Кюнау [192, 193], І.П. Мітюка [96, 97], В.М. Дубініна [55, 56, 57, 58, 59, 60, 165], Г.В. Кузьміної [81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89], Є.Г. Ємельянова [61, 62, 63, 64], А.Ю.

Солиніна [100, 101], О.К. Бахтіна [7, 10, 11, 142, 143], Г.П. Бахтіної [11, 31, 33, 34] та інших математиків. На сьогодні цей напрямок активно розвивають в наукових школах України, Росії, Німеччини, Фінляндії, США, Болгарії, Польщі тощо.

Проте, незважаючи на значну кількість досліджень, ряд складних проблем в теорії екстремальних задач про неперетинні області залишаються відкритими. Актуальною є розробка методів і підходів щодо їх розв'язання. Проблеми, які розглядає дана дисертаційна робота, актуальні і привертають увагу фахівців з сучасного комплексного аналізу та його застосувань. Частина цих проблем поставлена досить давно і не розв'язана до теперішнього часу, інша частина виникла в процесі розвитку теорії апроксимації, теорії граничних властивостей функцій і теорії конформних відображень.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертація виконана у відділі комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України в рамках наукових тем "Метричні та геометричні задачі теорії аналітичних і субгармонічних функцій та множин" (номер державної реєстрації 0116U003060) і "Розробка аналітичних та чисельно-аналітичних методів дослідження задач сучасного природознавства" (номер державної реєстрації 0117U004077).

**Мета і завдання дослідження.** Об'єкт дослідження — функціонали, які задані або на класах однолистих функцій, або на класах відкритих множин розширеної комплексної площини. Предмет дослідження — знаходження максимумів указаних функціоналів і опис екстремальних конфігурацій.

Мета дисертаційної роботи полягає в розробці нових і вдосконаленні наявних методів і підходів для розв'язку задач про екстремальне розбиття комплексної площини, посилення й узагальнення відомих результатів.

Для досягнення зазначеної мети в роботі було поставлене завдання розробити метод для отримання найбільш ефективних оцінок зверху функціоналів, заданих на класах неперетинних областей із фіксованими полюсами відповідних квадратичних диференціалів і на основі цього методу розробити підходи для розв'язку відкритих задач про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами відповідних квадратичних диференціалів.

**Методи дослідження.** При розв'язанні завдань дисертаційної роботи використовуються методи комплексного аналізу, теорії потенціалу й методи теорії квадратичних диференціалів.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Усі отримані в роботі результати є новими. В дисертації розроблено нові підходи й методи для вивчення задач про екстремальне розбиття комплексної площини завдяки яким:

1) отримано ефективні оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються, як із фіксованими, так і з вільними полюсами відповідних квадратичних диференціалів на променевих системах точок комплексної площини;

2) одержано оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються, у випадках, коли полюси відповідних квадратичних диференціалів розміщені на одиничному колі чи на довільній прямій, і у випадку, коли області симетричні відносно одиничного кола; встановлено умови, за яких структура точок та областей не є істотною;

3) встановлено посилені результати стосовно точних розв'язків відкритих екстремальних проблем про взаємно неперетинні області комплексної площини у випадку вільних полюсів відповідних квадратичних диференціалів;

4) розв'язано відкриту проблему про знаходження максимуму

добутку внутрішніх радіусів двох областей відносно точок одиничного кола на степінь $\gamma$ внутрішнього радіусу області відносно початку координат при довільному $\gamma \in (0, 2\,]$ за умови, що всі три області попарно не перетинаються, й доведено узагальнення цього результату.

Варто відмітити, що навіть наслідки загальних теорем — це суттєві узагальнення та посилення раніше відомих в цьому напряму результатів.

**Практичне значення одержаних результатів.** Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати і розвинені в ній методи можуть бути використані, насамперед, при вивченні питань комплексного та гіперкомплексного аналізів, голоморфної динаміки, теорії функцій, теорії апроксимації. На основі доведених оцінок можна одержати ряд нових оцінок для функцій, що реалізують конформне відображення кола на області, з деякими спеціальними властивостями. Результати можуть бути застосовані до теорем покриття, теорем спотворення, оцінок коефіцієнтів однолистих функцій та для вивчення кількості критичних точок у параболічних басейнах.

**Особистий внесок здобувача.** Визначення напрямку й загального плану досліджень, постановка задач, формулювання робочих гіпотез, а також допомога у підборі методів досліджень належать науковому консультантові — О.К. Бахтіну. Доведення всіх основних результатів дисертації, які виносяться на захист, авторка провела особисто. У спільних роботах внесок усіх співавторів однаковий.

**Апробація результатів дисертації.** Результати роботи доповідались на таких конференціях:

– International conference of young mathematicians (June 3–6, 2015, Kyiv, Ukraine);

– X літня школа «Алгебра, Топологія, Аналіз» (3–15 серпня 2015, Одеса, Україна);

– International 11th Summer School «Algebra, Topology, Analysis» (August 1–14, 2016, Odessa, Ukraine);

– 5th International Conference for Young Scientists On Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky (November 9–11, 2016, Kyiv, Ukraine);

– Ukraine Scientific Conference «Modern Problems Theory of Probability and Mathematical Analysis» (February 22–25, 2017, Vorokhta, Ivano-Frankivsk Region, Ukraine);

– International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis» (May 31 – June 5, 2017, Odessa, Ukraine);

– International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (June 7–10, 2017, Kyiv, Ukraine);

– Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвячена 85-річчю відомого українського математика, педагога та організатора освіти Шкіля Миколи Івановича (13.12.1932–14.11.2015) (13–14 грудня, 2017, Київ, Україна);

– International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis» (May 30 – June 4, 2018, Odessa, Ukraine);

– International Conference «Harmonic analysis and approximations» VII, dedicated to 90th Anniversary of Alexandr Talalyan (September 16–22, 2018, Tsaghkadzor, Armenia);

– International Conference of Young Mathematicians (June 6—8, 2019, Kyiv, Ukraine);

– International conference «Functional methods in approximation theory, differential equations and numerical mathematics IV», dedicated to the 100th anniversary of V.K. Dzyadyk (1919–1998) (June 20–26, 2019, Svityaz' village, Volyn' region, Ukraine);

– 12th International ISAAC Congress (29 July – 2 August 2019, University of Aveiro, Portugal);

– Bogolyubov Kyiv Conference «Problems of theoretical and mathematical physics» (September 24–26, 2019, Kyiv, Ukraine);

– International Conference on Mathematical Analysis and Its Applications (December 14–16, 2019, New Delhi, India);

– International scientific online conference «Algebraic and geometric methods of analysis» (May 26–30, 2020, Odesa, Ukraine);

– International e-Conference on Nonlinear Analysis and its Applications (July 27–29, 2020, Latur, India);

на двох Вчених радах Інституту математики НАН України та на семінарах:

– Hypercomplex Seminar 2015: (Hyper)Complex and Dynamical Processes, Modelling and Simulations. Mathematical Conference Center at Bedlewo, Poland, July 2–9, 2015;

– Hypercomplex Seminar 2016: (Hyper)Complex and Harmonic Dynamical Modelling vs. Special Ternary or Quaternary Nanostructures and Related Problems (30 years of the direct cooperation agreement Łódź – Paris VI). Mathematical Conference Center at Bedlewo, Poland, June 30 – July 7, 2016;

– 9th Elgersburg School 2017 «Control theory of digitally networked dynamic systems, Optimal control techniques», Elgersburg, Germany, March 26 – April 1, 2017;

– Workshop «Young Women in Geometry», Bonn, Germany, April 3–5, 2017;

– Hypercomplex Seminar 2017: (Hyper)Complex and Harmonic Dynamical Modelling: Topology in Physics of Dynamical Systems and Molecular Nanoengines (30 years of the direct cooperation agreement Łódź [University and Łódź Society of Sciences and Arts] – Kyiv [National Academy of Sciences of Ukraine]). Mathematical Conference Center at Bedlewo, Poland, July 22–29, 2017;

– World Meeting for Women in Mathematics. Rio de Janeiro, Brazil, July 31, 2018;

– International Congress of Mathematicians. Rio de Janeiro, Brazil, August 1–9, 2018;

– Hypercomplex Seminar 2019: (Hyper)Complex Analysis in Differential Equations, Geometry and Physical Applications. Mathematical Conference Center at Bedlewo, Poland, July 7–14, 2019;

– OTHA online workshop 2020 on operator theory and harmonic analysis and their applications. Rostov-on-Don, Russia, August 24–25, 2020;

– Virtual Heidelberg Laureate Forum. Heidelberg, Germany, September 21–25, 2020;

– семінарах відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор С.А. Плакса);

– семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор А.С. Романюк);

– Київському семінарі з функціонального аналізу (керівники: академік НАН України Ю.С. Самойленко, член-кор. НАН України А.Н. Кочубей);

– Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор О.Б. Скасків);

– семінарі «Сучасний аналіз» в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (керівники: доктори фіз.-мат. наук, професори О.О. Курченко, В.М. Радченко, І.О. Шевчук);

– семінарі кафедри математичного аналізу Житомирського державного університету імені Івана Франка (керівники: доктор фіз.-мат. наук А.О. Погоруй, доктор фіз.-мат. наук Є.О. Севостьянов, канд. фіз.-мат. наук, доцент О.Ф. Герус).

**Публікації.** Основні результати дисертації опубліковано у 26 наукових роботах [1 – 26] (див. список публікацій здобувача на с. 12 – 15), внесених до переліку фахових видань із фізико–математичних наук, 13 із них [8, 10, 11, 16–21, 23–26] надруковано у виданнях, внесених до міжнародних науково–метричних баз Scopus та Web of Science. Частково вони також висвітлені у матеріалах міжнародних конференцій [1 – 17].

**Структура дисертації.** Дисертація складається із анотації, списку публікацій здобувачки, змісту, переліку умовних позначень, вступу, 7 розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 236 найменувань, і додатка, який містить список публікацій здобувачки за темою дисертації й відомості про апробацію результатів дисертації. Повний обсяг дисертації становить 351 сторінку друкованого тексту.

**Подяки.** Висловлюю щиру подяку науковому консультантові, професору, доктору фізико-математичних наук Бахтіну Олександру Костянтиновичу за постановку задач, корисні поради й рекомендації.

**Зміст дисертації.** У вступі визначено об'єкт і предмет дослідження, обгрунтовано актуальність теми дисертаційного дослідження, сформульовано мету і завдання, визначено методи дослідження, його наукову новизну, теоретичне і практичне значення, прокоментовано апробацію, описано структуру дисертаційної роботи та її основний зміст.

У першому розділі дисертаційної роботи викладено огляд літератури за темою дослідження та вказано на місце отриманих здобувачем результатів у загальній теорії з окреслених напрямків.

Виклад основних результатів дисертаційного дослідження починається з розділу 2.

Нехай $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел, $\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел, $\mathbb{C}$ — площина комплексних чисел, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — її одноточкова компактифікація, $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$, $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, $\chi(t) = \frac{1}{2}\left(t + t^{-1}\right)$ — функція Жуковського.

Нехай $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ — однозв'язна область, $U = \{z : |z| < 1\}$ — одиничний круг і $a \in B$. Згідно з теоремою Рімана про відображення, існує конформне відображення області $B$ на одиничний круг $U$ при якому $f(a) = 0 \in U$, $f'(a) > 0$. Якщо розглянути обернене відображення $\varphi$ таке, що здійснює відображення одиничного круга $U$ на область $B$ так, що $\varphi(0) = a$, то поняття конформного радіуса однозв'язної області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ визначимо наступним чином

$$R(B, a) = \frac{1}{|f'(a)|} = |\varphi'(0)|.$$

Узагальненням поняття конформного радіуса для багатозв'язних областей є поняття внутрішнього радіуса області, який визначається за допомогою узагальненої функцію Гріна.

Нехай $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B \neq \overline{\mathbb{C}}$. **Функцією Гріна** області $B$ називається така дійсна функція $g_B(z,a)$, яка визначена при всіх $z, a \in B, z \neq a$ та при кожному фікованому $a \in B$ виконуються наступні умови:

1) функція $g_B(z,a)$ як функція від $z$ гармонічна в області $B \setminus \{a\}$;

2) якщо $z \to a$, то $g_B(z,a) \to +\infty$, при цьому різниця $g_B(z,a) - \ln \frac{1}{|z-a|}$ залишається обмеженою для скінченного $a$, різниця $g_B(z,a) - \ln|z|$ обмежена для $a = \infty$;

3) при наближенні до границі $\partial B$ функція $g_B(z,a)$ прямує до нуля.

Довільну область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ завжди можна вичерпати послідовністю областей $B_1 \subset B_2 \subset \ldots,$ для кожної з яких існує функція Гріна. Тоді за теоремою Харнака про зростаючі послідовності гармонічних функцій випливає, що для кожної точки $a \in B \setminus \{\infty\}$ послідовність гармонічних функцій

$$h_{B_k,a}(z) := g_{B_k}(z,a) - \ln \frac{1}{|z-a|}, \quad z \in B \setminus \{a\},$$

визначена за неперервністю в точці $a$ та рівномірно збігається на компактних підмножинах області $B$ при або $k \to \infty$ або до $+\infty$ до деякої гармонічної функції $h_{B,a}(z)$, яка не залежить від вибору областей $B_1$, $B_2, \ldots$. В цьому випадку функція

$$g_B(z,a) := h_{B,a}(z) + \ln \frac{1}{|z-a|}$$

називається узагальненою функцією Гріна області $B$, а величина $r(B,a) := \exp(h_{B,a}(a))$ називається внутрішнім радіусом області $B$ відносно точки $a$. Все сказане вище має місце і для $w = \infty$:

$$h_{B_k,\infty}(z) := g_{B_k}(z,\infty) - \ln|z|.$$

Таким чином,

$$g_B(z,a) = \ln \frac{1}{|z-a|} + \ln r(B,a) + o(1), \quad o(1) \rightrightarrows 0, \quad z \to a,$$

$$g_B(z,\infty) = \ln|z| + \ln r(B,\infty) + o(1), \quad o(1) \rightrightarrows 0, \quad z \to \infty.$$

Відмітимо, що відмінність узагальненої функції Гріна від класичної функції Гріна полягає в тому, що при наближенні до границі узагальнена функція Гріна прямує до нуля всюди, за винятком, можливо, множини логарифмічної ємності нуль.

Нехай $n, m \in \mathbb{N}$. Систему точок

$$A_{n,m} := \{a_{k,p} \in \mathbb{C} : k = \overline{1,n},\, p = \overline{1,m}\}$$

називатимемо $(n,m)$**-променевою**, якщо при всіх $k = \overline{1,n}$ і $p = \overline{1,m}$ виконуються співвідношення:

$$0 < |a_{k,1}| < \ldots < |a_{k,m}| < \infty;$$

$$\arg a_{k,1} = \arg a_{k,2} = \ldots = \arg a_{k,m} =: \theta_k;$$

$$0 = \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < \theta_{n+1} := 2\pi.$$

У випадку $m = 1$, $(n,1)$-променеву систему точок називатимемо $n$-променевою і розглянемо більш прості позначення: $a_{k,1} =: a_k$, $k = \overline{1,n}$, $A_{n,1} =: A_n$, $a_{n+1} := a_1$, $a_0 := a_n$.

Величини $\alpha_k := \alpha_k(A_{n,m}) := \frac{1}{\pi}\left[\theta_{k+1} - \theta_k\right]$, $k = \overline{1,n}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $\alpha_0 := \alpha_n := \frac{1}{\pi}\left[2\pi - \theta_k\right]$, називатимемо **кутовими параметрами** $(n,m)$-променевої системи точок $A_{n,m}$. Очевидно, що $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k(A_{n,m}) = 2$.

Для фіксованого $R \in \mathbb{R}^+$ і будь-якої $(n,m)$-променевої системи точок $A_{n,m}$ введемо наступний "керуючий" функціонал:

$$L_R(A_{n,m}) := \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)\cdot\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\cdot|a_{k,p}|.$$

Очевидно, що $L_1(A_{n,m}) = L(A_{n,m})$. Окрім того,

$$L_R(A_{n,m}) = R^{mn}\cdot L\left(\frac{1}{R}\cdot A_{n,m}\right).$$

На множині всіх $n$-променевих систем точок введемо такий "керуючий" функціонал:

$$\mathcal{N}^{(0)}(A_n) := \prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)|a_k|.$$

**Другий розділ** дисертаційної роботи присвячений отриманню оцінок зверху для функціоналів наступного виду при всіх значеннях параметра $\gamma \in (0, nm]$

$$I_{n,m}(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right),$$

$$Y_{n,m}(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_{\infty}, \infty\right) \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right),$$

де $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, — довільна фіксована $(n,m)$-променева система точок, $B_0$, $B_{\infty}$, $B_{k,p}$ — довільна система областей, що взаємно не перетинаються, таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_{\infty} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$ при $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$.

У монографії [11, с. 135] для функціоналів $I_{n,m}(\gamma)$, $Y_{n,m}(\gamma)$, були отримані лише результати для $\gamma = 0$ та $\gamma = \frac{n^2}{4}$ і будь-яких $(n,m)$-рівнопроменевих систем точок (див. також теорему 1.5.3).

**Теорема 2.2.1.** [29] *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, nm]$. Тоді для довільної фіксованої $(n,m)$-променевої системи точок $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, $B_0$, $\{B_{k,p}\}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, справедлива нерівність*

$$I_{n,m}(\gamma) \leqslant (nm)^{-\frac{\gamma}{2}} \left(I_{n,m}(0)\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}} \left( \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} |a_{k,p}| \right)^{\frac{2\gamma}{nm}}.$$

**Зауваження 2.2.1.** *Якщо $\gamma = nm$ і $\prod\limits_{k=1}^{n} \prod\limits_{p=1}^{m} |a_{k,p}| \leqslant R$, то за умов теореми 2.2.1 має місце наступне співвідношення*

$$r^{nm}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant (nm)^{-\frac{nm}{2}} \cdot R^2.$$

**Зауваження 2.2.2.** *В теоремі 2.2.1 за умов $\gamma = nm$ і $\prod\limits_{k=1}^{n} \prod\limits_{p=1}^{m} |a_{k,p}| \leqslant R$ структура точок і областей неістотна.*

Використовуючи нерівність, доведену в теоремі 1.5.2 (див. також [11, с. 95]), із теореми 2.2.1 одержуємо наступне твердження.

**Наслідок 2.2.1.** *Нехай* $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, nm]$. *Тоді для довільної фіксованої* $(n,m)$*-променевої системи точок* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $\{B_{k,p}\}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant (nm)^{-\frac{\gamma}{2}} \times$$

$$\times \left(2^{nm} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{m} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot L_R(A_{n,m})\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}} \left(\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} |a_{k,p}|\right)^{\frac{2\gamma}{nm}}.$$

Враховуючи наслідок 3.1.5 [11, с. 115], із теореми 2.2.1 одержуємо наступні твердження.

**Наслідок 2.2.2.** [29] *Нехай* $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, nm]$. *Тоді для довільної фіксованої* $(n,m)$*-променевої системи точок* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $\{B_{k,p}\}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4^{nm-\gamma} \cdot \left(L_R(A_{n,m})\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}}}{nm^{nm-\frac{\gamma}{2}}} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} |a_{k,p}|\right)^{\frac{2\gamma}{nm}}.$$

**Наслідок 2.2.3.** [29] *Нехай* $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, nm]$. *Тоді для довільної фіксованої* $(n,m)$*-променевої системи точок* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *такої, що* $L_R(A_{n,m}) = 1$, *і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $\{B_{k,p}\}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$,

$a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant \frac{4^{nm-\gamma}}{nm^{nm-\frac{\gamma}{2}}}.$$

**Теорема 2.3.1.** [29] *Нехай* $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, nm]$. *Тоді для довільної фіксованої* $(n,m)$*-променевої системи точок* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_{\infty}$, $\{B_{k,p}\}$, $\infty \in B_{\infty} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *справедлива нерівність*

$$Y_{n,m}(\gamma) \leqslant (nm)^{-\frac{\gamma}{2}} \left(Y_{n,m}(0)\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}}.$$

**Зауваження 2.3.1.** *Якщо* $\gamma = nm$, *то за умов теореми 2.3.1 має місце наступне співвідношення*

$$r^{nm}\left(B_{\infty}, \infty\right) \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant (nm)^{-\frac{nm}{2}}.$$

**Зауваження 2.3.2.** *В теоремі 2.3.1 при* $\gamma = nm$ *структура точок і областей неістотна.*

Використовуючи результат роботи [11, с. 95] (див. також теорему 1.5.2) і наслідок 3.1.5 [11, с. 115], із теореми 2.3.1 одержуємо наступні твердження.

**Наслідок 2.3.1.** *Нехай* $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, nm]$. *Тоді для довільної фіксованої* $(n,m)$*-променевої системи точок* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_{\infty}$, $\{B_{k,p}\}$, $\infty \in B_{\infty} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_{\infty}, \infty\right) \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant$$

$$\leqslant (nm)^{-\frac{\gamma}{2}} \left( 2^{nm} \cdot \left( \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right)^m \cdot \left( \prod_{k=1}^{n} \mu_k(R) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot L_R(A_{n,m}) \right)^{1-\frac{\gamma}{nm}}.$$

**Наслідок 2.3.2.** [29] *Нехай* $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, nm]$. *Тоді для довільної фіксованої* $(n,m)$*-променевої системи точок* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_\infty$, $\{B_{k,p}\}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *справедлива нерівність*

$$Y_{n,m}(\gamma) \leqslant \frac{4^{nm-\gamma} \cdot (L_R(A_{n,m}))^{1-\frac{\gamma}{nm}}}{nm^{nm-\frac{\gamma}{2}}}.$$

**Наслідок 2.3.3.** [29] *Нехай* $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, nm]$. *Тоді для довільної фіксованої* $(n,m)$*-променевої системи точок* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *такої, що* $L_R(A_{n,m}) = 1$, *і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_\infty$, $\{B_{k,p}\}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *справедлива нерівність*

$$Y_{n,m}(\gamma) \leqslant \frac{4^{nm-\gamma}}{nm^{nm-\frac{\gamma}{2}}}.$$

В п. 2.4 розглядається наступна екстремальна проблема з вільними полюсами на комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}$.

**Проблема 2.1.** Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $a_0 = 0$, $|a_k| \in \mathbb{R}^+$, $0 < |a_k| \leqslant R$, $k = \overline{1,n}$, $A_n = \{a_k\}$, $k = \overline{1,n}$, — $n$-променева система точок, $\{B_k\}_{k=0}^n$ — система областей, що взаємно не перетинаються, таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ при $k = \overline{0,n}$. При всіх фіксованих значеннях параметра $\gamma \in (0,n]$ і $R \in \mathbb{R}^+$ знайти максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^\gamma (B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r (B_k, a_k), \tag{1}$$

і описати екстремалі.

Ця проблема у випадку $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, була поставлена в якості відкритої проблеми в 1994 році в роботі [57]. На даний час вона повністю не розв'язана, її часткові випадки вивчалися в багатьох роботах. В статті [57] для випадку одиничного кола сформульована вище задача була розв'язана для значення параметра $\gamma = 1$ і всіх значень натурального параметра $n \geqslant 2$. А саме, було показано, що при її умовах справедлива нерівність

$$r(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, d_k\right),$$

де $d_k$, $D_k$, $k = \overline{0,n}$, — полюси та кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-1)w^n + 1}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

Л.В. Ковальов в 1996 році в роботі [76] отримав розв'язок цієї задачі при досить жорстких обмеженнях на геометрію розташування систем точок на одиничному колі, а саме, для таких систем точок, для яких виконуються наступні умови

$$|a_k| = 1,\ \ 0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma},\ \ k = \overline{1,n},\ \ n \geqslant 5.$$

В [139] показано, що результат Л.В. Ковальова справедливий і при $n = 4$. В 2003 році в [89] одержано розв'язок проблеми 2.1 для $\gamma \in (0, 1]$ при умові $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$. Далі, в монографії [11] 2008 року було показано, що аналог результата В.М. Дубініна [57] виконується для довільного $\gamma \in \mathbb{R}^+$, але починаючи з деякого невідомого номера $n_0(\gamma)$. Також в [11] був запропонований метод "керуючих" функціоналів, який дозволяє послабити вимоги на геометрію розташування систем точок.

В зв'язку з тим, що розв'язати цю проблему для всіх $\gamma \in (1, n]$ довгий час не вдається, метою даної роботи є отримання деякої оцінки для функціонала (1) при всіх $\gamma \in (1,\, n]$, яка як можливо менше відхиляється від значення функціонала $I_n(\gamma)$, що досягається на системі кругових областей і полюсів квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

(див. [11, 57, 76, 165]). Має місце наступне твердження.

**Теорема 2.4.1.** [27] *Нехай* $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in(0,n]$. *Тоді для будь-якої фіксованої системи різних точок* $\{a_k\}_{k=1}^{n}\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ *і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* $B_k$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,n}$, $a_0=0$, *справедлива нерівність*

$$I_n(\gamma)\leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(I_n(0)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}\left(\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right)^{\frac{2\gamma}{n}}. \qquad (2)$$

**Зауваження 2.4.1.** *Якщо* $\gamma=n$ *і* $\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k|\leqslant 1$, *то зі сформульованої вище теореми 2.4.1 маємо нерівність*

$$r^n\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right)\leqslant n^{-\frac{n}{2}}.$$

**Зауваження 2.4.2.** *В теоремі 2.4.1 за умов* $\gamma=n$ *і* $\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k|\leqslant 1$ *структура точок і областей неістотна.*

**Теорема 2.4.2.** [27] *Нехай* $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in(1,n]$. *Тоді для довільної* $n$*-променевої системи точок* $A_n=\{a_k\}_{k=1}^{n}$ *і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_k$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,n}$, $a_0=0$, *справедлива нерівність* (2).

Використовуючи результат роботи [11, Теорема 5.1.1] (див. також теорему 1.5.6) із теореми 2.4.2, отримуємо наступне твердження.

**Наслідок 2.4.1.** [27] *Нехай* $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in(1,n]$. *Тоді для довільної* $n$*-променевої системи точок* $A_n=\{a_k\}_{k=1}^{n}$ *такої,* *що* $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) = 1$, *і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant 2^{n-\gamma} \cdot n^{-\frac{\gamma}{2}} \cdot \left( \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Враховуючи, що $\prod\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^n$, має місце наступний результат.

**Наслідок 2.4.2.** [27] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (1, n]$. *Тоді для довільної* $n$*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, *такої, що* $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) = 1$, *і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}} \left( \frac{4}{n} \right)^{n-\gamma}.$$

**Теорема 2.4.3.** [146] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (1, n]$. *Тоді для будь-якої системи різних точок* $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ *одиничного кола та будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}} \left( \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

**Зауваження 2.4.3.** *Якщо* $\gamma = n$, *то зі сформульованої вище теореми 2.4.3 маємо нерівність*

$$r^{n}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant n^{-\frac{n}{2}}.$$

Для будь-якої $n$-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $|a_k| = 1$, і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються, $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $a_k \in B_k \subset$

$\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, справедлива нерівність (див. Наслідок 5.1.3 [11])

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

**Наслідок 2.4.3.** [146] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (1, n]$. *Тоді для будь-якої системи різних точок* $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ *одиничного кола і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,n}$, $a_0 = 0$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant 2^{n-\gamma} \cdot n^{-\frac{\gamma}{2}} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Використавши теорему 6.11 [165] (див. також теорему 1.4.3), маємо наступний результат.

**Наслідок 2.4.4.** [146] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (1, n]$. *Тоді для будь-яких різних точок* $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ *одиничного кола і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,n}$, $a_0 = 0$, *має місце нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{4}{n}\right)^{n-\gamma}.$$

**Проблема 2.2.** Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k=\overline{1,n}$, $B_0$, $B_1$, $B_2, \ldots, B_n$, $n \geqslant 2$, — області, що взаємно не перетинаються, і області $B_1, \ldots, B_n$ — симетричні відносно одиничного кола, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,n}$. При всіх фіксованих значеннях параметра $\gamma \in (0, n]$ знайти максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

і описати екстремалі.

Проблема 2.2 для випадку $\gamma = 1$ була сформульована як відкрита проблема в 1994 році в роботі [57]. Для $\gamma = 1$ і $n \geqslant 2$ її розв'язав

Л.В. Ковальов [77, 78]. А саме, було показано справедливість наступної нерівності

$$r(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant r\left(D_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k,d_k\right),$$

де $d_k$, $D_k$, $k=\overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2=-\frac{w^{2n}+2(n^2-1)w^n+1}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Однак для значень $\gamma\neq 1$ проблема 2.2 довгий час залишалася не розв'язаною. Лише в 2018 році в статті [71] було одержано результат для $n\geqslant 2$ і $\gamma\in(0,1)$. Для $\gamma\in(1,\sqrt[3]{n}\,)$ і $n\geqslant 14$ задача розв'язана в статті [147]. В роботі [45] отримано деякий результат для однієї загальнішої задачі, з якого випливає, що проблема 2.2 має розв'язок для $\gamma\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$ і $n\geqslant 9$.

Застосовуючи міркування, аналогічні доведенню теореми 2.4.1, і умову $|a_k|=1$, $k=\overline{1,n}$, одержуємо наступний результат.

**Теорема 2.4.4.** [163] *Нехай $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in(1,\,n]$. Тоді для будь-якої системи різних точок $A_n=\{a_k\}_{k=1}^{n}$ одиничного кола і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, $B_k$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,n}$, $a_0=0$, і, крім того, області $B_k$, $k=\overline{1,n}$, — симетричні відносно одиничного кола $|a_k|=1$, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

**Зауваження 2.4.4.** *Якщо $\gamma=n$ то зі сформульованої вище теореми 2.4.4 маємо нерівність*

$$r^{n}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \leqslant n^{-\frac{n}{2}}.$$

Використовуючи результат 5.1.1 [11], із теореми 2.4.4 маємо наступне твердження.

**Наслідок 2.4.5.** [163] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (1, n]$. *Тоді для довільної системи різних точок* $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ *одиничного кола і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, *і, крім того, області* $B_k$, $k = \overline{1,n}$, *— симетричні відносно одиничного кола* $|a_k| = 1$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant 2^{n-\gamma} \cdot n^{-\frac{\gamma}{2}} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Використоуючи теорему 6.11 [165, с. 172] із теореми 2.4.4, маємо наступний результат.

**Наслідок 2.4.6.** [163] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (1, n]$. *Тоді за всіх умов наслідку 2.4.5 має місце наступна нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{4}{n}\right)^{n-\gamma}.$$

В п. 2.5 одержано оцінку функціонала першого типу для $(n, m)$-променевих систем точок з додатковою умовою симетрії.

Вважатимемо, що область $D_0$ належить до класу $\Lambda$, якщо $0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ і $\overline{\mathbb{C}} \backslash \left\{\overline{D_0} \cup \overline{D_0^{\star}}\right\}$ — відкрита множина, яка має деякий перетин з одиничним колом, де $D_0^{\star}$ — область, симетрична $D_0$ відносно одиничного кола. Вважатимемо, що область $D_0$ належить до класу $\Delta$, якщо $0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ і $\overline{\mathbb{C}} \backslash \left\{\overline{D_0} \cup \overline{D_0^{\star}}\right\}$ є деяка відкрита множина, $D_0^{\star}$ — область, симетрична $D_0$ відносно одиничного кола.

Систему непересічних областей $\{D_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, будемо називати системою областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $D_0$, якщо має місце наступне

співвідношення
$$\bigcup_{k=1}^{n}\bigcup_{p=1}^{m} D_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \left\{\overline{D_0} \cup \overline{D_0^{\star}}\right\}.$$
Очевидно, що $D_0$, $D_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, — система областей, що взаємно не перетинаються.

**Проблема 2.3.** При всіх значеннях параметра $\gamma \in (0, nm]$ знайти оцінку максимума добутку
$$I_{n,m}(\gamma) = r^{\gamma}\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(D_{k,p}, a_{k,p}\right),$$
де $n,m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $a_0 = 0$, $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, — довільна фіксована $(n,m)$-променева система точок, $\{D_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, — довільна система областей, що взаємно не перетинаются, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $D_0 \in \Delta$, $0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in D_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$.

Має місце наступне твердження.

**Теорема 2.5.1.** [30] *Нехай* $n,m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^{+}$. *Тоді для будь-якої фіксованої* $(n,m)$*-променевої системи точок* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *і будь-якого фіксованого набору областей* $D_0$, $\{D_{k,p}\}$, $a_0 = 0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in D_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *де* $\{D_{k,p}\}$ *— система областей, що взаємно не перетинаютьcя, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю* $D_0 \in \Delta$, *справедлива нерівність*
$$I_{n,m}(\gamma) \leqslant (nm)^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(D_{k,p}, a_{k,p}\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}} \left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} |a_{k,p}|\right)^{\frac{2\gamma}{nm}}.$$

**Теорема 2.5.2.** [30] *Нехай* $n,m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, nm]$. *Тоді для будь-якої фіксованої* $(n,m)$*-променевої системи точок* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *і будь-якого набору областей* $D_0$, $\{D_{k,p}\}$,

*$a_0 = 0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in D_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, де $\{D_{k,p}\}$ — система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $D_0 \in \Delta$, справедлива нерівність*

$$I_{n,m}(\gamma) \leqslant (nm)^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(D_{k,p}, a_{k,p}\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}} \left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} |a_{k,p}|\right)^{\frac{2\gamma}{nm}}.$$

**Зауваження 2.5.1.** *Якщо $\gamma = nm$ і $\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m} |a_{k,p}| \leqslant 1$, то за умов теореми 2.5.2 має місце нерівність*

$$r^{nm}\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(D_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant (nm)^{-\frac{nm}{2}}.$$

*У цьому випадку структура точок і областей неістотна.*

Із теореми 2.5.2 одержуємо наступні твердження.

**Наслідок 2.5.1.** *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, nm]$. Тоді для довільної фіксованої $(n,m)$-променевої системи точок $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, і довільного набору областей $D_0$, $\{D_{k,p}\}$, $a_0 = 0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in D_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, де $\{D_{k,p}\}$ — система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $D_0 \in \Delta$, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(D_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant (nm)^{-\frac{\gamma}{2}} \times$$

$$\times \left(2^{nm} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{m} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot L_R(A_{n,m})\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}} \left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} |a_{k,p}|\right)^{\frac{2\gamma}{nm}}.$$

**Наслідок 2.5.2.** [30] *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, nm]$. Тоді для довільної фіксованої $(n,m)$-променевої системи точок $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, і довільного набору областей $D_0$, $\{D_{k,p}\}$,*

$a_0 = 0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in D_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *де* $\{D_{k,p}\}$ *— система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю* $D_0 \in \Delta$, *справедлива нерівність*

$$I_{n,m}(\gamma) \leqslant \frac{4^{nm-\gamma} \cdot (L_R(A_{n,m}))^{1-\frac{\gamma}{nm}}}{nm^{nm-\frac{\gamma}{2}}} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} |a_{k,p}|\right)^{\frac{2\gamma}{nm}}.$$

**Наслідок 2.5.3.** [30] *Нехай* $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, nm]$. *Тоді для довільної фіксованої* $(n,m)$*-променевої системи точок* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *такої, що* $L_R(A_{n,m}) = 1$, *і довільного набору областей* $D_0$, $\{D_{k,p}\}$, $a_0 = 0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in D_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *де* $\{D_{k,p}\}$ *— система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю* $D_0 \in \Delta$, *справедлива нерівність*

$$I_{n,m}(\gamma) \leqslant 4^{nm-\gamma} \cdot nm^{\frac{\gamma}{2}-nm}.$$

Якщо $m = 1$, то маємо наступний результат для $n$-променевої системи точок.

**Наслідок 2.5.4.** [30] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, n]$. *Тоді для будь-якої фіксованої* $n$*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *і будь-якого набору областей* $D_k$, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, *де* $\{D_k\}_{k=1}^{n}$ *— система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю* $D_0 \in \Delta$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(D_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \left(\prod_{k=1}^{n} |a_k|\right)^{\frac{2\gamma}{n}}.$$

**Зауваження 2.5.3.** *Якщо* $\gamma = n$ *і* $\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant 1$ *, то за умов наслідку 2.5.4 має місце нерівність*

$$r^n\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right) \leqslant n^{-\frac{n}{2}}.$$

*У цьому випадку структура точок і областей неістотна.*

Із результату роботи [11, с. 204] одержуємо наступне твердження.

**Наслідок 2.5.5.** [30] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$ *,* $n \geqslant 2$ *,* $\gamma \in (0, n]$ *. Тоді для будь-якої фіксованої* $n$ *-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *, такої, що* $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) = 1$ *, і будь-якого набору областей* $D_k$ *,* $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ *,* $k = \overline{0, n}$*,* $a_0 = 0$ *, де* $\{D_k\}_{k=1}^{n}$ *— система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю* $D_0 \in \Delta$ *, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right) \leqslant 2^{n-\gamma} \cdot n^{-\frac{\gamma}{2}} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Враховуючи, що $\prod\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^n$, тоді має місце наступний результат.

**Наслідок 2.5.6.** [30] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$ *,* $n \geqslant 2$ *,* $\gamma \in (0, n]$ *. Тоді за всіх умов наслідку 2.5.5 справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{4}{n}\right)^{n-\gamma}.$$

З міркувань доведення теореми 2.5.1 для випадку, коли точки $|a_k| = 1$ , $k = \overline{1, n}$, належать одиничному колу, маємо наступне твердження.

**Наслідок 2.5.7.** [30] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$ *,* $n \geqslant 2$ *,* $\gamma \in (0, n]$ *. Тоді для будь-якої системи різних точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *одиничного кола і будь-якого набору областей* $D_k$ *,* $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ *,* $k = \overline{0, n}$*,* $a_0 = 0$ *, де* $\{D_k\}_{k=1}^{n}$ *— система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою* *умовою симетрії, яка визначається областю* $D_0 \in \Lambda$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(D_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k,a_k\right) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k,a_k\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

**Зауваження 2.5.4.** *Якщо* $\gamma = n$, *то за умов наслідку 2.5.7 має місце нерівність*

$$r^{n}\left(D_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k,a_k\right) \leqslant n^{-\frac{n}{2}}.$$

**Третій розділ** дисертаційної роботи присвячений отриманню ефективних оцінок зверху при всіх значеннях параметра $\gamma \in \mathbb{R}^{+}$ для функціонала

$$J_{n,m}(\gamma) = \left[r\left(B_0,0\right) r\left(B_{\infty},\infty\right)\right]^{\gamma}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right),$$

де $n,m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, — довільна фіксована $(n,m)$-променева система точок, $B_0$, $B_{\infty}$, $B_{k,p}$ — довільна система областей, що взаємно не перетинаються, таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_{\infty} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$ при $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$.

У монографії [11, с. 146] для функціонала $J_{n,m}(\gamma)$ були отримані лише результати для $\gamma = 0$ та $\gamma = \frac{n^2}{4}$ і будь-яких $(n,m)$-рівнопроменевих систем точок (див. також теорему 1.5.4).

**Теорема 3.1.1.** [29, 30, 163, 164] *Нехай* $n,m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^{+}$. *Тоді для довільної фіксованої* $(n,m)$*-променевої системи точок* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_{\infty}$, $\{B_{k,p}\}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_{\infty} \subset \overline{\mathbb{C}}$,

$a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *справедлива нерівність*

$$J_{n,m}(\gamma) \leqslant \begin{cases} (nm+1)^{-\gamma\frac{nm+1}{nm+2}} \left[\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right)\right]^{1-\frac{2\gamma}{nm+2}} \prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m} |a_{k,p}|^{\frac{2\gamma}{nm+2}}, \\ \text{якщо } \gamma \in \left(0, \frac{nm+2}{2}\right]; \\ (nm+1)^{-\frac{nm+1}{2}} \prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m} |a_{k,p}|, \quad \text{якщо } \gamma > \frac{nm+2}{2}. \end{cases}$$

**Зауваження 3.1.1.** *Якщо* $\gamma \geqslant \frac{1}{2}(nm+2)$ *і* $\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m} |a_{k,p}| \leqslant R$, *то за умов теореми 3.1.1 має місце наступне співвідношення*

$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant (nm+1)^{-\frac{nm+1}{2}} \cdot R.$$

**Зауваження 3.1.2.** *В теоремі 3.1.1 за умов* $\gamma \geqslant \frac{1}{2}(nm+2)$ *і* $\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m} |a_{k,p}| \leqslant R$ *структура точок і областей неістотна.*

Використовуючи результат роботи [11, с. 95], із теореми 3.1.1 одержуємо наступне твердження.

**Наслідок 3.1.1.** [29, 30, 163, 164] *Нехай* $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. *Тоді для довільної фіксованої* $(n,m)$*-променевої системи точок* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *такої, що* $L_R(A_{n,m}) = 1$, *і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_\infty$, $\{B_{k,p}\}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *справедлива нерівність*

$$J_{n,m}(\gamma) \leqslant (nm+1)^{-\frac{nm+1}{2}}.$$

В п. 3.2 розглядається наступна екстремальна задача.

**Проблема 3.1.** При всіх значеннях параметра $\gamma \in \mathbb{R}^+$ показати, що максимум функціонала

$$J_n(\gamma) = [r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

де $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ — $n$-променева система точок, $B_0$, $B_\infty$, $\{B_k\}_{k=1}^n$ — сукупність областей, що взаємно не перетинаються, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, досягається для деякої конфігурації з областей $B_k$, $B_\infty$ і точок $a_k$, $\infty$, $k = \overline{0,n}$, які володіють $n$-кратною симетрією.

1988 року В.М. Дубінін [56] уперше отримав оцінку для функціонала $J_n(\gamma)$ при $\gamma = \frac{1}{2}$ і $n \geqslant 2$ для систем неперетинних областей методом симетризації, у випадку, коли точки лежать на одиничному колі. Г.В. Кузьміна за допомогою методу екстремальної метрики [87, с. 267] посилила результат роботи [56] і показала, що дана оцінка справедлива при $\gamma \in \left(0, \frac{n^2}{8}\right]$, $n \geqslant 2$ (для випадку неперетинних однозв'язних областей). Однак результат Г.В. Кузьміної [87, с. 267] для випадку $n = 2$ повністю співпадає з результатом роботи В.М. Дубініна [56], оскільки нескладно показати, що результат має місце при всіх $\gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Г.В. Кузьміна в роботі [87, с. 271] також зазначає, що верхню оцінку для параметра $\gamma$ можна покращити. Отже, остаточне питання про оцінку для $\gamma$ для функціонала $J_n(\gamma)$ залишається відкритим.

Використовуючи метод доведення теореми 3.1.1 ми можемо отримати оцінку наступного функціонала

$$J_n(\gamma) = \left[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)\right]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

для якого в статтях [11, 57, 87, 165], в часткових випадках, доведено наступну нерівність

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{2\gamma}{n}}}{\left|1 - \frac{4\gamma}{n^2}\right|^{\frac{2\gamma}{n} + \frac{n}{2}}} \left|\frac{n - 2\sqrt{\gamma}}{n + 2\sqrt{\gamma}}\right|^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається тоді, коли точки $0$, $\infty$, $a_k$ і області $B_0$, $B_\infty$, $B_k$, $k = \overline{1,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (n^2 - 2\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

Має місце наступний результат.

**Теорема 3.2.1.** [29, 30, 163, 164] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. *Тоді для будь-якої фіксованої системи різних точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \overline{\mathbb{C}} \backslash \{0, \infty\}$ *і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_\infty$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, *справедлива нерівність*

$$J_n(\gamma) \leqslant \begin{cases} (n+1)^{-\gamma \frac{n+1}{n+2}} \left[\prod\limits_{k=1}^n r\left(B_k, a_k\right)\right]^{1-\frac{2\gamma}{n+2}} \prod\limits_{k=1}^n |a_k|^{\frac{2\gamma}{n+2}}, & \text{якщо } \gamma \in \left(0, \frac{n+2}{2}\right]; \\ (n+1)^{-\frac{n+1}{2}} \prod\limits_{k=1}^n |a_k|, & \text{якщо } \gamma > \frac{n+2}{2}. \end{cases}$$

**Зауваження 3.2.1.** *Якщо* $\gamma \geqslant \frac{n+2}{2}$ *і* $\prod\limits_{k=1}^n |a_k| \leqslant 1$, *то з теореми 3.2.1 одержуємо наступну нерівність*

$$\left[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)\right]^\gamma \prod_{k=1}^n r\left(B_k, a_k\right) \leqslant (n+1)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

**Зауваження 3.2.2.** *В теоремі 3.2.1 за умов* $\gamma \geqslant \frac{n+2}{2}$ *і* $\prod\limits_{k=1}^n |a_k| \leqslant 1$ *структура точок і областей неістотна.*

З теореми 3.2.1 слідують наступні твердження.

**Теорема 3.2.2.** [29, 30, 163, 164] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. *Тоді для будь-якої фіксованої* $n$*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \overline{\mathbb{C}} \backslash \{0, \infty\}$ *і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_\infty$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, *справедлива нерівність*

$$J_n(\gamma) \leqslant \begin{cases} (n+1)^{-\gamma \frac{n+1}{n+2}} \left[\prod\limits_{k=1}^n r\left(B_k, a_k\right)\right]^{1-\frac{2\gamma}{n+2}} \prod\limits_{k=1}^n |a_k|^{\frac{2\gamma}{n+2}}, & \text{якщо } \gamma \in \left(0, \frac{n+2}{2}\right]; \\ (n+1)^{-\frac{n+1}{2}} \prod\limits_{k=1}^n |a_k|, & \text{якщо } \gamma > \frac{n+2}{2}. \end{cases}$$

**Теорема 3.2.3.** [29, 30, 163, 164] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. *Тоді для будь-якої системи різних точок* $\{a_k\}_{k=1}^n$ *одиничного кола й будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_\infty$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *справедлива нерівність*

$$J_n(\gamma) \leqslant \begin{cases} (n+1)^{-\gamma\frac{n+1}{n+2}} \left[\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)\right]^{1-\frac{2\gamma}{n+2}}, & \text{якщо } \gamma \in \left(0, \frac{n+2}{2}\right]; \\ (n+1)^{-\frac{n+1}{2}}, & \text{якщо } \gamma > \frac{n+2}{2}. \end{cases}$$

**Зауваження 3.2.3.** *Якщо* $\gamma \geqslant \frac{n+2}{2}$, *то за всіх умов теореми 3.2.3 має місце наступна нерівність*

$$\left[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)\right]^{\frac{n+2}{2}} \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant (n+1)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Застосовуючи загальну ідею П.М. Тамразова, запропоновану в роботі [117], до задач про неперетинні області, вперше в роботі Г.П. Бахтіної [31] були розглянуті задачі про екстремальне розбиття комплексної площини для симетричних відносно кола взаємно неперетинних областей. Зокрема, в цій роботі була поставлена наступна екстремальна задача: знайти максимум функціонала

$$\prod_{k=1}^{n} R(B_k, a_k)$$

при умові, що $B_1, \ldots, B_n$ — однозв'язні попарно неперетинні симетричні відносно одиничного кола області такі, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$. В роботі [31] було одержано наступну оцінку

$$\prod_{k=1}^{4} R(B_k, a_k) \leqslant 1,$$

причому рівність досягається у випадку, коли області $B_k$, $k = \overline{1,4}$, є круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{z^2}{(z^4-1)^2}\, dz^2.$$

В 1984 р. Г.П. Бахтіна у роботі [33] розглянула задачу про максимум функціонала
$$\prod_{k=0}^{n} R^{\alpha_k}(B_k, a_k),$$
де $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ — довільна система однозв'язних взаємно неперетинних областей таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset U$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $\alpha_k \geqslant 0$, $k = \overline{0, n}$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, області $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ — симетричні відносно одиничного кола і отримала деякі часткові результати даної задачі.

Із міркувань при доведенні теореми 3.2.1 при умові, що $B_0 \subset U$, ми отримуємо наступний результат, який дає оцінку зверху функціонала
$$r^{2\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$
що розглядався в роботі Г.П. Бахтіної [33].

**Теорема 3.2.4.** [29, 30, 163, 164] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \geqslant \frac{n+2}{2}$ *і* $B_0 \subset U$. *Тоді для будь-якої системи різних точок* $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ *одиничного кола й будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, *і, крім того, області* $B_k$, $k = \overline{1, n}$, — *симетричні відносно одиничного кола* $|a_k| = 1$, *справедлива нерівність*
$$r^{2\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant (n+1)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

**Четвертий розділ** присвячений дослідженню наступної відкритої екстремальної задачі про добуток внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються.

**Проблема 4.1.** (В.М. Дубінін [57, 165]) При всіх значеннях параметра $\gamma \in (0, n]$ показати, що максимум функціонала
$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

де $B_0$, $B_1$, $B_2, \ldots, B_n$, $n \geqslant 2$, — області, що взаємно не перетинаються, в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, досягається для конфігурації з областей $B_k$ і точок $a_k$, які володіють $n$-кратною симетрією.

У роботах [11, 57, 76, 165] показано, що величина

$$I_n^0(\gamma) = r^\gamma\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, d_k\right),$$

де $d_k$, $D_k$, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, є, відповідно, полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2,$$

має вигляд

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{3}$$

У теоремі 4.1.1 одержано розв'язок цієї проблеми при $n = 2$ і $\gamma \in (1, 2]$.

**Теорема 4.1.1.** [28] *Нехай $\gamma \in (1, 2]$. Тоді для довільних різних точок $a_1$ і $a_2$ одиничного кола і довільних областей, що взаємно не перетинаються, $B_0$, $B_1$, $B_2$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедлива нерівність*

$$r^\gamma\left(B_0, 0\right) r\left(B_1, a_1\right) r\left(B_2, a_2\right) \leqslant I_2^0(\gamma) \left(\frac{1}{2}\left|a_1 - a_2\right|\right)^{2-\gamma}.$$

*Знак рівності в цій нерівності досягається, коли точки $a_0$, $a_1$, $a_2$ й області $B_0$, $B_1$, $B_2$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-\gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2-1)^2}dw^2.$$

**Зауваження 4.1.1.** *Із теореми 4.1.1 випливає повний розв'язок проблеми 4.1 для $n = 2$.*

При $n=2$ і $\gamma \in (0,\,2]$ розглянемо загальнішу задачу про максимум функціонала $I_2(\gamma)$ для довільних фіксованих точок $a_1, a_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ комплексної площини. Має місце наступний результат.

**Теорема 4.2.1.** [28] *Нехай* $\gamma \in (0,\,2]$. *Тоді для довільних різних точок* $A_2 = \{a_1, a_2\} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, *таких, що*

$$|a_1 a_2| \leqslant 1, \quad \left(\frac{1}{2}|a_1 - a_2|\right)^{2-\gamma} \leqslant 1,$$

*і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_1$, $B_2$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) r\left(B_1, a_1\right) r\left(B_2, a_2\right) \leqslant \frac{4\gamma^{\frac{\gamma}{2}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{4}\right)^{2+\frac{\gamma}{2}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{2}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

*Знак рівності в цій нерівності досягається, коли точки* $a_0$, $a_1$, $a_2$ *й області* $B_0$, $B_1$, $B_2$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-\gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2-1)^2} dw^2.$$

Використавши результат теореми 4.1.1 можна отримати наступну оцінку зверху функціонала $I_n(\gamma)$ на одиничному колі в проблемі 4.1.

**Теорема 4.3.1.** [28] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $\gamma \in (1, n]$. *Тоді для будь-якої системи різних точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *одиничного кола і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{n-\gamma} \left(I_2^0\left(\frac{2\gamma}{n}\right)\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Використавши оцінку зверху функціонала $I_n(\gamma)$, одержану в теоремі 2.4.3, одержано наступні результати.

**Теорема 4.5.1.** [28] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (1, n]$ *і*

$$K(n,\gamma) = \left[I_n^0(\gamma) \cdot \mu_n(\gamma)\right]^{\frac{1}{\gamma}},$$

*де* $I_n^0(\gamma)$ *визначається співвідношенням* (3), *а*

$$\mu_n(\gamma) = \left[\frac{4^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}\right]^{-1}.$$

*Тоді для будь-якої системи різних точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *одиничного кола і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *таких, що*

$$r(B_0, 0) \leqslant K(n,\gamma),$$

*справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

*Знак рівності в цій нерівності досягається тоді, коли* $a_k$ *і* $B_k$, $k = \overline{0,n}$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

**Теорема 4.5.2.** [28] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_n = \sqrt{n}$. *Тоді для будь-якої системи різних точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *одиничного кола і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \leqslant r^{\gamma}\left(D_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k,d_k\right),$$

*де* $d_k$, $D_k$, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

**П'ятий розділ** присвячений дослідженню екстремальної задачі про добуток внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються, для $n$-променевих систем точок комплексної площини. Оскільки в монографії [11] був розроблений метод "керуючих" функціоналів, який дозволяє послабити умови на геометрію розташування систем точок, ми розглянемо узагальнену проблему 4.1 і замість одиничного кола введемо $n$-променеву систему точок, що задовольняє певні умови.

Для довільної $n$-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ та $\gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ введемо "керуючий" функціонал:

$$\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) := \prod_{k=1}^{n} \left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2} \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}.$$

Клас $n$-променевих систем точок, для яких справедлива рівність $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) = 1$, автоматично включає всі системи $n$ різних точок, що розміщені на одиничному колі.

**Проблема 5.1.** При всіх значеннях параметра $\gamma \in (0, n]$ знайти максимум добутку

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

де $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $a_0 = 0$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ — $n$-променева система точок, така, що $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) \leqslant 1$, $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) \leqslant 1$, $\{B_k\}_{k=0}^n$ — будь-який набір областей, що взаємно не перетинаються, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, і описати всі екстремалі.

Нині ця проблема повністю не розв'язана, відомі лише часткові результати. У роботі [158] одержано її розв'язок для $0 < \gamma < 1$ і $n \geqslant 2$. У [25, 141] отримано результати при деяких обмеженнях на геометрію розташування систем точок, а саме, для $n \geqslant 4$ й підкласу систем точок, що задовольняють умові

$$0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}, \quad k = \overline{1, n}.$$

В [18] сформульована задача розв'язана для $\gamma \in (0, n^{0{,}38}]$ і $n \geqslant 5$.

Нехай

$$I_n^0(\gamma) = r^{\gamma}\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, d_k\right), \tag{4}$$

де $d_k$ і $D_k$, $k = \overline{0, n}$, $d_0 = 0$, є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціала

$$G(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}dw^2.$$

Позначимо

$$Q_n(\gamma) = \frac{\left[2^n \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}. \tag{5}$$

Тоді має місце наступне твердження.

**Теорема 5.1.1.** [159, 161] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 6$, – фіксоване натуральне число і число $\gamma$, $\gamma \geqslant 1$. Тоді для довільної конфігурації областей $B_k$ і точок $a_k$ ($k = \overline{0, n}$), що задовольняють усі умови проблеми 5.1, і $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, $\alpha_0 = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \alpha_k$, має місце наступна оцінка*

$$\frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} \leqslant Q_n(\gamma),$$

*де $I_n^0(\gamma)$ і $Q_n(\gamma)$ визначаються співвідношеннями* (4) *і* (5). *Якщо $\gamma_n^0$ – корінь рівняння $Q_n(\gamma) = 1$, то для довільного $\gamma_n$, такого, що $1 \leqslant \gamma_n < \gamma_n^0$, справедлива нерівність*

$$\frac{I_n(\gamma_n)}{I_n^0(\gamma_n)} < 1.$$

Наступний результат показує межі застосування методу, що запропонований при доведенні теореми 5.1.1, і характеризує екстремальні області, якщо $0 < \gamma \leqslant n^{\delta}$, $\frac{1}{3} < \delta < \frac{2}{3}$.

**Теорема 5.2.2.** [162] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant e^9$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{\frac{2}{3}-\frac{1}{\sqrt{\ln n}}}$. *Тоді для будь-якої* $n$*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, *такої, що* $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) \leqslant 1$, $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) \leqslant 1$, *і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ ($k = \overline{1,n}$), *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}(D_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k).$$

*Рівність у цій нерівності досягається, якщо* $a_k = d_k$, $B_k = D_k$, $k = \overline{0,n}$, *де* $d_k$, $D_k$, *— це, відповідно, полюси і кругові області квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}dw^2.$$

Використавши оцінку зверху функціонала $I_n(\gamma)$, одержану в теоремі 2.4.1, отримуємо наступні твердження.

**Теорема 5.3.1.** [15, 29] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (1, n]$ *і*

$$K(n,\gamma) = \left[I_n^0(\gamma) \cdot \mu_n(\gamma)\right]^{\frac{1}{\gamma}},$$

*де* $I_n^0(\gamma)$ *визначається співвідношенням* (3), *а*

$$\mu_n(\gamma) = \left[\frac{4^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}\right]^{-1}.$$

*Тоді для будь-якої* $n$*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, *такої, що* $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) \leqslant 1$, $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) \leqslant 1$, *і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *таких, що*

$$r(B_0, 0) \leqslant K(n,\gamma),$$

*справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

*Знак рівності в цій нерівності досягається тоді, коли* $a_k$ *і* $B_k$, $k = \overline{0,n}$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

**Теорема 5.3.2.** [29, 158] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_n = \sqrt{n}$. *Тоді для будь-якої* $n$*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, *такої, що* $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) \leqslant 1$, $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) \leqslant 1$, *і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}(D_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k),$$

*де* $d_k$, $D_k$, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

В теоремі 5.4.1 одержано оцінку зверху для внутрішнього радіуса області відносно початку координат для довільної системи різних точок на комплексній площині.

**Теорема 5.4.1.** [53] *Нехай* $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, n)$, $\Delta \in \mathbb{R}^{+}$ *і* $A_n := \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *— довільна система різних точок на* $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. *Тоді для будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, *такого, що* $I_n(\gamma) \geqslant \Delta$, *справедлива нерівність*

$$r(B_0, 0) \leqslant n^{-\frac{n}{2(n-\gamma)}} \cdot \Delta^{-\frac{1}{n-\gamma}} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} |a_k|\right)^{\frac{2}{n-\gamma}}.$$

**Шостий розділ** присвячений дослідженню наступної екстремальної задачі про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей, частина з яких володіє симетрією відносно одиничного кола.

**Проблема 6.1.** При всіх значеннях параметра $\gamma \in (0, n]$ показати, що максимум добутку

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

де $B_0$, $B_1$, $B_2, \ldots, B_n$, $n \geqslant 2$, — області, що взаємно не перетинаються, в $\overline{\mathbb{C}}$ і, крім того, області $B_1, \ldots, B_n$ — симетричні відносно одиничного кола, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, досягається для конфігурації з областей $B_k$ і точок $a_k$, що володіють $n$-кратною симетрією.

В наступній теоремі 6.1.1 одержано розв'язок цієї проблеми при $n = 2$ і $\gamma \in (0,\, 2]$ для фіксованих полюсів $0$, $1$, $-1$.

**Теорема 6.1.1.** [22] *Нехай $\gamma \in (0, 2]$. Тоді для будь-якого фіксованого набору областей, що взаємно не перетинаються, $B_0$, $B_1$, $B_2$, такого, що $0 \in B_0$, $1 \in B_1$, $-1 \in B_2$, і, крім того, області $B_k$, $k \in \{1, 2\}$, — симетричні відносно одиничного кола $\{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) r\left(B_1, 1\right) r\left(B_2, -1\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{1-\gamma} \left[ \frac{2^{2\gamma+6} \cdot (2\gamma)^{\gamma}}{(2 - \sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2-\sqrt{2\gamma})^2} \cdot (2 + \sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2+\sqrt{2\gamma})^2}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

*Знак рівності в цій нерівності досягается тоді, коли області $B_0$, $B_1$, $B_2$, є круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^4 + 2(4-\gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2-1)^2}\, dw^2.$$

У теоремі 6.2.1 показано, що якщо кутові параметри задовольняють умову $0 < \alpha_k \leqslant y_0/\sqrt{2\gamma}$, то множина тих $\gamma$, для яких отримана точна оцінка добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей, значно ширша порівняно з загальним випадком.

**Теорема 6.2.1.** [144] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_2 = 1,49$, $\gamma_3 = 3,01$, $\gamma_n = 0,25\, n^2$, $n \geqslant 4$. *Тоді для довільних різних точок одиничного кола* $|w| = 1$, *таких, що* $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{2\gamma}$, $k = \overline{1,n}$, *і для довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *і, крім того, області* $B_k$, $k = \overline{1,n}$, *— симетричні відносно одиничного кола* $|w| = 1$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left|1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right|^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \left|\frac{n - \sqrt{2\gamma}}{n + \sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}}.$$

*Знак рівності в цій нерівності досягається тоді, коли точки* $a_k$ *й області* $B_k$, $k = \overline{0,n}$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma) w^n + \gamma}{w^2 (w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

Використавши оцінку зверху функціонала $I_n(\gamma)$, одержану в теоремі 2.4.4, й результати теорем 6.1.1 і 6.2.1, ми одержали наступний результат.

**Теорема 6.3.1.** [28] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 8$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_n = \sqrt{n}$. *Тоді для довільної системи різних точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *одиничного кола і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *причому області* $B_k$, $k = \overline{1,n}$, *— симетричні відносно одиничного кола* $|w| = 1$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant r^{\gamma}\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, d_k\right),$$

*де* $d_k$, $D_k$, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, *— це, відповідно, полюси і кругові області*

*квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

У **сьомому розділі** одержано оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок, розміщених на одній прямій за всіх можливих значень параметра $\gamma$. Як наслідки отримано результати, коли на двох променях міститься однакова кількість точок.

**Теорема 7.4.1.** [28] *Нехай* $p, q \in \mathbb{N}$, $p+q \geqslant 3$, $\gamma \in (0, p+q]$. *Тоді для будь-яких фіксованих точок дійсної осі* $a_k$, $k = \overline{1, p+q}$ ($a_k \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1,p}$, $a_k \in \mathbb{R}^-$, $k = \overline{1,q}$), *та будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, p+q}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \leqslant$$

$$\leqslant (p+q)^{-\frac{\gamma}{2}} \left( \prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \right)^{1-\frac{\gamma}{p+q}} \left( \prod_{k=1}^{p+q} |a_k| \right)^{\frac{2\gamma}{p+q}}.$$

**Зауваження 7.4.1.** *Якщо* $\gamma = p+q$ *і* $|a_k| \leqslant R$, *то за умов теореми 7.4.1 маємо співвідношення*

$$r^{p+q}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \leqslant (p+q)^{-\frac{p+q}{2}} \cdot R^{2(p+q)}.$$

**Теорема 7.4.2.** [28] *Нехай* $p, q \in \mathbb{N}$, $p+q \geqslant 3$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. *Тоді для будь-яких фіксованих точок дійсної осі* $a_k$, $k = \overline{1, p+q}$ ($a_k \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1,p}$, $a_k \in \mathbb{R}^-$, $k = \overline{1,q}$), *і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_\infty$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$,

$a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, p+q}$, *справедлива нерівність*

$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \leqslant$$

$$\leqslant ((p+q)+1)^{-\gamma\frac{(p+q)+1}{(p+q)+2}} \left[\prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k)\right]^{1-\frac{2\gamma}{(p+q)+2}} \left(\prod_{k=1}^{p+q} |a_k|\right)^{\frac{2\gamma}{(p+q)+2}}.$$

**Зауваження 7.4.2.** *Якщо* $\gamma = \frac{1}{2}(p+q+2)$ *і* $|a_k| \leqslant R$, *то за умов теореми 7.4.2 маємо співвідношення*

$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^{p+q} \prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \leqslant (p+q+1)^{-\frac{p+q+1}{2}} \cdot R^{(p+q)}.$$

**Теорема 7.4.3.** [28] *Нехай* $p, q \in \mathbb{N}$, $p+q \geqslant 3$, $\gamma \in (0, p+q]$. *Тоді для будь-яких фіксованих точок дійсної осі* $a_k$, $k = \overline{1, p+q}$ ($a_k \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1, p}$, $a_k \in \mathbb{R}^-$, $k = \overline{1, q}$), *і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_\infty$, $B_k$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, p+q}$, *справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \leqslant (p+q)^{-\frac{\gamma}{2}} \left[\prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{(p+q)}}.$$

**Зауваження 7.4.3.** *Якщо* $\gamma = p+q$, *то за умов теореми 7.4.3 маємо співвідношення*

$$r^{p+q}(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \leqslant (p+q)^{-\frac{p+q}{2}}.$$

Розглянемо випадок, якщо $p = q := m$. У роботі [11, с. 106] для довільної $(2, m)$-променевої системи точок $A_{2,m} = \{a_{k,p}\}$, $k \in \{1, 2\}$, $p = \overline{1, m}$, і системи областей, що взаємно не перетинаються, $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k \in \{1, 2\}$, $p = \overline{1, m}$, доведено нерівність

$$\prod_{k=1}^{2} \prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leqslant 2^{2m} \cdot (\alpha_1 \cdot \alpha_2)^m \cdot (\mu_1(R) \cdot \mu_2(R))^{\frac{1}{2}} \cdot L_R(A_{2,m}),$$

де величини $\{\mu_k(R)\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{R}^+$ при заданому $R$ — коефіцієнти зміщення системи $A_{2,m}$, причому, $\mu_k(R) \leqslant m^{-2m}$, $R \in \mathbb{R}^+$,

$$L_R(A_{2,m}) := \prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)\cdot\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\cdot|a_{k,p}|.$$

Таким чином, із доведених теорем 7.4.1, 7.4.2, 7.4.3 одержуємо наступні результати.

**Наслідок 7.4.1.** [28] *Нехай* $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, $\gamma \in (0, 2m]$. *Тоді для будь-яких фіксованих точок дійсної осі* $a_{k,p}$, $k \in \{1,2\}$, $p = \overline{1,m}$, *і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_{k,p}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k \in \{1,2\}$, $p = \overline{1,m}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2m-\frac{3\gamma}{2}}\cdot m^{-2m+\frac{\gamma}{2}}\cdot\left(L_R(A_{2,m})\right)^{1-\frac{\gamma}{2m}}\left(\prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m}|a_k|\right)^{\frac{\gamma}{m}}.$$

**Наслідок 7.4.2.** [28] *Нехай* $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, $\gamma \in (0, m+1]$. *Тоді для будь-яких фіксованих точок дійсної осі* $a_{k,p}$, $k \in \{1,2\}$, $p = \overline{1,m}$, *і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_\infty$, $B_{k,p}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k \in \{1,2\}$, $p = \overline{1,m}$, *справедлива нерівність*

$$\left[r\left(B_0,0\right)r\left(B_\infty,\infty\right)\right]^{\gamma}\prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right) \leqslant$$

$$\leqslant (2m+1)^{-\gamma\frac{2m+1}{2m+2}}\left[2^{2m}\cdot m^{-2m}\cdot L_R(A_{2,m})\right]^{1-\frac{\gamma}{m+1}}\left(\prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m}|a_k|\right)^{\frac{\gamma}{m+1}}.$$

**Наслідок 7.4.3.** [28] *Нехай* $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, $\gamma \in (0, 2m]$. *Тоді для будь-яких фіксованих точок дійсної осі* $a_{k,p}$, $k \in \{1,2\}$, $p = \overline{1,m}$, *і* *будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_{\infty}$ *,* $B_{k,p}$ *,* $\infty \in B_{\infty} \subset \overline{\mathbb{C}}$*,* $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$*,* $k \in \{1,2\}$*,* $p = \overline{1,m}$*, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_{\infty},\infty\right)\prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\leqslant 2^{2m-\frac{3\gamma}{2}}\cdot m^{-2m+\frac{\gamma}{2}}\cdot\left(L_R(A_{2,m})\right)^{1-\frac{\gamma}{2m}}.$$

# РОЗДІЛ 1

# ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ

Цей розділ носить допоміжний характер, в ньому наведені деякі означення та результати, пов'язані з методом розділяючого перетворення та теорією квадратичних диференціалів. Також наведено ряд важливих результатів попередників, які використовуються в даній дисертаційній роботі.

## 1.1. Функція Гріна. Конформний та внутрішній радіуси області

Нехай $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ — однозв'язна область, $U = \{z : |z| < 1\}$ — одиничний круг і $a \in B$. Згідно з теоремою Рімана про відображення (див. [40, с. 29]), існує конформне відображення області $B$ на одиничний круг $U$ при якому $f(a) = 0 \in U$, $f'(a) > 0$. Якщо розглянути обернене відображення $\varphi$ таке, що здійснює відображення одиничного круга $U$ на область $B$ так, що $\varphi(0) = a$. Тоді поняття **конформного радіуса** однозв'язної області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ визначимо наступним чином

$$R(B, a) = \frac{1}{|f'(a)|} = |\varphi'(0)|.$$

Узагальненням поняття конформного радіуса для багатозв'язних областей є поняття внутрішнього радіуса області, який визначається за допомогою узагальненої функції Гріна (див. [40, с. 262]).

Нехай $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B \neq \overline{\mathbb{C}}$. **Функцією Гріна** області $B$ називається така дійсна функція $g_B(z,a)$, яка визначена при всіх $z, a \in B, z \neq a$ та при кожному фікованому $a \in B$ виконуються наступні умови:

1) функція $g_B(z,a)$ як функція від $z$ гармонічна в області $B \setminus \{a\}$;

2) якщо $z \to a$, то $g_B(z,a) \to +\infty$, при цьому різниця $g_B(z,a) - \log \frac{1}{|z-a|}$ залишається обмеженою для скінченного $a$, різниця $g_B(z,a) - \log |z|$ обмежена для $a = \infty$;

3) при наближенні до границі $\partial B$ функція $g_B(z,a)$ прямує до нуля.

Для довільної області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ функція Гріна визначається як границя

$$g_B(z,a) = \lim_{n\to\infty} g_{B_n}(z,a),$$

де $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ — вичерпування області $B$ областями, що мають класичну функцію Гріна, тобто $\overline{B}_n \subset B_{n+1}$, $a \in B_1$ і $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = B$. Якщо ця границя дорівнює нескінченності, то говорять, що область $B$ не має функції Гріна.

Крім того, функція Гріна є інваріантом при конформному та однолистому відображенні $f$, тобто

$$g_{f(B)}(f(z), f(a)) = g_B(z,a), \quad z \in B \setminus \{a\}.$$

Довільну область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ завжди можна вичерпати послідовністю областей $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$, для кожної з яких існує функція Гріна. Тоді за теоремою Харнака про зростаючі послідовності гармонічних функцій випливає, що для кожної точки $a \in B \setminus \{\infty\}$ послідовність гармонічних функцій

$$h_{B_k,a}(z) := g_{B_k}(z,a) - \ln \frac{1}{|z-a|}, \quad z \in B \setminus \{a\},$$

визначена за неперервністю в точці $a$ та рівномірно збігається на компактних підмножинах області $B$ при $k \to \infty$ або до $+\infty$ або до деякої гармонічної функції $h_{B,a}(z)$, яка не залежить від вибору областей

$B_1$, $B_2, \ldots$. В цьому випадку функція

$$g_B(z,a) := h_{B,a}(z) + \ln \frac{1}{|z-a|}$$

називається **узагальненою функцією Гріна області** $B$ **відносно точки** $a$, а величина

$$r(B,a) := \exp(h_{B,a}(a))$$

називається **внутрішнім радіусом області** $B$ **відносно точки** $a$. Все сказане вище має місце і для $w = \infty$:

$$h_{B_k,\infty}(z) := g_{B_k}(z,\infty) - \ln|z|.$$

Таким чином,

$$g_B(z,a) = \ln \frac{1}{|z-a|} + \ln r(B,a) + o(1), \quad o(1) \rightrightarrows 0, \quad z \to a,$$
$$g_B(z,\infty) = \ln|z| + \ln r(B,\infty) + o(1), \quad o(1) \rightrightarrows 0, \quad z \to \infty.$$

Відмітимо, що відмінність узагальненої функції Гріна від класичної функції Гріна полягає в тому, що при наближенні до границі узагальнена функція Гріна прямує до нуля всюди, за винятком, можливо, множини логарифмічної ємності нуль.

Для будь-якої однозв'язної області $B$, яка містить точку $a$, $f_a(z)$ — функція Рімана, яка відображає область $B$ на одиничний круг так, що $f_a(a) = 0$, $f'_a(a) > 0$, тоді функція Гріна має наступний вигляд

$$g_B(z,a) = \ln \frac{1}{|f_a(z)|}.$$

Припустимо, що $D$ — однозв'язна і

$$w = \psi(z) = z - a_0 + b_1(z-a_0)^2 + \ldots$$

відображає $D$ взаємно однозначно і конформно на круг $|w| < r_0$ так, що $\psi(a_0) = 0$, $\psi'(a_0) = 1$. Тоді

$$g_D(z,a_0) = \log \frac{r_0}{|\psi(z)|}$$

— функція Гріна області $D$ в точці $a_0$, і внутрішній радіус області $D$ в $a_0$ дорівнює $r_0$. Оскільки $g_D(z, a_0)$ гармонічна всюди в $D$, крім точки $a_0$, і якщо $z$ прямує будь-яким чином до межі $D$, то $\psi(z) \to r_0$ і тому $g_D(z, a_0) \to 0$. Крім того, поблизу $z = a_0$ маємо

$$g_D(z, a_0) = \log \frac{r_0}{|z - a_0||1 + o(1)|} = \log \frac{1}{|z - a_0|} + \log r_0 + o(1).$$

Якщо функція $z = f(w) = a_0 + a_1 w + \ldots$ відображає круг $|w| < 1$ на область $D$ взаємно однозначно і конформно, то $w = f^{-1}(z) = \frac{z - a_0}{a_1} + \ldots$ поблизу $z = a_0$, так що $a_1 f^{-1}(z)$ володіє властивостями функції $\psi(z)$, розглянутими вище. Зокрема, в цьому випадку $|a_1|$ дорівнює внутрішньому радіусу області $D$ в точці $a_0$.

Інваріантність функції Гріна при конформному та однолистому відображенні $f$ дозволяє в ряді випадків знайти її аналітичний вигляд. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що функція Гріна одиничного круга $U = \{z : |z| < 1\}$ з полюсом в початку координат має вигляд

$$g_U(z, 0) = -\log |z|.$$

Функція Гріна того ж круга $U$, але з полюсом в довільній точці $z_0 \in U$ визначається формулою

$$g_U(z, z_0) = \log \left| \frac{1 - \overline{z_0} z}{z - z_0} \right|.$$

Для двозв'язної області функція Гріна має значно складніший вигляд. Наприклад, для кільця $K(R) = \{z : 1 < |z| < R\}$, $R \neq \infty$, з полюсом в додатній точці $z_0$ має місце представлення:

$$g_{K(R)}(re^{i\theta}, z_0) =$$

$$= -\frac{\log r}{\log R} \log z_0 + \log \left| \frac{1 - z_0 r e^{i\theta}}{re^{i\theta} - z_0} \right| - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{-n}}{n} \frac{z_0^n - z_0^{-n}}{R^n - R^{-n}} (r^n - r^{-n}) \cos n\theta.$$

У випадку однозв'язних областей внутрішній радіус області співпадає з конформним радіусом області.

Кожна область $G$, для якої існує узагальнена функція Гріна, має властивість: для всіх точок $\zeta \in \partial G$, за виключенням, може бути, деякої множини нульової логарифмічної ємності, і для всіх $w \in G$ існує і дорівнює нулю границя $\lim\limits_{z \to \zeta} g_G(z, w)$; такі точки $\zeta$ називаються регулярними граничними точками області $G$ [40].

Для компакта $F \subset \mathbb{C}$ його (логарифмічна) ємність визначається наступними рівностями:

$$\operatorname{cap} F := \frac{1}{r(\overline{\mathbb{C}} \backslash F, \infty)},$$

якщо величина $r(\overline{\mathbb{C}} \backslash F, \infty)$ скінченна; $\operatorname{cap} F := 0$ — в іншому випадку. Для довільної борелівської множини $E$, яка лежить в $\overline{\mathbb{C}}$, ми визначаємо $\operatorname{cap} E$ як точну верхню грань величин $\operatorname{cap} F$, взяту по всім компактам $F \subseteq E \bigcap \mathbb{C}$. Відмітимо, що борелівські множини нульової ємності завжди мають нульову хаусдорфову розмірність і при конформних відображеннях переходять у множини нульової ємності.

Наведемо визначення операції заповнення несуттєвих граничних компонент відносно системи взаємно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=1}^n$. При кожному $k = \overline{1, n}$ лише скінченна кількість компонент зв'язності множини $\overline{\mathbb{C}} \backslash B_k$ можуть містити якусь із областей $B_j$, $j = \overline{1, n}$, $j \neq k$; такі компоненти називають суттєвими. Область, отриману викиданням із $\overline{\mathbb{C}}$ всіх суттєвих компонент зв'язності множини $B_k$, будемо позначати $\widetilde{B}_k$. Очевидно, що $B_k \subset \widetilde{B}_k$ при всіх $k = \overline{1, n}$ і $\left\{\widetilde{B}_k\right\}_{k=1}^n$ є системою скінченнозв'язних взаємно неперетинних областей без ізольованих граничних точок. Перехід від системи $\{B_k\}_{k=1}^n$ до системи $\left\{\widetilde{B}_k\right\}_{k=1}^n$ називається **операцією заповнення несуттєвих граничних компонент** [11]. Відмітимо, що внутрішній радіус області при збільшенні області не зменшується, тобто виконується умова $r(B, a) \leqslant r(\widetilde{B}, a)$ ([165, 127]). Отже, операція заповнення несуттєвих компонент дозволяє перейти від нескінченнозв'язних областей до скінченнозв'язних областей з невиродженими суттєвими компонентами.

## 1.2. Деякі факти теорії квадратичних диференціалів. Типи екстремальних задач і функціоналів

Одним з основних понять в даній роботі є поняття квадратичного диференціала. Фундаментальну роль квадратичних диференціалів в теорії екстремальних задач вперше відмітив О. Тейхмюллер у 1939 році (див., наприклад, [228]). О. Тейхмюллер сформулював принцип про те, що у більшості випаків кожній екстремальній задачі геометричної теорії функцій комплексної змінної відповідає деякий квадратичний диференціал.

Теорія квадратичних диференціалів була розвинена в роботах [46, 166, 167, 223].

Нехай $B$ — область розширеної комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}_z$. Під **квадратичним диференціалом** в $B$ будемо розуміти символ

$$Q(z)dz^2, \tag{1.1}$$

де $Q(z)$ — функція, мероморфна в області $B$. Якщо область $\psi(B) = D \subset \overline{\mathbb{C}}_w$, де $\psi$ — конформне та однолисте відображення, то будемо говорити, що квадратичний диференціал (1.1) породжує в області $D$ за допомогою функції $\psi$ квадратичний диференціал

$$\widetilde{Q}(w)dw^2 = Q(\psi(w))(\psi'(w))^2dw^2.$$

Скінченна точка $z_0 \in B$ називається **нулем** або **полюсом** порядку $n$ диференціала (1.1), якщо вона має відповідні властивості відносно функції $Q(z)$. Точка $z_0 = \infty$ називається нулем або полюсом порядку $n$

диференціала (1.1), якщо відповідною властивістю володіє точка $w_0 = 0$ відносно функції $Q(1/w)/w^4$.

Нулі і полюси квадратичного диференціала (1.1) називаються його **критичними точками**, причому нулі і прості полюси називаються скінченними критичними точками.

Максимальна регулярна крива $z(t)$, $t \in (a,b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, така, що для всіх $t \in (a,b)$ виконується нерівність $Q(z)dz^2 \equiv Q(z(t))(z'(t))^2dt^2 > 0$ (відповідно $Q(z)dz^2 < 0$), називається **траєкторією** (відповідно ортогональною траєкторією) диференціала (1.1). При конформному однолистому відображенні траєкторії переходять в траєкторії.

Множину нулів і простих полюсів квадратичного диференціала (1.1) позначимо через $H_1$, а множину полюсів порядку $n \geqslant 2$ — через $H_2$.

**Теорема 1.2.1.** [46, Розділ III] *Нехай $Q(z)dz^2$ – квадратичний диференціал в області $B$ і нехай точка $z_0 \in B$. Тоді існує функція $z = \varphi(w)$, яка конформно і однолисто відображає круг $|w| < 1$ на деякий окіл $V$ точки $z_0$, така, що $\varphi(0) = z_0$ і квадратичний диференціал $Q(z)dz^2$ на $V$ породжує в крузі $|w| < 1$ за допомогою функції $\varphi$ квадратичний диференціал $\widetilde{Q}(w)dw^2$, траєкторії якого задані наступними рівняннями:*

$Im\, w = c$, якщо $z_0 \in B \backslash (H_1 \cup H_2)$,

$Im\, w^{\frac{2+n}{2}} = c$, якщо $z_0$ — нуль порядку $n$,

$Im\, w^{\frac{1}{2}} = c$, якщо $z_0$ — полюс першого порядку,

$Im\,(a + ib)\log w = c$, якщо $z_0$ – полюс другого порядку $n$, $\widetilde{Q}(w)dw^2 = (a+ib)w^{-2}dw^2$,

$Im\, w^{\frac{2-n}{2}} = c$, якщо $z_0$ – полюс порядку $n \geqslant 3$,

*де $a$, $b$, $c$ — дійсні сталі числа.*

Із теореми 1.2.1 слідує якісна картина траєкторій в околі точки $z_0 \in$

$B$. Нехай область $B$ обмежена скінченним числом простих замкнутих аналітичних кривих. Квадратичний диференціал в $\overline{B}$ називається додатним, якщо границя області $B$ не містить полюсів і складається із замикань траєкторій цього диференціала. Далі будемо розглядати будь-який квадратичний диференціал на сфері Рімана як додатний. Під $F$-підмножиною $K$ відносно диференціала $Q(z)dz^2$ будемо розуміти таку підмножину $B$, що кожна траєкторія $Q(z)dz^2$, яка перетинається з $K$, повністю лежить в $K$.

**Внутрішнє замикання** множини $K$ визначається як внутрішність замикання $K$ і позначається через $\widehat{K}$. Кільцевою, круговою, полосоподібною або кінцевою областю для диференціала $Q(z)dz^2$ називається найбільша зв'язна відкрита $F$-множина, яка володіє наступними властивостями.

**Кільцева область** для $Q(z)dz^2$ не містить точок множини $(H_1 \cup H_2)$ і заповнена траєкторіями диференціала $Q(z)dz^2$, кожна з яких є замкнутою жордановою кривою. При певному виборі чисто уявної сталої $\tau$ функція $w = exp\left\{\tau\int(Q(z))^{\frac{1}{2}}dz\right\}$ відображає цю область конформно на кругове кільце $r_1 < |w| < r_2$.

**Круговою областю** квадратичного диференціала $Q(z)dz^2$ називається однозв'язна область $G \subset \overline{\mathbb{C}}_z$, яка містить єдиний полюс другого порядку цього квадратичного диференціала в точці $w = a \in G$, така, що при конформному однолистому відображенні $w = f(z)$ ($f(a) = 0$) області $G$ на одиничний круг площини $\mathbb{C}_w$, має місце тотожність

$$Q(z)dz^2 \equiv -k\frac{dw^2}{w^2}, \quad k \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty).$$

Кругова область $G$ для $Q(z)dz^2$ містить єдиний подвійний полюс $a$ диференціала $Q(z)dz^2$ і $G \setminus \{a\}$ заповнена траєкторіями $Q(z)dz^2$, кожна із яких є замкнутою жордановою кривою, яка відділяє точку $a$ від границі $G$. При певному виборі чисто уявної сталої $\tau$ функція $w = exp\left\{\tau \int (Q(z))^{\frac{1}{2}} dz\right\}$, доозначена значенням нуль в точці $a$, конформно відображає $G$ на круг $|w| < r$, причому точка $a$ переходить в точку $w = 0$.

**Полосоподібна область** $P$ для $Q(z)dz^2$ не містить точок множини $(H_1 \cup H_2)$ і заповнена траєкторіями диференціала $Q(z)dz^2$, кожна з яких має в деякій точці $z_1 \in H_2$ граничну кінцеву точку в одному напрямку, а в іншій (можливо, що вона співпадає з $z_1$) точці $z_2 \in H_2$ — граничну кінцеву точку в іншому напрямку. Область $P$ конформно відображається функцією $w = \int Q(z)^{\frac{1}{2}} dz$ на полосу $a < Im\zeta < b$.

**Кінцева область** для $Q(z)dz^2$ не містить точок множини $(H_1 \cup H_2)$ і заповнена траєкторіями диференціала $Q(z)dz^2$, кожна з яких має граничну кінцеву точку в кожному із двох можливих напрямків в одній і тій же точці $z_0 \in H_2$. Ця область конформно відображається функцією $w = \int Q(z)^{\frac{1}{2}} dz$ на верхню або нижню півплощину площини $\zeta$ (в залежності від вибору вітки кореня).

**Теорема 1.2.2.** *Нехай $Q(z)dz^2$ — додатний квадратичний диференціал на $G \subset \overline{\mathbb{C}}_z$, причому виключаються наступні можливі випадки і всі конфігурації, які отримуються із них за допомогою конформної еквівалентності:*

$$G = \overline{\mathbb{C}}_z, \quad Q(z)dz^2 = dz^2$$

*і*

$$G = \overline{\mathbb{C}}_z, \quad Q(z)dz^2 = Ke^{i\alpha}\frac{dz^2}{z^2}, \quad K > 0,$$

*$\alpha$ — дійсне число. Нехай $\Phi$ — об'єднання всіх траєкторій $Q(z)dz^2$, які мають граничну кінцеву точку в деякій точці множини $H_1$. Тоді множина $G \backslash \overline{\Phi}$ складається із скінченного числа кільцевих, кругових, полосоподібних і кінцевих областей.*

*Кожний полюс диференціала* $Q(z)dz^2$ *порядка* $n = 2$ *має окіл, який міститься в круговій області, або окіл, що покривається внутрішнім замиканням скінченного числа полосоподібних областей, а кожний полюс порядку* $n \geqslant 3$ *має окіл, що покривається внутрішнім замиканням* $n-2$ *кінцевих областей і скінченного числа (можливо рівного нулю) полосоподібних областей.*

Внутрішнє замикання $\widehat{\Phi}$ множини $\Phi$ не обов'язково має бути порожнім [46].

**Теорема 1.2.3.** *Якщо квадратичний диференціал* $Q(z)dz^2$ *на* $\overline{\mathbb{C}}_z$ *має не більше трьох різних полюсів, то множина* $\widehat{\Phi}$ *порожня.*

Розглянемо в якості прикладу наступний квадратичний диференціал

$$Q(z)dz^2 = -\frac{\left(z - \frac{\alpha}{(\alpha-\beta)}\right)}{z^2(z-1)^2}\,dz^2,$$

заданий на сфері $\overline{\mathbb{C}}_z$, де $\alpha$ і $\beta$ — фіксовані додатні числа, $\alpha < \beta$. Цей диференціал має нуль першого порядку в точці $z = \frac{\alpha}{(\alpha-\beta)} < 0$, простий полюс в нескінченності і полюси другого порядку в точках $z = 0$ і $z = 1$. Множина $\widehat{\Phi}$ порожня, а множина $\overline{\mathbb{C}}_z \backslash \overline{\Phi}$ складається із двох кругових областей. Далі, функція $z = \varphi(w) := w^n$ конформно і однолисто відображає кут

$$D := \left\{ w : -\frac{\pi}{n} < \arg w < \frac{\pi}{n} \right\}$$

на площину $\overline{\mathbb{C}}_w$ з розрізом вздовж від'ємної дійсної півосі. Квадратичний диференціал $Q(z)dz^2$ породжує в $D$ за допомогою цієї функції квадратичний диференціал

$$\widetilde{Q}(w)dw^2 = -\frac{n^2\left(w^n - \frac{\alpha}{(\alpha-\beta)}\right)}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2,$$

заданий на всій площині $\overline{\mathbb{C}}_w$. Структуру траєкторій цього диференціала видно із структури траєкторій диференціала $Q(z)dz^2$ (див. Рис. 1.1). Вказана залежність квадратичних диференціалів спрощує також обчислення добутків степенів внутрішніх радіусів у відповідній екстремальній задачі.

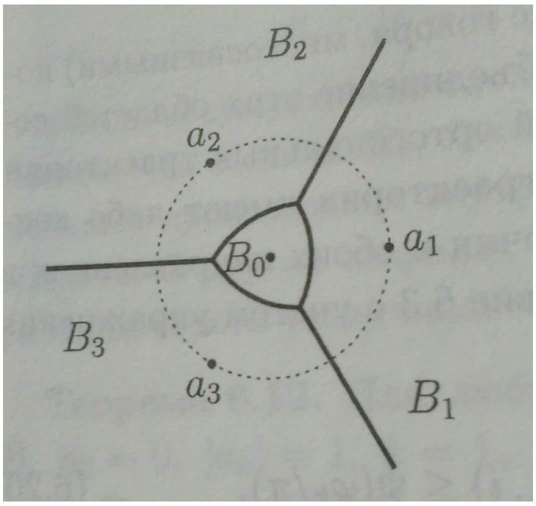


Рис. 1.1: Структура траєкторій квадратичного диференціала $Q(z)dz^2$.

Для зручності подальших досліджень, функціонали, які вивчаються в даній роботі розіб'ємо на чотири типи. Означення $(n,m)$-променевої системи точок див. п. 2.1.

Функціонали першого типу мають наступний вигляд

$$I_{n,m}(\gamma) = r^{\gamma}(D,0)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(D,a_{k,p}),$$

де $\gamma \in \mathbb{R}^{+}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$ — $(n,m)$-променева система, $D$ — відкрита множина, $A_{n,m}\subset D\subset\overline{\mathbb{C}}$, $0\in D$.

До другого типу віднесемо функціонали такого виду

$$Y_{n,m}(\gamma) = r^{\gamma}(D,\infty)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(D,a_{k,p}),$$

де $\gamma \in \mathbb{R}^{+}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$ — $(n,m)$-променева система, $D$ — відкрита множина, $A_{n,m}\subset D\subset\overline{\mathbb{C}}$, $\infty\in D$.

До третього типу віднесемо функціонали виду

$$J_{n,m}(\gamma) = [r(D,0)\,r(D,\infty)]^{\gamma}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(D,a_{k,p}),$$

де $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$ — $(n,m)$-променева система, $D$ — відкрита множина, $A_{n,m} \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, $0 \in D$, $\infty \in D$.
До четвертого типу віднесемо функціонали виду

$$\Upsilon_{n,m} = \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(D, a_{k,p}\right),$$

де $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$ — $(n,m)$-променева система, $D$ — відкрита множина, $A_{n,m} \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$.

В частинному випадку $D$ може бути об'єднанням областей, що попарно не перетинаються, $B_{k,p}$, $a_{k,p} \in B_{k,p}$.

Екстремальні задачі, в яких досліджується питання про максимум описаних функціоналів, будемо називати екстремальними задачами першого, другого, третього та четвертого типу, відповідно, в залежності від типу функціонала.

## 1.3. Метод розділяючого перетворення

В кінці 80-х років в геометричній теорії функцій був розроблений В.М. Дубініним метод розділяючого перетворення (див., наприклад, [56, 57, 165]). Суть цього методу полягає в наступному: досліджуваний об'єкт розбивається на частини, які відображаються на частини спеціального вигляду; потім із останніх конструюються симетричні об'єкти або шляхом склеювання, або за допомогою відомих способів симетризації. Важливість розділяючого перетворення полягає в тому, що в ряді випадків воно дозволяє задачу із великою кількістю параметрів звести до ряду однотипних задач з меншим числом параметрів. Ми у цій роботі будемо використовувати часткові випадки цього досить загального методу. Перейдемо до описання цих випадків. Слідуючи роботам [11, с. 87–92], [57, 165] наведемо визначення розділяючого перетворення спочатку для конденсаторів, а потім і областей.

**Конденсатором** на розширеній комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}_z$ називається будь-яка впорядкована пара $K = (P_0, P_1)$ неперетинних непорожніх замкнених множин $P_0$ і $P_1$. Відкрита множина $\Pi = \overline{\mathbb{C}}_z \setminus (P_0 \cup P_1)$ називається **полем**, а самі множини $P_0$, $P_1$ — **пластинами** конденсатора $K$. Позначимо через $\mathcal{L}_2^1(K)$ сукупність всіх функцій $\omega : \overline{\mathbb{C}}_z \to \mathbb{R}$, неперервних і ліпшицевих на $\overline{\mathbb{C}}_z$, рівних нулю на множині $P_0$, одиниці на $P_1$.

Конденсатор $K = \{P_0, P_1\}$ називається **допустимим**, якщо існує дійсна функція $\omega(z)$, неперервна на $\overline{\mathbb{C}}_z$, рівна нулю на $P_0$, одиниці — на $P_1$ і гармонічна в $\Pi$. Функція $\omega(z)$ називається **потенціальною функцією конденсатора** $K$. Конденсатор називається **правильним**, якщо кожна із областей, яка складає його поле, має граничні точки на обох пластинах цього конденсатора.

Ємність конденсатора $K$ визначається наступним чином:

$$\left|K\right| = \inf_{\omega\in\mathcal{L}_2^1(K)} \iint\limits_{\mathbb{C}_z} \left|\nabla\omega\right|^2 dx\, dy, \qquad z = x + iy.$$

Нехай $K = (P_0, P_1)$ — довільний конденсатор на $z$-сфері $\overline{\mathbb{C}}_z$; $B_l$, $l = 1, \ldots, m$, — однозв'язні попарно неперетинні області на $\overline{\mathbb{C}}_z$, які обмежені скінченним числом кусково-гладких кривих і які задовольняють умову $P_j \cap \overline{B}_l \neq \emptyset$, $j = 0, 1$, $l = 1, \ldots, m$. Нехай $\{p_l\}_{l=1}^m$ — деяке сімейство функцій $\zeta = p_l(z)$, які конформно і однолисто відображають відповідно області $B_l$ на праву півплощину $\operatorname{Re}\zeta > 0$. Позначимо через $P_j^{(l)}$ об'єднання множини $p_l(P_j \cap \overline{B}_l)$ з її відображенням відносно уявної осі.

**Результатом розділяючого перетворення конденсатора** $K = (P_0, P_1)$ відносно сімейства функцій $\{p_l\}_{l=1}^m$ називається сімейство конденсаторів $\{K_l\}_{l=1}^m$, яке складається із $m$ симетричних конденсаторів

$K_l = (P_0^{(l)}, P_1^{(l)})$, $l = 1, \ldots, m$. Іноді замість півплощини $\operatorname{Re}\zeta > 0$ в означенні деяких функцій $\zeta = p_l(z)$, $1 \leqslant l \leqslant m$, розглядають круг $|\zeta| < 1$. В цьому випадку під $P_j^{(l)}$ розуміють об'єднання множини $p_l(P_j \cap \overline{B}_l)$ з її інверсією відносно кола $|\zeta| = 1$, $j = 0, 1$. Сімейство конденсаторів $\{K_l\}_{l=1}^m$, $K_l = (P_0^{(l)}, P_1^{(l)})$, $l = 1, \ldots, m$, як і раніше називають результатом розділяючого перетворення конденсатора $K$.

**Теорема 1.3.1.** [11, с. 88] *Справедлива нерівність*

$$\Big|K\Big| \geqslant \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m}\Big|K_l\Big|.$$

*Якщо, додатково, конденсатор $K = \{P_0, P_1\}$ правильний і допустимий, то знак рівності в цій нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли $\Pi \subset \bigcup\limits_{l=1}^{n} \overline{B}_l$ і в деякому околі довільної аналітичної дуги, яка належить $\partial B_l \cap \Pi$, $1 \leqslant l \leqslant n$, потенціальна функція конденсатора $K$ симетрична відносно цієї дуги. Зокрема, якщо $K$ — допустимий конденсатор із зв'язним полем, і множина $\partial B_l \cap \Pi$, $1 \leqslant l \leqslant n$, містить відрізок деякої прямої або кола $\gamma$, то у випадку рівності конденсатор $K$ симетричний відносно $\gamma$.*

Розглянемо тепер розділяюче перетворення для областей. Розглянемо систему різних точок розширеної комплексної площини $0$, $a_1$, $a_2, \ldots, a_n$, $\infty$ таких, що

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi.$$

Позначимо

$$\arg a_{n+1} := 2\pi, \quad a_0 := a_n, \quad \alpha_k := \frac{1}{\pi}\left(\arg a_{k+1} - \arg a_k\right), \ k = \overline{1, n}.$$

Зрозуміло, що $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$. Нехай

$$\Gamma_k := \{w : \ \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}, \quad k = \overline{1, n},$$

$$\Gamma_0 := \Gamma_n,\ \Gamma_{n+1} := \Gamma_1.$$

Тоді функція

$$z_k\left(w\right) = -i\left(e^{-i\arg a_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad k = \overline{1,n}, \quad z_0 := z_n, \quad z_{n+1} := z_1,$$

конформно і однолисто відображає області $\Gamma_k$, $k = \overline{1,n}$, на праву півплощину $\mathrm{Re}\, z > 0$ таким чином, що виконуються наступні асимптотичні рівності:

$$|z_k\left(w\right) - z_k\left(a_m\right)| \sim \frac{1}{\alpha_k}\left|a_m\right|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\left|w - a_m\right|, \quad w \in \overline{\Gamma_k}, \quad w \to a_m,$$

$$k = 1, 2, \ldots, n,\ m = k, k+1,\ a_{n+1} := a_1,$$

$$|z_k\left(w\right)| = |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \in \overline{\Gamma_k} \quad w \to 0,\ w \to \infty.$$

Нехай $\{B_k\}_{k=0}^{n+1}$ — сімейство областей, які задовольняють умовам:

$$0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}, \quad a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}, \quad k = \overline{1,n}, \quad \infty \in B_{n+1} \subset \overline{\mathbb{C}}.$$

$$B_k \bigcap B_m = \varnothing, \quad k \neq m, \quad k, m = 0, 1, \ldots, n, n+1.$$

Позначимо через $\Omega_k^{(1)}$, $k = \overline{1,n}$, об'єднання зв'язної компоненти множини $z_k\left(B_k \bigcap \overline{\Gamma}_k\right)$, яка містить точку $z_k\left(a_k\right)$, $k = \overline{1,n}$, з її відображенням відносно уявної осі, а через $\Omega_{k-1}^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, $\Omega_0^{(2)} := \Omega_n^{(2)}$, — об'єднання зв'язної компоненти множини $z_{k-1}\left(B_k \bigcap \overline{\Gamma}_{k-1}\right)$, яка містить точку $z_{k-1}\left(a_k\right)$, $k = \overline{1,n}$, з її відображенням відносно уявної осі. Сімейство двох симетричних відносно уявної осі областей $\left\{\Omega_k^{(1)}, \Omega_{k-1}^{(2)}\right\}$ називається результатом розділяючого перетворення області $B_k$ відносно сімейства двох функцій $\{z_k, z_{k-1}\}$, $k = \overline{1,n}$.

Аналогічно, результатом розділяючого перетворення області $B_0$ відносно сімейства функцій $\{z_k\}_{k=1}^{n}$ називається сімейство симетричних відносно уявної осі областей $\Omega_k^{(0)}$, $k = \overline{1,n}$, які отримані внаслідок об'єднання зв'язної компоненти множини $z_k\left(B_0 \bigcap \Gamma_k\right)$, $k = \overline{1,n}$, яка містить точку $0$, з її відображенням відносно уявної осі.

Результатом розділяючого перетворення області $B_{n+1}$ відносно сімейства функцій $\{z_k\}_{k=1}^{n}$ називається сімейство симетричних відносно уявної осі областей $\Omega_k^{(\infty)}$, $k = \overline{1,n}$, які отримані внаслідок об'єднання зв'язної компоненти множини $z_k\left(B_{n+1} \bigcap \Gamma_k\right)$, $k = \overline{1,n}$, яка містить точку $\infty$, з її відображенням відносно уявної осі. Система областей $\left\{\Omega_k^{(0)}, \Omega_k^{(1)}, \Omega_k^{(2)}, \Omega_k^{(\infty)}\right\}$ є системою попарно неперетинних областей.

**Теорема 1.3.2.** [11, с. 90] *Мають місце наступні нерівності:*

$$r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left[\frac{r\left(\Omega_k^{(1)}, z_k\left(a_k\right)\right)}{\frac{1}{\alpha_k} \cdot |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}} \cdot \frac{r\left(\Omega_{k-1}^{(2)}, z_{k-1}\left(a_k\right)\right)}{\frac{1}{\alpha_{k-1}} \cdot |a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \forall k = \overline{1,n}, \quad (1.2)$$

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left[r\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{\alpha_k^2}{2}}, \quad (1.3)$$

$$r\left(B_{n+1}, \infty\right) \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left[r\left(\Omega_k^{(\infty)}, \infty\right)\right]^{\frac{\alpha_k^2}{2}}. \quad (1.4)$$

*Якщо для областей* $B_k$, $k = \overline{0, n+1}$, *існує класична функція Гріна, то в нерівностях* (1.2) *знак рівності досягається тоді і тільки тоді, коли області* $B_k$, $k = \overline{1,n}$, *відповідно, симетричні відносно прямих* $w = \rho \cdot \exp\left\{i \cdot \frac{2\pi}{n}(k-1)\right\}$, $\rho > 0$, $k = \overline{1,n}$; *в нерівностях* (1.3) *і* (1.4), *відповідно, знак рівності досягається тоді і тільки тоді, коли області* $B_0$ *і* $B_{n+1}$ *симетричні відносно сімейства прямих* $w = \rho \cdot \exp\left\{i \cdot \frac{2\pi}{n}(k-1)\right\}$, $\rho > 0$, $k = \overline{1,n}$.

## 1.4. Короткий історичний огляд

Дана робота присвячена вивченню задач класичного розділу геометричної теорії функцій комплексної змінної, а саме, екстремальних задач про неперетинні області. Виникнення в теорії однолистих функцій екстремальних задач про неперетинні області пов'язано з роботою М.О.

Лаврентьєва [91]. В цій роботі була вперше поставлена і розв'язана задача про добуток конформних радіусів двох взаємно неперетинних однозв'язних областей. Згідно результату М.О. Лаврентьєва, якщо $a_1$ і $a_2$ — скінченні точки, то для будь-якої пари неперетинних однозв'язних областей $D_1$ і $D_2$ такої, що $a_k \in D_k$, $k = 1, 2$, справедлива нерівність

$$r(D_1, a_1) r(D_2, a_2) \leqslant |a_1 - a_2|^2, \tag{1.5}$$

де рівність досягається для півплощин $D_k$ і точок $a_k$, симетричних відносно їх спільної межі.

Пізніше задача М.О. Лаврентьєва була узагальнена для випадку мероморфних функцій. Тоді для областей $B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$ та $B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ знак рівності в попередній нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли області $B_1$ та $B_2$ мають наступний вигляд

$$B_1 = \left\{ w \in \overline{\mathbb{C}} : \left| \frac{w - a_1}{w - a_2} \right| < \rho \right\}, \quad B_2 = \left\{ w \in \overline{\mathbb{C}} : \left| \frac{w - a_1}{w - a_2} \right| > \rho \right\},$$

де $\rho \in \mathbb{R}^+$, чи навпаки. Одним з прикладів такої конфігурації областей може бути випадок, коли одна з областей обмежена деяким колом, а інша область, в свою чергу, буде необмежена, тобто є доповнення до першої області. Варто відмітити, що для випадку мероморфних функцій порушується єдиність екстремалі, тобто сім'я екстремалей має континуальну потужність.

М.О. Лєбєдєв [92, 93] на основі методу площ розв'язав велику кількість основних задач. Приблизно в цей же час Дж. Дженкінс в своїй роботі [46] доводить загальну теорему про коефіцієнти, яка є розв'язком загальної задачі для областей, що взаємно не перетинаються, на скінченних ріманових поверхнях. У 1967 році П.М. Тамразов в роботі [113] істотно доповнив цю теорему. Взагалі кажучи, із загальної теореми про коефіцієнти можна отримати більшість відомих на той час результатів у теорії однолистих функцій.

В 1985 році В.М. Дубінін [56] посилив класичний результат Дж. Дженкінса для фіксованих полюсів.

**Теорема 1.4.1.** [56] *Нехай* $Q\,(z)\,dz^2$ *— додатний квадратичний диференціал на* $G$, *регулярний всюди, за виключенням* $n$ *простих полюсів та* $m$ *полюсів другого порядку,* $b_1, b_2, \ldots, b_m$, *в околах яких в термінах деякого локального параметра, який зображає* $b_l$, $l = 1, 2, \ldots, m$, *як точку* $z = 0$, *має місце розклад*

$$Q\,(z)\,dz^2 = \left(-\frac{\alpha_l}{z^2} + \ldots\right) dz^2,$$

$\alpha_l > 0$, $l = 1, \ldots, m$ ($n \geqslant 0$, $m \geqslant 1$, *множина простих полюсів може бути порожня). Для* $n = 0$, $m = 2$ *і* $G = \mathbb{C}$ *одночасно нехай* $G_1$ *і* $G_2$ *— довільні області обмежені одною і тою ж траєкторією квадратичного диференціалу* $Q\,(z)\,dz^2$. *В інших випадках нехай* $G$ *є внутрішнім замиканням кругових областей* $G_1, G_2, \ldots, G_m$, *відповідних полюсам* $b_1, b_2, \ldots, b_m$. *Тоді для довільних областей* $D_1, D_2, \ldots, D_m$, $b_l \in D_l \subset G$, $l = 1, 2, \ldots, m$, *об'єднання яких містить не більше, ніж скінчене число замикань ортогональних траєкторій квадратичного диференціала* $Q\,(z)\,dz^2$, *справедлива нерівність*

$$\prod_{k=1}^{m} r^{\alpha_l}\,(D_l, a_l) \leqslant \prod_{k=1}^{m} r^{\alpha_l}\,(G_l, a_l)\,. \tag{1.6}$$

*Якщо, додатково, області* $D_l$, $l = 1, \ldots, m$, *мають класичні функції Гріна, то рівність в* (1.6) *досягається тільки у тому випадку, коли лінії рівня цих функцій складаються із замикань траєкторій квадратичного диференціала* $Q\,(z)\,dz^2$. *Зокрема, для однозв'язних областей* $D_1, \ldots, D_m$ *знак рівності має місце тоді і тільки тоді, коли* $D_l = G_l$, $l = 1, \ldots, m$.

В роботах Л.І. Колбіної [79, 80] була отримана оцінка добутку степенів конформних радіусів у випадку двох попарно неперетинних однозв'язних областей комплексної сфери: при заданих скінченних різних точках $a_1$, $a_2$ максимум $I_0$ величини $I = R^{\alpha}(B_1, a_1)R^{\beta}(B_2, a_2)$, ($\alpha > 0$, $\beta > 0$) відносно всеможливих пар областей $B_1$, $B_2$ таких, що $a_1 \in B_1 \subset \mathbb{C}$, $a_2 \in B_2 \subset \mathbb{C}$, досягається для полюсів та кругових областей квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{(a_2 - a_1)[z - a_1 - \alpha(a_2 - a_1)/(\alpha - \beta)]}{(z - a_1)^2(z - a_2)^2}\, dz^2.$$

Підкреслимо, що величина

$$T_2 := \begin{cases} r(D_1, a_1)r(D_2, a_2)|a_1 - a_2|^{-2}, & a_1 + a_2 \neq \infty \\ r(D_1, a_1)r(D_2, a_2), & a_1 + a_2 = \infty, \end{cases} \tag{1.7}$$

$a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 1, 2$, є інваріантом відносно дробово-лінійних відображень площини $\overline{\mathbb{C}}$ на себе. Тобто для всякої функції виду $f(z) = (az + b)/(cz + d)$, де $ad - bc \neq 0$, виконується рівність

$$T_2(a_1, a_2, D_1, D_2) = T_2(f(a_1), f(a_2), f(D_1), f(D_2)).$$

Таким чином, нерівність (1.5) можна розглядати як оцінку зверху мебіусового інваріанта:

$$T_2 \leqslant 1.$$

У випадку трьох і більше точок багато авторів [11, 31, 85, 125] розглядали оцінки більш загального мебіусового інваріанта виду

$$T_n := \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} r(D_k, a_k)}{\left\{\prod\limits_{1 \leqslant k < l \leqslant n}{}^{'} |a_k - a_l|\right\}^{\frac{2}{n-1}}}, \tag{1.8}$$

(тут штрих у добутку означає, що для нескінченно віддаленої точки під відповідним множником розуміємо одиницю). Для того, щоб отримати $T_n$ потрібно для $n$ попарно неперетинних областей $D_k$ і точок $a_k \in D_k$, $k = \overline{1, n}$, $n \geqslant 2$, перемножити всі можливі попарні добутки виду (1.7) і взяти корінь степеня $2(n - 1)$.

В 1951 році Г.М. Голузін узагальнив задачу М.О. Лаврентьєва на випадок скінченного числа $n$, $n \geqslant 3$, взаємно неперетинних однозв'язних областей $B_k$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$ ($\{a_k\}_{k=1}^n$ — довільні фіксовані скінченні та різні точки комплексної площини), а при $n = 3$ отримав точну оцінку для $T_3$ [40, с. 165]

$$T_3 \leqslant \frac{64}{81\sqrt{3}},$$

де рівність досягається, з точністю до дробово-лінійних перетворень, тільки для областей, які є рівними кутами і точок, які лежать на бісектрисах цих кутів на однакових відстанях від їх спільної вершини. Випадок $n > 3$ виявився значно складнішим і істотно відрізняється від ситуації $n \leqslant 3$, оскільки дробово-лінійним відображенням будь-які три наперед задані точки можна перевести в три точки, які є зручними для доведення. Для $n = 4$ Г.В. Кузьміна в роботі [85, II, с. 25] показала, що задача про оцінку $T_4$ зводиться до проблеми найменшої ємності у визначеному сімействі континуумів і отримала точну нерівність

$$T_4 \leqslant 3^2 \cdot 4^{-8/3}.$$

Рівність досягається тільки в тому випадку, коли, з точністю до дробово-лінійного перетворення, $a_1 = -a_2 = 1$, $a_3 = -a_4 = i(2 - \sqrt{3})$, а межа множини $\bigcup\limits_{k=1}^{4} D_k$ складається із відрізків $[\sqrt{3}-2, 2-\sqrt{3}]$, променів $\{z|z = it, t \in [1, +\infty)\}$ і $\{z|z = it, t \in [-\infty, -1)\}$, частини кругової дуги $\rho$, яка проходить через точки $-1$, $i$, $2 - \sqrt{3}$, яка лежить в першому квадранті, а також кругових дуг, які ми отримуємо з $\rho$ перетвореннями $w \to -w$, $w \to \overline{w}$, $w \to -\overline{w}$.

Для $n \geqslant 5$ повного розв'язку (1.8) на даний час не отримано. Оскільки оцінка для інваріанта $T_5$ без будь-яких обмежень на області $D_k$ і точки $a_k, k = 1, \ldots, 5$, є досить важкою та цікавою задачею. Розв'язок цієї задачі було отримано Г.В. Кузьміною та В.М. Дубініним при додатковому обмеженні на сукупність точок $\{a_k\}_{k=1}^5$, яка має бути симетрична відносно деякого кола або прямої (див. [165], [85, II, с. 25–26]).

М.О. Лєбєдєв в монографії [92, с. 32–33] розглядав наступну екстремальну задачу про добуток конформних радіусів: на площині $w$ дано $n$ різних фіксованих точок $a_k$, $k=\overline{1,n}$, $n>3$. Функції $w=f_k(z)$, $k=\overline{1,n}$, регулярні в крузі $|z|<1$ однолисто відображають круг $|z|<1$ на неперетинні області $B_k$, які містять відповідні точки $a_k$, $k=\overline{1,n}$, і причому так, що $f_k(0)=a_k$, $k=\overline{1,n}$. Що можна сказати про максимум добутку

$$\prod_{k=1}^{n}|f_k'(0)|^{\gamma_k}\longrightarrow \max,\quad \gamma_k>0,\, n>3$$

відносно всеможливих функцій $f_k(z)$, $k=\overline{1,n}$? Однак, ця задача в загальному випадку не розв'язана до цих пір, вдалося отримати її розв'язок тільки в часткових випадках. Ця задача є безпосереднім узагальненням попередніх результатів М.О. Лаврентьєва, Г.М. Голузіна, З. Нехарі, Дж. Дженкінса.

Вцілому ця тематика пройшла великий шлях розвитку. В зв'язку з цим можна пригадати роботи таких вчених: М.О. Лєбєдєва [92, 93], Л.Л. Громової [42], П.М. Тамразова [109, 113, 117], П.П. Куфарєва, П.П. Куфарєва і А.Е. Фалеса [90], Н.І. Колбіної [79, 80], Дж. Дженкінса [46, 186, 187], Нехарі [202], Ю.Є. Алєніцина [2, 3], А.З. Грінштана [41], Л.Л. Громової та М.О. Лєбєдєва [42], І.О. Александрова [1], В.А. Андрєєва [5], Г.В. Кузьміної [81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89], В.А. Шлика [132], П. Дюрена [167], П. Дюрена і М. Шиффера [168, 169], В.М. Дубініна [55, 56, 57, 58, 59, 60, 165], С.І. Федорова [125], Є.Г. Ємельянова [61, 62, 63, 64], І.П. Мітюка [96], А.Ю. Солинiна [100, 101], А.Ю. Васільєва [231] та багатьох інших.

У більшості перерахованих робіт регулярні функції задовольняли нормуючій умові: точка $z=0$ при відображенні цими функціями переходила в деякі різні, але фіксовані точки $a_k$, $k=\overline{1,n}$, комплексної площини. В 1968 році П.М. Тамразов у роботі [117] висунув ідею, яка полягала у тому, що точкам $a_k$, $k=\overline{1,n}$, можна надавати деяку "свободу". В 1975 році у відповідності з цією ідеєю Г.П. Бахтіна [31] у своїй дисертації вперше поставила та розв'язала ряд екстремальних задач на класі взаємно неперетинних областей з так званими "вільними" полюсами. Внаслідок цих результатів тематика отримала новий поштовх для свого розвитку.

Перший результат в екстремальних задачах з вільними полюсами на одиничному колі одержано в роботі [31].

**Теорема 1.4.2.** [31] *Для будь-яких різних точок $a_k$, $k=\overline{1,4}$, які належать одиничному колу $|z|=1$, і будь-яких однозв'язних областей, що попарно не перетинаються, $D_k$, $a_k\in D_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,4}$, і які симетричні відносно одиничного кола, справедлива нерівність*

$$\prod_{k=1}^{4}\left|f_k'(0)\right|\leqslant 1, \tag{1.9}$$

*де $w=f_k(z)$ — однолисте конформне відображення одиничного круга на область $D_k$, $a_k=f_k(0)$, $k=\overline{1,4}$. Рівність в (1.9) досягається тоді і тільки тоді, коли $a_k$ і $D_k$ є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2=-\frac{w^2}{(w^4-1)^2}\,dw^2.$$

В 1978 році В.М. Дубінін [55] розробив метод розділяючого перетворення і розв'язав за допомогою нього велику кількість складних задач (див., наприклад, [56, 57, 165]). Є.Г. Ємельянов [62] розв'язав досить цікаву задачу з двома колами. Ряд нових та загальних екстремальних задач були розв'язані Г.В. Кузьміною [81, 82, 83, 84, 85, 86], С.І. Фьодоровим [125], Г.П. Бахтіної [33], О.К. Бахтіним [7, 8, 10], І.П. Мітюком [96, 97], А.Ю. Солиніним [100, 101].

Із результатів роботи [55] слідує теорема, що суттєво узагальнює теорему 1.4.2.

**Теорема 1.4.3.** [55] *Для будь-яких різних точок* $a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ $(n \geqslant 3)$, *які належать одиничному колу* $|z| = 1$ *і будь-яких областей, що попарно не перетинаються,* $D_k$, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 1, \ldots, n$, *справедлива нерівність*

$$\prod_{k=1}^{m} r(D_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n . \tag{1.10}$$

*Якщо, додатково, області* $D_k$, $k = 1, \ldots, n$, *мають класичні функції Гріна, то рівність в* (1.10) *досягається тоді і тільки тоді, коли*

$$a_k = \exp\left(i\left(\theta + \frac{2\pi k}{n}\right)\right),$$

$$D_k = \left\{z : \left|\arg\, z - \theta - \frac{2\pi k}{n}\right| < \frac{\pi}{n}\right\}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

*де* $\theta$ *— дійсне стале число.*

Іншим важливим частинним випадком роботи [55] є наступний результат.

**Теорема 1.4.4.** [55] *Нехай* $n \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda, R \in \mathbb{R}^+$, $\lambda < R$. *Тоді для будь-яких* $n$ *різних точок* $a_k$, $|a_k| = \lambda$, $k = \overline{1, n}$, *і довільної системи областей, що попарно не перетинаються,* $\{D_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in D_k \subset U_R$, $k = \overline{1, n}$ *справедлива нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4\lambda}{n}\right)^n \cdot \left[\frac{R^n - \lambda^n}{R^n + \lambda^n}\right]^n . \tag{1.11}$$

*Якщо, додатково, області* $D_k$, $k = 1, \ldots, n$, *мають класичні функції Гріна, то рівність в* (1.11) *досягається тоді і тільки тоді, коли* $a_k$ *і* $D_k$ *є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного* *диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n + R^n)}{(w^n - \lambda^n)^2(R^{2n} - \lambda^n w^n)^2}\, dw^2.$$

В останнє десятиріччя багато екстремальних задач було розв'язано В.М. Дубініним та його учнями Е.Г. Прілєпкіною, Л.В. Ковальовим, Е.В. Костюченко, Н.В. Ейрих, Д.О. Кіріловою за допомогою властивостей ємностей узагальнених конденсаторів та методу симетризації (див., наприклад, [58, 59, 60, 165]).

Вцілому до 2004 року в більшості випадків розглядалися задачі з вільними полюсами на одиничному колі. О.К. Бахтін в роботах [10, 11] запропонував метод "керуючих" функціоналів, який дозволив розглядати екстремальні задачі із вільними полюсами на променевих системах точок (див., наприклад, [9, 11, 14, 123]).

Велика кількість робіт з'явилася вже у XXI столітті (див., наприклад, Л.В. Ковальов [76, 77, 78], Г.В. Кузьміна [87, 89], Є.Г. Ємельянов [63, 64], В.М. Дубінін [58, 165], О.К. Бахтін [11, 14, 26, 141, 142, 143, 147], А.Л. Таргонський [14, 122, 123, 225, 226, 227], Д.О. Кірілова [75], В.Є. В'юн [36], Я.В. Заболотний [66, 68, 69, 70, 71, 234] тощо). Разом з тим, багато екстремальних задач, особливо з вільними полюсами, залишаються не розв'язаними. Деякі з таких проблем розглядаються в даній дисертаційній роботі.

## 1.5. Результати попередників, які використовуються в роботі

Наведемо ряд важливих результатів, які використовуються в даній дисертаційній роботі.

**Теорема 1.5.1.** [40] *В сімействі* $\mathfrak{R}$ *всіх функцій* $F(z)$, $F(0)=0$, $F'(0)=1$, *регулярних в даній однозв'язній області* $B$, *яка містить точку* $z=0$ *і має більше однієї граничної точки, мінімум величини*

$$H(F)=\iint\limits_{B}|F'(z)|^2 d\sigma \tag{1.12}$$

($d\sigma$ *– елемент площі) дає єдина функція, що однолисто відображає область* $B$ *на повний круг* $|z|<R$.

Під інтегралом (1.12), взятим по області $B$, розуміється границя інтегралів, взятих по областях $B_n$, $n=1,2,\ldots$, які вичерпують область $B$, тобто таким, що $\overline{B_n}\subset B$, $B_n\subset B_{n+1}$ і що будь-яка замкнута множина $E\subset B$, починаючи з деякого $n$, лежить в $B_n$. Значення інтеграла (1.12) не залежить від вибору областей $B_n$, які вичерпують $B$. За області $B_n$ можна взяти прообрази кругів $|\zeta|<r_n$, $r_n<1$, при однолистому відображенні області $B$ на круг $|\zeta|<1$ так, що $z=0$ переходить в $\zeta=0$. У випадку однолистої функції $F(z)$ інтеграл (1.12) дає площу образа області $B$ при відображенні $\zeta=F(z)$. У випадку неоднолистості $F(z)$ в $B$ інтеграл (1.12) дає площу ріманової поверхні, на яку відображається область $B$ взаємно однозначно за допомогою $\zeta=F(z)$.

При відшуканні мінімума інтеграла (1.12) достатньо розглянути лише функції $F(\zeta)\in\mathfrak{R}$ із скінченним $H(F)$. Взявши функції $\zeta=f(z)$, $z=\phi(\zeta)$, зробимо заміну змінної в інтегралі (1.12) $\zeta=re^{i\phi}$:

$$H(F)=\iint\limits_{|\zeta|<1}|F'(\phi(\zeta))\phi'(\zeta)|^2 r\,dr\,d\phi=$$

$$=\lim_{\rho\to 1}\iint\limits_{|\zeta|<\rho}|F'(\phi(\zeta))\phi'(\zeta)|^2 r\,dr\,d\phi.$$

Поклавши

$$F'(\phi(\zeta))\phi'(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n,\quad a_0=\phi'(0)=\frac{1}{f'(0)},$$

маємо

$$H(F) = \pi \lim_{\rho\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2 \rho^{2n+2}}{n+1} \geqslant \pi |a_0|^2,$$

тобто $H(F) \geqslant \pi|a_0|^2$, причому знак рівності в цій нерівності має місце тільки при умові $a_1 = a_2 = \ldots = 0$, для функції $F(z) = \frac{f(z)}{f'(0)}$.

Далі, сформулюємо один із важливих результатів, який був отриманий О.К. Бахтіним в роботах [10], [11, с. 95].

**Теорема 1.5.2.** *Нехай* $R \in \mathbb{R}^+$, $n, m \in \mathbb{N}$ *і* $n \geqslant 3$. *Тоді, які б не були* $(n,m)$*-променева система точок* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *і довільна система взаємно неперетинних областей* $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *справедлива нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant 2^{nm} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{m} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot L_R(A_{n,m}). \quad (1.13)$$

*Знак рівності в* (1.13) *досягається тоді і тільки тоді, коли точки* $a_{k,p}$ *і області* $\widetilde{B}_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(R^n + w^n)^{2m-2}}{\left[(R^{\frac{n}{2}} - iw^{\frac{n}{2}})^{2m} + (R^{\frac{n}{2}} + iw^{\frac{n}{2}})^{2m}\right]^2}\, dw^2,$$

*і* $\operatorname{cap}\left(\widetilde{B}_{k,p} \backslash B_{k,p}\right) = 0$ *при всіх* $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$. Величини $\alpha_k$, $\mu_k(R)$, $L_R(A_{n,m})$ означені в підрозділі 2.1.

Наступні твердження істотним чином вплинули на доведення результатів даної дисертації.

**Теорема 1.5.3.** [11, с. 135] *Нехай* $R \in \mathbb{R}^+$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. *Тоді для будь-якої* $(n,m)$*-рівнопроменевої системи точок* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *і будь-якого набору довільних взаємно неперетинних областей* $B_0$, $\{B_{k,p}\}$, $0 \in B_0$, $a_{k,p} \in B_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *справедлива нерівність*

$$[r\,(B_0,0)]^{\frac{n^2}{4}}\prod_{k,p=1}^{n,m} r\,(B_{k,p},a_{k,p})\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{8}{n(2m+1)}\right)^{nm}\left(\frac{2}{2m+1}\right)^{\frac{n}{2}}\cdot R^{\left(\frac{n}{2}\right)^2}L_R(A_{n,m}). \tag{1.14}$$

*Знак рівності в* (1.14) *досягається тоді і тільки тоді, коли* $0$, $\{a_{k,p}\}$ *і* $B_0$, $\{\widetilde{B}_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2=-\frac{w^{n-2}(R^n+w^n)^{2m-1}}{\left[(R^{\frac{n}{2}}-iw^{\frac{n}{2}})^{2m+1}-(R^{\frac{n}{2}}+iw^{\frac{n}{2}})^{2m+1}\right]^2}\,dw^2.$$

**Теорема 1.5.4.** [11, с. 146] *Нехай* $R\in\mathbb{R}^+$, $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$. *Тоді, які б не були* $(n,m)$*-рівнопроменева система точок* $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *і набір взаємно неперетинних областей* $B_0$, $\{B_{k,p}\}$, $B_\infty$ *таких, що* $0\in B_0$, $a_{k,p}\in B_{k,p}$, $\infty\in B_\infty$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *справедлива нерівність*

$$[r\,(B_0,0)\cdot r\,(B_\infty,\infty)]^{\frac{n^2}{4}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\,(B_{k,p},a_{k,p})\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{n}{4}\right)^n\cdot\left(\frac{4}{n(m+1)}\right)^{n(m+1)}\cdot L_R(A_{n,m}). \tag{1.15}$$

*Знак рівності в* (1.15) *досягається тоді і тільки тоді, коли* $0$, $\{a_{k,p}\}$, $\infty$ *і* $\widetilde{B}_0$, $\left\{\widetilde{B}_{k,p}\right\}$, $\widetilde{B}_\infty$ *для всіх* $k=\overline{1,n}$ *і* $p=\overline{1,m}$ *є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2=-w^{n-2}\frac{(R^n+w^n)^{2m}}{\left[(R^{\frac{n}{2}}-iw^{\frac{n}{2}})^{2m+2}-(R^{\frac{n}{2}}+iw^{\frac{n}{2}})^{2m+2}\right]^2}\,dw^2.$$

**Теорема 1.5.5.** [11, с. 169] *Нехай* $\alpha_1, \alpha_2, \rho, \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}^+$, $a_0 = 0$, $a_\infty = \infty$, $a_1 = i\rho_1$, $a_2 = -i\rho_2$. *Тоді для будь-якої четвірки попарно неперетинних областей* $B_q$, $a_q \in B_q \subset \overline{\mathbb{C}}$, $q \in \{0,1,2,\infty\}$, *справедлива нерівність*

$$[r(B_0,0)\,r(B_\infty,\infty)]^{\alpha_1}\left(\frac{r(B_1,a_1)\,r(B_2,a_2)}{|a_1-a_2|^2}\right)^{\alpha_2} \leqslant I_4^{(0)}(\alpha_1,\alpha_2) =$$

$$= \left[r\left(B_0^{(0)},0\right) r\left(B_\infty^{(0)},\infty\right)\right]^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{r\left(B_1^{(0)},i\rho\right) r\left(B_2^{(0)},-i\rho\right)}{4\rho^2}\right)^{\alpha_2},$$

$B_q^{(0)}$, $q \in \{0,1,2,\infty\}$, *— кругові області квадратичного диференціала*

$$Q_1(w)dw^2 = -\frac{w^4 + 2\left(1 - 2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\rho^2 w^2 + \rho^4}{w^2(w^2+\rho^2)^2}dw^2,$$

$$0 \in B_0^0, \quad \infty \in B_\infty^0, \quad i\rho \in B_1^0, \quad -i\rho \in B_2^0.$$

*Знак рівності тут досягається тоді і тільки тоді, коли* $a_q$ *і* $\widetilde{B}_q$, $q \in \{0,1,2,\infty\}$, *є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціала* $Q_1(w)dw^2$, $\operatorname{cap} \widetilde{B}_q \backslash B_q = 0$, $q \in \{0,1,2,\infty\}$.

Наступний допоміжний результат був отриманий А.Л. Таргонським в роботах [122, 123].

**Лема 1.5.1.** *Справедливі співвідношення*

$$r\left(B_0^{(0)},0\right) = \rho\frac{\sqrt{\alpha_1}\left|\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1}\right|^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}-1\right)}}{\left|\sqrt{\alpha_2}+\sqrt{\alpha_1}\right|^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}+1\right)}},$$

$$r\left(B_\infty^{(0)},\infty\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\sqrt{\alpha_1}\left|\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1}\right|^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}-1\right)}}{\left(\sqrt{\alpha_2}+\sqrt{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}+1\right)}},$$

$$r\left(B_k^{(0)},(-1)^{k-1}i\rho\right) = 2\rho\frac{\sqrt{\alpha_1}\left|\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1}\right|^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}-1\right)}}{\left(\sqrt{\alpha_2}+\sqrt{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}+1\right)}}, \quad k = 1,2,$$

$$I_4^{(0)}(\alpha_1,\alpha_2)=\left(r\left(B_0^{(0)},0\right)r\left(B_\infty^{(0)},\infty\right)\right)^{\alpha_1}\times$$
$$\times\left(\frac{r\left(B_1^{(0)},i\rho\right)r\left(B_2^{(0)},-i\rho\right)}{4\rho^2}\right)^{\alpha_2}=$$
$$=\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}\left|\sqrt{\alpha_1}-\sqrt{\alpha_2}\right|^{-\left(\sqrt{\alpha_1}-\sqrt{\alpha_2}\right)^2}\left|\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2}\right|^{-\left(\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2}\right)^2},$$

$B_q^{(0)}$, $q\in\{0,1,2,\infty\}$ — *кругові області квадратичного диференціала*

$$Q_1(w)dw^2=-\frac{w^4+2\left(1-2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\rho^2w^2+\rho^4}{w^2(w^2+\rho^2)^2}dw^2.$$

Наступна теорема (див. також [11, с. 204]) відіграла важливу роль при доведенні результатів Розділів 4 і 5. В теоремі 1.5.6 вдалося отримати точну мажоранту функціонала, яка деяким чином враховує відхилення не екстремальної системи точок від екстремальної. Теорема 1.5.6 у випадку, коли точки $a_k$, $k=\overline{1,n}$, лежать на одиничному колі і для систем неперетинних областей була отримана В.М. Дубініним методом розділяючого перетворення. Поки що незрозуміло, яким ще методом можна отримати таку оцінку.

**Теорема 1.5.6.** *Нехай* $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$. *Тоді для будь-якої* $n$*-променевої системи точок* $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$ *і будь-якої системи взаємно неперетинних областей* $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, *справедлива нерівність*
$$\prod_{k=1}^n r(B_k,a_k)\leqslant 2^n\cdot\mathcal{N}^{(0)}(A_n)\cdot\prod_{k=1}^n\alpha_k,$$
*знак рівності в якій реалізується тоді і тільки тоді, коли* $a_k$ *і* $\widetilde{B_k}$, $k=\overline{1,n}$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*
$$Q(w)dw^2=-\frac{w^{n-2}}{(w^n-R)^2}\,dw^2,$$

*де* $R^n = \mathcal{N}^{(0)}(A_n)$ *і* $\operatorname{cap}\widetilde{B_k}\backslash B_k = 0$, $k = \overline{1,n}$.

В даній дисертації узагальнюються та посилюються декілька результатів, які були отримані в роботі [56]. Завдяки методу розділяючого перетворення, мабуть, вперше вдалося отримати точну оцінку досить складного функціонала на сімействах неперетинних областей і відразу для всіх значень натурального параметра $n$.

**Теорема 1.5.7.** [56, с. 55] *Для будь-яких різних точок* $a_k$, $k = \overline{0,n}$, $(n \geqslant 2)$, *які лежать на колі* $|z| = 1$, *і будь-яких попарно неперетинних областей* $D_k$, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0 \in D_0$, *справедлива нерівність*

$$\prod_{k=0}^{n} r\left(D_k, a_k\right) \leqslant \frac{4^{\frac{1}{n}+n} n^n}{(n^2-1)^{\frac{1}{n}+n}} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2. \tag{1.16}$$

*Якщо області* $D_k$, $k = \overline{0,n}$, *мають класичну функцію Гріна, то рівність в* (1.16) *досягається тоді і тільки тоді, коли області* $D_k$ *і точки* $a_k$ *є, відповідно, круговими областями та полюсами квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-1)w^n + 1}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

Із теореми 1.5.7 випливають відомі результати М.О. Лаврентьєва, Г.М. Голузіна, Г.В. Кузьміної для $n = 2, 3, 4$.

В 1996 році Л.В. Ковальов [76] отримав наступний результат.

**Теорема 1.5.8.** [76] *Нехай* $a_k = \exp(i\alpha_k)$, $k = \overline{1,n}$, $n \geqslant 5$, *— точки одиничного кола, причому* $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < 2\pi$, $\alpha_{k+1} - \alpha_k \leqslant 2\pi/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{0,n}$ $(\alpha_0 = \alpha_n - 2\pi$, $\alpha_{n+1} = 2\pi)$, *де* $\gamma$ *– фіксоване число* $0 < \gamma \leqslant n$. *Тоді для будь-яких попарно неперетинних областей* $D_k$, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$ $(a_0 = 0 \in B_0)$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \frac{4^{\gamma/n+n} \gamma^{\gamma/n} n^n}{(n^2-\gamma)^{\gamma/n+n}} \left(\frac{n-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{n+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

*Знак рівності досягаеться для точок* $a_k = \exp(i2\pi k/n)$, $k = \overline{1,n}$, *і кругових областей відносно квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Розділ 3 даної роботи присвячений узагальненню та посиленню наступного відомого результату В.М. Дубініна.

**Теорема 1.5.9.** [56, с. 59] *Для будь-яких різних точок* $a_k$, $k=\overline{0,n}$, $(n\geqslant 2)$, *які лежать на колі* $|z|=1$, *і будь-яких попарно неперетинних областей* $D_k$, $a_k\in D_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,n+1}$, $a_0=0\in B_0$, $a_{n+1}=\infty\in D_{n+1}$, *справедлива нерівність*

$$\sqrt{r\left(D_0,a_0\right)r\left(D_{n+1},a_{n+1}\right)}\prod_{k=1}^{n}r\left(D_k,a_k\right)\leqslant\frac{2^{2n+\frac{1}{n}}}{(n^2-2)^{\frac{1}{n}+\frac{n}{2}}}\left(\frac{n-\sqrt{2}}{n+\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}.$$

*Якщо області* $D_k$, $k=\overline{0,n+1}$, *мають класичну функцію Гріна, то рівність досягається тоді і тільки тоді, коли області* $D_k$ *і точки* $a_k$ *є, відповідно, круговими областями та полюсами квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{2n}+(2n^2-2)w^n+1}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Наступна теорема (див. також [87, с. 267]) є суттєвим посиленням результату теореми 1.5.9.

**Теорема 1.5.10.** *Нехай* $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in\left(0,\ \frac{n^2}{8}\right]$. *Тоді для будь-яких різних точок* $a_k$, $k=\overline{0,n}$, *які лежать на колі* $|z|=1$, *і будь-яких попарно неперетинних однозв'язних областей* $D_k$, $a_k\in D_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,n+1}$, $a_0=0\in B_0$, $a_{n+1}=\infty\in D_{n+1}$, *справедлива нерівність*

$$\left(r\left(D_0,a_0\right)r\left(D_{n+1},a_{n+1}\right)\right)^{\gamma}\prod_{k=1}^{n}r\left(D_k,a_k\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left(r\left(D_0^{(0)},a_0\right)r\left(D_{n+1}^{(0)},a_{n+1}\right)\right)^{\gamma}\prod_{k=1}^{n}r\left(D_k^{(0)},a_k^{(0)}\right),$$

*де* $a_k^{(0)} = e^{2\pi ik/n}$, $k = \overline{1,n}$, *і* $D_0^{(0)}$, $D_\infty^{(0)}$, $D_k^{(0)}$, $k = \overline{1,n}$, *система кругових областей квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (n^2 - 2\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

В роботах Л.В. Ковальова [77, 78] були отримані наступні результати, аналоги теореми 1.5.7, коли області $B_k$, $k = 1,\ldots,n$, володіють симетрією відносно одиничного кола.

**Теорема 1.5.11.** [78] *Нехай* $a_0 = 0$, $a_k = \exp(i\theta_k)$, *де* $0 = \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 = 2\pi$. *Для будь-яких попарно неперетинних областей* $B_k$, *що задовольняють умовам* $a_k \in B_k$, $k = 0,1,2$, $B_k = B_k^*$ $(B^* = \{z : 1/\overline{z} \in B\})$, $k = 1,2$, *справедлива нерівність*

$$\prod_{k=0}^{2} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant 8\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^{\sqrt{2}}. \tag{1.17}$$

*Якщо, додатково, області* $B_0$, $B_1$, $B_2$ *мають класичні функції Гріна, то рівність в* (1.17) *досягається тоді і тільки тоді, коли* $\theta_2 = \pi$ *і при* $k = 0,1,2$, $B_k$ *— кругова область для квадратичного диференціала*

$$Q(z)dz^2 = -\frac{z^4 + 6z^2 + 1}{z^2(z^2-1)^2}dz^2,$$

*яка містить точку* $a_k$.

**Теорема 1.5.12.** [77] *Нехай* $B_0,\ldots,B_n$ $(n > 2)$ *— неперетинні області в* $\mathbb{C}$; $a_k \in B_k$, $k = 0,\ldots,n$; $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = 1,\ldots,n$; $B_k = B_k^*$, $k = 1,\ldots,n$. *Тоді*

$$\prod_{k=0}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \frac{2^{2n+1/n}}{(n^2-2)^{n/2+1/n}}\left(\frac{n-\sqrt{2}}{n+\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}. \tag{1.18}$$

*Якщо ж до того області* $B_k$ *мають класичні функції Гріна, то рівність в* (1.18) *досягається тоді і тільки тоді, коли точки* $a_k$ *і області*

$B_k$ *є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(z)dz^2 = -\frac{(\alpha z)^{2n} + (2n^2 - 2)(\alpha z)^n + 1}{z^2((\alpha z)^n - 1)^2} dz^2, \quad |\alpha| = 1.$$

# Висновки

У першому розділі дисертаційної роботи наведено наступні результати:

- Описано короткий історичний огляд теорії екстремальних задач про неперетинні області.
- Введено поняття та основні твердження теорії квадратичних диференціалів.
- Введена класифікація типів функціоналів та екстремальних задач.
- Описані частинні випадки методу розділяючого перетворення В.М. Дубініна необхідні для дисертаційної роботи.
- Для компакту $F \subset \mathbb{C}$ наведено рівності, за якими визначається його (логарифмічна) ємність.
- Наведено визначення операції заповнення несуттєвих граничних компонент відносно системи взаємно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$.
- Сформульовано результати попередників, які зіграли вирішальну роль при доведенні тверджень даної роботи: теорема В.М. Дубініна для фіксованих полюсів; теорема про мінімізацію площі; теорема О.К. Бахтіна, яка визначає повну екстремальну конфігурацію функціонала четвертого типу; теорема О.К. Бахтіна, яка визначає повну екстремальну конфігурацію інваріантного відносно довільного конформного автоморфізму комплексної площини функціонала для чотирьох взаємно неперетинних областей; результат А.Л. Таргонського про оцінку функціонала третього типу.

# РОЗДІЛ 2

# ОЦІНКИ ФУНКЦІОНАЛІВ ПЕРШОГО ТА ДРУГОГО ТИПІВ ДЛЯ $(N, M)$-ПРОМЕНЕВИХ СИСТЕМ ТОЧОК

Даний розділ присвячений отриманню ефективних оцінок зверху для функціоналів наступного виду при всіх значеннях параметра $\gamma \in (0, nm]$

$$I_{n,m}(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right),$$

$$Y_{n,m}(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_\infty, \infty\right) \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right),$$

де $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, — довільна фіксована $(n,m)$-променева система точок, $B_0$, $B_\infty$, $B_{k,p}$ — довільна система областей, що взаємно не перетинаються, таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$ при $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$.

У монографії [11, с. 135] для функціоналів $I_{n,m}(\gamma)$, $Y_{n,m}(\gamma)$, були отримані лише результати для $\gamma = 0$ та $\gamma = \frac{n^2}{4}$ і будь-яких $(n,m)$-рівнопроменевих систем точок (див. також теорему 1.5.3).

## 2.1. Основні означення та позначення

Далі будемо використовувати такі позначення: $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел, $\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел, $\mathbb{C}$ — площина комплексних чисел, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — її одноточкова компактифікація, $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$, $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, $\chi(t) = \frac{1}{2}\left(t + t^{-1}\right)$ — функція Жуковського.

Нехай $n, m \in \mathbb{N}$. Систему точок

$$A_{n,m} := \{a_{k,p} \in \mathbb{C} : k = \overline{1,n},\, p = \overline{1,m}\}$$

будемо називати $(n,m)$**-променевою**, якщо при всіх $k = \overline{1,n}$ і $p = \overline{1,m}$ виконуються співвідношення:

$$0 < |a_{k,1}| < \ldots < |a_{k,m}| < \infty;$$

$$\arg a_{k,1} = \arg a_{k,2} = \ldots = \arg a_{k,m} =: \theta_k;$$

$$0 = \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < \theta_{n+1} := 2\pi.$$

У випадку $m = 1$, $(n,1)$-променеву систему точок будемо називати $n$-променевою і розглянемо більш прості позначення: $a_{k,1} =: a_k$, $k = \overline{1,n}$, $A_{n,1} =: A_n$, $a_{n+1} := a_1$, $a_0 := a_n$.

Довільній $(n,m)$-променевій системі точок $A_{n,m}$ поставимо у відповідність набір областей $\Gamma(A_{n,m}) = \{\Gamma_k\}_{k=1}^{n}$, де

$$\Gamma_k := \{w \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : \theta_k < \arg w < \theta_{k+1}\}\,,\ k = \overline{1,n}.$$

$$\Gamma_0 := \Gamma_n,\ \Gamma_{n+1} := \Gamma_1.$$

Величини $\alpha_k := \alpha_k(A_{n,m}) := \frac{1}{\pi}\left[\theta_{k+1} - \theta_k\right]$, $k = \overline{1,n}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $\alpha_0 := \alpha_n := \frac{1}{\pi}\left[2\pi - \theta_k\right]$, будемо називати **кутовими параметрами** $(n,m)$-променевої системи точок $A_{n,m}$. Очевидно, що $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k(A_{n,m}) = 2$.

Якщо $(n,m)$-променева система точок $A_{n,m}$ володіє властивістю $\alpha_k(A_{n,m}) = \frac{2}{n}$, $k = \overline{1,n}$, то її будемо називати **рівнопроменевою**. Рівнопроменевій системі точок ставиться у відповідність фіксована система областей $\Gamma^0(A_{n,m}) = \left\{\Gamma_k^0\right\}_{k=1}^{n}$, де

$$\Gamma_k^0 := \left\{w \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : \frac{2\pi}{n}k < \arg w < \frac{2\pi}{n}(k+1)\right\},\ k = \overline{1,n}.$$

Для фіксованого $R \in \mathbb{R}^+$ і будь-якої $(n, m)$-променевої системи точок $A_{n,m}$ введемо наступний "керуючий" функціонал:

$$L_R(A_{n,m}) := \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)\cdot\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\cdot|a_{k,p}|.$$

Очевидно, що $L_1(A_{n,m}) = L(A_{n,m})$. Крім того,

$$L_R(A_{n,m}) = R^{mn}\cdot L\left(\frac{1}{R}\cdot A_{n,m}\right).$$

На множині всіх $n$-променевих систем точок введемо такий "керуючий" функціонал:

$$\mathcal{N}^{(0)}(A_n) := \prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)|a_k|.$$

Якщо $T_n$ — довільний набір із $n$ різних точок одиничного кола і $\partial U\backslash T_n$ складається із $n$ неперетинних дуг з довжинами

$$\gamma_1 = \sigma_1\pi, \quad \ldots, \quad \gamma_n = \sigma_n\pi,$$

тоді

$$\mu(T_n) := \prod_{k=1}^{n}\sigma_k.$$

При кожному $k = \overline{1, n}$ позначимо через $\zeta_k(w)$ ту вітку багатозначної аналітичної функції

$$\zeta(w) = -i\left(e^{-\theta_k i}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}},$$

яка реалізує однолисте і конформне відображення області $\Gamma_k$ на праву півплощину $\mathrm{Re} z > 0$, при цьому промінь $\arg w = \frac{1}{2}(\theta_k + \theta_{k+1})$ перетворюється в додатну дійсну піввісь. Тоді функція

$$\eta_k^{(R)}(w) := \frac{R^{\frac{1}{\alpha_k}} - \zeta_k(w)}{R^{\frac{1}{\alpha_k}} + \zeta_k(w)}$$

однолисто і конформно відображає область $\Gamma_k$ на одиничний круг $U = U_1$, при всіх $k = \overline{1, n}$. Позначимо $\omega_{k,p}^{(1)}(R) := \eta_k^{(R)}(a_{k,p})$, $\omega_{k,p}^{(2)}(R) :=$

$\eta_k^{(R)}(a_{k+1,p})$, $a_{n+1,p} := a_{1,p}$, $\omega_{0,p}^{(2)}(R) := \omega_{n,p}^{(2)}(R)$, ($k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$). При всіх $k = \overline{1,n}$ множина $\{\omega_{k,p}^{(1)}(R)\}_{p=1}^{m} \cup \{\omega_{k,p}^{(2)}(R)\}_{p=1}^{m}$ складається із $2m$ різних точок на колі $\partial U_R$. Нехай

$$\mu_k(R) := \mu_k^{(R)}(A_{n,m}) := \mu\left(\{\omega_{k,p}^{(1)}(R)\}_{p=1}^{m} \cup \{\omega_{k,p}^{(2)}(R)\}_{p=1}^{m}\right), \quad k = \overline{1,n}.$$

При $R = 1$ покладемо $\mu_k := \mu_k(1)$, $k = \overline{1,n}$. Таким чином, кожній $(n,m)$-променевій системі точок $A_{n,m}$ і деякому фіксованому числу $R \in \mathbb{R}^+$ відповідає набір чисел $\{\mu_k(R)\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{R}^+$, причому,

$$\mu_k(R) \leqslant m^{-2m},$$

де знак рівності досягається тоді і лише тоді, коли $\omega_{k,p}^{(s)}(R)$ є вершинами правильного $2m$-кутника ($k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, $s = 1,2$).

При заданому $R$ величини $\mu_k(R)$, $k = \overline{1,n}$, будемо називати коефіцієнтами зміщення не екстремальної системи $A_{n,m}$ відносно екстремальної $R \cdot A_{n,m}^{(1)}$.

## 2.2. Оцінка функціонала першого типу для $(n,m)$-променевих систем точок при всіх можливих значеннях параметра $\gamma \in (0,\, nm]$

**Теорема 2.2.1.** [29] *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0,\, nm]$. Тоді для довільної фіксованої $(n,m)$-променевої системи точок $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, $B_0$, $\{B_{k,p}\}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, справедлива нерівність*

$$I_{n,m}(\gamma) \leqslant (nm)^{-\frac{\gamma}{2}} \left(I_{n,m}(0)\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}} \left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\right)^{\frac{2\gamma}{nm}}.$$

**Доведення.** Нехай $d(E)$ — трансфінітний діаметр компактної множини $E \subset \mathbb{C}$. Відомо [40], що логарифмічна ємність $\mathrm{cap}E$ співпадає з сталою Чебишева $\tau(E)$ і з трансфінітним діаметром $d(E)$ множини $E$:

$$\mathrm{cap}E = \tau(E) = d(E) = \frac{1}{r(B,\infty)}.$$

Тоді має місце наступне співвідношення

$$r\left(B_0, 0\right) = r\left(B_0^{+}, \infty\right) = \frac{1}{d(\overline{\mathbb{C}} \setminus B_0^{+})} \leqslant \frac{1}{d\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n}\bigcup\limits_{p=1}^{m} \overline{B}_{k,p}^{+}\right)}, \qquad (2.1)$$

де $B^{+} = \{z : \frac{1}{z} \in B\}$. Згідно із теоремою Пойа [99, с. 28], справедлива нерівність

$$\mu E \leqslant \pi d^2(E),$$

де $\mu E$ — лебегова міра компактної множини $E$. Тоді із (2.1), одержуємо

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\mu\overline{B}_{k,p}^{+}\right]^{-\frac{1}{2}}. \qquad (2.2)$$

Із теореми про мінімізацію площі [40, с. 34] слідує, що

$$\iint\limits_{B} |\varphi'(z)|^2 dxdy \geqslant \pi r^2\left(B, a\right). \qquad (2.3)$$

Нехай $\varphi(z) = (z-a)$, тоді із (2.3), маємо

$$\mu(B) \geqslant \pi r^2\left(B, a\right).$$

Із нерівності (2.2) слідує, що

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \frac{1}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{p=1}^{m} r^2\left(B_{k,p}^{+}, a_{k,p}^{+}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Використовуючи інваріантність функції Гріна при конформному та однолистому відображенні, одержуємо

$$g_{B_{k,p}}(z, a_{k,p}) = g_{B_{k,p}^{+}}(w^{+}, a_{k,p}^{+}), \quad w^{+} = \frac{1}{z}.$$

Використовуючи співвідношення

$$g_{B_{k,p}^+}(w^+, a_{k,p}^+) = g_{B_{k,p}^+}\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{a_{k,p}}\right) = \ln \frac{1}{|\frac{1}{z} - a_{k,p}^+|} + \ln r(B_{k,p}^+, a_{k,p}^+) + o(1),$$

маємо,

$$g_{B_{k,p}^+}(w^+, a_{k,p}^+) = \ln \frac{|z|}{|1 - z a_{k,p}^+|} + \ln r(B_{k,p}^+, a_{k,p}^+) + o(1) =$$

$$= \ln \frac{|z|}{|a_{k,p}^+|} \frac{1}{|\frac{1}{a_{k,p}^+} - z|} + \ln r(B_{k,p}^+, a_{k,p}^+) + o(1) =$$

$$= \ln \frac{1}{|z - a_{k,p}|} + \ln |a_{k,p} z| + \ln r(B_{k,p}^+, a_{k,p}^+) + o(1) =$$

$$= \ln \frac{1}{|z - a_{k,p}|} + \ln |a_{k,p}|^2 + \ln \left| 1 - \frac{1}{a_{k,p}}(z - a_{k,p}) \right| + \ln r(B_{k,p}^+, a_{k,p}^+) + o(1) =$$

$$= \ln \frac{1}{|z - a_{k,p}|} + \ln |a_{k,p}|^2 r(B_{k,p}^+, a_{k,p}^+) + o(1).$$

Таким чином,

$$r\left(B_{k,p}^+, a_{k,p}^+\right) = \frac{r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^2}$$

і приходимо до нерівності

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \frac{1}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{p=1}^{m} \frac{r^2\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^4}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Звідси отримуємо наступну оцінку для функціонала $I_{n,m}(\gamma)$

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right)}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{p=1}^{m} \frac{r^2\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}}.$$

Із нерівності Коші, маємо твердження

$$\frac{1}{nm}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\frac{r^2\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^4}\geqslant\left[\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\frac{r^2\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^4}\right]^{\frac{1}{nm}}.$$

Звідси слідує, що

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\frac{r^2\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}\geqslant\left[nm\left[\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\frac{r^2\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^4}\right]^{\frac{1}{nm}}\right]^{\frac{\gamma}{2}}=$$

$$=(nm)^{\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\right)^{\frac{\gamma}{nm}}\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\right)^{-\frac{2\gamma}{nm}}.$$

І так,

$$I_{n,m}(\gamma)\leqslant\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)}{(nm)^{\frac{\gamma}{2}}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\right)^{\frac{\gamma}{nm}}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\right)^{-\frac{2\gamma}{nm}}}=$$

$$=(nm)^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}}\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\right)^{\frac{2\gamma}{nm}}.$$

Таким чином, ми отримали оцінку зверху для функціонала $I_{n,m}(\gamma)$. Теорема 2.2.1 доведена.

**Зауваження 2.2.1.** *Якщо* $\gamma=nm$ *і* $\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\leqslant R$, *то за умов теореми 2.2.1 має місце наступне співвідношення*

$$r^{nm}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\leqslant(nm)^{-\frac{nm}{2}}\cdot R^2.$$

**Зауваження 2.2.2.** *В теоремі 2.2.1 за умов* $\gamma=nm$ *і* $\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\leqslant R$ *конфігурація областей і точок неістотна.*

Використавши нерівність, доведену в теоремі 1.5.2 (див. також [11, с. 95]), із теореми 2.2.1 одержуємо наступне твердження.

**Наслідок 2.2.1.** *Нехай* $n,m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, nm]$. *Тоді для довільної фіксованої* $(n,m)$*-променевої системи точок* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $\{B_{k,p}\}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leqslant (nm)^{-\frac{\gamma}{2}} \times$$

$$\times \left( 2^{nm} \cdot \left( \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right)^{m} \cdot \left( \prod_{k=1}^{n} \mu_k(R) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot L_R(A_{n,m}) \right)^{1-\frac{\gamma}{nm}} \left( \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} |a_{k,p}| \right)^{\frac{2\gamma}{nm}}.$$

Враховуючи наслідок 3.1.5 [11, с. 115], із теореми 2.2.1 одержуємо наступні твердження.

**Наслідок 2.2.2.** *Нехай* $n,m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, nm]$. *Тоді для довільної фіксованої* $(n,m)$*-променевої системи точок* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $\{B_{k,p}\}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4^{nm-\gamma} \cdot (L_R(A_{n,m}))^{1-\frac{\gamma}{nm}}}{nm^{nm-\frac{\gamma}{2}}} \cdot \left( \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} |a_{k,p}| \right)^{\frac{2\gamma}{nm}}.$$

**Наслідок 2.2.3.** *Нехай* $n,m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, nm]$. *Тоді для довільної фіксованої* $(n,m)$*-променевої системи точок* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *такої, що* $L_R(A_{n,m}) = 1$, *і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $\{B_{k,p}\}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leqslant \frac{4^{nm-\gamma}}{nm^{nm-\frac{\gamma}{2}}}.$$

## 2.3. Оцінка функціонала другого типу для $(n,m)$-променевих систем точок при всіх можливих значеннях параметра $\gamma \in (0,\, nm]$

**Теорема 2.3.1.** [29] *Нехай* $n,m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0,\, nm]$. *Тоді для довільної фіксованої* $(n,m)$*-променевої системи точок* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_\infty$, $\{B_{k,p}\}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *справедлива нерівність*

$$Y_{n,m}(\gamma) \leqslant (nm)^{-\frac{\gamma}{2}} \left(Y_{n,m}(0)\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}}.$$

**Доведення.** Використовуючи нерівності (2.1), (2.2) і теорему про мінімізацію площі [40, с. 34], одержуємо співвідношення

$$r\left(B_\infty, \infty\right) \leqslant \frac{1}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{p=1}^{m} r^2\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Далі із нерівності Коші, маємо

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} r^2\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant (nm)^{\frac{1}{2}} \left[\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right)\right]^{\frac{1}{nm}},$$

$$r^{\gamma}\left(B_\infty, \infty\right) \leqslant (nm)^{-\frac{\gamma}{2}} \left[\prod_{k=1}^{n}\prod_{k=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right)\right]^{-\frac{\gamma}{nm}}.$$

І, таким чином,

$$r^{\gamma}\left(B_\infty, \infty\right) \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant (nm)^{-\frac{\gamma}{2}} \left[\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right)\right]^{1-\frac{\gamma}{nm}}.$$

Теорема 2.3.1 доведена.

**Зауваження 2.3.1.** *Якщо* $\gamma = nm$*, то за умов теореми 2.3.1 має місце наступне співвідношення*

$$r^{nm}\left(B_{\infty},\infty\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right) \leqslant (nm)^{-\frac{nm}{2}}.$$

**Зауваження 2.3.2.** *В теоремі 2.3.1 при* $\gamma = nm$ *конфігурація областей і точок неістотна.*

Використавши результат роботи [11, с. 95] (див. також теорему 1.5.2) та наслідок 3.1.5 [11, с. 115], із теореми 2.3.1 одержуємо наступні твердження.

**Наслідок 2.3.1.** *Нехай* $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in(0,nm]$*. Тоді для довільної фіксованої* $(n,m)$*-променевої системи точок* $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$*, і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_{\infty}$, $\{B_{k,p}\}$, $\infty\in B_{\infty}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$*, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_{\infty},\infty\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right) \leqslant$$

$$\leqslant (nm)^{-\frac{\gamma}{2}}\left(2^{nm}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{m}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot L_R(A_{n,m})\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}}.$$

**Наслідок 2.3.2.** *Нехай* $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in(0,nm]$*. Тоді для довільної фіксованої* $(n,m)$*-променевої системи точок* $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$*, і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_{\infty}$, $\{B_{k,p}\}$, $\infty\in B_{\infty}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$*, справедлива нерівність*

$$Y_{n,m}(\gamma)\leqslant\frac{4^{nm-\gamma}\cdot\left(L_R(A_{n,m})\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}}}{nm^{nm-\frac{\gamma}{2}}}.$$

**Наслідок 2.3.3.** *Нехай* $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, nm]$. *Тоді для довільної фіксованої* $(n, m)$*-променевої системи точок* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, *такої, що* $L_R(A_{n,m}) = 1$, *і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_\infty$, $\{B_{k,p}\}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, *справедлива нерівність*

$$Y_{n,m}(\gamma) \leqslant \frac{4^{nm-\gamma}}{nm^{nm-\frac{\gamma}{2}}}.$$

## 2.4. Оцінка функціонала першого типу для $(n, m)$-променевих систем точок при малих значеннях $m$

Розглянемо наступну екстремальну проблему з вільними полюсами на комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}$.

**Проблема 2.1.** Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $a_0 = 0$, $|a_k| \in \mathbb{R}^+$, $0 < |a_k| \leqslant R$, $k = \overline{1, n}$, $A_n = \{a_k\}$, $k = \overline{1, n}$, — $n$-променева система точок, $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ — система областей, що взаємно не перетинаються, таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ при $k = \overline{0, n}$. При всіх фіксованих значеннях параметра $\gamma \in (0, n]$ і $R \in \mathbb{R}^+$ знайти максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^\gamma\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right), \tag{2.4}$$

і описати екстремалі.

Ця проблема у випадку $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, була поставлена в якості відкритої проблеми 1994 року в роботі [57]. На даний час вона повністю не розв'язана, її часткові випадки вивчалися в багатьох роботах. В статті [57] для випадку одиничного кола сформульована вище задача була розв'язана для значення параметра $\gamma = 1$ і всіх значень натурального параметра $n \geqslant 2$. А саме, було показано, що при її умовах справедлива нерівність

$$r(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant r\left(D_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k,d_k\right),$$

де $d_k$, $D_k$, $k=\overline{0,n}$, — полюси та кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-1)w^n+1}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Л.В. Ковальов в 1996 році в роботі [76] отримав розв'язок цієї задачі при досить жорстких обмеженнях на геометрію розташування систем точок на одиничному колі, а саме, для таких систем точок, для яких виконуються наступні умови

$$|a_k|=1,\ \ 0<\alpha_k\leqslant 2/\sqrt{\gamma},\ \ k=\overline{1,n},\ \ n\geqslant 5.$$

В [139] показано, що результат Л.В. Ковальова справедливий і при $n=4$. В 2003 році в [89] одержано розв'язок проблеми 2.1 для $\gamma\in(0,1]$ при умові $|a_k|=1$, $k=\overline{1,n}$. Далі, в монографії [11] 2008 року було показано, що аналог результата В.М. Дубініна [57] виконується для довільного $\gamma\in\mathbb{R}^+$, але починаючи з деякого невідомого номера $n_0(\gamma)$. Також в [11] був запропонований метод "керуючих" функціоналів, який дозволяє послабити вимоги на геометрію розташування систем точок.

В зв'язку з тим, що розв'язати цю проблему для всіх $\gamma\in(1,n]$ довгий час не вдається, метою даної роботи є отримання деякої оцінки для функціонала (2.4) при всіх $\gamma\in(1,n]$, яка як можливо менше відхиляється від значення функціонала $I_n(\gamma)$, що досягається на системі кругових областей і полюсів квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

(див. [11, 57, 76, 165]). Має місце наступне твердження.

**Теорема 2.4.1.** [27] *Нехай* $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in(0,n]$. *Тоді для будь-якої фіксованої системи різних точок* $\{a_k\}_{k=1}^{n}\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ *і будь-яких* *областей, що взаємно не перетинаються,* $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, *справедлива нерівність*

$$I_n(\gamma) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(I_n(0)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \left(\prod_{k=1}^{n} |a_k|\right)^{\frac{2\gamma}{n}}. \qquad (2.5)$$

**Доведення.** Нехай $d(E)$ — трансфінітний діаметр компактної множини $E \subset \mathbb{C}$. Тоді справедливе співвідношення

$$r\left(B_0, 0\right) = r\left(B_0^+, \infty\right) = \frac{1}{d(\overline{\mathbb{C}} \setminus B_0^+)} \leqslant \frac{1}{d\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{B}_k^+\right)}, \qquad (2.6)$$

де $B^+ = \{z : \frac{1}{z} \in B\}$.

За теоремою Пойа [99, с. 28], має місце нерівність

$$\mu E \leqslant \pi d^2(E),$$

де $\mu E$ позначає лебегову міру компактної множини $E$. Звідси одержуємо, що

$$d(E) \geqslant \left(\frac{1}{\pi}\mu E\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тоді із (2.6), маємо

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \frac{1}{d\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{B}_k^+\right)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\pi}\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{B}_k^+\right)}} = \left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \mu\overline{B}_k^+\right]^{-\frac{1}{2}}. \qquad (2.7)$$

Для довільної обмеженої області $B$, $a \in B$, розглянемо клас всіх регулярних функцій $\varphi(z)$, $\varphi(a) = 0$, $\varphi'(a) = 1$, заданих в області $B$, і площу образу області $B$ при відображенні будь-якою функцією $\varphi(z)$. Із теореми про мінімізацію площі [40, с. 34] слідує, що

$$\mu(B) \geqslant \pi r^2\left(B, a\right).$$

Із нерівності (2.7) безпосередньо випливає, що

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \mu\overline{B}_k^+\right]^{-\frac{1}{2}} \leqslant \left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \mu B_k^+\right]^{-\frac{1}{2}} \leqslant \left[\sum_{k=1}^{n} r^2\left(B_k^+, a_k^+\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Звідси одержуємо нерівність

$$r\left(B_0,0\right)\leqslant\frac{1}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n}r^2\left(B_k^{+},a_k^{+}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Використовуючи інваріантність функції Гріна при конформному та однолистому відображенні, маємо

$$g_{B_k}(z,a_k)=g_{B_k^{+}}(w^{+},a_k^{+}),\quad w^{+}=\frac{1}{z}.$$

Тоді

$$g_{B_k^{+}}(w^{+},a_k^{+})=g_{B_k^{+}}\left(\frac{1}{z},\frac{1}{a_k}\right)=\ln\frac{1}{|\frac{1}{z}-a_k^{+}|}+\ln r(B_k^{+},a_k^{+})+o(1).$$

Використовуючи нескладні перетворення, отримуємо

$$g_{B_k^{+}}(w^{+},a_k^{+})=\ln\frac{|z|}{|1-za_k^{+}|}+\ln r(B_k^{+},a_k^{+})+o(1)=$$

$$=\ln\frac{|z|}{|a_k^{+}|}\frac{1}{|\frac{1}{a_k^{+}}-z|}+\ln r(B_k^{+},a_k^{+})+o(1)=$$

$$=\ln\frac{1}{|z-a_k|}+\ln|a_kz|+\ln r(B_k^{+},a_k^{+})+o(1)=$$

$$=\ln\frac{1}{|z-a_k|}+\ln|a_k|^2+\ln\left|1-\frac{1}{a_k}(z-a_k)\right|+\ln r(B_k^{+},a_k^{+})+o(1)=$$

$$=\ln\frac{1}{|z-a_k|}+\ln|a_k|^2r(B_k^{+},a_k^{+})+o(1).$$

Таким чином,

$$r\left(B_k^{+},a_k^{+}\right)=\frac{r\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^2}$$

і приходимо до наступної нерівності

$$r\left(B_0,0\right)\leqslant\frac{1}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

З припущення теореми випливає співвідношення

$$\Delta = r^{\gamma}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}},$$

$\Delta$ — максимум функціонала $I_n(\gamma)$. Із нерівності Коші автоматично отримуємо наступне співвідношення

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4} \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Звідси, неважко отримати, що

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4}\right)^{\frac{\gamma}{2}} \geqslant \left(n\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{\gamma}{2}} \geqslant n^{\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{r(B_k, a_k)}{|a_k|^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}.$$

Таким чином,

$$I_n(\gamma) \leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)}{n^{\frac{\gamma}{2}}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{r(B_k, a_k)}{|a_k|^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}} = n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}\left(\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right)^{\frac{2\gamma}{n}}.$$

Звідси отримуємо нерівність (2.5) даної теореми. Теорема 2.4.1 доведена.

**Зауваження 2.4.1.** *Якщо* $\gamma = n$ *і* $\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k| \leqslant 1$, *то зі сформульованої вище теореми 2.4.1 маємо нерівність*

$$r^{n}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant n^{-\frac{n}{2}}.$$

**Зауваження 2.4.2.** *В теоремі 2.4.1 за умов* $\gamma = n$ *і* $\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k| \leqslant 1$ *конфігурація областей і точок неістотна.*

**Теорема 2.4.2.** *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (1, n]$. *Тоді для довільної* $n$*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *і довільного набору* *областей, що взаємно не перетинаються,* $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,n}$, $a_0=0$, *справедлива нерівність* (2.5).

Використавши результат роботи [11, Теорема 5.1.1] (див. також теорему 1.5.6) і теорему 2.4.2, отримуємо наступні твердження.

**Наслідок 2.4.1.** [27] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (1, n]$. *Тоді для довільної* $n$*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, *такої, що* $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) = 1$, *і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,n}$, $a_0=0$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \leqslant 2^{n-\gamma}\cdot n^{-\frac{\gamma}{2}}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Враховуючи, що $\prod\limits_{k=1}^{n}\alpha_k \leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^n$, має місце наступний результат.

**Наслідок 2.4.2.** [27] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (1, n]$. *Тоді для довільної* $n$*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, *такої, що* $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) = 1$, *і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,n}$, $a_0=0$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{4}{n}\right)^{n-\gamma}.$$

**Теорема 2.4.3.** [146] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (1, n]$. *Тоді для будь-якої системи різних точок* $\{a_k\}_{k=1}^n$ *одиничного кола і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,n}$, $a_0=0$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

**Зауваження 2.4.3.** *Якщо* $\gamma = n$, *то зі сформульованої вище* *теореми 2.4.3 маємо нерівність*

$$r^n\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \leqslant n^{-\frac{n}{2}}.$$

Для будь-якої $n$-променевої системи точок $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k|=1$, і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються, $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, справедлива нерівність (див. Наслідок 5.1.3 [11])

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant 2^n\prod_{k=1}^{n}\alpha_k.$$

**Наслідок 2.4.3.** [146] *Нехай* $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in(1,n]$. *Тоді для будь-якої системи різних точок* $\{a_k\}_{k=1}^n$ *одиничного кола і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* $B_k$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,n}$, $a_0=0$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \leqslant 2^{n-\gamma}\cdot n^{-\frac{\gamma}{2}}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Використавши теорему 6.11 [165] (див. також теорему 1.4.3), маємо наступний результат.

**Наслідок 2.4.4.** [146] *Нехай* $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in(1,n]$. *Тоді для будь-яких різних точок* $\{a_k\}_{k=1}^n$ *одиничного кола і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* $B_k$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,n}$, $a_0=0$, *має місце нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{4}{n}\right)^{n-\gamma}.$$

При вивченні вище сформульованої проблеми 2.1 в роботах [11, 57, 76, 165], в окремих випадках, було показано, що максимум функціонала $I_n(\gamma)$ досягається на системі кругових областей $D_k$ і системі полюсів $d_k$, $k=\overline{0,n}$, квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2=-\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Нехай

$$I_n^0(\gamma) = r^\gamma(D_0, d_0)\prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k),$$

тоді за теоремою 5.2.3 [11], маємо

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Порівняльний аналіз оцінки максимума функціонала $I_n(\gamma)$, одержаного в теоремі 2.4.3 і величини $I_n^0(\gamma)$, яка була отримана в попередніх роботах [11, 76, 165], при $\gamma = n$ для $n = \overline{2, 10}$ представлено в таблиці нижче.

| $n$ | $I_n^0(n)$ | $n^{-\frac{n}{2}}$ | $n^{-\frac{n}{2}} - I_n^0(n)$ | $\frac{n^{-\frac{n}{2}} - I_n^0(n)}{I_n^0(n)}$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 0,4373948985 | 0,5000000000 | 0,0626051015 | 0,14313176 |
| 3 | 0,1670457996 | 0,1924500897 | 0,0254042901 | 0,15207979 |
| 4 | 0,0520245897 | 0,0625000000 | 0,0104754103 | 0,20135498 |
| 5 | 0,0135131849 | 0,0178885438 | 0,0043753589 | 0,32378443 |
| 6 | 0,0029989525 | 0,0046296296 | 0,0016306771 | 0,54374889 |
| 7 | 0,0005800482 | 0,0011019372 | 0,0005218890 | 0,89973385 |
| 8 | 0,0000993416 | 0,0002441406 | 0,0001447990 | 1,45758675 |
| 9 | 0,0000152588 | 0,0000508053 | 0,0000355465 | 2,32957375 |
| 10 | 0,0000021241 | 0,0000100000 | 0,0000078759 | 3,70787628 |

Розглянемо наступну екстремальну проблему з вільними полюсами на одиничному колі.

**Проблема 2.2.** Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $B_0$, $B_1$, $B_2, \ldots, B_n$, $n \geqslant 2$, — області, що взаємно не перетинаються, і області $B_1, \ldots, B_n$ — симетричні відносно одиничного кола, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$. При всіх фіксованих значеннях параметра $\gamma \in (0, n]$ знайти максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^\gamma\left(B_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

і описати екстремалі.

Проблема 2.2 для випадку $\gamma = 1$ була сформульована як відкрита проблема в 1994 році в роботі [57]. Для $\gamma = 1$ і $n \geqslant 2$ її розв'язав Л.В. Ковальов [77, 78]. А саме, було показано справедливість наступної нерівності

$$r(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r\left(D_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, d_k\right),$$

де $d_k$, $D_k$, $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{2n} + 2(n^2-1)w^n + 1}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

Однак для значень $\gamma \neq 1$ проблема 2.2 довгий час залишалася не розв'язаною. Лише в 2018 році в статті [71] було одержано результат для $n \geqslant 2$ і $\gamma \in (0, 1)$. Для $\gamma \in (1, \sqrt[3]{n})$ і $n \geqslant 14$ задача розв'язана в статті [147]. В роботі [45] отримано деякий результат для однієї загальнішої задачі, з якого випливає, що проблема 2.2 має розв'язок для $\gamma \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$ і $n \geqslant 9$.

Застосовуючи міркування, аналогічні доведенню теореми 2.4.1, і умову $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, одержуємо наступний результат.

**Теорема 2.4.4.** [163] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (1, n]$. Тоді для будь-якої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ одиничного кола і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, і, крім того, області $B_k$, $k = \overline{1, n}$, – симетричні відносно одиничного кола $|a_k| = 1$, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

**Зауваження 2.4.4.** *Якщо* $\gamma = n$, *то зі сформульованої вище теореми 2.4.4 маємо нерівність*

$$r^n(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant n^{-\frac{n}{2}}.$$

Використовуючи результат 5.1.1 [11], із теореми 2.4.4 маємо наступне твердження.

**Наслідок 2.4.5.** [163] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (1, n]$. *Тоді для довільної системи різних точок* $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ *одиничного кола й будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, *і, крім того, області* $B_k$, $k = \overline{1, n}$, *— симетричні відносно одиничного кола* $|w| = 1$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant 2^{n-\gamma} \cdot n^{-\frac{\gamma}{2}} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Використавши теорему 6.11 [165, с. 172], із теореми 2.4.4 маємо наступний результат.

**Наслідок 2.4.6.** [163] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (1, n]$. *Тоді за всіх умов наслідку 2.4.5 має місце наступна нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{4}{n}\right)^{n-\gamma}.$$

Нехай

$$\Delta_n^0(\gamma) = r^{\gamma}(D_0, d_0)\prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k),$$

де $D_k$ і $d_k$, $k = \overline{0, n}$ є кругові області і, відповідно, полюси квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

В роботах попередників [33, 57, 71, 77, 78], було одержано, що

$$\Delta_n^0(\gamma)=\left(\frac{4}{n}\right)^n\frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left|1-\frac{2\gamma}{n^2}\right|^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}}\left|\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Порівняльний аналіз оцінки максимума функціонала $\Delta_n(\gamma)$, одержаного в теоремі 2.4.4, і величини $\Delta_n^0(\gamma)$ при $\gamma=n$ для $n=\overline{2,10}$ представлено в таблиці нижче.

| $n$ | $\Delta_n^0(n)$ | $n^{-\frac{n}{2}}$ | $n^{-\frac{n}{2}}-\Delta_n^0(n)$ | $\frac{n^{-\frac{n}{2}}-\Delta_n^0(n)}{\Delta_n^0(n)}$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 0,2500000000 | 0,5000000000 | 0,2500000000 | 1,0000000000 |
| 3 | 0,0897092419 | 0,1924500897 | 0,1027408478 | 1,1452649211 |
| 4 | 0,0273370712 | 0,0625000000 | 0,0351629288 | 1,2862727153 |
| 5 | 0,0070194764 | 0,0178885438 | 0,0108690674 | 1,5484156742 |
| 6 | 0,0015467153 | 0,0046296296 | 0,0030829143 | 1,9932008548 |
| 7 | 0,0002977029 | 0,0011019372 | 0,0008042344 | 2,7014669766 |
| 8 | 0,0000508051 | 0,0002441406 | 0,0001933355 | 3,8054339019 |
| 9 | 0,0000077826 | 0,0000508053 | 0,0000430227 | 5,5280820279 |
| 10 | 0,0000010811 | 0,0000100000 | 0,0000089189 | 8,2502515613 |

## 2.5. Оцінка функціонала першого типу для $(n,m)$-променевих систем точок з додатковою умовою симетрії

Вважатимемо, що область $D_0$ належить до класу $\Lambda$, якщо $0\in D_0\subset\overline{\mathbb{C}}$ і $\overline{\mathbb{C}}\backslash\left\{\overline{D_0}\cup\overline{D_0^{\star}}\right\}$ — відкрита множина, яка має деякий перетин з одиничним колом, де $D_0^{\star}$ — область, симетрична $D_0$ відносно одиничного кола. Вважатимемо, що область $D_0$ належить до класу $\Delta$, якщо $0\in D_0\subset\overline{\mathbb{C}}$ і $\overline{\mathbb{C}}\backslash\left\{\overline{D_0}\cup\overline{D_0^{\star}}\right\}$ є деяка відкрита множина, $D_0^{\star}$ — область, симетрична $D_0$ відносно одиничного кола.

Систему непересічних областей $\{D_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, будемо називати системою областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $D_0$, якщо має місце наступне співвідношення

$$\bigcup_{k=1}^{n}\bigcup_{p=1}^{m} D_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}\setminus\left\{\overline{D_0}\cup\overline{D_0^{\star}}\right\}.$$

Очевидно, що $D_0$, $D_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, — система областей, що взаємно не перетинаються.

**Проблема 2.3.** При всіх значеннях параметра $\gamma\in(0,nm]$ знайти оцінку максимума добутку

$$I_{n,m}(\gamma)=r^{\gamma}\left(D_0,0\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(D_{k,p},a_{k,p}\right),$$

де $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $a_0=0$, $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, — довільна фіксована $(n,m)$-променева система точок, $\{D_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, — довільна система областей, що взаємно не перетинаются, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $D_0\in\Delta$, $0\in D_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p}\in D_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$.

Має місце наступне твердження.

**Теорема 2.5.1.** [30] *Нехай $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in\mathbb{R}^{+}$. Тоді для будь-якої фіксованої $(n,m)$-променевої системи точок $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, й будь-якого фіксованого набору областей $D_0$, $\{D_{k,p}\}$, $a_0=0\in D_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p}\in D_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, де $\{D_{k,p}\}$ — система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $D_0\in\Delta$, справедлива нерівність*

$$I_{n,m}(\gamma)\leqslant(nm)^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(D_{k,p},a_{k,p}\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}}\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\right)^{\frac{2\gamma}{nm}}. \quad (2.8)$$

**Доведення.** Нехай $d(E)$ — трансфінітний діаметр компактної множини $E \subset \mathbb{C}$ [40]. Тоді має місце наступне співвідношення

$$r\left(D_0, 0\right) = r\left(D_0^+, \infty\right) = \frac{1}{d\left(\overline{\mathbb{C}} \setminus D_0^+\right)} \leqslant \frac{1}{d\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n}\bigcup\limits_{p=1}^{m}\overline{D}_{k,p}^{+}\right)}, \tag{2.9}$$

де $D^+ = \{z : \frac{1}{z} \in D\}$. Згідно із теоремою Пойа [99, с. 28], справедлива нерівність

$$\mu E \leqslant \pi d^2(E),$$

де $\mu E$ — лебегова міра компактної множини $E$. Тоді із (2.9), одержуємо

$$r\left(D_0, 0\right) \leqslant \left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\mu\overline{D}_{k,p}^{+}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.10}$$

Із теореми про мінімізацію площі [40, с. 34] слідує, що

$$\mu(D) \geqslant \pi r^2\left(D, a\right).$$

Із нерівності (2.10), маємо

$$r\left(D_0, 0\right) \leqslant \frac{1}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{p=1}^{m} r^2\left(D_{k,p}^{+}, a_{k,p}^{+}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Використавши наступне співвідношення

$$r\left(D_{k,p}^{+}, a_{k,p}^{+}\right) = \frac{r\left(D_{k,p}, a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^2},$$

приходимо до нерівності

$$r\left(D_0, 0\right) \leqslant \frac{1}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{p=1}^{m} \frac{r^2\left(D_{k,p}, a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^4}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Таким чином, отримуємо наступну оцінку для функціонала $I_{n,m}(\gamma)$

$$r^{\gamma}\left(D_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(D_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m} r\left(D_{k,p}, a_{k,p}\right)}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{p=1}^{m} \frac{r^2\left(D_{k,p}, a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}}.$$

Із нерівності Коші слідує співвідношення

$$\frac{1}{nm}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\frac{r^2\left(D_{k,p},a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^4}\geqslant\left[\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\frac{r^2\left(D_{k,p},a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^4}\right]^{\frac{1}{nm}}.$$

Звідси,

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\frac{r^2\left(D_{k,p},a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}\geqslant\left[nm\left[\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\frac{r^2\left(D_{k,p},a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^4}\right]^{\frac{1}{nm}}\right]^{\frac{\gamma}{2}}=$$

$$=(nm)^{\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(D_{k,p},a_{k,p}\right)\right)^{\frac{\gamma}{nm}}\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\right)^{-\frac{2\gamma}{nm}}.$$

Таким чином,

$$I_{n,m}(\gamma)\leqslant\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m}r\left(D_{k,p},a_{k,p}\right)}{(nm)^{\frac{\gamma}{2}}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m}r\left(D_{k,p},a_{k,p}\right)\right)^{\frac{\gamma}{nm}}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\right)^{-\frac{2\gamma}{nm}}}=$$

$$=(nm)^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(D_{k,p},a_{k,p}\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}}\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\right)^{\frac{2\gamma}{nm}}.$$

Отже, ми отримали оцінку зверху (2.8) для функціонала $I_{n,m}(\gamma)$. Теорема 2.5.1 доведена.

**Теорема 2.5.2.** [30] *Нехай* $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in(0,nm]$. *Тоді для будь-якої фіксованої* $(n,m)$*-променевої системи точок* $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *і будь-якого набору областей* $D_0$, $\{D_{k,p}\}$, $a_0=0\in D_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p}\in D_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *де* $\{D_{k,p}\}$ *— система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю* $D_0\in\Delta$, *справедлива нерівність* (2.8).

Доведення теореми 2.5.2 аналогічне доведенню теореми 2.5.1 лише з врахуванням умови, що $I^0_{n,m}(\gamma)=I_{n,m}(\gamma)$ (оскільки області в теоремі 2.5.2 не фіксовані), де $I^0_{n,m}(\gamma)$ — максимум функціонала $I_{n,m}(\gamma)$.

**Зауваження 2.5.1.** *Якщо* $\gamma = nm$ *і* $\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m}|a_{k,p}| \leqslant 1$, *то за умов теореми 2.5.2 має місце нерівність*

$$r^{nm}\left(D_0,0\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(D_{k,p},a_{k,p}\right) \leqslant (nm)^{-\frac{nm}{2}}.$$

*У цьому випадку конфігурація областей і точок неістотна.*

Із теореми 2.5.2 одержуємо наступні твердження.

**Наслідок 2.5.1.** *Нехай* $n,m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0,nm]$. *Тоді для довільної фіксованої* $(n,m)$*-променевої системи точок* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *і довільного набору областей* $D_0$, $\{D_{k,p}\}$, $a_0 = 0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in D_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *де* $\{D_{k,p}\}$ *— система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю* $D_0 \in \Delta$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(D_0,0\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(D_{k,p},a_{k,p}\right) \leqslant (nm)^{-\frac{\gamma}{2}}\times$$

$$\times\left(2^{nm}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{m}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot L_R(A_{n,m})\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}}\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\right)^{\frac{2\gamma}{nm}}.$$

**Наслідок 2.5.2.** [30] *Нехай* $n,m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0,nm]$. *Тоді для довільної фіксованої* $(n,m)$*-променевої системи точок* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *і довільного набору областей* $D_0$, $\{D_{k,p}\}$, $a_0 = 0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in D_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *де* $\{D_{k,p}\}$ *— система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю* $D_0 \in \Delta$, *справедлива нерівність*

$$I_{n,m}(\gamma) \leqslant \frac{4^{nm-\gamma}\cdot\left(L_R(A_{n,m})\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}}}{nm^{nm-\frac{\gamma}{2}}}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\right)^{\frac{2\gamma}{nm}}.$$

**Наслідок 2.5.3.** [30] *Нехай* $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, nm]$. *Тоді для довільної фіксованої* $(n, m)$*-променевої системи точок* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *такої, що* $L_R(A_{n,m}) = 1$, *і довільного набору областей* $D_0$, $\{D_{k,p}\}$, $a_0 = 0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in D_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *де* $\{D_{k,p}\}$ *— система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю* $D_0 \in \Delta$, *справедлива нерівність*

$$I_{n,m}(\gamma) \leqslant 4^{nm-\gamma} \cdot nm^{\frac{\gamma}{2}-nm}.$$

Якщо $m = 1$, тоді з міркувань доведення теореми 2.5.1 слідує наступний результат для $n$-променевої системи точок.

**Наслідок 2.5.4.** [30] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, n]$. *Тоді для будь-якої фіксованої* $n$*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *й будь-якого набору областей* $D_k$, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, *де* $\{D_k\}_{k=1}^{n}$ *— система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю* $D_0 \in \Delta$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \left(\prod_{k=1}^{n} |a_k|\right)^{\frac{2\gamma}{n}}.$$

**Зауваження 2.5.3.** *Якщо* $\gamma = n$ *і* $\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant 1$, *то за умов наслідку 2.5.4 має місце нерівність*

$$r^{n}\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right) \leqslant n^{-\frac{n}{2}}.$$

*У цьому випадку конфігурація областей і точок неістотна.*

Із результату роботи [11, с. 204] одержуємо наступне твердження.

**Наслідок 2.5.5.** [30] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, n]$. *Тоді для будь-якої фіксованої* $n$*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, *такої,* *що* $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) = 1$, *і будь-якого набору областей* $D_k$, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, *де* $\{D_k\}_{k=1}^n$ *— система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю* $D_0 \in \Delta$, *справедлива нерівність*

$$r^\gamma (D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \leqslant 2^{n-\gamma} \cdot n^{-\frac{\gamma}{2}} \cdot \left( \prod_{k=1}^n \alpha_k \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Враховуючи, що $\prod\limits_{k=1}^n \alpha_k \leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^n$, тоді має місце наступний результат.

**Наслідок 2.5.6.** [30] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, n]$. *Тоді за всіх умов наслідку 2.5.5 справедлива нерівність*

$$r^\gamma (D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}} \left( \frac{4}{n} \right)^{n-\gamma}.$$

З міркувань доведення теореми 2.5.1 для випадку, коли точки $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, належать одиничному колу, маємо наступне твердження.

**Наслідок 2.5.7.** [30] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, n]$. *Тоді для будь-якої системи різних точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *одиничного кола й будь-якого набору областей* $D_k$, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, *де* $\{D_k\}_{k=1}^n$ *— система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю* $D_0 \in \Lambda$, *справедлива нерівність*

$$r^\gamma (D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}} \left( \prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

**Зауваження 2.5.4.** *Якщо* $\gamma = n$, *то за умов наслідку 2.5.7 має місце нерівність*

$$r^n (D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \leqslant n^{-\frac{n}{2}}.$$

# Висновки

В другому розділі дисертаційної роботи одержано ефективні оцінки зверху функціоналів першого та другого типів в задачах про екстремальне розбиття комплексної площини для довільних фіксованих $(n, m)$-променевих систем точок при всіх значеннях параметра $\gamma$, $\gamma \in (0, nm]$ (теорема 2.2.1, теорема 2.3.1).

Розглянуто дві відкриті екстремальні проблеми з вільними полюсами відповідних квадратичних диференціалів на комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}$. Одержано оцінки зверху функціоналів на будь-яких фіксованих $n$-променевих системах точок комплексної площини при всіх значеннях параметру $\gamma$, $\gamma \in (0, n]$ (теорема 2.4.1, теорема 2.4.2). Як наслідок, отримано відповідні результати для випадку, коли точки розміщені на одиничному колі (теорема 2.4.3) та за умови, що області $B_1, \ldots, B_n$ — симетричні відносно одиничного кола (теорема 2.4.4).

Використавши міркування при доведенні теореми 2.4.1 розглянуто узагальнену екстремальну задачу з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $D_0$, і встановлено оцінку зверху для її максимуму функціонала у випадку будь-якої фіксованої $(n, m)$-променевої системи різних точок комплексної площини (теорема 2.5.1) та для випадку будь-якої системи різних точок одиничного кола (наслідок 2.5.6).

Встановлено умови при яких в доведених результатах конфігурація областей і точок неістотна.

Зроблено порівняльний аналіз одержаних оцінок функціоналів та величин екстремалей, одержаних в роботах попередників.

Результати розділу опубліковано в роботах [27, 29, 30, 146, 163].

# РОЗДІЛ 3

# ОЦІНКИ ФУНКЦІОНАЛІВ ТРЕТЬОГО ТИПУ ДЛЯ $(N, M)$-ПРОМЕНЕВИХ СИСТЕМ ТОЧОК

Даний розділ присвячений отриманню ефективних оцінок зверху при всіх значеннях параметра $\gamma \in \mathbb{R}^+$ для функціонала

$$J_{n,m}(\gamma) = [r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p}, a_{k,p}),$$

де $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, — довільна фіксована $(n,m)$-променева система точок, $B_0$, $B_\infty$, $B_{k,p}$ — довільна система областей, що взаємно не перетинаються, таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$ при $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$.

У монографії [11, с. 146] для функціонала $J_{n,m}(\gamma)$ були отримані лише результати для $\gamma = 0$ та $\gamma = \frac{n^2}{4}$ і будь-яких $(n,m)$-рівнопроменевих систем точок (див. також теорему 1.5.4).

## 3.1. Оцінка функціонала третього типу для $(n, m)$-променевих систем точок при всіх можливих значеннях параметра $\gamma \in \mathbb{R}^+$

**Теорема 3.1.1.** [29, 30, 163, 164] *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Тоді для довільної фіксованої $(n,m)$-променевої системи точок $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, $B_0$, $B_\infty$, $\{B_{k,p}\}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$,*

$a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *справедлива нерівність*

$$[r\left(B_0,0\right) r\left(B_\infty,\infty\right)]^{\gamma} \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} (nm+1)^{-\gamma\frac{nm+1}{nm+2}} \left[\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\right]^{1-\frac{2\gamma}{nm+2}} \prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m} |a_{k,p}|^{\frac{2\gamma}{nm+2}}, \\ \text{якщо} \quad \gamma \in \left(0,\ \frac{nm+2}{2}\right]; \\ (nm+1)^{-\frac{nm+1}{2}} \prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m} |a_{k,p}|, \quad \text{якщо} \quad \gamma > \frac{nm+2}{2}. \end{cases}$$

**Доведення.** Нехай $d(E)$ — трансфінітний діаметр компактної множини $E \subset \mathbb{C}$. Тоді має місце співвідношення

$$r\left(B_0,0\right) = r\left(B_0^+,\infty\right) = \frac{1}{d(\overline{\mathbb{C}}\setminus B_0^+)} \leqslant \frac{1}{d\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n}\bigcup\limits_{p=1}^{m} \overline{B}_{k,p}^+ \cup \overline{B}_0^+\right)}, \tag{3.1}$$

де $B^+ = \left\{z : \frac{1}{z} \in B\right\}$. Згідно із теоремою Пойа [99, с. 28], справедлива нерівність

$$\mu E \leqslant \pi d^2(E),$$

де $\mu E$ — лебегова міра компактної множини $E$. Тоді із (3.1), одержуємо

$$r\left(B_0,0\right) \leqslant \left[\frac{1}{\pi}\mu\overline{B}_0^+ + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\mu\overline{B}_{k,p}^+\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.2}$$

Із теореми про мінімізацію площі [40, с. 34] слідує, що

$$\mu(B) \geqslant \pi r^2\left(B,a\right).$$

Тоді із нерівності (3.2), маємо

$$r\left(B_0,0\right) \leqslant \left[r^2\left(B_\infty,\infty\right) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} r^2\left(B_{k,p}^+,a_{k,p}^+\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Аналогічно, одержуємо наступну нерівність

$$r\left(B_{\infty},\infty\right)\leqslant\left[r^{2}\left(B_{0},0\right)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}r^{2}\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Далі, використовуючи інваріантність функції Гріна при конформному та однолистому відображенні, одержуємо співвідношення

$$r\left(B_{k,p}^{+},a_{k,p}^{+}\right)=\frac{r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^{2}}.$$

Звідси,

$$r\left(B_{0},0\right)\leqslant\left[r^{2}\left(B_{\infty},\infty\right)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\frac{r^{2}\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^{4}}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

$$r\left(B_{\infty},\infty\right)\leqslant\left[r^{2}\left(B_{0},0\right)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}r^{2}\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Із нерівності Коші аналогічно доведенню теореми 2.2.1, маємо

$$\left(r^{2}\left(B_{\infty},\infty\right)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\frac{r^{2}\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^{4}}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant$$

$$\geqslant(nm+1)^{\frac{1}{2}}\left[r\left(B_{\infty},\infty\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\frac{r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^{2}}\right]^{\frac{1}{nm+1}}.$$

Таким чином, з урахуванням вище наведених співвідношень

$$r\left(B_{0},0\right)\leqslant(nm+1)^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left[r\left(B_{\infty},\infty\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\right]^{-\frac{1}{nm+1}}\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|^{\frac{2}{nm+1}}.$$

Аналогічно,

$$r\left(B_{\infty},\infty\right)\leqslant(nm+1)^{-\frac{1}{2}}\left[r\left(B_{0},0\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\right]^{-\frac{1}{nm+1}}.$$

Далі, використовуючи нескладні перетворення, маємо

$$r\left(B_0,0\right) r\left(B_\infty,\infty\right) \leqslant$$

$$\leqslant (nm+1)^{-\frac{nm+1}{nm+2}}\left[\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\right]^{-\frac{2}{nm+2}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|^{\frac{2}{nm+2}}.$$

І, таким чином, отримуємо наступну нерівність

$$\left[r\left(B_0,0\right) r\left(B_\infty,\infty\right)\right]^{\gamma}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right) \leqslant$$

$$\leqslant (nm+1)^{-\gamma\frac{nm+1}{nm+2}}\left[\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\right]^{1-\frac{2\gamma}{nm+2}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|^{\frac{2\gamma}{nm+2}}.$$

Якщо $\gamma > \frac{nm+2}{2}$, тоді згідно з теоремою 2.3.1 (М.О. Лаврентьєва) [11],

$$r\left(B_0,0\right) r\left(B_\infty,\infty\right) \leqslant 1,$$

і

$$J_{n,m}(\gamma) \leqslant \frac{(nm+1)^{-\gamma\frac{nm+1}{nm+2}}}{\left[\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\right]^{\frac{2\gamma}{nm+2}-1}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|^{\frac{2\gamma}{nm+2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(nm+1)^{-\gamma\frac{nm+1}{nm+2}}}{\left(\left[r\left(B_0,0\right) r\left(B_\infty,\infty\right)\right]^{\gamma}\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\right)^{\frac{2\gamma}{nm+2}-1}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|^{\frac{2\gamma}{nm+2}}.$$

Звідси

$$\left(J_{n,m}(\gamma)\right)^{\frac{2\gamma}{nm+2}} \leqslant (nm+1)^{-\gamma\frac{nm+1}{nm+2}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|^{\frac{2\gamma}{nm+2}}.$$

Таким чином,

$$J_{n,m}(\gamma) \leqslant (nm+1)^{-\frac{nm+1}{2}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|.$$

Теорема 3.1.1 доведена.

**Зауваження 3.1.1.** *Якщо* $\gamma \geqslant \frac{1}{2}(nm+2)$ *і* $\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m}|a_{k,p}| \leqslant R$, *то за умов теореми 3.1.1 має місце наступне співвідношення*

$$[r(B_0,0)\,r(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p},a_{k,p}) \leqslant (nm+1)^{-\frac{nm+1}{2}} \cdot R.$$

**Зауваження 3.1.2.** *В теоремі 3.1.1 за умов* $\gamma \geqslant \frac{1}{2}(nm+2)$ *і* $\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m}|a_{k,p}| \leqslant R$ *конфігурація областей і точок неістотна.*

Використавши результат роботи [11, с. 95], із теореми 3.1.1 одержуємо наступне твердження.

**Наслідок 3.1.1.** [29, 30, 163, 164] *Нехай* $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. *Тоді для довільної фіксованої* $(n,m)$*-променевої системи точок* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *такої, що* $L_R(A_{n,m}) = 1$, *і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_\infty$, $\{B_{k,p}\}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *справедлива нерівність*

$$J_{n,m}(\gamma) \leqslant (nm+1)^{-\frac{nm+1}{2}}.$$

## 3.2. Застосування оцінок до відомих задач про екстремальне розбиття комплексної площини

Розглянемо наступну екстремальну задачу:

**Проблема 3.1.** При всіх значеннях параметра $\gamma \in \mathbb{R}^+$ показати, що максимум функціонала

$$J_n(\gamma) = [r(B_0,0)\,r(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k),$$

де $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ — $n$-променева система точок, $B_0$, $B_\infty$, $\{B_k\}_{k=1}^n$ — сукупність областей, що взаємно не перетинаються, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, досягається для деякої конфігурації з областей $B_k$, $B_\infty$ і точок $a_k$, $\infty$, $k = \overline{0,n}$, які володіють $n$-кратною симетрією.

1988 року В.М. Дубінін [56] уперше отримав оцінку для функціонала $J_n(\gamma)$ при $\gamma = \frac{1}{2}$ і $n \geqslant 2$ для систем неперетинних областей методом симетризації у випадку, коли точки лежать на одиничному колі. Г.В. Кузьміна за допомогою методу екстремальної метрики [87, с. 267] посилила результат роботи [56] і показала, що ця оцінка справедлива при $\gamma \in \left(0, \frac{n^2}{8}\right]$, $n \geqslant 2$ (для випадку неперетинних однозв'язних областей). Однак результат Г.В. Кузьміної [87, с. 267] для випадку $n = 2$ повністю співпадає з результатом роботи В.М. Дубініна [56], оскільки нескладно показати, що результат має місце при всіх $\gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Г.В. Кузьміна в роботі [87, с. 271] також зазначає, що верхню оцінку для параметра $\gamma$ можна покращити. Отже, остаточне питання про оцінку для $\gamma$ для функціонала $J_n(\gamma)$ залишається відкритим.

Використовуючи метод доведення теореми 3.1.1 ми можемо отримати оцінку максимума функціонала

$$J_n(\gamma) = \left[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)\right]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

для якого в статтях [11, 57, 87, 165], в часткових випадках, було доведено наступну нерівність

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{2\gamma}{n}}}{\left|1 - \frac{4\gamma}{n^2}\right|^{\frac{2\gamma}{n}+\frac{n}{2}}} \left|\frac{n - 2\sqrt{\gamma}}{n + 2\sqrt{\gamma}}\right|^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається тоді, коли точки $0$, $\infty$, $a_k$ і області $B_0$, $B_\infty$, $B_k$, $k = \overline{1,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (n^2 - 2\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

Має місце наступний результат.

**Теорема 3.2.1.** [29, 30, 163, 164] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. *Тоді для будь-якої фіксованої системи різних точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \overline{\mathbb{C}} \backslash \{0, \infty\}$ *і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_\infty$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, *справедлива нерівність*

$$[r\,(B_0, 0)\, r\,(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\,(B_k, a_k) \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} (n+1)^{-\gamma \frac{n+1}{n+2}} \left[\prod\limits_{k=1}^{n} r\,(B_k, a_k)\right]^{1-\frac{2\gamma}{n+2}} \prod\limits_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{2\gamma}{n+2}}, & \text{якщо} \quad \gamma \in \left(0, \frac{n+2}{2}\right]; \\ \\ (n+1)^{-\frac{n+1}{2}} \prod\limits_{k=1}^{n} |a_k|, & \text{якщо} \quad \gamma > \frac{n+2}{2}. \end{cases}$$

**Доведення.** Нехай $d(E)$ — трансфінітний діаметр компактної множини $E \subset \mathbb{C}$. Тоді має місце співвідношення

$$r\,(B_0, 0) = r\left(B_0^+, \infty\right) = \frac{1}{d\left(\overline{\mathbb{C}} \setminus B_0^+\right)} \leqslant \frac{1}{d\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n+1} \overline{B}_k^+\right)}, \tag{3.3}$$

де $B^+ = \left\{z : \frac{1}{z} \in B\right\}$. Використовуючи теорему Пойа [99, с. 28], справедлива нерівність

$$\mu E \leqslant \pi d^2(E),$$

де $\mu E$ — лебегова міра компактної множини $E$, маємо

$$d(E) \geqslant \left(\frac{1}{\pi}\mu E\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тоді із (3.3), одержуємо

$$r\left(B_0,0\right) \leqslant \frac{1}{d\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n+1}\overline{B}_k^+\right)} \leqslant \left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n+1}\mu\overline{B}_k^+\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.4}$$

Із теореми про мінімізацію площі [40, с. 34] слідує, що

$$\mu(B) \geqslant \pi r^2\left(B,a\right).$$

Із нерівності (3.4), маємо

$$r\left(B_0,0\right) \leqslant \left(r^2\left(B_\infty,\infty\right)+\sum_{k=1}^{n} r^2\left(B_k^+,a_k^+\right)\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Використавши співвідношення

$$r\left(B_k^+,a_k^+\right) = \frac{r\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^2}$$

приходимо до нерівності

$$r\left(B_0,0\right) \leqslant \left[r^2\left(B_\infty,\infty\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Аналогічно,

$$r\left(B_\infty,\infty\right) \leqslant \left[r^2\left(B_0,0\right)+\sum_{k=1}^{n} r^2\left(B_k,a_k\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Із нерівності Коші, одержуємо

$$\frac{1}{n+1}\left(r^2\left(B_0,0\right)+\sum_{k=1}^{n} r^2\left(B_k,a_k\right)\right) \geqslant \left[r^2\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r^2\left(B_k,a_k\right)\right]^{\frac{1}{n+1}}.$$

Тоді,

$$\left(r^2\left(B_0,0\right)+\sum_{k=1}^{n} r^2\left(B_k,a_k\right)\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant (n+1)^{\frac{1}{2}}\left[r\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right)\right]^{\frac{1}{n+1}}.$$

Аналогічно,

$$\left(r^2\left(B_\infty,\infty\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant$$

$$\geqslant (n+1)^{\frac{1}{2}}\left[r\left(B_\infty,\infty\right)\prod_{k=1}^{n}\frac{r\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^2}\right]^{\frac{1}{n+1}}.$$

Таким чином,

$$r\left(B_\infty,\infty\right)\leqslant\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}\left(r\left(B_0,0\right)\right)^{\frac{1}{n+1}}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right)\right)^{\frac{1}{n+1}}},$$

$$r\left(B_0,0\right)\leqslant\frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k|\right)^{\frac{2}{n+1}}}{(n+1)^{\frac{1}{2}}\left(r\left(B_\infty,\infty\right)\right)^{\frac{1}{n+1}}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right)\right)^{\frac{1}{n+1}}}.$$

Далі, одержуємо співвідношення

$$r\left(B_0,0\right)r\left(B_\infty,\infty\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k|\right)^{\frac{2}{n+1}}}{(n+1)\left(r\left(B_0,0\right)r\left(B_\infty,\infty\right)\right)^{\frac{1}{n+1}}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right)\right)^{\frac{2}{n+1}}},$$

$$\left(r\left(B_0,0\right)r\left(B_\infty,\infty\right)\right)^{1+\frac{1}{n+1}}\leqslant\frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k|\right)^{\frac{2}{n+1}}}{(n+1)\left(\prod\limits_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right)\right)^{\frac{2}{n+1}}},$$

$$r\left(B_0,0\right)r\left(B_\infty,\infty\right)\leqslant\frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k|\right)^{\frac{2}{n+2}}}{(n+1)^{\frac{n+1}{n+2}}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right)\right)^{\frac{2}{n+2}}},$$

з яких слідує нерівність

$$J_n(\gamma) \leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \left(\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k|\right)^{\frac{2}{n+2}}}{(n+1)^{\frac{n+1}{n+2}\gamma} \left(\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)\right)^{\frac{2\gamma}{n+2}}} =$$

$$= (n+1)^{-\frac{n+1}{n+2}\gamma} \left(\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)\right)^{1-\frac{2\gamma}{n+2}} \left(\prod_{k=1}^{n} |a_k|\right)^{\frac{2\gamma}{n+2}}.$$

У випадку $\gamma > \frac{n+2}{2}$ згідно з теоремою 2.3.1 (М.О. Лаврентьєва) [11], маємо

$$r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right) \leqslant 1,$$

тоді

$$J_n(\gamma) \leqslant \frac{(n+1)^{-\gamma\frac{n+1}{n+2}}}{\left[\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)\right]^{\frac{2\gamma}{n+2}-1}} \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{2\gamma}{n+2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(n+1)^{-\gamma\frac{n+1}{n+2}}}{\left(\left[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)\right]^{\gamma} \prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)\right)^{\frac{2\gamma}{n+2}-1}} \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{2\gamma}{n+2}}.$$

Звідси

$$\left(J_n(\gamma)\right)^{\frac{2\gamma}{n+2}} \leqslant (n+1)^{-\gamma\frac{n+1}{n+2}} \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{2\gamma}{n+2}}.$$

Таким чином,

$$J_n(\gamma) \leqslant (n+1)^{-\frac{n+1}{2}} \prod_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Теорема 3.2.1 доведена.

**Зауваження 3.2.1.** *Якщо* $\gamma \geqslant \frac{n+2}{2}$ *і* $\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant 1$*, то із теореми 3.2.1 одержуємо наступну нерівність*

$$\left[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)\right]^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant (n+1)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

**Зауваження 3.2.2.** *В теоремі 3.2.1 за умов* $\gamma \geqslant \frac{n+2}{2}$ *і* $\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant 1$ *конфігурація областей і точок неістотна.*

З теореми 3.2.1 слідують наступні твердження.

**Теорема 3.2.2.** [29, 30, 163, 164] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. *Тоді для будь-якої фіксованої* $n$*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n} \in \overline{\mathbb{C}} \backslash \{0, \infty\}$ *й будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_\infty$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, *справедлива нерівність*

$$J_n(\gamma) \leqslant \begin{cases} (n+1)^{-\gamma \frac{n+1}{n+2}} \left[ \prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \right]^{1-\frac{2\gamma}{n+2}} \prod\limits_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{2\gamma}{n+2}}, & \text{якщо } \gamma \in \left(0, \frac{n+2}{2}\right]; \\ \\ (n+1)^{-\frac{n+1}{2}} \prod\limits_{k=1}^{n} |a_k|, & \text{якщо } \gamma > \frac{n+2}{2}. \end{cases}$$

**Теорема 3.2.3.** [29, 30, 163, 164] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. *Тоді для будь-якої системи різних точок* $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ *одиничного кола і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_\infty$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, *справедлива нерівність*

$$J_n(\gamma) \leqslant \begin{cases} (n+1)^{-\gamma \frac{n+1}{n+2}} \left[ \prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \right]^{1-\frac{2\gamma}{n+2}}, & \text{якщо } \gamma \in \left(0, \frac{n+2}{2}\right]; \\ \\ (n+1)^{-\frac{n+1}{2}}, & \text{якщо } \gamma > \frac{n+2}{2}. \end{cases}$$

**Зауваження 3.2.3.** *Якщо* $\gamma \geqslant \frac{n+2}{2}$, *то за всіх умов теореми 3.2.3 має місце наступна нерівність*

$$\left[ r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right) \right]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant (n+1)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

**Наслідок 3.2.1.** *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma > \frac{n+2}{2}$, $R > 0$. *Тоді для будь-якої фіксованої* $n$*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, *такої, що* $|a_k| = R$, $k = \overline{1,n}$, *і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_\infty$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *справедлива нерівність*

$$[r\,(B_0,0)\,r\,(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\,(B_k,a_k) \leqslant (n+1)^{-\frac{n+1}{2}} \cdot R^n.$$

Застосовуючи загальну ідею П.М. Тамразова, запропоновану в роботі [117], до задач про неперетинні області, вперше в роботі Г.П. Бахтіної [31] були розглянуті задачі про екстремальне розбиття комплексної площини для симетричних відносно кола взаємно неперетинних областей. Зокрема, в цій роботі була поставлена наступна екстремальна задача: знайти максимум функціонала

$$\prod_{k=1}^{n} R(B_k,a_k)$$

при умові, що $B_1,\ldots,B_n$ — однозв'язні попарно неперетинні симетричні відносно одиничного кола області такі, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$. В роботі [31] було одержано наступну оцінку

$$\prod_{k=1}^{4} R(B_k,a_k) \leqslant 1,$$

причому рівність досягається у випадку, коли області $B_k$, $k = \overline{1,4}$, є круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{z^2}{(z^4-1)^2}\,dz^2.$$

В 1984 р. Г.П. Бахтіна у роботі [33] розглянула задачу про максимум функціонала

$$\prod_{k=0}^{n} R^{\alpha_k}(B_k,a_k),$$

де $\{B_k\}_{k=0}^n$ — довільна система однозв'язних взаємно неперетинних областей таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset U$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $\alpha_k \geqslant 0$, $k = \overline{0,n}$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, області $\{B_k\}_{k=1}^n$ — симетричні відносно одиничного кола і отримала деякі часткові результати даної задачі.

Із міркувань при доведенні теореми 3.2.1 при умові, що $B_0 \subset U$, ми отримуємо наступний результат, який дає оцінку зверху функціонала

$$r^{2\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

що розглядався в роботі Г.П. Бахтіної [33].

**Теорема 3.2.4.** [29, 30, 163, 164] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \geqslant \frac{n+2}{2}$ *і* $B_0 \subset U$. *Тоді для будь-якої системи різних точок* $\{a_k\}_{k=1}^n$ *одиничного кола й будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, *і, крім того, області* $B_k$, $k = \overline{1,n}$, — *симетричні відносно одиничного кола* $|a_k| = 1$, *справедлива нерівність*

$$r^{2\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant (n+1)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

**Наслідок 3.2.2.** *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma > \frac{n+2}{2}$, $R > 0$ *і* $B_0$ — *довільна область, що належить відкритому кругу* $|w| < R$. *Тоді для будь-якої* $n$*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, *такої, що* $|a_k| = R$, $k = \overline{1,n}$, *й будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, *і, крім того, області* $B_k$, $k = \overline{1,n}$, — *симетричні відносно кола* $|w| = R$, *справедлива нерівність*

$$r^{2\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant (n+1)^{-\frac{n+1}{2}} \cdot R^{2\gamma+n}.$$

# Висновки

У третьому розділі дисертаційної роботи одержано ефективну оцінку зверху функціонала третього типу в задачах про екстремальне розбиття комплексної площини для будь-яких фіксованих $(n, m)$-променевих систем точок при всіх можливих значеннях параметра $\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$ (теорема 3.1.1).

Як наслідок, із теореми 3.1.1 отримано оцінку зверху функціонала третього типу для будь-якої фіксованої системи різних точок комплексної площини при всіх значеннях параметра $\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$ (теорема 3.2.1). З теореми 3.2.1 слідують відповідні результати для $n$-променевих систем точок (теорема 3.2.2) та для будь-яких систем різних точок одиничного кола (теорема 3.2.3).

Із міркувань при доведенні теореми 3.2.1 за умови, що $B_0 \subset U$, ми отримали результат (теорема 3.2.4), який дає оцінку зверху функціонала, що містить області симетричні відносно одиничного кола, при всіх значеннях параметра $\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$.

Встановлено умови за яких в доведених результатах конфігурація областей і точок неістотна.

Результати розділу опубліковано в роботах [29, 30, 163, 164].

# РОЗДІЛ 4

# ЕКСТРЕМАЛЬНЕ РОЗБИТТЯ КОМПЛЕКСНОЇ ПЛОЩИНИ З ВІЛЬНИМИ ПОЛЮСАМИ НА ОДИНИЧНОМУ КОЛІ

Даний розділ присвячений дослідженню наступної екстремальної задачі про добуток внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються.

**Проблема 4.1.** (В.М. Дубінін [57, 165]) При всіх значеннях параметра $\gamma \in (0, n]$ показати, що максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

де $B_0$, $B_1$, $B_2, \ldots, B_n$, $n \geqslant 2$, — області, що взаємно не перетинаються, в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, досягається для конфігурації з областей $B_k$ і точок $a_k$, які володіють $n$-кратною симетрією.

## 4.1. Повний розв'язок проблеми В.М. Дубініна для $n = 2$

Покажемо, що функціонал

$$\frac{r^{\alpha}(B_0, a_0) \cdot r^{\beta}(B_1, a_1) \cdot r^{\gamma}(B_2, a_2)}{|a_0 - a_1|^{\alpha+\beta-\gamma} \cdot |a_0 - a_2|^{\alpha-\beta+\gamma} \cdot |a_1 - a_2|^{-\alpha+\beta+\gamma}},$$

де $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$, $\{B_k\}_{k=0}^{2}$ — довільна система взаємно неперетинних областей таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k \in \{0, 1, 2\}$, є інваріантом відносно всіх конформних автоморфізмів комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$.

Нехай

$$w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad |T| = ad - bc \neq 0$$

— дробово-лінійна функція, яка конформно відображає площину $\overline{\mathbb{C}}_z$ на $\overline{\mathbb{C}}_w$.

Використовуючи інваріантність функції Гріна при конформному та однолистому відображенні, маємо

$$g_{B_k}(z, a_k) = g_{B_k^+}(w^+, a_k^+), \quad w^+ = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Тоді

$$g_{B_k^+}(w^+, a_k^+) = g_{B_k^+}\left(\frac{az+b}{cz+d}, \frac{aa_k+b}{ca_k+d}\right) =$$

$$= \ln \frac{1}{\left|\dfrac{az+b}{cz+d} - \dfrac{aa_k+b}{ca_k+d}\right|} + \ln r(B_k^+, a_k^+) + o(1).$$

Використовуючи нескладні перетворення, отримуємо

$$g_{B_k^+}(w^+, a_k^+) =$$

$$= \ln \frac{1}{\left|\dfrac{(az+b)(ca_k+d) - (aa_k+b)(cz+d)}{(cz+d)(ca_k+d)}\right|} + \ln r(B_k^+, a_k^+) + o(1) =$$

$$= \ln \left|\frac{(cz+d)(ca_k+d)}{(az+b)(ca_k+d) - (aa_k+b)(cz+d)}\right| + \ln r(B_k^+, a_k^+) + o(1) =$$

$$= \ln \left|\frac{(c(a_k + (z-a_k)) + d)(ca_k+d)}{cba_k + azd - aa_kd - bcz}\right| + \ln r(B_k^+, a_k^+) + o(1) =$$

$$= \ln \left|\frac{(ca_k+d)^2 + (ca_k+d)(c(z-a_k))}{bc(a_k-z) + ad(z-a_k)}\right| + \ln r(B_k^+, a_k^+) + o(1) =$$

$$= \ln \frac{|ca_k + d|^2 |1 + (ca_k + d)^{-1}(c(z - a_k))|}{|z - a_k||ad - bc|} + \ln r(B_k^+, a_k^+) + o(1) =$$

$$= \ln \frac{|ca_k + d|^2}{|ad - bc||z - a_k|} + \ln \left| 1 + 2Re \frac{c(z - a_k)}{ca_k + d} + \dots \right| + \ln r(B_k^+, a_k^+) + o(1) =$$

$$= \ln \frac{1}{|z - a_k|} + \ln \frac{|ca_k + d|^2}{|ad - bc|} + \ln r(B_k^+, a_k^+) + o(1) =$$

$$= \ln \frac{1}{|z - a_k|} + \ln \frac{|ca_k + d|^2}{|ad - bc|} r(B_k^+, a_k^+) + o(1).$$

Звідси

$$\ln r(B_k, a_k) = \ln \frac{|ca_k + d|^2}{|ad - bc|} r(B_k^+, a_k^+).$$

І, таким чином,

$$r\left(B_k^+, a_k^+\right) = r(B_k, a_k) \cdot \frac{|ad - bc|}{(ca_k + d)^2}$$

Отже,

$$r^\alpha(B_0^+, a_0^+) r^\beta(B_1^+, a_1^+) r^\gamma(B_2^+, a_2^+) =$$

$$= r^\alpha(B_0, a_0) r^\beta(B_1, a_1) r^\gamma(B_2, a_2) \frac{|T|^{\alpha+\beta+\gamma}}{(ca_0 + d)^{2\alpha}(ca_1 + d)^{2\beta}(ca_2 + d)^{2\gamma}}.$$

Аналогічно, отримуємо

$$|T(a_0) - T(a_1)| = \left| \frac{aa_0 + b}{ca_0 + d} - \frac{aa_1 + b}{ca_1 + d} \right| = \frac{|T| \cdot |a_0 - a_1|}{(ca_0 + d)(ca_1 + d)},$$

$$|T(a_0) - T(a_2)| = \frac{|T| \cdot |a_0 - a_2|}{(ca_0 + d)(ca_2 + d)},$$

$$|T(a_1) - T(a_2)| = \frac{|T| \cdot |a_1 - a_2|}{(ca_1 + d)(ca_2 + d)}.$$

Звідси,

$$|T(a_0)-T(a_1)|^{\alpha+\beta-\gamma}|T(a_0)-T(a_2)|^{\alpha-\beta+\gamma}|T(a_1)-T(a_2)|^{-\alpha+\beta+\gamma}=$$

$$=\frac{|T|^{\alpha+\beta+\gamma}|a_0-a_1|^{\alpha+\beta-\gamma}|a_0-a_2|^{\alpha-\beta+\gamma}|a_1-a_2|^{-\alpha+\beta+\gamma}}{(ca_0+d)^{2\alpha}(ca_1+d)^{2\beta}(ca_2+d)^{2\gamma}}.$$

Остаточно, маємо

$$\frac{r^{\alpha}(B_0^+,a_0^+)r^{\beta}(B_1^+,a_1^+)r^{\gamma}(B_2^+,a_2^+)}{|T(a_0)-T(a_1)|^{\alpha+\beta-\gamma}|T(a_0)-T(a_2)|^{\alpha-\beta+\gamma}|T(a_1)-T(a_2)|^{-\alpha+\beta+\gamma}}=$$

$$=\frac{\dfrac{|T|^{\alpha+\beta+\gamma}r^{\alpha}(B_0,a_0)r^{\beta}(B_1,a_1)r^{\gamma}(B_2,a_2)}{(ca_0+d)^{2\alpha}(ca_1+d)^{2\beta}(ca_2+d)^{2\gamma}}}{\dfrac{|T|^{\alpha+\beta+\gamma}|a_0-a_1|^{\alpha+\beta-\gamma}|a_0-a_2|^{\alpha-\beta+\gamma}|a_1-a_2|^{-\alpha+\beta+\gamma}}{(ca_0+d)^{2\alpha}(ca_1+d)^{2\beta}(ca_2+d)^{2\gamma}}}=$$

$$=\frac{r^{\alpha}(B_0,a_0)r^{\beta}(B_1,a_1)r^{\gamma}(B_2,a_2)}{|a_0-a_1|^{\alpha+\beta-\gamma}|a_0-a_2|^{\alpha-\beta+\gamma}|a_1-a_2|^{-\alpha+\beta+\gamma}}.$$

В роботі [56] було отримано важливу оцінку добутку внутрішніх радіусів трьох неперетинних областей з фіксованими полюсами в точках $0$, $-i$, $i$. Справедливий наступний результат.

**Лема 4.1.1.** [56] *Для довільних попарно неперетинних областей* $B_0$, $B_1$, $B_2$ *таких, що* $0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $-i\in B_1\subset\overline{\mathbb{C}}$, $i\in B_2\subset\overline{\mathbb{C}}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\sigma^2}(B_0,0)r(B_1,-i)r(B_2,i)\leqslant$$

$$\leqslant 2^{\sigma^2+6}\sigma^{\sigma^2}(2-\sigma)^{-(2-\sigma)^2/2}(2+\sigma)^{-(2+\sigma)^2/2},\quad 0<\sigma\leqslant 2,$$

*знак рівності досягається тоді і тільки тоді, коли області* $B_0$, $B_1$, $B_2$, *є круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2=\frac{(4-\sigma^2)w^2-\sigma^2}{w^2(w^2+1)^2}\,dw^2. \tag{4.1}$$

З леми 4.1.1 слідують очевидні твердження.

**Наслідок 4.1.1.** *Для кругових областей квадратичного диференціала* (4.1) $D_0$, $D_1$, $D_2$ *таких, що* $\overline{D_0 \cup D_1 \cup D_2} = \overline{\mathbb{C}}$, *причому* $0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $-i \in D_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $i \in D_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, *справедлива рівність*

$$r^{\sigma^2}(D_0, 0) r(D_1, -i) r(D_2, i) =$$

$$= 2^{\sigma^2+6} \sigma^{\sigma^2} (2-\sigma)^{-(2-\sigma)^2/2} (2+\sigma)^{-(2+\sigma)^2/2}, \quad 0 < \sigma \leqslant 2.$$

**Наслідок 4.1.2.** *Для довільних попарно неперетинних областей* $B_0$, $B_1$, $B_2$ *таких, що* $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $-i \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $i \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\sigma^2}(B_0, 0) r(B_1, -i) r(B_2, i) \leqslant$$

$$\leqslant r^{\sigma^2}(D_0, 0) r(D_1, -i) r(D_2, i), \quad 0 < \sigma \leqslant 2,$$

*знак рівності досягається тоді і тільки тоді, коли заповнення областей* $B_0$, $B_1$, $B_2$ *співпадає з відповідними круговими областями* $D_0$, $D_1$, $D_2$ *і* $cap\left(\widetilde{B_k} \setminus B_k\right) = 0$ *при всіх* $k \in \{1, 2\}$.

Надалі при доведенні теорем в розділі 4 нам необхідна буде частина леми 4.1.1 у випадку, коли полюси квадратичного диференціалу розміщені в точках $0$, $-1$, $1$. В цьому випадку лема 4.1.1 набуде наступного вигляду.

**Лема 4.1.2.** *Для довільних попарно неперетинних областей* $B_0$, $B_1$, $B_2$ *таких, що* $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $-1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $1 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\sigma^2}(B_0, 0) r(B_1, -1) r(B_2, 1) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\sigma^2+6} \sigma^{\sigma^2} (2-\sigma)^{-(2-\sigma)^2/2} (2+\sigma)^{-(2+\sigma)^2/2}, \quad 0 < \sigma \leqslant 2,$$

*знак рівності досягається тоді і тільки тоді, коли області* $B_0$, $B_1$, $B_2$, *є круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-\sigma^2)w^2+\sigma^2}{w^2(w^2-1)^2}\,dw^2.$$

В роботах [11, 57, 76, 165] показано, що величина

$$I_n^0(\gamma) = r^\gamma\left(D_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, d_k\right),$$

де $d_k$, $D_k$, $k = \overline{0, n}$, $d_0 = 0$, є, відповідно, полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2, \tag{4.2}$$

має вигляд

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{4.3}$$

**Теорема 4.1.1.** [28] *Нехай* $\gamma \in (1, 2]$. *Тоді для довільних різних точок* $a_1$ *і* $a_2$ *одиничного кола і довільних областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_1$, $B_2$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, *справедлива нерівність*

$$r^\gamma\left(B_0, 0\right) r\left(B_1, a_1\right) r\left(B_2, a_2\right) \leqslant I_2^0(\gamma)\left(\frac{1}{2}\left|a_1-a_2\right|\right)^{2-\gamma}.$$

*Знак рівності в цій нерівності досягається, коли точки* $a_0$, $a_1$, $a_2$ *й області* $B_0$, $B_1$, $B_2$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-\gamma)w^2+\gamma}{w^2(w^2-1)^2}dw^2. \tag{4.4}$$

**Доведення.** Розглянемо функціонал

$$I_2(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0)r(B_1, a_1)r(B_2, a_2), \quad \gamma \in (1, 2],$$

де $B_0$, $B_1$, $B_2$ — області, що взаємно не перетинаються, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,2}$, $a_0 = 0$. В роботі [57] була повністю досліджена задача про максимум функціонала $I_2(\gamma)$ на трійках довільних областей, що попарно не перетинаються, $B_0$, $B_1$, $B_2$ розширеної комплексної площини таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{0,2}$, $a_0 = 0$, $a_k = (-1)^k i$ і отримано наступну нерівність

$$I_2(\sigma^2) \leqslant S(\sigma) = 2^{\sigma^2+6} \cdot \sigma^{\sigma^2} \cdot (2-\sigma)^{-\frac{1}{2}(2-\sigma)^2} \cdot (2+\sigma)^{-\frac{1}{2}(2+\sigma)^2},$$

$\sigma \in (0,2)$. Знак рівності в якій досягається, коли точки $0$, $-i$, $i$ і області $B_0$, $B_1$, $B_2$ є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(4-\sigma^2)w^2 - \sigma^2}{w^2(w^2+1)^2}dw^2.$$

Зауважимо, що функціонал $I_2(\sigma^2)$ при $\sigma > 2$ не обмежений.

Існує єдиний конформний автоморфізм комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$

$$\widetilde{w} = T(w),$$

який переводить три задані точки $a_0$, $a_1$, $a_2$ в точки $T(a_0) = 0$, $T(a_1) = 1$, $T(a_2) = -1$. Відомо [80], що функціонал

$$\frac{r^{\alpha}(B_0, a_0) \cdot r^{\beta}(B_1, a_1) \cdot r^{\gamma}(B_2, a_2)}{|a_0 - a_1|^{\alpha+\beta-\gamma} \cdot |a_0 - a_2|^{\alpha-\beta+\gamma} \cdot |a_1 - a_2|^{-\alpha+\beta+\gamma}},$$

де $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$, $\{B_k\}_{k=0}^{2}$ — довільна система областей, що взаємно не перетинаються, таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k \in \{0,1,2\}$, інваріантний відносно всіх конформних автоморфізмів комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$. Як показано вище, цей результат має місце і для довільних багатозв'язних областей.

Тоді в силу конформної інваріантності функціонала $I_2(\gamma)$, має місце рівність

$$\frac{r^{\gamma}(B_0, 0) r(B_1, a_1) r(B_2, a_2)}{|a_1|^{\gamma} \cdot |a_2|^{\gamma} \cdot |a_1 - a_2|^{2-\gamma}} = \frac{r^{\gamma}(\widetilde{B_0}, 0) r(\widetilde{B_1}, 1) r(\widetilde{B_2}, -1)}{2^{2-\gamma}},$$

де

$$\widetilde{I_2(\gamma)} = r^{\gamma}(\widetilde{B_0}, 0) r(\widetilde{B_1}, 1) r(\widetilde{B_2}, -1),$$

$$\widetilde{B_0} = T(B_0), \quad \widetilde{B_1} = T(B_1), \quad \widetilde{B_2} = T(B_2).$$

Звідси слідує, що

$$\frac{I_2(\gamma)}{|a_1 - a_2|^{2-\gamma}} = \frac{\widetilde{I_2(\gamma)}}{2^{2-\gamma}},$$

і, таким чином,

$$I_2(\gamma) = \widetilde{I_2(\gamma)} \left(\frac{1}{2}|a_1 - a_2|\right)^{2-\gamma}.$$

Використовуючи вище вказаний результат робіт [57, 165], приходимо до основної нерівності теореми 4.1.1

$$I_2(\gamma) \leqslant I_2^0(\gamma) \left(\frac{1}{2}|a_1 - a_2|\right)^{2-\gamma}.$$

Зокрема, якщо точки $a_1$ і $a_2$ розташовані не діаметрально, тоді остання нерівність строга. Якщо $\gamma = 2$, тоді $I_2(\gamma) \leqslant I_2^0(\gamma)$. Теорема 4.1.1 доведена.

**Зауваження 4.1.1.** *Із теореми 4.1.1 випливає повний розв'язок проблеми 4.1 для* $n = 2$.

## 4.2. Екстремальне розбиття для трьох областей комплексної площини

При $n = 2$ і $\gamma \in (0, 2]$ розглянемо більш загальну задачу про максимум функціонала $I_2(\gamma)$ для довільних фіксованих точок $a_1, a_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Використавши метод доведення теореми 4.1.1, отримуємо наступний результат.

**Теорема 4.2.1.** [28] *Нехай* $\gamma \in (0, 2]$. *Тоді для довільних різних точок* $A_2 = \{a_1, a_2\} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, *таких, що*

$$|a_1 a_2| \leqslant 1, \quad \left(\frac{1}{2}|a_1 - a_2|\right)^{2-\gamma} \leqslant 1,$$

*і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_1$, $B_2$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) r\left(B_1, a_1\right) r\left(B_2, a_2\right) \leqslant \frac{4\gamma^{\frac{\gamma}{2}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{4}\right)^{2+\frac{\gamma}{2}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{2}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

*Знак рівності в цій нерівності досягається, коли точки* $a_0$, $a_1$, $a_2$ *й області* $B_0$, $B_1$, $B_2$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-\gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2-1)^2} dw^2.$$

**Доведення.** Аналогічно міркуванням доведення теореми 4.1.1, одержуємо співвідношення

$$\frac{r^{\gamma}(B_0, 0) r(B_1, a_1) r(B_2, a_2)}{|a_1|^{\gamma} \cdot |a_2|^{\gamma} \cdot |a_1 - a_2|^{2-\gamma}} = \frac{r^{\gamma}(\widetilde{B_0}, 0) r(\widetilde{B_1}, 1) r(\widetilde{B_2}, -1)}{2^{2-\gamma}},$$

із якого слідує, що

$$r^{\gamma}(B_0, 0) r(B_1, a_1) r(B_2, a_2) \leqslant I_2^0(\gamma) |a_1 a_2|^{\gamma} \left(\frac{1}{2}|a_1 - a_2|\right)^{2-\gamma}.$$

Далі, враховуючи умови $|a_1 a_2| \leqslant 1$ і $\left(\frac{1}{2}|a_1 - a_2|\right)^{2-\gamma} \leqslant 1$, маємо основну нерівність теореми 4.2.1. Теорема 4.2.1 доведена.

**Наслідок 4.2.1.** [28] *Нехай* $n = 2$, $\gamma = 2$. *Тоді для довільних різних точок* $A_2 = \{a_1, a_2\} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, *таких, що*

$$|a_1 a_2| \leqslant 1,$$

*і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_1$, $B_2$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) r\left(B_1, a_1\right) r\left(B_2, a_2\right) \leqslant 64 \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}\right)^{2\sqrt{2}}.$$

*Знак рівності в цій нерівності досягається, коли точки* $a_0$, $a_1$, $a_2$ *й області* $B_0$, $B_1$, $B_2$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-\gamma)w^2+\gamma}{w^2(w^2-1)^2}dw^2.$$

Із теореми 4.2.1 для довільної 2-променевої системи різних точок мають місце наступні твердження.

**Наслідок 4.2.2.** [28] *Нехай* $n=2$, $\gamma \in (0, 2]$. *Тоді для довільної* 2*-променевої системи різних точок* $A_2 = \{a_1, a_2\} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, *такої, що*

$$|a_1 a_2| \leqslant 1, \quad \left(\frac{1}{2}|a_1 - a_2|\right)^{2-\gamma} \leqslant 1,$$

*і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_1$, $B_2$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) r\left(B_1, a_1\right) r\left(B_2, a_2\right) \leqslant \frac{4\gamma^{\frac{\gamma}{2}}}{\left(1-\frac{\gamma}{4}\right)^{2+\frac{\gamma}{2}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{2}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{2}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

*Знак рівності в цій нерівності досягається, коли точки* $a_0$, $a_1$, $a_2$ *і області* $B_0$, $B_1$, $B_2$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-\gamma)w^2+\gamma}{w^2(w^2-1)^2}dw^2.$$

**Наслідок 4.2.3.** [28] *Нехай* $n=2$, $\gamma = 2$. *Тоді для довільної* 2*-променевої системи різних точок* $A_2 = \{a_1, a_2\} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, *такої, що*

$$|a_1 a_2| \leqslant 1,$$

*і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_1$, $B_2$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) r\left(B_1, a_1\right) r\left(B_2, a_2\right) \leqslant 64 \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^{2\sqrt{2}}.$$

*Знак рівності в цій нерівності досягається, коли точки* $a_0$, $a_1$, $a_2$ *і області* $B_0$, $B_1$, $B_2$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-\gamma)w^2+\gamma}{w^2(w^2-1)^2}dw^2.$$

## 4.3. Екстремальне розбиття комплексної площини для $n$ областей на одиничному колі

Використавши результат теореми 4.1.1 можна отримати наступну оцінку зверху максимума функціонала $I_n(\gamma)$ на одиничному колі в проблемі 4.1.

**Теорема 4.3.1.** [28] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $\gamma \in (1, n]$. *Тоді для будь-якої системи різних точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *одиничного кола і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{n-\gamma}\left(I_2^0\left(\frac{2\gamma}{n}\right)\right)^{\frac{n}{2}}.$$

**Доведення.** Має місце співвідношення

$$(I_n(\gamma))^2 = \left(r^{\frac{2\gamma}{n}}(B_0,0)\right)^n \prod_{k=1}^{n} r^2(B_k, a_k).$$

Останній вираз можна записати наступним чином

$$\left(r^{\frac{2\gamma}{n}}(B_0,0)\right)^n \prod_{k=1}^{n} r^2(B_k, a_k) = \left[r^{\frac{2\gamma}{n}}(B_0,0)\, r(B_1,a_1)\, r(B_2,a_2)\right] \times$$

$$\times \left[r^{\frac{2\gamma}{n}}(B_0,0)\, r(B_2,a_2)\, r(B_3,a_3)\right] \cdot \ldots \cdot \left[r^{\frac{2\gamma}{n}}(B_0,0)\, r(B_n,a_n)\, r(B_1,a_1)\right].$$

Далі, аналогічно теоремі 4.1.1 для кожного множника

$$r^{\frac{2\gamma}{n}}(B_0,0)\, r(B_k,a_k)\, r(B_{k+1},a_{k+1}), \quad k=\overline{1,n}, \quad a_{n+1} := a_1,$$

будується свій конформний автоморфізм комплексної площини, тоді має місце нерівність

$$r^{\frac{2\gamma}{n}}\left(B_0,0\right)r\left(B_k,a_k\right)r\left(B_{k+1},a_{k+1}\right)\leqslant I_2^0\left(\frac{2\gamma}{n}\right)\left(\frac{1}{2}|a_k-a_{k+1}|\right)^{2-\frac{2\gamma}{n}}.$$

І, таким чином, маємо співвідношення

$$I_n(\gamma)\leqslant\left(I_2^0\left(\frac{2\gamma}{n}\right)\right)^{\frac{n}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2}|a_k-a_{k+1}|\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Максимум добутку $\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k-a_{k+1}|$ досягається у випадку, коли точки $a_k$, $k=\overline{1,n}$, $a_{n+1}:=a_1$, лежать на одиничному колі і утворюють правильний многокутник. Оскільки сторона правильного $n$-кутника через радіус $R$ описаного кола дорівнює $2R\sin\frac{\pi}{n}$, то ми приходимо до основної нерівності теореми 4.3.1

$$I_n(\gamma)\leqslant\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{n-\gamma}\left(I_2^0\left(\frac{2\gamma}{n}\right)\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Теорема 4.3.1 доведена.

## 4.4. Екстремальне розбиття комплексної площини для $n$-променевої системи точок

**Теорема 4.4.1.** [28] *Нехай $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$, $\gamma\in(0,n]$. Тоді для довільної фіксованої $n$-променевої системи точок $A_n=\{a_k\}_{k=1}^{n}\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, $B_0$, $B_k$, $a_0=0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, справедлива нерівність*

$$I_n(\gamma)\leqslant\left(I_2^0\left(\frac{2\gamma}{n}\right)\right)^{\frac{n}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n}|a_ka_{k+1}|\right)^{\frac{\gamma}{n}}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2}|a_k-a_{k+1}|\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

**Доведення.** Має місце співвідношення

$$\left(r^{\frac{2\gamma}{n}}\left(B_0,0\right)\right)^{n}\prod_{k=1}^{n}r^2\left(B_k,a_k\right)=\left[r^{\frac{2\gamma}{n}}\left(B_0,0\right)r\left(B_1,a_1\right)r\left(B_2,a_2\right)\right]\times$$

$$\times\left[r^{\frac{2\gamma}{n}}\left(B_0,0\right)r\left(B_2,a_2\right)r\left(B_3,a_3\right)\right]\cdot\ldots\cdot\left[r^{\frac{2\gamma}{n}}\left(B_0,0\right)r\left(B_n,a_n\right)r\left(B_1,a_1\right)\right].$$

Відомо [80], що існує єдиний конформний автоморфізм комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$

$$\widetilde{w}=T_k(w),$$

який переводить три задані точки $a_0$, $a_k$, $a_{k+1}$ в точки $T(a_0)=0$, $T(a_k)=1$, $T(a_{k+1})=-1$. Тоді для кожного множника

$$r^{\frac{2\gamma}{n}}\left(B_0,0\right)r\left(B_k,a_k\right)r\left(B_{k+1},a_{k+1}\right),\quad k=\overline{1,n},\quad a_{n+1}:=a_1,$$

має місце рівність

$$\frac{r^{\frac{2\gamma}{n}}(B_0,0)r(B_k,a_k)r(B_{k+1},a_{k+1})}{|a_k|^{\frac{2\gamma}{n}}\cdot|a_{k+1}|^{\frac{2\gamma}{n}}\cdot|a_k-a_{k+1}|^{2-\frac{2\gamma}{n}}}=\frac{r^{\frac{2\gamma}{n}}(\widetilde{B_0},0)r(\widetilde{B_k},1)r(\widetilde{B_{k+1}},-1)}{2^{2-\frac{2\gamma}{n}}},$$

де

$$\widetilde{I_2^{(k)}\left(\frac{2\gamma}{n}\right)}=r^{\frac{2\gamma}{n}}(\widetilde{B_0},0)r(\widetilde{B_k},1)r(\widetilde{B_{k+1}},-1),$$

$$\widetilde{B_0}=T_k(B_0),\quad \widetilde{B_k}=T_k(B_k),\quad \widetilde{B_{k+1}}=T_k(B_{k+1}),$$

із якої слідує, що

$$r^{\frac{2\gamma}{n}}(B_0,0)r(B_k,a_k)r(B_{k+1},a_{k+1})=$$

$$=\widetilde{I_2^{(k)}\left(\frac{2\gamma}{n}\right)}|a_ka_{k+1}|^{\frac{2\gamma}{n}}\left(\frac{1}{2}|a_k-a_{k+1}|\right)^{2-\frac{2\gamma}{n}}.$$

Далі, з огляду на результат роботи [57] для трьох довільних областей, що попарно не перетинаються, остаточно отримуємо співвідношення

$$I_n(\gamma)\leqslant\left(I_2^0\left(\frac{2\gamma}{n}\right)\right)^{\frac{n}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n}|a_ka_{k+1}|\right)^{\frac{\gamma}{n}}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2}|a_k-a_{k+1}|\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Теорема 4.4.1 доведена.

**Наслідок 4.4.1.** [28] *Нехай* $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$, $\gamma\in(0,n]$. *Тоді для довільної фіксованої* $n$*-променевої системи точок* $A_n=\{a_k\}_{k=1}^{n}\in$

$\mathbb{C}\backslash\{0\}$, *такої, що*

$$\left(\prod_{k=1}^{n}|a_k a_{k+1}|\right)^{\frac{\gamma}{n}}\leqslant 1,\quad \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2}|a_k-a_{k+1}|\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}\leqslant 1,$$

*і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_k$, $a_0=0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\leqslant\left(I_2^0\left(\frac{2\gamma}{n}\right)\right)^{\frac{n}{2}}.$$

## 4.5. Розв'язки проблеми 4.1 при додаткових обмеженнях

**Лема 4.5.1.** *Має місце наступна рівність*

$$I_n^0(\gamma)=\left(\frac{4}{n}\right)^n\cdot\frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\cdot\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{4.5}$$

**Доведення.** Із результатів робіт [11, 56, 57, 76] та властивостей розділяючого перетворення, маємо

$$I_n(\gamma)\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left[\prod_{k=1}^{n}2^{\tau_k^2+6}\cdot\tau_k^{\tau_k^2}\cdot(2-\tau_k)^{-\frac{1}{2}(2-\tau_k)^2}\cdot(2+\tau_k)^{-\frac{1}{2}(2+\tau_k)^2}\right]^{1/2},$$

де $\tau_k=\alpha_k\sqrt{\gamma}$, $k=\overline{1,n}$. Звідси, при умові $\alpha_k=\frac{2}{n}$, $k=\overline{1,n}$, отримуємо

$$I_n^0(\gamma)=r^{\gamma}\left(D_0,0\right)\prod_{k=1}^{n}r\left(D_k,d_k\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{n}\right)^n\left(\frac{2^{\frac{4\gamma}{n^2}+6}\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{4\gamma}{n^2}}}{\left(2-\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2-\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}\left(2+\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2+\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}}\right)^{\frac{n}{2}},$$

де $d_k$, $D_k$, $k=\overline{0,n}$, $d_0=0$, — полюси та кругові області квадратичного диференціала (4.2). Використовуючи нескладні перетворення, одержуємо

$$A=\left(2-\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2-\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}=2^{2\left(1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}\left(1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{2\left(1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2},$$

$$B=\left(2+\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2+\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}=2^{2\left(1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}\left(1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{2\left(1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}.$$

$$M=\left(1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{2\left(1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}=\left(1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{2-\frac{4\sqrt{\gamma}}{n}+\frac{2\gamma}{n^2}},$$

$$N=\left(1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{2\left(1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}=\left(1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{2+\frac{4\sqrt{\gamma}}{n}+\frac{2\gamma}{n^2}},$$

Таким чином, маємо

$$MN=\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{2\left(1+\frac{\gamma}{n^2}\right)}\left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{\frac{4\sqrt{\gamma}}{n}},$$

і, в результаті,

$$AB=2^{4\left(1+\frac{\gamma}{n^2}\right)}MN=2^{4\left(1+\frac{\gamma}{n^2}\right)}\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{2\left(1+\frac{\gamma}{n^2}\right)}\left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{\frac{4\sqrt{\gamma}}{n}}.$$

Тоді

$$I_n^0(\gamma)=\left(\frac{2}{n}\right)^n\left(\frac{2^{\frac{4\gamma}{n^2}+6}\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{4\gamma}{n^2}}}{2^{\frac{4\gamma}{n^2}+4}\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{\left(2+\frac{2\gamma}{n^2}\right)}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{\frac{4\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{\frac{n}{2}}=$$

$$=\left(\frac{2}{n}\right)^n\frac{2^{\left(\frac{4\gamma}{n^2}+2\right)\frac{n}{2}}\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{2\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}=$$

$$=\left(\frac{2}{n}\right)^n\frac{2^n\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{2\gamma}{n}}2^{\frac{2\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}=$$

$$= \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{2\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} =$$

$$= \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Отже, остаточно приходимо до виразу (4.5).

Вперше значення для $I_n^0(\gamma)$ отримано в статті [56] при $\gamma = 1$, для довільного $\gamma$ — в роботі [76]. Форма виразу $I_n^0(\gamma)$, яка використовується в даній роботі, запропонована в монографії [11]. Лема 4.5.1 доведена.

**Теорема 4.5.1.** [28] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (1, n]$ *і*

$$K(n,\gamma) = \left[I_n^0(\gamma)\cdot\mu_n(\gamma)\right]^{\frac{1}{\gamma}},$$

*де* $I_n^0(\gamma)$ *визначається співвідношенням* (4.3), *а*

$$\mu_n(\gamma) = \left[\frac{4^n}{(n-1)^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}\right]^{-1}.$$

*Тоді для будь-якої системи різних точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *одиничного кола і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *таких, що*

$$r(B_0, 0) \leqslant K(n,\gamma),$$

*справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_0,0)\prod_{k=1}^n r(B_k,a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{4.6}$$

*Знак рівності в цій нерівності досягається тоді, коли* $a_k$ *і* $B_k$, $k = \overline{0,n}$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

**Доведення.** Розглянемо величину

$$\Lambda_n(\gamma) := \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} = \frac{r^\gamma\left(B_0,0\right)\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right)}{r^\gamma\left(D_0,0\right)\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(D_k,d_k\right)},$$

де $d_k$, $D_k$, $k=\overline{0,n}$, $d_0=0$, є, відповідно, полюси та кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Із умов теореми 4.5.1 слідує, що

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant \frac{(K(n,\gamma))^\gamma \cdot \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)}{\left(\frac{4}{n}\right)^n \left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}.$$

Згідно методу роботи [11, с. 255], має місце нерівність

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant$$

$$\leqslant 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \leqslant 2^n \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant \frac{4^n}{\sqrt{\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)},$$

де $\alpha_0 := \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \alpha_k$, $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$. Тоді виконується співвідношення

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant \frac{(K(n,\gamma))^\gamma \cdot \frac{4^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}}{\left(\frac{4}{n}\right)^n \left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}.$$

Звідси, враховуючи умови теореми 4.5.1, одержуємо

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant 1.$$

Таким чином, при умові $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, справедлива нерівність

$$I_n(\gamma) \leqslant I_n^0(\gamma)$$

і в цьому випадку теорема 4.5.1 доведена. Для випадку $\alpha_0\sqrt{\gamma} < 2$ результат теореми 4.5.1 слідує із робіт [76, 139] (див. також теорему 1.5.8). Твердження про знак рівності перевіряється безпосередньо. Теорема 4.5.1 доведена.

Якщо $\gamma = n$, то із теореми 4.5.1, слідує наступний результат.

**Наслідок 4.5.1.** [28] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma = n$ *і*

$$r(B_0, 0) \leqslant n^{\frac{1}{2n}-1}\left(1-n^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{n-1}{n}}(n-1)^{\frac{n-1}{n}}\times$$

$$\times\left(\frac{4}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{n}-1}\left(\frac{1-n^{-\frac{1}{2}}}{1+n^{-\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{n}}}.$$

*Тоді для будь-якої системи різних точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *одиничного кола і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, *справедлива нерівність* (4.6). *Знак рівності в якому досягається за умов теореми 4.5.1.*

Теорема 4.5.1 доповнює і посилює результат роботи [21].

**Наслідок 4.5.2.** [21] *Нехай* $B_0$, $B_1$, $B_2, \ldots, B_n$, $(n \geqslant 2)$ *— області, що попарно не перетинаються, в* $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_1 = 1$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, *і*

$$r(B_0, 0) \leqslant 1.$$

*Тоді для довільного натурального* $n$, $n \geqslant 76$ *і* $\gamma \in (1, n]$, *справедлива нерівність* (4.6). *Знак рівності в якій досягається за умов теореми 4.5.1.*

**Теорема 4.5.2.** [28, 235] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_n = \sqrt{n}$. *Тоді для будь-якої системи різних точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *одиничного кола і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant r^{\gamma}\left(D_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, d_k\right),$$

*де* $d_k$, $D_k$, $k=\overline{0,n}$, $d_0=0$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала* (4.2).

**Доведення.** Розглянемо спочатку випадок, якщо

$$\alpha_0\sqrt{\gamma}\geqslant 2, \quad \alpha_0:=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\alpha_k.$$

Аналогічно міркуванням при доведенні теореми 4.5.1 розглянемо величину

$$\Lambda_n(\gamma):=\frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)}=\frac{r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod\limits_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right)}{r^{\gamma}\left(D_0,0\right)\prod\limits_{k=1}^{n}r\left(D_k,d_k\right)},$$

де $d_k$, $D_k$, $k=\overline{0,n}$, $d_0=0$, є, відповідно, полюси та кругові області квадратичного диференціала (4.2). Як показано в роботі [146] (див. також теорему 2.4.3) при умовах теореми 4.5.2 виконується нерівність

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right)\leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Тоді, маємо наступне співвідношення

$$\Lambda_n(\gamma)\leqslant\frac{n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{4^n}{(n-1)^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}.$$

Таким чином, аналогічно роботам [11, 142, 143], одержуємо

$$\Lambda_n(\gamma)\leqslant\prod_{k=1}^{6}f_k(n),$$

де

$$f_1(n)=n^{-\frac{\gamma}{2}}\cdot\left[\frac{n}{4}\right]^{\gamma+1}\cdot\left[1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right]^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}, \quad f_2(n)=\left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}},$$

$$f_3(n)=\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}},\quad f_4(n)=\left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}},$$

$$f_5(n)=\left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}},\quad f_6(n)=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}.$$

Нехай спочатку $\gamma_n=n^{0,5}$, тоді

$$\Lambda_n\left(n^{0,5}\right)=\prod_{k=1}^{6}f_k(n),$$

де

$$f_1(n)=(n)^{-\frac{n^{0,5}}{2}}\left[\frac{n}{4}\right]^{n^{0,5}+1}\left[1-\frac{1}{n^{0,25}}\right]^{n-1-\frac{n-1}{n^{0,5}}},\ f_2(n)=\left(n^{0,5}\right)^{n^{-0,5}},$$

$$f_3(n)=\left(1-n^{-1,5}\right)^{n+n^{-0,5}},\quad f_4(n)=\left(\frac{1+n^{-0,75}}{1-n^{-0,75}}\right)^{2n^{0,25}},$$

$$f_5(n)=\left(\frac{4}{n^{0,25}}\right)^{1-n^{-0,5}},\quad f_6(n)=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\frac{n-1}{n^{0,5}}}.$$

Далі, за стандартною схемою досліджуємо кожну функцію $f_k(n)$, $k=\overline{1,6}$, останнього співвідношення. Даний аналіз показує, що функція $f_1(n)$ монотонно спадає на проміжку $n\geqslant 7$ (див. Рис. 4.2), тому справедлива нерівність

$$f_1(n)<f_1(7)\leqslant 0,016666,\quad n\geqslant 7.$$

Функція $f_2(n)$ також монотонно спадає на проміжку $n\geqslant 7$ (див. Рис. 4.3). Таким чином,

$$f_2(n)<f_2(7)\leqslant 1,444469,\quad n\geqslant 7.$$

Очевидно (див. Рис. 4.4), що

$$f_3(n)<f_3(7)\leqslant 1,\quad n\geqslant 7.$$

Функцію $f_4(n)$ представимо наступним чином

$$f_4(n)=\left(1+n^{-0,75}\right)^{n^{0,75}n^{-0,75}2n^{0,25}}\left(1-n^{-0,75}\right)^{(-n^{0,75})(n^{-0,75})2n^{0,25}}.$$

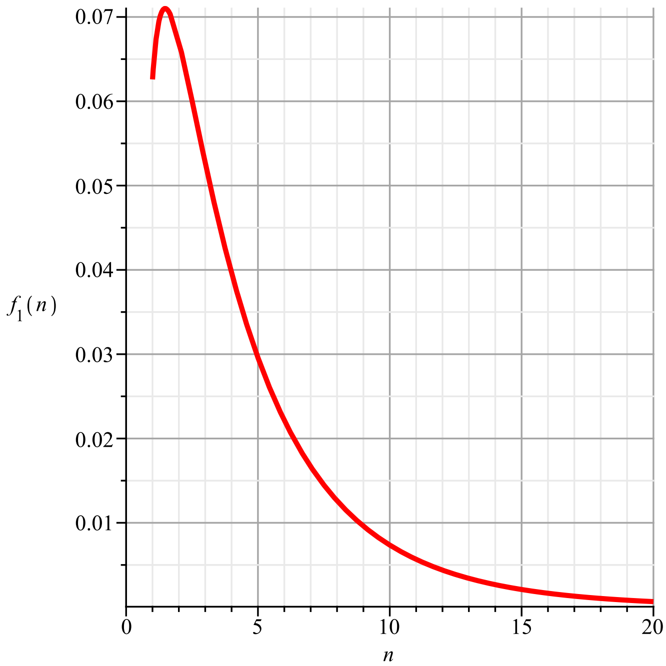


Рис. 4.2: Графік функції $f_1(n)$

Оскільки $\left(1+n^{-0,75}\right)^{n^{0,75}} < e$ при $n \in \mathbb{N}$, а $\left(1-n^{-0,75}\right)^{-n^{0,75}} < 3$ при $n \geqslant 10$, тоді

$$f_4(n) \leqslant (3e)^{2n^{-0,5}}.$$

Таким чином, $y_4(n)$ спадає на всій області визначення (див. Рис. 4.5) і

$$f_4(n) < f_4(10) \leqslant 4,886133, \quad n \geqslant 10.$$

Функція $f_5(n)$ спадає на проміжку $n \geqslant 8$ (див. Рис. 4.6), звідси

$$f_5(n) < f_5(8) \leqslant 1,750853, \quad n \geqslant 8.$$

Для функції $f_6(n)$ (див. Рис. 4.7) справедливе наступне співвідношення

$$f_6(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\frac{n-1}{n^{0,5}}} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant 3, \quad n \geqslant 7.$$

Тоді врахувавши все вище сказане, маємо

$$\Lambda_n\left(n^{0,5}\right) = \prod_{k=1}^{6} f_k(n) \leqslant$$

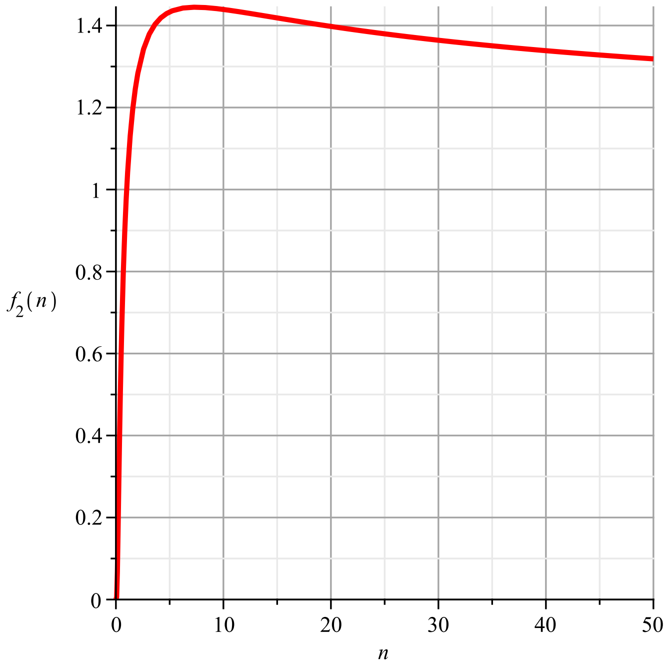


Рис. 4.3: Графік функції $f_2(n)$

$$\leqslant 0,016666 \cdot 1,444469 \cdot 1 \cdot 4,886133 \cdot 1,750853 \cdot 3 \approx 0,617839 < 1,$$

тобто

$$\Lambda_n\left(n^{0,5}\right) < 1 \quad \text{для } n \geqslant 10.$$

З іншої сторони, безпосередні обчислення показують, що $\Lambda_n\left(n^{0,5}\right) < 1$ для $n \in [3,9]$ (див. таблицю нижче).

| $n$ | $f_1(n)$ | $f_2(n)$ | $f_3(n)$ | $f_4(n)$ | $f_5(n)$ | $f_6(n)$ | $\Lambda_n\left(n^{0,5}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0,052699 | 1,373197 | 0,465492 | 11,910563 | 1,599730 | 1,408801 | 0,904224 |
| 4 | 0,039628 | 1,414213 | 0,548322 | 8,086547 | 1,681792 | 1,539600 | 0,643422 |
| 5 | 0,029590 | 1,433159 | 0,600258 | 6,329659 | 1,722722 | 1,637880 | 0,454626 |
| 6 | 0,022149 | 1,441582 | 0,636628 | 5,320779 | 1,742416 | 1,715055 | 0,323209 |
| 7 | 0,016666 | 1,444469 | 0,663961 | 4,664524 | 1,750178 | 1,777704 | 0,231974 |
| 8 | 0,012616 | 1,444259 | 0,685515 | 4,202238 | 1,750853 | 1,829872 | 0,168163 |
| 9 | 0,009607 | 1,442249 | 0,703109 | 3,858081 | 1,747161 | 1,874189 | 0,123077 |

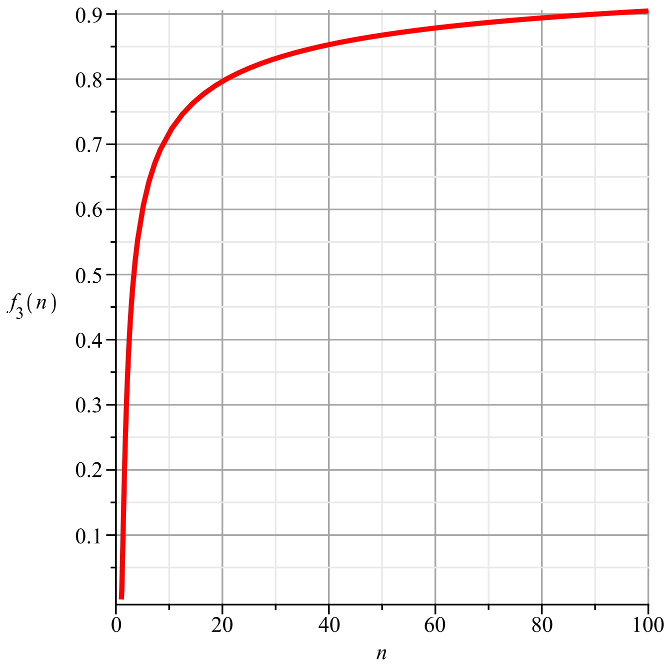


Рис. 4.4: Графік функції $f_3(n)$

Таким чином,

$$\Lambda_n\left(n^{0,5}\right) < 1 \quad \text{при всіх} \quad n \geqslant 3.$$

Нехай $\gamma \in (1, \gamma_n]$. Покажемо, що при кожному $n \geqslant 3$, функція

$$\mu_n(\gamma) = n^{-\frac{\gamma}{2}} \left[\frac{4^n}{\sqrt{\gamma}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

монотонно зростає по $\gamma$ на проміжку $\gamma \in (1, \gamma_n]$.

Справедливі співвідношення

$$\ln(\mu_n(\gamma)) = -\frac{\gamma}{2}\ln n +$$

$$+\left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)\left[n\ln 4 - \frac{1}{2}\ln\gamma + (n-1)\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) - (n-1)\ln(n-1)\right],$$

$$[\ln(\mu_n(\gamma))]'_\gamma = -\frac{\ln n}{2} - \ln 4 + \frac{1}{2n}\ln\gamma - \frac{n-1}{n}\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) +$$

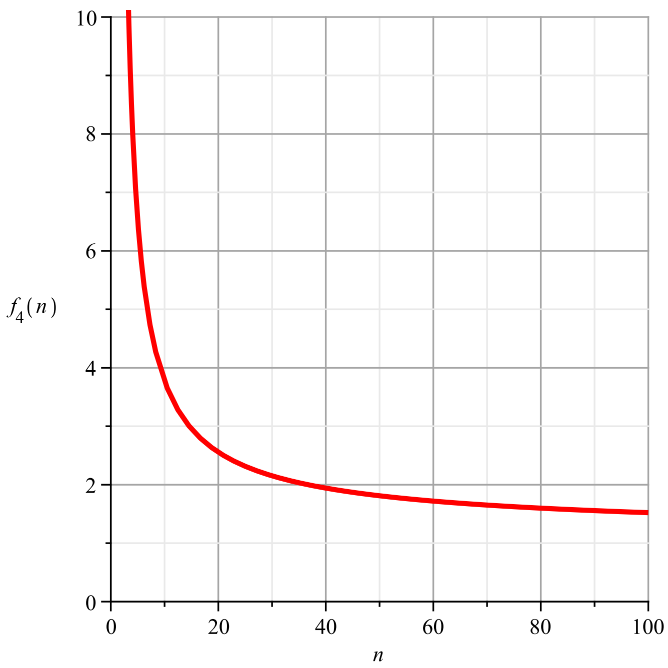


Рис. 4.5: Графік функції $f_4(n)$

$$+\frac{n-1}{n}\ln(n-1)+\left(1-\frac{\gamma}{n}\right)\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{n-1}{\sqrt{\gamma}-1}-1\right).$$

Врахуємо, що

$$0<-\frac{\ln 3}{2}+\ln\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{2}{3}\ln 2<-\frac{\ln n}{2}+\ln\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{n-1}{n}\ln(n-1),$$

і

$$-\frac{n-1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)\geqslant 0,$$

$$\left(1-\frac{\gamma}{n}\right)\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{n-1}{\sqrt{\gamma}-1}-1\right)\geqslant 0,$$

$$\frac{1}{2n}\ln\gamma\geqslant 0.$$

Отже, $\mu_n(\gamma)$ монотонно зростає при вказаних параметрах $n$, $\gamma$.

Далі, доведемо, що при кожному фіксованому $n\geqslant 3$, функціонал $I_n^0(\gamma)$ монотонно спадає по $\gamma$ на проміжку $\gamma\in(1,\gamma_n]$. Враховуючи, що

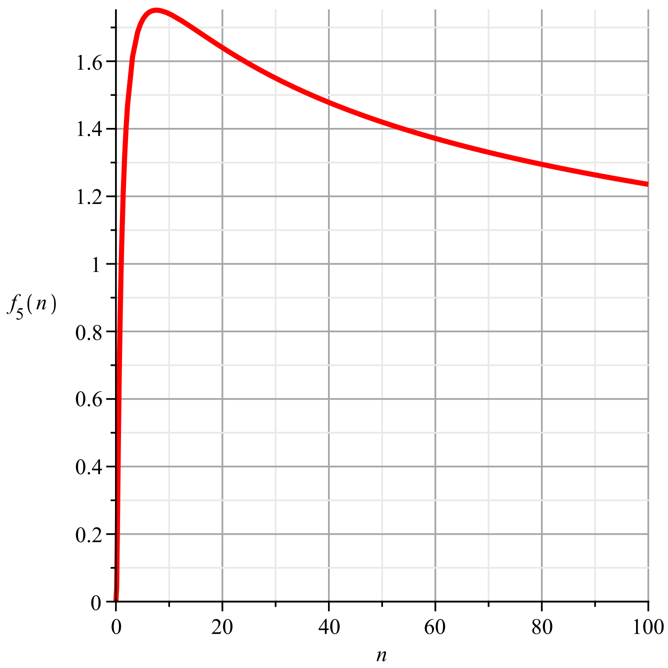


Рис. 4.6: Графік функції $f_5(n)$

величина $I_n^0(\gamma)$ задовільняє наступну рівність

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{n-\sqrt{\gamma}}{n+\sqrt{\gamma}}\right)^{2\sqrt{\gamma}},$$

маємо

$$\ln I_n^0(\gamma) = n\ln\frac{4}{n} + \frac{\gamma}{n}\ln\frac{4\gamma}{n^2} - \left(n+\frac{\gamma}{n}\right)\ln\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right) + 2\sqrt{\gamma}\ln\left(\frac{n-\sqrt{\gamma}}{n+\sqrt{\gamma}}\right),$$

тоді

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]'_\gamma = \frac{1}{n}\ln\frac{4\gamma}{n^2-\gamma} + \frac{1}{4\sqrt{\gamma}}\ln\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right).$$

Позначимо $\frac{\sqrt{\gamma}}{n} = x$, тоді $\gamma = n^2x^2$, $\sqrt{\gamma} = nx$ і $\frac{1}{n} < x \leqslant n^{-0{,}75}$. В результаті перетворень, одержуємо

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]'_\gamma = \frac{2}{n}\ln 2x - \frac{1}{n}\ln(1-x^2) + \frac{1}{4nx}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

І враховуючи, що

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots,$$

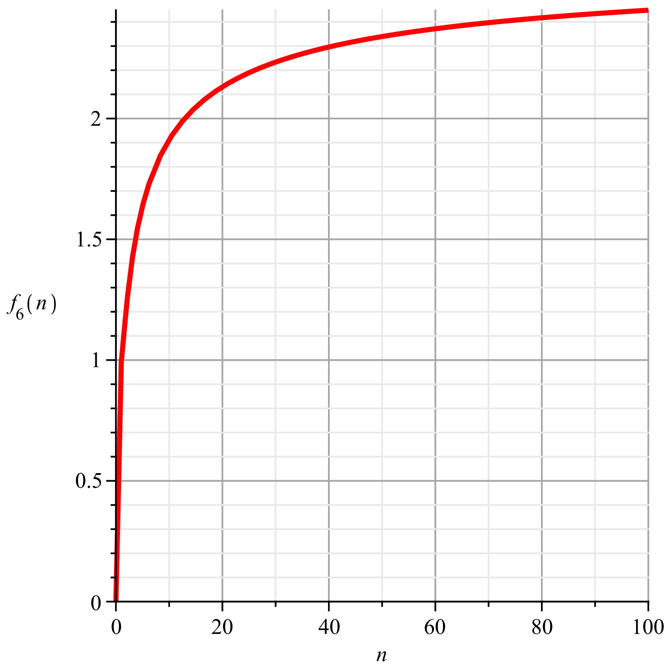


Рис. 4.7: Графік функції $f_6(n)$

$$\ln\frac{1-x}{1+x} = -2x\left(1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4+\ldots+\frac{1}{2k+1}x^{2k}+\ldots\right),$$

маємо

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]'_\gamma = \frac{2}{n}\ln 2x + \frac{1}{n}\left(x^2+\frac{x^4}{2}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n}+\ldots\right)-$$

$$-\frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4+\ldots+\frac{x^{2k}}{2k+1}+\ldots\right).$$

Отже,

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]'_\gamma = \frac{2}{n}\ln 2x - \frac{1}{2n}+$$

$$+\frac{x^2}{n}\left(1-\frac{1}{6}\right)+\frac{x^4}{n}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right)+\ldots+\frac{x^{2n}}{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{4n+2}\right)+\ldots.$$

Далі, враховуючи, що $\frac{1}{n}-\frac{1}{4n+2}\leqslant\frac{1}{2}$,

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]'_\gamma \leqslant \frac{2}{n}\ln 2x - \frac{1}{2n}+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^4+\ldots+\frac{1}{2}x^{2k}+\ldots\right)=$$

$$= -\frac{1}{2n} + \frac{2}{n}\ln x + \frac{1}{2n}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right).$$

Функція $\dfrac{x^2}{1-x^2}$ монотонно зростає на проміжку $[0,1)$ для $\frac{1}{n} < x \leqslant n^{-0,75}$, тоді справедливі нерівності

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]'_\gamma \leqslant -\frac{1}{2n} + \frac{2}{n}\ln x + \frac{1}{2n}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2n}\left(1 - 4\ln x - \frac{x^2}{1-x^2}\right) < -\frac{1}{2n}\left(1 - 4\ln(n^{-1}) - \frac{n^{-1,5}}{1-n^{-1,5}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{1}{2n}\left(1 + 4\ln n - \frac{1}{n^{1,5}}\frac{1}{1-\frac{1}{n^{1,5}}}\right) \leqslant -\frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1,03}{n^{1,5}} + 4\ln n\right) < 0,$$

оскільки при $n \geqslant 3$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{n^{1,5}}} < 1,03.$$

Очевидно, що

$$1 - \frac{1,03}{n^{1,5}} + 4\ln n > 0 \quad \text{при всіх} \quad n \geqslant 3.$$

Таким чином, $I_n^0(\gamma)$ монотонно спадає при всіх $\gamma$ з проміжку $(1,\gamma_n\,]$.

Функція

$$n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{4^n}{(n-1)^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

при кожному фіксованому $n$ монотонно зростає по $\gamma$ на інтервалі $(1,\gamma_n\,]$, а функція $I_n^0(\gamma)$ монотонно спадає по $\gamma$ на цьому ж інтервалі, оскільки

$$(\ln I_n^0(\gamma))' = \left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{4\gamma}{n^2-\gamma}\right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\ln\left(\frac{n-\sqrt{\gamma}}{n+\sqrt{\gamma}}\right)\right) < 0$$

при кожному фіксованому $n$. Отже,

$$\Lambda_n(\gamma) = \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} < \frac{I_n(\gamma_n)}{I_n^0(\gamma_n)} = \Lambda_n(\gamma_n) < 1,$$

тобто $I_n(\gamma_n) < I_n^0(\gamma_n)$ при всіх значеннях $\gamma_n$, вказаних в теоремі 4.5.2. А це означає, що у випадку $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geqslant 2$ при даних значеннях параметрів екстремальних конфігурацій не має.

Далі, нехай $\alpha_0\sqrt{\gamma} < 2$. Тоді розглянемо систему функцій $\zeta = \pi_k(w) = -i\left(e^{-i\theta_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1,n}$. Вибираючи відповідну вітку багатозначної аналітичної функції $\pi_k(w)$, $k = \overline{1,n}$ отримаємо, що функція $\pi_k(w)$ однолисто і конформно відображає кут

$$P_k := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$$

на праву півплощину при кожному $k = \overline{1,n}$. Сімейство функцій $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^n$ називається допустимим для розділяючого перетворення областей $B_k$, $k = \overline{0,n}$, відносно кутів $\{P_k\}_{k=1}^n$.

Нехай $L_k^{(1)}$, $k = \overline{1,n}$, позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_k \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_k)$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Позначимо через $L_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, таку область площини $\mathbb{C}_\zeta$, яка отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_{k+1} \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_{k+1})$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Відзначимо, що $B_{n+1} := B_1$, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Крім того, позначимо через $L_k^{(0)}$ таку область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_0 \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\zeta = 0$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Позначимо $\pi_k(a_k) := l_k^{(1)} = -i$, $\pi_k(a_{k+1}) := l_k^{(2)} = i$, $k = \overline{1,n}$, $\pi_n(a_{n+1}) := l_n^{(2)} = i$.

З визначення функцій $\pi_k$, випливає, що

$$|\pi_k(w) - l_k^{(1)}| \sim \frac{1}{\alpha_k} \cdot |w - a_k|, \quad w \to a_k, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w) - l_k^{(2)}| \sim \frac{1}{\alpha_k} \cdot |w - a_{k+1}|, \quad w \to a_{k+1}, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{P_k}.$$

В околі точки $w = a_k$ величину $w$ можемо записати у вигляді

$$w = a_k + (w - a_k).$$

Тоді має місце такий розклад у ряд:

$$-i\left(e^{-i\arg a_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}} = -i\left(e^{-i\arg a_k}(a_k + (w - a_k))\right)^{\frac{1}{\alpha_k}} =$$

$$= -i\left(e^{-i\arg a_k} a_k \left(1 + \frac{1}{a_k}(w - a_k)\right)\right)^{\frac{1}{\alpha_k}} =$$

$$= -i\left(|a_k|\left(1 + \frac{1}{a_k}(w - a_k)\right)\right)^{\frac{1}{\alpha_k}} =$$

$$= -i|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}\left(1 + \frac{1}{a_k}(w - a_k)\right)^{\frac{1}{\alpha_k}} = -i|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}\left(1 + \frac{1}{\alpha_k}\frac{1}{a_k}(w - a_k) + o(1)\right) =$$

$$= -i|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} - i\frac{1}{\alpha_k}\frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{a_k}(w - a_k) + o(1).$$

Звідси отримуємо асимптотичну рівність

$$|\pi_k(w) - l_k^{(1)}| = \frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot (w - a_k)(1 + o(1)),$$

де

$$\frac{o(1)}{|w - a_k|} \to 0, \quad w \to a_k.$$

Це рівносильно шуканому співвідношенню еквівалентності, оскільки за умовою теореми $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$. Два інших співвідношення одержуємо аналогічно.

Використовуючи формули (1.2) і (1.3), а також теорему 4.10 [165], приходимо до висновку, що

$$r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left[\alpha_k\, r\left(L_k^{(1)}, -i\right) \cdot \alpha_{k-1}\, r\left(L_{k-1}^{(2)}, i\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = \overline{1, n}, \tag{4.7}$$

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2}\left(L_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.8}$$

Приймаючи до уваги нерівності (4.7) і (4.8), маємо співвідношення

$$I_n(\gamma) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left[ r\left(L_k^{(0)}, 0\right) \right]^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}} \prod_{k=1}^{n} \left[ \alpha_{k-1} \cdot \alpha_k \cdot r\left(L_{k-1}^{(2)}, i\right) r\left(L_k^{(1)}, -i\right) \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \left[ \prod_{k=1}^{n} r^{\gamma\alpha_k^2}\left(L_k^{(0)}, 0\right) r\left(L_k^{(1)}, -i\right) r\left(L_k^{(2)}, i\right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Використовуючи результат роботи [57] для трьох довільних областей, що попарно не перетинаються, маємо нерівність

$$r^{\gamma\alpha_k^2}\left(L_k^{(0)}, 0\right) r\left(L_k^{(1)}, -i\right) r\left(L_k^{(2)}, i\right) \leqslant$$

$$\leqslant r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)}, 0\right) r\left(D_k^{(1)}, -i\right) r\left(D_k^{(2)}, i\right), \tag{4.9}$$

де $D_k^{(0)},\ D_k^{(1)},\ D_k^{(2)}$ — кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(4-\alpha_k^2\gamma)w^2 - \alpha_k^2\gamma}{w^2(w^2+1)^2}\, dw^2,$$

які утворюють систему трьох попарно неперетинних областей таких, що $0 \in D_k^{(0)},\ -i \in D_k^{(1)},\ i \in D_k^{(2)}$.

Для правої частини нерівності (4.9) маємо рівність

$$r^{\gamma\alpha_k^2}(D_0, 0)\, r(D_1, -i)\, r(D_2, i) =$$

$$= S(\sigma) = 2^{\sigma^2+6} \cdot \sigma^{\sigma^2} \cdot (2-\sigma)^{-\frac{1}{2}(2-\sigma)^2} \cdot (2+\sigma)^{-\frac{1}{2}(2+\sigma)^2}, \quad \sigma \in [0, 2],$$

де $D_0, D_1, D_2$ — довільна трійка попарно неперетинних областей така, що $0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}},\ -i \in D_1 \subset \overline{\mathbb{C}},\ i \in D_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$.

Отже, з усього вище наведеного випливає наступна нерівність

$$I_n(\gamma) \leqslant \left( \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right) \left[ \prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)}, 0\right) r\left(D_k^{(1)}, -i\right) r\left(D_k^{(2)}, i\right) \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left( \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right) \left[ \prod_{k=1}^{n} S\left(\alpha_k\sqrt{\gamma}\right) \right]^{1/2} = \gamma^{-n/2} \left[ \prod_{k=1}^{n} P\left(\alpha_k\sqrt{\gamma}\right) \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{4.10}$$

де $P(x) = 2^{x^2+6} \cdot x^{x^2+2} \cdot (2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2} \cdot (2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2}, \quad x \in [0,2]$. Таким чином, оцінка функціонала $I_n(\gamma)$ зведена до оцінки функції багатьох змінних, яка залежить тільки від аргументів точок $a_k$.

Розглянемо допоміжну екстремальну задачу:

$$\prod_{k=1}^{n} P(x_k) \longrightarrow \max; \quad \sum_{k=1}^{n} x_k = 2\sqrt{\gamma},$$

$$x_k = \alpha_k\sqrt{\gamma}, \quad 0 < x_k \leqslant 2.$$

Нехай $F(x) = \ln(P(x))$ і $X^{(0)} = \left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ буде довільна екстремальна точка вище вказаної задачі. Використовуючи метод роботи [76], приходимо до висновку, що справедливе наступне твердження: якщо $0 < x_k^{(0)} < x_j^{(0)} < 2$, $k \neq j$, то

$$F'\left(x_k^{(0)}\right) = F'\left(x_j^{(0)}\right),$$

і якщо деяке $x_j^{(0)} = 2$, то для довільного $x_k^{(0)} < 2$, справедлива нерівність

$$F'\left(x_k^{(0)}\right) \leqslant F'\left(x_j^{(0)}\right) = F'(2) = 1,$$

де $k, j = \overline{1, n}$, $k \neq j$, $F'(x) = 2x\ln 2x + (2-x)\ln(2-x) - (2+x)\ln(2+x) + \frac{2}{x}$ (див. Рис. 4.8).

Далі для доведення теореми залишилось показати, що виконується умова

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}.$$

Нехай $F'(x) = t$, $y_0 \leqslant t \leqslant 1$, $y_0 \approx -0,17$. Розглянемо наступні величини $t$: $t_1 = 1$, $t_2 = 0,95$, $t_3 = 0,9$, $t_4 = 0,85$, $\ldots$, $t_{23} = -0,15$, $t_{24} = -0,17$. Знайдемо корені рівняння $F'(x) = t_k$, $k = \overline{1, 24}$. Оскільки $\forall t_k \in [y_0, 1)$, то звідси слідує, що рівняння має два корені $x_1(t) \in (0, x_0]$, $x_2(t) \in (x_0, 2]$, $x_0 \approx 1,324683$. Всі обчислення представлені в таблиці нижче.

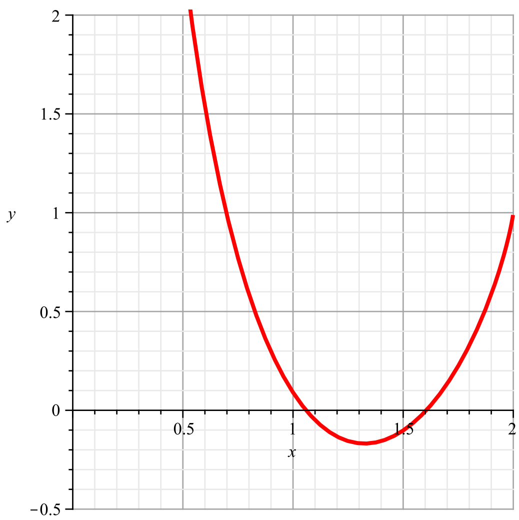


Рис. 4.8: Графік функції $y = F'(x)$

| $k$ | $t_k$ | $x_1(t_k)$ | $x_2(t_k)$ | $2x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$ | $3x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$ | $4x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,00 | 0,697331 | 2,000000 | | | |
| 2 | 0,95 | 0,708144 | 1,992640 | 3,387302 | 4,084633 | 4,781964 |
| 3 | 0,90 | 0,719344 | 1,983233 | 3,399522 | 4,107666 | 4,815810 |
| 4 | 0,85 | 0,730957 | 1,972549 | 3,411237 | 4,130581 | 4,849925 |
| 5 | 0,80 | 0,743014 | 1,960786 | 3,422699 | 4,153657 | 4,884614 |
| 6 | 0,75 | 0,755550 | 1,948028 | 3,434057 | 4,177071 | 4,920085 |
| 7 | 0,70 | 0,768602 | 1,934315 | 3,445414 | 4,200964 | 4,956513 |
| 8 | 0,65 | 0,782217 | 1,919654 | 3,456859 | 4,225462 | 4,994064 |
| 9 | 0,60 | 0,796446 | 1,904035 | 3,468470 | 4,250687 | 5,032904 |
| 10 | 0,55 | 0,811347 | 1,887429 | 3,480320 | 4,276766 | 5,073211 |
| 11 | 0,50 | 0,826991 | 1,869791 | 3,492485 | 4,303831 | 5,115178 |
| 12 | 0,45 | 0,843462 | 1,851059 | 3,505041 | 4,332032 | 5,159023 |
| 13 | 0,40 | 0,860858 | 1,831149 | 3,518072 | 4,361534 | 5,204996 |
| 14 | 0,35 | 0,879304 | 1,809955 | 3,531672 | 4,392531 | 5,253389 |
| 15 | 0,30 | 0,898950 | 1,787338 | 3,545945 | 4,425249 | 5,304553 |
| 16 | 0,25 | 0,919989 | 1,763115 | 3,561014 | 4,459964 | 5,358914 |
| 17 | 0,20 | 0,942675 | 1,737044 | 3,577023 | 4,497012 | 5,417001 |
| 18 | 0,15 | 0,967348 | 1,708794 | 3,594144 | 4,536819 | 5,479494 |
| 19 | 0,10 | 0,994487 | 1,677892 | 3,612588 | 4,579935 | 5,547283 |
| 20 | 0,00 | 1,059462 | 1,604865 | 3,593838 | 4,588325 | 5,582811 |
| 21 | -0,05 | 1,100561 | 1,559491 | 3,678415 | 4,737878 | 5,797340 |
| 22 | -0,10 | 1,152868 | 1,502748 | 3,703870 | 4,804430 | 5,904991 |
| 23 | -0,15 | 1,234855 | 1,416172 | 3,721907 | 4,874775 | 6,027642 |
| 24 | -0,17 | 1,324683 | 1,324683 | 3,794393 | 5,029248 | 6,264103 |

Із таблиці випливає, що на інтервалі $t \in [0,95;1]$ досягається мінімальне значення величин $(n-1)x_1(t_1)+x_2(t_2)$, $n \in \{3,4,5\}$, яке, відповідно, дорівнює $3,3873$, $4,0846$ і $4,7819$. Для $n=3$ маємо, що

$$\sum_{k=1}^{3} x_k > 2x_1(t_1)+x_2(t_2) = 3,3873 = 2\sqrt{\gamma_3}.$$

Звідси маємо, що $\gamma_3 = 2,8684$. Тоді для $n=4$ маємо, що

$$\sum_{k=1}^{4} x_k > 3x_1(t_1)+x_2(t_2) = 4,0846 = 2\sqrt{\gamma_4}.$$

Звідси маємо, що $\gamma_4 = 4,1709$. Аналогічно, для $n=5$ маємо, що

$$\sum_{k=1}^{5} x_k > 4x_1(t_1)+x_2(t_2) = 4,7819 = 2\sqrt{\gamma_5}.$$

Таким чином, $\gamma_5 = 5,7116$.

Використовуючи вище наведену таблицю маємо, що відповідний мінімум величин

$$(n-1)x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$$

при $n \in \{6,7,8\}$, дорівнює, відповідно, $\gamma_6 = 7,505$, $\gamma_7 = 9,5369$, $\gamma_8 = 11,8119$.

Із таблиці отримуємо, що для функції $F'(x)$ справедлива нерівність $(x_1 - 0,69)\,n + (x_2 - x_1) > 0$. Отже, $nx_1 + (x_2 - x_1) > 0,69\,n$. І, остаточно, маємо

$$(n-1)x_1 + x_2 > 0,69n = 2\sqrt{\gamma_n}, \quad \gamma_n = 0,1215\,n^2, \quad n \geqslant 9.$$

Таким чином, з вище наведених нерівностей випливає, що для довільного фіксованого $\gamma \in (1,\gamma_n]$, де $\gamma_n$ задано в умовах теореми, виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^{(0)}(t) > 2\sqrt{\gamma_n}, \quad n \geqslant 3.$$

З іншого боку, необхідною умовою є рівність

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^{(0)}(t) = 2\sqrt{\gamma_n}, \quad n \geqslant 3.$$

З цього випливає, що всі точки $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ належать проміжку $(0,\, x_0]$. Тобто, ми маємо, що для екстремального набору $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ виконується рівність $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$, $k = \overline{1, n}$, для всіх $\gamma \in (1, \gamma_n]$ та $n \geqslant 3$. Отже, підсумовуючи всі міркування маємо, що справедлива нерівність

$$I_n(\gamma) \leqslant \gamma^{-n/2} \left[\prod_{k=1}^{n} P\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

З іншого боку,

$$\gamma^{-n/2} \left[\prod_{k=1}^{n} P\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = r^{\gamma}\left(D_0^{(0)}, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right),$$

де $a_k^{(0)}$ і $D_k^{(0)}$, $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

Відомо (див. [11]), що

$$r^{\gamma}\left(D_0^{(0)}, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right) = \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Твердження про знак рівності перевіряється безпосередньо. Теорема 4.5.2 доведена.

**Лема 4.5.2.** *При умовах теореми 4.5.2 і при умові* $\alpha_k = \frac{2\pi}{n}$, $k = \overline{1, n}$, *екстремальні конфігурації існують при кожному фіксованому* $\gamma$, $\gamma \in (1, n^2]$.

**Доведення.** Позначимо через $\mathfrak{D}$ множину всіх систем областей $\{D_k\}_{k=0}^{n}$, що взаємно не перетинаються, відносно деякої системи різних точок одиничного кола $\{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$. З нерівності (4.10), отриманої при доведенні теореми 4.5.2, випливає, що функціонал $I_n(\gamma)$ обмежений при всіх $\gamma$, $\gamma \in (1, n^2]$ на класі $\mathfrak{D}$. Тоді існує величина

$$\sup I_n(\gamma) = I_n^{(0)}(\gamma) < +\infty,$$

де супремум береться по всьому класу $\mathfrak{D}$ при кожному фіксованому $n \geqslant 2$ і $\gamma \in (1, n^2]$. Отже, існує послідовність $I_n^{(p)}(\gamma) \nearrow I_n^{(0)}(\gamma)$, $p \to \infty$.

Тоді існує послідовність систем областей $\left\{D_k^{(p)}\right\}_{k=0}^n \in \mathfrak{D}$, що взаємно не перетинаються, відносно, відповідно, різних точок одиничного кола $\left|a_k^{(p)}\right| = 1$, $k = \overline{1,n}$.

Переходячи скінченне число разів до підпослідовностей вище вказаних послідовностей, приходимо до висновку, що

$$\left|a_k^{(p)}\right| \to \left|a_k^{(0)}\right|, \quad k = \overline{1,n}.$$

З відомої теореми Каратеодорі про збіжність областей до ядра випливає, що при кожному $k$, $D_k^{(p)} \to D_k^{(0)} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, де $D_k^{(0)}$ є ядром послідовності $D_k^{(p)}$, причому $a_k^{(0)} \in D_k^{(0)}$.

Очевидно, що система областей $\left\{D_k^{(0)}\right\}_{k=0}^n$ є системою областей, що взаємно не перетинаються, відносно системи точок $\left\{a_k^{(0)}\right\}_{k=0}^n$, тобто $D_k^{(0)} \in \mathfrak{D}$ і

$$I_n^{(p)}(\gamma) = r^\gamma\left(D_0^{(p)}, 0\right) \prod_{k=1}^n r\left(D_k^{(p)}, a_k^{(p)}\right) \to I_n^{(0)}(\gamma).$$

Отже, система областей $D_k^{(0)}$ і точок $a_k^{(0)}$ є екстремальною конфігурацією даної задачі. Лема 4.5.2 доведена.

# Висновки

У четвертому розділі дисертаційної роботи розглядається відома відкрита проблема про максимум наступного функціонала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

де $B_0, \ldots, B_n$, $n \geqslant 2$, — області, що взаємно не перетинаються, в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$ і $\gamma \in (0, n]$. При всіх значеннях параметра $\gamma \in (0, n]$ потрібно показати, що максимум даного функціонала досягається для конфігурації з областей $B_k$ і точок $a_k$, $k = \overline{0,n}$, які володіють $n$-кратною симетрією. При $\gamma = 1$ проблему довів В.М. Дубінін [57, 165], для $0 < \gamma < 1$ — Г.В. Кузьміна [89]. Л.В. Ковальов [76] отримав її розв'язок для $n \geqslant 5$ при додатковому обмеженні, що кути між сусідніми відрізками $[0, a_k]$ не перевищують $2\pi/\sqrt{\gamma}$.

В даному розділі одержано розв'язок цієї проблеми при $n = 2$ і $\gamma \in (1, 2]$ (теорема 4.1.1). Також при $n = 2$ і $\gamma \in (0, 2]$ розглянуто загальнішу задачу про максимум функціонала $I_2(\gamma)$ для довільних фіксованих точок $a_1, a_2 \in \mathbb{C}/\{0\}$ (теорема 4.2.1).

Використавши результат теореми 4.1.1, одержано оцінку зверху функціонала $I_n(\gamma)$ в проблемі 4.1 на одиничному колі (теорема 4.3.1) й узагальнено її на випадок довільної фіксованої $n$-променевої системи точок (теорема 4.4.1).

Отримано розв'язок проблеми 4.1 при додатковому обмеженні величини внутрішнього радіуса області $B_0$ відносно точки нуль (теорема 4.5.1). Використавши оцінку зверху функціонала $I_n(\gamma)$, одержану в теоремі 2.4.1, дано розв'язок проблеми 4.1 для $n \geqslant 3$ і $\gamma \in (1, \sqrt{n}]$ (теорема 4.5.2).

Результати розділу опубліковано в роботах [19, 28, 29, 49, 54, 140, 235].

# РОЗДІЛ 5

## УЗАГАЛЬНЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ОДЕРЖАНИХ В КЛАСИЧНИХ ПРОБЛЕМАХ ДЛЯ $N$-ПРОМЕНЕВИХ СИСТЕМ ТОЧОК

Даний розділ присвячений дослідженню екстремальної задачі про добуток внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються, для $n$-променевих систем точок комплексної площини. Оскільки в монографії [11] був розроблений метод "керуючих" функціоналів, який дозволяє послабити умови на геометрію розташування систем точок, ми розглянемо узагальнену проблему 4.1 і замість одиничного кола введемо $n$-променеву систему точок, що задовольняє певні умови.

Для довільної $n$-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ та $\gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ введемо "керуючий" функціонал:

$$\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) := \prod_{k=1}^{n} \left[ \chi \left( \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) \right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2} \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}.$$

Клас $n$-променевих систем точок для яких справедлива рівність $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) = 1$ автоматично включає всі системи $n$ різних точок, що розміщені на одиничному колі.

Нехай $Q_0$ — множина всіх наборів $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ різних точок, які лежать на одиничному колі, занумеровані в порядку зростання аргумента і таких, що $a_1 = 1$. А через $Q_1$ позначимо клас $n$-променевих систем для яких $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) = 1$. Очевидно, що $Q_0 \subset Q_1$ так як, якщо $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, то $\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = 1$, $k = \overline{1, n}$, і $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) = 1$.

Покажемо, що довільну $n$-променеву систему точок можна звести до системи для якої $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) = 1$. Нехай задана будь-яка $n$-променева система точок $A_n^\star$ для якої $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n^\star) = T_0$, $T_0 \in \mathbb{R}^+$, і нехай $t_0 = T_0^{\frac{1}{n+\gamma}}$. Розглянемо $n$-променеву систему точок наступного виду

$$A_n^0 = \left\{a_k^0\right\}_{k=1}^n = \left\{\frac{a_k^\star}{t_0}\right\}_{k=1}^n .$$

Звідси безпосередньо слідує, що

$$\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n^0) := \prod_{k=1}^n \left[\chi\left(\left|\frac{\frac{a_k^\star}{t_0}}{\frac{a_{k+1}^\star}{t_0}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2} \cdot \prod_{k=1}^n \left|\frac{a_k^\star}{t_0}\right|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})} =$$

$$= \prod_{k=1}^n \left[\chi\left(\left|\frac{a_k^\star}{a_{k+1}^\star}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2} \cdot \prod_{k=1}^n |a_k^\star|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})} \cdot \prod_{k=1}^n t_0^{-(1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1}))} =$$

$$= \prod_{k=1}^n \left[\chi\left(\left|\frac{a_k^\star}{a_{k+1}^\star}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2} \cdot \prod_{k=1}^n |a_k^\star|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})} \cdot t_0^{-(n+\gamma)} =$$

$$= \prod_{k=1}^n \left[\chi\left(\left|\frac{a_k^\star}{a_{k+1}^\star}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2} \cdot \prod_{k=1}^n |a_k^\star|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})} \cdot \left(T_0^{\frac{1}{n+\gamma}}\right)^{-(n+\gamma)} =$$

$$= \prod_{k=1}^n \left[\chi\left(\left|\frac{a_k^\star}{a_{k+1}^\star}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2} \cdot \prod_{k=1}^n |a_k^\star|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})} \cdot T_0^{-1} = T_0 \cdot T_0^{-1} = 1.$$

Таким чином, клас $Q_1$ значно ширший ніж клас $Q_0$.

**Проблема 5.1.** При всіх значеннях параметра $\gamma \in (0, n]$ знайти максимум добутку

$$I_n(\gamma) = r^\gamma\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^n r\left(B_k, a_k\right),$$

де $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $a_0 = 0$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ — $n$-променева система точок, така, що $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) \leqslant 1$, $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) \leqslant 1$, $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ — будь-який набір областей, що взаємно не перетинаються, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, і описати всі екстремалі.

На даний час ця проблема повністю не розв'язана, відомі лише часткові результати. У роботі [158] одержано її розв'язок для $0 < \gamma < 1$ і $n \geqslant 2$. У [25, 141] отримано результати за деяких обмежень на геометрію розташування систем точок, а саме, для $n \geqslant 4$ й підкласу систем точок, що задовольняють умову

$$0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}, \quad k = \overline{1,n}.$$

В [18] сформульована задача розв'язана для $\gamma \in (0, n^{0{,}38}]$ та $n \geqslant 5$.

## 5.1. Нерівність для добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей для $n$-променевих систем точок

Нехай

$$I_n^0(\gamma) = r^{\gamma}(D_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k) \tag{5.1}$$

де $d_k$ і $D_k$, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$G(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}dw^2.$$

Позначимо

$$Q_n(\gamma) = \frac{\left[2^{n\frac{2}{\sqrt{\gamma}}}\left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n}\frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}. \tag{5.2}$$

**Теорема 5.1.1.** [159, 161] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 6$, — *фіксоване натуральне число і число* $\gamma$, $\gamma \geqslant 1$. *Тоді для довільної конфігурації областей* $B_k$ *і точок* $a_k$ $(k = \overline{0,n})$, *що задовольняють усі умови проблеми 5.1, і* $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, $\alpha_0 = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \alpha_k$, *має місце наступна оцінка*

$$\frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} \leqslant Q_n(\gamma), \tag{5.3}$$

*де* $I_n^0(\gamma)$ *і* $Q_n(\gamma)$ *визначаються співвідношеннями* (5.1) *і* (5.2). *Якщо* $\gamma_n^0$ — *корінь рівняння* $Q_n(\gamma) = 1$, *то для довільного* $\gamma_n$, *такого, що* $1 \leqslant \gamma_n < \gamma_n^0$, *справедлива нерівність*

$$\frac{I_n(\gamma_n)}{I_n^0(\gamma_n)} < 1.$$

Зауважимо, що довівши теорему 5.1.1, ми одержимо розв'язок проблеми 5.1 для $n \geqslant 6$ і $\gamma = \gamma_n^0$, та зможемо поширити цей розв'язок для довільного $\gamma_n$ такого, що $1 < \gamma_n < \gamma_n^0$.

**Доведення.** Нехай $a_0 = 0$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ — $n$-променева система точок така, що $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) \leqslant 1$, $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) \leqslant 1$. Припустимо, що

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi.$$

Позначимо величини $\alpha_k$, $k = \overline{1,n}$, наступним чином $\alpha_1 := \frac{1}{\pi}(\arg a_2 - \arg a_1)$, $\alpha_2 := \frac{1}{\pi}(\arg a_3 - \arg a_2)$, $\ldots$, $\alpha_n := \frac{1}{\pi}(2\pi - \arg a_n)$. Нехай $\alpha_0 = \max\limits_k \alpha_k$. В роботі [141] проблема 5.1 була доведена для довільного натурального числа $n$, $n \geqslant 4$ та $0 < \gamma \leqslant 0{,}1215 n^2$ при умові, що $\alpha_0 \leqslant \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$. Тому ми розглянемо лише конфігурації областей $D_k$ і точок $d_k$, $k = \overline{0,n}$, для яких $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$. За теоремою 5.2.3 [11], маємо

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Далі, не важко отримати

$$I_n(\gamma) = \prod_{k=1}^n \left[r(B_0, 0) r(B_k, a_k)\right]^{\frac{\gamma}{n}} \left[\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)\right]^{1 - \frac{\gamma}{n}}.$$

З теореми М.О. Лаврентьєва [91], маємо

$$r(B_0,0)r(B_k,a_k)\leqslant |a_k|^2.$$

Тоді з теореми 5.1.1 [11] (див. також теорему 1.5.6)

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\leqslant 2^n\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot\mathcal{N}^{(0)}(A_n).$$

З умови теореми $\mathcal{N}^{(0)}\left(A_n\right)\leqslant 1$, слідує, що $\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k|\leqslant 1$. Таким чином,

$$I_n(\gamma)\leqslant\left[2^n\cdot\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}. \qquad (5.4)$$

Оскільки $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k = 2$, то використавши нерівність Коші між середнім геометричним та середнім арифметичним, одержуємо

$$\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\leqslant\alpha_0\prod_{k=1,k\neq k_0}^{n}\alpha_k\leqslant\alpha_0\left(\frac{\sum\limits_{k=1,k\neq k_0}^{n}\alpha_k}{n-1}\right)^{n-1}=\alpha_0\left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1}.$$

З нерівності (5.4), маємо оцінку

$$I_n(\gamma)\leqslant\left[2^n\alpha_0\left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}. \qquad (5.5)$$

Підсумовуючи наведені вище співвідношення, ми отримуємо

$$\frac{r^{\gamma}(B_0,0)\prod\limits_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)}{I_n^0(\gamma)}\leqslant\frac{\left[2^n\cdot\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\left(2-\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^n\frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}.$$

Таким чином, нерівність (5.3) доведена. Далі, ми доводимо, що корінь рівняння $Q_n(\gamma)=1$ існує для будь-якого $n\geqslant 6$. Очевидно, що $Q_n(1)=0$ для кожного $n$. З іншої сторони,

$$Q_n(n)=\left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)^{2\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{4}\right)^{n+1}\gg 1.$$

Отже, $Q_n(1) = 0$ та $Q_n(n) > 1$. Корінь рівняння $Q_n(\gamma) = 1$ існує і належить інтервалу $(1, n)$. Функція

$$\left[2^n \cdot \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

монотонно зростає відносно $\gamma$ на інтервалі $(1, n]$. Досліджуючи функцію $I_n^0(\gamma)$, легко перевірити, що

$$\left(I_n^0(\gamma)\right)' = I_n^0(\gamma) \left(\frac{1}{n} \ln\left(\frac{4\gamma}{n^2 - \gamma}\right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \ln\left(\frac{n - \sqrt{\gamma}}{n + \sqrt{\gamma}}\right)\right).$$

В цьому випадку ми можемо сказати, що функція $I_n^0(\gamma)$ спадає для фіксованого $n \geqslant 6$ і $\gamma \in (1, n]$. Таким чином,

$$I_n^0\left(\gamma_n^0\right) \leqslant I_n^0\left(\gamma_n\right).$$

Врахувавши останню нерівність і властивість монотонного зростання функції $\left[2^n \cdot \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}$, ми одержуємо, що функція $Q_n(\gamma)$ монотонно зростає відносно $\gamma$ на інтервалі $\left[1, \gamma_n^0\right]$ і, отже,

$$Q_n\left(\gamma_n\right) < Q_n\left(\gamma_n^0\right) = 1.$$

Теорема 5.1.1 доведена.

Зауважимо, якщо функція $Q_n(\gamma)$ є монотонною, тоді із очевидних нерівностей $\gamma_2 < \gamma_1$, $Q_n(\gamma_1) < 1$, слідує, що $Q_n(\gamma_2) < 1$.

## 5.2. Межі застосування методу доведення теореми 5.1.1

Наступний результат показує межі застосування методу, що запропонований при доведенні теореми 5.1.1, і характеризує екстремальні області, якщо $0 < \gamma \leqslant n^\delta$, $\frac{1}{3} < \delta < \frac{2}{3}$.

**Теорема 5.2.1.** [162] *Для будь-якого* $\frac{1}{3} < \delta < \frac{2}{3}$ *існує натуральне число* $n_0$ *таке, що для* $n \geqslant n_0$ *і* $0 < \gamma \leqslant n^{\delta}$ *виконується наступна нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant r^{\gamma}(D_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k), \qquad (5.6)$$

*де* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *—* $n$*-променева система точок, така, що* $\mathcal{N}^{(\gamma)}\left(A_n\right) \leqslant 1$, $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) \leqslant 1$, $B_k$, $k = \overline{0, n}$, *— будь-який набір областей, що взаємно не перетинаються,* $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$. *Рівність у нерівності* (5.6) *досягається, наприклад, якщо* $a_k = d_k$, $B_k = D_k$, $k = \overline{0, n}$, *де* $d_k$, $D_k$, *є, відповідно, полюси та кругові області квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2. \qquad (5.7)$$

*Більше того, замість* $n_0$ *ми можемо взяти* $\left[e^{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}-\alpha\right)^2}}\right] + 1$ *(вираз* $\left[e^{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}-\alpha\right)^2}}\right]$ *означає цілу частину дійсного числа* $e^{\dfrac{1}{\left(\frac{2}{3}-\alpha\right)^2}}$ *).*

**Доведення.** Для $0 < \gamma \leqslant \sqrt{n}$ проблема 5.1 була розв'язана в роботі [29] для довільного $n \geqslant 2$. Використовуючи співвідношення $2 \leqslant e^{\dfrac{1}{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)^2}}$ для $\gamma = \sqrt{n}$ теорема 5.2.1 доведена. Доведемо справедливість теореми для випадку $\gamma = n^{\delta}$, $\delta \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Нехай $\zeta = \pi_k(w)$ позначає однозначну гілку багатозначної аналітичної функції $-i\left(e^{-i \arg a_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1, n}$, яка здійснює однолисте і конформне відображення $\overline{\Gamma}_k := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$ на праву півплощину $\operatorname{Re} \zeta > 0$. Розглянемо систему функцій

$$\zeta = \pi_k(w) = -i\left(e^{-i \arg a_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Сім'я функцій $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^{n}$ є допустимою для розділяючого перетворення областей $B_k$, $k = \overline{0, n}$, відносно кутів $\{\Gamma_k\}_{k=1}^{n}$. Позначимо через

$\Omega_k^{(1)}$, $k=\overline{1,n}$, область площини $\mathbb{C}_\zeta$ отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_k\bigcap\overline{\Gamma}_k)$ яка містить точку $\pi_k(a_k)$ з її симетричним відображенням відносно уявної осі; через $\Omega_k^{(2)}$, $k=\overline{1,n}$, область площини $\mathbb{C}_\zeta$ отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_{k+1}\bigcap\overline{\Gamma}_k)$ яка містить точку $\pi_k(a_{k+1})$ з її симетричним відображенням відносно уявної осі; $B_{n+1}:=B_1$, $\pi_n(a_{n+1}):=\pi_n(a_1)$. Крім того, $\Omega_k^{(0)}$ — область площини $\mathbb{C}_\zeta$ отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_0\bigcap\overline{\Gamma}_k)$ яка містить точку $\zeta=0$ з її симетричним відображенням відносно уявної осі. Позначимо

$$\pi_k(a_k):=\omega_k^{(1)},\quad \pi_k(a_{k+1}):=\omega_k^{(2)},\quad k=\overline{1,n}.$$

З визначення функцій $\pi_k$ випливає, що

$$|\pi_k(w)-\omega_k^{(1)}|\sim\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot|w-a_k|,\quad w\to a_k,\quad w\in\overline{\Gamma_k},$$

$$|\pi_k(w)-\omega_k^{(2)}|\sim\frac{1}{\alpha_k}|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot|w-a_{k+1}|,\quad w\to a_{k+1},\quad w\in\overline{\Gamma_k},$$

$$|\pi_k(w)|\sim|w|^{\frac{1}{\alpha_k}},\quad w\to 0,\quad w\in\overline{\Gamma_k}.$$

В околі точки $w=a_k$ величину $w$ можемо записати у вигляді

$$w=a_k+(w-a_k).$$

Тоді має місце такий розклад у ряд:

$$-i\left(e^{-i\arg a_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}=-i\left(e^{-i\arg a_k}(a_k+(w-a_k))\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}=$$

$$=-i\left(e^{-i\arg a_k}a_k\left(1+\frac{1}{a_k}(w-a_k)\right)\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}=$$

$$=-i\left(|a_k|\left(1+\frac{1}{a_k}(w-a_k)\right)\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}=$$

$$=-i|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}\left(1+\frac{1}{a_k}(w-a_k)\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}=$$

$$= -i|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}\left(1+\frac{1}{\alpha_k}\frac{1}{a_k}(w-a_k)+o(1)\right)=$$

$$= -i|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} - i\frac{1}{\alpha_k}\frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{a_k}(w-a_k)+o(1).$$

Звідси отримуємо асимптотичну рівність

$$|\pi_k(w)-\omega_k^{(1)}| = \frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot(w-a_k)(1+o(1)),$$

де

$$\frac{o(1)}{|w-a_k|}\to 0, \quad w\to a_k.$$

Це рівносильно шуканому співвідношенню еквівалентності. Два інших співвідношення одержуємо аналогічно. Тоді, використовуючи відповідні результати робіт [11, 57], отримуємо нерівності

$$r\left(B_k,a_k\right)\leqslant\left[\frac{r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_{k-1}^{(2)},\omega_{k-1}^{(2)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot\frac{1}{\alpha_{k-1}}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad k=\overline{1,n}, \tag{5.8}$$

$$r\left(B_0,0\right)\leqslant\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.9}$$

Умови реалізації знака рівності в нерівностях (5.8), (5.9) описані в теоремі 1.9 [57]. Із нерівностей (5.8) та (5.9) одержуємо співвідношення

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right)\leqslant \tag{5.10}$$

$$\leqslant\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{|a_ka_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\gamma\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)},0\right)r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)r\left(\Omega_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Відомо, що функціонал

$$Y_3(t_1,t_2,t_3,D_1,D_2,D_3,d_1,d_2,d_3)= \tag{5.11}$$

$$=\frac{r^{t_1}(D_1,d_1)\cdot r^{t_2}(D_2,d_2)\cdot r^{t_3}(D_3,d_3)}{|d_1-d_2|^{t_1+t_2-t_3}\cdot|d_1-d_3|^{t_1-t_2+t_3}\cdot|d_2-d_3|^{-t_1+t_2+t_3}}$$

інваріантний відносно всіх конформних автоморфізмів розширеної комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$, де $t_k \in \mathbb{R}^+$, $\{D_k\}_{k=1}^3$ — довільна система областей, що взаємно не перетинаються, таких, що $d_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k \in \{1,2,3\}$.

Таким чином, із формул (5.10), (5.11) після нескладних перетворень, маємо

$$I_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \times$$

$$\times \left\{ \prod_{k=1}^{n} \frac{r^{\gamma\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{|\omega_k^{(1)} \cdot \omega_k^{(2)}|^{\gamma\alpha_k^2} |\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|^{2-\gamma\alpha_k^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[ \prod_{k=1}^{n} |\omega_k^{(1)} \cdot \omega_k^{(2)}|^{\gamma\alpha_k^2} |\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|^{2-\gamma\alpha_k^2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

де $|\omega_k^{(1)}| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $|\omega_k^{(2)}| = |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1,n}$. Підсумовуючи викладене вище, отримуємо нерівність

$$I_n(\gamma) \leqslant 2^{n - \frac{\gamma}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^2} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} \left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1 - \frac{\gamma\alpha_k^2}{2}} \times \tag{5.12}$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{1 + \frac{1}{4}\gamma(\alpha_k + \alpha_{k-1})} \cdot \left\{ \prod_{k=1}^{n} Y_3(\gamma\alpha_k^2, 1, 1, \Omega_k^{(0)}, \Omega_k^{(1)}, \Omega_k^{(2)}, 0, \omega_k^{(1)}, \omega_k^{(2)}) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

При кожному $k = \overline{1,n}$ неважко вказати конформний автоморфізм $\zeta = T_k(z)$ площини комплексних чисел $\overline{\mathbb{C}}$ такий, що $T_k(0) = 0$, $T_k\left(\omega_k^{(s)}\right) = (-1)^s \cdot i$, $D_k^{(q)} := T_k\left(\Omega_k^{(q)}\right)$, $k = \overline{1,n}$, $s = 1,2$, $q = 0,1,2$. Тоді, внаслідок вказаної вище конформної інваріантності функціонала (5.11) одержуємо рівності

$$Y_3\left(\gamma\alpha_k^2, 1, 1, \Omega_k^{(0)}, \Omega_k^{(1)}, \Omega_k^{(2)}, 0, \omega_k^{(1)}, \omega_k^{(2)}\right) =$$

$$= Y_3\left(\gamma\alpha_k^2, 1, 1, D_k^{(0)}, D_k^{(1)}, D_k^{(2)}, 0, -i, i\right),$$

де $k=\overline{1,n}$ і

$$Y_3\left(\gamma\alpha_k^2, 1, 1, D_k^{(0)}, D_k^{(1)}, D_k^{(2)}, 0, -i, i\right) =$$

$$= \frac{r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)}, 0\right)\cdot r\left(D_k^{(1)}, -i\right)\cdot r\left(D_k^{(2)}, i\right)}{2^{2-\gamma\alpha_k^2}}.$$

Звідси

$$I_n(\gamma) \leqslant 2^{n-\frac{\gamma}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^2}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\cdot\mathcal{N}^{(\gamma)}\left(A_n\right)\times$$

$$\times\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)}, 0\right)\cdot r\left(D_k^{(1)}, -i\right)\cdot r\left(D_k^{(2)}, i\right)}{2^{2-\gamma\alpha_k^2}}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

З останньої рівності і умови (5.12) остаточно отримуємо наступну оцінку

$$I_n(\gamma) \leqslant 2^{n-\frac{\gamma}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^2}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\cdot\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n)\cdot 2^{-n+\frac{\gamma}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^2}\times$$

$$\times\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)}, 0\right) r\left(D_k^{(1)}, -i\right) r\left(D_k^{(2)}, i\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

З урахуванням умов теореми

$$I_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)}, 0\right) r\left(D_k^{(1)}, -i\right) r\left(D_k^{(2)}, i\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (5.13)$$

де $D_k^{(0)}$, $D_k^{(1)}$, $D_k^{(2)}$ — кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(4-\alpha_k^2\gamma)w^2 - \alpha_k^2\gamma}{w^2(w^2+1)^2}\,dw^2$$

$\left(0\in D_k^{(0)},\ -i\in D_k^{(1)},\ i\in D_k^{(2)}\right)$. Із роботи [57], враховуючи (5.13), маємо

$$I_n(\gamma) \leqslant \qquad (5.14)$$

$$\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left[\prod_{k=1}^{n} 2^{\tau_k^2+6}\cdot\tau_k^{\tau_k^2}\cdot(2-\tau_k)^{-\frac{1}{2}(2-\tau_k)^2}\cdot(2+\tau_k)^{-\frac{1}{2}(2+\tau_k)^2}\right]^{1/2},$$

де $\tau_k = \alpha_k\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$. Зауважимо, що в роботі [141] проблема 5.1 повністю розв'язана для $n \geqslant 4$ і $\alpha_k\sqrt{\gamma} \leqslant 2$. Тому, розглянемо випадок

$$\alpha_0\sqrt{\gamma} \geqslant 2, \quad \alpha_0 = \max_k \alpha_k.$$

Має місце наступна рівність

$$I_n(\gamma) = \prod_{k=1}^{n} [r(B_0,0)r(B_k,a_k)]^{\frac{\gamma}{n}} \left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

З теореми М.О. Лаврентьєва [91]

$$r(B_0,0)r(B_k,a_k) \leqslant |a_k|^2.$$

Тоді,

$$I_n(\gamma) \leqslant \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{2\gamma}{n}} \left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

З умови $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) \leqslant 1$ слідує, що $\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant 1$, і

$$I_n(\gamma) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

З теореми 5.1.1 [11]

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \mathcal{N}^{(0)}(A_n).$$

Таким чином,

$$I_n(\gamma) \leqslant \left[2^n \cdot \prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}. \tag{5.15}$$

Оскільки, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$ то, використовуючи нерівність Коші між середнім геометричним і середнім арифметичним, приходимо до висновку, що

$$\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \leqslant \alpha_0 \prod_{k=1,k\neq k_0}^{n} \alpha_k \leqslant \alpha_0 \left(\frac{\sum\limits_{k=1,k\neq k_0}^{n} \alpha_k}{n-1}\right)^{n-1} = \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1},$$

де $\alpha_0 := \alpha_{k_0} := \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \alpha_k$. Таким чином, із співвідношення (5.15) одержуємо нерівність

$$I_n(\gamma) \leqslant \left[2^n \alpha_0 (2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Нехай

$$I_n^0(\gamma) = r^{\gamma}\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, d_k\right),$$

де $0 \cup \{d_k\}_{k=1}^n$ і $\{D_k\}_{k=0}^n$ є, відповідно, полюси та кругові області квадратичного диференціала (5.7). Згідно робіт [11, 57, 76], враховуючи (5.14), отримуємо

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Нехай

$$P_n(\gamma) := \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)}.$$

Тоді,

$$P_n(\gamma) \leqslant \frac{\left[2\cdot 2^{n-1}\cdot \alpha_0 (2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}},$$

$$\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{\gamma}} > \frac{2}{n}.$$

Таким чином,

$$P_n(\gamma) \leqslant \left[\frac{n}{4}\right]^{\gamma+1} \left[1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right]^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}} \left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}} \times$$

$$\times \left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}.$$

Звідси,

$$P_n(n^{\delta}) \leqslant \left[\frac{n}{4}\right]^{n^{\delta}+1} \left[1-\frac{1}{n^{\frac{\delta}{2}}}\right]^{n-1-\frac{n-1}{n^{1-\delta}}} \left(n^{1-\delta}\right)^{\frac{1}{n^{1-\delta}}} \left(1-\frac{1}{n^{2-\delta}}\right)^{n+\frac{1}{n^{1-\delta}}} \times$$

$$\times \left(\frac{1+\frac{1}{n^{1-\frac{\delta}{2}}}}{1-\frac{1}{n^{1-\frac{\delta}{2}}}}\right)^{2n^{\frac{\delta}{2}}} \left(\frac{4}{n^{\frac{\delta}{2}}}\right)^{1-\frac{1}{n^{1-\delta}}} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\frac{n-1}{n^{1-\delta}}}.$$

Нехай

$$g(x) = \left[\frac{x}{4}\right]^{x^{\delta}+1} \cdot \left[1-\frac{1}{x^{\frac{\delta}{2}}}\right]^{x-1-\frac{x-1}{x^{1-\delta}}}, \quad f_1(x) = \left(x^{1-\delta}\right)^{\frac{1}{x^{1-\delta}}},$$

$$f_2(x) = \left(1-\frac{1}{x^{2-\delta}}\right)^{x+\frac{1}{x^{1-\delta}}}, \quad f_3(x) = \left(\frac{1+\frac{1}{x^{1-\frac{\delta}{2}}}}{1-\frac{1}{x^{1-\frac{\delta}{2}}}}\right)^{2x^{\frac{\delta}{2}}},$$

$$f_4(x) = \left(\frac{4}{x^{\frac{\delta}{2}}}\right)^{1-\frac{1}{x^{1-\delta}}}, \quad f_5(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1-\frac{x-1}{x^{1-\delta}}}.$$

Дослідимо вище перераховані функції для $x \in \left[e^9;\infty\right)$. Для $g(x)$ має місце співвідношення

$$\ln\left(g(x)\right) = \left(x^{\delta}+1\right)\ln\frac{x}{4} + \left(x-1-x^{\delta}+x^{\delta-1}\right)\ln\left(1-\frac{1}{x^{\frac{\delta}{2}}}\right).$$

$$(\ln\left(g(x)\right))' =$$

$$= \left(\delta x^{\delta-1}\right)\ln\frac{x}{4} + x^{\delta-1} + \frac{1}{x} + \left(1-\delta x^{\delta-1}+(\delta-1)x^{\delta-2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{x^{\frac{\delta}{2}}}\right)+$$

$$+\frac{1}{1-\frac{1}{x^{\frac{\delta}{2}}}}\cdot\frac{\delta}{2}\frac{1}{x^{1+\frac{\delta}{2}}}\left(x-1-x^{\delta}+x^{\delta-1}\right).$$

Оскільки $x \geqslant e^9$, тоді справедливі нерівності

$$\ln\left(1-\frac{1}{x^{\frac{\delta}{2}}}\right) = -\frac{1}{x^{\frac{\delta}{2}}} - \frac{1}{2x^{\delta}} - \frac{1}{3x^{\frac{3\delta}{2}}} - \ldots \leqslant -\frac{1}{x^{\frac{\delta}{2}}} - \frac{1}{2x^{\delta}},$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x^{\frac{\delta}{2}}}} \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{(e^9)^{\frac{1}{6}}}} < 1,3,$$

$$\left(x-1-x^{\delta}+x^{\delta-1}\right) > 0,$$

$$\left(1-\delta x^{\delta-1}+(\delta-1)x^{\delta-2}\right) > 0.$$

Доведемо, що для $x \geqslant e^{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}-\delta\right)^2}}$ і фіксованого $\delta$, виконується нерівність

$$\ln x \leqslant x^{\frac{2}{3}-\delta}.$$

Розглянемо функцію $h(x)=x^{\frac{2}{3}-\delta}-\ln x$ для $x\geqslant e^{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}-\delta\right)^2}}$. Таким чином,

$$(h(x))'=\frac{1}{x}\left(\left(\frac{2}{3}-\delta\right)x^{\frac{2}{3}-\delta}-1\right).$$

З іншої сторони,

$$\left(\frac{2}{3}-\delta\right)x^{\frac{2}{3}-\delta}-1\geqslant\left(\frac{2}{3}-\delta\right)\left(\frac{1}{\frac{2}{3}-\delta}+\frac{1}{2\left(\frac{2}{3}-\delta\right)^2}\right)-1=$$

$$=\frac{1}{2\left(\frac{2}{3}-\delta\right)}>0.$$

Отже, функція $h(x)$ — монотонно зростає для $x\in\left[e^{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}-\delta\right)^2}};+\infty\right)$ і

$$h\left(e^{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}-\delta\right)^2}}\right)=e^{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}-\delta\right)}}-\frac{1}{\left(\frac{2}{3}-\delta\right)^2}>0.$$

Звідси $\ln x\leqslant x^{\frac{2}{3}-\delta}$. Враховуючи останні нерівності, одержуємо

$$(\ln(g(x)))'<\frac{\delta}{x^{\frac{1}{3}}}+\frac{1-\delta\ln 4}{x^{1-\delta}}-\frac{1-0,65\delta}{x^{\frac{\delta}{2}}}-\frac{1}{2x^{\delta}}+\frac{0,35\delta}{x^{1-\frac{\delta}{2}}}+\frac{\frac{\delta}{2}+1}{x}-$$

$$-\frac{0,65\delta}{x^{1+\frac{\delta}{2}}}+\frac{1-0,35\delta}{x^{2-\frac{\delta}{2}}}+\frac{1-\delta}{x^2}.$$

Позначимо

$$A(x)=\frac{\delta}{x^{\frac{1}{3}}}+\frac{1-\delta\ln 4}{x^{1-\delta}}-\frac{1-0,65\delta}{x^{\frac{\delta}{2}}},$$

$$B(x)=-\frac{1}{2x^{\delta}}+\frac{0,35\delta}{x^{1-\frac{\delta}{2}}}+\frac{\frac{\delta}{2}+1}{x},$$

$$C(x)=-\frac{0,65\delta}{x^{1+\frac{\delta}{2}}}+\frac{1-0,35\delta}{x^{2-\frac{\delta}{2}}}+\frac{1-\delta}{x^2}.$$

Застосувавши стандартні методи для дослідження функцій для фіксованого $\delta$ і $x\in\left[e^{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}-\delta\right)^2}};+\infty\right)$, маємо

$$A(x)=\frac{1}{x^{\frac{\delta}{2}}}\left(-(1-0,65\delta)+\frac{\delta}{x^{\frac{1}{3}-\frac{\delta}{2}}}+\frac{1-\delta\ln 4}{x^{1-\frac{3\delta}{2}}}\right)$$

і

$$-(1-0,65\delta)+\frac{\delta}{x^{\frac{1}{3}-\frac{\delta}{2}}}+\frac{1-\delta\ln 4}{x^{1-\frac{3\delta}{2}}}<-0,5+\frac{\frac{2}{3}}{e^{\frac{1}{2\left(\frac{2}{3}-\delta\right)}}}+\frac{0,6}{e^{\frac{3}{2\left(\frac{2}{3}-\delta\right)}}}<$$

$$< -0,5 + 0,15 + 0,01 = -0,34 < 0.$$

Отже, $A(x) < 0$ для всіх $x$. Аналогічно,

$$B(x) = -\frac{0,3}{x^{\delta}} + \frac{0,35\delta}{x^{1-\frac{\delta}{2}}} - \frac{0,2}{x^{\delta}} + \frac{\frac{\delta}{2}+1}{x} <$$

$$< \left(-\frac{0,3}{x^{\delta}} + \frac{0,3}{x^{1-\frac{\delta}{2}}}\right) + \left(-\frac{0,2}{x^{\delta}} + \frac{1,4}{x}\right) < 0.$$

$$C(x) = \frac{1}{x^{1+\frac{\delta}{2}}}\left(-0,65\delta + \frac{1-0,35\delta}{x^{1-\delta}} + \frac{1-\delta}{x^{1-\frac{\delta}{2}}}\right) <$$

$$< \frac{1}{x^{1+\frac{\delta}{2}}}\left(-0,2 + \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right) < 0.$$

Оскільки $(\ln(g(x)))' < A(x) + B(x) + C(x)$, тоді $(\ln(g(x)))' < 0$. Таким чином, функція $g(x)$ — монотонно спадає при фіксованому $\delta$ і $x \in \left[e^{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}-\delta\right)^2}}; +\infty\right)$.

Розглянемо функцію $f_1(x)$. Запишемо її у вигляді

$$\ln f_1(x) = \left(\frac{1}{x^{1-\delta}}\right)\ln\left(x^{1-\delta}\right).$$

Таким чином,

$$\left(\ln\left(x^{1-\delta}\right)^{\frac{1}{x^{1-\delta}}}\right)' = \left(\frac{1}{x^{1-\delta}}\ln\left(x^{1-\delta}\right)\right)' = (1-\delta)\left(\frac{1}{x^{1-\delta}}\ln x\right)' =$$

$$= (1-\delta)\left(-(1-\delta)x^{-(2-\delta)}\ln x + x^{-(2-\delta)}\right) =$$

$$= (1-\delta)x^{-(2-\delta)}\left(-(1-\delta)\ln x + 1\right).$$

Звідси, $(\ln f_1(x))' = (-(1-\delta)\ln x + 1) < 0$ і $x > e^{\frac{1}{1-\delta}}$. Оскільки $e^{\frac{1}{1-\delta}}$ для $\frac{1}{3} < \delta < \frac{2}{3}$ не перевищує $e^{\frac{1}{1-\frac{2}{3}}} = e^3 < 21$, тоді для $x \in \left[e^9; +\infty\right)$ функція $f_1(x)$ — монотонно спадає. Отже, для будь-якого $n \geqslant e^9$ справедлива наступна нерівність

$$\left(x^{1-\delta}\right)^{\frac{1}{x^{1-\delta}}} \leqslant \left(\left(e^9\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{\left(e^9\right)^{\frac{1}{3}}}} \leqslant 1,06.$$

Зрозуміло, що $\left(1-\frac{1}{x^{2-\delta}}\right) < 1$ і тому $\left(1-\frac{1}{x^{2-\delta}}\right)^{x+\frac{1}{x^{1-\delta}}} < 1$. Тобто для довільного $x \geqslant e^9$, маємо

$$f_2(x) < 1.$$

Розглянемо функцію $f_3(x)$. Має місце співвідношення

$$\ln f_3(x) = 2x^{\frac{\delta}{2}} \ln\left(1+\frac{1}{x^{1-\frac{\delta}{2}}}\right) + 2x^{\frac{\delta}{2}} \ln\left(1-\frac{1}{x^{1-\frac{\delta}{2}}}\right)$$

і, таким чином,

$$(\ln f_3(x))' = \delta x^{\frac{\delta}{2}-1} \ln\left(1+\frac{2}{x^{1-\frac{\delta}{2}}}\right) - 4\left(1-\frac{\delta}{2}\right) x^{\delta-2} \cdot \frac{1}{x^{2-\delta}-1} \leqslant 0.$$

Отже, для $x \geqslant e^9$ функція $f_3(x)$ — монотонно спадає і для будь-якого $n \geqslant e^9$, отримуємо

$$\left(\frac{1+\frac{1}{n^{1-\frac{\delta}{2}}}}{1-\frac{1}{n^{1-\frac{\delta}{2}}}}\right)^{2n^{\frac{\delta}{2}}} \leqslant \left(\frac{1+\frac{1}{(e^9)^{\frac{2}{3}}}}{1-\frac{1}{(e^9)^{\frac{2}{3}}}}\right)^{2(e^9)^{\frac{1}{3}}} \leqslant 1,22.$$

Щодо функції $f_4(x)$, то зрозуміло, що

$$\left(\frac{4}{x^{\frac{\delta}{2}}}\right)^{1-\frac{1}{x^{1-\delta}}} \leqslant \left(\frac{4}{(e^9)^{\frac{1}{6}}}\right)^{1-\frac{1}{(e^9)^{\frac{1}{3}}}} \leqslant 1.$$

Таким чином, функція $f_4(x)$ на інтервалі $\left[e^9;+\infty\right)$ — монотонно спадає і для будь-якого $n \geqslant e^9$, маємо

$$\left(\frac{4}{x^{\frac{\delta}{2}}}\right)^{1-\frac{1}{x^{1-\delta}}} \leqslant 1.$$

Оскільки $\frac{x}{x-1} > 1$ для $x \in \left[e^9;+\infty\right)$, тоді

$$f_5(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1-\frac{x-1}{x^{1-\delta}}} \leqslant \left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}.$$

Функція $\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}$ — монотонно зростає на інтервалі $\left[e^9;+\infty\right)$,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1} = e,$$

і для $n \geqslant e^9$,

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\frac{n-1}{n^{1-\delta}}} \leqslant e.$$

Враховуючи властивості досліджених функцій $f_j(x)$, $j=\overline{1,5}$, одержуємо

$$P_n(n^\delta) = g(x)\prod_{j=1}^{5} f_j(n) < g(x)\cdot 1,06\cdot 1\cdot 1,22\cdot 1\cdot e < 5g(x).$$

Функція $g(x) < 0,1$ для $x = e^{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}-\delta\right)^2}}$, тому

$$P_n(\gamma) \leqslant 0,5 < 1.$$

Нехай $\gamma \in (1, \gamma_n\,]$. Оскільки функція

$$\left[2^n\cdot\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\left(2-\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

при фіксованому $n$ монотонно зростає відносно $\gamma$ на інтервалі $(1,\gamma_n\,]$, а функція $I_n^0(\gamma)$ — монотонно спадає відносно $\gamma$ на тому ж самому інтервалі, оскільки

$$\left(\ln I_n^0(\gamma)\right)' = \left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{4\gamma}{n^2-\gamma}\right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\ln\left(\frac{n-\sqrt{\gamma}}{n+\sqrt{\gamma}}\right)\right) < 0$$

при кожному фіксованому $n$, тоді, отримуємо

$$P_n(\gamma) = \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} < \frac{I_n(\gamma_n)}{I_n^0(\gamma_n)} = P_n(\gamma_n) < 1.$$

Таким чином, при даних параметрах величин функціонал $I_n(\gamma)$ не досягає екстремального значення. Для $\gamma \in (1,\gamma_n\,]$, $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geqslant 2$, $n \geqslant 2$, справедлива нерівність

$$I_n(\gamma) < I_n^0(\gamma).$$

Тобто, конфігурації областей і точок теореми 5.2.1 є екстремальними. Теорема 5.2.1 доведена.

Теорему 5.2.1 можна записати в більш простій формі. Нехай

$$\delta = \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{\ln n}}.$$

Тоді, ми одержуємо, що $n = e^{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}-\delta\right)^2}}$ .

**Теорема 5.2.2.** [162] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n > e^9$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{\frac{2}{3}-\frac{1}{\sqrt{\ln n}}}$. *Тоді для будь-якої* $n$*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, *такої, що* $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) \leqslant 1$, $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) \leqslant 1$, *і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ ($k = \overline{1,n}$), *справедлива нерівність* (5.6). *Рівність у* (5.6) *досягається при умовах теореми 5.2.1.*

Для довільного $\delta \geqslant \frac{2}{3}$ ми не можемо застосовувати метод доведення теореми 5.1.1, оскільки при цій умові

$$\lim P_n(\gamma) = +\infty, \quad n \to \infty$$

і тому, не можливо знайти екстремальні конфігурації областей.

З теореми 5.2.1 одержуємо наступне твердження.

**Наслідок 5.2.1.** [162] *При всіх умовах теореми 5.2.1 має місце нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \qquad (5.16)$$

*Знак рівності в нерівності* (5.16) *досягається, коли точки* $a_k$ *і області* $B_k$, $k = \overline{0,n}$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала* (5.7).

## 5. 3. Розв'язки проблеми 5.1 при додаткових обмеженнях

**Теорема 5.3.1.** [15, 29] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (1, n]$ *і*

$$K(n, \gamma) = \left[I_n^0(\gamma) \cdot \mu_n(\gamma)\right]^{\frac{1}{\gamma}},$$

*де* $I_n^0(\gamma)$ *визначається співвідношенням* (4.3), *а*

$$\mu_n(\gamma)=\left[\frac{4^n}{(n-1)^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}\right]^{-1}.$$

*Тоді для будь-якої* $n$*-променевої системи точок* $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$, *такої, що* $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n)\leqslant 1$, $\mathcal{N}^{(0)}(A_n)\leqslant 1$, *і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_k$, $a_0=0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, *таких, що*

$$r(B_0,0)\leqslant K(n,\gamma),$$

*справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\leqslant\left(\frac{4}{n}\right)^n\frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

*Знак рівності в цій нерівності досягається тоді, коли* $a_k$ *і* $B_k$, $k=\overline{0,n}$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2=-\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2. \tag{5.17}$$

**Доведення.** Розглянемо величину

$$\Lambda_n(\gamma):=\frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)}=\frac{r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod\limits_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right)}{r^{\gamma}\left(D_0,0\right)\prod\limits_{k=1}^{n}r\left(D_k,d_k\right)},$$

де $d_k$, $D_k$, $k=\overline{0,n}$, $d_0=0$, є, відповідно, полюси та кругові області квадратичного диференціала (5.17). Із умов теореми 5.3.1 слідує, що

$$\Lambda_n(\gamma)\leqslant\frac{(K(n,\gamma))^{\gamma}\cdot\prod\limits_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)}{\left(\frac{4}{n}\right)^n\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}.$$

Згідно методу работи [11, с. 255], маємо нерівність

$$\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\leqslant 2^n\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\,\mathcal{N}^{(0)}(A_n)\leqslant$$

$$\leqslant 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \leqslant 2^n \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant \frac{4^n}{\sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)},$$

де $\alpha_0 := \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \alpha_k,\ \alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$. Тоді виконується співвідношення

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant \frac{(K(n,\gamma))^{\gamma} \cdot \frac{4^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}}{I_n^0(\gamma)}.$$

Звідси враховуючи умови теореми 5.3.1, одержуємо

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant 1.$$

Таким чином, при умові $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, $\alpha_0 = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \alpha_k$, справедлива нерівність

$$I_n(\gamma) \leqslant I_n^0(\gamma)$$

і в цьому випадку теорема доведена.

Розглянемо випадок $\alpha_0\sqrt{\gamma} < 2$. Аналогічно міркуванням при доведенні теореми 5.2.1, одержуємо нерівність

$$I_n(\gamma) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}\left(G_0^{(k)}, 0\right) \cdot r\left(G_1^{(k)}, -i\right) \cdot r\left(G_2^{(k)}, i\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

де $G_0^{(k)}$, $G_1^{(k)}$, $G_2^{(k)}$ — кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(4-\alpha_k^2\gamma)w^2 - \alpha_k^2\gamma}{w^2(w^2+1)^2}\, dw^2$$

$\left(0 \in G_0^{(k)},\ -i \in G_1^{(k)},\ i \in G_2^{(k)}\right)$. Далі, згідно робіт [57, 76], перейдемо до функції

$$P(x) = 2^{x^2+6} \cdot x^{x^2+2} \cdot (2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2} \cdot (2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2}, \quad x \in [0,2],$$

і, в результаті, маємо нерівність

$$I_n(\gamma) \leqslant \gamma^{-\frac{n}{2}} \left[\prod_{k=1}^{n} P\left(\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Розглянемо наступну екстремальну задачу:

$$\prod_{k=1}^{n} P(x_k) \longrightarrow \max; \quad \sum_{k=1}^{n} x_k = 2\sqrt{\gamma},$$

$$x_k = \alpha_k\sqrt{\gamma}, \quad 0 < x_k \leqslant 2.$$

Нехай $F(x) = \ln\left(P(x)\right)$ і $X^{(0)} = \left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ — довільна екстремальна точка. Позначимо $Z(X^{(0)}) = \sum\limits_{k=1}^{n} F(x_k^{(0)})$.

Повторюючи міркування роботи [76], одержуємо твердження: якщо $0 < x_k^{(0)} < x_j^{(0)} < 2$, $k \neq j$, тоді має місце наступне співвідношення

$$F'\left(x_k^{(0)}\right) = F'\left(x_j^{(0)}\right), \tag{5.18}$$

і якщо деяке $x_j^{(0)} = 2$, тоді для довільного $x_k^{(0)} < 2$,

$$F'\left(x_k^{(0)}\right) \leqslant F'\left(x_j^{(0)}\right) = F'(2) = 1, \tag{5.19}$$

де $k, j = \overline{1, n}$, $k \neq j$, $F'(x) = 2x\ln 2x + (2-x)\ln(2-x) - (2+x)\ln(2+x) + \frac{2}{x}$. Екстремальній точці $X^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}, \ldots, x_j^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ відповідає система точок $A_n^0 = \left(a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_k^{(0)}, \ldots, a_j^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}\right)$ і система областей $B_k^{(0)}$, $a_k^{(0)} \in B_k^{(0)} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$. Розглянемо систему точок наступного виду

$$\widetilde{A}_n^0 = \left(\widetilde{a}_1^{(0)}, \widetilde{a}_2^{(0)}, \ldots, \widetilde{a}_k^{(0)}, \ldots, \widetilde{a}_j^{(0)}, \ldots, \widetilde{a}_n^{(0)}\right),$$

де

$$\widetilde{a}_s^{(0)} = a_s^{(0)}, \quad s = \overline{1, k-1}, \quad s = \overline{j, n},$$

$$\widetilde{a}_s^{(0)} = |a_s^{(0)}| \cdot e^{i(\arg a_s^{(0)} + \varepsilon)}, \quad k \leqslant s \leqslant j - 1,$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ — мале додатне число. Яка в свою чергу відповідає точці

$$X^{\star} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)} - t\sqrt{\gamma}, \ldots, x_j^{(0)} + t\sqrt{\gamma}, \ldots, x_n^{(0)}\right).$$

Тоді для системи точок $\widetilde{A}_n^0$ "керуючий" функціонал задовільняє співвідношення

$$\mathcal{N}^{(\gamma)}(\widetilde{A}_n^0) = 1 + \delta(\varepsilon) = T_\varepsilon,$$

де $T_\varepsilon \to 1$ при $\varepsilon \to 0$. Далі, за допомогою вище наведених міркувань, ми зводимо систему $\widetilde{A}_n^0$ до системи $\widetilde{\widetilde{A}}_n \cdot T_\varepsilon^{-\frac{1}{n+\gamma}}$ для якої "керуючий" функціонал $\mathcal{N}^{(\gamma)}\left(\widetilde{\widetilde{A}}_n \cdot T_\varepsilon^{-\frac{1}{n+\gamma}}\right)$ дорівнює одиниці.

На основі співвідношень (5.18) і (5.19) проводимо доведення теореми. Переконаємося, що виконується твердження: якщо функція $Z(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} F(x_k)$ досягає максимума в точці $\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ при умовах $0 < x_k^{(0)} \leqslant 2$, $k = \overline{1, n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{(0)} = 2\sqrt{\gamma}$, тоді

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}.$$

Нехай для простоти $x_1^{(0)} \leqslant x_2^{(0)} \leqslant \ldots \leqslant x_n^{(0)}$. Функція

$$F''(x) = \ln\left(\frac{4x^2}{4 - x^2}\right) - \frac{2}{x^2}$$

строго зростає на проміжку $(0, 2)$ і існує $x_0$, $x_0 \approx 1,324661$ таке, що

$$signF''(x) \equiv sign(x - x_0).$$

Розглянемо спочатку випадок $n = 4$. Якщо $x_4^{(0)} \leqslant x_0$, тоді в силу строгої монотонності $F'(x)$ на $[0,\, x_0]$ із умови задачі отримуємо, що

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = x_4^{(0)}.$$

Нехай $x_0 < x_4^{(0)} \leqslant 1,75$, тоді $F'\left(x_4^{(0)}\right) \leqslant F'(1,75) = 0,224369$. Враховуючи, що $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 2\sqrt{\gamma}$, отримуємо нерівність

$$x_1^{(0)} \leqslant \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} x_k^{(0)} = \frac{2\sqrt{\gamma} - x_n^{(0)}}{n-1}. \tag{5.20}$$

На основі нерівності (5.20), маємо

$$x_1^{(0)} \leqslant \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^{3} x_k^{(0)} = \left(2\sqrt{\gamma} - x_4^{(0)}\right)/3 \leqslant \left(2\sqrt{4} - x_0\right)/3 < 0,891780,$$

звідси $x_1^{(0)} < 0,891780$. В силу спадання $F'(x)$ на $(0,\, x_0)$, маємо

$$F'\left(x_1^{(0)}\right) > F'(0,891780) = 0,317868 > 0,224369 = F'(1,75),$$

що суперечить співвідношенню (5.18). Таким чином, одержуємо протиріччя з екстремальністю набору $\left\{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}\right\}$, якщо $x_4^{(0)} \in (x_0;\, 1,75]$.

Нехай $1,75 < x_4^{(0)} \leqslant 1,95$, тоді в силу зростання $F'(x)$ на $[x_0, 2]$, маємо $F'\left(x_4^{(0)}\right) \leqslant F'(1,95) = 0,757486$. Тоді

$$x_1^{(0)} \leqslant \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^{3} x_k^{(0)} = \left(2\sqrt{\gamma} - x_4^{(0)}\right)/3 \leqslant \left(2\sqrt{4} - 1,75\right)/3 < 0,75,$$

звідси $x_1^{(0)} < 0,75$. Таким чином,

$$F'\left(x_1^{(0)}\right) > F'(0,75) = 0,771891 > 0,757486 = F'(1,95).$$

Аналогічно попередньому, отримуємо протиріччя з екстремальністю набору $\left\{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}\right\}$, якщо $x_4^{(0)} \in (x_0;\, 1,95]$.

Нехай $1,95 < x_4^{(0)} \leqslant 2$, тоді в силу зростання $F'(x)$ на $[x_0, 2]$, маємо $F'\left(x_4^{(0)}\right) \leqslant F'(2) = 1$. Тоді

$$x_1^{(0)} \leqslant \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^{3} x_k^{(0)} = \left(2\sqrt{\gamma} - x_4^{(0)}\right)/3 \leqslant \left(2\sqrt{4} - 1,95\right)/3 < 0,683333,$$

звідси $x_1^{(0)} < 0,683333$. Таким чином, одержуємо співвідношення

$$F'\left(x_1^{(0)}\right) > F'(0,683333) = 1,067351 > 1 = F'(2),$$

яке протирічить умовам (5.18) і (5.19). Із всього вище наведеного слідує, що у випадку $n = 4$ набір точок $\left\{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}\right\}$ не може бути екстремальним при умові $x_4^{(0)} \in (x_0,\, 2]$. Таким чином, для екстремального набору $\left\{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}\right\}$ можливий тільки випадок, коли $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)} \in (0,\, x_0]$ і $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = x_4^{(0)}$. Для $\gamma < \gamma_4 = 4$

всі попередні міркування зберігаються. Звідси слідує, що теорема 5.3.1 у випадку $n = 4$ доведена.

Розглянемо випадок $n \geqslant 5$. Якщо $x_n^{(0)} \leqslant x_0$, тоді в силу строгої монотонності $F'(x)$ на $[0,\, x_0]$ із умови задачі одержуємо, що

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}.$$

Припустимо, що $x_0 < x_n^{(0)} \leqslant 1,9$, тоді в силу зростання $F'(x)$ на $[x_0, 2]$, маємо $F'\left(x_n^{(0)}\right) \leqslant F'(1,9) = 0,587569$. Розглянемо функцію $\varphi(t) = \left(2\sqrt{t} - b\right) / \left(t - 1\right)$, $b < 2$, вона спадає при $t \geqslant 2$, так як для всіх $t \geqslant 2$

$$\varphi'(t) = \left(b - \sqrt{t} - 1/\sqrt{t}\right) / \left(t - 1\right)^2 < (b - 2)/(t - 1)^2 < 0.$$

Відповідно на основі нерівності (5.20) для всіх $n \geqslant 5$, $\gamma \in (0, n]$,

$$x_1^{(0)} \leqslant (n - 1)^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} x_k^{(0)} = \left(2\sqrt{\gamma} - x_n^{(0)}\right) / \left(n - 1\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(2\sqrt{n} - x_0\right) / \left(n - 1\right) \leqslant \left(2\sqrt{5} - 1,324661\right)/4 < 0,786869,$$

звідси $x_1^{(0)} < 0,786869$. В силу спадання $F'(x)$ на $(0,\, x_0)$, маємо співвідношення

$$F'\left(x_1^{(0)}\right) > F'(0,786869) = 0,633405 > 0,587569 = F'(1,9),$$

яке протирічить умові (5.18). Звідси слідує протиріччя з екстремальністю набору $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$, якщо $x_n^{(0)} \in (x_0;\, 1,9]$.

Розглянемо випадок, якщо $1,9 < x_n^{(0)} \leqslant 2$, тоді $F'\left(x_n^{(0)}\right) \leqslant F'(2) = 1$ і, відповідно, для всіх $n \geqslant 5$, $\gamma \in (0, n]$, маємо $x_1^{(0)} < 0,643034$. В силу спадання $F'(x)$ на $(0,\, x_0)$, має місце співвідношення

$$F'\left(x_1^{(0)}\right) > F'(0,643034) = 1,279195 > 1 = F'(2),$$

яке протирічить умовам (5.18) і (5.19). Звідси слідує протиріччя з екстремальністю набору $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$, якщо $x_n^{(0)} \in (x_0,\, 2]$. Таким чином, із всього вище сказаного одержуємо, що у випадку $n \geqslant 5$ набір точок $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^n$ не може бути екстремальним при умові $x_n^{(0)} \in (x_0, 2]$. Відповідно, для екстремального набору $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^n$ можливий тільки випадок, коли $x_k^{(0)} \in (0, x_0]$, $k = \overline{1, n}$, і $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$. Для $\gamma < \gamma_n = n$, $n \geqslant 5$, всі попередні міркування зберігаються. Звідси слідує, що теорема 5.3.1 у випадку $n \geqslant 5$ доведена.

Остаточно, маємо співвідношення

$$I_n(\gamma) \leqslant \gamma^{-\frac{n}{2}} \left[P\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{n/2}.$$

Використовуючи конкретний вираз для $P(x)$ і нескладні перетворення, одержуємо основну нерівність теореми 5.3.1. Твердження про знак рівності перевіряється безпосередньо. Теорема 5.3.1 доведена.

**Теорема 5.3.2.** [158, 29] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_n = \sqrt{n}$. Тоді для будь-якої $n$-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, такої, що $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) \leqslant 1$, $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) \leqslant 1$, і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, $B_0$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leqslant r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k),$$

*де $d_k$, $D_k$, $k = \overline{0, n}$, $d_0 = 0$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

**Доведення.** У випадку $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geqslant 2$, $\alpha_0 := \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \alpha_k$, аналогічно доведенню теореми 5.3.1 розглянемо величину

$$\Lambda_n(\gamma) := \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} = \frac{r^\gamma(B_0, 0) \prod\limits_{k=1}^n r(B_k, a_k)}{r^\gamma(D_0, 0) \prod\limits_{k=1}^n r(D_k, d_k)},$$

де $d_k$, $D_k$, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, є, відповідно, полюси та кругові області квадратичного диференціала (5.17). Як показано в роботі [27] (див. також теорему 2.4.1) при умовах теореми 5.3.2 виконується нерівність

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}\left(\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right)^{\frac{2\gamma}{n}}. \qquad (5.21)$$

Із умови $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) \leqslant 1$ слідує, що $\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k| \leqslant 1$. Тоді, маємо наступне співвідношення

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant \frac{n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{4^n}{(n-1)^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}.$$

Таким чином, аналогічно роботам [11, 142, 143], одержуємо

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant \prod_{k=1}^{6} f_k(n),$$

де

$$f_1(n) = n^{-\frac{\gamma}{2}}\cdot\left[\frac{n}{4}\right]^{\gamma+1}\cdot\left[1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right]^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}, \quad f_2(n) = \left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}},$$

$$f_3(n) = \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}, \quad f_4(n) = \left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}},$$

$$f_5(n) = \left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}, \quad f_6(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}.$$

Розглянемо спочатку випадок $\gamma_n = n^{0,5}$, тоді

$$\Lambda_n\left(n^{0,5}\right) = \prod_{k=1}^{6} f_k(n),$$

де

$$f_1(n) = (n)^{-\frac{n^{0,5}}{2}} \left[\frac{n}{4}\right]^{n^{0,5}+1} \left[1 - \frac{1}{n^{0,25}}\right]^{n-1-\frac{n-1}{n^{0,5}}}, \; f_2(n) = \left(n^{0,5}\right)^{n^{-0,5}},$$

$$f_3(n) = \left(1 - n^{-1,5}\right)^{n+n^{-0,5}}, \quad f_4(n) = \left(\frac{1+n^{-0,75}}{1-n^{-0,75}}\right)^{2n^{0,25}},$$

$$f_5(n) = \left(\frac{4}{n^{0,25}}\right)^{1-n^{-0,5}}, \quad f_6(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\frac{n-1}{n^{0,5}}}.$$

Далі, по стандартній схемі досліджуємо кожну функцію $f_k(n)$, $k = \overline{1,6}$. Аналіз показує, що функція $f_1(n)$ монотонно спадає на проміжку $n \geqslant 7$, тому справедлива нерівність

$$f_1(n) < f_1(7) \leqslant 0,016666, \quad n \geqslant 7.$$

Функція $f_2(n)$ також монотонно спадає на проміжку $n \geqslant 7$. Таким чином,

$$f_2(n) < f_2(7) \leqslant 1,444469, \quad n \geqslant 7.$$

Очевидно, що

$$f_3(n) < f_3(7) \leqslant 1, \quad n \geqslant 7.$$

Функцію $f_4(n)$ представимо наступним чином

$$f_4(n) = \left(1 + n^{-0,75}\right)^{n^{0,75} n^{-0,75} 2n^{0,25}} \left(1 - n^{-0,75}\right)^{(-n^{0,75})(n^{-0,75}) 2n^{0,25}}.$$

Оскільки $\left(1 + n^{-0,75}\right)^{n^{0,75}} < e$ при $n \in \mathbb{N}$, а $\left(1 - n^{-0,75}\right)^{-n^{0,75}} < 3$ при $n \geqslant 10$, тоді

$$f_4(n) \leqslant (3e)^{2n^{-0,5}}.$$

Таким чином, $y_4(n)$ спадає на всій області визначення і

$$f_4(n) < f_4(10) \leqslant 4,886133, \quad n \geqslant 10.$$

Функція $f_5(n)$ спадає на проміжку $n \geqslant 8$, звідси

$$f_5(n) < f_5(8) \leqslant 1,750853, \quad n \geqslant 8.$$

Для функції $f_6(n)$ справедливе наступне співвідношення

$$f_6(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\frac{n-1}{n^{0,5}}} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant 3, \quad n \geqslant 7.$$

Тоді підсумовуючи все вище сказане, отримуємо

$$\Lambda_n(n^{0,5}) = \prod_{k=1}^{6} f_k(n) \leqslant$$

$$\leqslant 0,016666 \cdot 1,444469 \cdot 1 \cdot 4,886133 \cdot 1,750853 \cdot 3 \approx 0,617839 < 1,$$

тобто

$$\Lambda_n\left(n^{0,5}\right) < 1 \quad \text{для } n \geqslant 10.$$

З іншої сторони, безпосередні обчислення показують, що $\Lambda_n\left(n^{0,5}\right) < 1$ для $n \in [3,9]$ (див. таблицю нижче).

| $n$ | $f_1(n)$ | $f_2(n)$ | $f_3(n)$ | $f_4(n)$ | $f_5(n)$ | $f_6(n)$ | $\Lambda_n\left(n^{0,5}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0,052699 | 1,373197 | 0,465492 | 11,910563 | 1,599730 | 1,408801 | 0,904224 |
| 4 | 0,039628 | 1,414213 | 0,548322 | 8,086547 | 1,681792 | 1,539600 | 0,643422 |
| 5 | 0,029590 | 1,433159 | 0,600258 | 6,329659 | 1,722722 | 1,637880 | 0,454626 |
| 6 | 0,022149 | 1,441582 | 0,636628 | 5,320779 | 1,742416 | 1,715055 | 0,323209 |
| 7 | 0,016666 | 1,444469 | 0,663961 | 4,664524 | 1,750178 | 1,777704 | 0,231974 |
| 8 | 0,012616 | 1,444259 | 0,685515 | 4,202238 | 1,750853 | 1,829872 | 0,168163 |
| 9 | 0,009607 | 1,442249 | 0,703109 | 3,858081 | 1,747161 | 1,874189 | 0,123077 |

Таким чином,

$$\Lambda_n\left(n^{0,5}\right) < 1 \quad \text{при всіх} \quad n \geqslant 3.$$

Нехай $\gamma \in (1, \gamma_n\,]$. Розглянемо функцію

$$\varphi_n(\gamma) = n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{4^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

при кожному фіксованому $n$. Запишемо функцію $\varphi_n(\gamma)$ наступним чином

$$\ln\varphi_n(\gamma) = -\frac{\gamma}{2}\ln n +$$
$$+\left(1-\frac{\gamma}{n}\right)\left[n\ln 4-(n-1)\ln(n-1)-\frac{1}{2}\ln\gamma+(n-1)\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)\right].$$

Похідна функції $\varphi_n(\gamma)$ по $\gamma$

$$[\ln\varphi_n(\gamma)]'_\gamma =$$
$$-\frac{\ln n}{2}-\ln 4+\frac{(n-1)}{n}\ln(n-1)+\frac{1}{2n}\ln\gamma-\frac{(n-1)}{n}\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)+$$
$$+\frac{1}{2\gamma}\left(1-\frac{\gamma}{n}\right)\left[\frac{(n-1)}{\sqrt{\gamma}-1}-1\right]\geqslant 0,$$

оскільки справедливі наступні нерівності

$$\eta_n(\gamma) = -\frac{\ln n}{2}+\ln\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{(n-1)}{n}\ln(n-1)<0,\quad n=\overline{3,22},$$

$$\text{і}\quad \eta_n(\gamma)>0,\quad \text{якщо}\quad n\geqslant 23,\quad \frac{1}{2n}\ln\gamma>0,$$
$$-\frac{n-1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)>0,\quad \left(1-\frac{\gamma}{n}\right)\frac{1}{\gamma}\left(\frac{n-1}{\sqrt{\gamma}-1}-1\right)>0.$$

Таким чином, функція $\varphi_n(\gamma)$ при кожному фіксованому $n$ монотонно зростає по $\gamma$ на інтервалі $(1,\gamma_n]$, а функція $I_n^0(\gamma)$ монотонно спадає по $\gamma$ на цьому ж інтервалі, оскільки

$$\left(\ln I_n^0(\gamma)\right)' = \left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{4\gamma}{n^2-\gamma}\right)+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\ln\left(\frac{n-\sqrt{\gamma}}{n+\sqrt{\gamma}}\right)\right)<0$$

при кожному фіксованому $n$. Отже,

$$\Lambda_n(\gamma)=\frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)}<\frac{I_n(\gamma_n)}{I_n^0(\gamma_n)}=\Lambda_n(\gamma_n)<1.$$

Тобто, $I_n(\gamma_n)<I_n^0(\gamma_n)$ при всіх значеннях $\gamma_n$, вказаних в теоремі 5.3.2. А це означає, що у випадку $\alpha_0\sqrt{\gamma}\geqslant 2$ при даних значеннях параметрів екстремальних конфігурацій не має.

Далі, розглядаємо випадок $\alpha_0\sqrt{\gamma} < 2$, $\alpha_0 := \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \alpha_k$. Розглянемо систему функцій $\zeta = \pi_k(w) = -i\left(e^{-i\theta_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1,n}$. При відповідному виборі однозначної вітки багатозначної аналітичної функції $\pi_k(w)$ отримаємо, що функція $\pi_k(w)$ здійснює однолисте і конформне відображення кутової області

$$P_k := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$$

на праву півплощину при кожному $k = \overline{1,n}$.

Сімейство функцій $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^n$ називається допустимим для розділяючого перетворення областей $B_k$, $k = \overline{0,n}$, відносно кутів $\{P_k\}_{k=1}^n$.

Нехай $L_k^{(1)}$, $k = \overline{1,n}$, позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$ отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_k\bigcap\overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_k)$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Позначимо через $L_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, таку область площини $\mathbb{C}_\zeta$, яка отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_{k+1}\bigcap\overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_{k+1})$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Відзначимо, що $B_{n+1} := B_1$, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Крім того, позначимо через $L_k^{(0)}$ таку область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_0\bigcap\overline{P}_k)$, яка містить точку $\zeta = 0$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Позначимо $\pi_k(a_k) := l_k^{(1)}$, $\pi_k(a_{k+1}) := l_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, $\pi_n(a_{n+1}) := l_n^{(2)}$. З визначення функцій $\pi_k$, випливає, що

$$|\pi_k(w) - l_k^{(1)}| \sim \frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot|w-a_k|, \quad w\to a_k, \quad w\in\overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w) - l_k^{(2)}| \sim \frac{1}{\alpha_k}|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot|w-a_{k+1}|, \quad w\to a_{k+1}, \quad w\in\overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w\to 0, \quad w\in\overline{P_k}.$$

Використовуючи формули (1.2) і (1.3) пункту 1.3 розділу 1 та теорему 4.10 [165], приходимо до висновку, що справедливі нерівності

$$r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left[\frac{r\left(L_k^{(1)}, l_k^{(1)}\right) \cdot r\left(L_{k-1}^{(2)}, l_{k-1}^{(2)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot \frac{1}{\alpha_{k-1}}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = \overline{1, n}, \tag{5.22}$$

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2}\left(L_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.23}$$

Приймаючи до уваги нерівності (5.22) та (5.23), отримаємо наступне співвідношення

$$I_n(\gamma) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \times \tag{5.24}$$

$$\times \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\gamma\alpha_k^2}\left(L_k^{(0)}, 0\right) r\left(L_k^{(1)}, l_k^{(1)}\right) r\left(L_k^{(2)}, l_k^{(2)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Відомо (див. [80]), що наступний функціонал

$$Y_3(t_1, t_2, t_3, D_1, D_2, D_3, d_1, d_2, d_3) = \tag{5.25}$$

$$= \frac{r^{t_1}(D_1, d_1) r^{t_2}(D_2, d_2) r^{t_3}(D_3, d_3)}{|d_1 - d_2|^{t_1+t_2-t_3} \cdot |d_1 - d_3|^{t_1-t_2+t_3} \cdot |d_2 - d_3|^{-t_1+t_2+t_3}}$$

є інваріантом відносно всіх конформних автоморфізмів розширеної комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$, $t_k \in \mathbb{R}^+$, де $D_k$ — області, що не перетинаються, такі, що $d_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k \in \{1, 2, 3\}$. З формули (5.24) після множення та ділення на таку величину

$$\left[\prod_{k=1}^{n} |l_k^{(1)} \cdot l_k^{(2)}|^{\gamma\alpha_k^2} |l_k^{(1)} - l_k^{(2)}|^{2-\gamma\alpha_k^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

отримаємо наступну нерівність

$$I_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \times$$

$$\times \left\{\prod_{k=1}^{n} \frac{r^{\gamma\alpha_k^2}\left(L_k^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(L_k^{(1)}, l_k^{(1)}\right) \cdot r\left(L_k^{(2)}, l_k^{(2)}\right)}{|l_k^{(1)} \cdot l_k^{(2)}|^{\gamma\alpha_k^2} |l_k^{(1)} - l_k^{(2)}|^{2-\gamma\alpha_k^2}}\right\}^{\frac{1}{2}} \times \tag{5.26}$$

$$\times\left[\prod_{k=1}^{n}|l_k^{(1)}\cdot l_k^{(2)}|^{\gamma\alpha_k^2}|l_k^{(1)}-l_k^{(2)}|^{2-\gamma\alpha_k^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

де $|l_k^{(1)}|=|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}},\ |l_k^{(2)}|=|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}},\ |l_k^{(1)}-l_k^{(2)}|=|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}},\ k=\overline{1,n}.$
Із співвідношення (5.26) маємо, що

$$I_n(\gamma)\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{|a_ka_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}\times$$

$$\times\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{r^{\gamma\alpha_k^2}\left(L_k^{(0)},0\right)\cdot r\left(L_k^{(1)},l_k^{(1)}\right)\cdot r\left(L_k^{(2)},l_k^{(2)}\right)}{|l_k^{(1)}\cdot l_k^{(2)}|^{\gamma\alpha_k^2}|l_k^{(1)}-l_k^{(2)}|^{2-\gamma\alpha_k^2}}\right\}^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{|l_k^{(1)}l_k^{(2)}|}{|l_k^{(1)}-l_k^{(2)}|}\right)^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n}|l_k^{(1)}-l_k^{(2)}|\right).$$

Далі слідує, що

$$I_n(\gamma)\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\cdot\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{r^{\gamma\alpha_k^2}\left(L_k^{(0)},0\right)\cdot r\left(L_k^{(1)},l_k^{(1)}\right)\cdot r\left(L_k^{(2)},l_k^{(2)}\right)}{|l_k^{(1)}\cdot l_k^{(2)}|^{\gamma\alpha_k^2}|l_k^{(1)}-l_k^{(2)}|^{2-\gamma\alpha_k^2}}\right\}^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{|a_k|}{|a_ka_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}\left(|l_k^{(1)}-l_k^{(2)}|\right)\left(\frac{|l_k^{(1)}l_k^{(2)}|}{|l_k^{(1)}-l_k^{(2)}|}\right)^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}\right].$$

Тоді легко бачити, що

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{|a_ka_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}\left(\prod_{k=1}^{n}|l_k^{(1)}-l_k^{(2)}|\right)=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{|a_ka_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}\left(|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)=\prod_{k=1}^{n}|a_k|\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}+\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)=$$

$$=2^n\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\left[\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}+\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right]\right)|a_k|=$$

$$=2^n\prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)|a_k|. \tag{5.27}$$

Аналогічно маємо, що

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{|l_k^{(1)}l_k^{(2)}|}{|l_k^{(1)}-l_k^{(2)}|}\right)^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}\right)^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{|a_ka_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}\right)^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}\left(|a_ka_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}=$$

$$=2^{-\frac{\gamma}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}{\alpha_k}^2}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{|a_ka_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}\right)^{-\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}\prod_{k=1}^{n}|a_k|^{\frac{\gamma\alpha_k}{4}}|a_{k+1}|^{\frac{\gamma\alpha_k}{4}}=$$

$$=2^{-\frac{\gamma}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}{\alpha_k}^2}\left[\prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{-\frac{\gamma{\alpha_k}^2}{2}}\prod_{k=1}^{n}|a_k|^{\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}.$$

Підсумовуючи наведені вище співвідношення, ми отримуємо

$$I_n(\gamma)\leqslant 2^{n-\frac{\gamma}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^2}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left\{\prod_{k=1}^{n}Y_3(\gamma\alpha_k^2,1,1,L_k^{(0)},L_k^{(1)},L_k^{(2)},0,l_k^{(1)},l_k^{(2)})\right\}^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}\prod_{k=1}^{n}|a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}.\qquad(5.28)$$

Легко бачити, що для довільного $k=\overline{1,n}$ ми можемо вказати конформний автоморфізм $\zeta=T_k(z)$ площини комплексних чисел $\overline{\mathbb{C}}$ такий, що $T_k(0)=0$, $T_k\left(l_k^{(s)}\right)=(-1)^s\cdot i$, $E_k^{(q)}:=T_k\left(L_k^{(q)}\right)$, $k=\overline{1,n}$, $0\in E_k^{(0)}$, $-i\in E_k^{(1)}$, $i\in E_k^{(2)}$, $s=1,2$, $q=0,1,2$. Використовуючи функціонал (5.25) маємо, що справедливі рівності

$$Y_3\left(\gamma\alpha_k^2,1,1,L_k^{(0)},L_k^{(1)},L_k^{(2)},0,l_k^{(1)},l_k^{(2)}\right)=$$

$$=Y_3\left(\gamma\alpha_k^2,1,1,E_k^{(0)},E_k^{(1)},E_k^{(2)},0,-i,i\right),$$

де $k=\overline{1,n}$, і справедлива наступна рівність

$$Y_3\left(\gamma\alpha_k^2,1,1,E_k^{(0)},E_k^{(1)},E_k^{(2)},0,-i,i\right)=$$

$$= \frac{r^{\alpha_k^2\gamma}\left(E_k^{(0)},0\right) r\left(E_k^{(1)},-i\right) r\left(E_k^{(2)},i\right)}{2^{2-\gamma\alpha_k^2}}\,.$$

Отже, використовуючи попередні рівності та формулу (5.28), приходимо до співвідношення

$$I_n(\gamma) \leqslant 2^{n-\frac{\gamma}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^2}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\cdot\mathcal{N}^{(\gamma)}\left(A_n\right)\times$$

$$\times\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{r^{\alpha_k^2\gamma}\left(E_k^{(0)},0\right) r\left(E_k^{(1)},-i\right) r\left(E_k^{(2)},i\right)}{2^{2-\gamma\alpha_k^2}}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Підсумовуючи всі попередні оцінки, отримуємо остаточну нерівність

$$I_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}\left(E_k^{(0)},0\right) r\left(E_k^{(1)},-i\right) r\left(E_k^{(2)},i\right)\right]^{\frac{1}{2}}\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n).$$

Так як $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) = 1$, то ми маємо

$$I_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}\left(E_k^{(0)},0\right) r\left(E_k^{(1)},-i\right) r\left(E_k^{(2)},i\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (5.29)$$

Таким чином, за допомогою розділяючого перетворення та формул (5.24) — (5.29), ми отримали оцінку функціонала $I_n(\gamma)$ через $n$ функціоналів, заданих на трійках попарно неперетинних областей $E_k^{(0)}$, $E_k^{(1)}$, $E_k^{(2)}$ таких, що $0 \in E_k^{(0)}$, $-i \in E_k^{(1)}$, $i \in E_k^{(2)}$. Таким чином, маємо, що при кожному $k = \overline{1,n}$ виконуються співвідношення

$$\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}\left(E_k^{(0)},0\right) r\left(E_k^{(1)},-i\right) r\left(E_k^{(2)},i\right) \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)},0\right) r\left(D_k^{(1)},-i\right) r\left(D_k^{(2)},i\right),$$

де $D_k^{(0)}$, $D_k^{(1)}$, $D_k^{(2)}$ — кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(4-\alpha_k^2\gamma)w^2-\alpha_k^2\gamma}{w^2(w^2+1)^2}\,dw^2$$

$(0 \in D_k^{(0)},\ -i \in D_k^{(1)},\ i \in D_k^{(2)})$. Крім того,

$$\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)},0\right) r\left(D_k^{(1)},-i\right) r\left(D_k^{(2)},i\right) =$$

$$= 2^{\sigma^2+6}\cdot\sigma^{\sigma^2}\cdot(2-\sigma)^{-\frac{1}{2}(2-\sigma)^2}\cdot(2+\sigma)^{-\frac{1}{2}(2+\sigma)^2} := S(\sigma), \quad \sigma\in[0,2].$$

Тоді використовуючи всі попередні міркування, отримаємо остаточну нерівність

$$I_n(\gamma)\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left[\prod_{k=1}^{n}S\left(\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\right]^{1/2} = \gamma^{-n/2}\left[\prod_{k=1}^{n}P\left(\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$P(x) = 2^{x^2+6}\cdot x^{x^2+2}\cdot(2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2}\cdot(2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2}, \quad x\in[0,2].$$

Відмітимо, що права частина останньої нерівності містить величини, які залежать тільки від кутових параметрів задачі.

Розглянемо допоміжну екстремальну задачу:

$$\prod_{k=1}^{n}P(x_k)\longrightarrow\max; \quad \sum_{k=1}^{n}x_k = 2\sqrt{\gamma},$$

$$x_k=\alpha_k\sqrt{\gamma}, \quad 0<x_k\leqslant 2.$$

Нехай $F(x)=\ln\left(P(x)\right)$ і $X^{(0)}=\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ — довільна екстремальна точка вище вказаної задачі. Аналогічним методом, який введений в роботі [76], приходимо до висновку, що справедливе наступне твердження: якщо $0<x_k^{(0)}<x_j^{(0)}<2$, $k\neq j$, то $F'\left(x_k^{(0)}\right)=F'\left(x_j^{(0)}\right)$, і якщо деяке $x_j^{(0)}=2$, то для довільного $x_k^{(0)}<2$, справедлива нерівність $F'\left(x_k^{(0)}\right)\leqslant F'\left(x_j^{(0)}\right)=F'(2)=1$, де $k,j=\overline{1,n}$, $k\neq j$, $F'(x)=2x\ln 2x+(2-x)\ln(2-x)-(2+x)\ln(2+x)+\frac{2}{x}$. Далі нам необхідно показати, що виконується наступна умова

$$x_1^{(0)}=x_2^{(0)}=\ldots=x_n^{(0)}.$$

Нехай $F'(x)=t$, $y_0\leqslant t\leqslant 1$, $y_0\approx -0,17$. Розглянемо наступні величини $t$: $t_1=1$, $t_2=0,95$, $t_3=0,9$, $t_4=0,85$, $\ldots$, $t_{23}=-0,15$, $t_{24}=-0,17$.

Знайдемо корені рівняння $F'(x) = t_k$, $k = \overline{1,24}$. Оскільки $\forall t_k \in [y_0, 1)$, то звідси слідує, що рівняння має два корені $x_1(t) \in (0, x_0]$, $x_2(t) \in (x_0, 2]$, $x_0 \approx 1,324683$.

Із таблиці (див. доведення теореми 4.5.2) слідує, що на інтервалі $t \in [0,95; 1]$ досягається мінімальне значення величин $(n-1)x_1(t_1) + x_2(t_2)$, $n \in \{3,4,5\}$, яке, відповідно, дорівнює $3,3873$, $4,0846$ і $4,7819$. Для $n = 3$ маємо, що

$$\sum_{k=1}^{3} x_k > 2x_1(t_1) + x_2(t_2) = 3,3873 = 2\sqrt{\gamma_3}.$$

Звідси маємо, що $\gamma_3 = 2,8684$. Тоді для $n = 4$ маємо, що

$$\sum_{k=1}^{4} x_k > 3x_1(t_1) + x_2(t_2) = 4,0846 = 2\sqrt{\gamma_4}.$$

Звідси маємо, що $\gamma_4 = 4,1709$. Аналогічно, для $n = 5$ маємо, що

$$\sum_{k=1}^{5} x_k > 4x_1(t_1) + x_2(t_2) = 4,7819 = 2\sqrt{\gamma_5}.$$

Таким чином, $\gamma_5 = 5,7116$. Використовуючи вище наведену таблицю, маємо, що відповідний мінімум величин

$$(n-1)x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$$

при $n \in \{6,7,8\}$, дорівнює, відповідно, $\gamma_6 = 7,505$, $\gamma_7 = 9,5369$, $\gamma_8 = 11,8119$. Із таблиці отримуємо, що для функції $F'(x)$ справедлива нерівність $(x_1 - 0,69)\,n + (x_2 - x_1) > 0$. Отже, $nx_1 + (x_2 - x_1) > 0,69\,n$. І, остаточно, отримаємо

$$(n-1)x_1 + x_2 > 0,69n = 2\sqrt{\gamma_n}, \quad \gamma_n = 0,1215\,n^2, \quad n \geqslant 9.$$

Таким чином, з вище наведених нерівностей випливає, що для довільного фіксованого $\gamma \in (1, \gamma_n]$, де $\gamma_n$ задано в умовах теореми, виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^{(0)}(t) > 2\sqrt{\gamma_n}, \quad n \geqslant 3.$$

З іншого боку, необхідною умовою є рівність

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^{(0)}(t) = 2\sqrt{\gamma_n}, \quad n \geqslant 3.$$

З цього випливає, що всі точки $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ належать проміжку $(0,\, x_0]$. Тобто ми маємо, що для екстремального набору $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ виконується рівність $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$, $k = \overline{1,n}$, для всіх $\gamma \in (1, \gamma_n]$, та $n \geqslant 4$. Отже, підсумовуючи все вище наведене маємо, що справедлива нерівність

$$I_n(\gamma) \leqslant \gamma^{-n/2} \left[\prod_{k=1}^{n} P\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

З іншого боку,

$$\gamma^{-n/2} \left[\prod_{k=1}^{n} P\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = r^{\gamma}\left(D_0^{(0)}, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right),$$

де $a_k^{(0)}$ і $D_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

Відомо (див. [11]), що

$$r^{\gamma}\left(D_0^{(0)}, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right) = \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Твердження про знак рівності перевіряється безпосередньо. Теорема 5.3.2 доведена.

## 5.4. Деякі оцінки для екстремального розбиття комплексної площини

**Теорема 5.4.1.** [53] *Нехай* $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, n)$, $\Delta \in \mathbb{R}^+$ *і* $A_n := \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *— довільна система різних точок на* $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. *Тоді для будь-якого* *набору областей, що взаємно не перетинаються,* $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, *такого, що* $I_n(\gamma) \geqslant \Delta$, *справедлива нерівність*

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant n^{-\frac{n}{2(n-\gamma)}} \cdot \Delta^{-\frac{1}{n-\gamma}} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} |a_k|\right)^{\frac{2}{n-\gamma}}.$$

**Доведення.** Нехай $d(G)$ — трансфінітний діаметр компактної множини $G \subset \mathbb{C}$. Тоді справедлива нерівність

$$r\left(B_0, 0\right) = r\left(B_0^+, \infty\right) = \frac{1}{d\left(\overline{\mathbb{C}} \setminus B_0^+\right)} \leqslant \frac{1}{d\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{B}_k^+\right)}, \tag{5.30}$$

де $B^+ = \left\{z : \frac{1}{z} \in B\right\}$.

Згідно із теоремою Пойа [99, с. 28], справедлива нерівність

$$\mu G \leqslant \pi d^2(G),$$

де $\mu G$ — лебегова міра компактної множини $G$. Звідси маємо, що

$$d(G) \geqslant \left(\frac{1}{\pi}\mu G\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тоді із (5.30) слідує, що

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \frac{1}{d\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{B}_k^+\right)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\pi}\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{B}_k^+\right)}} = \left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \mu\overline{B}_k^+\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{5.31}$$

Із теореми про мінімізацію площі [40, с. 34] слідує, що

$$\mu(D) \geqslant \pi r^2\left(D, a\right).$$

Тоді безпосередньо із нерівності (5.31) маємо, що

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \mu\overline{B}_k^+\right]^{-\frac{1}{2}} \leqslant \left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \mu B_k^+\right]^{-\frac{1}{2}} \leqslant \left[\sum_{k=1}^{n} r^2\left(B_k^+, a_k^+\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Звідси

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \frac{1}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} r^2\left(B_k^+, a_k^+\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Використовуючи рівність

$$r\left(B_k^+, a_k^+\right) = \frac{r\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^2}$$

приходимо до нерівності

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \frac{1}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{1}{2}}}. \tag{5.32}$$

Звідси та з припущення теореми маємо співвідношення

$$\Delta < r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}}.$$

Таким чином,

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \geqslant \Delta \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}. \tag{5.33}$$

Із нерівності Коші одержуємо нерівність

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4} \geqslant \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Далі, маємо

$$\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}} \geqslant \left[n\left[\prod_{k=1}^{n} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{\gamma}{2}} \geqslant$$

$$\geqslant n^{\frac{\gamma}{2}} \left[\prod_{k=1}^{n} |a_k|\right]^{-\frac{2\gamma}{n}} \left[\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)\right]^{\frac{\gamma}{n}}. \tag{5.34}$$

Із (5.33) та (5.34) слідує, що

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}} \geqslant n^{\frac{\gamma}{2}}\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{-\frac{2\gamma}{n}}\left[\Delta\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}\right]^{\frac{\gamma}{n}} =$$

$$= n^{\frac{\gamma}{2}}\Delta^{\frac{\gamma}{n}}\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{-\frac{2\gamma}{n}}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma^2}{2n}}.$$

Таким чином,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4} \geqslant n\cdot\Delta^{\frac{2}{n}}\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{-\frac{4}{n}}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{n}}.$$

І, нарешті, отримуємо

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{n-\gamma}{n}} \geqslant n\cdot\Delta^{\frac{2}{n}}\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{-\frac{4}{n}}.$$

Тоді

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{1}{2}} \geqslant \left(n\Delta^{\frac{2}{n}}\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{-\frac{4}{n}}\right)^{\frac{n}{2(n-\gamma)}} = n^{\frac{n}{2(n-\gamma)}}\Delta^{\frac{1}{n-\gamma}}\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{-\frac{2}{n-\gamma}}.$$

Звідси та із співвідношення (5.32) слідує нерівність теореми 5.4.1

$$r\left(B_0,0\right) \leqslant n^{-\frac{n}{2(n-\gamma)}}\cdot\Delta^{-\frac{1}{n-\gamma}}\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{\frac{2}{n-\gamma}}.$$

Теорема 5.4.1 доведена.

Якщо система точок $A_n := \{a_k\}_{k=1}^{n}$ така, що $\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k| \leqslant 1$, то одержуємо наступне твердження.

**Наслідок 5.4.1.** [23, 142] *Нехай* $n \geqslant 2$, $\gamma\in(0,n)$, $\Delta\in\mathbb{R}^+$ *і* $A_n := \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *— довільна система різних точок на* $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ *така, що* $\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k| \leqslant 1$. *Тоді для будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,n}$, $a_0=0$, *такого, що* $I_n(\gamma)\geqslant\Delta$, *справедлива нерівність*

$$r\left(B_0,0\right) \leqslant n^{-\frac{n}{2(n-\gamma)}}\cdot\Delta^{-\frac{1}{n-\gamma}}.$$

# Висновки

У п'ятому розділі дисертаційної роботи розглядається проблема про максимум наступного функціонала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

де $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $a_0 = 0$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ — будь-яка $n$-променева система точок така, що $\mathcal{N}^{(\gamma)}\left(A_n\right) \leqslant 1$, $\mathcal{N}^{(0)}\left(A_n\right) \leqslant 1$, $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ — будь-який набір областей, що взаємно не перетинаються, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, та $\gamma \in (0, n]$.

На даний час ця проблема повністю не розв'язана, відомі лише часткові результати. В роботі [158] одержано її розв'язок для $0 < \gamma < 1$ і $n \geqslant 2$. В [25, 141] отримано результати за деяких обмежень на геометрію розташування систем точок, а саме, для $n \geqslant 4$ й підкласу систем точок, що задовольняють умову $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1, n}.$ В [18] сформульована задача розв'язана для $\gamma \in (0, n^{0{,}38}]$ і $n \geqslant 5$.

В даному розділі запропоновано метод для дослідження проблеми 5.1 (теорема 5.1.1) та з'ясовано межі застосування цього методу (теорема 5.2.1). Також отримано розв'язки проблеми 5.1 при додатковому обмеженні величини внутрішнього радіуса області $B_0$ відносно точки нуль (теорема 5.3.1) та для випадку $n \geqslant 3$ і $\gamma \in (1, \sqrt{n}]$ (теорема 5.3.2).

Одержано оцінку зверху для внутрішнього радіуса області $B_0$ відносно точки нуль $r\left(B_0, 0\right)$ для довільної системи різних точок на комплексній площині (теорема 5.4.1).

Результати розділу опубліковано в статтях [15, 29, 50, 53, 158, 159, 161, 162].

# РОЗДІЛ 6

## ЕКСТРЕМАЛЬНЕ РОЗБИТТЯ КОМПЛЕКСНОЇ ПЛОЩИНИ З ДОДАТКОВОЮ УМОВОЮ СИМЕТРІЇ

Даний розділ присвячений дослідженню наступної екстремальної задачі про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей, частина з яких володіє симетрією відносно одиничного кола.

**Проблема 6.1.** При всіх значеннях параметра $\gamma \in (0, n]$ показати, що максимум добутку

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

де $B_0$, $B_1$, $B_2, \ldots, B_n$, $n \geqslant 2$, — області, що взаємно не перетинаються, в $\overline{\mathbb{C}}$ і, крім того, області $B_1, \ldots, B_n$ — симетричні відносно одиничного кола, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, досягається для конфігурації із областей $B_k$ і точок $a_k$, що володіють $n$-кратною симетрією.

Сформульована проблема 6.1 у випадку $\gamma = 1$ була поставлена в якості відкритої проблеми в роботі [57]. Для $n \geqslant 2$ і $\gamma = 1$ її розв'язав Л.В. Ковальов [77, 78]. Однак для значень $\gamma \neq 1$ ця задача впродовж тривалого часу не піддавалась розв'язанню.

## 6.1. Нерівність для добутку внутрішніх радіусів двох симетричних неперетинних областей з фіксованими полюсами

**Теорема 6.1.1.** [22] *Нехай* $\gamma \in (0, 2]$. *Тоді для будь-якого фіксованого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_1$, $B_2$, *такого, що* $0 \in B_0$, $1 \in B_1$, $-1 \in B_2$, *і, крім того, області* $B_k$, $k \in \{1, 2\}$, *— симетричні відносно одиничного кола* $\{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\, r(B_1, 1)\, r(B_2, -1) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{1-\gamma}\left[\frac{2^{2\gamma+6}\cdot(2\gamma)^{\gamma}}{(2-\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2-\sqrt{2\gamma})^2}\cdot(2+\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2+\sqrt{2\gamma})^2}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

*Знак рівності в цій нерівності досягається тоді, коли області* $B_0$, $B_1$, $B_2$ *— це кругові області квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^4 + 2(4-\gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2-1)^2}\, dw^2. \tag{6.1}$$

**Доведення.** Нехай

$$P_k := \left\{w : (-1)^{k+1}\operatorname{Im} w > 0\right\}, \quad k \in \{1, 2\}, \quad D_1 = P_1 \cap U_1,$$

$$D_2 = P_2 \cap U_1, \quad D_3 = \left(\overline{\mathbb{C}}\backslash U_1\right) \cap P_1, \quad D_4 = \left(\overline{\mathbb{C}}\backslash U_1\right) \cap P_2.$$

І нехай

$$\pi(w) = \frac{2w}{1+w^2}.$$

Тоді із визначення функції $\pi(w)$ слідує, що

$$|\pi(w)| \sim 2|w|, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi(w) - 1| \sim \frac{1}{2}\left|w - 1\right|^2, \quad w \to 1, \quad w \in \overline{P_k}.$$

Результат розділяючого перетворення області $B_0$ відносно функції $\pi(w)$ та системи областей $\left\{\overline{D}_k\right\}_{k=1}^{4}$ позначимо через $B_0^{(k)}$, $k=\overline{1,4}$; результат розділяючого перетворення області $B_j$, $j\in\{1,2\}$, відносно функції $2w/(1+w^2)$ і системи областей $\left\{\overline{D}_k\right\}_{k=1}^{4}$, позначимо — $B_1^{(k)}, B_2^{(k)}$, $k=\overline{1,4}$. Далі, використовуючи відповідні результати робіт [57, 165], маємо нерівності

$$r\left(B_0,0\right)\leqslant\left[\frac{1}{2}r\left(B_0^{(1)},0\right)\cdot\frac{1}{2}r\left(B_0^{(2)},0\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r\left(B_1,1\right)\leqslant\left[2r\left(B_1^{(1)},1\right)2r\left(B_1^{(2)},1\right)2r\left(B_1^{(3)},1\right)2r\left(B_1^{(4)},1\right)\right]^{\frac{1}{8}},$$

$$r\left(B_2,-1\right)\leqslant\left[2r\left(B_2^{(1)},-1\right)2r\left(B_2^{(2)},-1\right)2r\left(B_2^{(3)},-1\right)2r\left(B_2^{(4)},-1\right)\right]^{\frac{1}{8}}.$$

Звідси,

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)r\left(B_1,1\right)r\left(B_2,-1\right)\leqslant\left[\frac{1}{2}r\left(B_0^{(1)},0\right)\cdot\frac{1}{2}r\left(B_0^{(2)},0\right)\right]^{\frac{\gamma}{2}}\times$$

$$\times\left[2r\left(B_1^{(1)},1\right)2r\left(B_1^{(2)},1\right)2r\left(B_1^{(3)},1\right)2r\left(B_1^{(4)},1\right)\right]^{\frac{1}{8}}\times$$

$$\times\left[2r\left(B_2^{(1)},-1\right)2r\left(B_2^{(2)},-1\right)2r\left(B_2^{(3)},-1\right)2r\left(B_2^{(4)},-1\right)\right]^{\frac{1}{8}}.$$

Оскільки області $B_1$, $B_2$, — симетричні відносно одиничного кола, тоді

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)r\left(B_1,1\right)r\left(B_2,-1\right)\leqslant\left[\frac{1}{2}r\left(B_0^{(1)},0\right)\cdot\frac{1}{2}r\left(B_0^{(2)},0\right)\right]^{\frac{\gamma}{2}}\times$$

$$\times\left[\left(2r\left(B_1^{(1)},1\right)\right)^2\left(2r\left(B_1^{(2)},1\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{8}}\times$$

$$\times\left[\left(2r\left(B_2^{(1)},-1\right)\right)^2\left(2r\left(B_2^{(2)},-1\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{8}}.$$

Далі, використовуючи нескладні перетворення, одержуємо

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)r\left(B_1,1\right)r\left(B_2,-1\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2\left[2^{-2\gamma}r^{2\gamma}\left(B_0^{(1)},0\right)\right]^{\frac{1}{4}}\left[r\left(B_1^{(1)},1\right)r\left(B_1^{(2)},1\right)\right]^{\frac{1}{4}}\times$$

$$\times \left[2^{-2\gamma} r^{2\gamma}\left(B_0^{(2)},0\right)\right]^{\frac{1}{4}} \left[r\left(B_2^{(1)},-1\right) r\left(B_2^{(2)},-1\right)\right]^{\frac{1}{4}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{1-\gamma}\left[r^{2\gamma}\left(B_0^{(1)},0\right) r\left(B_1^{(1)},1\right) r\left(B_2^{(1)},-1\right)\right]^{\frac{1}{4}} \times$$

$$\times \left[r^{2\gamma}\left(B_0^{(2)},0\right) r\left(B_1^{(2)},1\right) r\left(B_2^{(2)},-1\right)\right]^{\frac{1}{4}},$$

де $B_0^{(k)}$, $B_1^{(k)}$, $B_2^{(k)}$, $k \in \{1,2\}$, — кругові області квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{(2-\gamma)z^2+\gamma}{z^2(z^2-1)^2}\,dz^2 \tag{6.2}$$

$\left(0 \in B_0^{(k)},\ 1 \in B_1^{(k)},\ -1 \in B_2^{(k)}\right)$. Оскільки $\gamma \in (0,2]$, тоді з результатів робіт [11, 56, 57], справедлива нерівність

$$r^{2\gamma}\left(B_0^{(1)},0\right) r\left(B_1^{(1)},1\right) r\left(B_2^{(1)},-1\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2\gamma+6}\cdot(2\gamma)^{\gamma}\cdot\left(2-\sqrt{2\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{2\gamma}\right)^2}\cdot\left(2+\sqrt{2\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2\gamma}\right)^2}.$$

Звідси,

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right) r\left(B_1,1\right) r\left(B_2,-1\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{1-\gamma}\left[2^{2\gamma+6}\cdot(2\gamma)^{\gamma}\cdot\left(2-\sqrt{2\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{2\gamma}\right)^2}\cdot\left(2+\sqrt{2\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2\gamma}\right)^2}\right]^{\frac{1}{4}} \times$$

$$\times\left[2^{2\gamma+6}\cdot(2\gamma)^{\gamma}\cdot\left(2-\sqrt{2\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{2\gamma}\right)^2}\cdot\left(2+\sqrt{2\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2\gamma}\right)^2}\right]^{\frac{1}{4}} =$$

$$= 2^{1-\gamma}\left[2^{2\gamma+6}\cdot(2\gamma)^{\gamma}\cdot\left(2-\sqrt{2\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{2\gamma}\right)^2}\cdot\left(2+\sqrt{2\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2\gamma}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Таким чином, основна нерівність теореми 5.1.1 доведена.

Виконуючи заміну змінної в квадратичному диференціалі (6.2) за формулою

$$z = \frac{2w}{1+w^2}$$

і враховуючи, що показник степеня дорівнює $2\gamma$, маємо

$$dz = \frac{2-2w^2}{(1+w^2)^2}dw,$$

тоді

$$dz^2 = \frac{4 - 8w^2 + 4w^4}{(1 + w^2)^4} dw^2.$$

І, таким чином, використовуючи нескладні перетворення, одержуємо квадратичний диференціал (6.1)

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-2\gamma)\frac{4w^2}{(1+w^2)^2} + 2\gamma}{\frac{4w^2}{(1+w^2)^2}\left(\frac{4w^2}{(1+w^2)^2} - 1\right)^2} \cdot \frac{4 - 8w^2 + 4w^4}{(1 + w^2)^4} dw^2 =$$

$$= -\frac{\frac{4w^2(4-2\gamma)}{(1+w^2)^2} + 2\gamma}{\frac{4w^2}{(1+w^2)^2}\left(\frac{4w^2-(1+w^2)^2}{(1+w^2)^2}\right)^2} \cdot \frac{4(1 - 2w^2 + z^4)}{(1 + w^2)^4} dw^2 =$$

$$= -\frac{\frac{4w^2(4-2\gamma)+2\gamma(1+w^2)^2}{(1+w^2)^2}}{\frac{4w^2}{(1+w^2)^2}\frac{(4w^2-(1+2w^2+w^4))^2}{(1+w^2)^4}} \cdot \frac{4(1 - 2w^2 + z^4)}{(1 + w^2)^4} dw^2 =$$

$$= -\frac{\left(4w^2(4-2\gamma) + 2\gamma(1+w^2)^2\right)\left(1 - 2w^2 + w^4\right)}{w^2(4w^2 - 1 - 2w^2 - w^4)^2} dw^2 =$$

$$= -\frac{\left(4w^2(4-2\gamma) + 2\gamma(1+2w^2+w^4)\right)\left(1 - 2w^2 + w^4\right)}{w^2(2w^2 - 1 - w^4)^2} dw^2 =$$

$$= -\frac{\left(2\gamma w^4 + (16 - 8\gamma + 4\gamma)w^2 + 2\gamma\right)\left(1 - w^2\right)^2}{w^2(1 - w^2)^4} dw^2 =$$

$$= -\frac{2\gamma w^4 + (16 - 4\gamma)w^2 + 2\gamma}{w^2(1 - w^2)^2} dw^2 = -\frac{2\gamma w^4 + 4(4 - \gamma)w^2 + 2\gamma}{w^2(1 - w^2)^2} dw^2.$$

Остаточно, отримуємо

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^4 + 2(4 - \gamma)w^2 + \gamma}{w^2(1 - w^2)^2} dw^2.$$

Знак рівності перевіряється безпосередньо. Теорема 6.1.1 доведена.

## 6.2. Розв'язок проблеми 6.1 при додаткових обмеженнях на кутові коефіцієнти

**Теорема 6.2.1.** [144] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_2 = 1,49$, $\gamma_3 = 3,01$, $\gamma_n = 0,25\,n^2$, $n \geqslant 4$. *Тоді для довільних різних точок одиничного кола* $|w| = 1$, *таких, що* $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{2\gamma}$, $k = \overline{1,n}$ *і для довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *і, крім того, області* $B_k$, $k = \overline{1,n}$, *— симетричні відносно одиничного кола* $|w| = 1$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left|1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right|^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \left|\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}}. \tag{6.3}$$

*Знак рівності в цій нерівності досягається тоді, коли точки* $a_k$ *й області* $B_k$, $k = \overline{0,n}$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2. \tag{6.4}$$

**Доведення.** Розглянемо систему функцій

$$\pi_k(w) = \left(e^{-i\arg a_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Сімейство функцій $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^n$ називається допустимим для розділяючого перетворення областей $B_k$, $k = \overline{0,n}$, відносно кутів $\{P_k\}_{k=1}^n$. Нехай $\Omega_k^{(1)}$, $k = \overline{1,n}$, позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_k \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_k) = 1$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. Позначимо через $\Omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, область площини $\mathbb{C}_\zeta$, яка отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_{k+1} \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_{k+1}) = -1$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. Відмітимо, що $B_{n+1} := B_1$, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Крім того, позначимо через $\Omega_k^{(0)}$ область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_0 \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\zeta = 0$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. Позначимо

$$\pi_k(a_k) := \omega_k^{(1)} = 1, \quad \pi_k(a_{k+1}) := \omega_k^{(2)} = -1, \quad k = \overline{1, n}.$$

З визначення функцій $\pi_k$, слідує, що

$$|\pi_k(w) - 1| \sim \frac{1}{\alpha_k} \cdot |w - a_k|, \quad w \to a_k, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w) + 1| \sim \frac{1}{\alpha_k} \cdot |w - a_{k+1}|, \quad w \to a_{k+1}, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{P_k}.$$

Використовуючи результати робіт [55, 56, 57] і формули (1.2) та (1.3), наведені в розділі 1, маємо нерівності

$$r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left[\alpha_k r\left(\Omega_k^{(1)}, 1\right) \cdot \alpha_{k-1} r\left(\Omega_k^{(2)}, -1\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = \overline{1, n}, \tag{6.5}$$

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{6.6}$$

З нерівностей (6.5) і (6.6), використовуючи методику, розвинену в монографії [11, с. 269–274], одержуємо

$$I_n(\gamma) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left[r\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}} \prod_{k=1}^{n} \left[\alpha_{k-1} r\left(\Omega_k^{(2)}, -1\right) \alpha_k r\left(\Omega_k^{(1)}, 1\right)\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\gamma\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right) r\left(\Omega_k^{(1)}, 1\right) r\left(\Omega_k^{(2)}, -1\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{6.7}$$

Далі, розглянемо добуток трьох областей

$$r^{\gamma\alpha_k^2}(G_0, 0) r(G_1, 1) r(G_2, -1).$$

До областей $G_0$, $G_1$, $G_2$ знову застосуємо розділяюче перетворення. Нехай

$$T_k := \left\{z : (-1)^{k+1} Im\, z > 0\right\}, \quad k \in \{1,2\},$$

$$D_1 = \overline{T_1} \cap U_1, \quad D_2 = \overline{\mathbb{C}} \backslash U_1 \cap \overline{T_1}, \quad D_3 = \overline{T_2} \cap U_1, \quad D_4 = \overline{\mathbb{C}} \backslash U_1 \cap \overline{T_2},$$

$$\beta(z) = \frac{2z}{1+z^2}.$$

З визначення функції $\beta(z)$, випливає, що

$$|\beta(z)| \sim 2|z|, \quad z \to 0, \quad z \in \overline{T_k},$$

$$|\beta(z) - 1| \sim \frac{1}{2}\left|z-1\right|^2, \quad z \to 1, \quad z \in \overline{T_k},$$

$$|\beta(z) + 1| \sim \frac{1}{2}\left|z+1\right|^2, \quad z \to -1, \quad z \in \overline{T_k}.$$

Результат розділяючого перетворення області $G_0$ відносно функції $\beta(z)$ і системи областей $\left\{\overline{D}_k\right\}_{k=1}^{4}$ позначимо через $G_0^{(k)}$, $k = \overline{1,4}$; крім того, результат розділяючого перетворення області $G_j$, $j \in \{1,2\}$, відносно функції $2z/(1+z^2)$ і системи областей $\left\{\overline{D}_k\right\}_{k=1}^{4}$ позначимо через $G_1^{(k)}, G_2^{(k)}$, $k = \overline{1,4}$. Таким чином, ми отримуємо нерівності

$$r\left(G_0, 0\right) \leqslant \left[\frac{1}{2} r\left(G_0^{(1)}, 0\right) \cdot \frac{1}{2} r\left(G_0^{(2)}, 0\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r\left(G_1, 1\right) \leqslant \left[2r\left(G_1^{(1)}, 1\right) 2r\left(G_1^{(2)}, 1\right) 2r\left(G_1^{(3)}, 1\right) 2r\left(G_1^{(4)}, 1\right)\right]^{\frac{1}{8}},$$

$$r\left(G_2, -1\right) \leqslant \left[2r\left(G_2^{(1)}, -1\right) 2r\left(G_2^{(2)}, -1\right) 2r\left(G_2^{(3)}, -1\right) 2r\left(G_2^{(4)}, -1\right)\right]^{\frac{1}{8}}.$$

Оскільки області $G_1$, $G_2$, — симетричні відносно одиничного кола, тоді маємо

$$r^{\alpha_k^2\gamma}\left(G_0, 0\right) r\left(G_1, 1\right) r\left(G_2, -1\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{1-\alpha_k^2\gamma} \left[r^{2\alpha_k^2\gamma}\left(G_0^{(1)}, 0\right) r\left(G_1^{(1)}, 1\right) r\left(G_2^{(1)}, -1\right)\right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[r^{2\alpha_k^2\gamma}\left(G_0^{(3)}, 0\right) r\left(G_1^{(3)}, 1\right) r\left(G_2^{(3)}, -1\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Для випадку $2\alpha_k^2\gamma \leqslant 4$, використовуючи результат роботи [57], одержуємо

$$r^{2\alpha_k^2\gamma}\left(G_0^{(s)},0\right) r\left(G_1^{(s)},1\right) r\left(G_2^{(s)},-1\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{2\gamma\alpha_k^2+6}\left(\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{2\gamma\alpha_k^2}}{\left(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}\left(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^2}\left(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}\left(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^2}}, \quad s\in\{1,3\}.$$

Рівність в цій нерівності досягається коли області $G_0^{(s)}$, $G_1^{(s)}$, $G_2^{(s)}$, є круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{(4-2\alpha_k^2\gamma)z^2+2\alpha_k^2\gamma}{z^2(z^2-1)^2}\,dz^2 \qquad (6.8)$$

$\left(0\in G_0^{(s)},\ 1\in G_1^{(s)},\ -1\in G_2^{(s)},\ s\in\{1,3\}\right)$. Якщо $\alpha_k^2\gamma \leqslant 2$, тоді згідно робіт [57, 76], справедлива нерівність

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^n \prod_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)\, 2^{\frac{1-\alpha_k^2\gamma}{2}}\times$$

$$\times\left[\frac{2^{2\gamma\alpha_k^2+6}\left(\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{2\gamma\alpha_k^2}}{\left(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}\left(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^2}\left(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}\left(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^2}}\right]^{\frac{1}{4}} =$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^n \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{2^8\left(\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{2\gamma\alpha_k^2+4}}{\left(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}\left(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^2}\left(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}\left(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^2}}\right]^{\frac{1}{4}}.$$

Нехай

$$\Psi(x) = 2^8\cdot x^{x^2+4}\cdot(2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2}\cdot(2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2},$$

де $x=\alpha_k\sqrt{2\gamma}$, $x\in(0,2]$.

Розглянемо наступну екстремальну задачу:

$$\prod_{k=1}^{n}\Psi(x_k)\longrightarrow \max;\quad \sum_{k=1}^{n}x_k = 2\sqrt{2\gamma},$$

$$x_k=\alpha_k\sqrt{2\gamma},\quad 0<x_k\leqslant 2.$$

Нехай $F(x)=\ln(\Psi(x))$ і $X^{(0)}=\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ — довільна екстремальна точка вище сформульованої задачі. Повторюючи міркування статті [76], ми одержуємо твердження: якщо $0 < x_k^{(0)} < x_j^{(0)} < 2$, тоді мають місце наступні рівності

$$F'\left(x_k^{(0)}\right) = F'\left(x_j^{(0)}\right),$$

і якщо деяке $x_j^{(0)} = 2$, тоді для будь-якого $x_k^{(0)} < 2$,

$$F'\left(x_k^{(0)}\right) \leqslant F'(2),$$

де $k, j = \overline{1, n}$, $k \neq j$,

$$F'(x) = 2x \ln x + (2 - x)\ln(2 - x) - (2 + x)\ln(2 + x) + \frac{4}{x}$$

(див. Рис. 6.9).

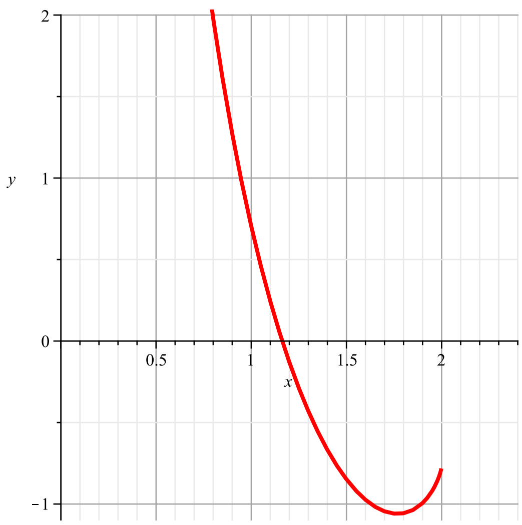


Рис. 6.9: Графік функції $y = F'(x)$

Перевіримо справедливість наступного твердження: якщо функція $Z(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} F(x_k)$ досягає максимума в точці $\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ при умовах $0 < x_k^{(0)} \leqslant 2$, $k = \overline{1, n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{(0)} = 2\sqrt{2\gamma}$, тоді

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}.$$

Для простоти, нехай $x_1^{(0)} \leqslant x_2^{(0)} \leqslant \ldots \leqslant x_n^{(0)}$. Функція

$$F''(x) = \ln\left(\frac{x^2}{4 - x^2}\right) - \frac{4}{x^2}$$

строго зростає на проміжку $(0, 2)$ та існує $x_0 \approx 1,768828$ таке, що

$$signF''(x) \equiv sign(x - x_0).$$

Враховуючи властивості функції $F'(x)$, умови теореми і застосовуючи метод, розроблений в статті [76], отримуємо, що для $F'(x)$ завжди виконується нерівність

$$(x_1 - 1,45)\, n + (x_2 - x_1) > 0$$

при $n \geqslant 4$. Звідси, $nx_1 + (x_2 - x_1) > 1,45\, n.$ Таким чином, остаточно, маємо

$$(n-1)x_1 + x_2 > 1,45n = 2\sqrt{2\gamma_n}, \quad \gamma_n = 0,25\, n^2, \quad n \geqslant 4.$$

Таким чином, у випадку $n \geqslant 4$ множина точок $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ не може бути екстремальною при умові $x_n^{(0)} \in (x_0, 2]$. Отже, для екстремальної множини $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ можливий лише випадок, коли $x_k^{(0)} \in (0, x_0]$, $k = \overline{1,n}$, і $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$. Для $\gamma < \gamma_n$, $n \geqslant 4$, повторюються всі попередні міркування.

Далі, нехай $F'(x) = t$, $y_0 \leqslant t \leqslant -0,78$, $y_0 \approx -1,059$. Розглянемо наступні величини $t$: $t_1 = -0,78$, $t_2 = -0,80$, $t_3 = -0,85$, $t_4 = -0,90$, $\ldots$, $t_{11} = -1,05$, $t_{12} = -1,059$. Рівняння $F'(x) = t_k$, $k = \overline{1,12}$, для будь-якого $t_k \in [y_0, -0,78)$ має два розв'язки: $x_1(t) \in (0, x_0]$, $x_2(t) \in (x_0, 2]$, $x_0 \approx 1,768828$. Безпосередні обчислення представлені в таблиці нижче.

| $k$ | $t_k$ | $x_1(t_k)$ | $x_2(t_k)$ | $x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$ | $2x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -0,78 | 1,458417 | 1,998914 | | |
| 2 | -0,80 | 1,470034 | 1,994779 | 3,453196 | 4,911613 |
| 3 | -0,85 | 1,501193 | 1,980165 | 3,450199 | 4,920233 |
| 4 | -0,90 | 1,536275 | 1,959964 | 3,461157 | 4,962350 |
| 5 | -0,95 | 1,577242 | 1,932788 | 3,469063 | 5,005338 |
| 6 | -1,00 | 1,628755 | 1,894239 | 3,471481 | 5,048723 |
| 7 | -1,01 | 1,641325 | 1,884177 | 3,512932 | 5,141687 |
| 8 | -1,02 | 1,655169 | 1,872815 | 3,514140 | 5,155465 |
| 9 | -1,03 | 1,670801 | 1,859641 | 3,514810 | 5,169979 |
| 10 | -1,04 | 1,689217 | 1,843656 | 3,514457 | 5,185258 |
| 11 | -1,05 | 1,712998 | 1,822285 | 3,511502 | 5,200719 |
| 12 | -1,059 | 1,768589 | 1,769066 | 3,482064 | 5,195062 |

Враховуючи властивості функції $F'(x)$ і умови теореми, маємо наступну нерівність

$$\sum_{k=1}^{n} x_k(t) > (n-1)x_1(t_k) + x_2(t_{k+1}) \geqslant$$

$$\geqslant \min_{1\leqslant k\leqslant 11} ((n-1)x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})) = 2\sqrt{2\gamma_n},$$

де $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$, $k = \overline{1,11}$. Таким чином, для екстремального набору $X^{(0)}$ можливий лише випадок, коли $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n} \in (0,\, x_0]$, $x_0 \approx 1,7688283$, і тому $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$. Звідси, остаточно, має місце співвідношення

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n} \left[\Psi\left(\frac{2}{n}\sqrt{2\gamma}\right)\right]^{\frac{n}{4}}.$$

Використовуючи точне представлення функції $\Psi\,(x)$ та нескладні перетворення, одержуємо нерівність (6.3). Таким чином, основна нерівність теореми 6.2.1 доведена. Зробивши заміну змінної в квадратичному диференціалі (6.8) за формулою $z = 2w^{\frac{n}{2}}/(1+w^n)$, отримаємо (6.4). Твердження про знак рівності перевіряється безпосередньо. Теорема 6.2.1 доведена.

## 6.3. Нерівність для добутку внутрішніх радіусів симетричних неперетинних областей з вільними полюсами

**Теорема 6.3.1.** [28] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 8$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_n = \sqrt{n}$. *Тоді для довільної системи різних точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *одиничного кола* $|w| = 1$ *і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, *причому області* $B_k$, $k = \overline{1, n}$, *— симетричні відносно одиничного кола* $|w| = 1$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}(D_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k),$$

*де* $d_k$, $D_k$, $k = \overline{0, n}$, $d_0 = 0$, *— це, відповідно, полюси та кругові області квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2. \tag{6.9}$$

**Доведення.** Спочатку розглянемо випадок, коли $\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geqslant 2$, $\alpha_0 := \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \alpha_k$. Згідно із міркуваннями роботи [11, теорема 5.2.3], маємо

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) = \prod_{k=1}^{n} \left[r(B_0, 0)\, r(B_k, a_k)\right]^{\frac{\gamma}{n}} \left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Із теореми М.О. Лаврентьєва [91], слідує нерівність

$$r(B_0, 0)\, r(B_k, a_k) \leqslant 1.$$

Тоді
$$\prod_{k=1}^{n}\left[r\left(B_0,0\right)r\left(B_k,a_k\right)\right]^{\frac{\gamma}{n}}\leqslant 1.$$
Оскільки області $B_k$, $k=\overline{1,n}$, взаємно не перетинаються, то за теоремою 1.5.6, справедлива нерівність
$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\leqslant 2^n\cdot\prod_{k=1}^{n}\alpha_k.$$
Тоді очевидно, що
$$\left[\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}\leqslant\left[2^n\cdot\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$
Легко бачити, що $\alpha_0=\alpha_{k_0}=\max\limits_{k}\alpha_k$, де $k_0$ — деяке натуральне число, яке міститься між $1$ і $n$. Використовуючи нерівність Коші і враховуючи, що $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k=2$, одержуємо наступний ланцюжок нерівностей
$$\prod_{k=1}^{n}\alpha_k=\alpha_{k_0}\prod_{k=1,k\neq k_0}^{n}\alpha_k\leqslant\alpha_{k_0}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=1,k\neq k_0}^{n}\alpha_k\right)^{n-1}=\alpha_0\left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1}.$$
Звідси слідують наступні співвідношення
$$\left[\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}\leqslant\left[2^n\alpha_0\left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}=$$
$$=\left[2^n\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$
В свою чергу, враховуючи попередні міркування, приходимо до нерівності
$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right)\leqslant\left[2^n\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$
Розглянемо поліном
$$T_n(x)=x(2-x)^{n-1},\quad x\in(0,2].$$
$$T_n'(x)=(2-x)^{n-2}(2-nx).$$

$$T_n'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{2}{n} \quad \text{або} \quad x = 2.$$

Звідси слідує, що поліном $T_n(x)$ має єдиний максимум на проміжку $(0, 2]$ в точці $x = \frac{2}{n}$. Таким чином, поліном $T_n(x)$ монотонно зростає на проміжку $\left(0, \frac{2}{n}\right)$ від значення $T_n(0) = 0$ до $T_n\left(\frac{2}{n}\right)$ і монотонно спадає на проміжку $\left(\frac{2}{n}, 2\right)$ від значення $T_n\left(\frac{2}{n}\right)$ до значення $T_n(2) = 0$. Далі, розглянемо $\gamma$ такі, щоб виконувалась умова $\frac{2}{\sqrt{2\gamma}} \geqslant \frac{2}{n}$, тобто такі $\gamma$, при яких виконується нерівність $\gamma \leqslant \frac{n^2}{2}$. Тоді, на проміжку $\frac{2}{\sqrt{2\gamma}} \leqslant x \leqslant 2$ $(\gamma \in (0, \sqrt{n}\,])$ виконується нерівність

$$x(2-x)^{n-1} \leqslant 2^{n-1}\frac{2}{\sqrt{2\gamma}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1} = \frac{2^n}{\sqrt{2\gamma}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1}. \quad (6.10)$$

Нехай

$$I_n^0(\gamma) = r^\gamma\left(B_0^{(0)}, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right),$$

де $0 \cup \left\{a_k^{(0)}\right\}_{k=1}^n$ і $\left\{B_k^{(0)}\right\}_{k=1}^n$ є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціала (6.9). Із вигляду квадратичного диференціала слідує, що полюси $a_k^{(0)} = \omega_k$, $k = \overline{1,n}$, де $\omega_k = e^{\frac{2\pi k i}{n}}$, $k = \overline{0, n-1}$, тобто є коренями $n$-тої степені із одиниці. Для подальшого вичислимо величину $I_n^0(\gamma)$ при всіх $\gamma \in (1, \sqrt{n}\,]$ та $n \geqslant 8$. Справедливе наступне твердження.

**Лема 6.3.1.** *При умовах теореми 6.3.1 виконуються рівності*

$$I_n^0(\gamma) = r^\gamma\left(B_0^{(0)}, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, \omega_k^{(0)}\right) =$$

$$= \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left|1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right|^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}}\left|\frac{n - \sqrt{2\gamma}}{n + \sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}}. \quad (6.11)$$

**Доведення.** Система кругових областей квадратичного диференціала (6.9) володіє $n$-кратною симетрією обертання відносно початку координат, а також симетрією відносно кожного променя $l_k = \left\{w : \arg w = \frac{2\pi k}{n}\right\}$, $k = \overline{0, n-1}$. Нехай $P_k := \{w : \arg \omega_k < \arg w < \arg \omega_{k+1}\}$. Застосуємо розділяюче перетворення до системи кругових областей квадратичного диференціала (6.9) за допомогою системи функцій $\zeta = \{\pi_k(w)\}_{k=1}^{n}$, де $\pi_k(w) = (\overline{\omega}_k \cdot w)^{\frac{n}{2}}$ і вітка функції $t = \zeta^{\frac{n}{2}}$ вибрана так, що $\zeta^{\frac{n}{2}} = x^{\frac{n}{2}} > 0$, $\zeta = x$, якщо $x > 0$. У випадку системи кругових областей квадратичного диференціала (6.9), як було показано вище, $a_k^{(0)} = \omega_k$, $k = \overline{1, n}$, $a_0^{(0)} = 0$.

Нехай $\Omega_k^{(1)}$, $k = \overline{1, n}$, позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_k^{(0)} \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(\omega_k)$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. Позначимо через $\Omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1, n}$, область площини $\mathbb{C}_\zeta$, яка отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_{k+1}^{(0)} \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(\omega_{k+1})$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. Відмітимо, що $B_{n+1}^{(0)} := B_1^{(0)}$, $\pi_n(\omega_{n+1}) := \pi_n(\omega_1)$. Крім того, позначимо через $\Omega_k^{(0)}$ область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_0^{(0)} \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\zeta = 0$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. З визначення функцій $\pi_k$, слідує, що

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(1)}| \sim \frac{n}{2} \cdot |w - \omega_k|, \quad w \to \omega_k, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(2)}| \sim \frac{n}{2} \cdot |w - \omega_{k+1}|, \quad w \to \omega_{k+1}, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{n}{2}}, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{P_k}.$$

Відмітимо, що в силу вище описаних симетрій системи кругових областей $B_k^{(0)}$ квадратичного диференціала (6.9) і властивостей розділяючого перетворення слідує, що всі області $\Omega_k^{(1)}$, $k = \overline{1, n}$, співпадають при всіх $k$ з одною і тою ж областю $\Omega_1$. Точно так, всі $\Omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1, n}$, співпадають при всіх $k$ з одною і тою ж областю $\Omega_2$. І, відповідно, області $\Omega_k^{(0)}$, $k = \overline{1, n}$, співпадають при всіх $k$ з одною і тою ж областю $\Omega_0$, причому область $\Omega_1$ симетрична області $\Omega_2$ відносно уявної осі, а область $\Omega_0$ володіє симетрією відносно дійсної осі. Тоді, використовуючи властивості розділяючого перетворення і симетрії областей $B_k^{(0)}$, одержуємо

$$r\left(B_0^{(0)},0\right)=\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\frac{4}{n^2}}\left(\Omega_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r\left(B_k^{(0)},\omega_k^{(0)}\right)=\left[\frac{2}{n}r\left(\Omega_k^{(1)},1\right)\cdot\frac{2}{n}r\left(\Omega_k^{(2)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}},\quad k=\overline{1,n}.$$

І так,

$$r^{\gamma}\left(B_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)},\omega_k^{(0)}\right)=$$

$$=\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\frac{4\gamma}{n^2}}\left(\Omega_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{4}{n^2}r\left(\Omega_k^{(1)},1\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(2)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\frac{2}{n}\right)^{n}\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\frac{4\gamma}{n^2}}\left(\Omega_k^{(0)},0\right)r\left(\Omega_k^{(1)},1\right)r\left(\Omega_k^{(2)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\frac{2}{n}\right)^{n}\left[r^{\frac{4\gamma}{n^2}}\left(\Omega_0,0\right)r\left(\Omega_1,1\right)r\left(\Omega_2,-1\right)\right]^{\frac{n}{2}}=$$

$$=\left(\frac{2}{n}\right)^{n}\left[r^{\frac{2\gamma}{n^2}}\left(\Omega_0,0\right)r^{\frac{2\gamma}{n^2}}\left(\Omega_\infty,\infty\right)r\left(\Omega_1,1\right)r\left(\Omega_2,-1\right)\right]^{\frac{n}{2}}=$$

$$=\left(\frac{2}{n}\right)^{n}\left(\frac{2^{\frac{8\gamma}{n^2}+6}\left(\frac{8\gamma}{n^2}\right)^{\frac{4\gamma}{n^2}}}{\left(2-\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2-\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2}\left(2+\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2+\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2}}\right)^{\frac{n}{4}},$$

де $\Omega_\infty=\left\{\zeta\in\overline{\mathbb{C}}:\frac{1}{\zeta}\subset\Omega_0\right\}$ і $r\left(\Omega_0,0\right)=r\left(\Omega_\infty,\infty\right)$.

Використовуючи нескладні перетворення, отримуємо

$$A=\left(2-\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2-\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2}=2^{2\left(1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2}\left(1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{2\left(1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2},$$

$$B=\left(2+\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2+\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2}=2^{2\left(1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2}\left(1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{2\left(1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2}.$$

$$M=\left(1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{2\left(1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2}=\left(1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{2-\frac{4\sqrt{2\gamma}}{n}+\frac{4\gamma}{n^2}},$$

$$N=\left(1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{2\left(1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2}=\left(1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{2+\frac{4\sqrt{2\gamma}}{n}+\frac{4\gamma}{n^2}}.$$

Звідси слідує, що

$$MN=\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{2\left(1+\frac{2\gamma}{n^2}\right)}\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\frac{4\sqrt{2\gamma}}{n}},$$

і

$$AB=2^{4\left(1+\frac{2\gamma}{n^2}\right)}MN=2^{4\left(1+\frac{2\gamma}{n^2}\right)}\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{2\left(1+\frac{2\gamma}{n^2}\right)}\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\frac{4\sqrt{2\gamma}}{n}}.$$

Таким чином,

$$I_n^0(\gamma)=\left(\frac{2}{n}\right)^n\left(\frac{2^{\frac{8\gamma}{n^2}+6}\left(\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{8\gamma}{n^2}}}{2^{\frac{4\gamma}{n^2}+4}\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\left(2+\frac{4\gamma}{n^2}\right)}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\frac{4\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\frac{n}{4}}.$$

Виконавши нескладні перетворення, одержуємо справедливість леми 6.3.1. Лема 6.3.1 доведена.

Нехай

$$\Lambda_n(\gamma)=\frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)}=\frac{r^\gamma\left(B_0,0\right)\prod\limits_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right)}{r^\gamma\left(B_0^{(0)},0\right)\prod\limits_{k=1}^{n}r\left(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\right)}.$$

Для систем областей, що взаємно не перетинаються, $B_k$, $k = \overline{0,n}$, справедлива наступна нерівність (див. також теорему 2.4.4)

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Тоді, враховуючи вище наведені міркування, при умові

$$\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geqslant 2, \quad \alpha_0 := \max_{1\leqslant k\leqslant n}\alpha_k,$$

маємо

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant \frac{n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(2^n\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^n\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\left|1-\frac{2\gamma}{n^2}\right|^{-\frac{n}{2}-\frac{\gamma}{n}}\left|\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(2^n\frac{2^n}{\sqrt{2\gamma}}(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}})^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^n\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\left|1-\frac{2\gamma}{n^2}\right|^{-\frac{n}{2}-\frac{\gamma}{n}}\left|\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}}} =$$

$$= n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(2^{2n}\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{n}{4}\right)^n\times$$

$$\times\left(\frac{n^2}{2\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{n+\sqrt{2\gamma}}{n-\sqrt{2\gamma}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} =$$

$$= n^{-\frac{\gamma}{2}}2^{2n-2\gamma}\left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}\times$$

$$\times n^{-\left(n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}\right)+n+\frac{2\gamma}{n}}\cdot 2^{-2n}\cdot(2\gamma)^{-\frac{\gamma}{n}}\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} =$$

$$= n^{-\frac{\gamma}{2}}2^{-2\gamma}\left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{1+\frac{\gamma}{n}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}\times$$

$$\times n^{1+\gamma+\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

І, остаточно, отримуємо

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1} \left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{4}{\sqrt{2\gamma}}\right) \left(\frac{n}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \times$$

$$\times \left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}.$$

Таким чином, нам вдалося отримати оцінку величини $\Lambda_n(\gamma)$ через п'ять елементарних функцій, які залежать від $n$ і $\gamma$. Введемо позначення

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant \prod_{k=1}^{5} f_k(n),$$

де

$$f_1(n) = n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1} \left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}},$$

$$f_2(n) = \left(\frac{4}{\sqrt{2\gamma}}\right) \left(\frac{n}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{\frac{\gamma}{n}}, \quad f_3(n) = \left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}},$$

$$f_4(n) = \left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}, \quad f_5(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}.$$

Спочатку дослідимо поведінку величини $\Lambda_n(\gamma)$ при $\gamma = n^{\frac{1}{2}}$. В цьому випадку, маємо наступні нерівності

$$\Lambda_n\left(n^{\frac{1}{2}}\right) \leqslant \prod_{k=1}^{5} f_k(n),$$

де

$$f_1(n) = n^{-\frac{1}{2}\sqrt{n}} \left(\frac{n}{4}\right)^{\sqrt{n}+1} \left(1-\frac{1}{\sqrt{2n^{\frac{1}{2}}}}\right)^{n-1-n^{\frac{1}{2}}+n^{-\frac{1}{2}}},$$

$$f_2(n) = \left(\frac{4}{\sqrt{2n^{\frac{1}{2}}}}\right)\left(\frac{n}{\sqrt{2n^{\frac{1}{2}}}}\right)^{n^{-\frac{1}{2}}}, \quad f_3(n) = \left(1 - 2n^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}},$$

$$f_4(n) = \left(\frac{1+\sqrt{2}n^{-\frac{3}{4}}}{1-\sqrt{2}n^{-\frac{3}{4}}}\right)^{\sqrt{2}n^{\frac{1}{4}}}, \quad f_5(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-n^{\frac{1}{2}}+n^{-\frac{1}{2}}}.$$

Тепер дослідимо кожну функцію $f_k(n)$, $k = \overline{1,5}$, за допомогою стандартних методів математичного аналізу.

Аналіз показує, що функція $f_1(n)$ монотонно спадає на проміжку $n \geqslant 17$ (див. Рис. 6.10), тому справедлива нерівність

$$f_1(n) < f_1(17) \leqslant 0,026888, \quad n \geqslant 17.$$

Функція $f_2(n)$ також монотонно спадає на проміжку $n \geqslant 8$ (див. Рис.

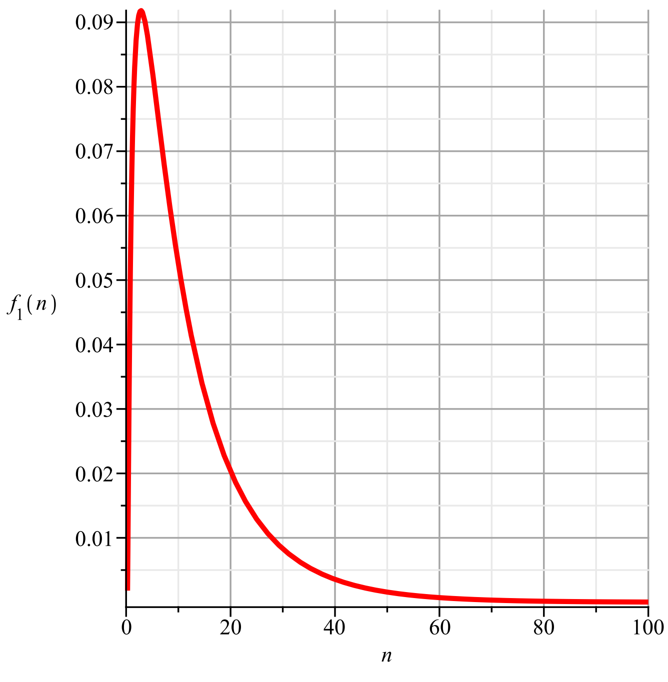


Рис. 6.10: Графік функції $f_1(n)$

6.11). Таким чином,

$$f_2(n) < f_2(8) \leqslant 2,582410, \quad n \geqslant 8.$$

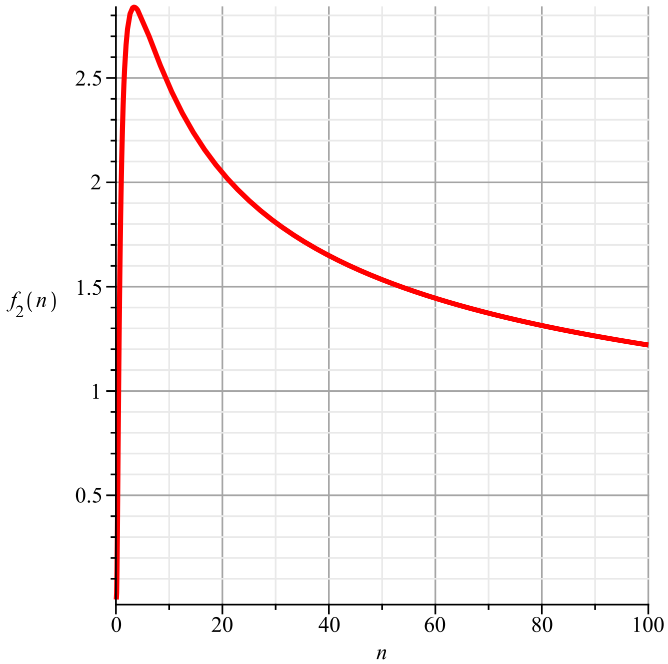


Рис. 6.11: Графік функції $f_2(n)$

Очевидно (див. Рис. 6.12), що

$$f_3(n) < f_3(8) \leqslant 1, \quad n \geqslant 8.$$

Функцію $f_4(n)$ представимо наступним чином

$$f_4(n) = \left(1+\sqrt{2}n^{-\frac{3}{4}}\right)^{\left(\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}n^{-\frac{3}{4}}\right)\sqrt{2}n^{\frac{1}{4}}} \left(1-\sqrt{2}n^{-\frac{3}{4}}\right)^{\left(-\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}n^{-\frac{3}{4}}\right)\sqrt{2}n^{\frac{1}{4}}}.$$

Оскільки

$$\left(1+\sqrt{2}n^{-\frac{3}{4}}\right)^{\left(\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{2}}\right)} < e \quad \text{при} \quad n \in \mathbb{N},$$

а

$$\left(1-\sqrt{2}n^{-\frac{3}{4}}\right)^{\left(-\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{2}}\right)} < 3 \quad \text{при} \quad n \geqslant 17,$$

тоді

$$f_4(n) \leqslant (3e)^{2n^{-\frac{1}{2}}}.$$

Таким чином, $y_4(n)$ спадає на всій області визначення (див. Рис. 6.13) і

$$f_4(n) < f_4(17) \leqslant 2,767588, \quad n \geqslant 17.$$

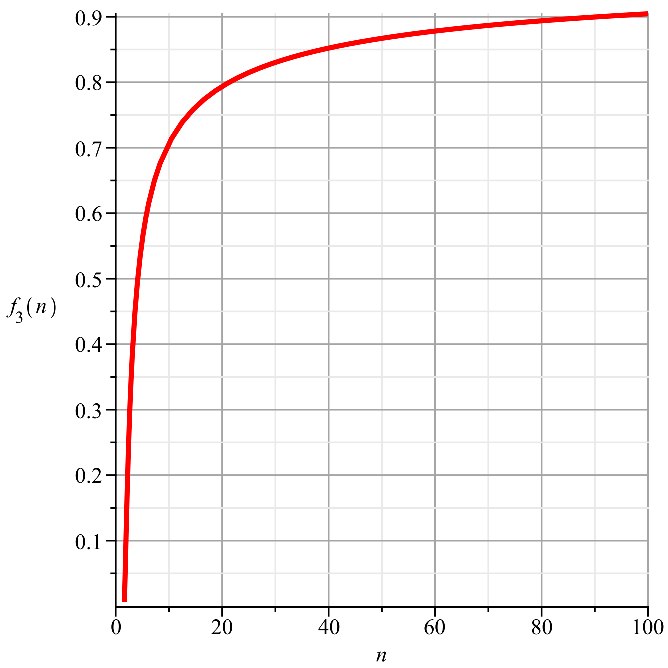


Рис. 6.12: Графік функції $f_3(n)$

Для функції $f_5(n)$ (див. Рис. 6.14) справедливе наступне співвідношення

$$f_5(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-n^{\frac{1}{2}}+n^{-\frac{1}{2}}} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant 3, \quad n \geqslant 8.$$

Тоді, підсумовуючи все вище сказане, отримуємо

$$\Lambda_n\left(\sqrt{n}\right) = \prod_{k=1}^{6} f_k(n) \leqslant$$

$$\leqslant 0,026888 \cdot 2,582410 \cdot 1 \cdot 2,767588 \cdot 3 \approx 0,6 < 1,$$

тобто

$$\Lambda_n\left(\sqrt{n}\right) < 1 \quad \text{для } n \geqslant 17.$$

З іншої сторони, безпосередні обчислення показують, що $\Lambda_n\left(\sqrt{n}\right) < 1$ для $n \in [8,16]$ (див. таблицю нижче).

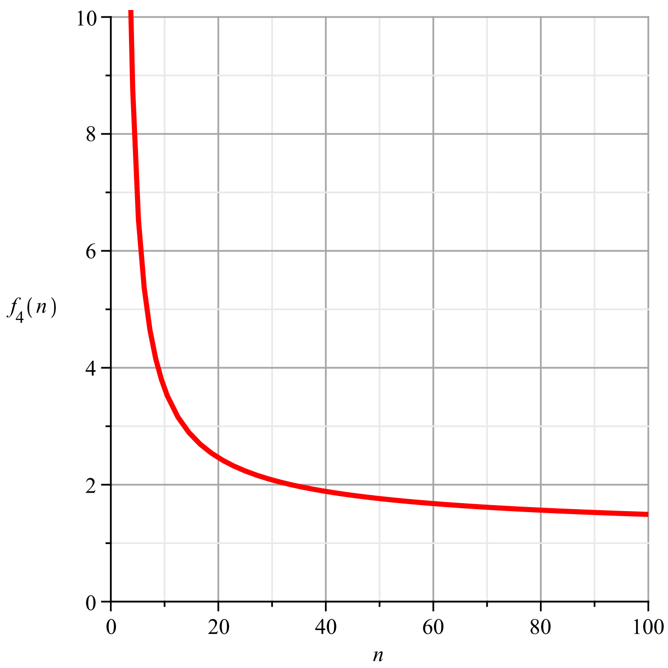


Рис. 6.13: Графік функції $f_4(n)$

| $n$ | $f_1(n)$ | $f_2(n)$ | $f_3(n)$ | $f_4(n)$ | $f_5(n)$ | $\Lambda_n\left(\sqrt{n}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 0,063573 | 2,582410 | 0,668390 | 4,298391 | 1,829873 | 0,863087 |
| 9 | 0,057824 | 2,519841 | 0,689369 | 3,926708 | 1,874189 | 0,739222 |
| 10 | 0,052537 | 2,461040 | 0,706571 | 3,642385 | 1,912447 | 0,636378 |
| 11 | 0,047710 | 2,406071 | 0,721019 | 3,417261 | 1,945912 | 0,550384 |
| 12 | 0,043324 | 2,354774 | 0,733385 | 3,234174 | 1,975511 | 0,478027 |
| 13 | 0,039347 | 2,306895 | 0,744133 | 3,082056 | 2,001935 | 0,416755 |
| 14 | 0,035748 | 2,262157 | 0,753594 | 2,953443 | 2,025716 | 0,364602 |
| 15 | 0,032493 | 2,220283 | 0,762012 | 2,843112 | 2,047267 | 0,319984 |
| 16 | 0,029550 | 2,181015 | 0,769567 | 2,747296 | 2,066917 | 0,281638 |

Таким чином, підсумовуючи всі попередні міркування, одержуємо, що $\Lambda_n\left(\sqrt{n}\right) < 1$ при $n \geqslant 8$ і $\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geqslant 2$.

Далі, необхідно показати, що справедлива нерівність $\Lambda_n(\gamma) < 1$ при $n \geqslant 8$, $\gamma \in (1, \sqrt{n}]$ і $\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geqslant 2$. Для цього доведемо наступне

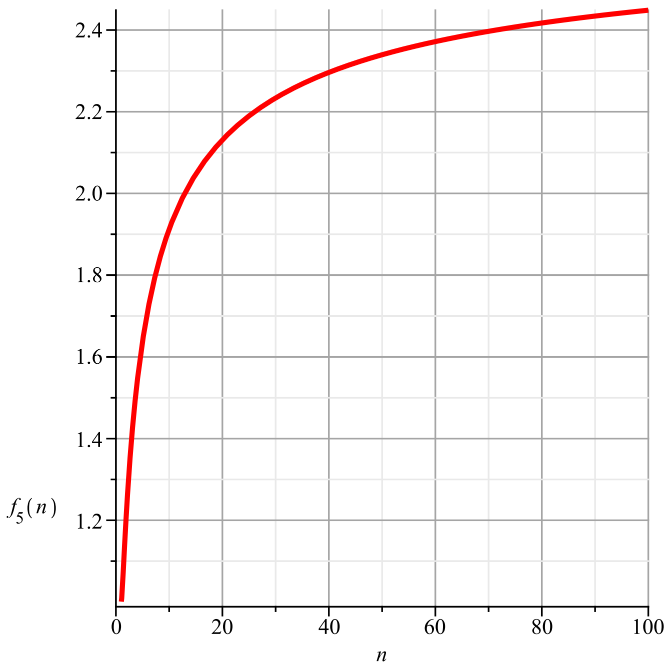


Рис. 6.14: Графік функції $f_5(n)$

твердження.

**Лема 6.3.2.** *При кожному фіксованому* $n \geqslant 8$ *функція*

$$n^{-\frac{\gamma}{2}} \left( \frac{4^n}{\sqrt{2\gamma}} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)} \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

*монотонно зростає по* $\gamma$ *на проміжку* $(1, \sqrt{n}\,]$.

**Доведення.** Мають місце наступні співвідношення

$$\ln\left(m_n(\gamma)\right) = -\frac{\gamma}{2} \ln n + \left(1 - \frac{\gamma}{n}\right) \times$$

$$\times \left( n \ln 4 - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \gamma + (n-1) \ln \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \right) - (n-1) \ln(n-1) \right),$$

$$\left(\ln\left(m_n(\gamma)\right)\right)'_{\gamma} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln n - \ln 4 + \frac{1}{2n}\ln 2 + \frac{1}{2n}\ln\gamma - \frac{n-1}{n}\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right) +$$

$$+\frac{n-1}{n}\ln(n-1) + \left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{n-1}{\sqrt{2\gamma}-1} - 1\right).$$

Оскільки справедливі наступні нерівності

$$0 < -\frac{1}{2}\ln 8 + \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{7}{8}\ln 7 < -\frac{1}{2}\ln n + \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{n-1}{n}\ln(n-1)$$

і

$$-\frac{n-1}{n}\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right) \geqslant 0,$$

$$\left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{n-1}{\sqrt{2\gamma}-1} - 1\right) \geqslant 0,$$

одержуємо, що $m_n(\gamma)$ монотонно зростає при вказаних в лемі параметрах $n$ і $\gamma$. Лема 6.3.2 доведена.

**Лема 6.3.3.** *При кожному фіксованому $n \geqslant 8$ функціонал $I_n^{(0)}(\gamma)$ монотонно спадає по $\gamma$ на проміжку $(1, \sqrt{n}\,]$.*

**Доведення.** В лемі 6.3.1 показано, що величина $I_n^0(\gamma)$ задовільняє наступну рівність

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Так як

$$\ln I_n^0(\gamma) =$$

$$= n\ln\frac{4}{n} + \frac{\gamma}{n}\ln\frac{2\gamma}{n^2} - \left(\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}\right)\ln\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right) + \sqrt{2\gamma}\ln\left(\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right),$$

тоді

$$\left(\ln I_n^0(\gamma)\right)'_\gamma = \frac{1}{n}\ln\frac{2\gamma}{n^2-2\gamma} + \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\ln\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right).$$

Позначимо $\frac{\sqrt{2\gamma}}{n} = x$, тоді отримуємо, що

$$\gamma = \frac{1}{2}n^2x^2, \quad \sqrt{\gamma} = \frac{nx}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt{2}}{n} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}n^{-\frac{3}{4}}.$$

Використовуючи вказані позначення, перетворимо вираз логарифмічної похідної $I_n^0(\gamma)$ наступним чином

$$\left(\ln I_n^0(\gamma)\right)'_\gamma = \frac{2}{n}\ln x - \frac{1}{n}\ln(1-x^2) + \frac{1}{nx}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

Далі використовуючи відомі формули

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots,$$

$$\ln\frac{1-x}{1+x} = -2x\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \ldots + \frac{1}{2k+1}x^{2k} + \ldots\right),$$

отримаємо, що

$$\left(\ln I_n^0(\gamma)\right)'_\gamma = \frac{2}{n}\ln x + \frac{1}{n}\left(x^2 + \frac{x^4}{2} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n} + \ldots\right) -$$

$$-\frac{2}{n}\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \ldots + \frac{1}{2k+1}x^{2k} + \ldots\right).$$

Не важко бачити, що справедливе наступне твердження

$$\left(\ln I_n^0(\gamma)\right)'_\gamma = \frac{2}{n}\ln x - \frac{2}{n} +$$

$$+\frac{x^2}{n}\left(1 - \frac{2}{3}\right) + \frac{x^4}{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) + \ldots + \frac{x^{2n}}{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{2k+1}\right) + \ldots.$$

Враховуючи, що

$$n \geqslant 8, \quad \frac{\sqrt{2}}{n} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}n^{-\frac{3}{4}}, \quad \frac{1}{k} - \frac{2}{2k+1} = \frac{1}{k(2k+1)} \leqslant \frac{1}{3}, \quad k \geqslant 1,$$

маємо

$$\left(\ln I_n^0(\gamma)\right)'_\gamma \leqslant -\frac{2}{n} + \frac{2}{n}\ln x + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \ldots + \frac{1}{3}x^{2k} + \ldots\right) =$$

$$= -\frac{2}{n} + \frac{2}{n}\ln x + \frac{1}{24}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right).$$

В силу монотонного зростання функції $\dfrac{x^2}{1-x^2}$ на проміжку $(0,1)$ для $x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{n}, \sqrt{2}n^{-\frac{3}{4}}\right]$, справедливі нерівності

$$\left(\ln I_n^0(\gamma)\right)'_\gamma \leqslant -\frac{2}{n}\left(1 + \ln\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{24}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{2}{n}\left(1 + \ln\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{24}\left(\frac{2n^{-\frac{3}{2}}}{1-2n^{-\frac{3}{2}}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{2}{n}\left(1 + \ln\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{24}\frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{\frac{n^{\frac{3}{2}}}{2} - 1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{2}{n}\left(0,65 + \frac{3}{4}\ln n - \frac{1}{24}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{\frac{n^{\frac{3}{2}}}{2} - 1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{2}{n}\left(0,65 - \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right),$$

оскільки

$$\frac{1}{24}\frac{1}{\frac{n^{\frac{3}{2}}}{2} - 1} < 1, \quad n \geqslant 8.$$

Очевидно, що

$$\left(0,65 - \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right) > 0 \quad \text{при всіх} \quad n \geqslant 8.$$

Таким чином, $I_n^0(\gamma)$ монотонно спадає по $\gamma$ на всьому проміжку $\gamma \in (1, \sqrt{n}\,]$. Лема 6.3.3 доведена.

Взявши до уваги результати леми 6.3.2 і леми 6.3.3, одержуємо, що справедливі наступні співвідношення

$$\Lambda_n(\gamma) = \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} < \frac{I_n(\sqrt{n})}{I_n^0(\sqrt{n})} = \Lambda_n\left(\sqrt{n}\right) < 1.$$

Таким чином, при $n \geqslant 8$, $\gamma \in (1, \sqrt{n}]$ і $\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geqslant 2$, виконується нерівність

$$I_n(\gamma_n) < I_n^0(\gamma_n),$$

а це означає, що для вказаних параметрів екстремальних конфігурацій не існує.

При умові $\alpha_0\sqrt{2\gamma} < 2$ і $n \geqslant 8$ твердження теореми 6.3.1 слідує із теореми 6.2.1 [144]. Твердження про знак рівності перевіряється безпосередньо. Теорема 6.3.1 доведена.

## 6.4. Нерівність для двох неперетинних та симетричних відносно одиничного кола областей

Як показав досвід дослідження проблеми 6.1, найбільші складності виникають при $n = 2$ і $n = 3$. Оскільки для $n = \overline{2,7}$ поки що не відомо жодних результатів при $\gamma > 1$, тому мають певний інтерес наступні результати.

**Теорема 6.4.1.** *Нехай* $n = 2$, $1 < \gamma \leqslant 1,1$. *Тоді для довільного набору трьох різних точок, таких, що* $a_0 = 0$, $|a_1| = |a_2| = 1$, *і довільного набору трьох взаємно неперетинних областей* $B_0$, $B_1$, $B_2$, *таких, що* $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \mathbb{C}$, $a_2 \in B_2 \subset \mathbb{C}$, *причому області* $B_1$ *і* $B_2$ *— симетричні відносно одиничного кола* $|w| = 1$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\, r(B_1, a_1)\, r(B_2, a_2) \leqslant \frac{4 \cdot \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{\gamma}{2}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)^{1+\frac{\gamma}{2}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{2}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}. \qquad (6.12)$$

*Знак рівності досягається тоді, коли точки* $0$, $a_1$, $a_2$, *і області* $B_0$, $B_1$, $B_2$, *є, відповідно, полюсами та круговими областями*

*квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^4 + 2(4-\gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2-1)^2}\, dw^2. \tag{6.13}$$

**Доведення.** Без обмеження загальності будемо вважати, що $a_1 = 1$. Доведення теореми складається з двох можливих випадків, а саме: коли $\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geqslant 2$ і $\alpha_0\sqrt{2\gamma} < 2$, $\alpha_0 = \max\limits_k \alpha_k$, $k \in \{1, 2\}$.

**I випадок.** Нехай $\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geqslant 2$, $\alpha_0 = \alpha_2 = \max\limits_k \alpha_k$,

$$I_2(\gamma) := r^{\gamma}(B_0, 0) r(B_1, a_1) r(B_2, a_2),$$

$$I_2^{(0)}(\gamma) := r^{\gamma}\left(B_0^{(0)}, 0\right) r\left(B_1^{(0)}, a_1^{(0)}\right) r\left(B_2^{(0)}, a_2^{(0)}\right) =$$

$$= \frac{4 \cdot \frac{\gamma}{2}^{\frac{\gamma}{2}}}{\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)^{1+\frac{\gamma}{2}}} \cdot \left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{2}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}, \tag{6.14}$$

де $0$, $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$ і $B_0^{(0)}, B_1^{(0)}, B_2^{(0)}$ є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціалу (6.13). Рівність (6.14) була отримана у роботах [147, 232]. Згідно з роботами [23, 78], будемо мати

$$I_2(\gamma) = r^{\gamma - \frac{2}{\alpha_2{}^2}}(B_0, 0)\left[r^{\frac{2}{\alpha_2{}^2}}(B_0, 0) r(B_1, a_1) r(B_2, a_2)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \left[2 \cdot I_2^{(0)}(\gamma)\right]^{-\frac{1}{2-\gamma}\left(\gamma - \frac{2}{\alpha_k{}^2}\right)} \left[r^{\frac{2}{\alpha_2{}^2}}(B_0, 0) r(B_1, a_1) r(B_2, a_2)\right].$$

Для зручності введемо наступне позначення

$$\left[2 \cdot I_2^{(0)}(\gamma)\right]^{-\frac{1}{2-\gamma}\left(\gamma - \frac{2}{\alpha_k{}^2}\right)} =: Q$$

Далі, за стандартною схемою робимо розділяюче перетворення для областей $B_0$, $B_1$, $B_2$. Позначимо $\theta_1 := \arg a_1 = 0$, $\theta_2 := \arg a_2$, $\theta_2 \in (0, 2\pi)$. Розглянемо систему функцій $\pi_1(w) = \left(e^{-i\theta_1}w\right)^{\frac{1}{\alpha_1}} = (w)^{\frac{1}{\alpha_1}}$, $\pi_2(w) = \left(e^{-i\theta_2}w\right)^{\frac{1}{\alpha_2}}$, де вітки багатозначних аналітичних функцій $(w)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k \in \{1, 2\}$, обрані таким чином, що на дійсній додатній осі вони приймають додатні значення. Розглянемо кутові області $P_1 := \{w : 0 < \arg w < \theta_2\}$, $P_2 := \{w : \theta_2 < \arg w < 2\pi\}$. Таким чином, функції

$\zeta = \pi_1(w)$, $\zeta = \pi_2(w)$ однолисно і конформно відображають відповідно області $P_1$, $P_2$ на верхню півплощину $Im\zeta > 0$.

Сімейство функцій $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^2$ є допустимим для розділяючого перетворення областей $B_k$, $k = \overline{0,2}$, відносно кутів $\{P_k\}_{k=1}^2$. Нехай $G_0^{(1)}$ позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_1(B_0 \bigcap \overline{P}_1)$, яка містить точку $\pi_1(a_0) = 0$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. Нехай $G_1^{(1)}$ позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_1(B_1 \bigcap \overline{P}_1)$, яка містить точку $\pi_1(a_1) = 1$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. Нехай $G_2^{(1)}$ позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_1(B_2 \bigcap \overline{P}_1)$, яка містить точку $\pi_1(a_2) = -1$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. Нехай $G_0^{(2)}$ позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_2(B_0 \bigcap \overline{P}_2)$, яка містить точку $\pi_2(a_0) = 0$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. Нехай $G_1^{(2)}$ позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_2(B_2 \bigcap \overline{P}_2)$, яка містить точку $\pi_2(a_2) = 1$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. Нехай $G_2^{(2)}$ позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_2(B_1 \bigcap \overline{P}_2)$, яка містить точку $\pi_2(a_1) = -1$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. Причому, тут було враховано, що

$$\pi_k(a_k) = 1, \quad \pi_k(a_{k+1}) := -1, \quad k \in \{1,2\}, \quad B_3 := B_1, \quad a_3 := a_1.$$

З визначення функцій $\pi_k$, $k \in \{1,2\}$, випливає, що справедливі наступні асимптотичні співвідношення

$$|\pi_k(w) - 1| \sim \frac{1}{\alpha_k} \cdot |w - a_k|, \quad w \to a_k, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)+1| \sim \frac{1}{\alpha_k}\cdot|w-a_{k+1}|, \quad w\to a_{k+1}, \quad w\in\overline{P_k},$$
$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w\to 0, \quad w\in\overline{P_k}.$$

Згідно з методом розділяючого перетворення [56] кожній трійці взаємно неперетинних областей $B_0$, $B_1$, $B_2$ і відповідній трійці точок $a_0$, $a_1$, $a_2$ відповідають дві трійки взаємно неперетинних областей $G_0^{(1)}$, $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$ та $G_0^{(2)}$, $G_1^{(2)}$, $G_2^{(2)}$, для яких справедливі включення $0\in G_0^{(k)}$, $1\in G_1^{(k)}$, $-1\in G_2^{(k)}$, $k\in\{1,2\}$ площини $\mathbb{C}_\zeta$. Тоді маємо нерівності

$$r\left(B_0,0\right) \leqslant \left[r^{\alpha_1^2}\left(G_0^{(1)},0\right)r^{\alpha_2^2}\left(G_0^{(2)},0\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{6.15}$$

$$r\left(B_1,a_1\right) \leqslant \left[\alpha_1\alpha_2 r\left(G_1^{(1)},1\right)r\left(G_2^{(2)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{6.16}$$

$$r\left(B_2,a_2\right) \leqslant \left[\alpha_1\alpha_2 r\left(G_2^{(1)},-1\right)r\left(G_1^{(2)},1\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{6.17}$$

Використовуючи нерівності (6.15) — (6.17), отримуємо співвідношення

$$r^{\frac{2}{{\alpha_2}^2}}(B_0,0)r(B_1,a_1)r(B_2,a_2) \leqslant \left[r^{\frac{\alpha_1^2}{2}}\left(G_0^{(1)},0\right)r^{\frac{\alpha_2^2}{2}}\left(G_0^{(2)},0\right)\right]^{\frac{2}{{\alpha_2}^2}}\times$$
$$\times\alpha_1\alpha_2\left[r\left(G_1^{(1)},1\right)r\left(G_2^{(2)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left[r\left(G_2^{(1)},-1\right)r\left(G_1^{(2)},1\right)\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant$$
$$\leqslant\alpha_1\alpha_2\left[r^{\frac{2\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\left(G_0^{(1)},0\right)r\left(G_1^{(1)},1\right)r\left(G_2^{(1)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\left[r^2\left(G_0^{(2)},0\right)r\left(G_1^{(2)},1\right)r\left(G_2^{(2)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Увівши позначення $t=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, отримаємо наступне

$$r^{\frac{2}{{\alpha_2}^2}}(B_0,0)r(B_1,a_1)r(B_2,a_2) \leqslant \alpha_1\alpha_2\left[r^{2t^2}\left(G_0^{(1)},0\right)r\left(G_1^{(1)},1\right)r\left(G_2^{(1)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\left[r^2\left(G_0^{(2)},0\right)r\left(G_1^{(2)},1\right)r\left(G_2^{(2)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Таким чином, приходимо до нерівності

$$I_2(\gamma)\leqslant Q\alpha_1\alpha_2\left(I_2(2t^2)\right)^{\frac{1}{2}}\left(I_2(2)\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{6.18}$$

яка дає оцінку початкового функціоналу $I_2(\gamma)$ через величину $Q$, величини $\alpha_1$, $\alpha_2$, значень функціоналів $I_2(2t^2)$ та $I_2(2)$ на трійках $G_0^{(1)}$, $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$ і $G_0^{(2)}$, $G_1^{(2)}$, $G_2^{(2)}$, відповідно. По аналогії з роботою [78] робимо ще одне розділяюче перетворення для $G_0^{(1)}$, $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$ і $G_0^{(2)}$, $G_1^{(2)}$, $G_2^{(2)}$ відносно системи областей, які вводяться нижче. Нехай

$$T_k := \left\{\zeta : (-1)^{k+1} Im\, \zeta > 0\right\}, \quad k \in \{1, 2\},$$

$$E_1 = T_1 \cap U_1, \quad E_2 = \overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{U}_1 \cap T_1, \quad E_3 = T_2 \cap U_1, \quad E_4 = \overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{U}_1 \cap \overline{T_2},$$

$$z = \beta(\zeta) = \frac{2\zeta}{1 + \zeta^2}.$$

Легко бачити, що $\beta(0) = 0$, $\beta(\pm 1) = \pm 1$, $\beta(\pm i) = \infty$,

$$|\beta(\zeta)| \sim 2|\zeta|, \quad \zeta \to 0, \quad \zeta \in \overline{T_k},$$

$$|\beta(\zeta) - 1| \sim \frac{1}{2}\left|\zeta - 1\right|^2, \quad \zeta \to 1, \quad \zeta \in \overline{T_k},$$

$$|\beta(\zeta) + 1| \sim \frac{1}{2}\left|\zeta + 1\right|^2, \quad \zeta \to -1, \quad \zeta \in \overline{T_k}.$$

Функція $z = \beta(\zeta)$ однолисто і конформно відображає відповідно області $E_1$, $E_4$ на верхню півплощину $\mathbb{C}_z$ ($Imz > 0$), $E_2$, $E_3$ на нижню півплощину $\mathbb{C}_z$ ($Imz < 0$).

Відносно системи областей $E_k$, $k = \overline{1, 4}$, повторно застосовується розділяюче перетворення до областей $G_0^{(1)}$, $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$. Нехай $\Omega_0^{(1)}(k)$ позначає область площини $\mathbb{C}_z$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\beta(G_0^{(1)} \bigcap \overline{E}_k)$, $k \in \{1, 3\}$, яка містить точку $0$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. Позначимо $\Omega_1^{(1)}(k)$, як область площини $\mathbb{C}_z$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\beta(G_1^{(1)} \bigcap \overline{E}_k)$, $k = \overline{1, 4}$, яка містить точку $1$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. Аналогічно, $\Omega_2^{(1)}(k)$ позначає область площини $\mathbb{C}_z$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\beta(G_2^{(1)} \bigcap \overline{E}_k)$, $k = \overline{1, 4}$, яка містить точку $-1$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі.

Тепер застосовуємо розділяюче перетворення до трійки областей $G_0^{(2)}$, $G_1^{(2)}$, $G_2^{(2)}$. Нехай $\Omega_0^{(2)}(k)$ позначає область площини $\mathbb{C}_z$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\beta(G_0^{(2)}\bigcap\overline{E}_k)$, $k\in\{1,3\}$, яка містить точку $0$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. Позначимо через $\Omega_1^{(2)}(k)$ область площини $\mathbb{C}_z$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\beta(G_1^{(2)}\bigcap\overline{E}_k)$, $k=\overline{1,4}$, яка містить точку $1$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. І, нарешті, $\Omega_2^{(2)}(k)$ позначає область площини $\mathbb{C}_z$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\beta(G_2^{(2)}\bigcap\overline{E}_k)$, $k=\overline{1,4}$, яка містить точку $-1$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі.

У відповідності до теорії розділяючого перетворення, маємо наступні нерівності для трійки $G_0^{(1)}$, $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$

$$r\left(G_0^{(1)},0\right)\leqslant\left[\frac{1}{2}r\left(\Omega_0^{(1)}(1),0\right)\cdot\frac{1}{2}r\left(\Omega_0^{(1)}(3),0\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r\left(G_1^{(1)},1\right)\leqslant\left[2r\left(\Omega_1^{(1)}(1),1\right)2r\left(\Omega_1^{(1)}(2),1\right)2r\left(\Omega_1^{(1)}(3),1\right)2r\left(\Omega_1^{(1)}(4),1\right)\right]^{\frac{1}{8}},$$

$$r\left(G_2^{(1)},-1\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left[2r\left(\Omega_2^{(1)}(1),-1\right)2r\left(\Omega_2^{(1)}(2),-1\right)2r\left(\Omega_2^{(1)}(3),-1\right)2r\left(\Omega_2^{(1)}(4),-1\right)\right]^{\frac{1}{8}}.$$

Аналогічно, отримуємо нерівності для трійки $G_0^{(2)}$, $G_1^{(2)}$, $G_2^{(2)}$

$$r\left(G_0^{(2)},0\right)\leqslant\left[\frac{1}{2}r\left(\Omega_0^{(2)}(1),0\right)\cdot\frac{1}{2}r\left(\Omega_0^{(2)}(3),0\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r\left(G_1^{(2)},1\right)\leqslant\left[2r\left(\Omega_1^{(2)}(1),1\right)2r\left(\Omega_1^{(2)}(2),1\right)2r\left(\Omega_1^{(2)}(3),1\right)2r\left(\Omega_1^{(2)}(4),1\right)\right]^{\frac{1}{8}},$$

$$r\left(G_2^{(2)},-1\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left[2r\left(\Omega_2^{(2)}(1),-1\right)2r\left(\Omega_2^{(2)}(2),-1\right)2r\left(\Omega_2^{(2)}(3),-1\right)2r\left(\Omega_2^{(2)}(4),-1\right)\right]^{\frac{1}{8}}.$$

Враховуючи симетрію областей $G_1^{(1)}$, $G_2^{(2)}$, $G_1^{(2)}$, $G_2^{(1)}$ відносно одиничного кола, маємо, що $\Omega_1^{(1)}(1)$ співпадає з областю $\Omega_1^{(1)}(2)$, $\Omega_1^{(1)}(3)$ співпадає з областю $\Omega_1^{(1)}(4)$, $\Omega_2^{(2)}(1)$ співпадає з областю $\Omega_2^{(2)}(2)$, $\Omega_2^{(2)}(3)$ співпадає з областю $\Omega_2^{(2)}(4)$. Отже, справедливі наступні співвідношення

$$r\left(G_0^{(1)},0\right) \leqslant \left[\frac{1}{4} r\left(\Omega_0^{(1)}(1),0\right) r\left(\Omega_0^{(1)}(3),0\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r\left(G_1^{(1)},1\right) \leqslant \left[4 r\left(\Omega_1^{(1)}(1),1\right) r\left(\Omega_1^{(1)}(3),1\right)\right]^{\frac{1}{4}},$$

$$r\left(G_2^{(1)},-1\right) \leqslant \left[4 r\left(\Omega_2^{(1)}(1),-1\right) r\left(\Omega_2^{(1)}(3),-1\right)\right]^{\frac{1}{4}}.$$

Аналогічно,

$$r\left(G_0^{(2)},0\right) \leqslant \left[\frac{1}{4} r\left(\Omega_0^{(2)}(1),0\right) r\left(\Omega_0^{(2)}(3),0\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r\left(G_1^{(2)},1\right) \leqslant \left[4 r\left(\Omega_1^{(2)}(1),1\right) r\left(\Omega_1^{(2)}(3),1\right)\right]^{\frac{1}{4}},$$

$$r\left(G_2^{(2)},-1\right) \leqslant \left[4 r\left(\Omega_2^{(2)}(1),-1\right) r\left(\Omega_2^{(2)}(3),-1\right)\right]^{\frac{1}{4}}.$$

Повертаючись до формули (6.18) та враховуючи попередні перетворення, маємо

$$I_2(\gamma) \leqslant Q\alpha_1\alpha_2 2^{-t^2}\left[r^{4t^2}\left(\Omega_0^{(1)}(1),0\right) r\left(\Omega_1^{(1)}(1),1\right) r\left(\Omega_2^{(1)}(1),-1\right)\right]^{\frac{1}{8}} \times$$

$$\times \left[r^{4t^2}\left(\Omega_0^{(1)}(3),0\right) r\left(\Omega_1^{(1)}(3),1\right) r\left(\Omega_2^{(1)}(3),-1\right)\right]^{\frac{1}{8}} \times$$

$$\times \left[r^{4}\left(\Omega_0^{(2)}(1),0\right) r\left(\Omega_1^{(2)}(1),1\right) r\left(\Omega_2^{(2)}(1),-1\right)\right]^{\frac{1}{8}} \times$$

$$\times \left[r^{4}\left(\Omega_0^{(2)}(3),0\right) r\left(\Omega_1^{(2)}(3),1\right) r\left(\Omega_2^{(2)}(3),-1\right)\right]^{\frac{1}{8}}.$$

Таким чином, ми отримали оцінку $I_2(\gamma)$ через величини $Q$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ та добуток значень функціоналів $I_2(4t^2)$ і $I_2(4)$, які він приймає на вище означених трійках областей $\Omega_0^{(s)}(k)$, $\Omega_1^{(s)}(k)$, $\Omega_2^{(s)}(k)$, де $s \in \{1,2\}$, $k \in$

$\{1,3\}$. З іншого боку, для функціонала $I_2(\sigma^2)$, де $0<\sigma\leqslant 2$, справедлива нерівність (див. [56])

$$I_2(\sigma^2)=r^{\sigma^2}(D_0,0)r(D_1,-1)r(D_2,1)\leqslant$$

$$\leqslant 2^{\sigma^2+6}\sigma^{\sigma^2}(2-\sigma)^{-(2-\sigma)^2/2}(2+\sigma)^{-(2+\sigma)^2/2},\quad 0<\sigma\leqslant 2, \tag{6.19}$$

знак рівності досягається тоді, коли області $D_0$, $D_1$, $D_2$, є круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2=-\frac{(4-\sigma^2)w^2+\sigma^2}{w^2(w^2-1)^2}\,dw^2.$$

Враховуючи (6.19), маємо наступне

$$\left(r\left(\Omega_0^{(1)}(1),0\right)\right)^{4t^2}r\left(\Omega_1^{(1)}(1),1\right)r\left(\Omega_2^{(1)}(2),-1\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2^{\sigma^2+6}\sigma^{\sigma^2}(2-\sigma)^{-(2-\sigma)^2/2}(2+\sigma)^{-(2+\sigma)^2/2},\quad 0<\sigma\leqslant 2,$$

де $\sigma=2t$. Звідси отримуємо, що

$$2^{\sigma^2+6}\sigma^{\sigma^2}(2-\sigma)^{-(2-\sigma)^2/2}(2+\sigma)^{-(2+\sigma)^2/2}=$$

$$=2^{2t^2+6}2t^{2t^2}(2-2t)^{-(2-2t)^2/2}(2+2t)^{-(2+2t)^2/2}=$$

$$=2^{4t^2+6+4t^2-(2-2t)^2/2-(2+2t)^2/2}t^{4t^2}(1-t)^{-2(1-t)^2}(1+t)^{-2(1+t)^2}=$$

$$=2^{2+4t^2}t^{4t^2}(1-t)^{-2(1-t)^2}(1+t)^{-2(1+t)^2}.$$

Тому,

$$\left[\left(r\left(\Omega_0^{(1)}(k),0\right)\right)^{4t^2}r\left(\Omega_1^{(1)}(k),1\right)r\left(\Omega_2^{(1)}(k),-1\right)\right]^{\frac{1}{8}}\leqslant$$

$$\leqslant\left[2^{2+4t^2}t^{4t^2}(1-t)^{-2(1-t)^2}(1+t)^{-2(1+t)^2}\right]^{\frac{1}{8}},\quad k\in\{1,3\}. \tag{6.20}$$

Із співвідношення (6.20) при $t=1$ маємо наступне

$$\left[\left(r\left(\Omega_0^{(2)}(k),0\right)\right)^{4}r\left(\Omega_1^{(2)}(k),1\right)r\left(\Omega_2^{(2)},-1\right)\right]^{\frac{1}{8}}\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{8}},\quad k\in\{1,3\}.$$

Отже,

$$I_2(\gamma) \leqslant Q\alpha_2^2 \cdot t \cdot 2^{-t^2} \left[2^{-2} \cdot 2^{2+4t^2} t^{4t^2} (1-t)^{-2(1-t)^2} (1+t)^{-2(1+t)^2}\right]^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \left[2 \cdot I_2^{(0)}(\gamma)\right]^{-\frac{1}{2-\gamma}\left(\gamma - \frac{(t+1)^2}{2}\right)} \cdot \frac{4}{(t+1)^2} \cdot t^{1+t^2} \cdot (1-t)^{-\frac{1}{2}(1-t)^2} \cdot (1+t)^{-\frac{1}{2}(1+t)^2}.$$

Оскільки $\alpha_2 = \alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, то $t \in \left(0, \sqrt{2\gamma} - 1\right)$. Тоді при умові, що $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$ та $I_2(\gamma) \geqslant I_2^{(0)}(\gamma)$, отримуємо нерівність

$$I_2(\gamma) \leqslant y(\gamma, t),$$

де

$$y(\gamma, t) = k(\gamma, t) \cdot s(t), \tag{6.21}$$

$$k(\gamma, t) = \left[2 \cdot \left(\frac{4 \cdot \frac{\gamma}{2}^{\frac{\gamma}{2}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)^{1+\frac{\gamma}{2}}} \cdot \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{2}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}\right)\right]^{-\frac{1}{2-\gamma}\left(\gamma - \frac{(t+1)^2}{2}\right)},$$

$$s(t) = \frac{4}{(t+1)^2} \cdot t^{1+t^2} \cdot (1-t)^{-\frac{1}{2}(1-t)^2} \cdot (1+t)^{-\frac{1}{2}(1+t)^2},$$

$\gamma \in (1; 1,1]$, $t \in \left(0, \sqrt{2\gamma} - 1\right)$. Розглянемо функцію $s(t)$, $t \in \left(0, \sqrt{2\gamma} - 1\right)$. Не важко показати, що

$$(\ln s(t))' = \frac{1-t}{1+t} + 2t \ln t + (1-t)\ln(1-t) - (1+t)\ln(1+t),$$

$$(\ln s(t))'' = -\frac{2}{(1+t)^2} + \ln \frac{t^2}{1-t^2}.$$

Звідси слідує, що $(\ln s(t))'$ монотонно спадає на всьому проміжку. В точці $\widetilde{t} \approx 0,345157$ $(\ln s(t))' = 0$, отже, функція $s(t)$ зростає від точки $0$ до точки $\widetilde{t} \approx 0,345157$ і спадає на проміжку від точки $\widetilde{t} \approx 0,345157$ до точки $\sqrt{2\gamma} - 1 \approx 0,4832$, $\max s(\widetilde{t}) \approx 0,562873$ (див. Рис. 6.17).

Покажемо, що для кожного фіксованого $\gamma \in (1; 1,1]$ для $t \in \left(0, \sqrt{2\gamma} - 1\right)$ $k(\gamma, t) < 1$, $k(\gamma, \sqrt{2\gamma} - 1) = 1$. Для зручності у формулі (6.21) зробимо заміну змінної, а саме: покладемо $\frac{\gamma}{2} = x$, $x \in \left(\frac{10}{20}, \frac{11}{20}\right]$,

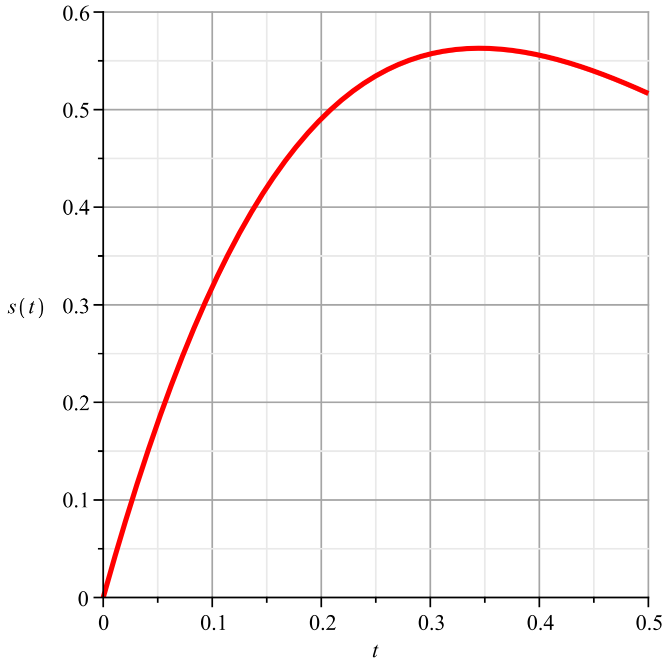


Рис. 6.15: Графік функції $s(t)$.

маємо

$$y_1(x,t) = k_1(x,t)\cdot s(t) = \left[8\frac{x^x}{(1-x)^{1+x}}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{2\sqrt{x}}\right]^{-\frac{x-\frac{1}{4}(t+1)^2}{1-x}} \times \quad (6.22)$$

$$\times\frac{4}{(t+1)^2}\cdot t^{1+t^2}\cdot(1-t)^{-\frac{1}{2}(1-t)^2}\cdot(1+t)^{-\frac{1}{2}(1+t)^2}.$$

Справедлива рівність

$$(\ln k_1(x,t))'_t = \frac{1}{2}(t+1)\frac{\ln\left[8\frac{x^x}{(1-x)^{1+x}}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{2\sqrt{x}}\right]}{1-x}.$$

Позначимо

$$Y_1(x) = \ln\left[8\frac{x^x}{(1-x)^{1+x}}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{2\sqrt{x}}\right].$$

Проводячи дослідження функції $\Psi(x) = \frac{Y_1(x)}{1-x}$ бачимо, що ця функція завжди додатна та спадає на проміжку $x\in(0,5;\,0,55)$ (див. Рис. 6.16). З цього випливає, що для кожного фіксованого $\gamma$, $k(\gamma,t)<1$ для $t\in$

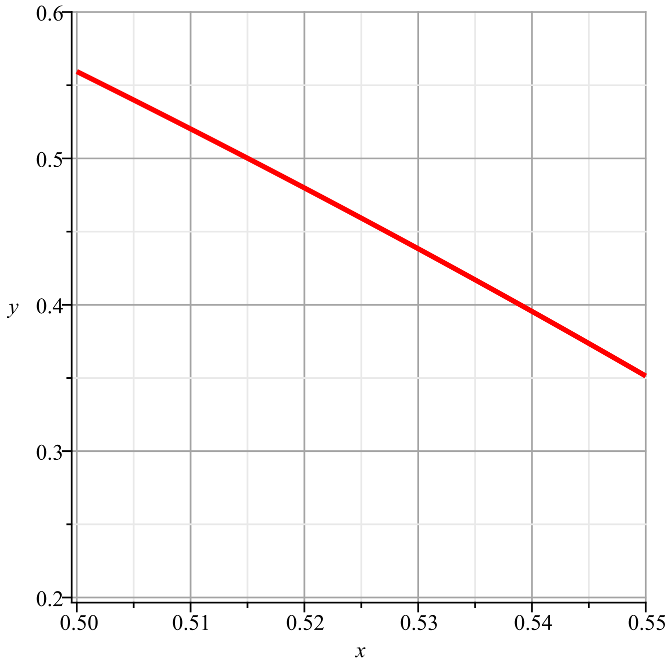


Рис. 6.16: Графік функції $y = \Psi(x)$.

$\left(0,\ \sqrt{2\gamma} - 1\right)$. Розглянемо величину

$$I_2^{(0)}(\gamma) := I_2^{(0)}(2x) = 4\frac{x^x}{(1-x)^{1+x}}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{2\sqrt{x}}.$$

Справедливі наступні рівності

$$\ln I_2^{(0)}(2x) = \ln 4 + x\ln x - (1+x)\ln(1+x) + 2\sqrt{x}\ln(1-\sqrt{x}) - 2\sqrt{x}\ln(1+\sqrt{x}),$$

$$(\ln I_2^{(0)}(2x))' = \ln\frac{x}{1-x} + \ln\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} < 0.$$

Отже, величина $I_2^{(0)}(\gamma)$ монотонно спадає по $\gamma$. На основі вище наведених міркувань маємо, що $y(\gamma, t) < \max s(t) < 0,562873 < I_2^{(0)}(\gamma)$ (див. наступну таблицю).

| $\gamma$ | $\max_t y$ | $I_2^{(0)}(\gamma)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0,5527960980 | 0,6613583736 |
| 1,01 | 0,5514734608 | 0,6531863388 |
| 1,02 | 0,5502797388 | 0,6451552085 |
| 1,03 | 0,5492168992 | 0,6372620032 |
| 1,04 | 0,5482871148 | 0,6295038046 |
| 1,05 | 0,5474927736 | 0,6218777824 |
| 1,06 | 0,5468364892 | 0,6143811812 |
| 1,07 | 0,5463211184 | 0,6070113078 |
| 1,08 | 0,5459497752 | 0,5997655432 |
| 1,09 | 0,5457258444 | 0,5926413374 |
| 1,1 | 0,5456530068 | 0,5856362013 |

Таким чином, ми отримали, що

$$I_2(\gamma) < y(\gamma, t) < I_2^{(0)}(\gamma).$$

Отже, наше припущення, що $I_2(\gamma) \geqslant I_2^{(0)}(\gamma)$ було невірне і ми отримали протиріччя, яке і доводить дану теорему у випадку, коли $\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geqslant 2$. Отже, у випадку $\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geqslant 2$ екстремальних конфігурацій немає.

**ІІ випадок.** Розглянемо випадок, коли $\alpha_0\sqrt{2\gamma} < 2$. В цьому випадку в роботі [144] при $n = 2$, $\alpha_0\sqrt{2\gamma} < 2$, $\gamma \in [1; 1,49]$ було доведено нерівність (6.12) для довільного набору трьох різних точок таких, що $a_0 = 0$, $|a_1| = |a_2| = 1$ і довільного набору трьох взаємно неперетинних областей $B_0$, $B_1$, $B_2$, таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \mathbb{C}$, $a_2 \in B_2 \subset \mathbb{C}$, причому області $B_1$ і $B_2$ — симетричні відносно одиничного кола $|w| = 1$. Знак рівності досягається тоді, коли точки $0$, $a_1$, $a_2$ та області $B_0$, $B_1$, $B_2$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала (6.13).

Таким чином, із цього твердження випливає твердження теореми 6.4.1 для $\gamma \in [1;\, 1,1]$. Теорема 6.4.1 доведена.

Із доведеної теореми 6.4.1 випливають наступні наслідки.

**Наслідок 6.4.1.** *Нехай* $1 < \gamma \leqslant 1,1$. *Тоді для довільного набору трьох різних точок таких, що* $a_0 = 0$, $|a_1| = |a_2| = 1$, *і довільного набору трьох взаємно неперетинних областей* $B_0$, $B_1$, $B_2$, *таких, що* $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \mathbb{C}$, $a_2 \in B_2 \subset \mathbb{C}$, *причому області* $B_1$ *і* $B_2$ *— симетричні відносно одиничного кола* $|w| = 1$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) r\left(B_1, a_1\right) r\left(B_2, a_2\right) \leqslant r^{\gamma}\left(B_0^{(0)}, 0\right) r\left(B_1^{(0)}, a_1^{(0)}\right) r\left(B_2^{(0)}, a_2^{(0)}\right),$$

*де* $0$, $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$ *і* $B_0^{(0)}$, $B_1^{(0)}$, $B_2^{(0)}$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^4 + 2(4-\gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2-1)^2}\, dw^2.$$

**Наслідок 6.4.2.** *Нехай* $1 < \gamma \leqslant 1,1$. *Тоді для довільного набору трьох різних точок таких, що* $a_0 = 0$, $|a_1| = |a_2| = 1$, *і довільного набору трьох взаємно неперетинних областей* $B_0$, $B_1$, $B_2$, *таких, що* $a_0 = 0 \in B_0 \in U \subset \mathbb{C}$, $a_1 \in B_1 \subset \mathbb{C}$, $a_2 \in B_2 \subset \mathbb{C}$, *причому області* $B_1$ *і* $B_2$ *— симетричні відносно одиничного кола* $|w| = 1$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) r\left(B_1, a_1\right) r\left(B_2, a_2\right) \leqslant \frac{4 \cdot \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{\gamma}{2}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)^{1+\frac{\gamma}{2}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{2}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

*Знак рівності досягається тоді, коли точки* $0$, $a_1$, $a_2$ *та області* $B_0$, $B_1$, $B_2$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^4 + 2(4-\gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2-1)^2}\, dw^2.$$

**Наслідок 6.4.3.** *Нехай* $1 < \gamma \leqslant 1,1$. *Тоді для довільного набору трьох різних точок таких, що* $a_0 = 0$, $|a_1| = |a_2| = R > 0$, *і довільного набору трьох взаємно неперетинних областей* $B_0$, $B_1$, $B_2$, *таких, що* $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \mathbb{C}$, $a_2 \in B_2 \subset \mathbb{C}$, *причому області* $B_1$ *і* $B_2$ *— симетричні відносно кола* $|w| = R$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\, r(B_1, a_1)\, r(B_2, a_2) \leqslant \frac{4 \cdot \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{\gamma}{2}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)^{1+\frac{\gamma}{2}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{2}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} \cdot R^{\gamma+2}.$$

*Знак рівності досягається тоді, коли точки* $0$, $a_1$, $a_2$ *та області* $B_0$, $B_1$, $B_2$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^4 + 2(4-\gamma)R^2 w^2 + R^4\gamma}{w^2(w^2 - R^2)^2}\, dw^2.$$

## 6.5. Нерівність для трьох неперетинних та симетричних відносно одиничного кола областей

**Теорема 6.5.1.** *Нехай* $n = 3$, $1 < \gamma \leqslant 1,2$. *Тоді для довільного набору чотирьох різних точок таких, що* $a_0 = 0$, $|a_1| = |a_2| = |a_3| = 1$, *і довільного набору чотирьох взаємно неперетинних областей* $B_0$, $B_1$, $B_2$, $B_3$, *таких, що* $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k \in \{1, 2, 3\}$, *причому області* $B_k$, $k \in \{1, 2, 3\}$, *— симетричні відносно одиничного кола кола* $|w| = 1$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\, r(B_1, a_1)\, r(B_2, a_2)\, r(B_3, a_3) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{n} \frac{\left(\frac{2\gamma}{9}\right)^{\frac{\gamma}{3}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{9}\right)^{\frac{3}{2}+\frac{\gamma}{3}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{3}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}. \qquad (6.23)$$

*Знак рівності досягається тоді, коли точки* $0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ *та області* $B_0$, $B_1$, $B_2$, $B_3$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^6 + 2(9-\gamma)w^3 + \gamma}{w^2(w^3-1)^2}\,dw^2. \tag{6.24}$$

**Доведення.** Аналогічно доведенню теореми 6.4.1, розглянемо два випадки. **I випадок.** Нехай $\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geqslant 2$, $\alpha_0 = \max\limits_k \alpha_k$. Використовуючи результат роботи [27], легко бачити, що

$$I_3(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0)\, r(B_1, a_1)\, r(B_2, a_2)\, r(B_3, a_3) \leqslant$$

$$\leqslant 3^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^{3} r(B_k, a_k)\right)^{1-\frac{\gamma}{3}}. \tag{6.25}$$

Для оцінки виразу в дужках використаємо результат роботи [40], маємо

$$\prod_{k=1}^{3} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{64}{81\sqrt{3}}\right) |a_1 - a_2| \cdot |a_2 - a_3| \cdot |a_1 - a_3|. \tag{6.26}$$

Враховуючи, що точки $a_1$, $a_2$, $a_3$ розміщені на одиничному колі, а також, що $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, маємо

$$|a_1 - a_2| = 2|a_1||a_2| \sin\left[\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)\pi\right] = 2\sin\left[\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)\pi\right],$$

$$|a_2 - a_3| = 2|a_2||a_3| \sin\left[\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)\pi\right] = 2\sin\left[\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)\pi\right].$$

Оскільки $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 2$ та $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, то $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)$. Використовуючи логарифмічну випуклість функції $\sin x$ на проміжку $x \in [0, \pi]$, справедлива нерівність

$$\frac{1}{2}\ln\sin\left[\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)\pi\right] + \frac{1}{2}\ln\sin\left[\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)\pi\right] \leqslant \ln\sin\left[\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)\pi\right].$$

Очевидно, що рівність в цій нерівності буде досягатися, коли $\alpha_1 = \alpha_2$. Враховуючи попередні міркування, прийдемо до співвідношення

$$|a_1 - a_2| \cdot |a_2 - a_3| \cdot |a_1 - a_3| \leqslant$$

$$\leqslant 2\sin\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\pi\right]\cdot 4\sin^2\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\frac{\pi}{2}\right]. \qquad (6.27)$$

Враховуючи (6.25)–(6.27), маємо

$$I_3(\gamma)\leqslant \qquad (6.28)$$

$$\leqslant 3^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{64\cdot 8}{81\sqrt{3}}\sin\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\pi\right]\cdot\sin^2\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right)^{1-\frac{\gamma}{3}}.$$

Нехай $\gamma=1,2.$ Тоді із оцінки (6.28) випливає, що $I_3(1,2)\leqslant 0,463186,$ а $I_3^{(0)}(1,2)\approx 0,467745,$ отже, справедлива нерівність

$$I_3(1,2)<I_3^{(0)}(1,2).$$

Тепер доведемо нерівність $I_3(\gamma)<I_3^{(0)}(\gamma)$ для $\gamma\in(1;\,1,2)$. Позначимо праву частину виразу (6.28) за $\mu(\gamma)$ та дослідимо її на монотонність. Справедливі співвідношення

$$\ln\mu(\gamma)=-\frac{\gamma}{2}\ln 3+$$

$$+\left(1-\frac{\gamma}{3}\right)\left[\ln 3,6496+\ln\sin\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\pi\right]+2\ln\sin\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right],$$

$$(\ln\mu(\gamma))'_\gamma=-0,9808-\frac{1}{3}\ln\left(\sin\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\pi\right]\sin^2\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right)+$$

$$+\left(1-\frac{\gamma}{3}\right)\frac{\pi}{2\gamma\sqrt{2\gamma}}\left[\cot\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\pi\right]+\cot\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right]>$$

$$>-0,9808+0,4666+1,0641>0,5499>0.$$

Отже, справедливі наступні співвідношення $I_3^{(0)}(1,2)<I_3^{(0)}(\gamma)$, $I_3^{(0)}(1,2)>I_3(1,2)$, $I_3(1,2)>I_3(\gamma)$. Підсумовуючи вище наведене, маємо

$$I_3(\gamma)<I_3^{(0)}(\gamma).$$

Очевидно, що величина $I_3(\gamma)>0$ при всіх $\gamma\in(1;\,1,2)$, а величина $I_3^{(0)}(\gamma)$ монотонно спадає при цих значеннях параметру $\gamma$, отже $I_3(\gamma)<I_3^{(0)}(\gamma)$.

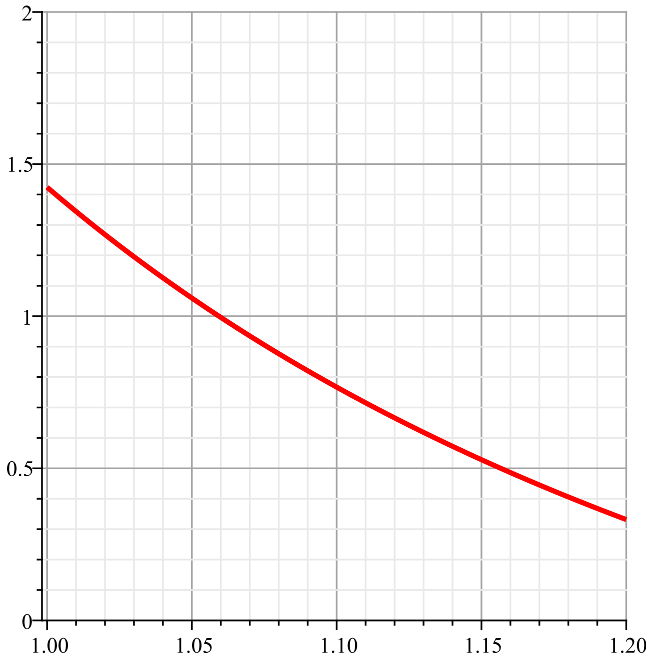


Рис. 6.17: Графік функції $(\ln \mu(\gamma))'_{\gamma}$.

**II випадок.** Розглянемо випадок, коли $\alpha_0\sqrt{2\gamma} < 2$. Аналогічно до доведення теореми 6.4.1, твердження теореми 6.5.1 слідує з роботи [144]. Справедлива лема (див. [144]).

**Лема 6.5.1.** *Нехай* $n = 3$, $\alpha_k \leqslant \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, $k \in \{1, 2, 3\}$, $\gamma \in [1; 3,01]$. *Тоді для довільного набору чотирьох різних точок таких, що* $a_0 = 0$, $|a_1| = |a_2| = |a_3| = 1$, *і довільного набору чотирьох взаємно неперетинних областей* $B_0$, $B_1$, $B_2$, $B_3$, *таких, що* $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \mathbb{C}$, $a_2 \in B_2 \subset \mathbb{C}$, $a_3 \in B_3 \subset \mathbb{C}$, *причому області* $B_1$, $B_2$, $B_3$ *— симетричні відносно одиничного кола* $|w| = 1$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) r\left(B_1, a_1\right) r\left(B_2, a_2\right) r\left(B_3, a_3\right) \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{9}\right)^{\frac{\gamma}{3}}}{\left(1-\frac{2\gamma}{9}\right)^{\frac{3}{2}+\frac{\gamma}{3}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{3}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{3}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

*Знак рівності досягається тоді, коли точки* $0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ *та області* $B_0$, $B_1$, $B_2$, $B_3$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями*

*квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^6 + 2(9-\gamma)w^3 + \gamma}{w^2(w^3-1)^2}\, dw^2.$$

Так як всі $\alpha_k$, $k \in \{1,2,3\}$, задовольняють умовам леми, то звідси автоматично слідує справедливість теореми 6.5.1. Твердження про знак рівності перевіряється безпосередньо. Теорема 6.5.1 доведена.

Із доведеної теореми 6.5.1 випливають наступні наслідки.

**Наслідок 6.5.1.** *Нехай* $1 < \gamma \leqslant 1,2$. *Тоді для довільного набору чотирьох різних точок таких, що* $a_0 = 0$, $|a_1| = |a_2| = |a_3| = 1$, *і довільного набору чотирьох взаємно неперетинних областей* $B_0$, $B_1$, $B_2$, $B_3$, *таких, що* $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k \in \{1,2,3\}$, *причому області* $B_k$, $k \in \{1,2,3\}$, *— симетричні відносно одиничного кола* $|w| = 1$, *справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0)\, r(B_1, a_1)\, r(B_2, a_2)\, r(B_3, a_3) \leqslant$$
$$\leqslant r^\gamma\left(B_0^{(0)}, 0\right) r\left(B_1^{(0)}, a_1^{(0)}\right) r\left(B_2^{(0)}, a_2^{(0)}\right) r\left(B_3^{(0)}, a_3^{(0)}\right),$$

*де* $0$, $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, $a_3^{(0)}$ *і* $B_0^{(0)}$, $B_1^{(0)}$, $B_2^{(0)}$, $B_3^{(0)}$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^6 + 2(9-\gamma)w^3 + \gamma}{w^2(w^3-1)^2}\, dw^2.$$

**Наслідок 6.5.2.** *Нехай* $1 < \gamma \leqslant 1,2$. *Тоді для довільного набору чотирьох різних точок таких, що* $a_0 = 0$, $|a_1| = |a_2| = |a_3| = 1$, *і довільного набору чотирьох взаємно неперетинних областей* $B_0$, $B_1$, $B_2$, $B_3$, *таких, що* $a_0 = 0 \in B_0 \in U \subset \mathbb{C}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k \in \{1,2,3\}$, *причому області* $B_k$, $k \in \{1,2,3\}$, *— симетричні відносно одиничного кола* $|w| = 1$, *справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0)\, r(B_1, a_1)\, r(B_2, a_2)\, r(B_3, a_3) \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{9}\right)^{\frac{\gamma}{3}}}{\left(1-\frac{2\gamma}{9}\right)^{\frac{3}{2}+\frac{\gamma}{3}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{3}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{3}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

*Знак рівності досягається тоді, коли точки* $0,\ a_1,\ a_2\,,\ a_3$ *та області* $B_0,\ \ B_1,\ \ B_2\,,\ \ B_3\,,$ *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^6 + 2(9-\gamma)w^3 + \gamma}{w^2(w^3-1)^2}\, dw^2.$$

**Наслідок 6.5.3.** *Нехай* $1 < \gamma \leqslant 1,2$. *Тоді для довільного набору чотирьох різних точок таких, що* $a_0 = 0,\ \ |a_1| = |a_2| = |a_3| = R > 0\,,$ *і довільного набору чотирьох взаємно неперетинних областей* $B_0,\ B_1,$ $B_2\,,\ B_3\,,$ *таких, що* $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}},\ \ a_k \in B_k \subset \mathbb{C}\,,\ \ k \in \{1,2,3\}\,,$ *причому області* $B_k,\ \ k \in \{1,2,3\}\,,$ *— симетричні відносно кола* $|w| = R\,,$ *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) r\left(B_1, a_1\right) r\left(B_2, a_2\right) r\left(B_3, a_3\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{n} \frac{\left(\frac{2\gamma}{9}\right)^{\frac{\gamma}{3}}}{\left(1-\frac{2\gamma}{9}\right)^{\frac{3}{2}+\frac{\gamma}{3}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{3}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{3}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} \cdot R^{\gamma+3}.$$

*Знак рівності досягається тоді, коли точки* $0,\ a_1,\ a_2\,,\ a_3$ *та області* $B_0,\ \ B_1,\ \ B_2\,,\ \ B_3\,,$ *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^6 + 2(9-\gamma)R^3 w^3 + R^6\gamma}{w^2(w^3-R^3)^2}\, dw^2.$$

# Висновки

У шостому розділі дисертаційної роботи розглядається екстремальна задача про максимум добутку

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

де $B_0$, $B_1$, $B_2, \ldots, B_n$, $n \geqslant 2$, — області, що взаємно не перетинаються, в $\overline{\mathbb{C}}$ і, крім того, області $B_1, \ldots, B_n$ — симетричні відносно одиничного кола, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $\gamma \in (0, n]$.

Ця проблема у випадку $\gamma = 1$ була поставлена в якості відкритої проблеми в роботі [57]. Для $n \geqslant 2$ і $\gamma = 1$ її розв'язав Л.В. Ковальов [77, 78]. Однак для значень $\gamma \neq 1$ ця задача впродовж тривалого часу не піддавалась розв'язанню.

В даному розділі одержано розв'язок цієї проблеми при $n = 2$ і $\gamma \in (0,\, 2]$ для фіксованих полюсів (теорема 6.1.1). Далі, використавши цей результат (теорему 6.1.1), проблему 6.1 розв'язано для $\gamma_n = 0,25n^2$ і $n \geqslant 4$ при додатковій умові, що відрізки $[0, a_k]$ розташовані один до одного під кутами, що не перевищують $2\pi/\sqrt{2\gamma}$ (теорема 6.2.1).

Використавши оцінку зверху функціонала $I_n(\gamma)$, одержану в теоремі 2.4.4, та результати теорем 6.1.1 і 6.2.1, одержано розв'язок проблеми 6.1 для $n \geqslant 8$ і $\gamma \in (1, \sqrt{n}]$ (теорема 6.3.1).

Результати розділу опубліковано в роботах [22, 28, 144].

# РОЗДІЛ 7

# ДЕЯКІ ДОДАТКОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

## 7.1. Точні оцінки для добутків внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей комплексної площини

Нехай

$$S(x) = x^{2x^2+2} \cdot |1-x|^{-(1-x)^2} \cdot (1+x)^{-(1+x)^2} \quad \text{і} \quad \Psi(x) = \ln(S(x)).$$

$\Psi'(x) = 4x\ln(x) - 2(x-1)\ln|x-1| - 2(x+1)\ln(x+1) + \frac{2}{x}$ (див. Рис. 7.18). Функція $S(x)$ — логарифмічно випукла на інтервалі $[0, x_0]$, $x_0 \approx$

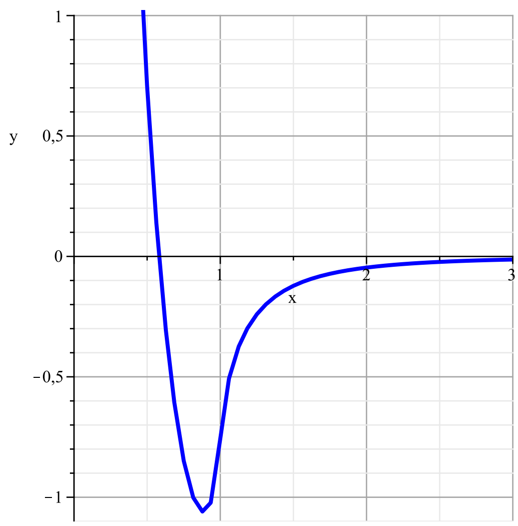


Рис. 7.18: Графік функції $y = \Psi'(x)$

$0,88441$. Нехай $\Psi'(x) = t$, $y_0 \leqslant t < 0$, $y_0 \approx -1,06$. Рівняння $\Psi'(x) = t_k$ має два розв'язки: $x_1(t) \in (0, x_0]$ та $x_2(t) \in (x_0, \infty]$.

Нехай
$$\delta_n^0 = \min\left((n-1)x_1(t) + x_2(t)\right) = 2\sqrt{\gamma_n^0},$$
тоді
$$\gamma_n^0 = \left(\frac{\delta_n^0}{2}\right)^2.$$

**Теорема 7.1.1.** [145] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, \gamma_n^0]$, $\gamma_n^0 = \left(\frac{\delta_n^0}{2}\right)^2$. *Тоді для будь-якої* $n$*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, *такої, що* $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) = 1$, *і будь-якої системи областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_\infty$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *справедлива нерівність*
$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leqslant$$
$$\leqslant [r(\Lambda_0, 0)\, r(\Lambda_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(\Lambda_k, \lambda_k), \qquad (7.1)$$
*де області* $\Lambda_0$, $\Lambda_\infty$, $\Lambda_k$, *і точки* $0$, $\infty$, $\lambda_k$, $k = \overline{1,n}$, — *відповідно, кругові області і полюси квадратичного диференціала*
$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (n^2 - 2\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2. \qquad (7.2)$$

**Доведення.** Нехай $\zeta = \pi_k(w)$ позначає однозначну вітку багатозначної аналітичної функції $-i\left(e^{-i\arg a_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1,n}$, яка виконує однолисте і конформне відображення $\overline{P}_k := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$ на праву півплощину $\operatorname{Re}\zeta > 0$. Розглянемо систему функцій $\zeta = \pi_k(w) = -i\left(e^{-i\arg a_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1,n}$. Нехай $\Omega_k^{(1)}$, $k = \overline{1,n}$, позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_k \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_k)$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Через $\Omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1, n}$, позначаємо область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_{k+1} \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_{k+1})$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі, $B_{n+1} := B_1$, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Крім того, $\Omega_k^{(0)}$ позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_0 \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\zeta = 0$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Аналогічно, $\Omega_k^{(\infty)}$ буде позначати область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_\infty \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\zeta = \infty$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Зрозуміло, що $\pi_k(a_k) := \omega_k^{(1)}$, $\pi_k(a_{k+1}) := \omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1, n}$, $\pi_n(a_{n+1}) := \omega_n^{(2)}$. Із визначення функцій $\pi_k(w)$ слідує, що

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(1)}| \sim \frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot |w - a_k|, \quad w \to a_k, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(2)}| \sim \frac{1}{\alpha_k}|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot |w - a_{k+1}|, \quad w \to a_{k+1}, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to \infty, \quad w \in \overline{P_k}.$$

Використовуючи відповідні результати робіт [56, 57], ми отримаємо нерівності

$$r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left[\frac{r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(\Omega_{k-1}^{(2)}, \omega_{k-1}^{(2)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot \frac{1}{\alpha_{k-1}}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{7.3}$$

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{7.4}$$

$$r\left(B_\infty, \infty\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(\infty)}, \infty\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{7.5}$$

Нерівності (7.3)–(7.5) повністю досліджені в теоремі 1.9 [57, с. 29]. Використовуючи (7.3)–(7.5), маємо

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{(|a_k||a_{k+1}|)^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \cdot |a_k| \times$$

$$\times \left\{ \prod_{k=1}^{n} \left( r\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right) r\left(\Omega_k^{(\infty)}, \infty\right)\right)^{\gamma\alpha_k^2} \cdot \frac{r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{\left(|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Далі, з останнього співвідношення, одержуємо

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \prod_{k=1}^{n} \left( \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} + \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) |a_k| \times$$

$$\times \left\{ \prod_{k=1}^{n} \left( r\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right) r\left(\Omega_k^{(\infty)}, \infty\right)\right)^{\gamma\alpha_k^2} \cdot \frac{r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{\left(|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)^2} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

де $|\omega_k^{(1)}| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $|\omega_k^{(2)}| = |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}$. Оскільки

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \left( \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} + \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) |a_k| = \prod_{k=1}^{n} \chi \left( \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) |a_k| = \mathcal{L}\left(A_n\right),$$

тоді має місце наступна нерівність

$$J_n(\gamma) \leqslant 2^n \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \cdot \mathcal{N}^{(0)}\left(A_n\right) \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \left\{ \left( r\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right) r\left(\Omega_k^{(\infty)}, \infty\right)\right)^{\gamma\alpha_k^2} \cdot \frac{r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{\left(|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Знак рівності в останній нерівності досягається тоді, коли знак рівності реалізується в нерівностях (7.3)–(7.5) для всіх $k = \overline{1,n}$. Враховуючи останню нерівність, теорему 4.1.1 [11], наслідок 4.1.3 [11] та інваріантність функціонала

$$\left(\frac{r\left(B_1,a_1\right)r\left(B_3,a_3\right)}{|a_1-a_3|^2}\right)^{\gamma}\left(\frac{r\left(B_2,a_2\right)r\left(B_4,a_4\right)}{|a_2-a_4|^2}\right),$$

маємо

$$J_n(\gamma)\leqslant\left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^n\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\cdot\mathcal{N}^{(0)}\left(A_n\right)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left\{\left(r\left(\widetilde{\Omega}_k^{(0)},0\right)r\left(\widetilde{\Omega}_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\gamma\alpha_k^2}\cdot\frac{r\left(\widetilde{\Omega}_k^{(1)},\widetilde{\omega}_k^{(1)}\right)\cdot r\left(\widetilde{\Omega}_k^{(2)},\widetilde{\omega}_k^{(2)}\right)}{\left(|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)^2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

де області $\widetilde{\Omega}_k^{(0)}$, $\widetilde{\Omega}_k^{(\infty)}$, $\widetilde{\Omega}_k^{(1)}$, $\widetilde{\Omega}_k^{(2)}$ та точки $0$, $\infty$, $\widetilde{\omega}_k^{(1)}$, $\widetilde{\omega}_k^{(2)}$, є, відповідно, круговими областями та полюсами квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2=-\frac{z^4+2\left(1-\frac{2}{\gamma\alpha_k^2}\right)z^2+1}{z^2(z^2+1)^2}\,dz^2.$$

Кожен член в дужках останньої нерівності є значенням величини функціонала

$$K_\tau=\left[r\left(B_0,0\right)r\left(B_\infty,\infty\right)\right]^{\tau^2}\cdot\frac{r\left(B_1,a_1\right)r\left(B_2,a_2\right)}{|a_1-a_2|^2}\tag{7.6}$$

на системі областей, що взаємно не перетинаються, $\left\{\widetilde{\Omega}_k^{(0)},\,\widetilde{\Omega}_k^{(1)},\,\widetilde{\Omega}_k^{(2)},\,\widetilde{\Omega}_k^{(\infty)}\right\}$, та відповідній системі точок $\left\{0,\,\widetilde{\omega}_k^{(1)},\,\widetilde{\omega}_k^{(2)},\,\infty\right\}$ ($k=\overline{1,n}$).

Оцінка функціоналу (7.6) для випадку фіксованих полюсів була вперше отримана в роботі [56], далі в роботах [63, 87]. На основі леми 4.1.2 [11], маємо оцінку

$$K_\tau\leqslant\Phi(\tau),\quad \tau\geqslant 0,$$

де $\Phi(\tau)=\tau^{2\tau^2}\cdot|1-\tau|^{-(1-\tau)^2}\cdot(1+\tau)^{-(1+\tau)^2}$. Далі,

$$J_n(\gamma)\leqslant\left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^n\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\left[\prod_{k=1}^{n}\Phi(\tau_k)\right]^{1/2}=\tag{7.7}$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^n \cdot \left[\prod_{k=1}^{n} \left(\tau_k^{2\tau_k^2+2} \cdot |1-\tau_k|^{-(1-\tau_k)^2} \cdot (1+\tau_k)^{-(1+\tau_k)^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

де $\tau_k = \sqrt{\gamma} \cdot \alpha_k$, $k = \overline{1,n}$.

Розглянемо функцію $S(x) = x^{2x^2+2} \cdot |1-x|^{-(1-x)^2} \cdot (1+x)^{-(1+x)^2}$. Функція $S(x)$ — логарифмічно випукла на проміжку $[0, x_0]$, $x_0 \approx 0,88441$. Розглянемо екстремальну задачу:

$$\prod_{k=1}^{n} S(x_k) \longrightarrow \max; \quad \sum_{k=1}^{n} x_k = 2\sqrt{\gamma}, \quad x_k = \alpha_k\sqrt{\gamma}.$$

Нехай $X^{(0)} = \left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ — довільна екстремальна точка в задачі. Використовуючи результат роботи [76], маємо наступне твердження

$$\Psi'\left(x_1^{(0)}\right) = \Psi'\left(x_2^{(0)}\right) = \ldots = \Psi'\left(x_n^{(0)}\right), \tag{7.8}$$

де $\Psi'(x) = 4x\ln(x) - 2(x-1)\ln|x-1| - 2(x+1)\ln(x+1) + \frac{2}{x}$ (див. Рис. 7.18).

Покажемо, що виконується умова

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \cdots = x_n^{(0)} \quad \text{для всіх} \quad \gamma \in (0, \gamma_n].$$

Нехай $\Psi'(x) = t$, $y_0 \leqslant t < 0$, $y_0 \approx -1,06$. Розглянемо рівняння $\Psi'(x) = t_k$, $k = \overline{1,53}$. Оскільки $\forall t_k \in [y_0, 0)$, то це рівняння має два розв'язки: $x_1(t) \in (0, x_0]$, $x_2(t) \in (x_0, \infty]$. Розглянемо наступні величини $t$: $t_1 = -0,02$, $t_2 = -0,04$, $t_3 = -0,06$, $t_4 = -0,08$, $\ldots$, $t_{52} = -1,04$, $t_{53} = y_0$. Безпосередні обчислення представлені в таблиці нижче.

| $k$ | $t_k$ | $x_1(t_k)$ | $x_2(t_k)$ | $k$ | $t_k$ | $x_1(t_k)$ | $x_2(t_k)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,581421 | $\infty$ | 27 | -0,54 | 0,671495 | 1,047944 |
| 1 | -0,02 | 0,584192 | 2,607677 | 28 | -0,56 | 0,675680 | 1,041549 |
| 2 | -0,04 | 0,586996 | 2,095431 | 29 | -0,58 | 0,679954 | 1,035639 |
| 3 | -0,06 | 0,589833 | 1,849825 | 30 | -0,6 | 0,684325 | 1,030184 |
| 4 | -0,08 | 0,592706 | 1,696659 | 31 | -0,62 | 0,688797 | 1,025157 |
| 5 | -0,1 | 0,595614 | 1,588941 | 32 | -0,64 | 0,693377 | 1,020539 |
| 6 | -0,12 | 0,598559 | 1,507710 | 33 | -0,66 | 0,698072 | 1,016313 |
| 7 | -0,14 | 0,601542 | 1,443586 | 34 | -0,68 | 0,702890 | 1,012468 |
| 8 | -0,16 | 0,604564 | 1,391304 | 35 | -0,7 | 0,707842 | 1,008999 |
| 9 | -0,18 | 0,607626 | 1,347643 | 36 | -0,72 | 0,712936 | 1,005911 |
| 10 | -0,2 | 0,610729 | 1,310499 | 37 | -0,74 | 0,718185 | 1,003228 |
| 11 | -0,22 | 0,613876 | 1,278433 | 38 | -0,76 | 0,723604 | 1,001015 |
| 12 | -0,24 | 0,617066 | 1,250421 | 39 | -0,78 | 0,729208 | 0,999457 |
| 13 | -0,26 | 0,620302 | 1,225709 | 40 | -0,8 | 0,735017 | 0,997390 |
| 14 | -0,28 | 0,623585 | 1,203729 | 41 | -0,82 | 0,741053 | 0,994797 |
| 15 | -0,3 | 0,626917 | 1,184045 | 42 | -0,84 | 0,747345 | 0,991762 |
| 16 | -0,32 | 0,630299 | 1,166313 | 43 | -0,86 | 0,753926 | 0,988295 |
| 17 | -0,34 | 0,633734 | 1,150260 | 44 | -0,88 | 0,760838 | 0,984381 |
| 18 | -0,36 | 0,637223 | 1,135664 | 45 | -0,9 | 0,768138 | 0,979982 |
| 19 | -0,38 | 0,640770 | 1,122345 | 46 | -0,92 | 0,775896 | 0,975038 |
| 20 | -0,4 | 0,644375 | 1,110153 | 47 | -0,94 | 0,784212 | 0,969461 |
| 21 | -0,42 | 0,648041 | 1,098962 | 48 | -0,96 | 0,793228 | 0,963114 |
| 22 | -0,44 | 0,651772 | 1,088668 | 49 | -0,98 | 0,803162 | 0,955787 |
| 23 | -0,46 | 0,655569 | 1,079182 | 50 | -1 | 0,814378 | 0,947120 |
| 24 | -0,48 | 0,659437 | 1,070427 | 51 | -1,02 | 0,827585 | 0,936407 |
| 25 | -0,5 | 0,663378 | 1,062338 | 52 | -1,04 | 0,844608 | 0,921828 |
| 26 | -0,52 | 0,667396 | 1,054860 | 53 | -1,06 | 0,884406 | 0,884406 |

Розглянемо випадок $n = 2$. З аналізу табличних даних для $n = 2$, отримуємо, що мінімум суми $x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$ досягається на інтервалі $[-0,62; -0,64]$ і дорівнює $1,709336$ (див. таблицю нижче). З умови задачі $x_1(t) + x_2(t) = 2\sqrt{\gamma}$ для кожного $\gamma \in (0; 0,73]$. Нехай $\gamma = 0,73$, тоді величина $2\sqrt{\gamma}$ є меншою ніж мінімум $1,709336$. Таким чином, для $n = 2$ і $\gamma \in (0; 0,73]$, отримуємо, що $x_2$ не може належати проміжку $(x_0, \infty)$, тобто $x_1$ та $x_2$ належать проміжку $(0, x_0]$ і $x_1 = x_2$. З нерівностей (7.7) і (7.8) для $n = 2$, маємо

$$J_2(\gamma) \leqslant \frac{4}{\gamma} \cdot S\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{2}\right).$$

| $k$ | $t_k$ | $x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$ | $k$ | $t_k$ | $x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | 27 | -0,54 | 1,715340 |
| 1 | -0,02 | 3,189098 | 28 | -0,56 | 1,713044 |
| 2 | -0,04 | 2,679623 | 29 | -0,58 | 1,711318 |
| 3 | -0,06 | 2,436820 | 30 | -0,6 | 1,710138 |
| 4 | -0,08 | 2,286492 | 31 | -0,62 | 1,709482 |
| 5 | -0,1 | 2,181647 | 32 | -0,64 | **1,709336** |
| 6 | -0,12 | 2,103324 | 33 | -0,66 | 1,709690 |
| 7 | -0,14 | 2,042145 | 34 | -0,68 | 1,710540 |
| 8 | -0,16 | 1,992846 | 35 | -0,7 | 1,711889 |
| 9 | -0,18 | 1,952207 | 36 | -0,72 | 1,713753 |
| 10 | -0,2 | 1,918125 | 37 | -0,74 | 1,716163 |
| 11 | -0,22 | 1,889163 | 38 | -0,76 | 1,719200 |
| 12 | -0,24 | 1,864297 | 39 | -0,78 | 1,723061 |
| 13 | -0,26 | 1,842775 | 40 | -0,8 | 1,726598 |
| 14 | -0,28 | 1,824031 | 41 | -0,82 | 1,729814 |
| 15 | -0,3 | 1,807630 | 42 | -0,84 | 1,732815 |
| 16 | -0,32 | 1,793230 | 43 | -0,86 | 1,735640 |
| 17 | -0,34 | 1,780559 | 44 | -0,88 | 1,738307 |
| 18 | -0,36 | 1,769398 | 45 | -0,9 | 1,740820 |
| 19 | -0,38 | 1,759569 | 46 | -0,92 | 1,743176 |
| 20 | -0,4 | 1,750923 | 47 | -0,94 | 1,745356 |
| 21 | -0,42 | 1,743337 | 48 | -0,96 | 1,747326 |
| 22 | -0,44 | 1,736709 | 49 | -0,98 | 1,749015 |
| 23 | -0,46 | 1,730953 | 50 | -1 | 1,750281 |
| 24 | -0,48 | 1,725996 | 51 | -1,02 | 1,750785 |
| 25 | -0,5 | 1,721775 | 52 | -1,04 | 1,749413 |
| 26 | -0,52 | 1,718238 | 53 | -1,06 | 1,729015 |

Для $n = 3$ мінімум величини $2x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$ досягається на інтервалі $[-0,48; -0,50]$ і є $2,381211$ (див. таблицю нижче). Аналогічно,

$2x_1(t)+x_2(t) = 2\sqrt{\gamma}$. Нехай $\gamma = 1,41$, тоді $2\sqrt{\gamma} = 2,3748$. Таким чином, для $\gamma \in (0;1,41]$ ситуація коли $x_2 \in (x_0,\infty)$ не може бути реалізована. Отже, $x_1$, $x_2$, $x_3 \in (0,x_0]$ і $x_1 = x_2 = x_3$. Далі, врахувавши нерівності (7.7) та (7.8) для $n=3$, маємо

$$J_3(\gamma) \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^3 \left[S\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{3}\right)\right]^{3/2}.$$

Аналогічні міркування проводимо і для всіх $\gamma \in (0,\gamma_n]$, $n = 4,5,6$.

| $k$ | $t_k$ | $2x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$ | $k$ | $t_k$ | $2x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | 27 | -0,54 | 2,382735 |
| 1 | -0,02 | 3,770519 | 28 | -0,56 | 2,384539 |
| 2 | -0,04 | 3,263814 | 29 | -0,58 | 2,386998 |
| 3 | -0,06 | 3,023816 | 30 | -0,6 | 2,390093 |
| 4 | -0,08 | 2,876325 | 31 | -0,62 | 2,393807 |
| 5 | -0,1 | 2,774353 | 32 | -0,64 | 2,398133 |
| 6 | -0,12 | 2,698938 | 33 | -0,66 | 2,403067 |
| 7 | -0,14 | 2,640704 | 34 | -0,68 | 2,408612 |
| 8 | -0,16 | 2,594388 | 35 | -0,7 | 2,414780 |
| 9 | -0,18 | 2,556771 | 36 | -0,72 | 2,421594 |
| 10 | -0,2 | 2,525751 | 37 | -0,74 | 2,429099 |
| 11 | -0,22 | 2,499892 | 38 | -0,76 | 2,437386 |
| 12 | -0,24 | 2,478172 | 39 | -0,78 | 2,446665 |
| 13 | -0,26 | 2,459841 | 40 | -0,8 | 2,455806 |
| 14 | -0,28 | 2,444333 | 41 | -0,82 | 2,464831 |
| 15 | -0,3 | 2,431215 | 42 | -0,84 | 2,473869 |
| 16 | -0,32 | 2,420146 | 43 | -0,86 | 2,482985 |
| 17 | -0,34 | 2,410858 | 44 | -0,88 | 2,492232 |
| 18 | -0,36 | 2,403133 | 45 | -0,9 | 2,501659 |
| 19 | -0,38 | 2,396792 | 46 | -0,92 | 2,511314 |
| 20 | -0,4 | 2,391692 | 47 | -0,94 | 2,521252 |
| 21 | -0,42 | 2,387712 | 48 | -0,96 | 2,531538 |
| 22 | -0,44 | 2,384750 | 49 | -0,98 | 2,542243 |
| 23 | -0,46 | 2,382725 | 50 | -1 | 2,553443 |
| 24 | -0,48 | 2,381565 | 51 | -1,02 | 2,565162 |
| 25 | -0,5 | **2,381211** | 52 | -1,04 | 2,576998 |
| 26 | -0,52 | 2,381615 | 53 | -1,06 | 2,573623 |

З даних першої таблиці для довільного $n \geqslant 7$ має місце наступна нерівність

$$(n-1)x_1(t_k) + x_2(t_{k+1}) > nx_1(t_k) + (x_2(t_{k+1}) - x_1(t_k)) > 0,58n,$$

оскільки $x_1(t_k) \geqslant 0,5830$ та $x_2(t_{k+1}) - x_1(t_k) \geqslant 0$. Використовуючи умову

$$(n-1)x_1(t) + x_2(t) = 2\sqrt{\gamma_n},$$

отримуємо $2\sqrt{\gamma_n} = 0,58n$. Таким чином, $\gamma_n = 0,084n^2$, тобто якщо $\gamma \in (0; 0,084n^2]$, тоді сума $(n-1)x_1(t) + x_2(t)$ не перевищує $0,58n$. Отже, для $n \geqslant 7$ і $\gamma \in (0, \gamma_n]$, маємо

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^n \left[S\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)\right]^{n/2}.$$

Твердження про знак рівності перевіряється безпосередньо. Теорема 7.1.1 доведена.

З теореми 7.1.1 ми одержуємо наступні результати.

**Наслідок 7.1.1.** [145] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_2 = 0,7304$, $\gamma_3 = 1,4175$, $\gamma_4 = 2,2983$, $\gamma_5 = 3,3683$, $\gamma_6 = 4,6244$, *і* $\gamma_n = 0,084\,n^2$, $n \geqslant 7$. *Тоді для будь-якої* $n$*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *такої, що* $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) = 1$, *і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_\infty$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *справедлива нерівність* (7.1). *Знак рівності в якій досягається при умовах теореми 7.1.1.*

**Наслідок 7.1.2.** [145] *При умовах теореми 7.1.1 має місце наступна нерівність*

$$[r(B_0,0)r(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(B_k,a_k) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{2\gamma}{n}}}{\left|1-\frac{4\gamma}{n^2}\right|^{\frac{2\gamma}{n}+\frac{n}{2}}} \left|\frac{n-2\sqrt{\gamma}}{n+2\sqrt{\gamma}}\right|^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{7.9}$$

*Знак рівності в цій нерівності досягається, коли* $0$, $\infty$, $a_k$ *та* $B_0$, $B_\infty$, $B_k$, $k=\overline{1,n}$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала* (7.2).

**Наслідок 7.1.3.** [145] *Нехай* $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in(0,\gamma_n]$, $\gamma_2=0,7304$, $\gamma_3=1,4175$, $\gamma_4=2,2983$, $\gamma_5=3,3683$, $\gamma_6=4,6244$, *і* $\gamma_n=0,084\,n^2$, $n\geqslant 7$. *Тоді для будь-яких різних точок одиничного кола* $|w|=1$ *і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_\infty$, $B_k$, $a_0=0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $\infty\in B_\infty\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, *справедлива нерівність* (7.1). *Знак рівності в якій досягається при умовах теореми 7.1.1.*

Нехай $y_0\approx 0,884414$ — корінь рівняння

$$\ln\frac{y^2}{1-y^2}=\frac{1}{y^2}. \tag{7.10}$$

**Теорема 7.1.2.** [145] *Нехай* $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in(0,\,\gamma_n)$, $\gamma_n=\frac{1}{4}y_0^2n^2$. *Тоді для будь-якої* $n$*-променевої системи точок* $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$ *такої, що* $\mathcal{N}^{(0)}(A_n)=1$, $0<\alpha_k\leqslant y_0/\sqrt{\gamma}$, $k=\overline{1,n}$, *де* $y_0$ *— корінь рівняння* (7.10), *і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_\infty$, $B_k$, $a_0=0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $\infty\in B_\infty\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, *справедлива нерівність* (7.9). *Знак рівності в якій досягається при умовах наслідку 7.1.2.*

**Доведення.** Доведення теореми 7.1.2 практично повторює міркування приведені при доведенні теореми 7.1.1. Ми лише використовуємо логарифмічну випуклість функції $S(x)$ на інтервалі $(0,y_0]$ та співвідношення

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln S\,(x_k)\leqslant \ln S\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}{n}\right).$$

Попередня нерівність еквівалентна

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} S\left(x_k\right)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \ln\left(S\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right).$$

Знак рівності в цій нерівності досягається тоді, коли

$$\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_n = \frac{2\sqrt{\gamma}}{n},$$

тобто якщо $\alpha_k = \frac{2}{n}$, $k = \overline{1,n}$. В цьому випадку, із співвідношення (7.6) отримуємо, що

$$J_n(\gamma) \leqslant J_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \left[\left(r\left(D_0, 0\right) r\left(D_\infty, \infty\right)\right)^{\frac{4\gamma}{n^2}} \cdot \frac{r\left(D_1, -i\right) r\left(D_2, i\right)}{\left|(-i) - i\right|^2}\right]^{\frac{n}{2}},$$

де $D_0$, $D_\infty$, $D_1$ і $D_2$ є круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{\frac{4\gamma}{n^2}z^4 + 2\left(\frac{4\gamma}{n^2} - 2\right)z^2 + \frac{4\gamma}{n^2}}{z^2(z^2+1)^2}\,dz^2. \tag{7.11}$$

Звідси, маємо

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^n \left[S\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{n}{2}}.$$

Використовуючи конкретний вираз для функції $S\,(x)$, одержуємо основну нерівність теореми 7.1.2. Виконуючи в (7.11) заміну змінної за формулою $z = -iw^{\frac{n}{2}}$, отримуємо квадратичний диференціал (7.2). Знак рівності в нерівності (7.9) перевіряється безпосередньо. Теорема 7.1.2 доведена.

**Наслідок 7.1.4.** [145] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = 0,19n^2$. *Тоді для будь-якої* $n$*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *такої, що* $\mathcal{N}^{(0)}\left(A_n\right) = 1$, $0 < \alpha_k \leqslant y_0/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$, $y_0 \approx 0,88441$, *і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_\infty$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *справедлива нерівність* (7.1). *Знак рівності в якій досягається при умовах теореми 7.1.1.*

**Теорема 7.1.3.** [145] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, \gamma_n)$, $\gamma_n = \frac{1}{2}y_0^2 n^2$. *Тоді для будь-якої* $n$*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *такої, що* $|a_k| = 1$, $0 < \alpha_k \leqslant y_0/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$, *де* $y_0$ *— корінь рівняння* (7.10), *і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset U$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *і, крім того, області* $B_k$ *— симетричні відносно одиничного кола* $|w| = 1$ *при всіх* $k = \overline{1,n}$, *справедлива наступна нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant r^{\gamma}\left(\Lambda_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(\Lambda_k, \lambda_k\right). \tag{7.12}$$

*Знак рівності в* (7.12) *досягається тоді, коли* $0$, $\lambda_k$ *і* $\Lambda_0$, $\Lambda_k$, $k = \overline{1,n}$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2. \tag{7.13}$$

**Доведення.** Зауважимо, (див. [56, с. 59]) якщо області $B_k$ — симетричні відносно одиничного кола $|w| = 1$ при всіх $k = \overline{1,n}$, і область $B_0 \subset U$, тоді використовуючи нескладні перетворення, ми можемо звести екстремальну задачу про вивчення функціонала $r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)$ до вивчення наступного функціонала $r^{\gamma/2}\left(B_0, 0\right) r^{\gamma/2}\left(B_\infty, \infty\right) \prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)$.

$$J_n(\gamma) = \left[r\left(B_0, 0\right)\right]^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) = \left[r\left(B_0, 0\right)\right]^{\gamma/2} \left[r\left(B_0, 0\right)\right]^{\gamma/2} \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right).$$

$$J_n(\gamma) = \left[r\left(B_0, 0\right)\right]^{\gamma/2} \left[r\left((B_0)^{-1}, 0^{-1}\right)\right]^{\gamma/2} \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) =$$

$$= \left[r\left(B_0, 0\right)\right]^{\gamma/2} \left[r\left(B_\infty, \infty\right)\right]^{\gamma/2} \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right).$$

Таким чином, використовуючи цю властивість та доведення теорем 7.1.1 і 7.1.2, одержуємо результат теореми 7.1.3. Теорема 7.1.3 доведена.

Використовуючи міркування при доведенні теореми 7.1.3 та теорему 7.1.1, неважко отримати наступний результат.

**Наслідок 7.1.5.** [145] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_2 = 1,4608$, $\gamma_3 = 2,8350$, $\gamma_4 = 4,5966$, $\gamma_5 = 6,7366$, $\gamma_6 = 9,2488$ *і* $\gamma_n = 0,168\, n^2$, $n \geqslant 7$. *Тоді для будь-яких різних точок одиничного кола* $|w| = 1$ *і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset U$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *і, крім того, області* $B_k$ *— симетричні відносно одиничного кола* $|w| = 1$ *при всіх* $k = \overline{1,n}$, *справедлива наступна нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left|1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right|^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \left|\frac{n - \sqrt{2\gamma}}{n + \sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}}.$$

*Знак рівності в цій нерівності досягається тоді, коли* $a_k$ *і* $B_k$, $k = \overline{0,n}$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала* (7.13).

## 7.2. Точні оцінки для добутків внутрішніх радіусів областей, що задовольняють умові часткового перетину

Нехай $D$ — відкрита множина в $\overline{\mathbb{C}}$, яка містить променеву систему точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$. Якщо $a \in D$, тоді позначимо через $D(a)$ зв'язну компоненту $D$, яка містить точку $a$; $D_k(a_p)$ — зв'язну компоненту множини $D(a_p) \cap \overline{P_k(A_n)}$, яка містить точку $a_p$, $p \in \{k, k+1\}$, $k = \overline{1,n}$; $D_k(0)$ — зв'язну компоненту множини $D(0) \cap \overline{P_k(A_n)}$, яка містить точку $w = 0$; $D_k(\infty)$ — зв'язну компоненту множини $D(\infty) \cap \overline{P_k(A_n)}$, яка містить нескінченно віддалену точку.

Внутрішнім радіусом $r\left(D, a_k\right)$ відкритої множини $D$ відносно точки

$a$ називається внутрішній радіус зв'язної компоненти множини $D$, яка містить точку $a$.

Нехай відкрита множина $D$ містить точки $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$ та довільну $n$-променеву систему точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, тоді будемо говорити, що така множина задовольняє умові неналягання відносно системи точок $A_n$, якщо множини $D_k(a_k)$, $D_k(a_{k+1})$, $D_k(0)$ і $D_k(\infty)$ попарно не перетинаються для кожного $k = \overline{1,n}$.

Нехай $\{B_k\}_{k=1}^n$, $B_\infty$, $B_0$ — довільний набір областей таких, що $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$. Нехай $\widetilde{D} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k \cup B_0 \cup B_\infty$. Будемо говорити, що система $B_0$, $B_\infty$, $\{B_k\}_{k=1}^n$ задовольняє умові часткового налягання відносно деякої системи $A_n$, якщо відкрита множина $\widetilde{D}$ задовольняє умові неналягання відносно цієї ж $n$-променевої системи точок $A_n$.

Тоді має місце наступне твердження.

**Теорема 7.2.1.** [52] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, \gamma_n)$, $\gamma_n = \frac{1}{4} y_0^2 n^2$. Тоді для будь-якої $n$-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такої, що $|a_k| = 1$, $0 < \alpha_k \leqslant y_0/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$, де $y_0$ — корінь рівняння (7.10), і будь-якого набору областей $B_0$, $B_\infty$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, що задовільняє умові часткового налягання відносно променевої системи $A_n$, справедлива нерівність*

$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{2\gamma}{n}}}{\left|1 - \frac{4\gamma}{n^2}\right|^{\frac{2\gamma}{n} + \frac{n}{2}}} \left|\frac{n - 2\sqrt{\gamma}}{n + 2\sqrt{\gamma}}\right|^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{7.14}$$

*Знак рівності в цій нерівності досягається, коли точки $0$, $\infty$, $a_k$ і області $B_0$, $B_\infty$, $B_k$, $k = \overline{1,n}$, є, відповідно, полюсами та круговими* *областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (n^2 - 2\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2. \tag{7.15}$$

**Доведення.** Розглянемо відкриту множину

$$\widetilde{D} = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \cup B_0 \cup B_\infty.$$

Очевидно, що $r\left(B_k, a_k\right) \leqslant r\left(\widetilde{D}, a_k\right) = r\left(\widetilde{D}(a_k), a_k\right)$. Звідси випливає, що

$$[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left[r\left(\widetilde{D}, 0\right) r\left(\widetilde{D}, \infty\right)\right]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\left(\widetilde{D}, a_k\right).$$

Нехай $\zeta = \pi_k(w)$ позначає однозначну вітку багатозначної аналітичної функції $-i\left(e^{-i\arg a_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1,n}$, яка виконує однолисте і конформне відображення $\overline{P}_k$ на праву півплощину $\operatorname{Re}\zeta > 0$. Введемо систему функцій

$$\zeta = \pi_k(w) = -i\left(e^{-i\arg a_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Нехай $\Omega_k^{(1)}$, $k = \overline{1,n}$, позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_k \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_k)$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. В свою чергу, через $\Omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, ми позначимо область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_{k+1} \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_{k+1})$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі, $B_{n+1} := B_1$, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Крім того, $\Omega_k^{(0)}$ позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_0 \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\zeta = 0$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Аналогічно, $\Omega_k^{(\infty)}$ буде позначати область площини

$\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_\infty \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\zeta = \infty$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Зрозуміло, що $\pi_k(a_k) := -i$, $\pi_k(a_{k+1}) := i$, $k = \overline{1,n}$. Із визначення функції $\pi_k(w)$ випливає, що

$$|\pi_k(w) + i| \sim \frac{1}{\alpha_k}|w - a_k|, \quad w \to a_k, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w) - i| \sim \frac{1}{\alpha_k}|w - a_{k+1}|, \quad w \to a_{k+1}, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to \infty, \quad w \in \overline{P_k}.$$

Використовуючи відповідні результати для розділяючого перетворення [57, 56], маємо нерівності

$$r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left[\alpha_k r\left(\Omega_k^{(1)}, -i\right) \cdot \alpha_{k-1} r\left(\Omega_{k-1}^{(2)}, i\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{7.16}$$

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{7.17}$$

$$r\left(B_\infty, \infty\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(\infty)}, \infty\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{7.18}$$

Умови реалізації знака рівності в нерівностях (7.16)–(7.18) описані в роботі [57, с. 29]. На основі цих співвідношень, одержуємо нерівність

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \times$$

$$\times \left\{\prod_{k=1}^{n} \left(r\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right) r\left(\Omega_k^{(\infty)}, \infty\right)\right)^{\gamma\alpha_k^2} r\left(\Omega_k^{(1)}, -i\right) r\left(\Omega_k^{(2)}, i\right)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Знак рівності в останній нерівності досягається тоді, коли реалізується знак рівності в нерівностях (7.16)–(7.18) при всіх $k = \overline{1,n}$. Далі, із останнього співвідношення на основі теореми 4.1.1 [11], наслідку 4.1.3 [11] та інваріантності функціонала

$$\left(\frac{r\left(B_1,a_1\right)r\left(B_3,a_3\right)}{|a_1-a_3|^2}\right)^{\gamma}\left(\frac{r\left(B_2,a_2\right)r\left(B_4,a_4\right)}{|a_2-a_4|^2}\right),$$

маємо

$$J_n(\gamma)\leqslant 2^n\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\times \tag{7.19}$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left\{\left(r\left(\widetilde{\Omega}_k^{(0)},0\right)r\left(\widetilde{\Omega}_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\gamma\alpha_k^2}\frac{r\left(\widetilde{\Omega}_k^{(1)},-i\right)r\left(\widetilde{\Omega}_k^{(2)},i\right)}{\left|(-i)-i\right|^2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

де області $\widetilde{\Omega}_k^{(0)}$, $\widetilde{\Omega}_k^{(\infty)}$, $\widetilde{\Omega}_k^{(1)}$, $\widetilde{\Omega}_k^{(2)}$ і точки $0$, $\infty$, $-i$, $i$, є, відповідно, кругові області та полюси квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2=-\frac{z^4+2\left(1-\frac{2}{\gamma\alpha_k^2}\right)z^2+1}{z^2(z^2+1)^2}\,dz^2.$$

Кожен вираз, що міститься в фігурних дужках останньої нерівності, є значенням функціонала

$$K_\tau=\left[r\left(B_0,0\right)r\left(B_\infty,\infty\right)\right]^{\tau^2}\cdot\frac{r\left(B_1,a_1\right)r\left(B_2,a_2\right)}{|a_1-a_2|^2}$$

на системі неперетинних областей $\left\{\widetilde{\Omega}_k^{(0)},\,\widetilde{\Omega}_k^{(1)},\,\widetilde{\Omega}_k^{(2)},\,\widetilde{\Omega}_k^{(\infty)}\right\}$ і відповідній системі точок $\{0,\,-i,\,i,\,\infty\}$ $(k=\overline{1,n})$. На основі леми 4.1.2. [11], маємо оцінку

$$K_\tau\leqslant\Phi(\tau),\quad \tau\geqslant 0,$$

де $\Phi(\tau)=\tau^{2\tau^2}\cdot|1-\tau|^{-(1-\tau)^2}\cdot(1+\tau)^{-(1+\tau)^2}$. Звідси,

$$J_n(\gamma)\leqslant\left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^n\left[\prod_{k=1}^{n}\left(\tau_k^{2\tau_k^2+2}\cdot|1-\tau_k|^{-(1-\tau_k)^2}\cdot(1+\tau_k)^{-(1+\tau_k)^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

де $\tau_k=\alpha_k\sqrt{\gamma}$, $k=\overline{1,n}$. Нехай

$$S(x)=x^{2x^2+2}\cdot|1-x|^{-(1-x)^2}\cdot(1+x)^{-(1+x)^2}\quad\text{і}\quad\Psi(x)=\ln(S(x)).$$

Тоді

$$\Psi'(x) = 4x\ln(x) - 2(x-1)\ln|x-1| - 2(x+1)\ln(x+1) + \frac{2}{x},$$

$$\Psi''(x) = 2\ln\frac{x^2}{|x-1|(x+1)} - \frac{2}{x^2}.$$

Функція $\Psi(x)$ при $x \geqslant 0$ має єдину точку перегину $y_0 \approx 0,884414$. Таким чином, отримуємо, що $S(x)$ — логарифмічно опукла функція на проміжку $[0, y_0]$. Так як $x_k \in (0, y_0]$, $k = \overline{1,n}$, тоді має місце співвідношення

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln S\left(x_k\right) \leqslant \ln S\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{n}\right).$$

Це рівносильно тому, що

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} S\left(x_k\right)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \ln\left(S\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right).$$

Знак рівності в цій нерівності досягається тоді, коли

$$\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_n = \frac{2\sqrt{\gamma}}{n},$$

тобто коли $\alpha_k = \frac{2}{n}$, $k = \overline{1,n}$. В цьому випадку із (7.19) слідує, що

$$J_n(\gamma) \leqslant J_n^0(\gamma) =$$

$$= \left(\frac{4}{n}\right)^n \left[\left(r\left(D_0, 0\right) r\left(D_\infty, \infty\right)\right)^{\frac{4\gamma}{n^2}} \cdot \frac{r\left(D_1, -i\right) r\left(D_2, i\right)}{|(-i) - i|^2}\right]^{\frac{n}{2}},$$

де $D_0$, $D_\infty$, $D_1$, $D_2$, — кругові області квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{\frac{4\gamma}{n^2}z^4 + 2\left(\frac{4\gamma}{n^2} - 2\right)z^2 + \frac{4\gamma}{n^2}}{z^2(z^2+1)^2}\,dz^2. \qquad (7.20)$$

Звідси, остаточно, маємо

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^n \left[S\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{n}{2}}.$$

Використовуючи конкретний вираз для $S\,(x)$, одержуємо основну нерівність теореми 7.2.1. Виконуючи в (7.20) заміну змінної за формулою $z=-iw^{\frac{n}{2}}$, отримуємо квадратичний диференціал (7.15). Знак рівності в нерівності (7.14) перевіряється безпосередньо. Теорема 7.2.1 доведена.

Із теореми 7.2.1 для точок, розміщених на одиничному колі і областей, що взаємно не перетинаються, одержуємо наступне твердження.

**Наслідок 7.2.1.** [52] *Нехай* $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in(0,\gamma_n)$, $\gamma_n\approx 0,195547n^2$. *Тоді для будь-яких різних точок* $a_k$, $k=\overline{1,n}$, *одиничного кола* $|w|=1$ *таких, що* $0<\alpha_k\leqslant y_0/\sqrt{\gamma}$, $k=\overline{1,n}$, $y_0\approx 0,884414$, *і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_\infty$, $B_k$, $a_0=0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $\infty\in B_\infty\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, *справедлива нерівність* (7.14). *Знак рівності в якому досягається при умовах теореми 7.2.1.*

Оскільки в роботах [56, с. 59], [87, с. 267] для $n=2$ було отримано, що $\gamma_2=0,5$, то наведемо наступне твердження.

**Наслідок 7.2.2.** [52] *Нехай* $n=2$, $\gamma\in(0,\gamma_2)$, $\gamma_2\approx 0,782188$. *Тоді для будь-яких різних точок* $a_1$ *і* $a_2$ *одиничного кола* $|w|=1$ *таких, що* $0<\alpha_k\leqslant y_0/\sqrt{\gamma}$, $k=\overline{1,n}$, $y_0\approx 0,884414$, *і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_\infty$, $B_k$, $a_0=0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $\infty\in B_\infty\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k\in\{1,2\}$, *справедлива нерівність*

$$[r\,(B_0,0)\,r\,(B_\infty,\infty)]^\gamma\,r\,(B_1,a_1)\,r\,(B_2,a_2)\leqslant$$

$$\leqslant[r\,(\Lambda_0,0)\,r\,(\Lambda_\infty,\infty)]^\gamma\,r\,(\Lambda_1,\lambda_1)\,r\,(\Lambda_2,\lambda_2)\,,$$

*де області* $\Lambda_0$, $\Lambda_\infty$, $\Lambda_1$, $\Lambda_2$, *і точки* $0$, $\infty$, $\lambda_1$, $\lambda_2$, *є кругові області і, відповідно, полюси квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2=-\frac{\gamma w^4+(4-2\gamma)w^2+\gamma}{w^2(w^2-1)^2}\,dw^2.$$

## 7.3. Екстремальне розбиття багатовимірного комплексного простору для поліциліндричних областей з полюсами на межі полікруга

Метою даного підрозділу є вивчення задачі про добуток степенів узагальнених конформних радіусів поліциліндричних непереинних областей з полюсами на межі полікруга. Просторові аналоги ряду відомих результатів про неперетинні області на площині були отримані в роботі [60]. Для цього в [60] було узагальнено поняття внутрішнього радіуса, а саме, введено поняття гармонічного радіуса просторової області $B \subset \mathbb{R}^n$ відносно деякої внутрішньої точки. Мабуть, работа [60] є єдиною роботою, де вдалося значно просунутися в отриманні результатів для неперетинних областей в просторовому випадку. Далі, в [13] був запропонований підхід, який дозволяє перенести деякі результати, відомі для випадку комплексної площини, на $\mathbb{C}^n$.

За означенням $\mathbb{C}^n = \underbrace{(\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C})}_{n-\text{раз}}$, $n \in \mathbb{N}$. $\overline{\mathbb{C}}^n = \underbrace{(\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \ldots \times \overline{\mathbb{C}})}_{n-\text{раз}}$ — компактифікація простору $\mathbb{C}^n$ (див., наприклад, [126, 128, 133]), де множина нескінченно віддалених точок має комплексну розмірність $n-1$. Нехай $[D]^n$ — (декартова степінь області $D \in \overline{\mathbb{C}}$) позначає декартовий добуток $\underbrace{D \times D \times \ldots \times D}_{n-\text{раз}}$, $[d]^n$ — (декартова степінь точки $d \in \overline{\mathbb{C}}$) позначає точку із $\overline{\mathbb{C}}^n$, яка має координати $\underbrace{(d, ..., d)}_{n-\text{раз}}$. Зрозуміло, що $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}}^1 = \overline{\mathbb{C}}$. Нескінченними точками $\overline{\mathbb{C}}^n$ є ті точки, у яких хоча б одна координата нескінченна.

Топологія в $\overline{\mathbb{C}}^n$ вводиться як у декартовому добутку топологічних просторів. У цій топології $\overline{\mathbb{C}}^n$ компактно (див. [126, 128, 133]).

Область $\mathbb{B} = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n \subset \overline{\mathbb{C}}^n$, де кожна область $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$,

$k=\overline{1,n}$, називається поліциліндричною областю в $\overline{\mathbb{C}}^n$ (див., наприклад, [128, Ч. II]). Області $B_k$, $k=\overline{1,n}$, назвемо координатними областями області $\mathbb{B}$.

Узагальненим внутрішнім радіусом поліциліндричної області $\mathbb{B}$ відносно точки $\mathbb{A}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\mathbb{B}$, $a_k\in B_k$, $k=\overline{1,n}$, будемо називати величину

$$R(\mathbb{B},\mathbb{A}):=\left(\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\right)^{\frac{1}{n}},$$

де величини $r(B_k,a_k)$, $k=\overline{1,n}$, позначають внутрішні радіуси (див. [40, 57, 127]) координатних областей $B_k$ відносно $a_k$.

При $n=1$ величина $R(\mathbb{B},\mathbb{A})$ є звичайним внутрішнім радіусом області $\mathbb{B}\subset\overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $\mathbb{A}$.

Нехай $\mathbb{U}^n=[U]^n$, де $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ (одиничний круг в комплексній площині $\mathbb{C}$). Позначимо через $\Gamma_n$ кістяк полікруга $\mathbb{U}^n$ (див. [40, 127]), тобто множину точок $\mathbb{A}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\subset\mathbb{C}^n$, $|a_s|=1$, $s=\overline{1,n}$.

Система $\{\mathbb{B}_k\}_{k=1}^m$ $\left(\mathbb{B}_k=B_1^{(k)}\times\ldots\times B_n^{(k)},\ k=\overline{1,m}\right)$ називається системою неперетинних поліциліндричних областей, якщо при кожному фіксованому $p_0$, $p_0=\overline{1,n}$, система областей $\left\{B_{p_0}^{(k)}\right\}$, $k=\overline{1,m}$, є системою неперетинних областей на $\overline{\mathbb{C}}$.

Нехай $m\in\mathbb{N}$, $m\geqslant 2$. Система точок $\Delta_m:=\{a_k\}_{k=1}^m$, $a_k\in\mathbb{C}$, називається $m$-променевою, якщо $|a_k|\in\mathbb{R}^+$ при $k=\overline{1,m}$,

$$0=\arg a_1<\arg a_2<\ldots<\arg a_m<2\pi.$$

Система точок $\{\mathbb{A}_k\}_{k=1}^m$ $\left(\mathbb{A}_k=\left(a_1^{(k)},a_2^{(k)},\ldots,a_n^{(k)}\right)\in\mathbb{C}^n,\quad k=\overline{1,m}\right)$, називається променевою в просторі $\mathbb{C}^n$, якщо при кожному фіксованому $p_0$ послідовність $\left\{a_{p_0}^{(k)}\right\}$, $k=\overline{1,m}$, є $m$-променевою системою точок на відповідній комплексній площині $\mathbb{C}$.

Будемо розглядати променеві системи точок в просторі $\mathbb{C}^n$ наступного виду

$$\{\mathbb{A}_k\}_{k=1}^m, \ \mathbb{A}_k = \left(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}\right) \in \mathbb{C}^n,$$
$$k = \overline{1, m}, \quad a_{p_0}^{(1)} > 0, \quad p_0 = \overline{1, n}, \tag{7.21}$$
$$\arg a_{p_0}^{(k)} < \arg a_{p_0}^{(k+1)}, \quad k = \overline{1, m-1}, \quad \arg a_{p_0}^{(m)} < 2\pi.$$

Введемо також наступні позначення

$$\alpha_{p_0}^{(1)} := \frac{1}{\pi}\left(\arg a_{p_0}^{(2)} - \arg a_{p_0}^{(1)}\right), \quad \alpha_{p_0}^{(2)} := \frac{1}{\pi}\left(\arg a_{p_0}^{(3)} - \arg a_{p_0}^{(2)}\right), \ldots,$$
$$\alpha_{p_0}^{(m)} := \frac{1}{\pi}\left(2\pi - \arg a_{p_0}^{(m)}\right).$$

Розглянемо добуток

$$\mathbb{I}_m(\gamma) = R^{\gamma}(\mathbb{B}_0, \mathbb{A}_0) \prod_{k=1}^{m} R(\mathbb{B}_k, \mathbb{A}_k),$$

де $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $\mathbb{A}_0 = [0]^n = (0,\, 0, \ldots, 0)$, $\mathbb{A}_k \in \mathbb{B}_k \subset \overline{\mathbb{C}}^n$, $k = \overline{0, m}$, $\{\mathbb{A}_k\}_{k=1}^m = \left\{a_p^s\right\}_{s=1}^m$, $p = \overline{1, n}$ — довільний набір точок на $\Gamma_n$ і $\{\mathbb{B}_k\}_{k=0}^m$ — неперетинні поліциліндричні області в $\overline{\mathbb{C}}^n$. Нехай

$$F_\delta(x) = 2^{x^2+6} \cdot x^{x^2+2-2\delta} \cdot (2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2} (2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2},$$
$$x \in (0, 2], \quad \delta \in [0,\, 1], \quad F_\delta(x) \subset \overline{\mathbb{C}}.$$

**Теорема 7.3.1.** [51] *Нехай $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 7$, $\gamma \in (0, \gamma_0]$, $\gamma_0 = \sqrt[3]{m}$ і $\delta \in [0;\, 0,7]$. Тоді для довільної променевої системи точок виду* (7.21) $\{\mathbb{A}_k\}_{k=1}^m = \left\{a_p^{(k)}\right\}_{k=1}^m \in \overline{\mathbb{C}}^n$, $p = \overline{1, n}$, *такої, що* $\mathbb{A}_k \in \Gamma_n$, $k = \overline{1, m}$, *і довільного набору неперетинних поліциліндричних областей* $\mathbb{B}_0$, $\mathbb{B}_k$, $\mathbb{A}_0 \in \mathbb{B}_0 \subset \overline{\mathbb{C}}^n$, $\mathbb{A}_k \in \mathbb{B}_k \subset \overline{\mathbb{C}}^n$, $k = \overline{1, m}$, *справедлива нерівність*

$$R^{\gamma}(\mathbb{B}_0, \mathbb{A}_0) \prod_{k=1}^{m} R(\mathbb{B}_k, \mathbb{A}_k) \leqslant \gamma^{-\frac{\delta \cdot m}{2}} \cdot \left(\prod_{k=1}^{m} \prod_{p=1}^{n} \alpha_p^{(k)}\right)^{\frac{\delta}{n}} \cdot \left[F_\delta\left(\frac{2}{m}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{m}{2}}.$$

*Однією із екстремальних систем є система*

$$\{\mathbb{B}_k\}_{k=0}^m = \left\{ \left[B_0^{(0)}\right]^n, \left[B_1^{(0)}\right]^n, \left[B_2^{(0)}\right]^n, \ldots, \left[B_m^{(0)}\right]^n \right\},$$

$$\{\mathbb{A}_k\}_{k=0}^m = \left\{ [0]^n, \left[b_1^{(0)}\right]^n, \left[b_2^{(0)}\right]^n, \ldots, \left[b_m^{(0)}\right]^n \right\},$$

*де області* $B_0^{(0)}$, $B_k^{(0)}$ *і точки* $0$, $b_k^{(0)}$, $k = \overline{1,m}$, *є, відповідно, круговими областями та полюсами квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

**Доведення.** Виконаємо наступне перетворення

$$\mathbb{I}_m(\gamma) = \left[\prod_{p=1}^n r\left(B_p^{(0)}, a_p^{(0)}\right)\right]^{\frac{\gamma}{n}} \prod_{k=1}^m \left[\prod_{p=1}^n r\left(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}\right)\right]^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \left[\prod_{p=1}^n \left[ r^\gamma\left(B_p^{(0)}, a_p^{(0)}\right) \prod_{k=1}^m r\left(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}\right)\right]\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Позначимо

$$I_p^m(\gamma) := r^\gamma\left(B_p^{(0)}, a_p^{(0)}\right) \prod_{k=1}^m r\left(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}\right).$$

Тоді для фіксованого $p=\overline{1,n}$ області $B_p^{(k)}$, $k=\overline{0,m}$, утворюють систему неперетинних областей на комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}$. Таким чином, згідно з роботою [47], для кожного фіксованого $p=\overline{1,n}$, маємо співвідношення

$$I_p^m(\gamma) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\prod_{k=1}^m \alpha_p^{(k)}\right) \left[\prod_{k=1}^m r^{\left(\alpha_p^{(k)}\right)^2\gamma}\left(G_p^{(k)}, 0\right) r\left(T_p^{(k)}, -i\right) r\left(Y_p^{(k)}, i\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

де $G_p^{(k)}$, $T_p^{(k)}$, $Y_p^{(k)}$ — кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = \frac{\left(4-\left(\alpha_p^{(k)}\right)^2\gamma\right)w^2 - \left(\alpha_p^{(k)}\right)^2\gamma}{w^2(w^2+1)^2}\,dw^2$$

$\left(0 \in G_p^{(k)},\ -i \in T_p^{(k)},\ i \in Y_p^{(k)}\right)$. Використовуючи методику, розвинену в статті [47], одержуємо оцінку

$$I_p^m(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{m} \alpha_p^{(k)}\right) \left[\prod_{k=1}^{m} S\left(\alpha_p^{(k)}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{1/2},$$

$$S(x) = 2^{x^2+6} x^{x^2} (2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2} (2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2}, \quad x \in [0,2].$$

Далі, використовуючи ідеї робіт [47, 76], маємо наступну нерівність

$$I_p^m(\gamma) \leqslant \gamma^{-\frac{\delta m}{2}} \left(\prod_{k=1}^{m} \alpha_p^{(k)}\right)^{\delta} \left[\prod_{k=1}^{m} F_\delta\left(\alpha_p^{(k)}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{1/2}, \quad \delta \in [0,\ 0,7]. \qquad (7.22)$$

Розглянемо функціонал

$$\widetilde{I_p^m(\gamma)} = \gamma^{\frac{\delta m}{2}} \left(\prod_{k=1}^{m} \alpha_p^{(k)}\right)^{-\delta} I_p^m(\gamma).$$

Із нерівності (7.22) слідує, що

$$\widetilde{I_p^m(\gamma)} \leqslant \left[\prod_{k=1}^{m} F_\delta\left(\alpha_p^{(k)}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Далі, розглянемо наступну екстремальну проблему:

$$\prod_{k=1}^{m} F_\delta(x_k) \longrightarrow \max; \quad \sum_{k=1}^{m} x_k = 2\sqrt{\gamma}, \quad x_k = \alpha_p^{(k)}\sqrt{\gamma},$$

$$0 < x_k \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \delta \leqslant 0,7.$$

Нехай $\Psi_\delta(x) = \ln\left(F_\delta(x)\right)$ і $X^{(0)} = \left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{m}$ — довільна екстремальна точка. Згідно роботі [76] має місце твердження: якщо $0 < x_k^{(0)} < x_j^{(0)} < 2$, $k \neq j$, тоді

$$\Psi'_\delta\left(x_k^{(0)}\right) = \Psi'_\delta\left(x_j^{(0)}\right),$$

і якщо деяке $x_j^{(0)} = 2$, тоді для довільного $x_k^{(0)} < 2$,

$$\Psi'_\delta\left(x_k^{(0)}\right) \leqslant \Psi'_\delta\left(x_j^{(0)}\right) = \Psi'_\delta(2),$$

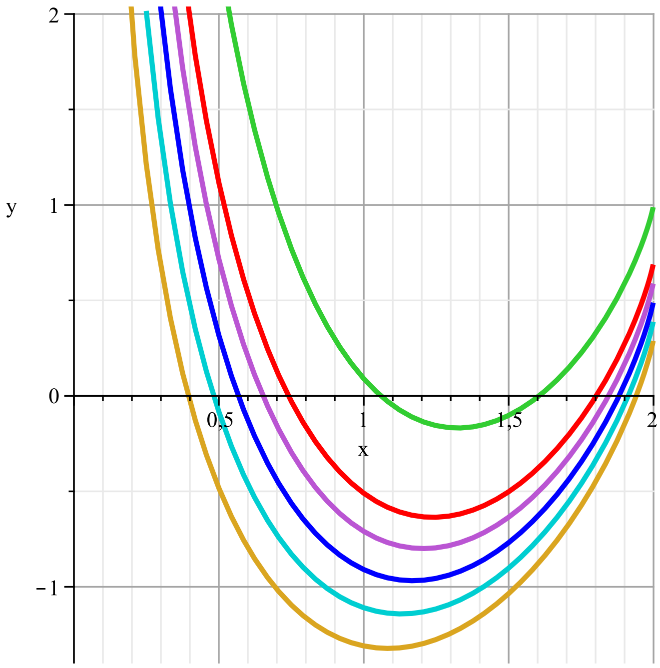


Рис. 7.19: Графік функції $y = \Psi'_\delta(x)$

де $k, j = \overline{1, m}$, $k \neq j$, $0 \leqslant \delta \leqslant 0,7$,

$$\Psi'_\delta(x) = 2x\ln(2x) + (2-x)\ln(2-x) - (2+x)\ln(2+x) + \frac{2}{x} - \frac{2\delta}{x}$$

(див. Рис. 7.19). Перевіримо чи при вище прийнятих співвідношеннях буде виконуватися умова

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_m^{(0)}.$$

Нехай

$$\sigma_1 := \sigma_1(\delta, \gamma) = \min_{1 \leqslant k \leqslant m} x_k^{(0)}(\delta, \gamma),$$

$$\sigma_0 := \sigma_0(\delta, \gamma) = \max_{1 \leqslant k \leqslant m} x_k^{(0)}(\delta, \gamma),$$

$\sigma_1 \leqslant \sigma_k \leqslant \sigma_0$, $k = \overline{1, m}$, $0 \leqslant \delta \leqslant 0,7$, $\gamma \in (0, \sqrt[3]{m}]$.

Функція $\Psi''_\delta(x)$ монотонно зростає на проміжку $(0, 2)$ при кожному фіксованому $\delta$ та існує $x_0(\delta, \gamma) \in (1,084419;\ 1,324661)$ таке, що

$$sign\Psi''_\delta(x) \equiv sign(x - x_0(\delta, \gamma)).$$

Якщо $\sigma_0 \leqslant x_0(\delta,\gamma)$, тоді в силу строгої монотонності $\Psi'_\delta(x)$ на $[0,\ x_0(\delta,\gamma)]$ і із умов задачі маємо, що $x_1^{(0)} = \ldots = x_m^{(0)}$.

Нехай $x_0(\delta,\gamma) < \sigma_0 \leqslant 1,95$. Тоді

$$\sigma_1 \leqslant \frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m-1} x_k^{(0)} = \frac{2\sqrt{\gamma}-\sigma_0}{m-1} \leqslant \frac{2\sqrt[6]{m}-\sigma_0}{m-1} \leqslant \frac{2\sqrt[6]{7}-\sigma_0}{6}.$$

Звідси, для $m \geqslant 7$, $\gamma \in (0,\ \sqrt[3]{m}\,]$, $0 \leqslant \delta \leqslant 0,7$, справедлива нерівність

$$\sigma_1 \leqslant \left(2\sqrt[6]{m} - x_0(\delta,\gamma)\right)/6 \leqslant (2,935598 - 1,08441)/6 < 0,280294.$$

Таким чином,

$$\Psi'_\delta(\sigma_1) > \Psi'_\delta(0,280294) > \Psi'_{0,7}(0,280294) = 0,868846 >$$

$$> 0,757486 = \Psi'_0(1,95) \geqslant \Psi'_\delta(\sigma_0).$$

Отже, $\sigma_0 \notin (x_0(\delta,\gamma);\ 1,95]$.

Далі, нехай $1,95 < \sigma_0 \leqslant 2$. Тоді для $m \geqslant 7$, $\gamma \in (0,\ \sqrt[3]{m}]$, $0 \leqslant \delta \leqslant 0,7$, ми маємо, що $\sigma_1 \leqslant (2\sqrt[6]{m} - 1,95)/6 < 0,136029$. Таким чином,

$$\Psi'_\delta(\sigma_1) > \Psi'_\delta(0,136029) > \Psi'_{0,7}(0,136029) = 3,596251 >$$

$$> 1 = \Psi'_0(2) \geqslant \Psi'_\delta(\sigma_0).$$

Звідси, $\sigma_0 \notin (x_0(\delta,\gamma),\ 2]$. Із всього вище наведеного слідує, що для екстремального набору точок $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{m}$ можливий лише випадок, коли

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_m^{(0)}.$$

Отже, одержуємо, що справедливе співвідношення

$$\prod_{k=1}^{m} F_\delta\left(\alpha_p^{(k)}\sqrt{\gamma}\right) \leqslant \left[F_\delta\left(\frac{2}{m}\sqrt{\gamma}\right)\right]^m.$$

Використовуючи останню нерівність та співвідношення (7.22), маємо, що для кожного фіксованого $p = \overline{1,n}$ справедлива нерівність

$$I_p^m(\gamma) \leqslant \gamma^{-\frac{\delta m}{2}} \left(\prod_{k=1}^{m}\alpha_p^{(k)}\right)^{\delta} \left[F_\delta\left(\frac{2}{m}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{m}{2}}.$$

І, остаточно, одержуємо, що

$$\mathbb{I}_m(\gamma) = \left(\prod_{p=1}^{n} I_p^m(\gamma)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \gamma^{-\frac{\delta\cdot m}{2}} \cdot \left(\prod_{k=1}^{m}\prod_{p=1}^{n} \alpha_p^{(k)}\right)^{\frac{\delta}{n}} \cdot \left[F_\delta\left(\frac{2}{m}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{m}{2}}.$$

Твердження про знак рівності перевіряється безпосередньо. Теорема 7.3.1 доведена.

## 7.4. Оцінки добутків внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок, розміщених на одній прямій

Використавши міркування леми 1 роботи [142], отримуємо наступні результати, що стосуються оцінок зверху для добутків внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно фіксованих точок розміщених на одній прямій. В якості наслідків розглядається випадок, коли на двох променях міститься однакова кількість точок.

**Теорема 7.4.1.** [28] *Нехай* $p, q \in \mathbb{N}$, $p+q \geqslant 3$, $\gamma \in (0, p+q]$. *Тоді для будь-яких фіксованих точок дійсної осі* $a_k$, $k = \overline{1, p+q}$ ($a_k \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1, p}$, $a_k \in \mathbb{R}^-$, $k = \overline{1, q}$), *й будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, p+q}$, *справедлива нерівність*

$$r^\gamma\left(B_0, 0\right)\prod_{k=1}^{p+q} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant (p+q)^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{p+q} r\left(B_k, a_k\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{p+q}}\left(\prod_{k=1}^{p+q}|a_k|\right)^{\frac{2\gamma}{p+q}}.$$

**Доведення.** Нехай $d(E)$ — трансфінітний діаметр компактної множини $E \subset \mathbb{C}$. Тоді справедливе співвідношення

$$r\left(B_0,0\right)=r\left(B_0^+,\infty\right)=\frac{1}{d\left(\overline{\mathbb{C}}\setminus B_0^+\right)}\leqslant\frac{1}{d\left(\bigcup\limits_{k=1}^{p+q}\overline{B}_k^+\right)}, \qquad (7.23)$$

де $B^+=\left\{z:\,\frac{1}{z}\in B\right\}$. За теоремою Пойа [99, с. 28], має місце нерівність

$$\mu E\leqslant\pi d^2(E),$$

де $\mu E$ позначає лебегову міру компактної множини $E$. Звідси одержуємо, що

$$d(E)\geqslant\left(\frac{1}{\pi}\mu E\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тоді із (7.23), маємо

$$r\left(B_0,0\right)\leqslant\frac{1}{d\left(\bigcup\limits_{k=1}^{p+q}\overline{B}_k^+\right)}\leqslant\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\pi}\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{p+q}\overline{B}_k^+\right)}}=\left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{p+q}\mu\overline{B}_k^+\right]^{-\frac{1}{2}}. \qquad (7.24)$$

Із теореми про мінімізацію площі [40, с. 34] слідує, що

$$\mu(B)\geqslant\pi r^2\left(B,a\right).$$

Із нерівності (7.24) безпосередньо отримуємо, що

$$r\left(B_0,0\right)\leqslant\left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{p+q}\mu\overline{B}_k^+\right]^{-\frac{1}{2}}\leqslant\left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{p+q}\mu B_k^+\right]^{-\frac{1}{2}}\leqslant\left[\sum_{k=1}^{p+q}r^2\left(B_k^+,a_k^+\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Звідси

$$r\left(B_0,0\right)\leqslant\frac{1}{\left[\sum\limits_{k=1}^{p+q}r^2\left(B_k^+,a_k^+\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Використовуючи інваріантність функції Гріна при конформному та однолистому відображенні, маємо

$$g_{B_k}(z,a_k)=g_{B_k^+}(w^+,a_k^+),\quad w^+=\frac{1}{z}.$$

Використовуючи співвідношення

$$g_{B_k^+}(w^+, a_k^+) = g_{B_k^+}\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{a_k}\right) = \ln \frac{1}{\left|\frac{1}{z} - a_k^+\right|} + \ln r(B_k^+, a_k^+) + o(1),$$

маємо, що

$$r\left(B_k^+, a_k^+\right) = \frac{r\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^2}$$

і

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \frac{1}{\left[\sum\limits_{k=1}^{p+q} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

З припущення теореми випливає співвідношення

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{p+q} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{p+q} r\left(B_k, a_k\right)}{\left[\sum\limits_{k=1}^{p+q} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}}.$$

Далі, із нерівності Коші

$$\frac{1}{p+q} \sum_{k=1}^{p+q} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4} \geqslant \left[\prod_{k=1}^{p+q} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{1}{p+q}}.$$

Таким чином, неважко отримати, що

$$\left[\sum_{k=1}^{p+q} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}} \geqslant \left[(p+q)\left[\prod_{k=1}^{p+q} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{1}{p+q}}\right]^{\frac{\gamma}{2}} =$$

$$= (p+q)^{\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^{p+q} r\left(B_k, a_k\right)\right)^{\frac{\gamma}{p+q}} \left(\prod_{k=1}^{p+q} |a_k|\right)^{-\frac{2\gamma}{p+q}}.$$

Отже,

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{p+q} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{p+q} r\left(B_k, a_k\right)}{(p+q)^{\frac{\gamma}{2}} \left(\prod\limits_{k=1}^{p+q} r\left(B_k, a_k\right)\right)^{\frac{\gamma}{p+q}} \left(\prod\limits_{k=1}^{p+q} |a_k|\right)^{-\frac{2\gamma}{p+q}}} =$$

$$= (p+q)^{-\frac{\gamma}{2}} \left( \prod_{k=1}^{p+q} r\left(B_k, a_k\right) \right)^{1-\frac{\gamma}{p+q}} \left( \prod_{k=1}^{p+q} |a_k| \right)^{\frac{2\gamma}{p+q}}.$$

Теорема 7.4.1 доведена.

**Зауваження 7.4.1.** *Якщо* $\gamma = p+q$ *і* $|a_k| \leqslant R$, *то за умов теореми 7.4.1 маємо співвідношення*

$$r^{p+q}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{p+q} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant (p+q)^{-\frac{p+q}{2}} \cdot R^{2(p+q)}.$$

**Теорема 7.4.2.** [28] *Нехай* $p, q \in \mathbb{N}$, $p+q \geqslant 3$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. *Тоді для будь-яких фіксованих точок дійсної осі* $a_k$, $k = \overline{1, p+q}$ ($a_k \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1, p}$, $a_k \in \mathbb{R}^-$, $k = \overline{1, q}$), *і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_0$, $B_\infty$, $B_k$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, p+q}$, *справедлива нерівність*

$$\left[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)\right]^\gamma \prod_{k=1}^{p+q} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant ((p+q)+1)^{-\gamma \frac{(p+q)+1}{(p+q)+2}} \left[ \prod_{k=1}^{p+q} r\left(B_k, a_k\right) \right]^{1-\frac{2\gamma}{(p+q)+2}} \left( \prod_{k=1}^{p+q} |a_k| \right)^{\frac{2\gamma}{(p+q)+2}}.$$

**Доведення.** Використовуючи співвідношення (7.23) і (7.24) доведення теореми 7.4.1, отримуємо, що

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\left[ r^2\left(B_\infty^+, 0\right) + \sum\limits_{k=1}^{p+q} r^2\left(B_k^+, a_k^+\right) \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\left[ r^2\left(B_\infty, \infty\right) + \sum\limits_{k=1}^{p+q} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4} \right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$r\left(B_\infty, \infty\right) \leqslant \frac{1}{\left[ r^2\left(B_0, 0\right) + \sum\limits_{k=1}^{p+q} r^2\left(B_k, a_k\right) \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Із нерівності Коші

$$\left(r^2\left(B_\infty,\infty\right)+\sum_{k=1}^{p+q}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant$$

$$\geqslant\left((p+q)+1\right)^{\frac{1}{2}}\left[r\left(B_\infty,\infty\right)\prod_{k=1}^{p+q}\frac{r\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^2}\right]^{\frac{1}{(p+q)+1}}.$$

Таким чином, з врахуванням вище наведених нерівностей

$$r\left(B_0,0\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left((p+q)+1\right)^{-\frac{1}{2}}\left[r\left(B_\infty,\infty\right)\prod_{k=1}^{p+q}r\left(B_k,a_k\right)\right]^{-\frac{1}{(p+q)+1}}\cdot\prod_{k=1}^{p+q}|a_k|^{\frac{2}{(p+q)+1}}.$$

Аналогічно,

$$r\left(B_\infty,\infty\right)\leqslant\left((p+q)+1\right)^{-\frac{1}{2}}\left[r\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{p+q}r\left(B_k,a_k\right)\right]^{-\frac{1}{(p+q)+1}}.$$

Далі, використовуючи нескладні перетворення, маємо

$$r\left(B_0,0\right)r\left(B_\infty,\infty\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left((p+q)+1\right)^{-\frac{(p+q)+1}{(p+q)+2}}\left[\prod_{k=1}^{p+q}r\left(B_k,a_k\right)\right]^{-\frac{2}{(p+q)+2}}\prod_{k=1}^{p+q}|a_k|^{\frac{2}{(p+q)+2}}.$$

І, остаточно, одержуємо основну нерівність теореми 7.4.2

$$\left[r\left(B_0,0\right)r\left(B_\infty,\infty\right)\right]^{\gamma}\prod_{k=1}^{p+q}r\left(B_k,a_k\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left((p+q)+1\right)^{-\gamma\frac{(p+q)+1}{(p+q)+2}}\left[\prod_{k=1}^{p+q}r\left(B_k,a_k\right)\right]^{1-\frac{2\gamma}{(p+q)+2}}\prod_{k=1}^{p+q}|a_k|^{\frac{2\gamma}{(p+q)+2}}.$$

Теорема 7.4.2 доведена.

**Зауваження 7.4.2.** *Якщо* $\gamma=\frac{1}{2}\left(p+q+2\right)$ *і* $|a_k|\leqslant R$, *то за умов теореми 7.4.2 маємо співвідношення*

$$\left[r\left(B_0,0\right)r\left(B_\infty,\infty\right)\right]^{p+q}\prod_{k=1}^{p+q}r\left(B_k,a_k\right)\leqslant\left(p+q+1\right)^{-\frac{p+q+1}{2}}\cdot R^{(p+q)}.$$

**Теорема 7.4.3.** [28] *Нехай* $p, q \in \mathbb{N}$, $p+q \geqslant 3$, $\gamma \in (0, p+q]$. *Тоді для будь-яких фіксованих точок дійсної осі* $a_k$, $k = \overline{1, p+q}$ ($a_k \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1, p}$, $a_k \in \mathbb{R}^-$, $k = \overline{1, q}$), *і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_\infty$, $B_k$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, p+q}$, *справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \leqslant (p+q)^{-\frac{\gamma}{2}} \left[\prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{(p+q)}}.$$

**Доведення.** Використовуючи нерівності (7.23), (7.24) і теорему про мінімізацію площі [40, с. 34], одержуємо співвідношення

$$r(B_\infty, \infty) \leqslant \frac{1}{\left[\sum\limits_{k=1}^{p+q} r^2(B_k, a_k)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Із нерівності Коші, маємо

$$\left(\sum_{k=1}^{p+q} r^2(B_k, a_k)\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant (p+q)^{\frac{1}{2}} \left[\prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k)\right]^{\frac{1}{(p+q)}},$$

$$r^\gamma(B_\infty, \infty) \leqslant (p+q)^{-\frac{\gamma}{2}} \left[\prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k)\right]^{-\frac{\gamma}{(p+q)}}.$$

І, таким чином,

$$r^\gamma(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \leqslant (p+q)^{-\frac{\gamma}{2}} \left[\prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{(p+q)}}.$$

Теорема 7.4.3 доведена.

**Зауваження 7.4.3.** *Якщо* $\gamma = p+q$, *то за умов теореми 7.4.3 маємо співвідношення*

$$r^{p+q}(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \leqslant (p+q)^{-\frac{p+q}{2}}.$$

Розглянемо випадок, якщо $p=q:=m$. У роботі [11, с. 106] для довільної $(2,m)$-променевої системи точок $A_{2,m}=\{a_{k,p}\}$, $k\in\{1,2\}$, $p=\overline{1,m}$, і системи областей, що взаємно не перетинаються, $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k\in\{1,2\}$, $p=\overline{1,m}$, доведено нерівність

$$\prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\leqslant 2^{2m}\cdot(\alpha_1\cdot\alpha_2)^m\cdot(\mu_1(R)\cdot\mu_2(R))^{\frac{1}{2}}\cdot L_R(A_{2,m}),$$

де величини $\{\mu_k(R)\}_{k=1}^{n}\subset\mathbb{R}^+$ при заданому $R$ — коефіцієнти зміщення системи $A_{2,m}$, причому, $\mu_k(R)\leqslant m^{-2m}$, $R\in\mathbb{R}^+$,

$$L_R(A_{2,m}):=\prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)\cdot\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\cdot|a_{k,p}|.$$

Таким чином, із доведених теорем 7.4.1, 7.4.2, 7.4.3 одержуємо наступні результати.

**Наслідок 7.4.1.** [28] *Нехай $m\in\mathbb{N}$, $m\geqslant 2$, $\gamma\in(0,2m]$. Тоді для будь-яких фіксованих точок дійсної осі $a_{k,p}$, $k\in\{1,2\}$, $p=\overline{1,m}$, і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, $B_0$, $B_{k,p}$, $a_0=0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k\in\{1,2\}$, $p=\overline{1,m}$, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2^{2m-\frac{3\gamma}{2}}\cdot m^{-2m+\frac{\gamma}{2}}\cdot\left(L_R(A_{2,m})\right)^{1-\frac{\gamma}{2m}}\left(\prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m}|a_k|\right)^{\frac{\gamma}{m}}.$$

**Наслідок 7.4.2.** [28] *Нехай $m\in\mathbb{N}$, $m\geqslant 2$, $\gamma\in(0,m+1]$. Тоді для будь-яких фіксованих точок дійсної осі $a_{k,p}$, $k\in\{1,2\}$, $p=\overline{1,m}$, і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, $B_0$, $B_\infty$, $B_{k,p}$, $a_0=0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $\infty\in B_\infty\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k\in\{1,2\}$,*

$p=\overline{1,m}$, *справедлива нерівність*

$$[r\,(B_0,0)\,r\,(B_\infty,\infty)]^\gamma\prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m}r\,(B_{k,p},a_{k,p})\leqslant$$

$$\leqslant(2m+1)^{-\gamma\frac{2m+1}{2m+2}}\left[2^{2m}\cdot m^{-2m}\cdot L_R(A_{2,m})\right]^{1-\frac{\gamma}{m+1}}\left(\prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m}|a_k|\right)^{\frac{\gamma}{m+1}}.$$

**Наслідок 7.4.3.** [28] *Нехай* $m\in\mathbb{N}$, $m\geqslant 2$, $\gamma\in(0,2m]$. *Тоді для будь-яких фіксованих точок дійсної осі* $a_{k,p}$, $k\in\{1,2\}$, $p=\overline{1,m}$, *і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються,* $B_\infty$, $B_{k,p}$, $\infty\in B_\infty\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k\in\{1,2\}$, $p=\overline{1,m}$, *справедлива нерівність*

$$r^\gamma\,(B_\infty,\infty)\prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m}r\,(B_{k,p},a_{k,p})\leqslant 2^{2m-\frac{3\gamma}{2}}\cdot m^{-2m+\frac{\gamma}{2}}\cdot(L_R(A_{2,m}))^{1-\frac{\gamma}{2m}}.$$

## Висновки

У сьомому розділі дисертаційної роботи удосконалено методи дослідження екстремальних задач про конформні відображення, що дозволило отримати розв'язок задачі про знаходженню максимума функціонала, що являє собою добуток внутрішніх радіусів неперетинних областей відносно точок комплексної площини (радіуси в точках $0$ і $\infty$ в степені $\gamma$) (теорема 7.1.1, теорема 7.1.2, теорема 7.1.3).

Знайдено точні оцінки для добутків внутрішніх радіусів областей одиничного кола, що задовільняють умові часткового перетину, і виконуються нерівності $0 < \alpha_k \leqslant y_0/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1, n}$, $y_0 \approx 0,884414$ (теорема 7.2.1).

Пропонується узагальнення поняття внутрішнього радіуса на випадок $n$-вимірного комплексного простору, а саме, вводиться поняття узагальненого внутрішнього радіуса. За рахунок введення цього поняття вдалося перенести деякі результати, відомі у випадку комплексної площини, на багатовимірний комплексний простір (теорема 7.3.1).

Одержано оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок, розміщених на одній прямій, за всіх можливих значень степеня $\gamma$ внутрішнього радіуса області відносно початку координат (теорема 7.4.1), за всіх можливих значень степеня $\gamma$ внутрішніх радіусів областей відносно початку координат і нескінченно віддаленої точки (теорема 7.4.2), за всіх можливих значень степеня $\gamma$ внутрішнього радіуса області відносно нескінченно віддаленої точки (теорема 7.4.3). Як наслідки отримано результати коли на двох променях міститься однакова кількість точок (наслідок 7.5.1, наслідок 7.5.2, наслідок 7.5.3).

Результати розділу опубліковано в статтях [28, 37, 51, 52, 145, 236].

# ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена розробці нових підходів і методів розв'язання екстремальних задач геометричної теорії функцій комплексної змінної. В роботі на базі новітніх фундаментальних досягнень у теорії функцій, комплексному аналізі, теорії відображень досліджено ряд актуальних проблем в цих математичних дисциплінах. В результаті зусиль наукового консультанта та здобувачки відкрито нові підходи до цих проблем, створено нові методи дослідження, розвинуто загальні теорії та одержано ряд нових результатів у складних відкритих проблемах, над якими працюють математики в багатьох країнах світу. Дослідження проведено на найвищому світовому рівні. Результати досліджень опубліковано у 26 вітчизняних та закордонних математичних виданнях, вони доповідались на 17 міжнародних наукових конференціях. Отримані результати та розвинені в роботі підходи і методи відкривають нові перспективи для подальшого дослідження цих проблем.

В роботі одержано ефективні оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів неперетинних областей із фіксованими полюсами відповідних квадратичних диференціалів на променевих системах точок комплексної площини при всіх можливих значеннях деякого параметра $\gamma$ та встановлено умови при яких в доведених результатах конфігурація областей і точок неістотна. Одержано оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються, у випадках, коли полюси відповідних квадратичних диференціалів розміщені на одиничному колі або на довільній прямій, і у випадку, коли області симетричні відносно одиничного кола.

Розв'язано відкриту проблему про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів двох областей відносно точок одиничного кола на степінь $\gamma$ внутрішнього радіуса області відносно початку координат при довільному $\gamma \in (0,2]$ за умови, що всі три області попарно не перетинаються, й доведено узагальнення цього результату.

Доведені оцінки функціоналів дозволили знайти посилені результати стосовно точних розв'язків відкритих екстремальних проблем про взаємно неперетинні області комплексної площини у випадку вільних полюсів відповідних квадратичних диференціалів.

В роботі значно узагальнені й посилені класичні результати В.М. Дубініна, Г.В. Кузьміної, Є.Г. Ємельянова, Л.В. Ковальова, О.К. Бахтіна, Я.В. Заболотного.

Варто зазначити, що навіть наслідки загальних теорем — це суттєві узагальнення й посилення раніше відомих в цьому напрямку результатів.

Отримані в дисертаційній роботі результати й розвинені в ній методи можуть бути корисними в подальших дослідженнях комплексного і гіперкомплексного аналізів та їх застосуваннях.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. — М.: Наука, 1976. — 343 с.

2. Аленицын Ю.Е. Об однолистных функциях без общих значений в многосвязной области // Труды мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1968. — **94**. — С. 4 – 18.

3. Аленицын Ю.Е. О функциях без общих значений и внешней границе области значений функции // Мат. сборник. — 1988. — **46**, № 4.— С. 373 – 388.

4. Альфорс Л., Берс Л. Пространство римановых поверхностей и квазиконформные отображения. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961. — 177 с.

5. Андреев В.А. Экстремальные задачи для одного класса регулярных и ограниченных в круге функций // Докл. АН СССР. Серия мат. — 1976. — **228**, № 4. — С. 769 – 771.

6. Андриевский В.В., Белый В.И., Дзядык В.К. Конформные инварианты в конструктивной теории функций комплексного переменного. — К: Наук. думка, 1998. — 224 с.

7. Бахтин А.К. Некоторые задачи в теории неналегающих областей // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 6. — С. 723 – 731.

8. Бахтин А.К. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности // Доп. Нац. Акад. наук України. — 2004. — № 8. — С. 7 – 15.

9. Бахтин А.К. Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 3. — С. 298 – 303.

10. Бахтин А.К. Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы в геометрической теории функций комплексного переменного: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.01. — К., 2007. — 294 с.

11. Бахтин А., Бахтина Г., Зелинский Ю. Тополого-алгебраические структуры и методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту мат-ки НАН Укр. — 2008. — 308 с.

12. Бахтин А.К., Денега И.В. Некоторые оценки функционалов для $N$-лучевых систем точек // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2011. — Т.8, №1. — С. 12 – 21.

13. Бахтин А.К. Обобщение некоторых результатов теории однолистных функций на многомерные комплексные пространства // Доп. Нац. Акад. наук України. — 2011. — № 3. — С. 7 – 11.

14. Бахтин А.К., Таргонский А.Л. Обобщенные $(n, d)$-лучевые системы точек и неравенства для неналегающих областей и открытых множеств // Укр. мат. журн. — 2011. — Т.63, № 7. — С. 867 – 879.

15. Бахтин А.К., Денега И.В. Метод разделяющего преобразования в задачах о максимуме произведения степеней внутренних радиусов неналегающих областей // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2012. — **9**, № 2. — С. 32–44.

16. Бахтин А.К., Денега И.В. Об одной проблемме В.Н. Дубинина // Зб. праць Ін-ту мат. України — 2013. — Т.10, №4-5. — С. 396 – 406.

17. Бахтін О.К., Заболотний Я.В. Оцінки добутку внутрішніх радіусів трьох неперетинних областей // Доп. Нац. Акад. наук України. — 2013. — № 10. — С. 7 – 10.

18. Бахтин А.К., Таргонский А.Л. Экстремальный задачи для частично неналегающих областей со свободными полюсами // Доп. Нац. Акад. наук України. — 2013. — № 11. — С. 13–18.

19. Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Денега И.В. Разделяющее преобразование в задачах об экстремальном разбиении комплексной плоскости // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2015. — **12**, №3. — С. 17–23.

20. Бахтин А.К., Вьюн В.Е., Таргонский А.Л. Неравенства для внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2015. — Т. 12, №3. — С. 38 – 46.

21. Бахтин А.К., Заболотный Я.В. Оценки произведения внутренних радиусов неналегающих областей // Український математичний вісник. — 2016. — Т.13, № 2. — С. 148 – 156.

22. Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Денега И.В. Экстремальное разбиение комплексной плоскости с фиксированными полюсами // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — **14**, № 1. — С. 34–38.

23. Бахтин А.К. Оценки внутренних радиусов для взаимно непересекающихся областей // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2017. — Т.14, №1. — С. 25 – 33.

24. Бахтин О.К., Дворак І.Я., Заболотний Я.В. Оцінки добутку внутрішніх радіусів п'яти взаємно неперетинних областей // Укр. мат. журн. — 2017. — **69**, № 2. — С. 261–267.

25. Бахтин А.К., Выговская Л.В., Денега И.В. Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей. // Український математичний вісник. — 2016. — Т. 13, № 1. — С. 68 — 75. (переклад: Bakthin A., Vyhivska L., Denega I. Inequalities for the internal radii of non-overlapping domains. // J. Math. Sci., 2017, V. 220, No. 5, pp. 584 – 590.)

26. Бахтин А.К., Денега И.В., Выговская Л.В. Неравенства для внутренних радиусов симметричных неналегающих областей // Укр. матем. журн. — 2018. — Т. 70, № 9. — С. 1282 – 1288.

27. Бахтин А.К., Денега И.В. Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей // Укр. мат. журн. — 2019. — **71**, № 7. — С. 996–1002. (переклад: Bakhtin A.K., Denega I.V. Inequalities for the inner radii of nonoverlapping domains // Ukr. Math. J., 2019, 71, pp. 1138–1145.)

28. Бахтин А.К., Денега И.В. Экстремальное разбиение комплексной плоскости со свободными полюсами // Український математичний вісник. — 2019. — Т. 16, № 3. — С. 307–328. (переклад: Bakhtin A.K., Denega I.V. Extremal decomposition of the complex plane with free poles // J. Math. Sci., 2020, V. 246, No. 1, pp. 1–17.)

29. Бахтин А.К., Денега И.В. Экстремальное разбиение комплексной плоскости со свободными полюсами II // Український математичний вісник. — 2019. — Т. 16, № 4. — С. 477–495. (переклад: Bakhtin A.K., Denega I.V. Extremal decomposition of the complex plane with free poles II // J. Math. Sci., 2020, V. 246, No. 5, pp. 602–616.)

30. Бахтін О.К., Денега І.В. Оцінки максимума добутків внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються // Укр. мат. журн. — 2020. — Т. 72, № 2. — С. 173–183. (переклад: Bakhtin A.K., Denega I.V. Estimation of the maximum product of inner radii of mutually disjoint domains // Ukr. Math. J., 2020, 72, 191–202.)

31. Бахтина Г.П. Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: спец. 01.01.01 "Теория функций и функциональный анализ". — Киев, 1975. — 11 с.

32. Бахтина Г.П. О экстремизации некоторых функционалов в задаче о неналегающих областях // Укр. мат. журн. — 1975. — **27**, №2. — С. 202–204.

33. Бахтина Г.П. О конформных радиусах симметричных неналегающих областей // Современ. вопр. веществен. и комплексн. анализа, Ин–т матем. АН УССР, Киев, 1984. — С. 21–27.

34. Бахтина Г.П., Бахтин А.К. Разделяющее преобразование и задачи о неналегающих областях // Комплексний аналіз і течії з вільними границями / Збірник праць Ін-ту мат-ки НАН Укр. — Київ: Ін-т матем. НАН України, 2006. — Т.3, № 4. — С. 273 – 281.

35. Бахтина Г.П., Вьюн В.Е., Денега И.В. Задачи об экстремальном разбиении для частично налегающих областей // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2015. — **12**, №3. — С. 31–37.

36. В'юн В.Є. Розділяюче перетворення і квадратичні диференціали в геометричній теорії функцій комплексної змінної: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: спец. 01.01.01 – математичний аналіз. — Київ, 2007. — 20 с.

37. В'юн В.Е., Денега І.В., Таргонський А.Л. Екстремальне розбиття комплексної площини і нерівності для добутків внутрішніх радіусів областей // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2015. — **12**, № 4. — С. 138–143.

38. Выговская Л.В. О проблемме В.Н. Дубинина для симметричных многосвязных областей // Український математичний вісник. — 2017. — Т. 14, № 2. — С. 295 – 302.

39. Голузин Г.М. Метод вариаций в конформном отображении. I, II, III, IV // Мат. сб. — 1946. — **19** (61), № 2. — С. 203 – 236; 1947. — **21** (63),

№ 1. — С. 83 — 117; № 2. — С. 119 – 132; 1951. — **29** (71), № 2. — С. 455 – 468.

40. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1966. — 628 с.

41. Гриншпан А.З. Коэффициентные неравенства для конформных отображений с гомеоморфным продолжением // Сиб. мат. журн. — 1985. — **26**, № 1 — С. 49 – 65.

42. Громова Л.Л., Лебедев Н.А. О неналегающих областях, лежащих в круге. II // Вест. Ленинград. гос. ун-та. — 1973. — № 1. — С. 25 – 36.

43. Гутлянский В.Я. Параметрическое представление однолистных функций // Докл. АН СССР. Серия мат. — 1970. — **194**, № 4. — С. 750 – 753.

44. Гутлянский В.Я., Рязанов В.И. К теории локального поведения квазиконформных отображений // Изв. РАН. — 1995. — **59**, № 3. — С. 31 – 58.

45. Дворак И. Оценки произведений внутренних радиусов для частично неналегающих областей комплексной плоскости // Український математичний вісник. — 2018. — **15**, № 3. — С. 345–357.

46. Дженкинс Дж.А. Однолистные функции и конформные отображения. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 256 с.

47. Денега И.В. Квадратичные дифференциалы и разделяющее преобразование в экстремальных задачах о неналегающих областях // Доп. НАН України. — 2012. — №4. — С. 15 – 19.

48. Денега И.В. Некоторые неравенства для внутренних радиусов частично неналегающих областей // Доп. НАН України. — 2012. — №5. — С. 19 – 22.

49. Денега И.В. Об одной экстремальной задаче о частично неналегающих областях // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2013. — **10**, № 4-5. — С. 442–449.

50. Денега И.В., Заболотний Я.В. Обобщение некоторых результатов о неналегающих областях // Праці ІПММ НАН України. — 2016. — **30**. — С. 43–52.

51. Денега И.В., Заболотный Я.В. Задача о неналегающих полицилиндрических областях с полюсами на границе поликруга // Український математичний вісник. — 2017. — **14**, № 1. — С. 33–41. (переклад: Denega I.V., Zabolotnyi Y.V. Problem of nonoverlapping polycylindrical domains with poles on the boundary of a polydisk // J. Math. Sci., 2017, V. **227**, No. 1, pp. 26–32.)

52. Денега И., Клищук Б. К задаче об экстремальном разбиении комплексной плоскости // Український математичний вісник. — 2017. — **14**, № 4. — С. 472–480. (переклад: Denega I.V., Klishchuk B.A. To the problem of extremal partition of the complex plane // J. Math. Sci. , 2018, V. **234**, No. 1, pp. 14–20.)

53. Денега И.В. Некоторые оценки для экстремального разбиения комплексной плоскости // Праці ІПММ НАН України. — 2018. — **32**. — С. 42–47.

54. Денега І.В. Оцінка добутків внутрішніх радіусів областей з додатковою умовою симетрії // Праці ІПММ НАН України. — 2019. — Т. 33. — С. 83–90.

55. Дубинин В.Н. О произведении внутренних радиусов "частично неналегающих" областей // Вопросы метрической теории отображений и ее применение. — Киев: Наук. думка, 1978. — С. 24 – 31.

56. Дубинин В.Н. Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. — 1988. — **168**. — С. 48 – 66.

57. Дубинин В.Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. — 1994. — **49** (295), № 1. — С. 3 – 76.

58. Дубинин В.Н., Кириллова Д.А. Некоторые применения экстремальных разбиений в геометрической теории функций // Дальневост. мат. журн. — 2010. — Т.10, №2. — С. 130 – 152.

59. Дубинин В.Н., Костюченко Е.В. Экстремальные задачи теории функций, связанные с $n$-кратной симметрией // Зап. науч. семин. ПОМИ. — 2001. — Т. 276. — С. 83 – 111.

60. Дубинин В.Н., Прилепкина Е.Г. Об экстремальном разбиении пространственных областей // Зап. науч. семин. ПОМИ. — 1998. — Т.254. — С. 95 – 107.

61. Емельянов Е.Г. К задачам об экстремальном разбиении // Зап. научн. семин. ЛОМИ. — 1986. — **154.** — С. 76 – 89.

62. Емельянов Е.Г. О связи двух задач об экстремальном разбиении // Зап. научн. семин. ЛОМИ. — 1987. — **160.** — С. 91 – 98.

63. Емельянов Е.Г. К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей // Зап. науч. семин. ПОМИ. — 2002. — Т.286. — С. 103 – 114.

64. Емельянов Е.Г., Кузьмина Г.В. Теоремы об экстремальном разбиении в семействах систем областей различных типов // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 1997. — Т.237. — С. 74 – 104.

65. Заболотний Я.В. Застосування розділяючого перетворення в задачах про неперетинні області // Доп. НАН України. — 2011. — №4. — С. 20 – 23.

66. Заболотний Я.В. Застосування розділяючого перетворення в одній задачі про неперетинні області // Доп. НАН України. — 2011. — №9. — С. 11 – 14.

67. Заболотний Я.В. Про одну екстремальну задачу В.М. Дубініна // Укр. мат. журн. — 2011. — Т. 64, №1. — С. 24 – 31.

68. Заболотний Я.В. Задача про обчислення максимуму добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей на комплексній площині // Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування / Збірник праць Ін-ту матем. НАН України. — К.: Ін-т матем. НАН України, 2013. — Т.10., № 4–5.

69. Заболотний Я.В. Знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей // Доп. Нац. Акад. наук України. — 2016. — № 3. — С. 7 – 13.

70. Заболотний Я.В. Оцінки максимума добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей на $\mathbb{C}$ // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2017. — Т. 14, № 1. — С. 156 – 162.

71. Заболотный Я.В., Выговская Л.В. О произведении внутренних радиусов симметричных многосвязных областей // Український математичний вісник. — 2017. — Т. 14, № 3. — С. 441 – 452.

72. Зелинский Ю.Б. Многозначные отображения в анализе. — К.: Наукова думка, 1993. — 264 с.

73. Зелинский Ю.Б. Выпуклость. Избранные главы // Праці ін-ту мат-ки НАН Укр. — 2012. — 280 с.

74. Келдыш М.В., Седов Л.М. Приложения теории функций комплексного переменного к гидродинамике и аэродинамике // Обзор некоторых работ Московской школы. — Москва, 1964. — 45 с.

75. Кириллова Д.А. О максимуме мебиусова инварианта в задаче с четырьмя неналегающими областями // Дальневост. мат. журн. — 2010. — Т.10, №1. — С. 41 – 49.

76. Ковалев Л.В. К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности // Дальневосточный матем. сборник. — 1996. — **2**. — С. 96 – 98.

77. Ковалев Л.В. О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей // Изв. вузов. Матем. — 2000. — № 6. — С. 82 – 87.

78. Ковалев Л.В. О трех непересекающихся областях // Дальневосточный математический журнал. — 2000. — **1,** № 1. — С. 3 – 7.

79. Колбина Л.И. Некоторые экстремальные задачи в конформном отображении // Доклады Академии Наук СССР, серия мат. — 1952. — **84**, № 5. — С. 865 – 868.

80. Колбина Л.И. Конформное отображение единичного круга на неналегающие области // Вестник Ленингр. ун-та. — 1955. — **5**. — С. 37 – 43.

81. Кузьмина Г.В. Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы. — Л.: Наука, 1980. — 241 с.

82. Кузьмина Г.В. К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей // Зап. научн. семин. ЛОМИ. — 1980. — **100.** — С. 131 – 145.

83. Кузьмина Г.В. К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей в круге // Зап. научн. семин. ЛОМИ. — 1983. — **125.** — С. 99 – 113.

84. Кузьмина Г.В. К задаче об экстремальном разбиении n-связной области // Зап. научн. семин. ЛОМИ. — 1990. — **185.** — С. 96 – 110.

85. Кузьмина Г.В. Методы геометрической теории функций. I, II // Алгебра и анализ. — 1997. — **9**, № 3. — С. 41 — 103; № 5. — С. 1 – 50.

86. Кузьмина Г.В. О связи различных задач об экстремальном разбиении // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 1998. — **254**. — С. 116 – 131.

87. Кузьмина Г.В. Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2001. — **276**. — С. 253 – 275.

88. Кузьмина Г.В. Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы. II, III // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2002. — **286.** — С. 126 — 147; 2004. — **314.** — С. 124 – 141.

89. Кузьмина Г.В. Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2003. — **302**. — С. 52 – 67.

90. Куфарев П.П., Фалес А.Э. Об одной экстремальной задаче для дополнительных областей // Доклады Академии Наук СССР, серия мат. — 1951. — **81**, № 6. — С. 995 – 998.

91. Лаврентьев М.А. К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. — 1934. — **5**. — С. 159 – 245.

92. Лебедев Н.А. Принцип площадей в теории однолистных функций. — М.: Наука, 1975. — 336 с.

93. Лебедев Н.А. К теории конформных преобразований круга на неналегающие области // Доклады Академии Наук СССР, серия мат. — 1955. — **103**, № 4. — С. 553 – 555.

94. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций (в 2-х томах). — М.:«Наука», 1967. — 491 с; М.:«Наука», 1968. — 628 с.

95. Мергелян С.Н. Равномерные приближения функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. — 1952. — **7**, №2(48). — С. 31 – 122.

96. Митюк И.П. Принцип симметризации для многосвязных областей и некоторые его применения // Укр. мат. журн. — 1965. — **17**, №4. — С. 46 – 54.

97. Митюк И.П. Оценка сверху для произведения внутренних радиусов областей и теоремы покрытия // Изв. вузов. Математика. — 1987. — № 8. — С. 39 – 47.

98. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. — М.: Гостехиздат, 1956.

99. Полиа Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. — М.: Физматгиз, 1962.

100. Солынин А.Ю. Модули двухсвязных областей и конформно-инвариантные метрики // Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1991. — **196**. — С. 122 – 131.

101. Солынин А.Ю. Модули и экстремально-метрические проблемы // Алгебра и анализ. — 1999. — **11**, № 1. — С. 3 – 86.

102. Стоилов С. Теория функций комплексного переменного. Том 1. Основные понятия и принципы. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 364 с.

103. Суворов Г.Д. Семейства плоских топологических отображений. — Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1965. — 266 с.

104. Тамразов П.М. Гладкости и полиномиальные приближения. — Киев: Наук. думка, 1975. — 272 с.

105. Тамразов П.М. Метод экстремальной метрики и конформное отображение: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, Ин-т математики АН УССР, 1963.

106. Тамразов П.М. К теории конформных однолистых отображений областей любой связности на области с разрезами // Вопросы мат. физики и теории функций. — Киев: Наук. думка, 1964. — С. 110–117.

107. Тамразов П.М. Некоторые экстремальные задачи теории однолистных конформных отображений // Мат. сб. — 1964. — **67**, №3. — С. 329–337.

108. Тамразов П.М. Однолистные функции и конформно-метрическая теория многосвязных областей: автореф. дис. докт. физ.- мат. наук. — Киев, Ин-т математики АН УССР, 1965.

109. Тамразов П.М. Некоторые экстремальные задачи теории однолистных конформных отображений // Мат. сб. — 1965. — **67** (109), № 3. — С. 329 – 337.

110. Тамразов П.М. Некоторые задачи конформного отображения, порождающие квадратические дифференциалы с пятью разными полюсами // Докл. АН СССР. — 1966. — **169**, № 6. — С. 1279–1280.

111. Тамразов П.М. Некоторые экстремальные задачи конформного отображения двусвязных и многосвязных областей // Докл. АН СССР. — 1966. — **170**, № 3. — С. 530–532.

112. Тамразов П.М. О некоторых экстремальных задачах конформного отображения // Мат. сб. — 1967. — **73**, № 1. — С. 97–125.

113. Тамразов П.М. К общей теореме о коэффициентах // Мат. сб. — 1967. — **72**(114), № 1. — С. 59 – 71.

114. Тамразов П.М. Одна форма метода экстремальной метрики // Укр. мат. журн. — 1967. — № 1. — С. 123–128.

115. Тамразов П.М. К общей теореме о коэффициентах // Мат. сб. — 1967. — **72**, № 1. — С. 59–71.

116. Тамразов П.М. О некоторых экстремальных задачах конформного отображения // Мат. сб. — 1967. — **73**, № 1. — С. 97–125.

117. Тамразов П.М. Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов // Известия АН СССР, серия мат. — 1968. — **32**, № 5. — С. 1033 – 1043.

118. Тамразов П.М. Об изменении модулей при круговой симметризации // Мат. заметки. — 1971. — **10**, № 5. — С. 527–532.

119. Тамразов П.М. Конформно-инвариантные модули и круговая симметрия // Метрические вопросы теории функций и отображений. — Киев: Наук. думка, 1974. — **5**. — С. 127–146.

120. Тамразов П.М. Ёмкости конденсаторов. Метод перемешивания зарядов // Мат. сб. — 1981. — **115**, № 1. — С. 40–73, 159.

121. Тамразов П.М. Модули и экстремальные метрики в скрученных римановых многообразиях // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 10. — С. 1388–1398.

122. Таргонский А.Л. Некоторые экстремальные задачи на лучевых системах // Комплексний аналіз і течії з вільними границями / Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2006. — Т.3, № 4. — С. 465 – 473.

123. Таргонський А.Л. Екстремальні задачі теорії однолистих функцій: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. — К., 2006. — 143 с.

124. Трохимчук Ю.Ю. Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности // Праці ін-ту математики НАН України. — К.: Ін-т матем. НАН України, 2008. — Т.70. — 548 с.

125. Федоров С.И. О максимуме одного конформного инварианта в задаче о неналегающих областях // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1981. — **112**. — С. 172 – 183.

126. Фукс Б.В. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. — М.: Физматгиз, 1962. — 420 с.

127. Хейман В.К. Многолистные функции. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960. — 180 с.

128. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, Ч. I,II. — М.:«Наука», 1976. — 320 с; 1976. — 400 с.

129. Шарко В.В. Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты) // Праці Ін-ту матем. НАН України. — К.: Наукова думка, 1990. — Т.25. — 196 с.

130. Шевчук И.А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. — К.: Наук. думка. — 1992. — 255 с.

131. Шиффер М., Спенсер Д.К. Функционалы на конечных римановых поверхностях. — М.: Изд-во иностр. лит., 1957. — 347 с.

132. Шлык В.А. О теореме единственности для симметризации произвольных конденсаторов // Сиб. мат. журн. — 1982. — **23**, № 2. — С. 165 – 175.

133. Чирка Е.М. Комплексные аналитические множества. — М.:«Наука», 1985. — 272 с.

134. Aharonov D., Kirwan W.E. A method of symmetrization and applications. I, II // Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — **163**, No. 1. — P. 369 — 377; — **169**, No. 7. — P. 279 – 291.

135. Ahlfors L.V. Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen // Acta. Soc. Sci. Fenn. — 1930. — No. 9. — S. 1 – 40.

136. Ahlfors L.V., Berling A. Conformal invariants and functiontheoretic null-sets // Acta. Math. — 1950. — **83**, No. 1 — 2. — P. 101 – 129.

137. Ahlfors L.V. Conformal invariants. Topics in geometric function theory // McGraw-Hill Book Co., New York, 1973. — 160 p.

138. Baernstein A. Integral means, univalent functions and circular symmetrization // Acta. Math. — 1974. — **133**, No. 3 – 4. — P. 138 – 169.

139. Bakhtin A.K., Denega I.V. Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations. — 2012. — **LXII**, No. 2. — P. 83–92.

140. Bakhtin A., Dvorak I., Denega I. Separating transformation and extremal decomposition of the complex plane // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations. — 2016. — **LXVI**, No. 2. — P. 13–20.

141. Bakhtin A., Vyhivska L., Denega I. $N$-radial systems of points and problems for non-overlapping domains // Lobachevskii Journal of mathematics. — 2017. — **38**, No. 2. — P. 229 – 235.

142. Bakhtin A.K. Separating transformation and extremal problems on nonoverlapping simply connected domains // J. Math. Sci. — 2018. — **234**, No. 1. — P. 1 – 13.

143. Bakhtin A.K. Extremal decomposition of the complex plane with restrictions for free poles // J. Math. Sci. — 2018. — **231**, No. 1. — P. 1 – 15.

144. Bakhtin A., Vyhivska L. and Denega I. Inequality for the inner radii of symmetric non-overlapping domains // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź. Recherches sur les déformations. — 2018. — **68**, No. 2. — P. 37–44.

145. Bakhtin A.K., Denega I.V. Sharp estimates of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane // Probl. Anal. Issues Anal. — 2019. — **8(26)**, No. 1. — P. 17–31.

146. Bakhtin A.K., Denega I.V. Weakened problem on extremal decomposition of the complex plane // Matematychni Studii. — 2019. — **51**, No. 1. — P. 35–40.

147. Bakhtin A., Vyhivska L. Estimates of inner radii of symmetric non-overlapping domains // J. Math. Sci. — 2019. — **241**, No. 1. — P. 1 – 18.

148. Barth K.F., Brannan D.A., Hayman W.K. Reseach problem in complex analysis // Bull. London Math. Soc. — 1984. — **16**. — P. 490 – 517.

149. Beck A., Lewin F., Lewin M. On compact one-to-one continuous image of the real line // Colloq. Math. — 1971. — **23**, No. 2. — P. 251 – 256.

150. Bergweiler W. On the number of critical points in parabolic basins // Ergod. Th. Dynam. Sys. — 2002. — P. 655 – 669 .

151. Bieberbach L. Über die koeffizienten derjenigen potenzreihen, welche eine schlichte abbildung des einheitskreises vermitteln // S. B. preuss. Akad. Wiss. — 1916. — **138**. — P. 940 – 955.

152. Bieberbach L. Einführung in die konforme abbildung. — Berlin: Sammlung Göschen, Band 768/786a, 1967. — 184 p.

153. Bing R.H. The monotone mapping problem // Topology of Manifolds (Proc. Inst. Univ. of Georgia, Athens, Ga. 1969), Markham, Chicago. — 1970. — P. 99 – 115.

154. Bombieri E. On the local maximum property of the Koebe function // Invent. math. — 1967. — **4**, No. 1. — P. 26 – 67.

155. Bojarski B., Gutlyanskii V., Martio O., Ryazanov V. Infinitesimal geometry of quasiconformal and bi-lipschitz mappings in the plane. — EMS Tracts in Mathematics. V. 19. — Zurich: EMS Publishing House, 2013. — 205 pp.

156. Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V. On existence and representation of solutions for general degenerate Beltrami equations // Complex Var. Elliptic Equ. — 2014. — **59**, No 1. — P. 67–75.

157. Caratheodory C. Über die Begrenzug einfach zusammenhängender Gebiete // Math. Ann. — 1913. — **73**. — S. 323 – 370.

158. Denega I.V. Generalization of some extremal problems on non-overlapping domains with free poles // Annales universitatis Mariae Curie-Skladovska, Lublin-Polonia. — 2013. — **LXVII**, No. 1. — P. 11–22.

159. Denega I.V., Zabolotnii Ya.V. Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2017. — **62**, No. 11. — P. 1611–1618.

160. Denega I.V., Targonskii A.L. Separating transformation in a problem on extremal decomposition of the complex plane // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — **14**, № 1. — С. 147–155.

161. Denega I. Problem on extremal decomposition of the complex plane // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations. — 2018. — **68**, No. 3. — P. 71–78.

162. Denega I., Zabolotnii Ya. Problem on extremal decomposition of the complex plane // An. St. Univ. Ovidius Constanta. — 2019. — **27**, No. 1. — P. 61–77.

163. Denega I. Estimates of the inner radii of non-overlapping domains // Український математичний вісник. — 2019. — **16**, № 1. — С. 77—87. (переклад: Denega I. Estimates of the inner radii of non-overlapping domains // J. Math. Sci., 2019, V. **242**, No. 6, pp. 787–795.)

164. Denega I.V. Estimate of maximum of the products of inner radii of non-overlapping domains // Probl. Anal. Issues Anal. — 2020. — V. 9(27), No. 1. — P. 60–65.

165. Dubinin V. Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory. Birkhäuser/Springer, Basel, 2014.

166. Duren P., Schiffer M.M. Conformal mappings onto non-overlapping regions // Complex analysis. Basel: Birkhauser Verlag. — 1988. — P. 27 – 39.

167. Duren P. Univalent Functions. — Haidelberg and New York: Springer-Verlag, 1983. — 383 p.

168. Duren P.L., Schiffer M. A variation method for function schlicht in annulus // Arch. Ration. Mech. and Anal. — 1962. — **9**. — P. 260 – 272.

169. Duren P.L., Schiffer M. Conformal mappings onto non-overlapping regions // Complex analysis. — Basel: Birkhauser Verlag, 1988. — P. 27 – 39.

170. Fitzgerald C.H. Quadratic inequalities and coefficient estimates for schlicht functions // Arch. Ration. Mech. and Anal. — 1972. — **46**, No. 5. — P. 356 – 368.

171. Fitzgerald C.H. The Bieberbach conjecture: Retrospective // Notices Amer. Math. Soc. — 1985. — **32**, No. 1. — P. 2 – 6.

172. Grötzsch H. Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung. I, II / H. Grötzsch // Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. — 1928. — **80,** No. 6. — S. 367 — 376, pp. 497–502.

173. Grötzsch H. Über ein Variationsprobleme der konformen Abbildung / H. Grötzsch // Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. — 1930. — **82,** No. 4. — S. 251–263.

174. Golberg A., Salimov R. and Sevost'yanov E. Singularities of discrete open mappings with controlled p-module // J. Anal. Math. — 2015. — **127**. — P. 303 – 328.

175. Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I., Yakubov E. The Beltrami equations and prime ends // J. Math. Sci — 2015. — **210**, No. 1. — P. 22 – 51.

176. Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I. On boundary correspondence under quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. — 1996. — **21**. — P. 167 – 178.

177. Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I., Martio O., Vuorinen M. On the asymptotic behavior of quasiconformal mapping in space // Quasiconformal Mappings and Analysis. — New York: Springer. — 1998. — P. 159 – 180.

178. Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I., Martio O., Vuorinen M. On local injectivity and asymptotic linearity of quasiregular mappings // Studia Math. — 1998. — **128**, No. 3. — P. 243 – 271.

179. Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I., Martio O., Vuorinen M. Infinitesimal geometry of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. — 2000. — **25**, No. 1. — P. 101 – 130.

180. Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I. Geometric and topological theory of functions and mappings. — Kiev: Naukova dumka, 2011. — 425 pp. (in Russian)

181. Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. The Beltrami Equation: A Geometric Approach. — Developments in Mathematics. V. 26. — New York etc.: Springer, 2012. — XIV + 301 pp.

182. Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I. Infinitesimal Geometry of Spatial Mappings. — Kiev: Akademperiodyka, 2013. — 187 pp.

183. Gutlyanskii V., Ryazanov V. On recent advances in boundary value problems in the plane // J. Math. Sci. — 2017. — **221**, No. 5. — P. 638–670.

184. Hayman W.K. Values and growth of functions regular in the unit disk // Lecture notes Math. — 1976. — **599**. — P. 68 – 75.

185. Hayman W.K., Nicholls P.J. On the minimum modulus of functions with given coefficients // Bull. London Math. Soc. — 1973. — **5**. — P. 295 – 301.

186. Jenkins J.A. Some uniqueness results in the theory of symmetrization // Ann. Math. — 1955. – **61**, No. 1. — P. 106 – 115.

187. Jenkins J.A. Some uniqueness results in the theory of symmetrization II // Ibid. —1962. — **75**, No. 2. — P. 223 – 230.

188. Kirwan W.E., Pell R. Extremal properties of a class of slit conformal mappings // Michigan Math. J. — 1978. — **25**. — P. 223 – 232.

189. Koebe P. Über die unformisierung beliebiger analitischen kurven // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. — 1907. — **1**, No. 2. — P. 191 – 210.

190. Koebe P. Abhandlungen zur theorie der konforme abbildung, IV // Acta math. — 1918. — **41**. — P. 305 – 344.

191. Kovtonyuk D.A., Salimov R.R., Sevost'yanov E.A. (ed. Ryazanov V.I.) Toward the Mapping Theory of the Classes of Sobolev and Orlicz-Sobolev. — Kiev: Naukova dumka, 2013. — 304 pp. (in Russian)

192. Kühnau V.R. Über zwei Klassen schlichter konformer Abbildungen // Math. Nachr. — 1971. — B.49. — H. 1 – 6. — P. 173 – 185.

193. Kühnau V.R. Schlichte konforme Abbildungen auf nichtüberlappende Gebiete mit gemeinsamer quasikonformer Fortsetzung // Math. Nachr. — 1978. — B. 86. — P. 175 – 180.

194. Lebedev N.A, Tamrazov P.M. Inverse approximation theorems on closed sets of the complex plane // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1968. — **179**. — P. 1046–1049.

195. Lebedev N.A, Tamrazov P.M. Inverse approximation theorems on regular compacta of the complex plane // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. — 1970. — **34**. — P. 1340–1390.

196. Lewandowski Z., Starkov V. On meromorphic and univalent functions yielding local maxima of two coefficients // Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej Folia Scientiarum Universitatis Technicae Resoviensis. — 1990. — **73**. — P. 9 – 17.

197. Looman H. Uber die Cauchy - Riemanschen Differentialgleichungen // Nachr. Ges. Wiess. Göttingen. — 1923. — S. 97 – 108.

198. Löwner K. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildung des Einheits kreises. 1 // Math. Ann. — 1989. — P. 103 – 121.

199. Martineau A. Indicatrices des fonctions analytiques et invertion de la transformation de Laplace // C.R. Acad. Sci. — 1962. — **255**, No. 22. — P. 2888 – 2890.

200. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Moduli in Modern Mapping Theory. — New York: Springer, 2009. — XII + 377 pp.

201. Michalska M., Prokhorov D., Szynal J. The compositions of hyperbolic triangle mappings // Complex Variables. — 2000. — **43**. — P. 179 – 186.

202. Nehari Z. Some inequalities in the theory of functions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1953. — **75**, No. 2. — P. 256 – 286.

203. Poincare H. Sur les résidus des integrales doubles // C. R. Acad. Sci. — 1886. — **102**. — P. 202 – 204.

204. Pólya G. Sur la symétrisation circulaire // C.R. Acad. Sci., Paris. — 1950. — **230**. — P. 25 – 27.

205. Pommerenke Ch. Relations between the coefficients of a univalent function // Invent. Math — 1967. — **3**, No. 1. — P. 1 – 15.

206. Pommerenke Ch. Univalent functions. — Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. — 1975. — 376 p.

207. Prokhorov D. Methods of optimization in coefficient estimates for bounded univalent functions // Ann. univ. M. Curie–Skłodowska. Sec. A. — 1994. — **48**. — P. 106 – 119.

208. Prokhorov D. Coefficients of functions close to the identity function // Complex Variables. — 1997. — **33**. — P. 255 – 263.

209. Prokhorov D. Radii of neighborhoods for coefficient estimates of functions close to the identity // Comput. Methods and Func. Theory. — 1999. — P. 449 – 459.

210. Prokhorov D., Szynal J. Directional convexity of level lines for functions convex in a given direction // Proc. Amer. Math. Soc. — 2002. — **131**, No. 5. — P. 1453 – 1457.

211. Rabinowitz P.H. A note on topological degree theory for holomorphic maps. — Aarhur univers.: Preprint series, october, 1972/73. — No. 16.

212. Rado T., Reichelderfer P.T. Continuous transformations in analysis. — Berlin: Springer–Verlag, 1955.

213. Reich E., Schiffer M. Estimates for the transfinite diameter of a continuum // Math. Z. — 1964. — **85**. — P. 91 – 106.

214. Riemann B. Theorie der Abelschen Functionen // Borchardt's Journ. für reine und angewandte Math. — 1867. — **54**. — S. 81 – 135.

215. Roberts J.H. Two-to-one transformations // Duke. Math. J. — 1940. — **6**, No. 1. — P. 256 – 262.

216. Rogosinski W.W. Über positive harmonische Sinusentwicklungen // Jber. deutsch. Math. Ver. — 1931. — **40**, No. 2. — P. 33 – 35.

217. Ryazanov V.I. Some questions of convergence and compactness for quasiconformal mappings // Amer. Math. Soc. Transl. — 1986. — **131**, No. 2. — P. 7–19.

218. Schaeffer A.C., Spencer D.C. Coefficient regions for schlicht functions. — New York: Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1950. — **35**. — 311 p.

219. Schiffer M. A method of variation within the family of simple functions // Proc. Lond. Math. Soc. — 1938. — **44**. — P. 432 – 449.

220. Schiffer M. On the coefficients of simple functions // Proc. Lond. Math. Soc. — 1938. — **44**. — P. 450 – 452.

221. Schiffer M. Variation of the Green functions and the theory of $p$-valent functions // Amer. J. Math. — 1943. — **65**, No. 2. — P. 341 – 360.

222. Schaeffer A.C., Spencer D.C. Coefficient regions for schlicht functions. — New York: Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1950. — **35**. — 311 p.

223. Schiffer M. Variation of the Green functions and the theory of $p$-valent functions // Amer. J. Math. — 1943. — **65**, № 2. — P. 341 – 360.

224. Sevost'yanov E.A. On the integral characterization of some generalized quasiregular mappings and the significance of the conditions of divergence of integrals in the geometric theory of functions // Ukrainian Math. J. — 2009. — **61**, No. 10. — P. 1610–1623.

225. Targonskii A. An extremal problem for the nonoverlapping domains // J. Math. Sci. — 2017. — **227**, No. 1. — P. 98–104.

226. Targonskii A.L. About one extremal problem for the projections of points on a unit circle // J. Math. Sci. — 2019. — **241**, No. 1. — P. 90–100.

227. Targonskii A.L., Targonskaya I.I., Vaschenko K. About one extremal problem for open sets and partially non-overlapping domains // J. Math. Sci. — 2020. — **244**, No. 1. — P. 56–64.

228. Teichmüller O. Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung // Deutshe Math. — 1938. — **3**. — S. 621 – 678.

229. Teichmuller O. Collected papers. — Berlin ect.: Springer — 1982.

230. Tsuji M. Potential theory in modern function theory. — Tokyo, 1959. — 590 p.

231. Vasil'ev A. Moduli of families of curves for conformal and quasiconformal mappings. // Lect. notes in math. — 2002. — **1788**. — 211 p.

232. Vyhivska L. V. On the problem of V.N. Dubinin for symmetric multiply connected domains // J. Math. Sci. — 2018. — **229**, No. 1. — P. 108 – 113.

233. Weyl H. Die Idee der Riemanschen Fläche. — Stuttgard: Springer, 1955. — 162 s.

234. Zabolotnii Ya., Dvorak I. Some evaluation of maximum of the product of conformal radii for pairwaise nonoverlapping domains // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2017. — **38**, No. 6. — P. 554–559.

235. Zabolotnyi Y., Denega I. On conformal radii of non-overlapping simply connected domains // International Journal of Advanced Research in Mathematics. — 2018. — **11**. — P. 1–7.

236. Zabolotnii Ya., Denega I. Extremal decomposition of multidimensional complex space for five domains // Український математичний вісник. — 2018. — **15**, No. 3. — С. 431–441. (переклад: Zabolotnii Ya., Denega I. Extremal decomposition of a multidimensional complex space for five domains // J. Math. Sci., 2019, V. **241**, No. 1, pp. 101—108.)

# ДОДАТКИ

Цей додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

**Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:**

1. Бахтин А.К., Денега И.В. Метод разделяющего преобразования в задачах о максимуме произведения степеней внутренних радиусов неналегающих областей // Аналіз і застосування / Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, 2012, Т. 9, № 2, С. 32–44.

2. Denega I.V. Generalization of some extremal problems on non-overlapping domains with free poles // Annales universitatis Mariae Curie-Skladovska, Lublin-Polonia, 2013, V. LXVII, No. 1, P. 11–22.

3. Денега И.В. Об одной экстремальной задаче о частично неналегающих областях // Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування / Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2013, Т.10, № 4-5, С. 442–449.

4. Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Денега И.В. Разделяющее преобразование в задачах об экстремальном разбиении комплексной плоскости // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2015, Т. 12, № 3, С. 17–23.

5. В'юн В.Е., Денега І.В., Таргонський А.Л. Екстремальне розбиття комплексної площини і нерівності для добутків внутрішніх радіусів областей // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2015, Т. 12, № 4, С. 138–143.

6. Bakhtin A., Dvorak I., Denega I. Separating transformation and extremal decomposition of the complex plane // Bulletin de la société des sci-

ences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations, 2016, V. LXVI, No. 2, P. 13–20.

7. Денега И.В., Заболотный Я.В. Обобщение некоторых результатов о неналегающих областях // Праці ІПММ НАН України, 2016, Т. 30, С. 43–52.

8. Denega I.V., Zabolotnii Ya.V. Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane // Complex Variables and Elliptic Equations, 2017, V. 62, No. 11, P. 1611–1618.

9. Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Денега И.В. Экстремальное разбиение комплексной плоскости с фиксированными полюсами // Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 2017, Т. 14, № 1, С. 34–38.

10. Денега И.В., Заболотный Я.В. Задача о неналегающих полицилиндрических областях с полюсами на границе поликруга // Український математичний вісник, 2017, Т. 14, № 1., С. 33–41. (переклад: Denega I.V., Zabolotnyi Y.V. Problem of nonoverlapping polycylindrical domains with poles on the boundary of a polydisk // Journal of Mathematical Sciences, 2017, V. 227, No. 1, P. 26–32.)

11. Денега И., Клищук Б. К задаче об экстремальном разбиении комплексной плоскости // Український математичний вісник, 2017, Т. 14, № 4, С. 472–480. (переклад: Denega I.V., Klishchuk B.A. To the problem of extremal partition of the complex plane // Journal of Mathematical Sciences, 2018, V. 234, No. 1, P. 14–20.)

12. Zabolotnyi Y., Denega I. On conformal radii of non-overlapping simply connected domains // International Journal of Advanced Research in Mathematics, 2018, V. 11, P. 1–7.

13. Bakhtin A., Vyhivska L. and Denega I. Inequality for the inner radii of symmetric non-overlapping domains // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź. Recherches sur les déformations, 2018, V. 68, No. 2, P.

37–44.

14. Денега И.В. Некоторые оценки для экстремального разбиения комплексной плоскости // Праці ІПММ НАН України, 2018, Т. 32, С. 42–47.

15. Denega I. Problem on extremal decomposition of the complex plane // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations, 2018, V. 68, No. 3, P. 71–78.

16. Zabolotnii Ya., Denega I. Extremal decomposition of multidimensional complex space for five domains // Український математичний вісник, 2018, Т. 15, № 3, С. 431–441. (переклад: Zabolotnii Ya., Denega I. Extremal decomposition of a multidimensional complex space for five domains // Journal of Mathematical Sciences, 2019, V. 241, No. 1, P. 101–108.)

17. Bakhtin A.K., Denega I.V. Sharp estimates of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane // Probl. Anal. Issues Anal., 2019, V. 8(26), No. 1, P. 17–31.

18. Denega I., Zabolotnii Ya. Problem on extremal decomposition of the complex plane // An. St. Univ. Ovidius Constanta, 2019, V. 27, No. 1, P. 61–77.

19. Бахтин А.К., Денега И.В. Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей // Укр. мат. журн., 2019, Т. 71, № 7., С. 996–1002. (переклад: Bakhtin A.K., Denega I.V. Inequalities for the inner radii of nonoverlapping domains // Ukr. Math. J., 2019, 71, P. 1138–1145.)

20. Bakhtin A.K., Denega I.V. Weakened problem on extremal decomposition of the complex plane // Matematychni Studii, 2019, V. 51, No. 1, P. 35–40.

21. Denega I. Estimates of the inner radii of non-overlapping domains // Український математичний вісник, 2019, Т. 16, № 1., С. 77–87. (переклад: Denega I. Estimates of the inner radii of non-overlapping domains // Journal

of Mathematical Sciences, 2019, V. 242, No. 6, P. 787–795.)

22. Бахтин А.К., Денега И.В. Экстремальное разбиение комплексной плоскости со свободными полюсами // Український математичний вісник, 2019, Т. 16, № 3, С. 307–328. (переклад: Bakhtin A.K., Denega I.V. Extremal decomposition of the complex plane with free poles // Journal of Mathematical Sciences, 2020, V. 246, No. 1, P. 1–17.)

23. Бахтин А.К., Денега И.В. Экстремальное разбиение комплексной плоскости со свободными полюсами II // Український математичний вісник, 2019, Т. 16, № 4, С. 477–495. (переклад: Bakhtin A.K., Denega I.V. Extremal decomposition of the complex plane with free poles II // Journal of Mathematical Sciences, 2020, V. 246, No. 5, P. 602–616.)

24. Денега І.В. Оцінка добутків внутрішніх радіусів областей з додатковою умовою симетрії // Праці ІПММ НАН України, 2019, Т. 33, С. 83–90.

25. Бахтін О.К., Денега І.В. Оцінки максимума добутків внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються // Укр. мат. журн., 2020, Т. 72, № 2, С. 173–183. (переклад: Bakhtin A.K., Denega I.V. Estimation of the maximum product of inner radii of mutually disjoint domains // Ukr. Math. J., 2020, 72, P. 191–202.)

26. Denega I.V. Estimate of maximum of the products of inner radii of non-overlapping domains // Probl. Anal. Issues Anal., 2020, V. 9(27), No. 1, P. 60–65.

**Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:**

1. Денега І.В. Задачі про екстремальне розбиття комплексної площини // International conference of young mathematicians. June 3–6, 2015, Kyiv, Ukraine. Abstracts. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015. – P. 72.

2. Bakhtin A., Dvorak I., Denega I. Extremal decomposition of the complex plane // X літня школа «Алгебра, Топологія, Аналіз». 3–15 серпня 2015, Одеса, Україна: Тези доповідей. – Київ: Інститут математики НАН України, 2015. – С. 65–66.

3. Vygivska L., Denega I. Sharp estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane // International 11th Summer School «Algebra, Topology, Analysis». August 1–14, 2016, Odessa, Ukraine. Abstracts. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2016. – P. 59–60.

4. Denega I. $N$-radial systems of points and problems for non-overlapping domains // 5th International Conference for Young Scientists On Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky. November 9–11, 2016, Kyiv, Ukraine. – Book of Abstracts. – P. 53–55.

5. Denega I., Zabolotnij Ya. On the problem of extremal decomposition of the complex plane // Ukraine Scientific Conference «Modern Problems Theory of Probability and Mathematical Analysis». February 22–25, 2017, Vorokhta, Ivano-Frankivsk Region, Ukraine. Abstracts. – Івано-Франківськ: ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», 2017. – С. 73–75.

6. Denega I. Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane // International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis». May 31 – June 5, 2017, Odessa, Ukraine. Book of abstracts. – P. 53–54.

7. Denega I., Zabolotnij Ja. On one Dubinin extremal problem // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy. June 7–10, 2017, Kyiv, Ukraine. Abstracts. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2017. – P. 29.

8. Denega I. Problem on extremal decomposition of the complex plane // Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвячена 85-річчю відомого українського математика, педагога та організатора освіти Шкіля Миколи Івановича (13.12.1932–14.11.2015). 13–14 грудня, 2017, Київ, Україна. Тези доповідей. – С. 38–39.

9. Denega I. Problem on non-overlapping polycylindrical domains with poles on the boundary of a polydisk // International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis». May 30 – June 4, 2018, Odessa, Ukraine. Book of abstracts. – P. 14–15.

10. Bakhtin A., Denega I. Problems on extremal decomposition of the complex plane with free poles // International Conference «Harmonic analysis and approximations», VII, dedicated to 90th Anniversary of Alexandr Talalyan. September 16–22, 2018, Tsaghkadzor, Armenia. Abstracts, Yerevan, 2018. – P. 25–26.

11. Denega I. Inequalities for the inner radii of non-overlapping domains // International Conference of Young Mathematicians. June 6–8, 2019, Kyiv, Ukraine. Abstracts. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2019. – P. 98.

12. Denega I. Estimates of the inner radii of non-overlapping domains on the complex plane // International conference «Functional methods in approximation theory, differential equations and numerical mathematics IV», dedicated to the 100th anniversary of V.K. Dzyadyk (1919–1998). June 20–26, 2019, Svityaz' village, Volyn' region, Ukraine. Abstracts. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2019. – P. 16.

13. Denega I. Extremal decomposition of the complex plane with free poles // 12th International ISAAC Congress. 29 July – 2 August 2019, University of Aveiro, Portugal. Volume of Abstracts. – P. 32.

14. Denega I. Estimates of the inner radii of symmetric non-overlapping domains // Bogolyubov Kyiv Conference «Problems of theoretical and mathematical physics». September 24–26, 2019, Kyiv, Ukraine. Program and Abstracts. – P. 100.

15. Denega I. Extremal decomposition problems // International Conference on Mathematical Analysis and Its Applications. December 14–16, 2019, New Delhi, India.

16. Denega I. Estimate of maximum of the products of inner radii of mutually non-overlapping domains // International scientific online conference «Algebraic and geometric methods of analysis». May 26–30, 2020, Odesa, Ukraine. Book of abstracts. – P. 9–10.

17. Bakhtin A.K., Denega I.V. Extremal decomposition of the complex plane with fixed points // International e-Conference on Nonlinear Analysis and its Applications. July 27–29, 2020, Department of Mathematics, Dayanand Science College, Latur, India. Abstract book. – P. 78.

**Відомості про апробацію результатів дисертації**

Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

- Hypercomplex Seminar 2015: (Hyper)Complex and Dynamical Processes, Modelling and Simulations. Mathematical Conference Center at Bedlewo, Poland, July 2–9, 2015;

- Hypercomplex Seminar 2016: (Hyper)Complex and Harmonic Dynamical Modelling vs. Special Ternary or Quaternary Nanostructures and Related Problems (30 years of the direct cooperation agreement Łódź – Paris VI). Mathematical Conference Center at Bedlewo, Poland, June 30 – July 7, 2016;

- 9th Elgersburg School 2017 «Control theory of digitally networked dynamic systems, Optimal control techniques». Elgersburg, Germany, March 26 – April 1, 2017;

– Workshop «Young Women in Geometry». Bonn, Germany, April 3–5, 2017;

– Hypercomplex Seminar 2017: (Hyper)Complex and Harmonic Dynamical Modelling: Topology in Physics of Dynamical Systems and Molecular Nanoengines (30 years of the direct cooperation agreement Łódź [University and Łódź Society of Sciences and Arts] – Kyiv [National Academy of Sciences of Ukraine]). Mathematical Conference Center at Bedlewo, Poland, July 22–29, 2017;

– World Meeting for Women in Mathematics. Rio de Janeiro, Brazil, July 31, 2018;

– International Congress of Mathematicians. Rio de Janeiro, Brazil, August 1–9, 2018;

– Hypercomplex Seminar 2019: (Hyper)Complex Analysis in Differential Equations, Geometry and Physical Applications. Mathematical Conference Center at Bedlewo, Poland, July 7–14, 2019;

– OTHA online workshop 2020 on operator theory and harmonic analysis and their applications. Rostov-on-Don, Russia, August 24–25, 2020;

– Virtual Heidelberg Laureate Forum. Heidelberg, Germany, September 21–25, 2020;

– семінарах відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор С.А. Плакса);

– семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор А.С. Романюк);

– Київському семінарі з функціонального аналізу (керівники: академік НАН України Ю.С. Самойленко, член-кор. НАН України А.Н. Кочубей);

– Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор О.Б. Скасків);

– семінарі «Сучасний аналіз» в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (керівники: доктори фіз.-мат. наук, професори О.О. Курченко, В.М. Радченко, І.О. Шевчук);

– семінарі кафедри математичного аналізу Житомирського державного університету імені Івана Франка (керівники: доктор фіз.-мат. наук А.О. Погоруй, доктор фіз.-мат. наук Є.О. Севостьянов, канд. фіз.-мат. наук, доцент О.Ф. Герус).